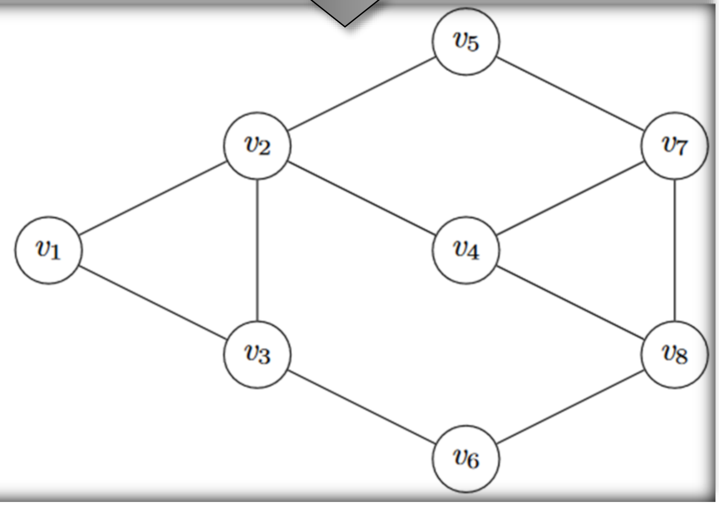
L3 Informatique • Algorithmique avancée

Travaux dirigés 1 - Graphes

Graphe

Un graphe G est un couple (V, E)
où V est l'ensemble des sommets
et $E \subset V \times V$ est l'ensemble des arêtes.

Il est représenté graphiquement par
un ensemble de points (les sommets)
reliés par des segments (les arêtes).



On considère le graphe de la figure suivante.

Ecrire :

- ❒ **La matrice d'adjacence de ce graphe**
- ❒ **Son codage en liste d'arêtes**
- ❒ **Son codage en listes d'adjacences.**

Exercice 1.1

Codage d'un graphe (cours p.15)

Représentations de graphes - Informatiquement (mathématiquement)

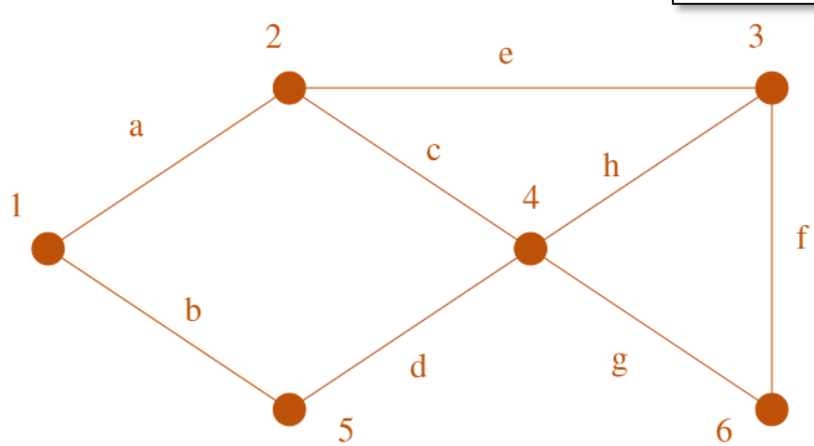
Il y a principalement trois types de codages pour un graphe :

- ❒ Matrice d'adjacence
- ❒ Liste d'arêtes
- ❒ Liste de voisinages

Adjacence

Nom féminin singulier

- fait d'être adjacent, contigu, voisin



Si S est un ensemble, |S| désigne le nombre d'éléments de S

Matrice d'adjacence

Cours 2013

La matrice d'adjacence A d'un graphe G est une matrice de taille $|V(G)| \times |V(G)|$ telle que pour tout couple $\{u; v\}$ de sommets, $m_{uv} = 1$ si et seulement s'il y a dans G une arête de u vers v ; et $m_{uv} = 0$ sinon.

– Dans le cas d'un graphe non-orienté, la matrice est symétrique car l'arête (u, v) est identique à l'arête (v, u)
– Si G est simple et arête-valué, m_{uv} vaut le poids de l'arête (u, v).
– Si G est multiple et non-arête-valué, on assimile le nombre d'arête entre u et v à un poids attribué au couple $\{u; v\}$ afin de traiter le graphe comme un graphe simple arête-valué.

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

Cours 2020

Matrice d'adjacence

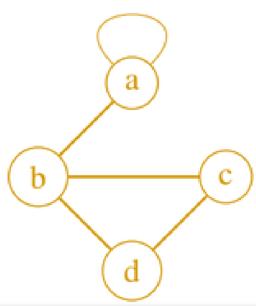
matrice carrée M de taille $\boxed{n \times n}$

tel que M_{uv} représente l'interaction entre u et v : 0 s'il n'y a pas d'arête, 1 si il y a une arête de u vers v

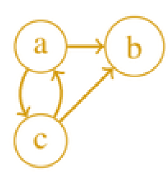
Dans le cas non-dirigé, cette matrice est symétrique.

Dans le cas arête-valué, on remplace le coefficient 1 par le poids de l'arête concernée.

Exemples

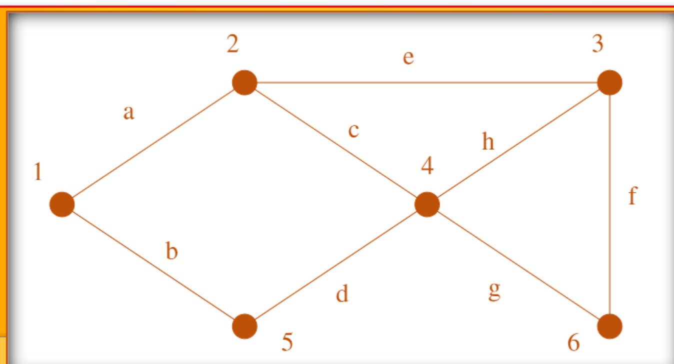


$$M = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$



$$M = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



Reponse matrice d'adjacence

Une **matrice symétrique** est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée c'est-à-dire telle que $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous i et j compris entre 1 et n, où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice et n est son ordre.

Liste d'arêtes

Si S est un ensemble, |S| désigne le nombre d'éléments de S

Le graphe est codé par une matrice de taille $|E(G)| \times 2$ où chaque ligne correspond à une arête.

Dans le cas d'un graphe arête- valué,
on peut aussi ajouter une colonne à cette matrice afin qu'elle contienne aussi les valeurs attribuées aux arêtes.

Avec ce système, on ne garde que l'information nécessaire,
ce qui représente un fort gain d'efficacité par rapport à la matrice d'adjacence pour les graphes creux
(avec peu d'arêtes relativement au nombre de sommets).

Cours 2013

Remarque : Il s'agit bien d'une liste et non d'un ensemble. La redondance est par conséquence permise.

On note n(G) = |V | et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

Cours 2020

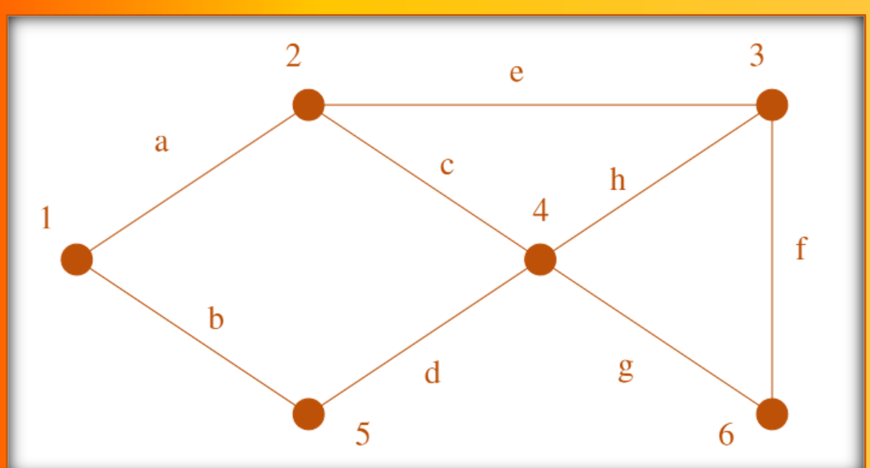
Liste d'arêtes

matrice de taille $\boxed{m \times 2,}$
chaque ligne représentant les deux sommets reliés par une arête.

Dans le cas orienté, l'ordre d'apparition des sommets sur la ligne indique le sens de l'arête.
Dans le cas arête-valué, on ajoute une troisième colonne contenant les poids.

Reponse Liste d'arêtes

- $(1;2)$
- $(1;5)$
- $(2;3)$
- $(2;4)$
- $(3;4)$
- $(3;6)$
- $(4;5)$
- $(4;6)$



Liste de voisinages

Si S est un ensemble, |S| désigne le nombre d'éléments de S

On code le graphe par une liste de |V(G)| vecteur associant à chaque sommet la liste de ses sommets voisins, ou la liste des couples (voisins ; poids des arêtes).

Cours 2013

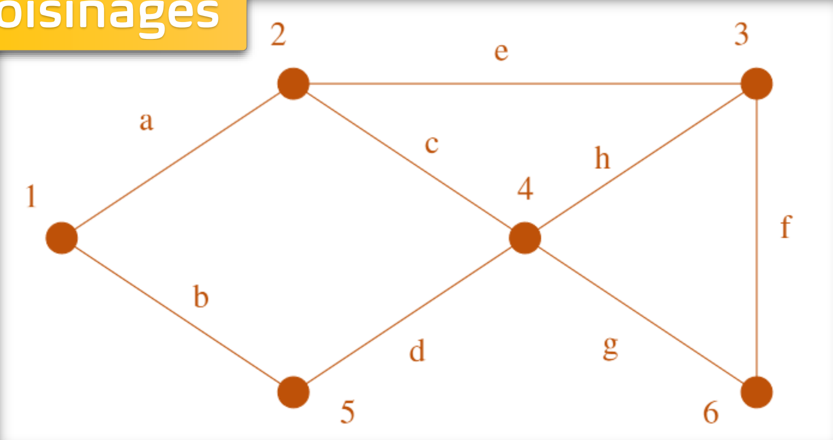
Liste de voisinages

Cours 2020

Liste ayant un élément par sommet.
Cet élément contient l'identité d'un sommet puis la liste de ses voisins (seulement les voisins externes dans les cas d'un graphe orienté).

