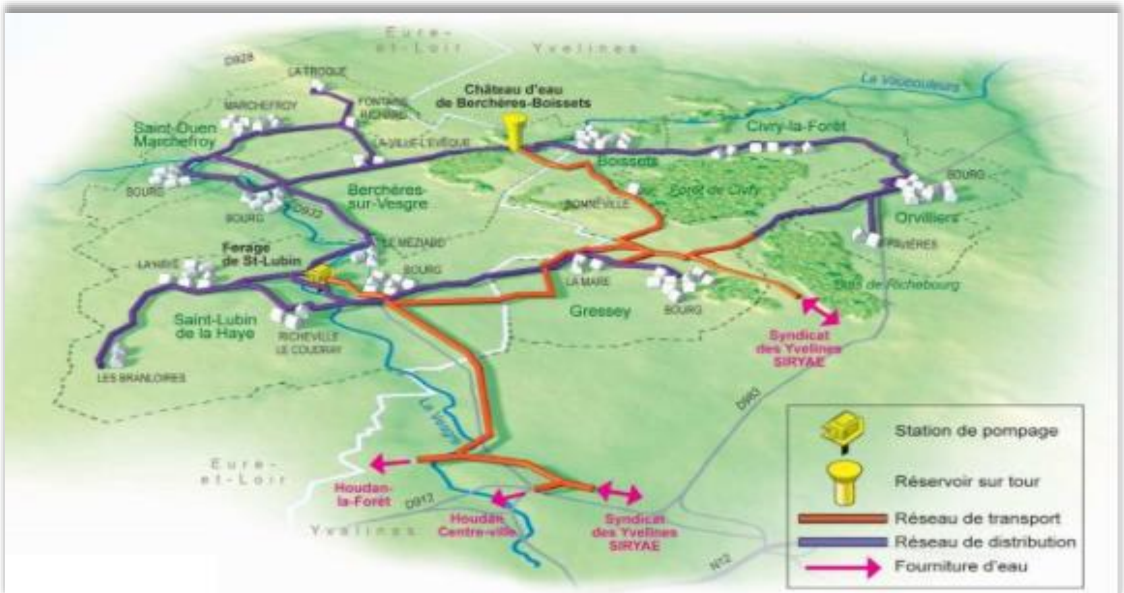
L3 Informatique • Algorithmique avancée

Travaux dirigés 4 Flots

Problème



Comment transférer une quantité maximale de « matière » de Source à target sans dépasser la capacité de chaque arc ?

[Cours 2020-2021 / Prof. Nicolas Loménie]

Réseaux de transport

→ **Les réseaux de transport** qui sont utilisés pour acheminer des marchandises de leur sites de production vers les marchés peuvent être analyses très efficacement en étant vus comme des digraphes munis d'une structure supplémentaire.

→ **Un réseau** $N := N(x, y)$

est un digraphe **D** (le digraphe sous-jacent de N)

avec deux sommets distingues, une source **x** et un puits **y**,
muni d'une fonction a valeurs réelles positives ***c***
définie sur son ensemble d'arcs **A**.

- ❒ Le sommet **x** correspond à un site de production, et le sommet **y** a un marché.
- ❒ Les sommets restants sont appelés sommets intermédiaires, et l'ensemble de ces sommets est note ***I***.
- ❒ La fonction ***c*** est la fonction de capacite de **N** et sa valeur sur un arc a la capacitée de ***a***.

La capacite d'un arc

peut être vue comme représentant le débit auquel un produit peut être transporte à travers lui.

Il est pratique de permettre des capacités infinies aux arcs le long desquels on peut transporter du produit au débit que l'on veut.

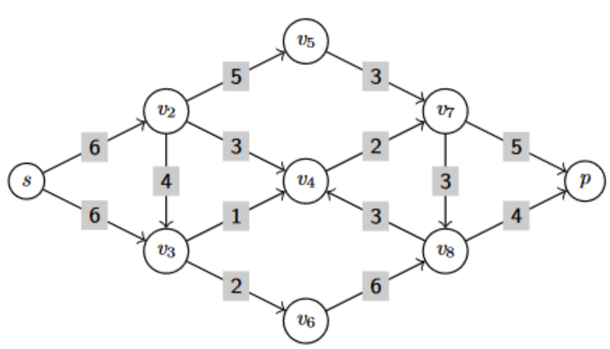
Bien sûr, en pratique, on est susceptible de rencontrer des réseaux de transport avec plusieurs sites de production et plusieurs marches, au lieu d'un seul. Cependant, cette situation plus générale peut se réduire au cas des réseaux ayant une seule source et un seul puits au moyen d'un procède simple.

[Théorie des Graphes • J.A. Bondy et U.S.R. Murty • Traduit de l'anglais par F. Havet]

Dans les graphes

On considère un graphe dirigé G tel que :

1. il existe deux ensembles disjoints S et P de sommets, respectivement appelés sources et puits ;
2. chaque arête e est valué par une capacité $c(e)$ correspondant au flux maximum pouvant transiter par cette arête.



Problème Quel est le flux maximal pouvant aller des sources vers les puits sans perte intermédiaire ?

[Cours Prof. Etienne Birmelé]

Notations • S'avèrera utile pour la suite

Quand on veut travailler sur des flots dans des graphes on va définir une notation $\bar{A}$ **(« A bar »)**. Si je prends un ensemble A de sommets, on va noter $\bar{A}$ l'ensemble de sommets de ce graphe, moins les sommets de l'ensemble $\mathbf{A}$.

Et donc on voit bien que $\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}$ A union $\bar{A}$ donne l'ensemble des sommets de mon graphe.

Pour tout ensemble de sommets $\mathbf{A}$, on note $\bar{\mathbf{A}}$ sont complémentaire.

Donc, j'ai une partition de l'ensemble des sommets de mon graphe en 2, et on va donc noter l'ensemble des arêtes de $\mathbf{A}$ vers $\bar{\mathbf{A}}$ vers. **Ça c'est en fait un premier flot qu'on peut voir.**

Pour tout ensemble $\mathbf{A}$ de sommets, on note $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{V}(\mathbf{G}) \setminus \mathbf{A}$ et $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}})$ l'ensemble des arêtes de $\mathbf{A}$ vers $\bar{\mathbf{A}}$.

Ensuite, on va définir une fonction f qui part des arêtes de mon graphes vers les réelles ($\mathbb{R}$).

Ça veut dire qu'**à chaque arête je vais associer une valeur**, et donc si pour tout fonction f qui définit une valeur dans $\mathbb{R}$ sur les arêtes de mon graphe, je vais noter $f^+(A)$ la somme des valeurs de ses fonctions d'arêtes pour tous les arêtes qui vont de $\mathbf{A}$ vers $\bar{\mathbf{A}}$. Donc cest une espèce de flux entran dans $\bar{\mathbf{A}}$, et on contraire un flux sortant de $\mathbf{A}$ vers $\bar{\mathbf{A}}$,

Et a l'inverse je vais noter $f^-(A)$: la somme des capacités des flux des fonctions associer à chaque une des arêtes allons de $\bar{\mathbf{A}}$ vers $\mathbf{A}$.

Pour toute fonction $\boldsymbol{f} : \mathbf{E(G)} \to \mathbb{R}$,

Si f est une fonction a valeurs réelles définie sur un ensemble A,

on note $$\boldsymbol{f}^{+}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\boldsymbol{e} \in (\boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{A}})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$$

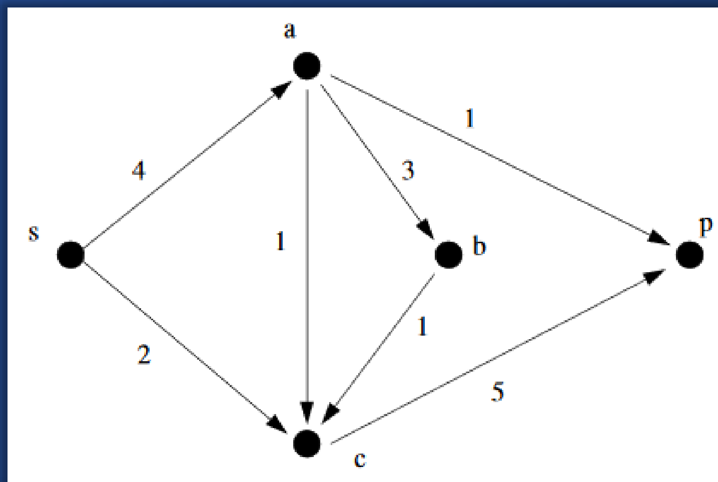
et $$\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\boldsymbol{e} \in (\overline{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{A})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$$

Question 1

Exercice 4.1

Déterminer tous les flots entiers du graphe suivant.

En déduire un flot maximal.



Définition

Un $\boldsymbol{flot\ entier}$ est une fonction $f\ : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

1. Pour tout e, $0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. Pour tout sommet $v \notin S \cup P$, $f^{+}(v) = f^{-}(v)$

Un flot entier c'est une fonction f qui pour chaque arête, je vais lui associer une valeur dans $\mathbb{N}$ (donc dans les entiers).

Tel que :

1. Pour tout e, $0 \leq f(e) \leq c(e)$

Pour tout arête e : la valeur de f en e est inferieur ou egal a la valeur $c(e)$ - la capacité de mon arête, et qu'elle soit toujours positive.

On ne va pas générer des flux négatif, j'envoie toujours des flux positif, mais toujours inferieur à la capaciter maximum de mon arête.

