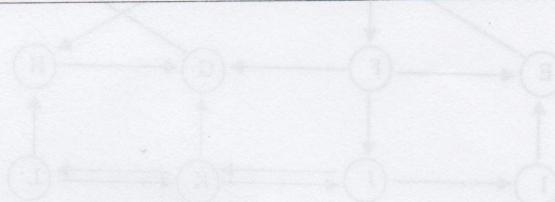


Algorithmique 5

Examen partiel du 18 novembre 2009

durée 1h30 - Tous documents autorisés - le barème est donné à titre indicatif

Téléphones portables, baladeurs et autres appareils électroniques doivent être éteints



Exercice 1 (6 points)

Soit G le graphe défini par la matrice d'adjacence M suivante :

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	0	1	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0

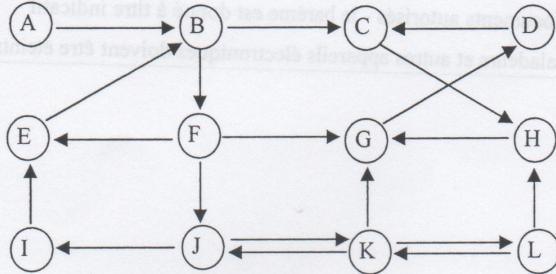
- 1) Donnez à partir de la matrice le nombre de sommets et d'arc composants le graphe, ainsi que les degrés entrant, sortant et total de chaque sommet. Expliquez comment trouver ces informations à partir de la matrice d'adjacence.
- 2) Dessinez le graphe G
- 3) Donner les propriétés et la connexité de G ?
- 4) Donner la bordure de (B,D)
- 5) Donner la fermeture transitive du graphe G
- 6) Donner la matrice M^4

Exercice 2 (2 points)

- 1) Dessiner un graphe non orienté biparti non connexe comprenant 8 sommets.
- 2) Dessiner un graphe non orienté comprenant 8 sommets dont les degrés sont respectivement: 7 6 5 3 2 2 1 1

Exercice 3 (7 points)

Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.



- 1) Donnez la décomposition en composantes connexe du graphe G en utilisant le double parcours en profondeur. Dessinez le graphe transposé, les résultats des 2 parcours en profondeur et dessinez le graphe réduit.
- 2) Le graphe réduit peut-il être vu comme un graphe de précédence? Pourquoi? Donner un ordre des sommets du graphe réduit.
- 3) Donnez la matrice d'incidence M_r du graphe réduit. Calculez M_r^2 , M_r^3 , $M_r^2 + M_r^3$. Que représentent ces matrices?

Exercice 4 (5 points)

On considère un graphe orienté pondéré $G = (S, A)$ donné sous la forme de deux tableaux. L'ensemble des sommets S est étiqueté par les lettres de a à p . Le premier tableau contient les indices relatifs au second tableau où il faut lire les successeurs d'un sommet donné ainsi que le poids de l'arc en question.

a	b	c	d	e	f	g	h
1	3	6	8	9	11	12	-

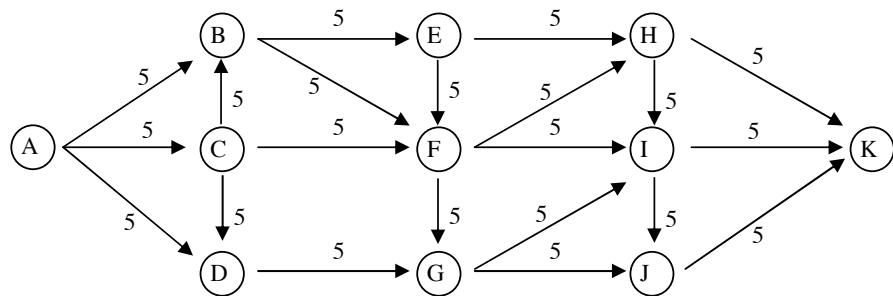
h n'a pas de successeur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	e	f	c	g	d	h	h	b	f	g	h
4	1	2	4	5	2	5	2	2	5	3	3

Exemple : dans le premier tableau on lit que les successeurs de c commencent à l'indice 6 dans le second tableau (ils sont au nombre de 2 seulement (8-6)) : il s'agit de d et h avec les poids suivants: arc (c,d) = 2 et arc (c, h) = 5

- 1) Dessinez le graphe G
- 2) Trouver la chemin le plus court du sommet A au sommet H. Quel algorithme utilisez-vous? Pourquoi? Vous donnerez les distances et pères de tous les sommets.
- 3) Soit G' le graphe non orienté de G . Donner un arbre couvrant minimum du graphe G' en utilisant l'algorithme de Prim.

Exercice 1 (5 points)



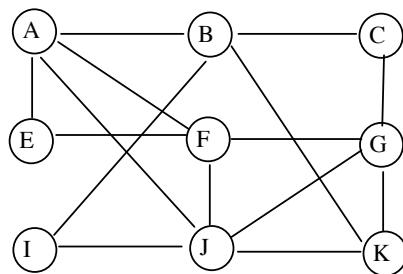
Soit G le réseau de transport défini par le graphe ci-dessus. Les sommets A et K sont respectivement la source et le puit du réseau. La capacité de tous les arcs est de 5.

On définit le flot F par les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{llllll} F(A,B)=5 & F(A,C)=4 & F(A,D)=1 & F(B,E)=5 & F(C,D)=2 & F(C,F)=2 \\ F(D,G)=3 & F(E,H)=2 & F(E,F)=3 & F(F,G)=5 & F(G,I)=5 & F(G,J)=3 \\ F(H,I)=2 & F(I,K)=5 & F(I,J)=3 & F(J,K)=5 \end{array}$$

- 1) Dessiner le flot sur le graphe et donner la valeur du flot.
- 2) Soit $X=\{F,D,G\}$ et $Y=\{B,E,C\}$. Donner la capacité de X vers Y . Donner le flot de X vers Y .
- 3) Donner le réseau résiduel de G induit par le flot F .
- 4) A partir du flot F utiliser la méthode de Ford-Fulkerson pour obtenir le flot maximal du réseau G .

Exercice 2 (5 points)



- 1) Le graphe ci-dessus est qu'il Eulerien ? Pourquoi ? Si oui donner un cycle Eulerien. Utilisez l'algorithme de Fleury pour cela, décrire le déroulement de l'algorithme.
- 2) Le graphe ci-dessus est qu'il Hamiltonien ? Pourquoi ? Si oui donner un cycle Hamiltonien.
- 3) Le graphe ci-dessus est il planaire ? Pourquoi ?
- 4) Donner un coloriage du graphe en utilisant l'algorithme Welsh-Powell .

Exercice 3 (5 points)

Tâche	Durée	Tâche Précédente
F	B	3
C	A H B	4
G	R	3
E	G S R	3
R	-	3
S	D F	2
D	R	2
H	B	4
A	D F R	5
B	-	4

Soit le problème d'ordonnancement représenté par le tableau ci-dessus.

