Intelligence artificielle

Logique du premier ordre

Elise Bonzon

elise.bonzon@u-paris.fr

LIPADE - Université de Paris

http://www.math-info.univ-paris5.fr/∽bonzon/

Logique du premier ordre

1. Pourquoi la logique du premier ordre ?
2. Syntaxe et sémantique de la logique du premier ordre
3. Utiliser la logique du premier ordre
4. Conclusion

Pourquoi la logique du premier ordre ?

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation
- La logique propositionnelle est compositionnelle :
  - La signification de $a \wedge b$ provient de la signification de a et de b

Logique propositionnelle

- La logique propositionnelle est déclarative : connaissances et inférences sont séparées, les inférences sont indépendantes du domaine
- La logique propositionnelle permet de prendre en compte des informations partielles avec la disjonction et la négation
- La logique propositionnelle est compositionnelle :
  - La signification de $a \wedge b$ provient de la signification de a et de b
- La signification en logique propositionnelle ne dépend pas du contexte
  - Contrairement au langage naturel

Limites de la logique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.

Limites de la logique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.
- Impossible de tirer partie des notions de similitudes entre propositions
  - Pierre et Inès sont étudiants

Limites de la logique propositionnelle

- **Mais** la logique propositionnelle a un pouvoir expressif très limité
  - Contrairement au langage naturel
  - On ne peut pas par exemple dire “tous les hommes sont mortels”, à moins de créer un énoncé pour chaque humain.
- Impossible de tirer partie des notions de similitudes entre propositions
  - Pierre et Inès sont étudiants
- Il n’est pas possible d’exprimer des relations entre symboles

Logique du premier ordre

- **Logique propositionnelle** : le monde contient des faits
- **Logique du 1er ordre** : défini à partir d'un domaine : les objets sur lesquels on raisonne
  - Termes : représentent les éléments du domaine
  - Relations ou prédicats : entre les éléments du domaine
  - Formules : décrivent les interactions entre les relations

Logique du premier ordre

- **Logique propositionnelle** : le monde contient des faits
- **Logique du 1er ordre** : défini à partir d'un domaine : les objets sur lesquels on raisonne
  - Termes : représentent les éléments du domaine
  - Relations ou prédicats : entre les éléments du domaine
  - Formules : décrivent les interactions entre les relations

  Par exemple :

  - Domaine = les membres d'une famille
  - Terme : Charly, $pere(x)$ *(désigne un élément du domaine)*
  - Relation : $frere(Charly, Julie)$, vrai si Charly et le frère de Julie
  - Formule : $\forall x \exists y \ frere(x, y)$ signifie "tout individu a un frère"

Syntaxe et sémantique de la logique du premier ordre

Syntaxe de la logique du 1er ordre

Un alphabet $\mathcal{A}$ d'un langage $\mathcal{L}$ de la logique des prédicats consiste des données suivantes :

- Les connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Deux constantes logiques : $\top$ et $\bot$
- Les parenthèses : (et)
- Deux quantificateurs : universel $\forall$, et existentiel $\exists$
- Un ensemble $\mathcal{V}$ de variables : x, y, a, b, ..
- Un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonction :
  - d'arité 0 : constantes (Paul, Pierre, 2, ...)
  - d'arité > 0 : fonctions (racinecarre, pere, ...)
- Un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de prédicats (frere, $>$, avant, ...)
  - Prédicat particulier : égalité $=$

Fonction vs Prédicat

- Une fonction retourne un élément du domaine, tandis qu'un prédicat est vrai ou faux
- Par exemple :
  - Fonction : pere(Philippe) = Jean
  - Prédicat : est_pere(Philippe, Jean) = Vrai
- Attention : les noms importent peu. C'est la définition qui est importante.