Donc pour la suite du cours, toute nos valeur de flux, seront entières, et ça va simplifier les démonstrations.

Donc,

Un flot entier : **Une fonction qui associe à chaque arete une valeur, entier (positive ou null), et jamais superieur aux capacités.**

2.Pour tout sommet $v \notin S \cup P$, $f^+(v) = f^-(v)$

Pour tous sommet v qui n'est pas ni un sommet de source ni un sommet de puit, le flux sortant est égal au flux entrent.

Donc pour tout sommet v dans notre graphe qui n'est pas puit ou une source, ce qui rentre dans le sommet, doit être égal a ce qui sort du sommet.

Ce qu'on va chercher

→ Un algorithme capable d'extraire un flot entier dans un graphe.
→ On va également essayer de trouver **un flot optimal**, c-à-d, on aurai voulu que $f(e)$ se rapproche de la capaciter de e : $c(e)$,
mais on poura pas toujours le faire pour toutes les arêtes, donc il faudra trouver le meilleure flot, par exemple : pour distribuer le maximum de masques tout en respectant les contraintes de nos routes pour les distribuer.

Valeur d'un flot

Proposition

Pour tout flot f dans G, $f^+(S) - f^-(S) = f^-(P) - f^+(P)$. Cette valeur est notée $val(f)$.

Definition

Un flot f est maximal s'il n'existe pas de flot f' avec $val(f') > val(f)$.

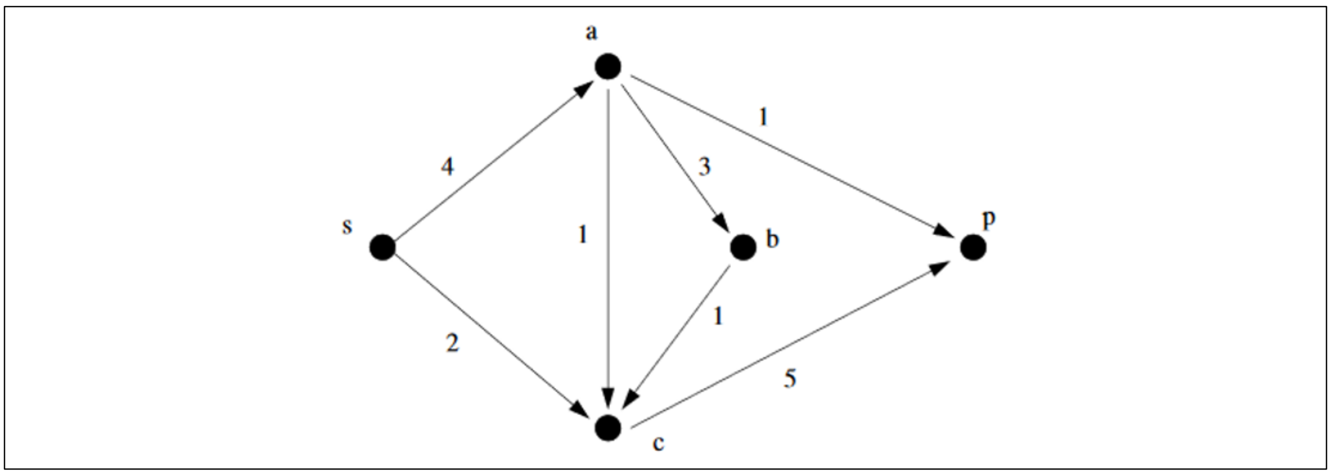
Lorsque on parle de flots dans un graphe, il y d'abord 2 types de sommets qu'on va considérerez :

- Le sommet S : la source.
- Le sommet P : le puit.

Et cette idée de flots ça va être un peu : ce qui sort de la source, doit arriver dans le puit. Là, ce qu'on appelle habituellement le poids de l'arête, là on va le considérer comme la capaciter de l'arête.

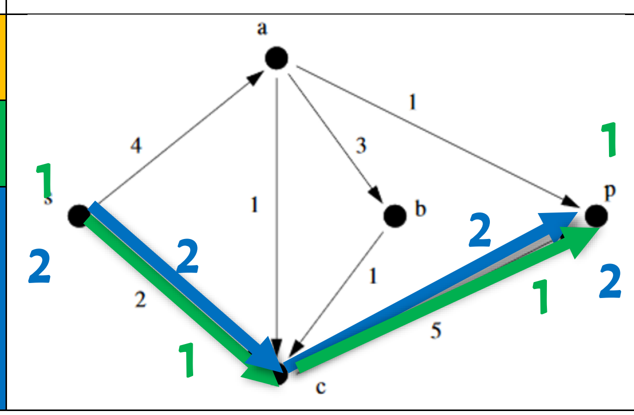
On va faire partir une certain quantité de flots de S, et par exemple l'arête SA, la quantité de flots qui peut passer par SA peut être au maximum 4.

Le flot maximal – la plus grande quantité de flots qui peut partir de S et aussi arriver en P.

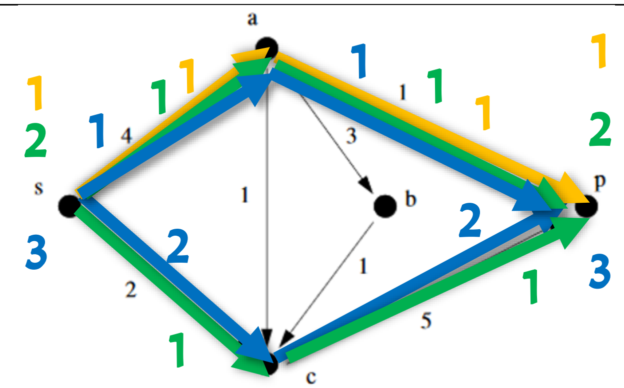


(s,a) = 0

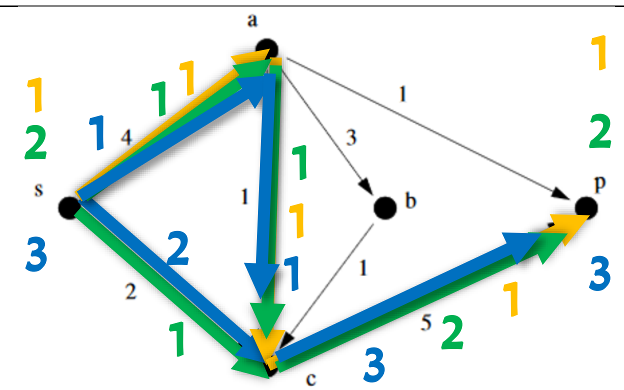
(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)
0	0	0 -> 0	0	0	0	0
0	1	0 -> 0	0	1	0	1
0	2	0 -> 0	0	2	0	2



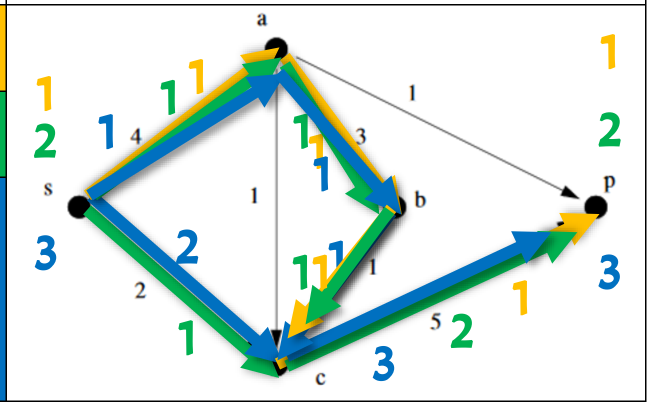
(s,a) = 1

(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)	
1	0	0 -> 0	0	0	1	1	
1	1	0 -> 0	0	1	1	2	
1	2	0 -> 0	0	2	1	3	

•

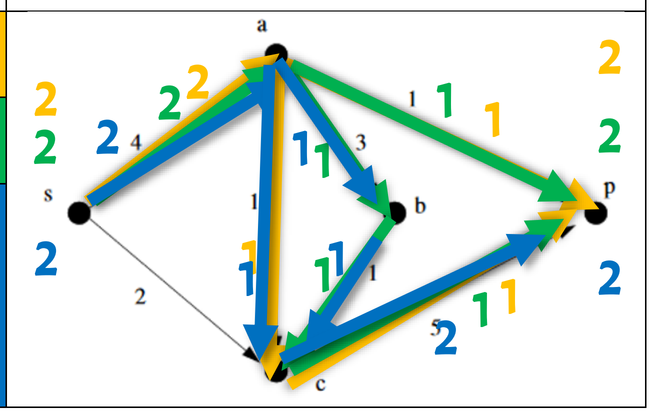
(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)	
1	0	0 -> 0	1	1	0	1	
1	1	0 -> 0	1	2	0	2	
1	2	0 -> 0	1	3	0	3	

(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)
1	0	1 -> 1	0	1	0	1
1	1	1 -> 1	0	2	0	2
1	2	1 -> 1	0	3	0	3

