Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et calcul 1 : Contrôle continu n°2
9 Novembre 2015

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE.

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \ln\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\ln(3)-\ln(x)}{x^2-2x-3}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x^3-9}-\sqrt{x^3})$.

4) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{2x-2}}$.

Exercice 2. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f: &]-1,+\infty[& \longrightarrow &]-\infty,\frac{5}{2}[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{5x-1}{2x+2} \end{array}$$

(1) Montrer que f est strictement croissante.
(2) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ dans $]-\infty,\frac{5}{2}[$. Déterminer sa réciproque, notée f^{-1}.
(3) D'après le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall\, x,y>0\,, \quad x<y \quad \Rightarrow \quad f(y)-f(x)<3(x-y).$$

Exercice 3. (*Remarque : le but de cet exercice est de montrer la convergence d'une suite vers une limite ℓ, à aucun moment il n'est demandé de calculer explicitement ℓ !*)

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$$

ainsi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$.

(2) En étudiant la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle n'a qu'une limite possible $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $1 < \ell < 2$ (il n'est pas nécessaire de calculer ℓ).

(3) Montrer que:

$$\forall\, x, y \;>\; 0, \quad |\, f(x) - f(y) \,| < |\, x - y \,| \,.$$

(4) Prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\, u_{n+1} - \ell \,| < |\, u_n - \ell \,|$ (on pourra utiliser le fait que $f(\ell) = \ell$).

(5) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\, u_n - \ell \,| < |\, u_0 - \ell \,|^n$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 4. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f\,: & \mathbb{R}\setminus\{5\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left[(x-5)\sin\left(\frac{1}{x-5}\right)\right]^2. \end{array}$$

(1) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition puis qu'elle est prolongeable par continuité en 5. On notera f son prolongement continu.

(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f' sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Que vaut $f'(5)$?

(3) f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?