Reponse Liste de voisinages

- $(1; \{2; 5\})$
- $(2; \{1; 3; 4\})$
- $(3; \{2; 4; 6\})$
- $(4; \{2; 3; 5; 6\})$
- $(5; \{1; 4\})$
- $(6; \{3; 4\})$



	Stockage	u et v sont-ils voisins ?	degré d'un sommet v
Matrice d'adjacence	$O(n^2)$	$O(1)$	$O(n)$
Liste d'arête	$O(m)$	$O(m)$	$O(m)$
Liste d'adjacence	$O(m)$	$O(n)$	$O(n)$

- Les deux dernières facons de stocker un graphe sont beaucoup plus efficaces, surtout dans le cas de graphes creuses ($m << n^2$).

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

On considère un graphe G simple (= aucune boucle) et non dirigé.

Question 1

Exercice 1.2

Soit A la matrice d'adjacence de G.
Que valent les sommes des coefficients par lignes et par colonnes ?

Une matrice est simplement un tableau de nombres
Les **nombres du tableau** s'appellent **les coefficients de la matrice**.

On considère un graphe simple G.

Notons $G = (V; E)$

avec $m = |E|, n = |V|$

et $V = \{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$

Si S est un ensemble, |S| désigne le nombre d'éléments de S

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

$A = (a_{ij})$ *est la matrice d'adjacence* G.
Elle est de dimension $n \times n$.

Dans le cas d'un graphe non − orienté, $(\boldsymbol{V_i} ; \boldsymbol{V_j}) = (\boldsymbol{V_j} ; \boldsymbol{V_i})$
La matrice d'adjacence est donc symétrique

et $\forall\, i \in [\![1; n]\!], \quad d^-(v_i) = d^+(v_i) = d(v_i)$.

Dans la matrice d'adjacence, un 1 à l'intersection a,b signifie que les sommets a et b sont reliés. Si on compte tous les 1 à la ligne a, cela revient à compter le nombre de liaisons de a, donc le degré de a. Idem pour les colonnes.

La somme de la ligne et de la colonne correspondant à a vaut $d(a)$.

Definition

Le degré d'un sommet v, noté $d(v)$, désigne son nombre de voisins.
Dans le cas des graphes dirigés, on distingue le degré sortant $d^+(v)$ et le degré entrant $d^-(v)$.
Dans le cas de graphe valué, le degré considéré est parfois la somme des poids des arêtes incidentes au sommet v.

On considère un graphe G simple (= aucune boucle) et non dirigé.

Question 2

Exercice 1.2

Soit M la matrice d'incidence de G,

c'est-à-dire une matrice de taille $|V(G)| \times |E(G)|$

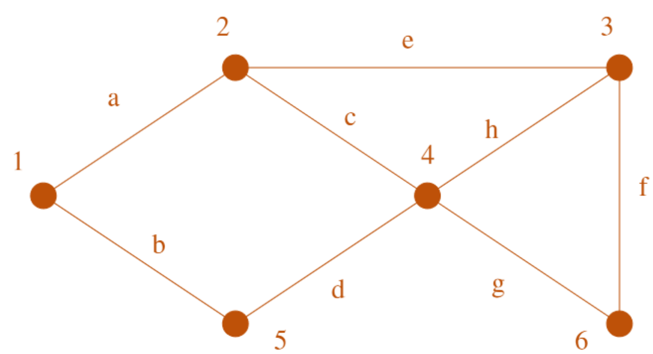
telle que $m_{ue} = 1$ si l'arête e est incidente au sommet u

et $m_{ue} = 0$ sinon.

Ecrire la matrice d'incidence du graphe de la figure 1.1.

Matrice d'incidence

En mathématiques, et plus particulièrement en théorie des graphes, la **matrice d'incidence** d'un graphe est une matrice qui décrit le graphe en indiquant quels liens arrivent sur quels sommets.



Concrètement : on écrit une matrice avec en lignes les sommets, et en colonnes les arêtes.

Pour une arête (a, b) on met un 1 à la ligne a et à la ligne b.

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a	(1,2)
b	(1,5)
c	(2,4)
d	(4,5)
e	(2,3)
f	(3,6)
g	(4,6)
h	(3,4)

On considère un graphe G simple (= aucune boucle) et non dirigé.

Question 3

Exercice 1.2

Que valent les sommes des coefficients par lignes et par colonnes de M ?

Une matrice est simplement un tableau de nombres
Les **nombres du tableau** s'appellent **les coefficients de la matrice**.

La somme de la ligne correspondant à v vaut $d(v)$.
Tout colonne a une somme de 2.

Une arête relie deux sommets, donc on aura toujours deux « 1 » par colonne.

Donc la somme d'une colonne de M vaudra toujours 2.

Par ligne, on retrouve toutes les arêtes auxquelles appartient le sommet, donc le degré du sommet (sur chaque ligne : autant de fois la valeur 1 que d'arêtes incidentes au sommet correspondant à cette ligne).

> Definition
>
> Le degré d'un sommet v, noté $d(v)$, désigne son nombre de voisins.
> Dans le cas des graphes dirigés, on distingue le degré sortant $d^+(v)$ et le degré entrant $d^-(v)$.
> Dans le cas de graphe valué, le degré considéré est parfois la somme des poids des arêtes incidentes au sommet v.

$$\textit{Ainsi}, \begin{cases} \forall\, i \in [\![1\,;n]\!] \displaystyle\sum_{j=1}^{m} m_{v_i e_j} = d(v_i) \\[2em] \forall\, j \in [\![1\,;m]\!] \displaystyle\sum_{\underbrace{i=1}_{?}}^{\overbrace{n}^{?}} m_{v_i e_j} = 2 \end{cases}$$

$d(vi)$ Le degré

Le nombre d'arêtes partant et arrivant a vi.

On considère un graphe G simple (= aucune boucle) et non dirigé.

Exercice 1.2

Question 4

Soit D la matrice diagonale de taille $n(G) \times n(G)$

dont le coefficient de la ligne correspondant au sommet u vaut le degré de u.

Démontrer que $A + D = MM^t$.

Une matrice est simplement un tableau de nombres

Les nombres du tableau s'appellent les coefficients de la matrice.

Transposée d'une matrice

Soit A une matrice de n lignes et p colonnes, dont les coefficients sont $a_{i,j}$. La *transposée de A*, notée A^t, est la matrice de p lignes et n colonnes, dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est $a_{j,i}$. Autrement dit, on permute le rôle des lignes et des colonnes.

Exemple :

$$^t\begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 & 9 \\ 30 & 4 & -9 & -7 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 30 & 5 \\ 6 & 10 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -9 & 1 \\ 3 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

la **matrice transposée** (ou la **transposée**) est notée A^t, ${}^tA$ ou A'

Exemple

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M^t = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a	(1,2)
b	(1,5)
c	(2,4)
d	(4,5)
e	(2,3)
f	(3,6)
g	(4,6)
h	(3,4)

La matrice d'incidence d'un graphe est une matrice qui décrit le graphe en indiquant quels liens arrivent sur quels sommets.

Soit M la matrice d'incidence de G,

c'est-à-dire une matrice de taille

|V(G)|× |E(G)|

telle que $m_{ue} = 1$

si l'arête e **est incidente au sommet** u

et $m_{ue} = 0$ **sinon.**

Pour multiplier deux matrices A et B,

- On multiplie deux à deux les membres des lignes de A avec les membres des colonnes de B.
- On additionne le tout pour trouver chaque case du résultat.

Par exemple : pour trouver la case 1,1 :
On cherche $A_{1,1} * B_{1,1} + A_{1,2} * B_{2,1} + A_{1,3} * B_{3,1}$

Produit matriciel

Définition. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices définies par

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$$

On définit la matrice produit de A et B par

$$AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}), \text{ avec } \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

Attention : Le produit matriciel AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple de produit de 2 matrices (2,3)×(3,2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times7+2\times9-3\times2 & 1\times8-2\times1-3\times3 \\ 4\times7+5\times9-2\times6 & 4\times8-5\times1-6\times3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ 61 & 9 \end{pmatrix}$$

Multiplier M et sa transpose revient donc à multiplier les lignes de M avec.. les lignes de M.