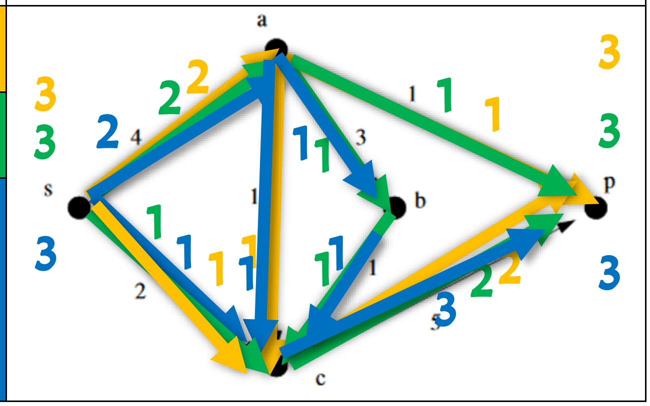


(s,a) = 2

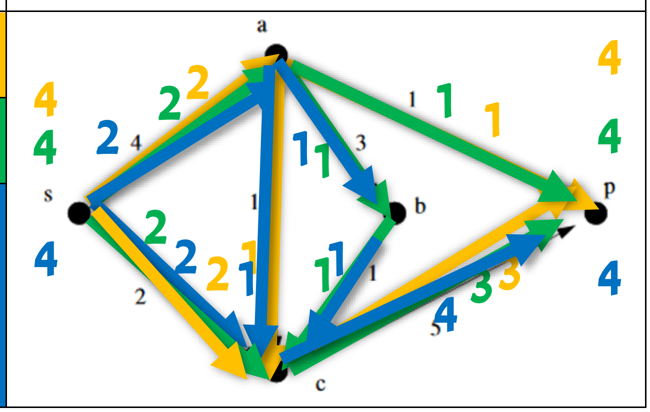
(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)
2	0	0 -> 0	1	1	1	2
2	0	1 -> 1	0	1	1	2
2	0	1 -> 1	1	2	0	2



-

(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)	
2	1	0 -> 0	1	2	1	3	
2	1	1 -> 1	0	2	1	3	
2	1	1 -> 1	1	3	0	3	

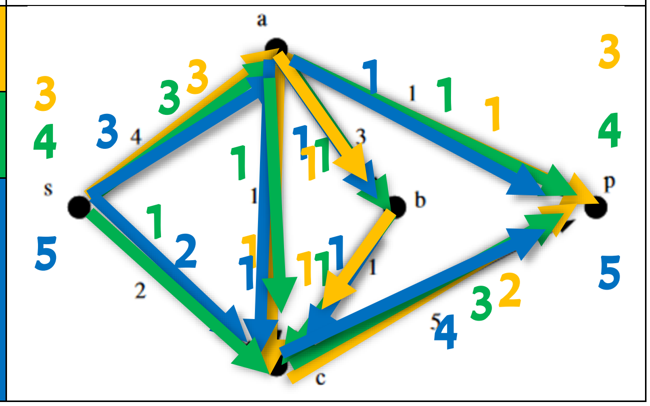
-

(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)	
2	2	0 -> 0	1	3	1	4	
2	2	1 -> 1	0	3	1	4	
2	2	1 -> 1	1	4	0	4	

-

(s,a) = 3

(s,a)	(s,c)	(a,b) -> (b,c)	(a,c)	(c,p)	(a,p)	val(f)
3	0	1 -> 1	1	3	1	3
3	1	1 -> 1	1	3	1	4
3	2	1 -> 1	1	4	1	5



Ici le maximal est de valeur 5.

Question 2

Exercice 4.1

L'énumération de toutes les possibilités semble-t-elle une approche raisonnable pour de grands graphes ?

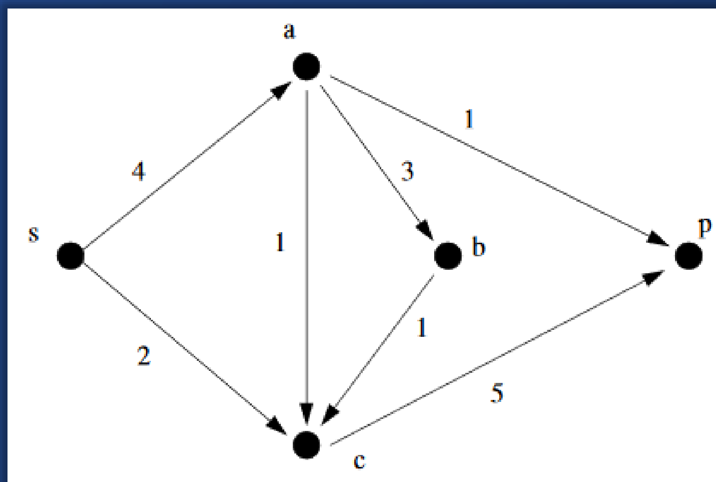
24 flots à énumérer alors que le graphe est très simple et avec des capacités faciles. Ne jamais utiliser cette méthode !

Question 3

Exercice 4.1

Déterminer toutes les coupes

En déduire une coupe minimale



Coupe

Définition

Une coupe est un ensemble d'arêtes (un couple) $\mathbf{K} = (\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}})$

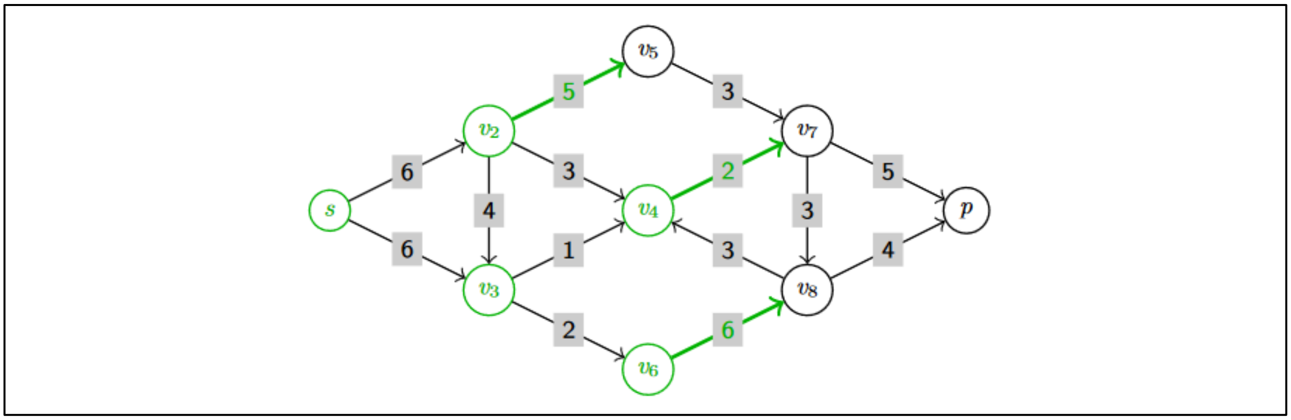
telle que $\mathbf{s} \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{p} \in \bar{\mathbf{A}}$

Capacité d'une coupe

La capacité d'une coupe $\mathbf{K}$ est : $cap(\mathbf{K}) = \sum_{e \in \mathbf{K}} \mathbf{c}(e)$

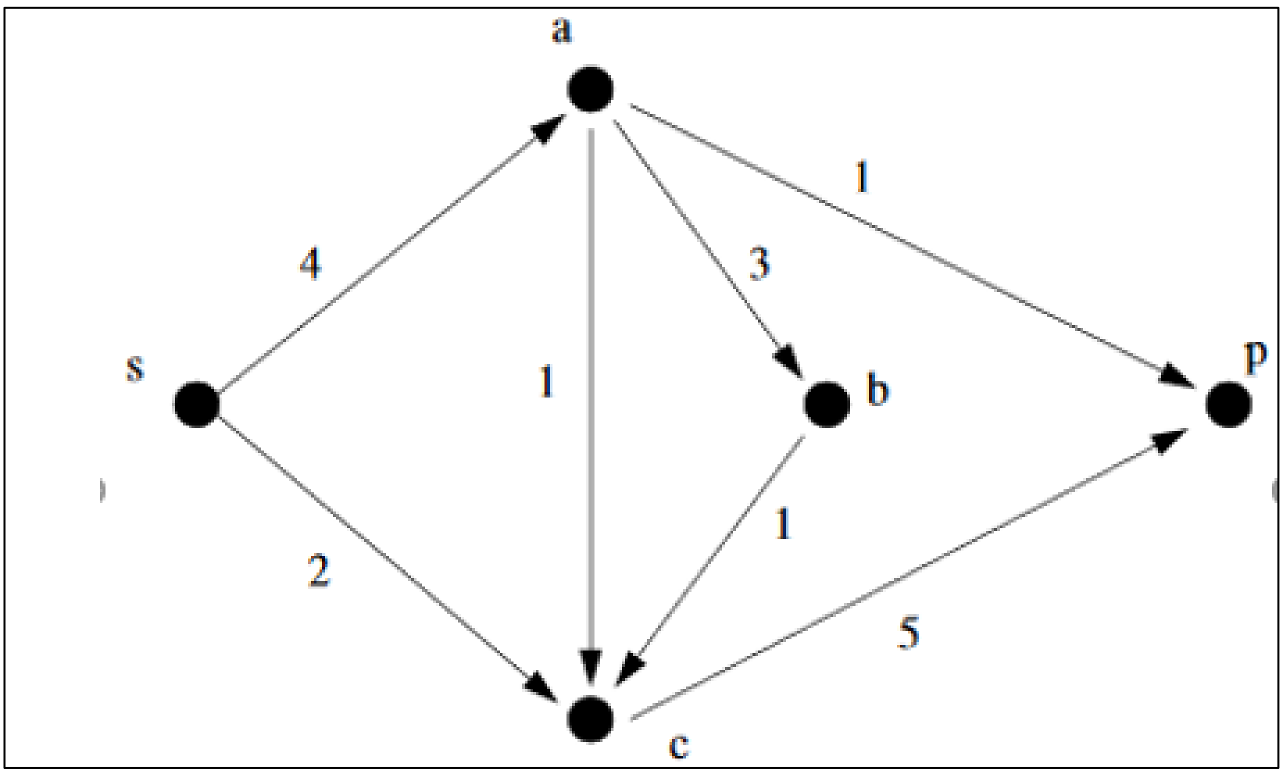
La capacite d'une coupe $cap(\mathbf{K})$ est

la somme des capacites des aretes allant de $\mathbf{A}$ a $\bar{\mathbf{A}}$.

