Неделя 3

21 September 2023 11:35

Уравнение переноса

$\partial_t \rho + u(t,x)\partial_x \rho = 0,$
где функция $u(t,x)$ задана, а функция $\rho \equiv \rho(t,x)$ - неизвестная плотность.

Рассмотрим траектории $x(t)$, на который плотость остается постоянной:
$\rho\big(t, x(t)\big) = Const$

Продифференцируем $\rho\big(t, x(t)\big) = Const$ по времени:
$\partial_t \rho + \partial_x \rho \cdot d_t x = 0$
$$d_t x = -\frac{\partial_t \rho}{\partial_x \rho} = u(t,x)$$
Например, $u(t,x) = c$
$d_t x(t) = c,$
$x(t) = ct + x_0$

Например, $u(t,x) = ax + b$
$d_t x(t) = ax + b$
$$\frac{dx}{ax+b} = dt$$
$$\frac{1}{\mathrm{a}}\log|ax+b| = t + C$$
$ax + b = \pm e^{at+aC}$
$$x(t) = C_1 e^{at} - \frac{b}{a}$$
$x(0) = x_0$
$$x(t) = C_1 - \frac{b}{a} = x_0 \Longrightarrow C_1 = x_0 + \frac{b}{a}$$
$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

Уравнение неразрывности

$\partial_t \rho + u(t,x)\partial_x \rho = -\rho \partial_x u(t,x)$
Характеристики:
$d_t x = u(t,x)$
Плотность вдоль "вот этих самых" характеристик: $\rho\big(t, x(t)\big)$
Продифференцируем плотность вдоль характеристик по времени:
$\partial_t \rho + \partial_x \rho \cdot d_t x = \partial_t \rho + \partial_x \rho \cdot u(t,x)$
А значит:
$d_t \rho = -\rho \partial_x u(t,x)$
$$\frac{d_t \rho}{\rho} = -\partial_x u(t,x)$$
$$\log\left|\frac{\rho}{\rho_0}\right| = -\int_0^t \partial_x u\big(s, x(s)\big)\, ds$$
$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\int_0^t \partial_x u(s, x(s))\, ds}$$