- 1) Calculez le rang de chaque tache. Dessinez le graphe représentant le projet.
- 2) Donner les dates au plus tard, au plus tôt et les marges de chaque tache. Quelle sera la durée minimum du projet ?

Exercice 4 (5 points)

On modélise l'état d'un patient atteint d'un certain type cancer du poumon. Le cancer évolue à travers 3 stades S1, S2, S3. Chaque année, l'état du cancer peut évoluer.

En S1, la probabilité de rester en S1 est de 0.3, la probabilité de guérison est de 0.2 et la probabilité de passage en S2 est de 0.5.

En S2, la probabilité de rester en S2 est de 0.2, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de passage en S3 est de 0.7.

En S3, la probabilité de rester en S3 est de 0.1, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de décès 0.8.

- 1) Modéliser l'état du cancer à l'aide d'une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P et les états absorbants.
- 2) Donner la matrice de transition puissance 2 P^2 . Expliquez sa signification.

Soit N la matrice fondamentale de P

	S1	S2	S3
N=			
S1	1.42	0.89	0.69
S2	0	1.25	0.97
S3	0	0	1.11

3) Donner le temps moyen qu'un patient reste malade (jusqu'à la guérison ou le décès). Expliquez votre réponse.

4) Quel sont les probabilités qu'un patient venant de développer ce type de cancer soit guéri ou décède? Expliquez votre réponse.

Exercice 1 (4 points)

Un tournoi de judo oppose 6 personnes. Chaque participant doit affronter tous les autres.
(Pour chaque question expliquez et justifier votre réponse !)

- 1) Construisez un graphe représentant tous les matchs possibles.
- 2) Quel type de graphe obtenez vous ?
- 3) Si chaque participant ne fait qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? *Raisonner en terme de graphe.*
- 4) A l'aide du graphe, proposez un calendrier des matches.

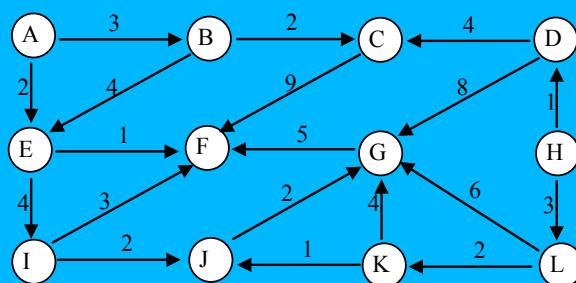
Exercice 2 (2 points)

Un graphe peut il être à la fois transitif et biparti ? Si oui donnez un exemple. Si non, pourquoi ?

Exercice 3 (9 points)

Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.

Soit X un graphe :



- 1) Donner le chemin le plus court de L vers F dans X. Dites quel algorithme vous utilisez et pourquoi. Indiquez les distances de tous les sommets.
- 2) Peut-on voir ce graphe comme un graphe de précédence ? Pourquoi ? Si c'est le cas, donnez un ordre des sommets.
- 3) On considère le graphe non orienté associé à X. Donner l'arbre couvrant minimum. Quel algorithme utilisez vous?

Exercice 4 (5 points)

Une entreprise de vente par correspondance comporte 2 services de prise de commandes C1 et C2. Une fois la commande prise, elle est transmise à l'un des trois services de préparation de commandes P1, P2, P3.

Les services de prise de commandes C1 et C2 peuvent enregistrer jusqu'à 40 commandes par heure. La logistique de l'entreprise permet de transférer toutes les heures 20 commandes de C1 vers P1, 20 de C1 vers P2, 20 de C2 vers P2 et 30 de C2 vers P3. P1, P2, P3 peuvent respectivement préparer jusqu'à 20, 10 et 50 commandes par heure. P3 a la possibilité de prendre en charge 10 commandes attribuées à P2.

- 1) Modéliser le problème par un réseau de transport.
- 2) Quel est la capacité de $X = \{C1, C2, P3\}$ vers $Y = \{P1, P2\}$?
- 3) Trouver le nombre maximum de commandes que peut traiter l'entreprise en 1 heure. *Pour cela vous utilisez la méthode Ford-Fulkerson.. A chaque itération de l'algorithme vous donnerez le flot actuel et le réseau résiduel.*
- 4) Quels sont les services à améliorer en priorité pour augmenter la productivité de l'entreprise ? Expliquez.

Université René DESCARTES - UFR de mathématiques et Informatique

Algorithmique avancé

Examen partiel du 12 novembre 2010

durée 1h30 - Tous documents autorisés - le barème est donné à titre indicatif

Téléphones portables, baladeurs et autres appareils électroniques doivent être éteints

Exercice 1 (10 points)

Soit G le graphe défini par la matrice d'adjacence suivante :

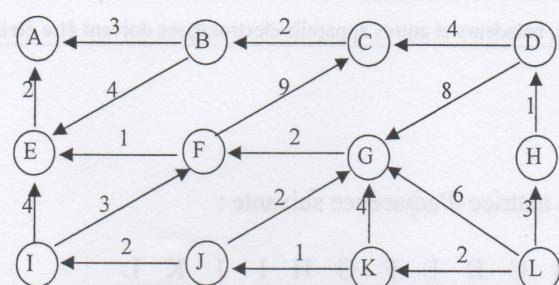
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
D	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
F	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
J	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.

- 1) Donnez à partir de la matrice le nombre de sommets et d'arc composants le graphe, ainsi que les degrés entrant, sortant et total de chaque sommet. Expliquez comment trouver ces informations à partir de la matrice d'adjacence.
- 2) Dessinez le graphe G (disposez les sommets dans l'ordre alphabétique sur 3 lignes et 4 colonnes).
- 3) G est-il non-connexe, faiblement connexe, fortement connexe ? Expliquez pourquoi
- 4) Donner la bordure de (A, B, C, G)
- 5) Donnez un parcours en profondeur du Graphe G en utilisant l'algorithme DFS. Dessinez le graphe en coloriant/surlignant les arcs formant l'arborescence et vous indiquez les dates de début et de fin de chaque sommets.
- 6) Donner la nature de chaque arc (couvrant, liaison, avant, blanc).
- 7) Donnez la décomposition en composantes connexe du graphe G en utilisant le double parcours en profondeur. Dessinez le graphe transposé, le résultat du parcours en profondeur et dessinez le graphe réduit.
- 8) Donnez la matrice M_r du graphe réduit. Calculez M_r^2 , M_r^3 , $M_r^2 + M_r^3$. Que représentent ces matrices ?

Exercice 2 (7.5 points)

Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.