Syntaxe de la logique du 1er ordre

Signature d'un langage

La signature d'un langage $\mathcal{L}$ est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- La signature peut varier d'un langage à l'autre
- Langage de l'arithmétique :
  - $\mathcal{F} = \{0/0, \mathit{succ}/1, -/1, +/2, -/2, \times/2, \div/2\}$
  - $\mathcal{R} = \{= /2\}$
- Langage de la généalogie :
  - $\mathcal{F} = \{\mathit{pere}/1, \mathit{mere}/1, \mathit{Andre}/0, \mathit{Beatrice}/0, \mathit{Charles}/0, \mathit{Elodie}/0\}$
  - $\mathcal{R} = \{\mathit{homme}/1, \mathit{femme}/1, \mathit{parent}/2\}$

Enoncés atomiques

- Terme : variables et éléments de $\mathcal{F}$ (constantes et fonctions)
  - C'est un élément du domaine
    - Exemple : x, $Jean$, $pere(Richard)$, $racinecarre(y)$
  - Un terme est clos s'il ne contient pas de variable
    - Par exemple, $mere(Jean)$ est clos
- Enoncé atomique : élément de $\mathcal{R}$ (prédicat), $\top$ et $\bot$
  - Retourne une valeur Vrai ou Faux
  - Exemple : $frere(Richard, Jean)$; $epoux(pere(Richard), mere(Jean))$

Formules

Les formules sont construites à partir des énoncés atomiques, des connecteurs et des quantificateurs

Formules

Soit $\mathcal{L}$ un langage, dont la signature est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- Si $P/n \in \mathcal{R}$ est un prédicat d'arité n, et si $t_1, t_2, \ldots t_n$ sont des termes sur $\mathcal{F}$, alors $P(t_1, t_2, \ldots t_n)$ est une formule de $\mathcal{L}$, dite formule atomique (ou atome) de $\mathcal{L}$.
- Si E_1 et E_2 sont des formules, alors $(\neg E)$, $(E_1 \wedge E_2)$, $(E_1 \vee E_2)$, $(E_1 \Rightarrow E_2)$, $(E_1 \Leftrightarrow E_2)$ sont aussi des formules de $\mathcal{L}$
- Si E est une formule et $x \in \mathcal{V}$ une variable, alors $(\forall x\ E)$ et $(\exists x\ E)$ sont aussi des formules de $\mathcal{L}$
- Les symboles $\top$ et $\bot$ sont aussi des formules atomiques

Variables libres et liées

- Une occurence d'une variable est dite liée quand elle est dans le champ d'un quantificateur, autrement elle est libre
- Une variable libre a au moins une occurrence libre dans une formule
- Exemple :
  - $\exists x \ (p(x, y)) \wedge \forall z \ (q(z, x))$
  - Première occurrence de x liée, seconde occurrence libre, y libre, z liée
- Une formule close est une formule sans variable libre

Modèles de la logique du 1er ordre

- La vérité d'une formule est déterminée par un modèle et une interprétation des symboles de la formule
- Un modèle contient des objets (appelés éléments du domaine (ou de l'univers)) qui sont liés entre eux par des relations
- Une interprétation spécifie à quoi réfèrent les symboles de l'énoncé :
  - Symboles de constantes $\rightarrow$ objets
  - Symboles de prédicats $\rightarrow$ relations
  - Symboles de fonctions $\rightarrow$ fonctions
- Un énoncé atomique est vrai dans un modèle donné, compte tenu d'une interprétation donnée, si la relation à laquelle renvoi le symbole du prédicat s'applique aux objets en arguments.