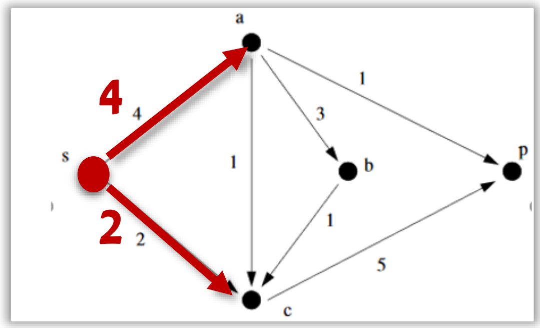
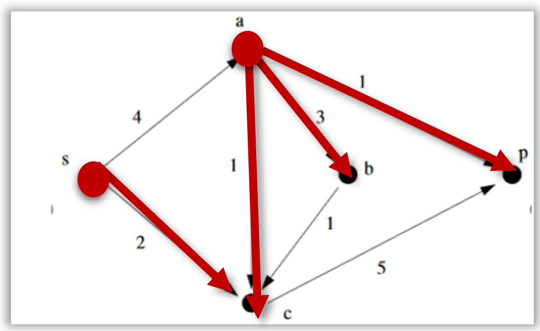
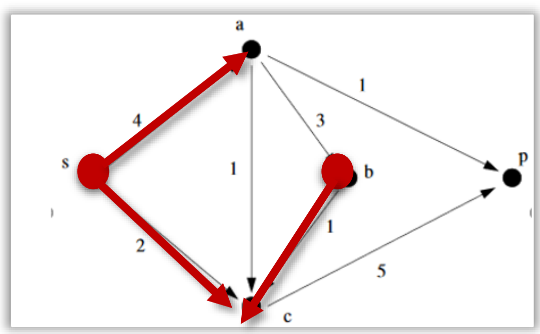
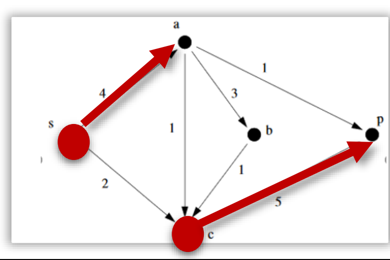


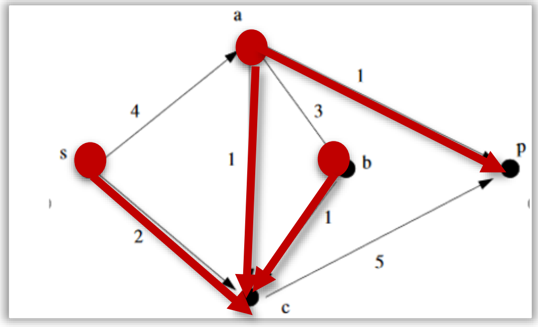
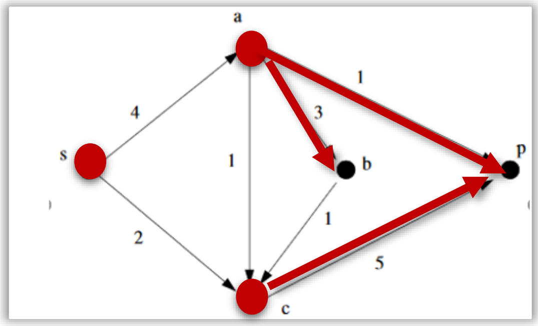
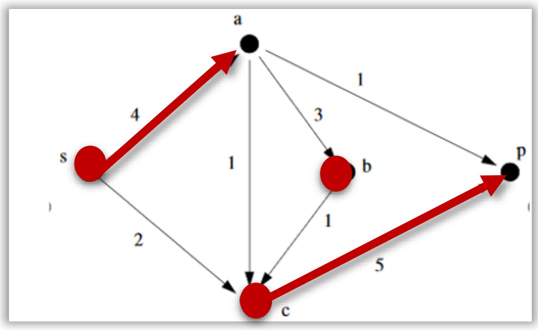
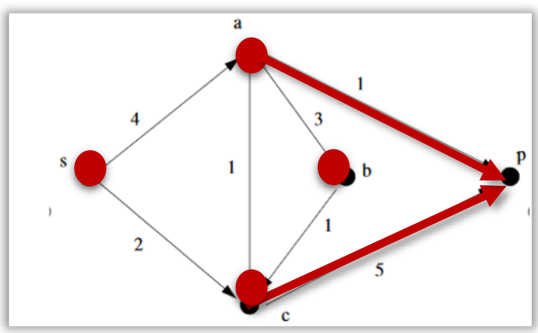
La coupe pour l'ensemble A correspondant aux sommets verts est de capacite **13**.

[Cours Prof. Etienne Birmelé : 2016-2020]



Les sommets : s, a, b, c, p

$\mathbf{A}$ Un ensemble de sommets	$\bar{\mathbf{A}}$ L'ensemble de sommets de ce graphe, moins les sommets de l'ensemble **A**.	$\mathbf{K} = (\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}})$ Une coupe	$\boldsymbol{cap}(\mathbf{K})$ Capacité	
s	**a;b;c;p**	$K(\{s\},\{a;\ b;\ c;\ p\}) = \{(s,a);\ (s,c)\}$	**6**	
s;a	**b;c;p**	$K(\{s;\ a\},\{b;\ c;\ p\}) = \{(s,c);\ (a,p);\ (a,c);\ (a,b)\}$	**7**	
s;b	**a;c;p**	$K(\{s;\ b\},\{a;\ c;\ p\}) = \{(s,a);\ (s,c);\ (b,c)\}$	**7**	
s;c	**a;b;p**	$K(\{s;\ c\},\{a;\ b;\ p\}) = \{(s,a);\ (c,p)\}$	**9**	

s;a;b	c;p	$K(\{s;\ a;\ b\},\{c;\ p\}) = \{(s,c);(a,c);(b,c);(a,p)\}$	5	
s;a;c	b;p	$K(\{s;\ a;\ c\},\{b;\ p\}) = \{(a,b);(a,p);(c,p)\}$	9	
s;b;c	a;p	$K(\{s;\ b;\ c\},\{a;\ p\}) = \{(s,a);(c,p)\}$	9	
s;a;b;c	p	$K(\{s;\ a;\ b;\ c\},\{p\}) = \{(a,p);(c,p)\}$	6	

La coupe minimale est de capacité 5.

Théorème max-flot min-cut

Théorème

Dans tout réseau, le flot maximal a pour valeur la capacité de la coupe minimale.

Les produits des usines u_1 et u_2

doivent être achemines vers les ports p_1, p_2 et p_3.

Le nombre de tonnes pouvant être achemines quotidiennement sont indiqués sur les routes de la figure 4.2.

Exercice 4.2

Question 1

Quelle est le tonnage maximal de produits pouvant être acheminée ?

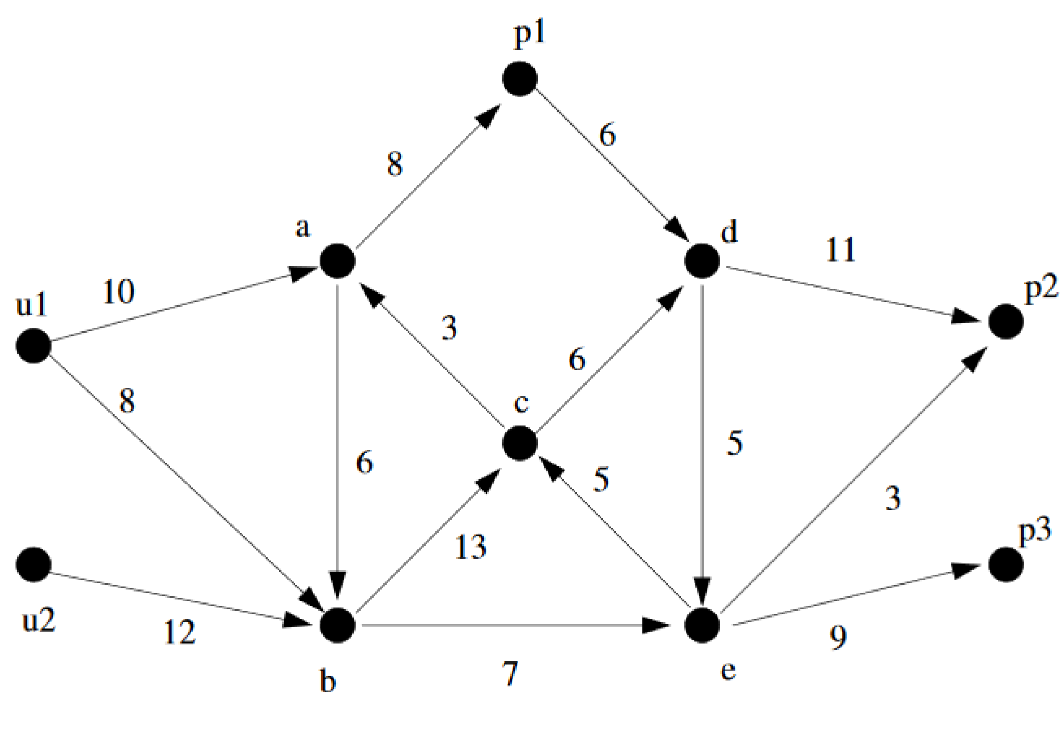


FIGURE 4.2 –

Théorème et algorithme du Max-Flow-Min-Cut

Théorème max-flot min-cut

Le théorème

Dans tout réseau (G, s, c, p),
le flot maximal a pour intensité la capacité de la coupe minimale.