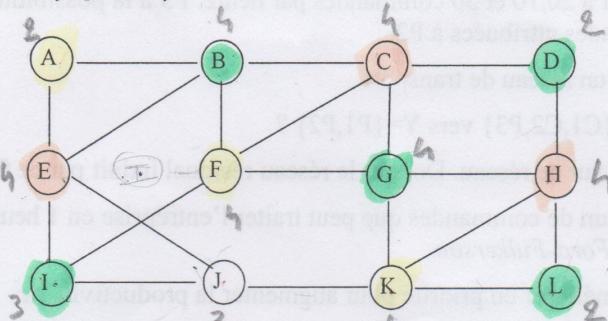
- 1) Donner le chemin le plus court de L vers F. Dites quel algorithme vous utilisez et pourquoi. Indiquez les distances de tous les sommets.
- 2) Peut-on voir ce graphe comme un graphe de précédence ? Si c'est le cas, donnez un ordre des sommets.
- 3) Donner l'arbre couvrant minimum du graphe non orienté correspondant. Vous utilisez l'algorithme de Prim.

Exercice 3 (2.5 points)

Un tournoi de judo oppose 6 personnes. Chaque participant doit affronter tous les autres.
(Pour chaque question expliquez et justifier votre réponse !)

- 1) Construisez un graphe représentant tous les matchs possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ?
- 2) Si chaque participant ne fait qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? À l'aide du graphe, proposez un calendrier des matches.

Exercice 1 (4 points)



- 1) Le graphe ci-dessus est qu'il Eulerien ? Pourquoi ? Si oui donner un cycle Eulerien.
- 2) Le graphe ci-dessus est qu'il Hamiltonien ? Pourquoi ? Si oui donner un cycle Hamiltonien.
- 3) Le graphe ci-dessus est-il planaire ? Pourquoi ?
- 4) Donner un coloriage du graphe en utilisant l'algorithme Welsh-Powell .

Exercice 2 (5 points)

On projette de construire une maison. Le projet est divisé en plusieurs tâches.

Tâche	Libellé de la tâche	Durée	Tâches à terminer avant
T_1	gros oeuvre	8	-
T_2	charpentes	2	T_1
T_3	Toiture	1	T_2, T_1
T_4	Plomberie	3	T_1
T_5	Instalation électrique	2	T_1
T_6	Ravalement	1	T_1, T_2, T_3, T_4
T_7	Fenêtre	1	T_1, T_2
T_8	Aménagements extérieurs	1	T_3, T_4, T_5
T_9	Plâtres	2	T_1, T_3, T_4, T_5, T_7
T_{10}	Sols	2	T_4, T_5, T_7, T_9
T_{11}	Peintures	2	T_9
T_{12}	Emménagement	1	Toutes les tâches

- 1) Calculez le rang de chaque tâche. Dessinez le graphe représentant le projet.
- 2) Donner les dates au plus tard, au plus tôt et les marges de chaque tâche. Quelle sera la durée minimum du projet ?

Exercice 3 (6 points)

Une entreprise de vente par correspondance comporte 2 services de prise de commandes C1 et C2. Une fois la commande prise, elle est transmise à l'un des trois services de préparation de commandes P1, P2, P3.

Les services de prise de commandes C1 et C2 peuvent enregistrer jusqu'à 40 commandes par heure. La logistique de l'entreprise permet de transférer toutes les heures 20 commandes de C1 vers P1, 20 de C1 vers P2, 20 de C2 vers P2 et 30 de C2 vers P3. P1, P2, P3 peuvent respectivement préparer jusqu'à 20, 10 et 50 commandes par heure. P3 à la possibilité de prendre en charge 10 commandes attribuées à P2.

- 1) Modéliser le problème par un réseau de transport.
- 2) Quel est la capacité de $X = \{C1, C2, P3\}$ vers $Y = \{P1, P2\}$?
- 3) Donner un flot quelconque sur ce réseau. Donner le réseau résiduel induit par ce flot.
- 4) Trouver le nombre maximum de commandes que peut traiter l'entreprise en 1 heure. *Pour cela vous utilisez la méthode Ford-Fulkerson.*
- 5) Quels sont les services à améliorer en priorité pour augmenter la productivité de l'entreprise ? Expliquez.

Exercice 4 (5 points)

On modélise le parcours d'un étudiant de licence.

En L1, le taux de redoublement est de 30%, le taux d'abandon est de 20% et le taux de passage en L2 est de 50%.

En L2, le taux de redoublement est de 20%, le taux d'abandon est de 10% et le taux de passage en L2 est de 70%.

En L3, le taux de redoublement est de 10%, le taux d'abandon est de 10% et le taux d'obtention de la licence est de 80%.

- 1) Modéliser le parcours d'un étudiant de licence à l'aide d'une chaîne de Markov. Quels sont les états persistants.
- 2) Donner sa matrice de transition P. Donner la forme canonique de la matrice de transition.
- 3) Donner la matrice de transition puissance 2 P^2 . Expliquez sa signification.

Soit N la matrice fondamentale de P

N=	L1	L2	L3
L1	1.42	0.89	0.69
L2	0	1.25	0.97
L3	0	0	1.11

- 4) Donner le temps moyen que passe un étudiant en licence. Expliquez votre réponse.
- 5) Quelles sont les probabilités qu'un étudiant venant de s'inscrire en première année obtienne sa licence ou abandonne le cursus ? Expliquez votre réponse.

Correction examen 11 janvier 2011

Exercice 01 :

1) Le graphe ci-dessus n'est pas Eulerien.

Parce que, tous ses sommets ne sont pas de degrés paires.
par contre les deux sommets I et J sont impaires.
Donc, ce graphe est plutôt semi-eulerien.

2) Oui. Le graphe ci-dessus est Hamiltonien.

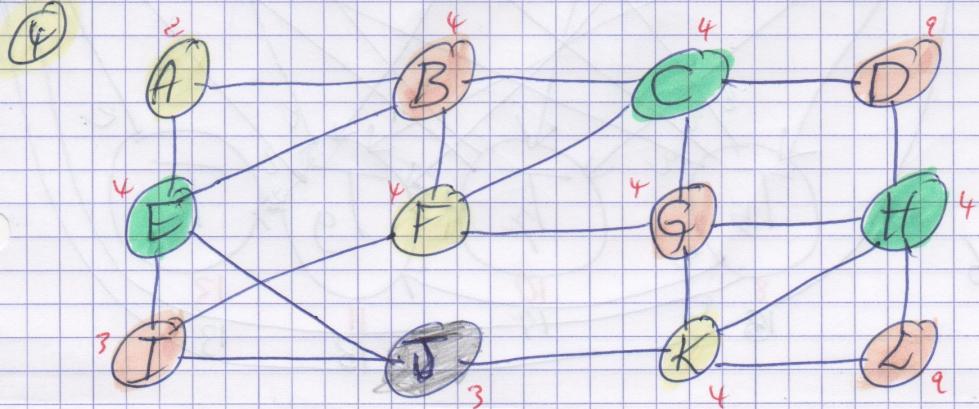
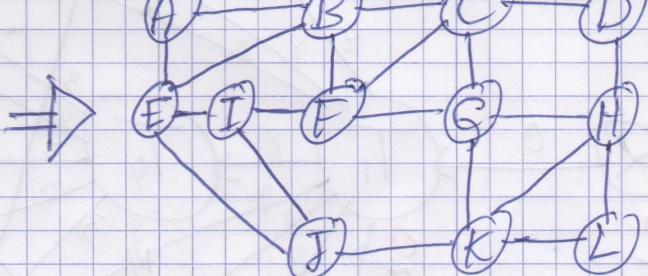
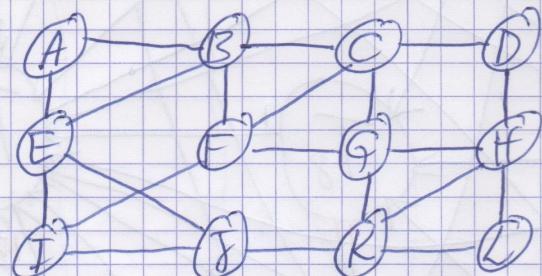
Parce que, il forme un cycle de Jordan
contenant tous ses sommets.