Interprétation

Une interprétation $\mathcal{I}$ d'un langage $\mathcal{L}$, dont la signature est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$, est constitué par :

- Un ensemble (fini ou infini, mais non vide) D, appelé domaine ou univers de $\mathcal{I}$
- Une application, qui associe à chaque symbole de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ une valeur :
  - une constante $c/0 \in \mathcal{F}$: $c_{\mathcal{I}}$ est un élément de D ($c \in D$)
  - une fonction $f/n \in \mathcal{F}$: $f_{\mathcal{I}}$ est une fonction de $D^n \longrightarrow D$
  - un symbole propositionnel $p/0 \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}} = \top$ est vrai, ou $p_{\mathcal{I}} = \bot$ est faux
  - une relation $p/n \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}}$ est un sous-ensemble de D^n (les n-uplets qui vérifient cette relation)

Interprétation

Une interprétation $\mathcal{I}$ d'un langage $\mathcal{L}$, dont la signature est $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$, est constitué par :

- Un ensemble (fini ou infini, mais non vide) D, appelé domaine ou univers de $\mathcal{I}$
- Une application, qui associe à chaque symbole de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ une valeur :
  - une constante $c/0 \in \mathcal{F}$: $c_{\mathcal{I}}$ est un élément de D ($c \in D$)
  - une fonction $f/n \in \mathcal{F}$: $f_{\mathcal{I}}$ est une fonction de $D^n \longrightarrow D$
  - un symbole propositionnel $p/0 \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}} = \top$ est vrai, ou $p_{\mathcal{I}} = \bot$ est faux
  - une relation $p/n \in \mathcal{R}$: $p_{\mathcal{I}}$ est un sous-ensemble de D^n (les n-uplets qui vérifient cette relation)

Modèle

Un modèle $\langle D, \mathcal{I} \rangle$ est une interprétation qui rend une formule vraie.

Interprétation : Exemple

Soit le langage $\mathcal{L}$, dont la signature $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ est la suivante :

- $\mathcal{F} = \{pere/1, mere/1, A/0, B/0, C/0, E/0\}$
- $\mathcal{R} = \{parent/2\}$

Une interprétation possible sur le domaine $D = \{A, B, C, E\}$ est :

- $pere(C) = A$, $pere(E) = A$, $mere(C) = B$, $mere(E) = B$,
- $parent = \{(A, E), (A, C), (B, C), (B, E)\}$

Quantification universelle

- $\forall \langle variables \rangle \langle enonce \rangle$
- Tous les étudiants sont intelligents :

$$\forall x \ etudiant(x) \Rightarrow \ intelligent(x)$$

- $\forall x \ P$ est vrai dans un modèle si et seulement si P est vrai pour tous les objets x
- $\forall x \ P$ est équivalent à la conjonction de toutes les instanciations de P :

$$\begin{aligned}
& (etudiant(Paul) \Rightarrow intelligent(Paul)) \\
\wedge \quad & (etudiant(Chafia) \Rightarrow intelligent(Chafia)) \\
\wedge \quad & (etudiant(Sophie) \Rightarrow intelligent(Sophie)) \\
\wedge \quad & (etudiant(Abdel) \Rightarrow intelligent(Abdel)) \\
\wedge \quad & \vdots
\end{aligned}$$

Quantification universelle : erreur fréquente à éviter

- Le connecteur principal à utiliser avec $\forall$ est l'implication $\Rightarrow$
- Erreur fréquente : utiliser la conjonction $\wedge$ comme connecteur principal avec $\forall$
- $\forall x \; etudiant(x) \wedge \; intelligent(x)$ signifie "tout le monde est étudiant et tout le monde est intelligent"

Quantification existentielle

- $\exists \langle variables \rangle \langle enonce \rangle$
- Un étudiant est intelligent :

$$\exists x \; etudiant(x) \wedge \; intelligent(x)$$

- $\exists x \; P$ est vrai dans un modèle si et seulement si P est vrai pour au moins un objet x
- $\exists x \; P$ est équivalent à la disjonction de toutes les instanciations de P :

$$\begin{array}{cc} & (etudiant(Paul) \wedge intelligent(Paul)) \\ \vee & (etudiant(Chafia) \wedge intelligent(Chafia)) \\ \vee & (etudiant(Sophie) \wedge intelligent(Sophie)) \\ \vee & (etudiant(Abdel) \wedge intelligent(Abdel)) \\ \vee & \vdots \end{array}$$

Quantification existentielle : erreur fréquente à éviter

- Le connecteur principal à utiliser avec $\exists$ est la conjonction $\wedge$
- Erreur fréquente : utiliser l'implication $\Rightarrow$ comme connecteur principal avec $\exists$
- $\exists x \; \mathit{etudiant}(x) \Rightarrow \; \mathit{intelligent}(x)$ est vrai s'il existe quelqu'un qui n'est pas étudiant !