En d'autres termes, il existe toujours f^* et K^*
tels que $\mathrm{val}(f^*) = \mathrm{cap}(K^*)$.

Dans tout réseau, le flot maximal a pour valeur la capacite de la coupe minimale.

Saturation d'un chemin Définition

Soit f un flot et P un chemin entre s et p,
les arêtes pouvant être parcourues dans les deux sens.

On note

- → $e(\mathrm{P})^+$ L'ensemble des arêtes parcourues dans le bon sens par P
- → $e(\mathrm{P})^-$ L'ensembledes arêtes qui sont parcourues à contre-sens par P.

La saturation du chemin P est alors définie par

La saturation de P est :

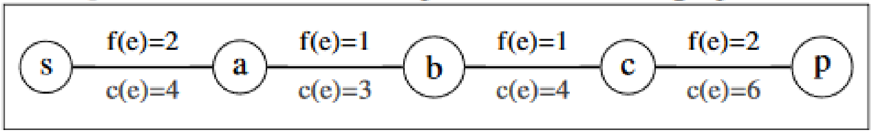
$$sat(P) = \min\left(\min_{e \in e(P)^+} (c(e) - f(e)), \min_{e \in e(P)^-} f(e) \right)$$

Si $sat(P) = 0$, le chemin est dit saturé.

Exemple

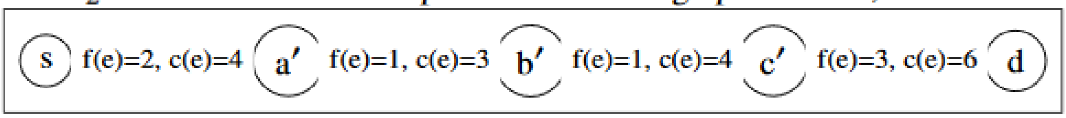
Soit un graphe G parcouru par un flot f.

1. *Soit P_1 un chemin de G défini par le morceau de graphe suivant,*



$\mathrm{sat}(P_1) = 2$

2. *Soit P_2 un chemin de G défini par le morceau de graphe suivant,*



$\mathrm{sat}(P_2) = \min\{() \min\{()4-2; 4-1), \min\{()3; 1)) = 1$

- L'existence d'un chemin non saturé permet d'augmenter la valeur de f. En effet, en ajoutant $sat(P)$ sur les arêtes de $e(P)^+$ et en enlevant $sat(P)$ sur les arêtes de $e(P)^-$, on obtient un nouveau flot dont la valeur a augmenté de $sat(P)$.

Proposition

Un flot f est maximal si et seulement si il n'y a pas de chemin non-saturé entre s et p.

Algorithme du Max-Flow-Min-Cut

Algorithme

La construction d'un flot maximal se fait de la façon suivante

1. **On initialise en prenant un flot connu.**
   Par défaut le flot nul.
2. **Tant que l'on trouve un chemin non-saturé entre s et p**
   (parfois appelé chemin augmentant)

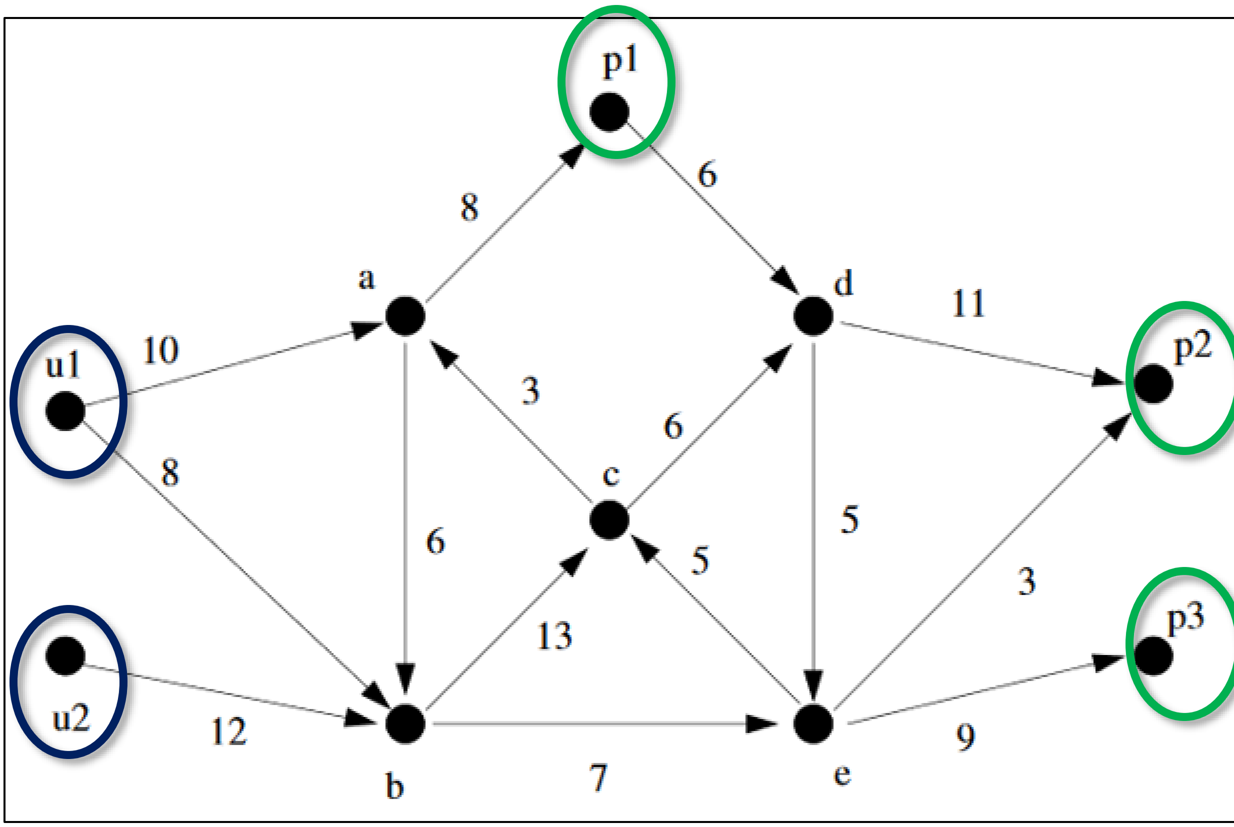
   - On remet le flot a jour.
     En appliquant la procédure suivante :

     i. On utilise une variante de l'arbre de parcours en profondeur enracine en s
     ii. On parcourt une arete dans « le bon sens » uniquement si elle n'est pas saturee (si leur capacité n'est pas atteinte par leur flux)
     iii. On parcourt une arete « à contre sens » uniquement si son flot est non-nul (strictement positif)

     Les arêtes non autorisées sont donc celles dont le flux est soit égal à la capacité, soit nul

     iv. Si p est atteint lors de ce parcours, le chemin P allant de s a p dans l'arbre de parcours est un chemin non-sature.
        → Sinon, un chemin non-saturé entre S et p, n'existe pas.

   - Quand cela n'est plus possible, l'algorithme stoppe.



$\boldsymbol{S = \{u_1, u_2\}}$

$\boldsymbol{P = \{p_1, p_2, p_3\}}$

L'exercice 4.2 est un exemple typique d'utilisation des flots.

On a 2 usines : u_1 et u_2 , donc : les sources,
et 3 puits, càd : les ports.

Pour traiter ce problème, on va essayez de construire un flot maximal.

Construction d'un flot maximal

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.
- tant que l'on trouve un chemin non-saturé entre s et p (parfois appelé chemin augmentant), on remet le flot à jour. Quand cela n'est plus possible, l'algorithme stoppe.

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.

flot : 0

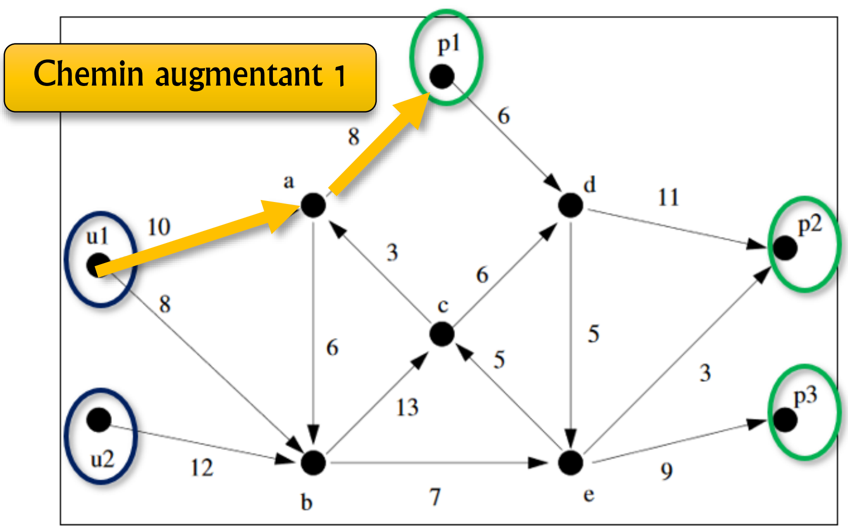
- tant que l'on trouve un chemin non-saturé entre s et p (parfois appelé chemin augmentant)

Ici S est en ensemble de 2 sommets $S = \{u_1, u_2\}$

et P un ensemble de 3 sommets $P = \{p_1, p_2, p_3\}$

On va chercher des chemin augmentant (chemin non-saturé) entre S et P.

