

# Лабораторная работа № 6

**Тема:** Численные методы многомерной условной минимизации.

**Цель работы:** Приобретение практических навыков для решения задач условной минимизации.

## Постановка задачи

Требуется найти минимум функции многих переменных  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , то есть такую точку  $x^* \in U$ , что  $f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$ , где множество точек  $U$  определяется ограничениями вида

$$\begin{aligned} g_j(x) &= 0, & j &= 1, \dots, m, \\ g_j(x) &\leq 0, & j &= m+1, \dots, p. \end{aligned}$$

## Методы условной оптимизации

В данной лабораторной работе изучаются следующие методы решения задач условной оптимизации:

1. метод штрафных функций
2. метод барьерных функций
3. метод проекции градиента

## Задание

1. Составить программу поиска минимума функции в соответствии с методами, указанными в таблице ниже (язык программирования выбрать самостоятельно, все лабораторные работы должны быть выполнены на одном языке).
2. Для решения вспомогательных задач, возникающих при решении исходной задачи условной оптимизации, в данной лабораторной работе необходимо воспользоваться методом градиентного спуска с постоянным шагом.
3. Найти координаты и значение функции в точке минимума заданным методом.
4. Сравнить сходимость методов по числу вычислений функции для двух различных начальных точек и для различных величин, характеризующих точность вычислений.
5. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы по достигнутой точности и количеству вычислений функции. Результаты оформить в виде таблицы:

Начальная точка	Погрешность	Число итераций	Оптимальное решение	Оптимальное значение функции
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

6. По результатам проведённых исследований составить отчёт в формате Microsoft Word и загрузить его в LMS Canvas.

При загрузке работ в Canvas необходимо использовать следующий шаблон для названия файлов:

Лаб.Х Вар.УУ ZZZZZZZZ NNNNNNNNN-V.docx

где Х — номер лабораторной работы,

УУ — номер варианта

ZZZZZZZZ — название группы

NNNNNNNN — фамилия студента

V — номер версии файла

Например: Лаб.1 Вар.1 БИВТ-19-1 Акманов-1.docx

## Содержание отчёта

1. Титульный лист, который должен включать:
  - название учреждения, где выполнена работа;
  - номер лабораторной работы;
  - название лабораторной работы;
  - номер варианта;
  - Ф.И.О. студента, выполнившего работу;
  - изображение подписи рядом с фамилией;
  - номер учебной группы;
  - Ф.И.О. преподавателя;
  - год и место выполнения.
2. Цель работы.
3. Формулировка задачи с указанием номера варианта.
4. Графическое представление функции и области ограничений.
5. Листинги программ в виде текста (скриншоты программного кода вставлять не допускается).
6. Результаты вычислений.
7. Графическое представление траекторий движения к экстремуму, полученных соответствующим методом (выполнение этого пункта не обязательно, даёт дополнительные +2 балла).
8. Выводы.

## Варианты заданий

№	Метод усл. опт.	Оптимизационная задача
1.	3	$\begin{cases} f(x) = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 \rightarrow \max \\ -3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$
2.	3	$\begin{cases} f(x) = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3 \rightarrow \max \\ -x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$
3.	3	$\begin{cases} f(x) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$
4.	3	$\begin{cases} f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 = -6 \end{cases}$
5.	3	$\begin{cases} f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$
6.	3	$\begin{cases} f(x) = x_1^3 + x_2^3 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$
7.	1	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \min \\ x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{cases}$
8.	2	$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1 - 1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
9.	2	$\begin{cases} f(x) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
10.	2	$\begin{cases} f(x) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
11.	3	$\begin{cases} f(x) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$
12.	2	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \rightarrow \min \\ x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{cases}$
13.	2	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad -x_2 + 1 \leq 0 \end{cases}$
14.	2	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 3, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$

№	Метод усл. опт.	Оптимизационная задача
15.	1	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 2x_1)^2 \rightarrow \min \\ x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0 \end{cases}$
16.	3	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2 \rightarrow \min \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$
17.	1	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min \\ 4x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
18.	3	$\begin{cases} f(x) = 5(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 2)^2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$
19.	1	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min \\ x_2 - x_1^2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$
20.	1	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 - 9x_2 + 4 = 0 \end{cases}$
21.	1	$\begin{cases} f(x) = 4x_1 - x_2^2 - 12 \rightarrow \min \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 \geq 34 \end{cases}$
22.	2	$\begin{cases} f(x) = 4x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \end{cases}$
23.	2	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min \\ -3x_1 - 2x_2 + 6 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 7 \leq 0, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4 \leq 0 \end{cases}$
24.	3	$\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 + 9x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$
25.	2	$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 4, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
26.	2	$\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$
27.	3	$\begin{cases} f(x) = -4x_1 - 2x_2 - x_1^2 + 2x_1^4 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$
28.	2	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1^2 - x_2 \leq 0, \quad x_2 \leq 5 \end{cases}$

№	Метод усл. опт.	Оптимизационная задача
29.	1	$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4 \end{cases}$
30.	1	$\begin{cases} f(x) = e^{x_1} + e^{x_2} \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0, \quad x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 5 \end{cases}$
31.	1	$\begin{cases} f(x) = x_1 + x_2^3 \rightarrow \min \\ x_1^2 - x_2 \leq 2, \quad x_2 \geq x_1 - 1 \end{cases}$
32.	2	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 1 \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2 \leq 0, \quad x_1 - 2x_2 \leq 8 \end{cases}$