Propriétés des quantificateurs

- $\forall x \forall y$ est équivalent à $\forall y \forall x$
- $\exists x \exists y$ est équivalent à $\exists y \exists x$
- $\exists x \forall y$ n'est pas équivalent à $\forall y \exists x$
    - $\exists y \forall x \; aime(x, y)$ “Il existe une personne qui est aimé par tout le monde”
    - $\forall x \exists y \; aime(x, y)$ “Tout le monde aime quelqu'un” (pour toute personne, il existe quelqu'un qu'il aime)
- Liens entre $\forall$ et $\exists$: Les deux quantificateurs sont liés par le biais de la négation :
    - $\forall x \; aime(x, Glace)$ est équivalent à $\neg \exists x \neg aime(x, Glace)$
    - $\exists x \; aime(x, Brocoli)$ est équivalent à $\neg \forall x \neg aime(x, Brocoli)$

Egalité

- $terme_1 = terme_2$ est vrai sous une certaine interprétation si et seulement si $terme_1$ et $terme_2$ renvoient au même objet
  - Richard a deux frères :
    $\exists x, y \;\; frere(x, Richard) \wedge frere(y, Richard) \wedge \neg(x = y)$
  - Le grand-père paternel de quelqu'un est le père de son père
    $\forall x \;\; gppaternel(x) = pere(pere(x))$

Egalité

- $terme_1 = terme_2$ est vrai sous une certaine interprétation si et seulement si $terme_1$ et $terme_2$ renvoient au même objet
  - Richard a deux frères :
    $\exists x, y \;\; frere(x, Richard) \wedge frere(y, Richard) \wedge \neg(x = y)$
  - Le grand-père paternel de quelqu'un est le père de son père
    $\forall x \;\; gppaternel(x) = pere(pere(x))$
- Mais pour prendre en compte cette égalité, on doit ajouter une nouvelle règle d'inférence : la démodulation, qui permet de remplacer un terme par un autre en cas d'égalité.
  - A partir de la BC composée des énoncés suivants :
    1. $\forall x \;\; gppaternel(x) = pere(pere(x))$
    2. $annee\_naissance(pere(pere(Lea)))$
  - on peut déduire $annee\_naissance(gppaternel(Lea))$ grâce à la **démodulation**

Utiliser la logique du premier ordre

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \;\; mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \;\; parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \ \ mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \ \ parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

- Un grand-parent est le parent d'un des parents :

Domaine des liens de parenté

- La mère d'une personne est un parent féminin :

$$\forall m, c \ \ mere(c) = m \Leftrightarrow feminin(m) \wedge parent(m, c)$$

- Parents et enfants sont des relations inverses :

$$\forall p, c \ \ parent(p, c) \Leftrightarrow enfant(c, p)$$

- Un grand-parent est le parent d'un des parents :

$$\forall g, c \ \ grandparent(g, c) \Leftrightarrow \exists p \ \ parent(g, p) \wedge parent(p, c)$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x \ (\mathit{chemin}(x) \Rightarrow \mathit{mene}(x, \mathit{Rome}))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x \ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x \ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x \ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x \; (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x)))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x \; (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \lor ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \lor ferme(x)) \land \neg(ouvert(x) \land ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \land \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ peine(x)) \land (\exists x\ plaisir(x)) \land \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ peine(x)) \wedge (\exists x\ plaisir(x)) \wedge \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (\mathit{chemin}(x) \Rightarrow \mathit{mene}(x, \mathit{Rome}))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow (\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (\mathit{porte}(x) \Rightarrow ((\mathit{ouvert}(x) \vee \mathit{ferme}(x)) \wedge \neg(\mathit{ouvert}(x) \wedge \mathit{ferme}(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (\mathit{brille}(x) \Rightarrow \mathit{or}(x)) \equiv \exists x\ \mathit{brille}(x) \wedge \neg \mathit{or}(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ \mathit{peine}(x)) \wedge (\exists x\ \mathit{plaisir}(x)) \wedge \forall x\ (\mathit{peine}(x) \Rightarrow \neg \mathit{plaisir}(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand
$$\forall x\ (\mathit{entier}(x) \Rightarrow \exists y\ (\mathit{entier}(y) \wedge \mathit{plusgrand}(y, x)))$$