Par exemple, un qui est simple est le chemin suivant :



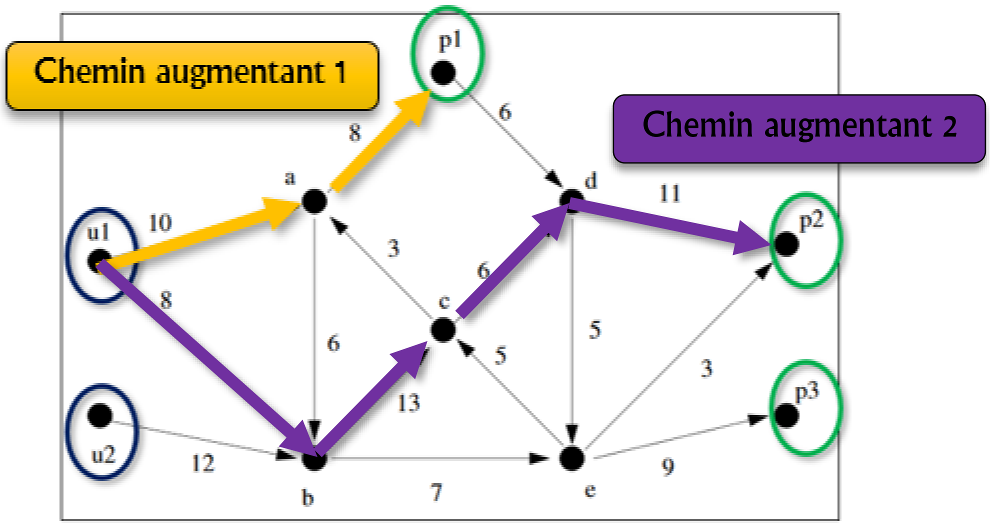
Ce chemin augmentant à une capacité de 8

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.

flot : ~~0~~ 8

On va chercher un 2em chemin augmentant.

On peut partir de u_1 et cette fois on prend un autre chemin :



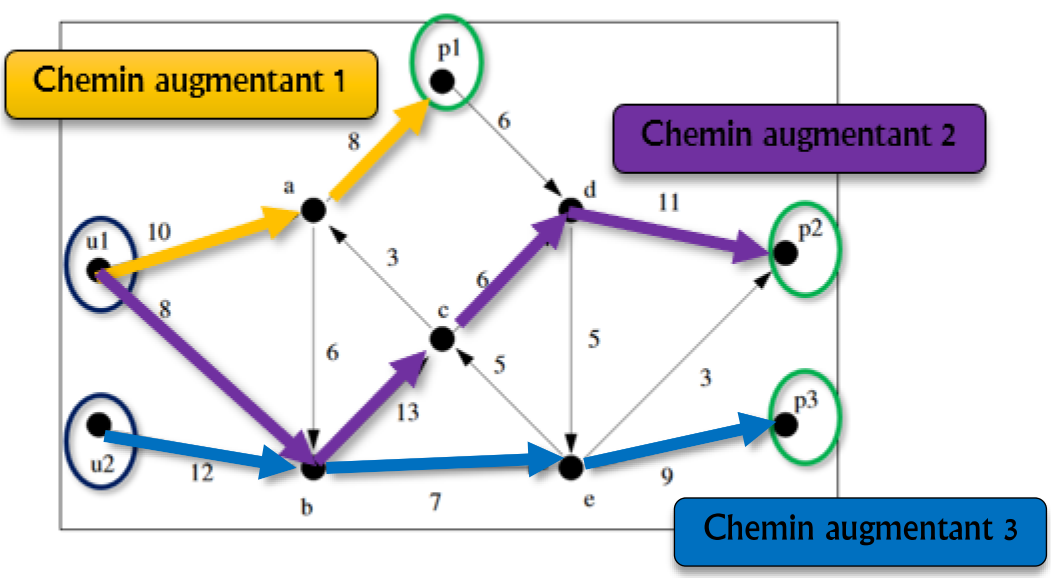
Ce chemin, si on le sature, on prend le minimum des capacités sur le chemin : 6.
Donc, on a un 2em chemin augmentant, qui nous fait ajouter 6 :

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.

flot : ~~0~~ 8 + 6

3em et dernier chemin augmentant :

Cette fois on va partir de u_2 et on va aller vers p_3 .



Ça nous donne un 3em chemin augmentant avec un flot de 7 :

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.

flot : ~~0~~ 8 + 6 + 7

Donc, en total ça nous fait : un tonnage maximal de 21.
On n'arrivera pas à trouver d'autres chemin augmentant (chemin non-saturé) dans ce graphe.

Les produits des usines u_1 et u_2 doivent être achemines vers les ports p_1, p_2 et p_3.

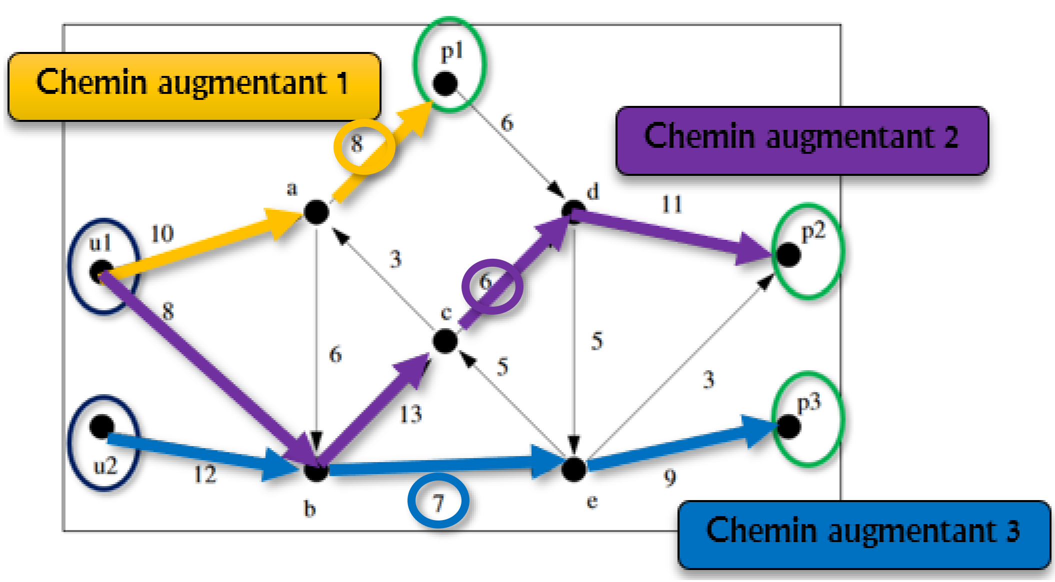
Le nombre de tonnes pouvant être achemines quotidiennement sont indiqués sur les routes de la figure 4.2.

Exercice 4.2

Question 2

Des crédits d'infrastructure sont disponibles. Sur quelles routes faut-il investir pour augmenter la capacité d'acheminement ?

Les arêtes saturé sont :



Ça définie une coupe dans la valeur (8 + 6 + 7) est égal au flot maximal.
Donc si on veut augmenter les capacité d'acheminement (être capable d'acheminer plus de tonnes à partir des usines vers les ports), ce sont en premier les arêtes saturés que va falloir augmenter.

Donc, la réponse à la question 2, ce sont les arêtes :

$$(a, p_1), (c, d), (b, e)$$

On considère un graphe orienté valué par des capacités, ayant un ensemble de sources S et de puits P.

Sigma

A chaque source $s_i \in S$ correspond une capacite d'émission $\sigma(s_i)$ et à chaque puits P correspond une demande de réception $\delta(p_i)$.

Delta

Un flot est dit admissible si,

$$\forall\, s_i \in S, \qquad f^+(s_i) - f^-(s_i) \leq \sigma(s_i)$$
$$\forall\, p_i \in P, \qquad f^-(p_i) - f^+(p_i) \geq \delta(p_i)$$

Exercice 4.3

Question 1

On construit un graphe H obtenu en ajoutant :

- Une source S_0 et, pour tout S_i, l'arête (S_0, S_i) avec une capacité $\sigma(S_i)$;
- Un puits p_0 et, pour tout p_i, l'arête (p_i, p_0) avec une capacité $\delta(p_i)$.

Construire le graphe H correspondant au graphe de la figure 4.2 avec

$\sigma(u_1) = 11$	$\sigma(u_2) = 11$	
$\delta(p_1) = 6$	$\delta(p_2) = 8$	$\delta(p_3) = 7$

Les sources sont un ensemble de sommets.

Une capacité de production par exemple.

On considère un graphe orienté valué par des capacités, ayant un ensemble de sources S et de puits P.

Sigma

A chaque source $s_i \in S$ correspond une capacite d'émission $\sigma(s_i)$

et à chaque puits P correspond une demande de réception $\delta(p_i)$.

Delta

Un flot est dit admissible si,

$$\begin{cases} \forall\, s_i \in S, & f^{+}(s_i) - f^{-}(s_i) \leq \sigma(s_i) \\ \forall\, p_i \in P, & f^{-}(p_i) - f^{+}(p_i) \geq \delta(p_i) \end{cases}$$

Définition de l'admissibilité d'un flot.