De façon plus mathématique :

$$(MM^t)_{uv} = \sum_{e \,\epsilon\, E} M_{ue}({}^tM)_{ev} = \sum_{e \,\epsilon\, E} M_{ue}M_{ve}$$

la **matrice transposée** (ou la **transposée**) est notée A^{t}, ${}^{\mathrm{t}}A$ ou A'

Exemple : $MM^t = ?$

$$MM^t \neq M^tM$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\times
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
=$$

2	1	0	0	1	0
1	3	1	1	0	0
0	1	3	1	0	1
0	1	1	4	1	1
1	0	0	1	2	0
0	0	1	1	0	2

Source:
https://fr.numberempire.com/matrixbinarycalculator.php?matrix1=1+1+0+0+0+0+0+0%0D%0A1+0+1+0+1+0+0+0%0D%0A0+0+0+0+1+1+0+1%0D%0A0+0+1+1+0+0+1+1%0D%0A0+1+0+1+0+0+0+0%0D%0A0+0+0+0+0+1+1+0&matrix2=1%091%090%090%090%090%0D%0A1%090%090%090%091%090%0D%0A0%091%090%091%090%090%0D%0A0%090%090%091%091%090%0D%0A0%091%091%090%090%090%0D%0A0%090%091%090%090%091%0D%0A0%090%090%091%090%091%0D%0A0%090%091%091%090%090&mult=on&_p1=2397

On s'intéresse d'abord à toute la matrice sauf la diagonale. Donc :

Si $u \neq v$

$$M_{ue}M_{ve} = \begin{cases} 1 \text{ si } e \text{ est l'arete } (u,v) \Rightarrow e \text{ est une arete entre } u \text{ et } v \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Donc } \sum_{e \in E} M_{ue}M_{ve} = nb\ d'aretes\ (u,v) = A_{uv}$$

$$\underline{A \text{ est la matrice d'adjacence de } G}$$

Exemple

2	1	0	0	1	0
1	3	1	1	0	0
0	1	3	1	0	1
0	1	1	4	1	1
1	0	0	1	2	0
0	0	1	1	0	2

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple

2	1	0	0	1	0
1	3	1	1	0	0
0	1	3	1	0	1
0	1	1	4	1	1
1	0	0	1	2	0
0	0	1	1	0	2

Si $u = v$

$$M_{ue}M_{ue} = \{1 : e \text{ est incident à } u\}$$

$$\Rightarrow \text{Donc } \sum_{e \in E} M_{ue}M_{ue} = d(u) = D_{uu}$$

Comme

$$A_{uu} = 0 \quad et \quad D_{uv} = 0 \quad si \ u \neq v,$$

$$MM^t = A + D$$

Soit D la matrice diagonale de taille $n(G) \times n(G)$ dont le coefficient de la ligne correspondant au sommet u vaut le degré de u.

Somme des matrices

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \text{ et } B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

On définit la somme des matrices A et B comme la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$$

Les matrices comme tableaux

Définition. Soient n et p deux entiers strictement positifs. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes) un tableau de np nombres réels (ou complexes) rangés en n lignes et p colonnes.

Matrice diagonale

Si A est une matrice carrée ($n = p$), les coefficients a_{ii}, $1 \le i \le n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En algèbre linéaire, une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Soit $(d_1, \dots, d_n)$ la suite des degrés d'un graphe non-dirigé G.

On note $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces degrés.

Exercice 1.3

Question 1

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m(G)$

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

Le degré d'un sommet v, noté d(v), désigne son nombre de voisins.

Si S est un ensemble, |S| désigne le nombre d'éléments de S

Proposition

Un graphe non orienté vérifie

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Cours p. 11

Indication : on comptera de deux façons différentes le nombre d'incidences entre sommets et arêtes.

On compte le nombre de paires (sommet, arête) incidentes
(= le nombre de 1 dans la matrice M, la matrice d'incidence, de l'exo 2).

Si on compte ces couples en regroupant ceux contenant le même sommet, on obtient

$\sum$ ***lignes*** (sommets) = $\sum_i d_i$

Par ligne, on retrouve toutes les arêtes auxquelles appartient le sommet, donc le degré du sommet (sur chaque ligne : autant de fois la valeur 1 que d'arêtes incidentes au sommet correspondant à cette ligne).

Si on compte ces couples en regroupant en les regroupant par arête commune, on obtient

$\sum$ ***colonnes*** (arêtes) = $2m$

Une arête relie deux sommets, donc on aura toujours deux « 1 » par colonne. Donc la somme d'une colonne de M vaudra toujours 2.
Il y a autant de colonnes que d'arêtes, donc : $2 \times m$

Donc $\sum d_i = 2m$

La matrice d'incidence d'un graphe est une matrice qui décrit le graphe en indiquant quels liens arrivent sur quels sommets.

Soit M la matrice d'incidence de G,

c'est-à-dire une matrice de taille |V(G)|× |E(G)| telle que $m_{ue} = 1$ si l'arête e est incidente au sommet u et $m_{ue} = 0$ sinon.

Chapitre 1

Demonstrations.pdf

Notion de graphe

Propriété 1.1. *Un graphe non orienté vérifie*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Un graphe orienté vérifie

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = m.$$

Démonstration. Il suffit pour cela de compter le nombre de couples (noeud,arête) qui sont incidents. Si on compte ces couples en regroupant ceux contenant le même noeud, on obtient que leur nombre est de $\sum_{v \in V(G)} d(v)$. Si on les compte en les regroupant par arête commune, ils sont au nombre de $2m$.

Le raisonnement est similaire dans le cas orienté. $\square$

Soit $(d_1, \ldots, d_n)$ la suite des degrés d'un graphe non-dirigé G.

On note $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces degrés.

Question 2

Exercice 1.3

En déduire que $\delta(G) \leq \dfrac{2m(G)}{n(G)} \leq \Delta(G)$

La première question à se poser est : d'où sort ce $\dfrac{2m(G)}{n(G)}$?

On vient de prouver que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m(G)$,

donc on peut transformer $\dfrac{2m(G)}{n(G)}$ en $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n(G)}$

La somme des degrés, divisé par le nombre de sommets… Il s'agit en fait de la moyenne des degrés !

$$\frac{2m(G)}{n(G)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n(G)} = d_{moyen}$$

Or, par définition : $\delta(G) \leq d_{moyen} \leq \Delta(G)$

Donc, $\delta(G) \leq \dfrac{2m(G)}{n(G)} \leq \Delta(G)$

En raisonnant par l'absurde,
montrer que deux plus long chemins dans un graphe non-orienté connexe ont forcément un sommet commun.

Cette propriété est-elle encore vraie pour les graphes orientés faiblement connexes ?

Exercice 1.4

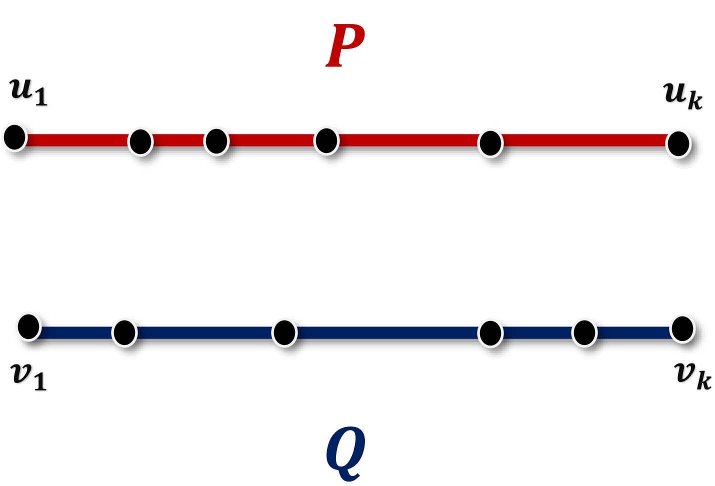
G non orienté :

Raisonnement par l'absurde :

supposons qu'il existe un graphe connexe G qui contient deux plus longs chemins P et Q qui ont aucun sommet en commun.

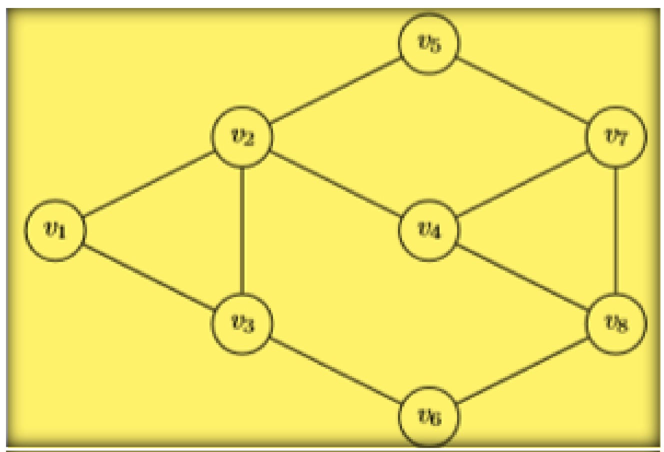
(= P et Q sont deux chemins disjoints
Disjoint : séparé)

On supose que
$P = u_1 u_2 \ldots u_k$ et $Q = v_1 v_2 \ldots v_k$



Le **raisonnement par l'absurde** ou **apagogie** est une forme de raisonnement logique, philosophique, scientifique consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition complémentaire (ou « contraire »), soit à montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement d'elle des conséquences absurdes.

Connexité Un graphe non orienté est connexe si toute paire de sommets est reliée par un chemin