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome
$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$
- Une porte est ouverte ou fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$
- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée
$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$
- Tout ce qui brille n'est pas or
$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$
- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir
$$(\exists x\ peine(x)) \wedge (\exists x\ plaisir(x)) \wedge \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$
- Pour tout entier il existe un entier plus grand
$$\forall x\ (entier(x) \Rightarrow \exists y\ (entier(y) \wedge plusgrand(y, x)))$$
- Il existe un plus grand entier

Autres exemples

- Tous les chemins mènent à Rome

$$\forall x\ (chemin(x) \Rightarrow mene(x, Rome))$$

- Une porte est ouverte ou fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$$

- Une porte est ou bien ouverte ou bien fermée

$$\forall x\ (porte(x) \Rightarrow ((ouvert(x) \vee ferme(x)) \wedge \neg(ouvert(x) \wedge ferme(x)))$$

- Tout ce qui brille n'est pas or

$$\neg\forall x\ (brille(x) \Rightarrow or(x)) \equiv \exists x\ brille(x) \wedge \neg or(x)$$

- Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir

$$(\exists x\ peine(x)) \wedge (\exists x\ plaisir(x)) \wedge \forall x\ (peine(x) \Rightarrow \neg plaisir(x))$$

- Pour tout entier il existe un entier plus grand

$$\forall x\ (entier(x) \Rightarrow \exists y\ (entier(y) \wedge plusgrand(y, x)))$$

- Il existe un plus grand entier

$$\exists x\ (entier(x) \wedge \forall y(entier(y) \Rightarrow plusgrand(x, y)))$$

Règles de diagnostique ; règles causales

- Règles de diagnostique : Effets observés → causes cachées

$$\forall s,\ Brise(s) \Rightarrow (\exists r\ Adjacent(r,s) \wedge Puit(r))$$

- Règles causales : Propriétés cachées → effets/percepts

$$\forall r,\ Puit(r) \Rightarrow (\forall s\ Adjacent(r,s) \Rightarrow Brise(s))$$

- Système avec règles causales : Système de raisonnement fondé sur un modèle

Ingénierie des connaissances en logique du 1er ordre

1. Identifier la tâche
2. Collecter les connaissances pertinentes
3. Choisir le vocabulaire des prédicats, fonctions et constantes
4. Encoder les connaissances du domaine
5. Encoder une description d'un exemple du problème spécifique
6. Soumettre des requêtes à la procédure d'inférence et obtenir des réponses
7. Déboguer la base de connaissances

Conclusion

Remarque : pourquoi logique du premier ordre ?

- Les variables ne peuvent représenter que des objets
- Logique du *second* ordre : les variables peuvent aussi représenter des prédicats ou des fonctions
  - $\exists x \exists y \; personne(x) \wedge y(x, USA)$
  - Il existe une personne (x), qui a une certaine relation (y) avec les USA
  - Certaines expressions du second ordre peuvent être représentées avec des expressions du premier ordre :
    $\exists x \exists y \; personne(x) \wedge relation(y, x, USA)$

Conclusion

- Logique du premier ordre :
  - Les objets et relations sont des primitives de la sémantique
  - Syntaxe : constantes, fonctions, prédicats, égalité, quantificateurs
- Augmentation du pouvoir expressif : suffisant pour représenter le monde du Wumpus