Cycle de Jordan :

$$(AB)(BF)(FG)(GC)(CD)(DH)(HL)(LK)(KJ)(JI)(IE)(EA)$$

3) Oui, il est planaire.

Car sa représentation dans un plan, toutes ses arêtes ne s'entrecoupent pas.



Exercice 08 :

Σ1 $\propto T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6 \ T_7 \ T_8 \ T_9 \ T_{10} \ T_{11} \ T_{12} \ \Sigma$

degré entrant 0 1 1 2 1 1 4 2 3 5 4 1 11

Rang $k=0$ X 0

$k=1$ X 0 1 0 0 3 1 4 10

$k=2$ X 0 X X 1 0 1 2 2 7

$k=3$ X 0 X 0 0 1 5

$k=4$ X X X 0 0 2

$k=5$ X X 0

$k=6$ X 0

$k=7$ X

$k=0$

$k=1$

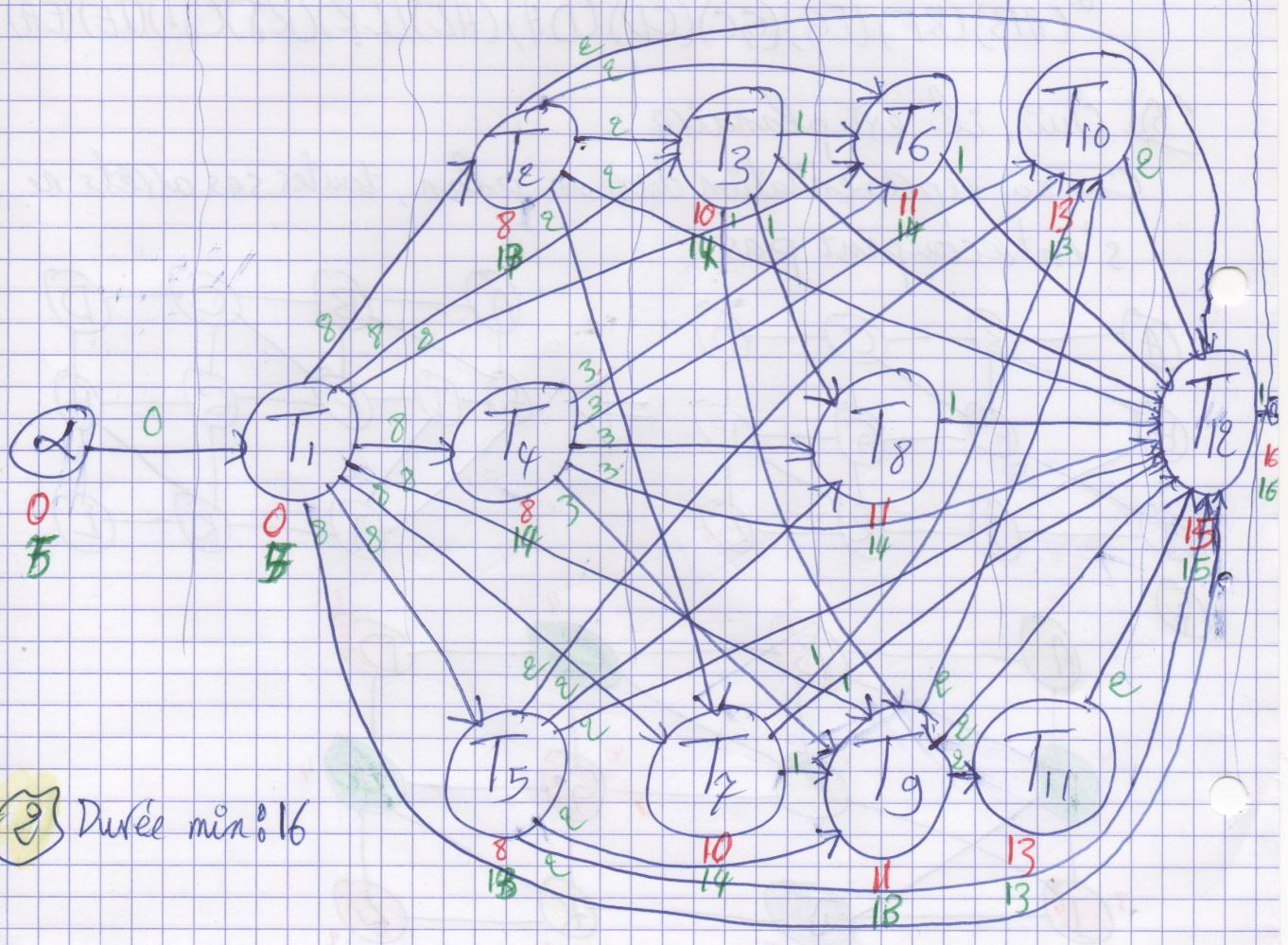
$k=2$

$k=3$

$k=4$

$k=5$

$k=6 \ k=7$

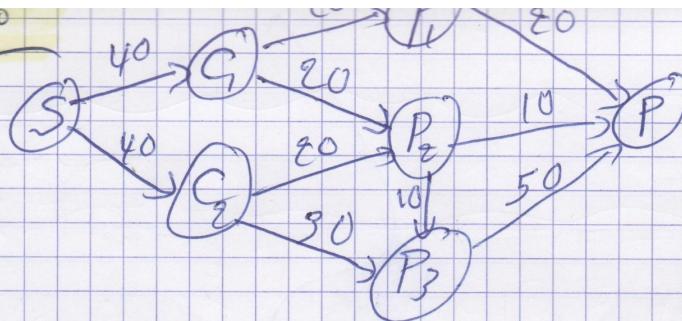


13

avec :

