Метод установления

Рассмотрим эволюционную задачу (включает дифференциальное уравнение и однородные граничные условия):

$$d_t u = Au \qquad (1)$$

Если $\operatorname{Re} Spec\, A < 0$, то при любых начальных условиях $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

Вопросы. Если A – оператор второй производной: $A = d_x^2$ при граничных условиях Дирихле, Неймана, периодических, то верно ли это утверждение?

Этот же вопрос для $A = d_x^2 + b$, где b=const.

При сделанном предположении для неоднородного уравнения

$$d_t u = Au - f\left(x\right), \qquad (2)$$

где f – известная функция, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = A^{-1} f$.

Этот факт можно использовать для численного решения уравнения

$$A_h u - f(x) = 0, \tag{3}$$

если вычисление обратного оператора A^{-1} затруднительно. Здесь A_h - разностная аппроксимация оператора A.

Аппроксимируем задачу Коши для (3) по явной схеме Эйлера. При больших временах решение стремится к решению (3).

Этот же подход можно попытаться применить к решению нелинейного уравнения, аппроксимировав эволюционное уравнение

$$d_t u = Au - f(u), \tag{4}$$

где f – известная функция. Существование предела решения (4) больших временах зависит от многих факторов: краевых условий и дифференциального оператора A, от вида нелинейной функции f, от выбора начального условия для (4). У такой нелинейной задачи может существовать несколько предельных решений. Предел может зависеть от выбора начальной функции u при t=0.