Par exemple :
une capacité, combine de marchandises je vais demander pour les puits.

Pour toutes les sources :
le flot sortant du nœud Si moins le flot entrant est inférieur ou égal a la capacité d'émission.

Ça veut dire que pour ce nœud on émettre moins ou autant que la capacité d'émission.

Et inversement :

Pour l'ensemble des sommets du puits,

On va dire qu'il est admissible,
si le flux sortant moins le flux entrant est supérieur ou égal à la demande de réception,
c.-à-d.,
On veut recevoir au moins autant de ce qu'on demande.

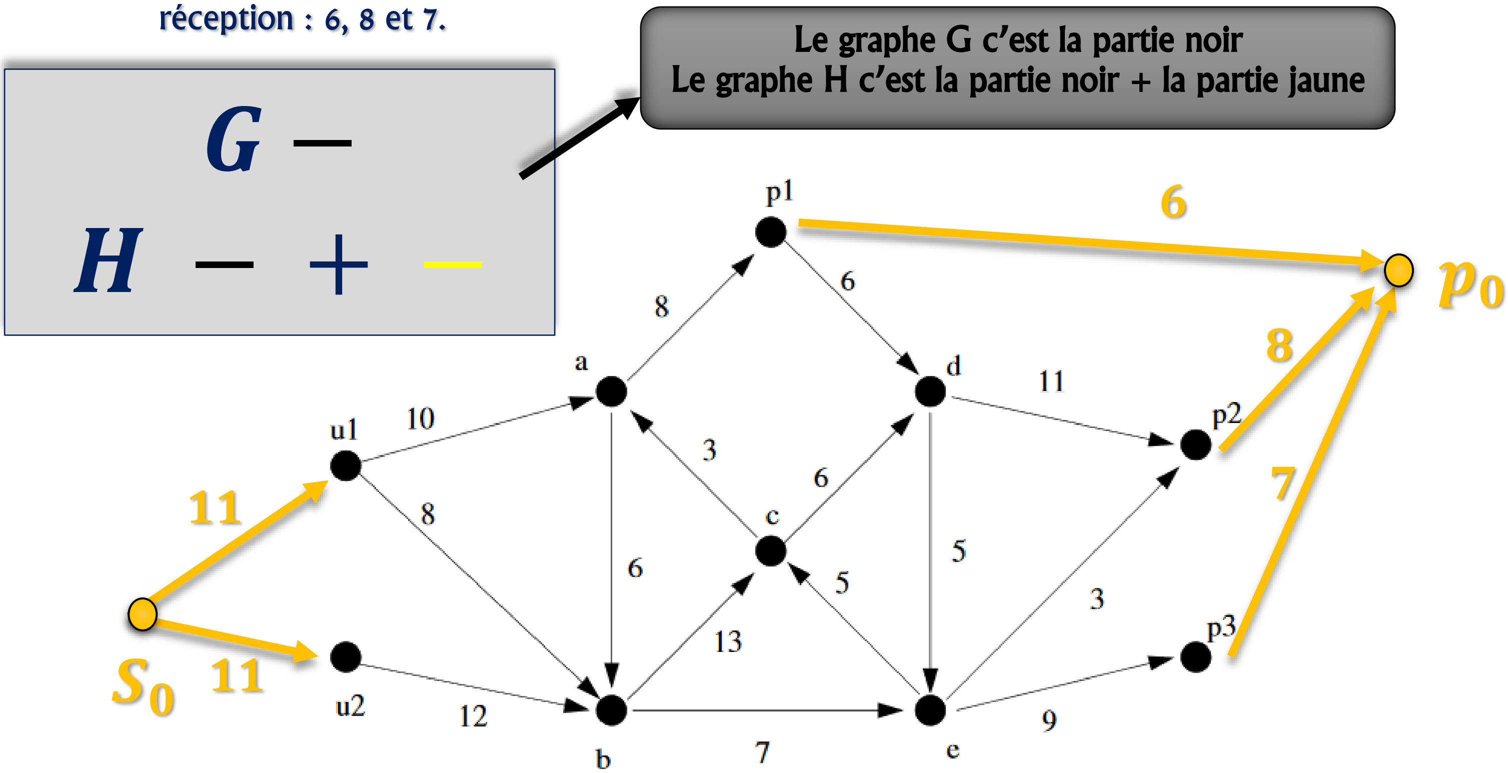
On construit un graphe H obtenu en ajoutant :

- Une source S_0 et, pour tout S_i, l'arête (S_0, S_i) avec une capacité $\sigma(S_i)$;
- Un puits p_0 et, pour tout p_i, l'arête (p_i, p_0) avec une capacité $\delta(p_i)$.

Voilà le graphe qu'on va construire pour la question 1 :

On ajoute 2 arêtes, une pour chaque source, qui relie a S0,
(S0, u1) ; (S0, u2), avec les capacités d'émission pour ces sources.

Pour les puits, on rajoute une arête entre chaque puit et P0 avec les demande de réception : 6, 8 et 7.



Donc, ça veut dire concrètement que ici un flot sera dit admissible, si U1 ne produit pas (= n'envoie pas) plus de 11 (11 tonnes par exemple), et U2 n'envoie pas plus de 11 tonnes, parce que les capacités d'émission des deux, sont de 11. Donc, par exemple pour U1 je pourrais envoyer 10 tonnes. Par exemple, à partir de U1 je peux envoyer 10 tonnes à travers l'arête (u1 ; a) et 8 tonnes à travers l'arête (u1 ; b) mais ce flot ne sera pas dit admissible puisque que U1 à envoyer plus que 11 tonnes (On a envoyé 18).

Pareil pour U2 : en théorie je pourrai envoyer jusqu' a 12, mais on va dire que ce n'est pas admissible parce que ça capacite d'émission est de 11.

De manière similaire pour les puits, les puits il on une demande, donc pour P1 on nous a dit que la demande est 6. Donc il faudra que pour P1 on recevra au moins 6 tonnes de marchandises.

On considère un graphe orienté valué par des capacités, ayant un ensemble de sources S et de puits P.

Sigma

A chaque source $s_i \in S$ correspond une capacite d'émission $\sigma(s_i)$ et à chaque puits P correspond une demande de réception $\delta(p_i)$.

Delta

Un flot est dit admissible si,

$$\forall\, s_i \in S, \qquad f^+(s_i) - f^-(s_i) \leq \sigma(s_i)$$
$$\forall\, p_i \in P, \qquad f^-(p_i) - f^+(p_i) \geq \delta(p_i)$$

Exercice 4.3

Question 2

Montrer qu'un flot admissible existe dans G si et seulement si il existe un flot dans H qui sature toutes les arêtes de la forme (p_i, p_0).

Montrer qu'un flot admissible existe dans G
si et seulement si il existe un flot dans H
qui sature toutes les arêtes de la forme $(pi, p0)$.

On va appeler ça « La propriété 1 »

Propriété 1

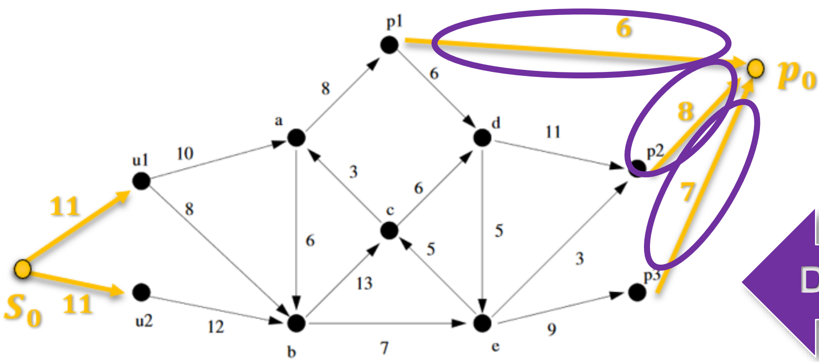
∃ flot admissible dans G

Si et seulement si
une équivalence

$\Longleftrightarrow$

Propriété 2

∃ flot dans H qui sature toutes (p_i, p_0)



Dans le graphe H :

Comme c'est une équivalence, il faut montrer les 2 applications (les 2 cotes).

$\boxed{\Rightarrow}$ Hypothèse : ∃ flot admissible dans G

Un flot admissible dans G c'est un flot ou toutes les sources on : flot sortant moins le flot entrant qui est inferieur ou égal à la capacite d'émission, et que tous les puits reçoives au moins leur demande (donc il on un flot entrent moins un flot sortant qui est au moins égal à leur demande).

Donc, si il existe un flot admissible dans G (ce qui est notre hypothèse), ça veut dire que tous les puits on un flot entrant moins un flot sortant qui est supérieur ou égal a leur demande.

∃ flot admissible dans G $\Leftrightarrow \forall\, p_i, \quad f^-(p_i) - f^+(p_i) \geq \delta(p_i)$

(cela apparait dans la définition de l'admissibilité).