(S) : source

(P) : Puit

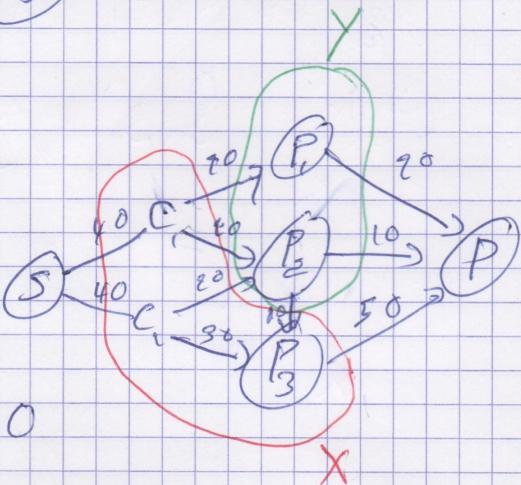


14 $X = \{C_1, C_2, C_3\}$ $Y = \{P_1, P_2\}$

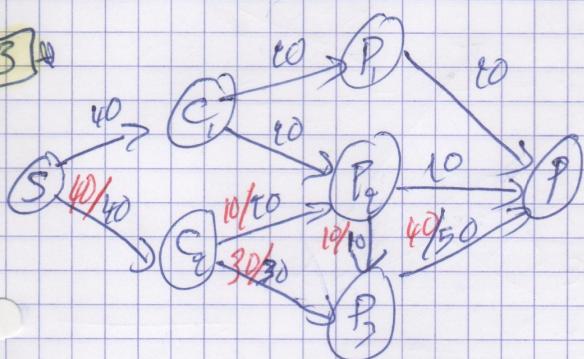
$$C(X, Y) = C(C_1, P_1) + C(C_1, P_2) + C(C_2, P_1) \\ + C(C_2, P_2) + C(C_3, P_1) + C(C_3, P_2)$$

$$C(X, Y) = 20 + 80 + 20 + 30 + 0 + 0$$

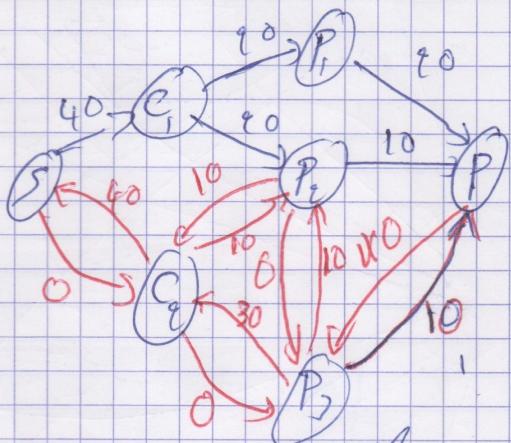
$C(X, Y) = 90$



15

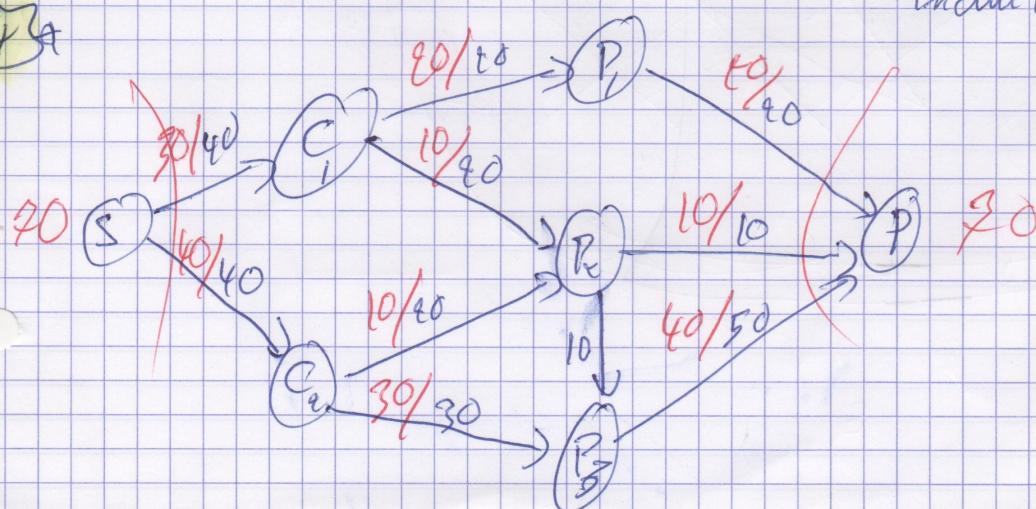


Un fillet sur réseau



réseau résiduel
induit par ce fillet

16



E5) # Service à améliorer en priorité : PC

d'autres services à améliorer aussi : P3 et C.

Expliquez ??

* Améliorer P2 car il faut qu'il prépare 10 commandes supplémentaires. Sa capacité de 10 commandes est insuffisante.

* Il faut améliorer P3 car il a une capacité de 50 commandes préparées alors que seulement 40 commandes sont utilisées.

⇒ Donc, pourquoi pas transférer 10 commandes supplémentaires chez P3 et les faire passer et faire passer les 40 commandes

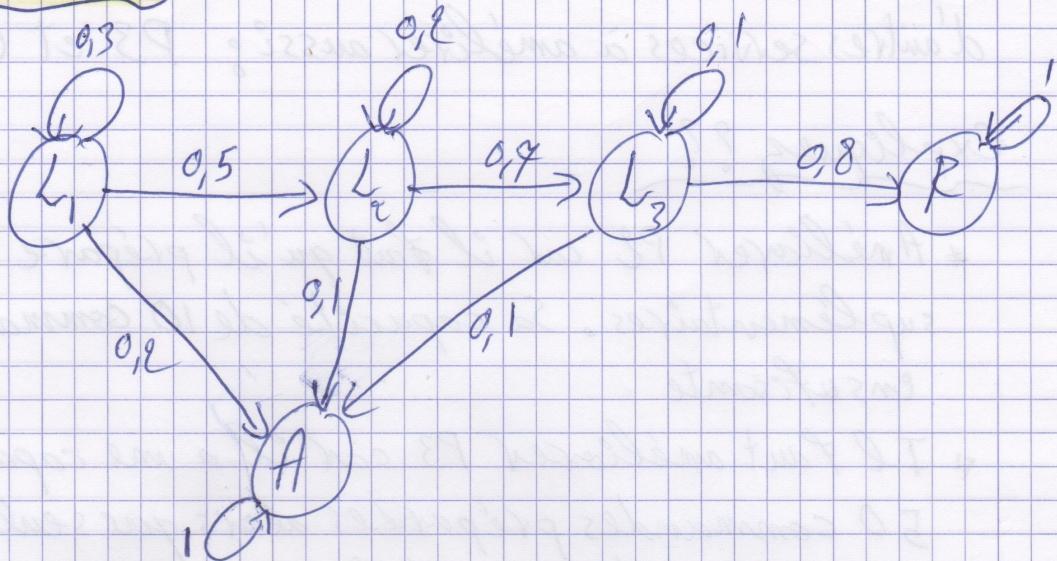
P3 à 40 commandes
et

P2 à 90 commandes

* La logistique doit transférer que 10 commandes /h de C1 vers P2.

