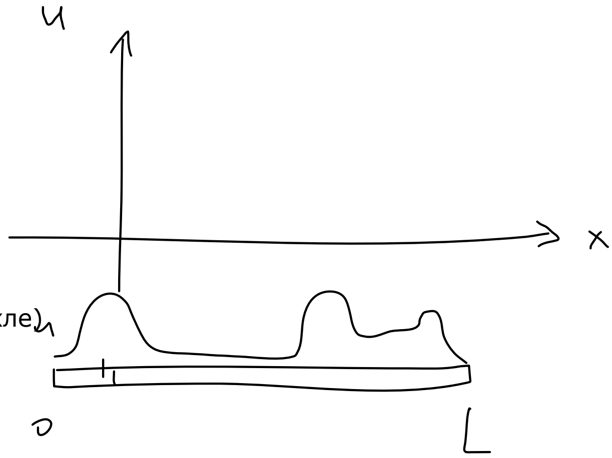
Метод Фурье

28 September 2023 11:37



Рассмотри уравнение теплопроводности (диффузии):
$\partial_t u(t,x) = D\partial_x^2 u(t,x)$, где $D > 0$ - коэффициент теплопроводности.

1. Уравнение
2. Начальные условия: $u(0,x) = u_0(x)$ - заданная функция
3. Граничные условия: $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$
   Это пример простейших граничных условий (условия Дирихле)
   Другой пример, условия Неймана: $\partial_x u(t,0) = 0, \partial_x u(t,L) = 0$

Собственный функции оператора второй производной

Рассмотрим оператор второй производной на отрезке $x \in [0, L]$ с нулевыми грачными условиями Дирихле $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$.
$d_x^2 T(x) = z \cdot T(x)$
Будем искать уравнение в следующем виде: $T(x) = Ce^{\lambda x}, C \neq 0$
$d_x^2\left[Ce^{\lambda x}\right] = z \cdot Ce^{\lambda x}$
$C\lambda^2 e^{\lambda x} = z \cdot Ce^{\lambda x}$
$\lambda^2 = z \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{z}$
Таким образом, получаем общее решение задачи на собственные функции:
$T(x) = C_1 e^{\sqrt{z}x} + C_2 e^{-\sqrt{z}x}$
Теперь, нужно сделать так, чтобы это решение удовлетворяло граничным условиям $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$

$\begin{cases} T(0) = C_1 e^{\sqrt{z}0} + C_2 e^{-\sqrt{z}0} = 0 \\ T(L) = C_1 e^{\sqrt{z}L} + C_2 e^{-\sqrt{z}L} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{z}L} + C_2 e^{-\sqrt{z}L} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1\left(e^{\sqrt{z}L} - e^{-\sqrt{z}L}\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{\sqrt{z}L} = e^{-\sqrt{z}L} \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{2\sqrt{z}L} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ e^{2\sqrt{z}L} = e^{2\pi i k} \end{cases}$, где k - целое.

$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ \sqrt{z} = \dfrac{\pi i k}{L} \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ z = -\left(\dfrac{\pi k}{L}\right)^2 \end{cases}$

Значит, собственные функции оператора второй производной на отрезке $x \in [0, L]$ удовлетворяющие нулевым граничным условиям Дирихле есть:
$T(x) = C_1 e^{\frac{\pi i k}{L}x} - C_1 e^{-\frac{\pi i k}{L}x}$
$T(x) = C_1\left(e^{\frac{\pi i k}{L}x} - e^{-\frac{\pi i k}{L}x}\right)$
$T(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$