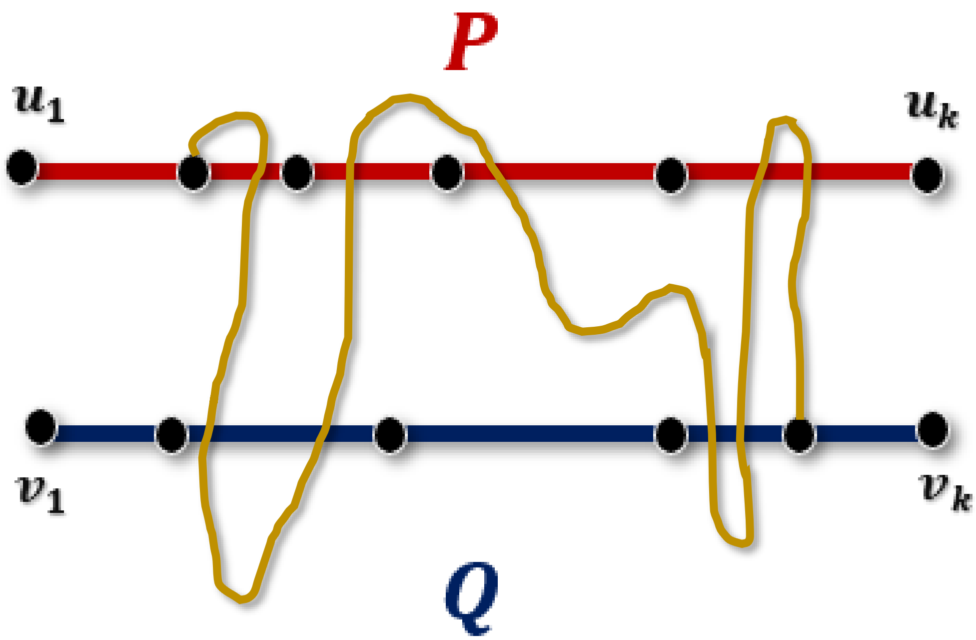


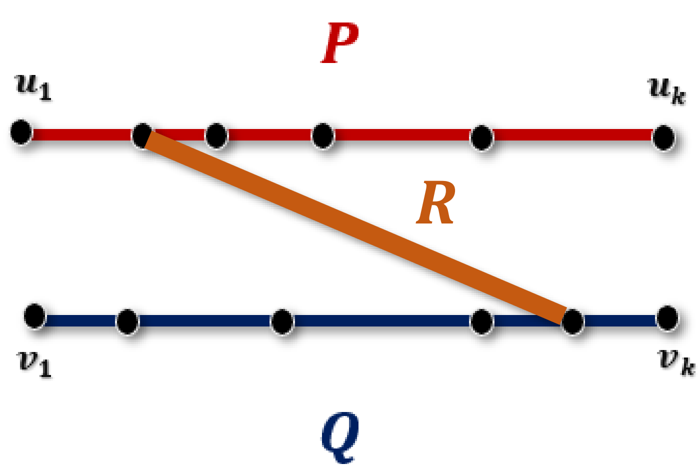
- v_6, v_3, v_2, v_4 est un chemin de longueur 3.
- v_7, v_4, v_8, v_7, v_5 est une marche.

G est connexe donc il existe un chemin reliant P et Q.

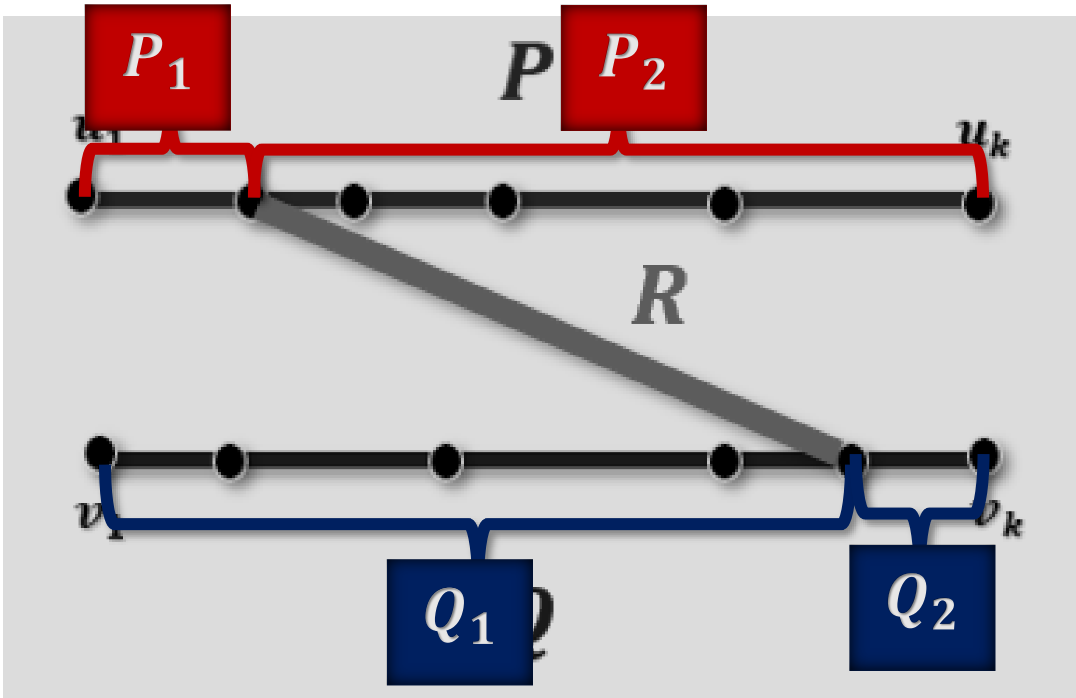
Connexité Un graphe non orienté est connexe si toute paire de sommets est reliée par un chemin

On peut supposer que les extrémités du chemin sont ses seuls sommets dans P et Q.





On découpe P et Q en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$ comme indiqué et on note $\ell(\ )$ la langueur d'un chemin.



$$\textit{Alors } \ell(R) \geq 1$$

La longueur de R est au moins 1 car P et Q on pas de sommet en commun (ça c'est notre supposition dans cette exo). Donc ça va nous prendre au moins un arrête pour passer du chemin P au chemin Q.

$$\text{et } \ell(P_1 \cup R \cup Q_2) + \ell(Q_1 \cup R \cup P_2)$$
$$= \ell(P_1) + \ell(P_2) + \ell(Q_1) + \ell(Q_2) + 2\ell(R) > \ell(P) + \ell(Q)$$

L'un des deux chemins
$P_1 \cup R \cup Q_2$ *et* $P_2 \cup R \cup Q_1$
est donc plus long que les plus longs chemins.

Contrediction !

Video YouTube : https://youtu.be/Tw-oInUejrA
Proof: Two Longest Paths Have a Common Vertex | Graph Theory, Connected Graphs

G orienté

faiblement connexe :

La réponse est non pour un graphe faiblement connexe :

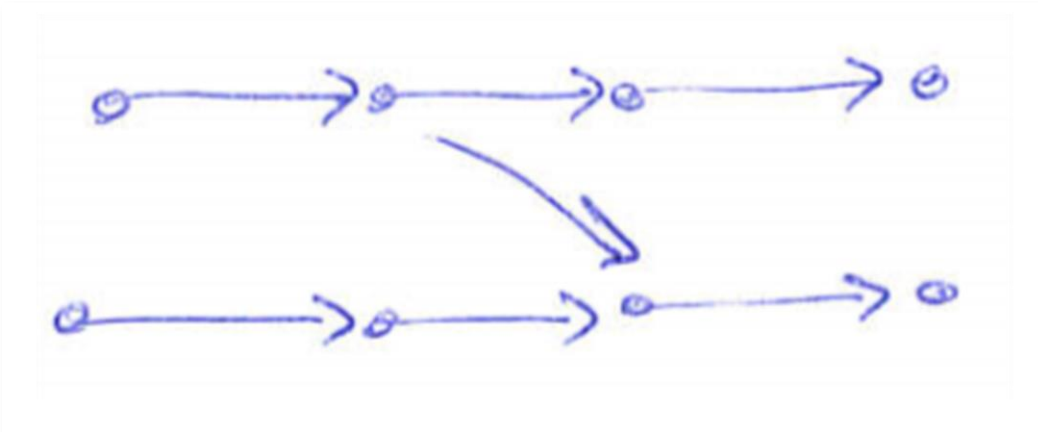
Connexité

Un graphe est **connexe** si entre deux sommets il existe toujours un chemin.

Pour un graphe orienté, il existe plusieurs notions de connexité. Un tel graphe est :

- **faiblement connexe** si le graphe obtenu en oubliant l'orientation est connexe ;
- **fortement connexe** si, d'un sommet à un autre, il existe toujours un chemin orienté.

Un graphe non connexe peut être décomposé en composantes connexes (ou composantes faiblement connexes pour les graphes orientés).



Nous savons immédiatement que notre preuve ne fonctionnerait pas pour les graphes orientés, puisque nous avons « marcher » dans deux directions différentes sur un chemin - ce qui peut ne pas être possible dans un graphe orienté à moins que tous les arêtes impliqués aient un arête similaire dans la direction opposée .

Monter que
tout groupe d'au moins deux personnes
contient toujours au moins
deux individus ayant le même nombre d'amis.

Exercice 1.5

G non orienté :

En supposent que
la relation d'amitié
est symétrique / réciproque ,
[Amitiés toutes réciproques = graphe non-orienté]

En mathématiques, une **relation** (binaire, interne) $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si elle vérifie :

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x,$$

ou encore, si elle est égale à sa relation réciproque.

On peut encoder la situation avec un graphe G dont les sommets sont les individus et les arêtes représentent les liens d'amitié.

- ***Nb d'amis d'un individu*** *= degré d'un sommet*
- ***Amitiés toujours entre deux individus différents***
  -> graphe sans boucles
- ***Amitiés et individus non pondérés :***
  graphe non-sommet-valué non-arête-valué

Le degré d'un sommet v, note $d(v)$, désigne son nombre de voisins.

$d(v)$ Le degré

Le nombre d'arêtes partant et arrivant a v.

- ***Nb de sommets : $n \in N$*** *individus*
- ***Nb d'arêtes : $p \in N$*** *liens d'amitié*

▸ Les entiers naturels :
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$

Donc, le problème devient :
Montrer que dans un graphe simple sans boucles non dirigé, il y a forcément deux sommets de même degré.

Un graphe simple est un graphe sans boucle ni arête multiple.
Il n'y a alors d'arêtes qu'entre des sommets distincts, et entre deux sommets il y a au plus une arête.

Dans un graphe de n sommets ($n(G) = |V|$),
le degré d'un sommet est compris entre 0 et n – 1.

On note n(G) = |V |
ou n quand il n'y a pas d'ambigüité.

Quitte à se restreindre à un sous-groupe.

On peut choisir une composante connexe du graphe de départ :

Si un sommet est de degré 0, appelons-le S_0 et excluons-le (après tout, il est le seul sommet de degré 0, donc il ne nous intéresse pas) et intéressons-nous au sous-graphe $H = G \setminus (S_0)$

Un graphe est **connexe** si entre deux sommets il existe toujours un chemin.

On Suppose donc que le graphe H est connexe.

H comporte donc $n - 1$ sommets, de degrés compris entre 1 et $n - 2$.

Il est impossible de trouver $n - 1$ valeurs différentes entre 1 et $n - 2$.

Donc, impossible de trouver $n - 1$ degrés différents dans le sous-graphe H.