Exercice 04

Q4



(R) : Réussite et Obtention
de la licence

(A) : Abandon

⇒ Aucun état persistant, ils sont tous des états transitoires.

Q5

P	A	L ₁	L ₂	L ₃	R
A	1	0	0	0	0
L ₁	0,2	0,3	0,5	0	0
L ₂	0,1	0	0,2	0,7	0
L ₃	0,1	0	0	0,1	0,8
R	0	0	0	0	1

Forme canonique :

Il y a deux états absorbants : A et R.

	A	R	L ₁	L ₂	L ₃	
A	1	0	0	0	0	0
R	0	1	0	0	0	
L ₁	0,2	0	0,3	0,5	0	
L ₂	0,1	0	0	0,9	0,7	0
L ₃	0,1	0,8	0	0	0,1	

3*

P ²	A	L ₁	L ₂	L ₃	R
A	1	0	0	0	0
L ₁	0,41	0,09	0,25	0,35	0
L ₂	0,19	0	0,04	0,14	0,56
L ₃	0,01	0	0	0,01	0,88
R	0	0	0	0	1

⇒ Sa signification :

P₂ représente l'état de probabilité du parcours d'un étudiant de licence en deux ans.

(4)*

A R L₁ L₂ L₃

$$\begin{array}{c|cc|ccc|c} & A & R & L_1 & L_2 & L_3 & \\ \hline A & I & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline L_1 & 0,1 & 0 & | & 0,3 & 0,5 & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & | & 0 & 0,9 & 0,7 & 0 \\ L_3 & 0,1 & 0,8 & | & 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{array}$$

L₁ L₂ L₃

$$\text{On a } N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,42 & 0,89 & 0,69 \\ 0 & 1,85 & 0,97 \\ 0 & 0 & 1,11 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \text{ ans} \\ 2,82 \text{ ans} \\ 1,11 \text{ ans} \end{matrix}$$

\Rightarrow le temps moyen que passe un étudiant en licence s'il commence à partir de la L₁ est la somme ligne L₁ de la matrice N.

$$\text{Donc: } 1,42 + 0,89 + 0,69 = 3 \text{ ans.}$$

5)

Cette question est la suite de la question précédente

(4) :

On a :

$$B = N \times R = \begin{pmatrix} 1,42 & 0,89 & 0,69 \\ 0 & 1,85 & 0,97 \\ 0 & 0 & 1,11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,42 & 0,89 \\ 0,999 & 0,996 \\ 0,111 & 0,888 \end{pmatrix}$$

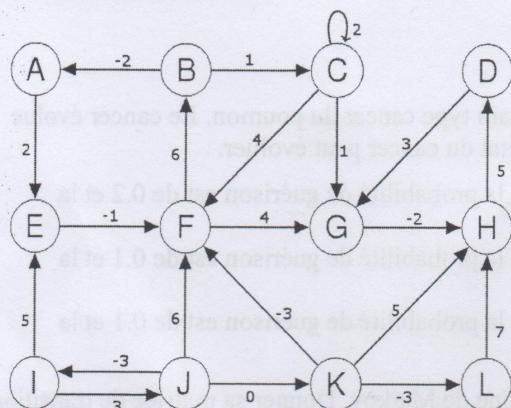
* l'étudiant à 55,2% de réussir sa licence

* l'étudiant à 44,2% d'abandonner sa licence à partir de la L₁.

Université René DESCARTES - UFR de mathématiques et Informatique**Algorithmique avancé****Examen du 10 Juin 2011**

durée 1h30 - documents autorisés - le barème est donné à titre indicatif

Téléphones portables, baladeurs et autres appareils électroniques doivent être éteints

Exercice 1 (10 points)

- 1) Donner le chemin le plus court du sommet I vers le sommet D
- 2) Appliquez l'algorithme du double parcours en profondeur pour trouver toutes les composantes fortement connexes du graphe non pondéré correspondant. Donner les deux parcours que vous avez construit.
- 3) Tracer le graphe réduit du graphe.
- 4) Montrez que le graphe réduit G_R d'un graphe G quelconque ne peut pas contenir de circuit.
- 5) Un graphe réduit peut-il être vu comme un graphe de précédence ? Pourquoi ?
- 6) A l'aide de la représentation matricielle, donnez un ordre des événements du graphe réduit qui respecte la précédence. Utiliser l'ordre lexicographique pour le choix des sommets.

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise de vente par correspondance comporte 2 services de prise de commandes C1 et C2. Une fois la commande prise, elle est transmise à l'un des trois services de préparation de commandes P1, P2, P3. Enfin deux services d'expédition E1 et E2 se chargent d'envoyer les commandées.

Les services de prise de commandes C1 et C2 peuvent enregistrer respectivement jusqu'à 60 et 40 commandes par heure. La logistique de l'entreprise permet de transférer toutes les heures 40 commandes de C1 vers P1, 30 de C1 vers P2, 10 de C2 vers P2 et 20 de C2 vers P3. P1, P2, P3 peuvent tous trois préparer jusqu'à 40 commandes par heure. E1 et E2 peuvent expédier respectivement 20 et 50 commandes par heures. E1 a la possibilité de déléguer jusqu'à 10 commandes vers E2. P1 envoie toutes ses commandes à E1. P3 envoie toutes ses commandes à E2. P2 envoie au maximum 20 commandes vers chacun des services d'expédition.

- 1) Modéliser le problème par un réseau de transport.
- 2) Quel est la capacité de $X=\{P1,P2,P3\}$ vers $Y=\{E1,E2\}$?
- 3) Trouver le nombre maximum de commandes que peut traiter l'entreprise en 1 heure. Pour cela vous utilisez la méthode Ford-Fulkerson.. A chaque itération de l'algorithme vous donnerez le flot actuel et le réseau résiduel.
- 4) Quels sont les services à améliorer en priorité pour augmenter la productivité de l'entreprise ? Expliquez.

(annexe 01) à volonté

Exercice 3 (5 points)

On modélise l'état d'un patient atteint d'un certain type cancer du poumon. Le cancer évolue à travers 3 stades $S1, S2, S3$. Chaque année, l'état du cancer peut évoluer.

En $S1$, la probabilité de rester en $S1$ est de 0.3, la probabilité de guérison est de 0.2 et la probabilité de passage en $S2$ est de 0.5.

En $S2$, la probabilité de rester en $S2$ est de 0.2, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de passage en $S3$ est de 0.7.

