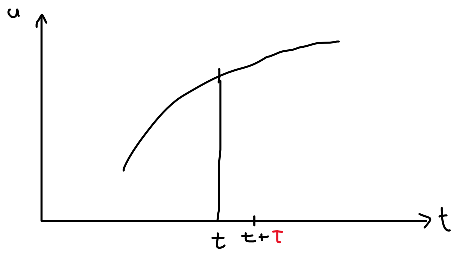
Явная схема Эйлера

12 October 2023 11:14

Уравнение теплопроводности (диффузии) с правой частью
$\partial_t u(t,\ x) - D\partial_x^2 u(t,\ x) = f(t,\ x)$.

Уравнение теплопроводности (диффузии) без правой части
$\partial_t u(t,\ x) - D\partial_x^2 u(t,\ x) = 0$,
С начальным условием
$u(0,\ x) = u_0(x)$
И с граничными условиями Дирихле $u(t,\ 0) = u(t,\ L) = 0$.



Аппроксимация первой производной

По определенению
$\frac{du}{dx} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$

Введем шаг по времени $\tau > 0$ и шаг по пространству $h > 0$.

$$\frac{u(t+\tau,\ x) - u(t,\ x)}{\tau} - D\frac{u(t, x-h) - 2u(t, x) + u(t, x+h)}{h^2} = 0$$

Домножим уравнение на τ и введем безразмерную переменную $\nu = D\tau/h^2$:
$u(t+\tau,\ x) - u(t,\ x) - \nu[u(t, x-h) - 2u(t, x) + u(t, x+h)] = 0$
.

$$\frac{u(t, x-h) - u(t, x) - u(t, x) + u(t, x+h)}{h^2}$$

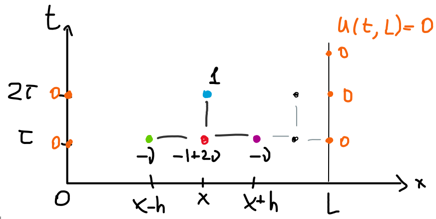
$$\frac{-(u(t, x) - u(t, x-h)) + u(t, x+h) - u(t, x)}{h^2}$$

$$\frac{\frac{u(t,x+h)-u(t,x)}{h} - \frac{u(t,x)-u(t,x-h)}{h}}{h}$$

Пусть у нас есть N точек по пространству (включая граничные).
То есть имеется $N-2$ внутренних точек.

Решение $u(t^*,\ x)$ тогда - это вектор из N элементов в фиксированный момент времени t^*.

Вылишем систему из этих N уравнений (соотношений) в момент времени $t = 0$.



x	Уравнение
0	$u(\tau,\ 0) = 0$
h	$u(\tau,\ h) - u(0,\ h) - \nu[u(0, 0) - 2u(0, h) + u(0, 2h)] = 0$
$2h$	$u(\tau,\ 2h) - u(0,\ 2h) - \nu[u(0, h) - 2u(0, 2h) + u(0, 3h)] = 0$
$L-h$	...
L	$u(\tau,\ L) = 0$

$\underline{u(t+\tau,\ x)} - \underline{u(t,\ x)} - \underline{\nu}[u(t, x-h) \underline{- 2u(t, x)} + \underline{u(t, x+h)}] = 0$

$$\begin{bmatrix} u_0^\tau \\ u_h^\tau \\ u_{2h}^\tau \\ \vdots \\ u_{L-h}^\tau \\ u_L^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nu & 1-2\nu & \nu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1-2\nu & \nu & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \nu & 1-2\nu & \nu \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_h^0 \\ u_{2h}^0 \\ \vdots \\ u_{L-h}^0 \\ u_L^0 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}^\tau + A_{now}\vec{u}^0 = 0$
$\vec{u}^\tau$ - вектор из неизвестных значений функции u в момент времени τ.
Его размер $N \times 1$
Квадратная матрица A_{now} - матрица, составленная из коэффицентов системы в текущий (*now*, известный) момент времени.

$N = 10;\ 100 \to h$
$D = 0.1$
$\nu \leq \frac{1}{2}$
$\to \tau$