Donc nécessairement, on trouvera deux sommets avec le même degré dans G.

Pour plus d'information, se référer au théorème des chaussettes.

Principe des tiroirs

En mathématiques, le **principe des tiroirs** de Dirichlet, affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs.

Remarque :

Dans le cas orienté (plus réaliste pour les sociologues),

La seule configuration dans laquelle tous les degrés entrants sont différents est la relation d'ordre total :

Definition

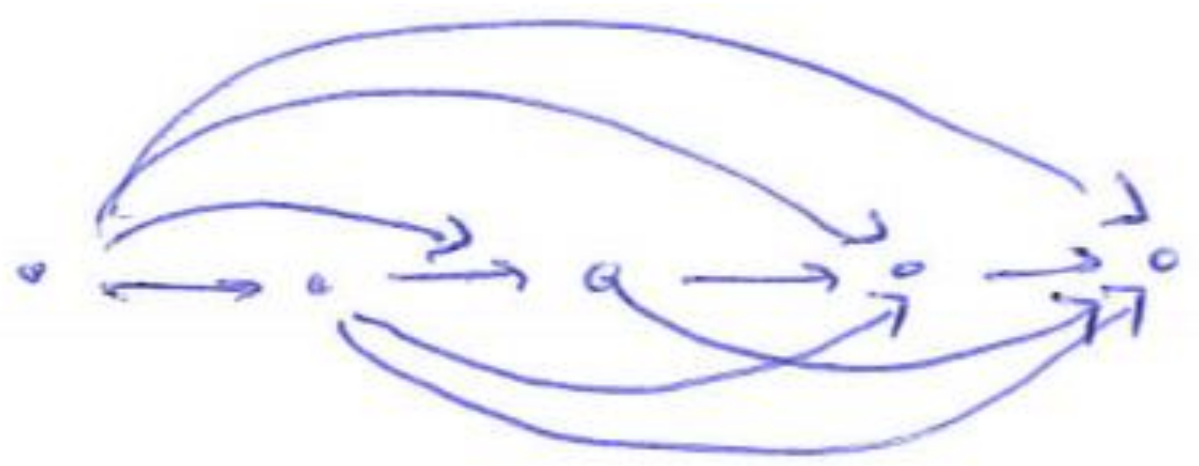
Le degré d'un sommet v, noté $d(v)$, désigne son nombre de voisins.
Dans le cas des graphes dirigés, on distingue le degré sortant $d^+(v)$ et le degré entrant $d^-(v)$.
Dans le cas de graphe valué, le degré considéré est parfois la somme des poids des arêtes incidentes au sommet v.

On peut classer les individus tel que chacun se déclare ami avec l'ensemble de ceux qui le succède :

En mathématiques, on appelle **relation d'ordre total** sur un ensemble E toute relation d'ordre $\leq$ pour laquelle deux éléments de E sont toujours comparables, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in E \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit alors que E est totalement ordonné par $\leq$.



Peu probable en réalité !

Un graphe non-orienté est dit ***biparti***

si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles A et B

<u>**tels que**</u> toute arête de G relie un sommet de A et un sommet de B.

On note $n(A)$ et $n(B)$ le nombre de sommets de A et B.

Question 1

Exercice 1.6

- Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe biparti simple ?
- Comment définiriez-vous la densité dans un problème ne concernant les graphes bipartis ?

Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe biparti simple ?

$$n(A)n(B)$$

Maximum number of edges in Bipartite graph

Given an integer **N** which represents the number of Vertices. The Task is to find the maximum number of edges possible in a Bipartite graph of **N** vertices.

Bipartite Graph:

1. A Bipartite graph is one which is having 2 sets of vertices.
2. The set are such that the vertices in the same set will never share an edge between them.

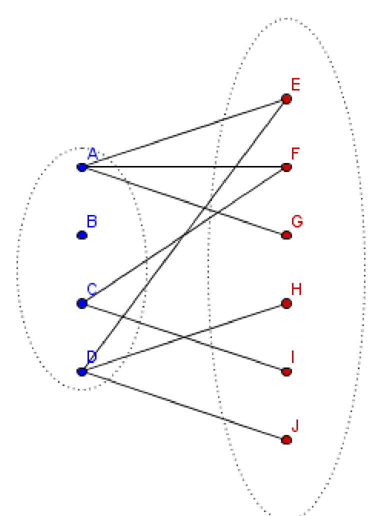
Examples:

> ***Input:*** *N = 10*
> ***Output:*** *25*
> *Both the sets will contain 5 vertices and every vertex of first set*
> *will have an edge to every other vertex of the second set*
> *i.e. total edges = 5 * 5 = 25*
>
> ***Input:*** *N = 9*
> ***Output:*** *20*

Graphe biparti

Un graphe est dit **biparti** si on peut partager son ensemble de sommets en deux parties A et B

tels qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de A et aucune arête entre éléments de B.



Comment définiriez-vous la densité dans un problème ne concernant les graphes bipartis ?

La densité du graphe G est définie par :

$$d(G) = \frac{nb\ arêtes\ présentes}{nb\ arêtes\ possibles\ /\ permises}$$

$$\boldsymbol{d(G) = \frac{m}{n(A)n(B)}}$$

Densité d'un graphe

En mathématiques, et plus particulièrement en théorie des graphes, on peut associer à tout graphe un entier appelé **densité du graphe**.

Ce paramètre mesure si le graphe a beaucoup d'arêtes ou peu.

Un graphe dense (*dense graph*) est un graphe dans lequel le nombre d'arêtes (ou d'arcs) est proche du nombre maximal, par exemple un nombre quadratique par rapport au nombre de sommets.

Un graphe creux (sparse graph) a au contraire peu d'arêtes, par exemple un nombre linéaire.

La distinction entre graphe creux et dense est plutôt vague et dépend du contexte.

Si S est un ensemble,
|S| désigne le nombre d'éléments de S

Notation

On note $n(G) = |V|$ et $m(G) = |E|$, ou n et m quand il n'y a pas d'ambiguité.

Densité d'un graphe

La densité d'un graphe simple G est le nombre d'arêtes présentes divisé par le nombre d'arêtes possibles :

$$dens(G) = \frac{2m}{n(n-1)}$$

- La densité est toujours comprise entre 0 et 1. Une densité de 0 correspond à un graphe sans arête, une densité de 1 correspond à un graphe complet, également appelé clique.
- Cette notion peut être élargie à d'autres familles de graphes, il suffit de savoir calculer le nombre d'arêtes possibles. Si on considère les graphes orientés autorisant deux arêtes en sens contraire et des boucles, on obtient n^2 arêtes au maximum donc $d(G) = \frac{m}{n^2}$.

La densité est une caractéristique globale du graphe mais ne reflète pas sa structure locale.

Un graphe non-orienté est dit ***biparti***

si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles A et B

<u>**tels que**</u> toute arête de G relie un sommet de A et un sommet de B.

On note $n(A)$ et $n(B)$ le nombre de sommets de A et B.

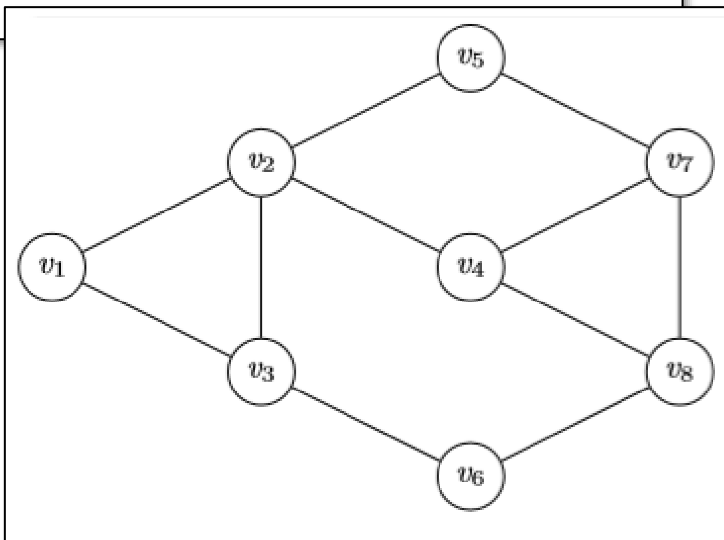
Question 2

Exercice 1.6

Montrer que si G est ***biparti***, tout cycle de G est forcément de longueur paire.

Definition

Un cycle de longueur k est une suite de k arêtes (u_i, u_{i+1}) tels que $u_0 = u_k$ et tous les u_i sont disjoints.
Dans le cas de graphes orientés, un cycle orienté nécessite l'orientation des arêtes dans le sens $\overrightarrow{u_i u_{i+1}}$.



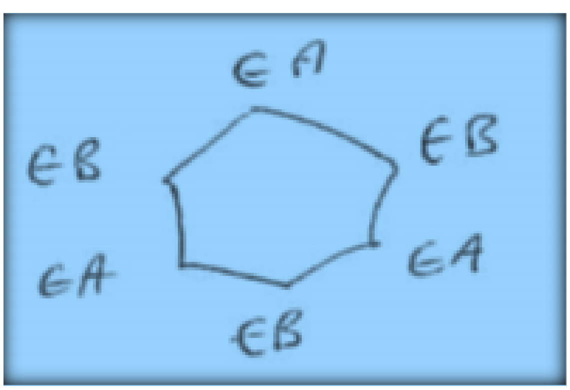
- $v_6, v_3, v_2, v_5, v_7, v_8$ est un cycle de longueur 6.

Vu que le graphe G est biparti –
on peut partager son ensemble de sommets en deux parties A et B,

tel qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de A et aucune arête entre éléments de B.

Donc, pour chaque cycle faut alternée entre les sommets de A et les sommets de B.

Un tel cycle est forcément père.



Graphe biparti

Un graphe est dit **biparti** si on peut partager son ensemble de sommets en deux parties A et B

tels qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de A et aucune arête entre éléments de B.