En $S3$, la probabilité de rester en $S3$ est de 0.1, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de décès 0.8.

1) Modéliser l'état du cancer à l'aide d'une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P et les états absorbants.

2) Donner la matrice de transition puissance 3 P^3 . Expliquez sa signification.

Soit N la matrice fondamentale de P

$N =$	L1	L2	L3
L1	1.42	0.89	0.69
L2	0	1.25	0.97
L3	0	0	1.11

3) Donner le temps moyen qu'un patient reste malade (jusqu'à la guérison ou le décès). Expliquez votre réponse.

4) Quel sont les probabilités qu'un patient venant de développer ce type de cancer soit guéri ou décède? Expliquez votre réponse.

(annexe 02) à volonté

Université René DESCARTES - UFR de mathématiques et Informatique

Algorithmique Avancé

Examen partiel du 9 novembre 2012

durée 1h30 - Aucun documents autorisés - le barème est donné à titre indicatif

Téléphones portables, baladeurs et autres appareils électroniques doivent être éteints

Exercice 1 (9 points)

Soit G le graphe défini par la matrice d'adjacence suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I-	J	K	L
A	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

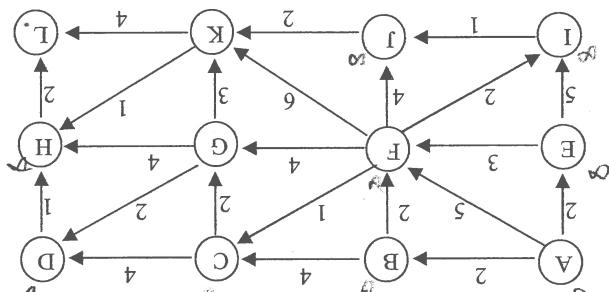
Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.

- 1) Donnez à partir de la matrice d'adjacence, les degrés entrant, sortant et total de chaque sommet. Expliquez comment trouver ces informations à partir de la matrice d'adjacence.
- 2) Dessinez le graphe G
- 3) G est-il non-connexe, faiblement connexe, fortement connexe ? Expliquez pourquoi
- 4) Donner la bordure de (A,B,C,G)
- 5) Donnez un parcours en profondeur du Graphe G en utilisant l'algorithme DFS. Dessinez le graphe en coloriant/surlignant les arcs formant l'arborescence et vous indiquez les dates de début et de fin de chaque sommets.
- 6) Donner la nature de chaque arc (couvrant, liaison, avant, retour).
- 7) Calculer la décomposition en composantes connexes du graphe G en utilisant le double parcours en profondeur. Vous donnerez le graphe transposé et le résultat du parcours en profondeur.
- 8) Dessinez le graphe réduit.

Nombre d'ams présents.
Montrer que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même

Exercice bonus (2 points)

- 3) Donner un arbre couvrant minimum du graphe non orienté correspondant.
- 2) Peut-on voir ce graphe comme un graphe de précédence ? Pourquoi ? Si c'est le cas, donnez un ordre des sommets.
- 1) Donner le chemin le plus court de A vers L. Dites quel algorithme vous utilisez et pour quoi. Indiquez les distances et pères de tous les sommets.



Pour chaque algorithme, vous utilisez l'ordre alphabétique lorsque vous aurez un choix à faire.

Exercice 3 (9 points)

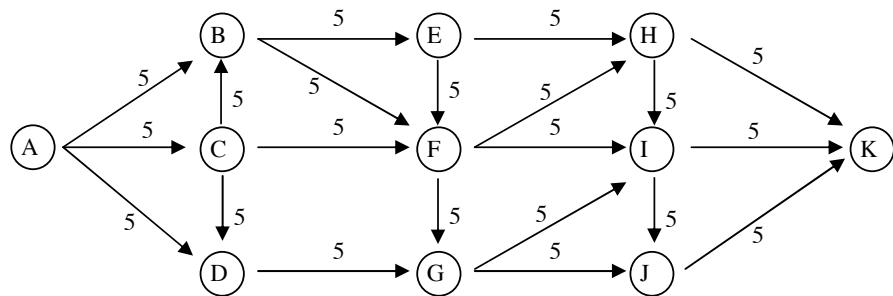
Donner la matrice M^4 . Expliquez comment vous obtenez cette matrice.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	1	0
C	0	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1
F	0	0	1	0	0	0

Soit la matrice M suivante :

Exercice 2 (2 points)

Exercice 1 (5 points)



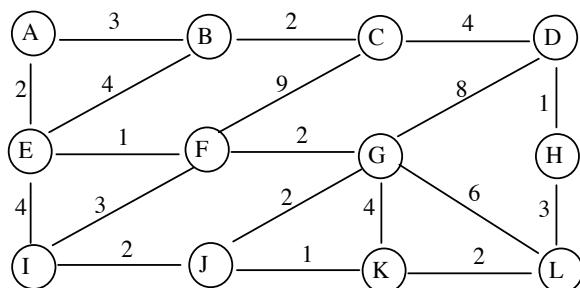
Soit G le réseau de transport défini par le graphe ci-dessus. Les sommets A et K sont respectivement la source et le puit du réseau. La capacité de tous les arcs est de 5.

On définit le flot F par les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{llllll} F(A,B)=5 & F(A,C)=4 & F(A,D)=1 & F(B,E)=5 & F(C,D)=2 & F(C,F)=2 \\ F(D,G)=3 & F(E,H)=2 & F(E,F)=3 & F(F,G)=5 & F(G,I)=5 & F(G,J)=3 \\ F(H,I)=2 & F(I,K)=5 & F(I,J)=2 & F(J,K)=5 \end{array}$$

- 1) Dessiner le flot sur le graphe et donner la valeur du flot.
- 2) Soit $X=\{F,D,G\}$ et $Y=\{B,E,C\}$. Donner la capacité de X vers Y . Donner le flot de X vers Y .
- 3) Donner le réseau résiduel de G induit par le flot F .
- 4) A partir du flot F utiliser la méthode de Ford-Fulkerson pour obtenir le flot maximal du réseau G .

Exercice 2 (4 points)



- 1) Est-ce que ce graphe est Eulerien ? Justifier.
- 2) Donner l'arbre couvrant minimum du graphe. Vous utilisez l'algorithme de Prim.

Exercice 3 (4 points)

Tâche	Durée	Tâche Précédente
F	B	3
C	A H B	4
G	R	3
E	G S R	3
R	-	3
S	D F	2
D	R	2
H	B	4
A	D F R	5
B	-	4

Soit le problème d'ordonnancement représenté par le tableau ci-dessus.

- 1) Calculez le rang de chaque tache. Dessinez le graphe représentant le projet.
- 2) Donner les dates au plus tard, au plus tôt et les marges de chaque tache. Quelle sera la durée minimum du projet ?