$f^-(p_i) - f^+(p_i) \geq \delta(p_i)$

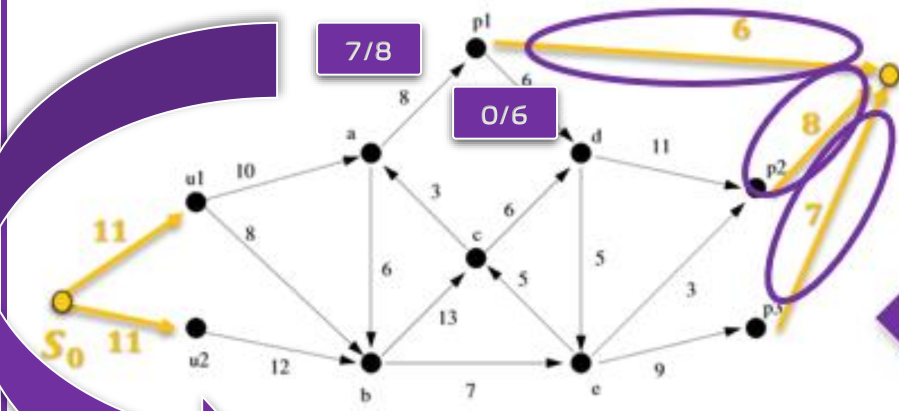
Peut-être soit égal, soit strictement supérieur.

Si $\boxed{>}$ (Si c'est strictement supérieur) On peut enlever du flot pour que ça devienne $\boxed{>}$ (égal) , et donc sature.

Si on enlève du flot, les sources émette toujours moins que la capacité d'émission.

Exemple

Dans le graphe H :



Donc jais un flot entrant de 7 et un flot sortant de 0

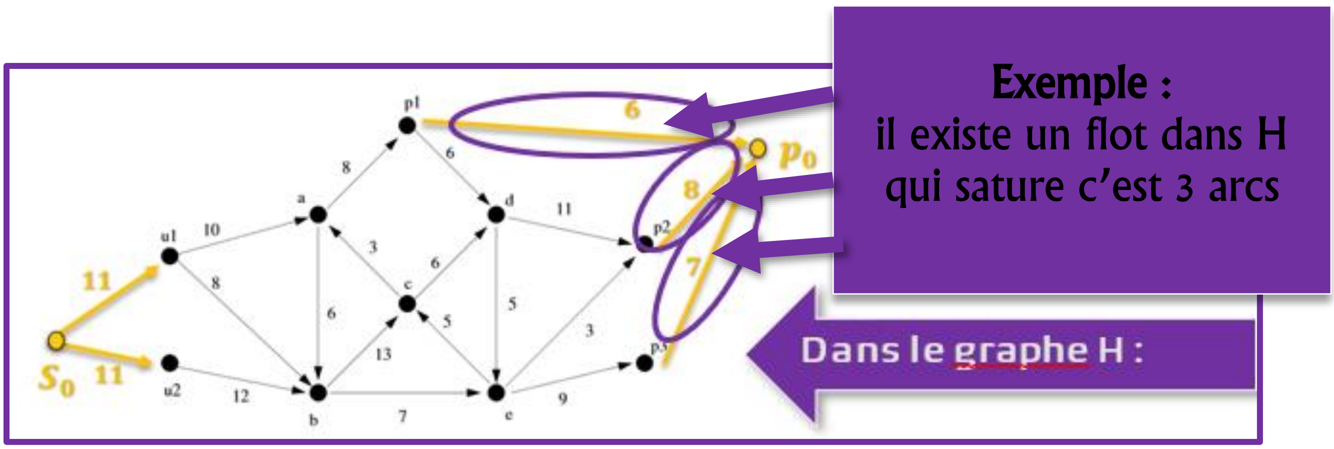
c'est supérieur à 6

donc je peux réduire le 7 a 6 .

dans ce cas-là, je peut enlever du flot sans problème,
et du coup cette arc est saturer.

Comme on a enlevé du flot, au pire ce qui va se passer, c'est que les sources vont moins émettre (U1 va produire moins de ce qu'il a produit avant, et comme c'est un flot admissible,
u1 de toute façon produisez moins que sa capaciter de production (capacite démission), donc si on enlève du flot c'est toujours plus petit que la capacite d'émission.

$\Leftarrow$ Hypothèse : $\exists$ flot dans H qui sature toutes (p_i, p_0)



La valeur du flot sur une arête (s_0, s_i) est bornée par $\sigma(S_i)$
(la capacite d'émission)

Donc, S_i (toutes les sources) émettent bien moins que $\boldsymbol{\sigma(s_i)}$
(la capacite d'émission)

Les p : reçoivent exactement $\delta(p_i)$
(les puits reçoivent exactement leur demande)
Donc : **admissible** : $f^-(p_i) - f^+(p_i) = \delta(p_i)$

On considère un graphe orienté valué par des capacités, ayant un ensemble de sources S et de puits P.

Sigma

A chaque source $s_i \in S$ correspond une capacite d'émission $\boldsymbol{\sigma(s_i)}$
et à chaque puits P correspond une demande de réception $\boldsymbol{\delta(p_i)}$.

Delta

Un flot est dit **admissible** si,

$$\forall\, \boldsymbol{s_i} \in \boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{f^+(s_i) - f^-(s_i) \le \sigma(s_i)}$$
$$\forall\, \boldsymbol{p_i} \in \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{f^-(p_i) - f^+(p_i) \ge \delta(p_i)}$$

Exercice 4.3

Question 3

Montrer qu'un tel flot est forcément maximal dans **H**.

Définissent une coupe de **H** .

$\mathbf{A} = \{\text{tous les sommets de H sauf } \mathrm{p_0}\}$ et $\bar{\mathbf{A}} = \{\mathrm{p_0}\}$

Si toutes les arêtes de $\mathbf{A}$ a $\bar{\mathbf{A}}$ sont saturés, le flot est bien maximal.

On considère un graphe orienté valué par des capacités, ayant un ensemble de sources S et de puits P.

Sigma

A chaque source $s_i \in S$ correspond une capacite d'émission $\sigma(s_i)$

et à chaque puits P correspond une demande de réception $\delta(p_i)$.

Delta

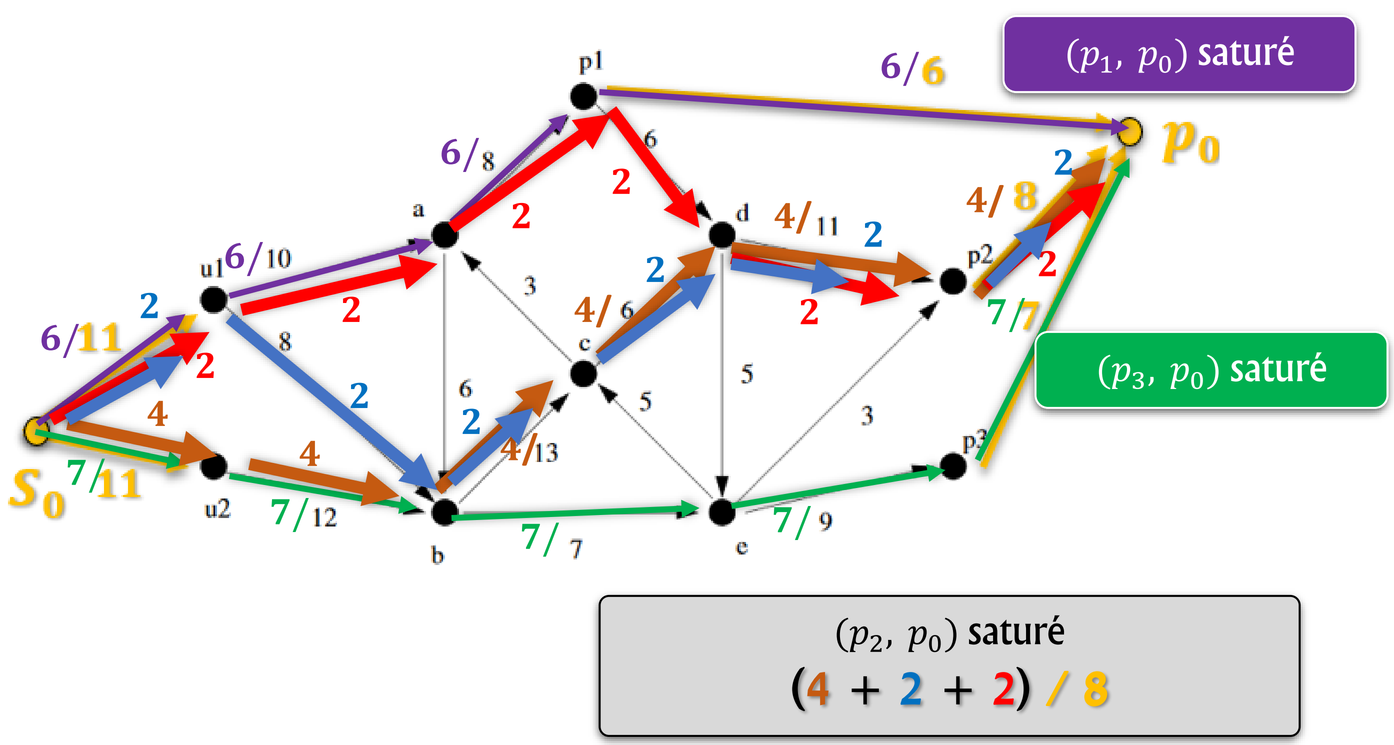
Un flot est dit **admissible** si,

$$\forall\, s_i \in S, \qquad f^+(s_i) - f^-(s_i) \;\leq\; \sigma(s_i)$$
$$\forall\, p_i \in P, \qquad f^-(p_i) - f^+(p_i) \;\geq\; \delta(p_i)$$

Exercice 4.3

Question 4

Existe-t-il un flot admissible dans le graphe de la figure 4.2 pour les valeurs d´émission et de réception données a la question 1 ?



a