Un graphe non-orienté est dit ***biparti***

si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles A et B

<u>**tels que**</u> toute arête de G relie un sommet de A et un sommet de B.

On note $n(A)$ et $n(B)$ le nombre de sommets de A et B.

Question 3

Exercice 1.6

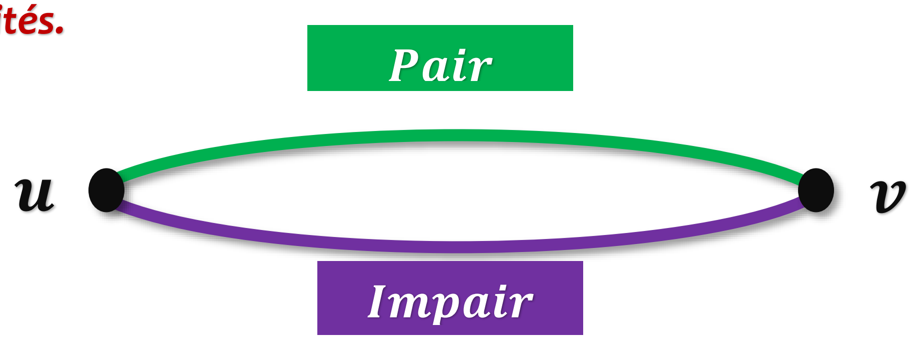
On suppose maintenant qu'un graphe G à tous ses cycles de longueur paire.

Montrer que pour, toute paire de sommets u et v,

tous les chemins entre u et v ont la même parité.

<u>Raisonnement par l'absurde</u>

(a) ***Supposons qu'il existe 2 sommets u et v reliés par deux chemins de parité différents et disjoints*** *(Disjoint : séparé)* ***en-dehors de leurs extrémités.***



On crée alors un cycle impair.

(b) **Supposons qu'il existe une ou plusieurs paires de sommets (u, v) reliés par des chemins de parité différente.**

On note $\ell(\quad)$ la langueur.

Soit $l(u, v)$ la plus petite somme des longueurs de chemins entre les sommets u et v.

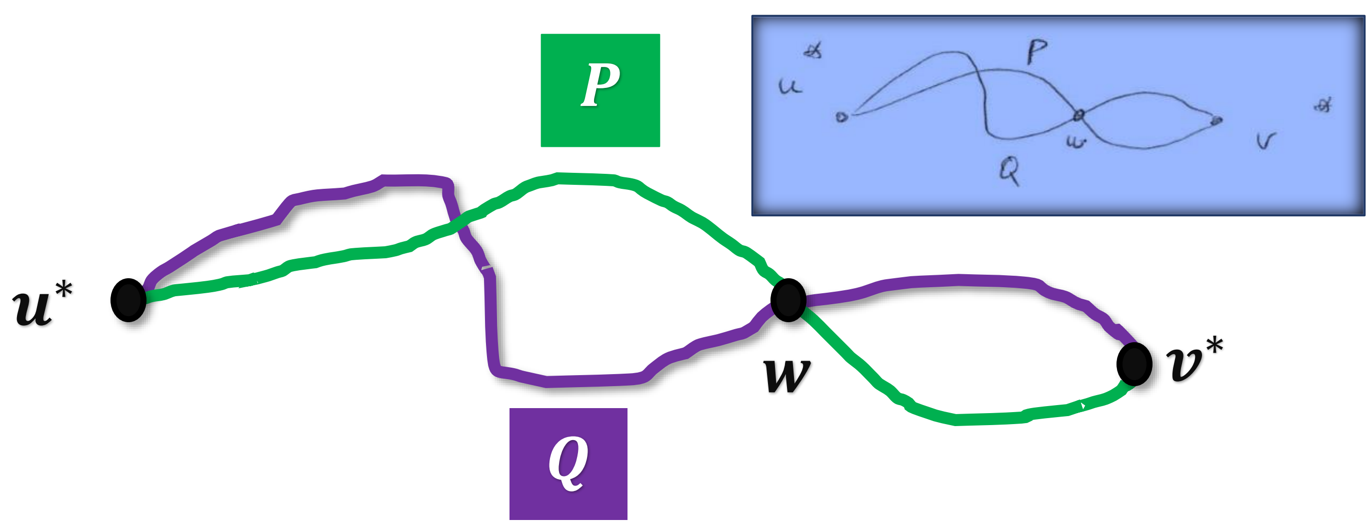
On considère le couple u^*, v^* tel que $l(u^*, v^*)$ est minimal.

Il existe un chemin P impair et un chemin Q pair les reliant et tel que

$$l(P) + l(Q) = l(u^*, v^*).$$

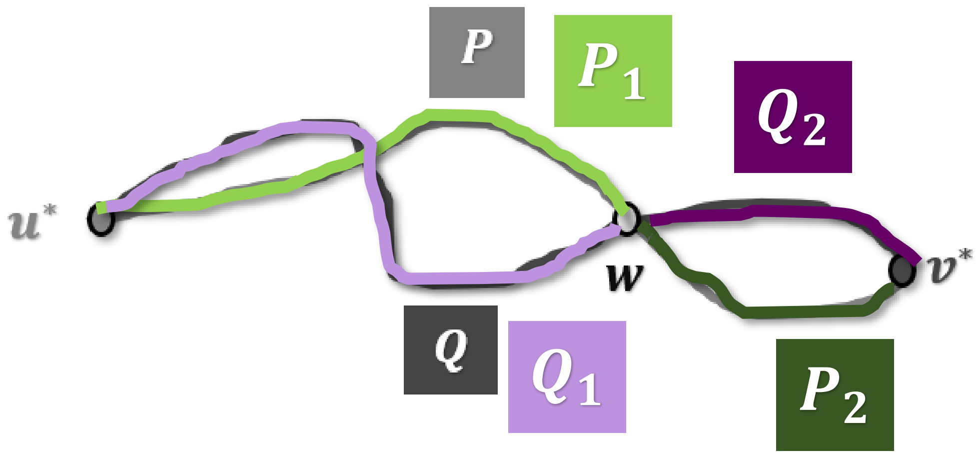
D'après (a), P et Q ont un sommet interne commun w

Cycle impaire -> il y a donc un sommet commun au 2 ensembles [?]



Soient P_1 et Q_1 les sous-chemins de P et Q entre u^* et w

Soient P_2 et Q_2 les sous-chemins de P et Q entre w et v^*



Comme $l(P)$ est impaire, $l(P_1)$ et $l(P_2)$ sont de parités différentes.

Comme $l(Q)$ est paire, $l(Q_1)$ et $l(Q_2)$ sont de même parité.

Donc $l(P_1)$ et $l(Q_1)$ sont de parités différents

ou $l(P_2)$ et $l(Q_2)$ sont de parités différentes

Supposons que c'est le cas pour $l(P_1)$ et $l(Q_1)$

[$l(P_1)$ et $l(Q_1)$ sont de parités différentes]

Alors,

$$l(u^*, w) < l(u^*, v^*)$$

→ **Contradiction car**

On considère le couple u^*, v^* tel que $l(u^*, v^*)$ est minimal.

De même pour $l(P_2)$ et $l(Q_2)$

Supposons que c'est le cas pour $l(P_2)$ et $l(Q_2)$
[$l(P_2)$ et $l(Q_2)$ sont de parités différentes]

Alors,

$$l(w, v^*) < \ l(u^*, v^*)$$

$\rightarrow$ ***Contradiction car***

On considère le couple u^*, v^* tel que $l(u^*, v^*)$ est minimal.

Un graphe non-orienté est dit ***biparti***
si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles A et B
tels que toute arête de G relie un sommet de A et un sommet de B.

On note $n(A)$ et $n(B)$ le nombre de sommets de A et B.

Question 4

Exercice 1.6

Montrer que le graphe G de la question précédente est biparti.

Cette question nous demande en effet de prouver le théorème suivant [?] :

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair

$$\textit{Un graphe est biparti} \Leftrightarrow \textit{il ne contient pas de cycle impair}$$

On fixe un sommet u quelconque.

D'après la question 3 , $V(G) = A \cup B$

Où, $A = \{V | Tous\ les\ chemins\ de\ u \text{ à } v\ sont\ pairs\}$

$B = \{V | Tous\ les\ chemins\ de\ u \text{ à } v\ sont\ impairs\}$

Ces ensembles sont disjoints. S'il il y avait un cycle impair, on aurait eu un sommet commun au 2 ensembles.

De plus, aucune arête ne peut être interne a A ou B puisqu'elle créerait des chemins de parité différente.

On considère un graphe non orienté G.

Une marche entre deux sommets u et v
est une suite d'arêtes adjacentes entre elles,
dont la première est adjacente à u et la dernière à v.

La différence avec un chemin est qu'elle peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

Question 1

Exercice 1.7

Soit M la matrice d'adjacence de G.

Montrer par récurrence sur k
que le coefficient (u, v) de M^k
correspond au nombre de marches de longueur k entre u et v.

Cette question nous demande en effet de prouver le théorème suivant :

Soit M la matrice d'adjacence du graph $G = (V, E)$

Alors, pour $k \geq 1$,

pour les sommets $u, v \in V$, le coefficient (u,v) de M^K

correspond au nombre de marches de longueur k entre u et v.

In other words, you can determine the number of length k walks between any pair of vertices simply by computing the kth power of the adjacency matrix!

La matrice d'adjacence A d'un graphe G est une matrice de taille $|V(G)| \times |V(G)|$ telle que pour tout couple $\{u; v\}$ de sommets, $m_{uv} = 1$ si et seulement s'il y a dans G une arête de u vers v ; et $m_{uv} = 0$ sinon.

Matrice d'adjacence

matrice carrée M de taille $\boxed{n \times n}$

Puissances d’une matrice carré

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, les puissances A^k ($k \in \mathbb{N}$) de A sont définies par

- $A^0 = I_n$
- $A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$

Ainsi, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A \ldots$

Cas des matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$) l’ensemble des matrices carrées d’ordre n (matrices de taille $n \times n$).

