Компактные схемы для нелинейных урчп

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для уравнения Эйлера – Хопфа:

$$u_t + uu_x = 0. \tag{1}$$

Будем аппроксимировать (1) на шаблоне 3x2. Сетка из N точек. Для простоты граничные условия периодические.

Сначала построим компактную схему для аппроксимации соотношения

$$u_t = f_x, \tag{2}$$

а потом подставим $f = -u^2/2$. Имеем:

$$\begin{gathered} a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + a_0 u_{j-1}^{n} + b_0 u_j^{n} + c_0 u_{j+1}^{n} = \\ p_1 f_{j-1}^{n+1} + q_1 f_j^{n+1} + r_1 f_{j+1}^{n+1} + p_0 f_{j-1}^{n} + q_0 f_j^{n} + r_0 f_{j+1}^{n}, \end{gathered} \tag{3}$$

где j – номер шага по x, а n – по t. Шаг по пространству h, по времени τ.

В этом соотношении нужно определить 12 коэффициентов. Для их определения нужно 11 пар тестовых функций и условие нормировки. Подставим эти пары в (3):

Таблица пар тестовых функций

№	u	f
1	0	1
2	0	t
3	1	0
4	x	0
5	x^2	0
6	t	x
7	tx	$x^2/2$
8	tx^2	$x^3/3$
9	t^2	$2tx$
10	t^2x	tx^2
11	t^2x^2	$2tx^3/3$

На целочисленной решетке $<k,m>$ стоит выделить те пары, для которых в таблице присутствует $u = t^k x^m$. Получится квадратик 3х3. Такая картинка иногда называется диаграммой Ньютона.

<u>Упражнения.</u> Возможны ли другие способы выбора пар степенных тестовых функций (других диаграмм Ньютона)? Какие в этом случае получаются коэффициенты схемы (4)?

Постройте аналогичную схему, если вместо уравнения (1) нужно аппроксимировать уравнение $u_t + u^2 u_x = 0$ - какая СЛАУ для неизвестных $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$ получится? Постройте аналогичные схемы, если вместо уравнения (2) нужно аппроксимировать $u_t = f_x + sf$, $s = const$, $u_t = Df_{xx}$, $D = const$. Постройте аналогичную схему, если вместо уравнения (1) нужно аппроксимировать уравнение $u_t = Du_{xx} + \varphi(u)$, φ - заданная функция; какая СЛАУ для неизвестных $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$ получится?

Получаем «малую» СЛАУ, которую дополним условием нормировки, например: $a_1 = 1$. Получаем коэффициенты в (3):

$$a_0 = -1, a_1 = 1, b_0 = -4, b_1 = 4, c_0 = -1, c_1 = 1,$$
$$p_0 = p_1 = \frac{-3\kappa}{2}, q_0 = q_1 = 0, r_0 = r_1 = \frac{3\kappa}{2}, \kappa = \tau / h. \quad (4)$$

Если подставить в (3) вместо f нелинейное выражение $-u^2/2$, то получим систему N квадратных уравнений относительно сеточных значений $\left\{u_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$ неизвестной функции.

Это трудная вычислительная задача, которая имеет большое количество решений. Но нам нужно вполне определенное.

Для этого сначала сделаем шаг по дешевой явной схеме. Например, по схеме Эйлера или Эйлера с пересчетом. Получим грубо приближенные сеточные значения $\left\{\tilde{u}_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$.

Подставим в систему (3) следующее представление искомых значений:

$$\left\{u_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N} = \left\{\tilde{u}_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N} + \left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N} \quad (5)$$

и отбросим квадратичные по $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$ слагаемые. Это, по существу, метод Ньютона – Рафсона. Поскольку величины $\left\{u_j^{n}\right\}_{j=1}^{N}$ и $\left\{\tilde{u}_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$ известны, получаем «большую» трехдиагональную СЛАУ порядка N относительно неизвестных величин $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$.

Используем равенства (5). Контролируем малость величин $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^{N}$. Если они недостаточно малы, повторяем линеаризацию, т.е. делаем еще один шаг по методу Ньютона - Рафсона.

Затем делаем следующий шаг схемы (3) по времени.

Диффузия со слабой нелинейностью

Уравнение (и какие-то граничные условия):

$$\partial_t u - D\partial_x^2 u = f(u), \tag{6}$$

где f – известная нелинейная функция.

Сначала строим компактную схему для

$$\partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x). \qquad (7)$$

Выбор пар тестовых функций: $u = t^k x^m,\ k,m \in \mathbb{Z}_+$, а f вычисляем по уравнению (7). Шаблон 3x2 для *u* и *f*. Итого 12 коэффициентов. Нужно 11 пар тестовых функций и одно условие нормировки коэффициентов. Решаем локальную СЛАУ порядка 12. В схеме (3) коэффициенты получатся уже не такие, как для уравнения (2).

Затем вместо *f*(*x*) подставим *f*(u). Система конечно-разностных уравнений (3) делается нелинейной. Сначала делаем шаг по какой-то явной схеме. Например, Эйлера или Эйлера с пересчетом. Получаем приближенное решение $\left\{\tilde{u}_j^{n+1}\right\}_{j=1}^N$. Относительно него линеаризуем нелинейную систему (3) и находим малые поправки $\left\{\varepsilon_j^{n+1}\right\}_{j=1}^N$, а затем и $\left\{u_j^{n+1}\right\}_{j=1}^N$. Важный пример – уравнение ФКПП (Фишер – Колмогоров – Петровский – Пискунов), описывающее распространение доминантного гена.