Операторы сглаживания (подавление коротких волн или высоких частот)

При решении уравнения Эйлера – Хопфа даже по компактной схеме при приближении к градиентной катастрофе возникает двухшаговая по x пила.

Замечание. Здесь все функции предполагаются периодическими. В противном случае на краях нужно использовать граничные условия на сглаживаемую функцию.

Используем следующий специальный трехшаговый (на каждом этапе) оператор сглаживания, чтобы подавить двухшаговую пилу в решении, минимально исказив длинные волны.

Пусть P – оператор десглаживания (аналогичный второй разностной производной, который действует на сеточную функцию f по формуле: $(Pf)_j = f_j - (f_{j+1} + f_{j-1})/2$. Его символ: $1 - \cos(\omega) = 2\sin^2(\omega/2)$

У оператора $S_1 = E - P/2$ символ $[1+\cos(\omega)]/2$ - он равен 1 при $\omega = 0$ и 0 при $\omega = \pi$, т.е. он подавляет пилу и не трогает очень длинные волны.

Но можно действовать лучше. Положим $S_2 = E - (P/2)^2$, $S_3 = E - (P/2)^3$. Их символы: $1 - \sin^4(\omega/2)$, $1 - \sin^6(\omega/2)$.

Реализация разностного оператора $P/2$: $[(P/2)f]_j = f_j/2 - (f_{j+1} + f_{j-1})/4$

Реализация разностного оператора (здесь операторы T_-, T_+ - сдвиги аргумента функции):

$$(P/2)^2 = [E/2 - (T_-/4 + T_+/4)]^2 = E/4 - T_-/4 - T_+/4 + T_-^{\ 2}/16 + T_-T_+/8 + T_+^{\ 2}/16 =$$
$$= 3E/8 - T_-/4 - T_+/4 + T_-^{\ 2}/16 + T_+^{\ 2}/16.$$

Проверка: на константе этот оператор дает 0.

Аналогично вычисляется оператор $(P/2)^3$.

Коэффициенты оператора

$$S_3 = E - (P/2)^3: \ <1/64, -6/64, \ 15/64, \ 44/64, 15/64, -6/64, 1/64>$$

Лучше трижды применить трехточечный оператор, чем один раз этот семиточечный: в случае краевой задачи не придется вылезать за край отрезка.

Компактные сглаживатели.

Пусть f – исходная функция, g – сглаженная.

Соотношение на трехточечном шаблоне:

$$g(x)+c[g(x-h)+g(x+h)]/2=af(x)+b[f(x-h)+f(x+h)]/2.$$

Символ оператора сглаживания $\sigma(\omega)=\dfrac{1+c\cos(\omega)}{a+b\cos(\omega)}$. Из условия $\sigma(\pi)=0$ следует, что c=1. Затем из условия $\sigma(0)=1$ получаем: $a+b=2 \sim b=2-a$. При этом получаем $\sigma(\pi/2)=1/a$. Чем больше значение а, тем сильнее фильтр. При $a<1$ символ оператора сглаживания имеет нули в знаменателе – соответствующая матрица необратима или плохо обусловлена. При $a=1$ оператор сглаживания – тождественный. Если чуть больше 1, то это деликатный фильтр – в спектральном представлении подавляет только малую окрестность $\omega=\pi$.

Задание. Постройте графики символа при разных значениях параметра a.

Соотношение на пятиточечном шаблоне:

$$g(x)+a[g(x-h)+g(x+h)]/2+b[g(x-2h)+g(x+2h)]/2=$$
$$=cf(x)+d[f(x-h)+f(x+h)]/2+e[f(x-2h)+f(x+2h)]/2 .$$

Из условий $\sigma(0)=1$, $\sigma(\pi)=0$ следуют линейные ограничения на коэффициенты:

$$1+a+b=c+d+e, \quad 1-a+b=0 \Rightarrow a=4/3,\ b=1/3. \qquad (*)$$

Из условий четности и симметрии символа следует, что все производные нечетного порядка в точках $\omega=0, \pi$ обращаются в нуль.

Задание. Докажите, что при выполнении условий (*) вторые производные символа в точках $\omega=0, \pi$ обращаются в нуль, если и только если

$$d+4e=8/3, \quad c+d+e=8/3 \Rightarrow c=3e,\ d=8/3-4e.$$

Постройте графики символов при разных значениях e.