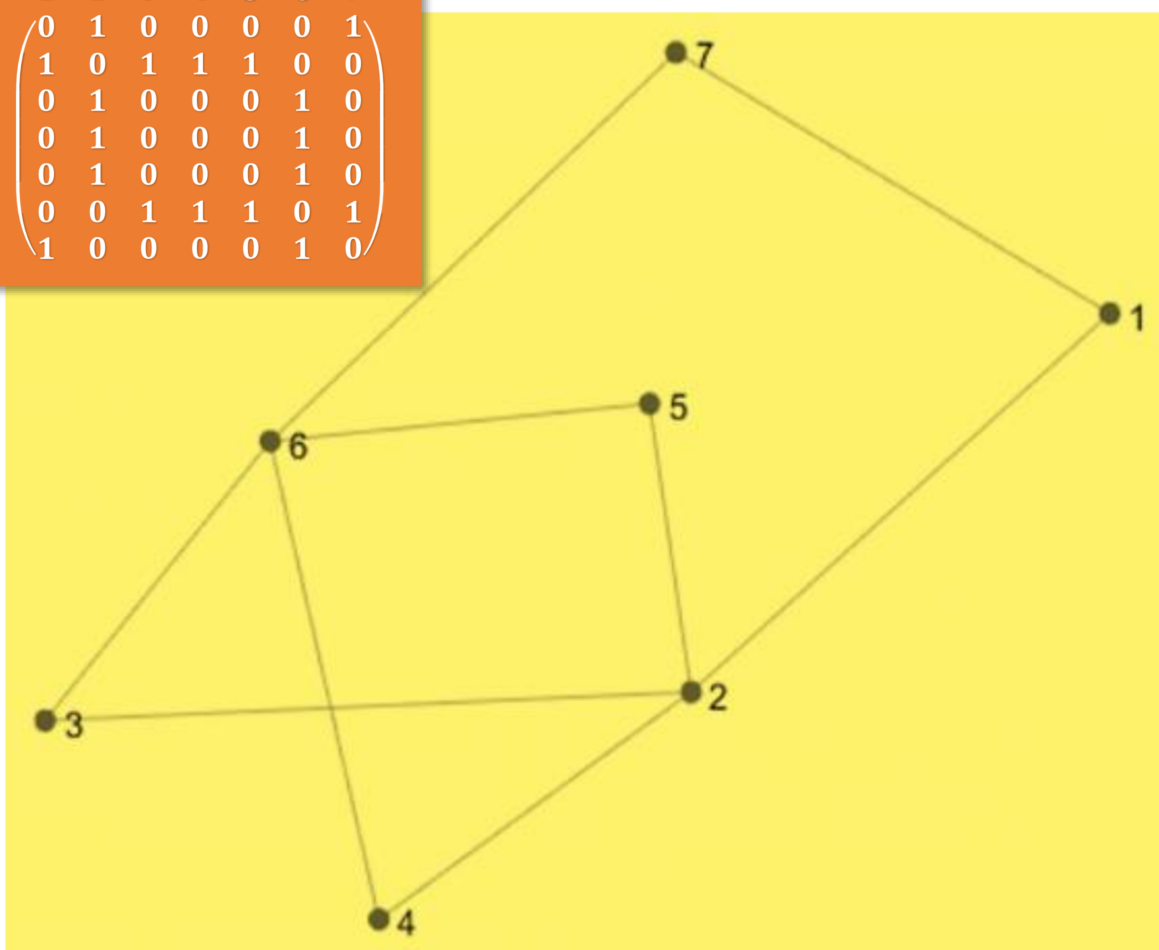
Le produit de 2 matrices carrées de même taille est toujours possible.

Exemple

Source : video YouTube
Walks in graphs and powers of adjacency matrix

https://youtu.be/c4RZ4rQIgc4

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



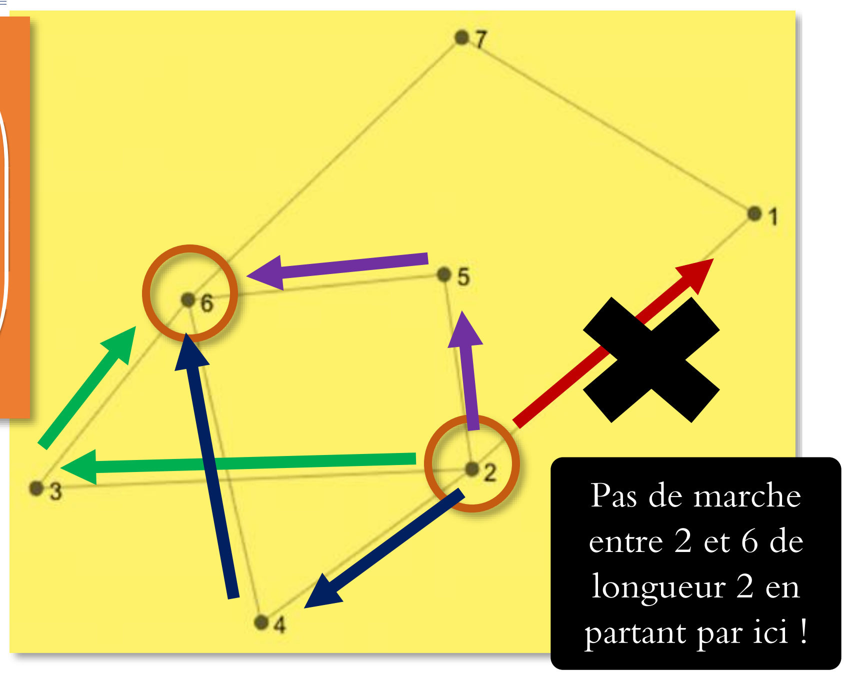
La matrice M^2 compte les marches de longueur 2.

$$M^2 = M \times M$$

$$M^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Une marche de 2 à 6

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$



3 marches différentes de longueur 2 entre les sommets 2 et 6 !

Raisonnement par récurrence

Cas ou k = 1 , $M^k = M^1 = M$

L'existence d'une marche de longueur 1 est équivalente à la présence de l'arête.

Une marche de longueur 1 est une arête, donc on a le lien :

$$m_{uv} = 1 \Leftrightarrow (u; v) \in E(G)$$

La propriété est vraie pour k = 1

Le **raisonnement par récurrence** (ou par induction, ou induction complète) est une forme de raisonnement visant à **démontrer une propriété portant sur *tous* les entiers naturels**.

Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants :

- La propriété est satisfaite par la plus petite valeur admise de n (souvent 0 ou 1)
- **Chaque fois que cette propriété est satisfaite par un certain nombre entier naturel *n***, elle est également satisfaite par son successeur, c'est-à-dire par le nombre entier *n* + 1.

Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels.

Supposons la propriété vraie à un rang *k* fixé, ou $k \in \mathbb{N}$

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

$$M^{k+1} = M^k . M \overset{donc}{\Rightarrow}$$

?

$$\sum_{w=1}^{n}$$

On suppose que les sommets du graphe G, sont numérotés de 1 à n

$$\left(M^{k+1}\right)_{u,v} = \sum_{w \in V(G)} \left(M^k\right)_{u,w} M_{w,v}$$

$$= \sum_{w \text{ voisin de } v} \left(M^k\right)_{u,w}$$

$\left(M^k\right)_{u,w}$ *est le nombre de marches de longueur* k *entre* u *et* w*, pour tout couple de sommets* u, w *tel que* $(u; w) \in V(G)$.

Toute marche de longueur (k+1) entre les sommets u et v commence par une marche de longueur k qui commence au sommet u et se termine à un certain sommet w ($w \in V(G)$ *). Cette marche de longueur k se poursuit par une marche de longueur 1 qui commence au sommet w et se termine au sommet v (donc, le sommet w est un voisin du sommet v).*

Donc chaque marche de longueur k + 1 entre u et v correspond à une marche de longueur k entre u et un voisin de w et inversement.

1.III.2.a. **Voisinage d'un sommet** *(Définition) :*
Dans le graphe G quelconque, le voisinage N(v) du sommet v est l'ensemble des sommets voisins de v.

La fonction

$$\emptyset : \begin{Bmatrix} \textit{marches de longueur } k+1 \\ \textit{entre u et v} \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \textit{marches de longueur } k \\ \textit{entre u et } N(v) \end{Bmatrix}$$

$$m \longmapsto \textit{le premier pas de } m$$

Est une bijection. ***La propriété est donc encore vraie par récurrence pour k + 1.***

Une application est **bijective** si et seulement si tout élément de son *ensemble d'arrivée* à un et un seul *antécédent*, c'est-à-dire est *image* d'exactement un élément (de son domaine de définition)

Bijection

Définition

*Une fonction **h** est dite **bijective** si et seulement si elle est **et injective et surjective**. En notation mathématique, on a*

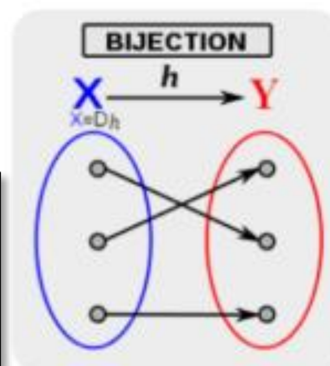
$$\forall x_1, x_2 \in dom(h) : h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\textbf{\textit{ET}}$$
$$\forall y \in im(h)\ (\exists x \mid h(x) = y)$$

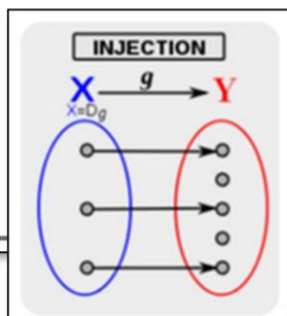
Remarque(s)

- Une fonction **périodique** est automatiquement **non bijective**.
- En termes d'ensembles, **le cardinal de** *dom(h)* **est strictement égal au Cardinal de** *im(h)***.** En notation mathématique, on a
$$\#dom(g) = \#im(h)$$

Exemples de fonctions bijectives

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^a$ (a impair)
- $f(x) = \sqrt[a]{x}$ (a impair)
- ...