Exercice 4 (5 points)

On modélise l'état d'un patient atteint d'un certain type cancer du poumon. Le cancer évolue à travers 3 stades S1, S2, S3. Chaque année, l'état du cancer peut évoluer.

En S1, la probabilité de rester en S1 est de 0.3, la probabilité de guérison est de 0.2 et la probabilité de passage en S2 est de 0.5.

En S2, la probabilité de rester en S2 est de 0.2, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de passage en S3 est de 0.7.

En S3, la probabilité de rester en S3 est de 0.1, la probabilité de guérison est de 0.1 et la probabilité de décès 0.8.

1) Modéliser l'état du cancer à l'aide d'une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P et les états absorbants.

2) Donner la matrice de transition puissance 2 P^2 . Expliquez sa signification.

Soit N la matrice fondamentale de P

N=	S1	S2	S3
S1	1.42	0.89	0.69
S2	0	1.25	0.97
S3	0	0	1.11

3) Donner le temps moyen qu'un patient reste malade (jusqu'à la guérison ou le décès). Expliquez votre réponse.

4) Quel sont les probabilités qu'un patient venant de développer ce type de cancer soit guéri ou décède? Expliquez votre réponse.

Exercice 5 (2 points)

Un groupe de personnes est tel que :

- (i) chaque personne est membre d'exactement deux associations,
 - (ii) chaque association comprend exactement trois membres,
 - (iii) deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.
- Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ? Justifier votre réponse à l'aide d'un graphe.

Université René DESCARTES - UFR de mathématiques et Informatique

Algorithmique avancé

durée 1h30 - Aucun documents autorisés - le barème est donné à titre indicatif

Téléphones portables, baladeurs et autres appareils électroniques doivent être éteints

Exercice 1 (6 points)

Une entreprise veut modéliser le processus de vente de ses produits.

On suppose que les clients qui contact l'entreprise commence par faire une demande d'information.

Lorsqu'un client fait une demande d'Information, une semaine plus tard il y a 50% de chance qu'une phase de négociation s'engage, 20% de chance que le client fasse une autre demande d'information et 30% de chance que le client ne se manifeste plus.

Après une semaine de Négociation, il y a 50% de chance qu'elles aboutissent sur l'établissement d'un devis, 30% de chance qu'elles se poursuivent une semaine supplémentaire et 20% de chance qu'elles échouent.

L'établissement d'un Devis prend une semaine. Il y a 20% de chance que le client accepte le devis et finalise l'achat, 30% de chance que le client recommence les négociations et 50% que le client demande une semaine de réflexion.

Après une semaine de Réflexion, il y a 50% de chance que le client accepte le devis et finalise l'achat, 30% de chance qu'il prolonge d'une semaine sa réflexion et 20% qu'il fasse une autre demande d'information.

- 1) Modéliser ce processus avec une chaîne de Markov, donner la matrice de transition P sous forme canonique.
- 2) Donner P^2
- 3) Si un client fait une demande d'information, quelle est la probabilité qu'il fasse un achat ?
- 4) Quel est le temps moyen du processus de vente ?
- 5) Chaque mois (4 semaines) 20 clients font une demande d'information. Sachant qu'une semaine de négociation mobilise un employé à plein temps, combien l'entreprise doit-elle avoir de négociateurs pour traiter tous ses clients ? Expliquez le raisonnement.

Indication : La matrice naturelle de la chaîne de markov est

	I	N	D	R
I	1.41	1.28	0.64	0.64
N	0.26	2.05	1.02	1.02
D	0.36	0.87	1.44	1.44
R	0.56	0.51	0.26	2.26

Exercice 2 (5 points)

On projette de construire une maison. Le projet est divisé en plusieurs tâches.

Tâche	Libellé de la tâche	Durée	Tâches à terminer avant
<i>T1</i>	<i>gros oeuvre</i>	<i>8</i>	
<i>T2</i>	<i>charpentes</i>	<i>2</i>	<i>T1</i>
<i>T3</i>	<i>Toiture</i>	<i>1</i>	<i>T2, T1</i>
<i>T4</i>	<i>Plomberie</i>	<i>3</i>	<i>T1</i>
<i>T5</i>	<i>Instalation électrique</i>	<i>2</i>	<i>T1</i>
<i>T6</i>	<i>Ravalement</i>	<i>1</i>	<i>T1, T2, T3, T4</i>
<i>T7</i>	<i>Fenêtre</i>	<i>1</i>	<i>T1, T2</i>
<i>T8</i>	<i>Aménagements extérieurs</i>	<i>1</i>	<i>T3, T4, T5</i>
<i>T9</i>	<i>Plâtres</i>	<i>2</i>	<i>T1, T3, T4, T5, T7</i>
<i>T10</i>	<i>Sols</i>	<i>2</i>	<i>T4, T5, T7, T9</i>
<i>T11</i>	<i>Peintures</i>	<i>2</i>	<i>T9</i>
<i>T12</i>	<i>Emménagement</i>	<i>1</i>	<i>Toutes les tâches</i>

- 1) Calculez le rang de chaque tâche. Dessinez le graphe représentant le projet.
- 2) Donner les dates au plus tard, au plus tôt et les marges de chaque tâche. Quelle sera la durée minimum du projet ?

Exercice 3 (6 points)

Une entreprise de vente par correspondance comporte 2 services de prise de commandes C1 et C2. Une fois la commande prise, elle est transmise à l'un des trois services de préparation de commandes P1, P2, P3.

Les services de prise de commandes C1 et C2 peuvent enregistrer jusqu'à 40 commandes par heure. La logistique de l'entreprise permet de transférer toutes les heures 20 commandes de C1 vers P1, 20 de C1 vers P2, 20 de C2 vers P2 et 30 de C2 vers P3. P1, P2, P3 peuvent respectivement préparer jusqu'à 20, 10 et 50 commandes par heure. P3 à la possibilité de prendre en charge 10 commandes attribuées à P2.

- 1) Modéliser le problème par un réseau de transport.
- 2) Quel est la capacité de $X = \{C1, C2, P3\}$ vers $Y = \{P1, P2\}$?
- 3) Donner un flot quelconque de taille 40 sur ce réseau. Donner le réseau résiduel induit par ce flot.
- 4) Trouver le nombre maximum de commandes que peut traiter l'entreprise en 1 heure. Pour cela vous utilisez la méthode Ford-Fulkerson.
- 5) Quels sont les services à améliorer en priorité pour augmenter la productivité de l'entreprise ? Expliquez.

Exercice 4 (3 points)

- 1) Construire le graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 24 et dont les arcs relient x à y lorsque x divise y . De plus, les arcs sont valués par le quotient y/x (ainsi, l'arc allant de 3 vers 15 a la valeur 5).
- 2) Comment reconnaît-on dans ce graphe un nombre premier ?
- 3) Comment retrouver dans ce graphe la décomposition d'un nombre en facteurs premiers ?