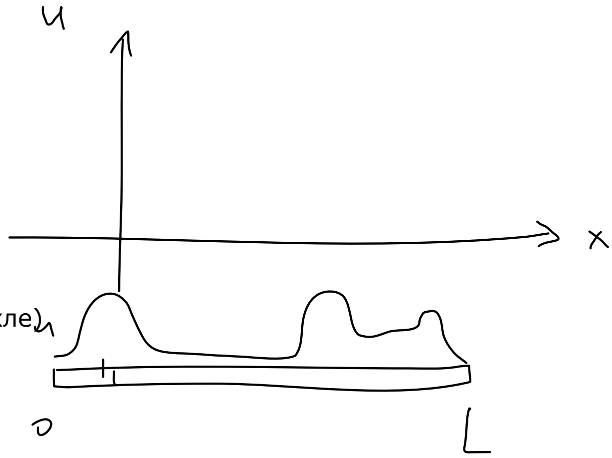
# Метод Фурье

28 September 2023 11:37




Рассмотри уравнение теплопроводности (диффузии):
$\partial_t u(t,x) = D\partial_x^2 u(t,x)$, где $D > 0$ - коэффициент теплопроводности.

1. Уравнение
2. Начальные условия: $u(0,x) = u_0(x)$ - заданная функция
3. Граничные условия: $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$
   Это пример простейших граничных условий (условия Дирихле)
   Другой пример, условия Неймана: $\partial_x u(t,0) = 0, \partial_x u(t,L) = 0$

## Собственный функции оператора второй производной

Рассмотрим оператор второй производной на отрезке $x \in [0,L]$ с нулевыми грачными условиями Дирихле $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$.
$d_x^2 T(x) = z \cdot T(x)$
Будем искать уравнение в следующем виде: $T(x) = Ce^{\lambda x}, C \neq 0$
$d_x^2\left[Ce^{\lambda x}\right] = z \cdot Ce^{\lambda x}$
$C\lambda^2 e^{\lambda x} = z \cdot Ce^{\lambda x}$
$\lambda^2 = z \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{z}$
Таким образом, получаем общее решение задачи на собственные функции:
$T(x) = C_1 e^{\sqrt{z}x} + C_2 e^{-\sqrt{z}x}$
Теперь, нужно сделать так, чтобы это решение удовлетворяло граничным условиям $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$

$\begin{cases} T(0) = C_1 e^{\sqrt{z}0} + C_2 e^{-\sqrt{z}0} = 0 \\ T(L) = C_1 e^{\sqrt{z}L} + C_2 e^{-\sqrt{z}L} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{z}L} + C_2 e^{-\sqrt{z}L} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1\left(e^{\sqrt{z}L} - e^{-\sqrt{z}L}\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{\sqrt{z}L} = e^{-\sqrt{z}L} \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{2\sqrt{z}L} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{2\sqrt{z}L} = e^{2\pi i k} \end{cases}$, где $k$ - целое.

$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ \sqrt{z} = \dfrac{\pi i k}{L} \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ z = -\left(\dfrac{\pi k}{L}\right)^2 \end{cases}$

Значит, собственные функции оператора второй производной на отрезке $x \in [0, L]$ удовлетворяющие нулевым граничным условиям Дирихле есть:
$T(x) = C_1 e^{\frac{\pi i k}{L}x} - C_1 e^{-\frac{\pi i k}{L}x}$
$T(x) = C_1\left(e^{\frac{\pi i k}{L}x} - e^{-\frac{\pi i k}{L}x}\right)$
$T(x) = C_1 \sin\left(\dfrac{\pi k}{L}x\right), \qquad k = 1, 2, \ldots$

## Собственно, метод Фурье

Будем искать решение уравнения теплопроводности (диффузии)
$\partial_t u(t,x) = D\partial_x^2 u(t,x)$
в следующем виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$\partial_t\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right] = D\partial_x^2\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = 0$$

Это уравнение можно решать для каждого $k$ по отдельности:

$$\dot{a}_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) + D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = 0$$

$$\left[\dot{a}_k(t) + D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t)\right]\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = 0$$

$$\dot{a}_k(t) + D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t) = 0$$

$$\dot{a}_k(t) = -D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(t)$$

$a_k(t) = C_k e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}$

Получается, что наше решение имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Осталось найти константы $C_k$. Это можно сделать с помощью начлальных условий: $u(0,x) = u_0(x)$.

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = u_0(x)$$

Определение скалярного произведение в пространстве $L_2[0,L]$:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^L f(x)\cdot g(x)\,dx$$

Таким образом, можно представить начальное условие в виде суммы по базису

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = u_0(x)$$

Скалярно, умножим левую и правую части на $\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle$$

$$C_m \left\langle \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle$$

Таким образом, мы нашли коэффициенты

$$C_k = \frac{\left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle}$$

В итоге, решение уравнения теплопроводности методом Фурье есть

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\right\rangle} \cdot e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

## Ортогональность базиса

Базис:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \ldots$$

Ортогональный базис:

$$\left\langle \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\right\rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx$$

$$= \begin{cases} k \neq m\colon \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L \left[\cos\left(\frac{\pi(k-m)}{L}x\right) - \cos\left(\frac{\pi(k+m)}{L}x\right)\right] dx = 0 \\ k = m\colon \displaystyle\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx = \int_0^L \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^L dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \end{cases}$$