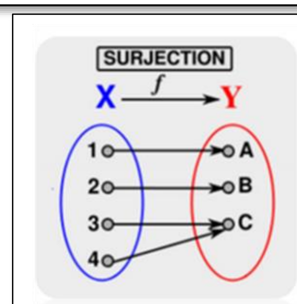




Injection

*Une fonction **g** est dite **injective** si et seulement si tout réel de l'image correspond **au plus** à un seul réel du domaine de définition. En notation mathématique, on a*

$$\forall x_1, x_2 \in dom(g) : g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Surjection

*Une fonction **f** est dite **surjective** si et seulement si tout réel de l'image correspond à **au moins** un réel du domaine de définition. En notation mathématique, on a*

$$\forall y \in im(f)\ (\exists x \mid f(x) = y)$$

On considère un graphe non orienté G.

Une marche entre deux sommets u et v
est une suite d'arêtes adjacentes entre elles,
dont la première est adjacente à u et la dernière à v.

La différence avec un chemin est qu'elle peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

Exercice 1.7

Question 2

Montrer que le coefficient (u, v) de $(I + M)^k$ est non nul

si et seulement si

il existe $k' \leq k$

tel que le coefficient (u, v) de $M^{k'}$ est non nul.

La matrice I

Matrice identité – on appelle matrice identité la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 **(= une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs)**

$$\mathrm{I}_1 = (1),\ \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices comme tableaux

Définition. Soient n et p deux entiers strictement positifs. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes) un tableau de np nombres réels (ou complexes) rangés en n lignes et p colonnes.

Matrice diagonale

Si A est une matrice carrée $(n = p)$,
les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En algèbre linéaire, une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Si l'ordre n'est pas précisé, ou qu'il est implicitement déterminé par le contexte, nous pouvons la noter simplement I.

Concernant la multiplication des matrices

Puisque les matrices peuvent être multipliées à la seule condition que leurs types soient compatibles, il y a des matrices unité de tout ordre. I_n est la matrice unité d'ordre n.

Pour toute matrice A à n lignes et p colonnes (p, n entiers naturels non nuls)

$$I_n \times A = A \times I_p = A.$$

Ce qui montre que
la multiplication par une matrice unité n'a aucun effet sur une matrice donnée !

En particulier, I_n est l'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées d'ordre n.

Commutativité

Propriété d'une opération qui permet de changer l'ordre des termes sans en changer le résultat.

Le produit de matrices ne possède pas la propriété de commutativité. Toutefois, il arrive que $A \times B = B \times A$ (avec A et B deux matrices carrées de même ordre). On dit alors qu'elles commutent.

I et M commutent donc

$$(I + M)^k = \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} M^{k'} I^{k-k'}$$

$$= \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} M^{k'}$$

La formule du binôme de Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

la multiplication par une matrice unité n'a aucun effet sur une matrice donnée !

Tous les coefficients dans cette somme étant positifs, $(\,(I+M)^k\,)_{uv} > 0$

si et seulement l'un des $(M^{k'})_{u,v}$ $est \;>\; 0.$

On considère un graphe non orienté G.

<u>Une marche</u> entre deux sommets u et v
est une suite d'arêtes adjacentes entre elles,
dont la première est adjacente à u et la dernière à v.

<u>La différence avec un chemin</u> est qu'elle peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

Exercice 1.7

Question 3

Montrer que l'existence d'une marche entre u et v

implique l'existence d'un chemin entre u et v

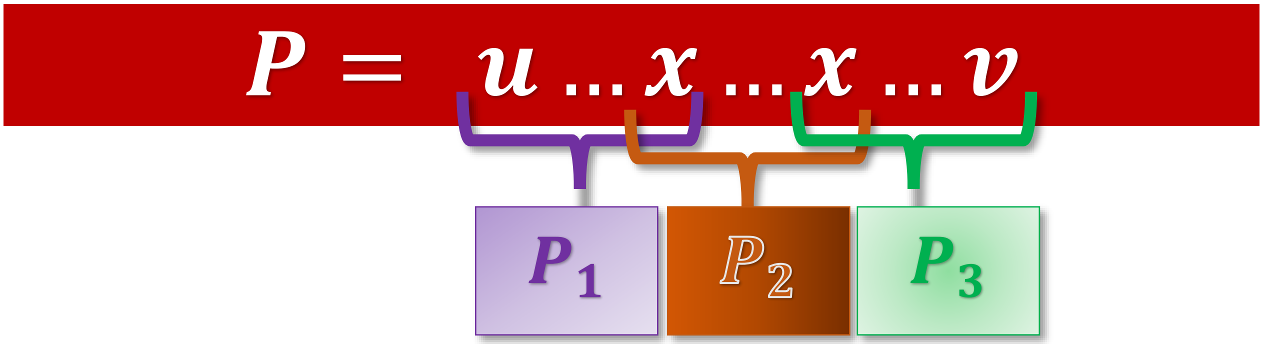
Raisonnement par l'absurde

Supposons qu'il existe une marche entre u ***et*** v.

Soit P **la marche la plus courte.**

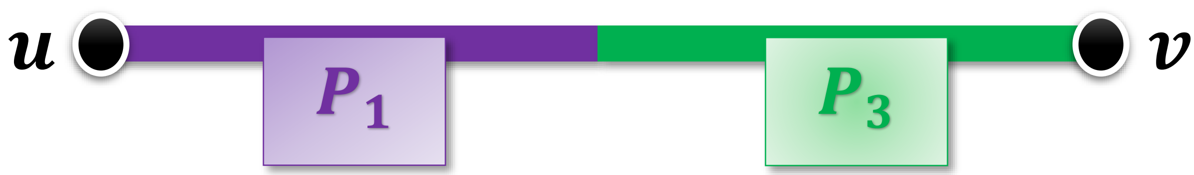
Si un sommet x ***se répète dans la marche*** P ***on peut décomposer la marche en :***

- P_1 : marche de u à x
- P_2 : marche de x à x
- P_3 : marche de x à v



Un graph qui correspond à cette description :

Alors la marche $P_1 \cup P_3$ est encore une marche entre u et v.



On répète cette opération tant qu'il y existe un sommet répété dans la marche.

Le résultat est un chemin entre u et v.

Vu que La marche $P_1 \cup P_3$,entre u et v, est de longueur inférieure à la marche $P \longrightarrow$ *contradiction* car :

Soit P la marche la plus courte.

(On a écrit ça au début)

Par conséquent, P est un chemin.

Donc : S'il existe une marche entre u et v,

on peut la réduire en un chemin en éliminant récursivement les boucles

On considère un graphe non orienté G.

<u>Une marche</u> entre deux sommets u et v
est une suite d'arêtes adjacentes entre elles,
dont la première est adjacente à u et la dernière à v.

<u>La différence avec un chemin</u> est qu'elle peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

Exercice 1.7

Question 4

En déduire que G est connexe
<u>si et seulement si</u>
tous les coefficients de $(I + M)^{n(G)}$ est non nul.

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.

$$G \text{ est connexe } \Leftrightarrow \forall (u,v), \text{ il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

$$\Leftrightarrow \forall (u,v) \text{ il existe une marche entre } u \text{ et } v \quad (Q3)$$

$$\Leftrightarrow \forall (u,v)\ \exists\ k' \leq n\ tq\ \left(M^{k'}\right)_{u,v} > 0 \quad (Q1)$$

$$\Leftrightarrow \forall (u,v)\ \left((I+M)^n\right)_{u,v} > 0 \quad (Q2)$$

Connexité, graphe connexe (Définition) : Un graphe est connexe si,pour toute paire de sommets u et v de G, il existe un chemin entre u et v

Tout chemin est une marche

S'il existe une marche entre u et v, on peut la réduire en un chemin en éliminant récursivement les boucles

?

Pourquoi I + M ?

Le coefficient (u,v) de M^K correspond au nombre de marches de longueur k entre u et v

S'il existe une marche entre u et v, on peut la réduire en un chemin en éliminant récursivement les boucles

Un graphe est connexe si, pour toute paire de sommets u et v de G, il existe un chemin entre u et v -> Le coefficient (u,v) de M^K est non-nul partout sauf la diagonale puisque les boucles sont interdites dans les graphes simples

La matrice d'identité prend en charge les valeurs non nulles pour la diagonale (sinon les diagonales seraient 0 puisque les boucles sont interdites dans les graphes simples).

Donc vu que la matrice d'identité contient des 0 partout et des 1 sur la diagonale, la somme de I avec M^K nous donne une matrice non-nule.

On considère un graphe non orienté G.

Une marche entre deux sommets u et v est une suite d'arêtes adjacentes entre elles, dont la première est adjacente à u et la dernière à v.

La différence avec un chemin est qu'elle peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

Question 5

Exercice 1.7

Quel est complexité de l'algorithme consistant à calculer cette matrice pour vérifier la connexité de G ?

Implémenteriez-vous cet algorithme ?

Algorithme cubique

L'application de la définition mathématique de la multiplication de matrice donne un algorithme qui prend du temps de l'ordre de n^3 pour multiplier deux $n \times n$ matrices ($\Theta(n^3)$ en notation grand O).

→Moins efficace que BFS ou DFS,

→Donc ne pas se fatiguer à l'implémenter !

BFS	Breadth First Search	Parcours en largeur	$O(m)$
DFS	Depth First Search	Parcours en profondeur	$O(m)$

On note n(G) = |V| et m(G) = |E|, ou n et m quand il n'y a pas d'ambigüité.