Intelligence Artificielle – TD 6 et 7

AGENTS LOGIQUES ET INFÉRENCE EN LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

CORRECTION

Exercice 1

Soit un vocabulaire ne comportant que 4 propositions A, B, C et D. Combien il y a-t-il de modèles pour les énoncés suivants ?

1. $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$ 2. $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$ 3. $A \vee B$ 4. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$

Solution: Ne pas oublier les variables qui n'appartiennent pas à la formule !

1. $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$
   15 (3+4+4+4) : A,B,C,D ; A,B,C,$\neg D$; A,B,$\neg C$,D ; A,$\neg B$ et les 4 possibilités pour C et D ; idem pour $\neg A$,B ; $\neg A, \neg B$.
2. $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$
   6 : A,B,C ; A,B, $\neg C$, $\neg A, B, C$; puis D et $\neg D$ pour chaque modèle
3. $A \vee B$
   12 : A, B ; $\neg A, B$; $A, \neg B$; puis $C, \neg C, D, \neg D$ pour chacun des modèles $\rightarrow$ on multiplie par 2^2
4. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$
   8 : A, B, C ; $\neg A, \neg B, C$; $A, \neg B, \neg C$; $\neg A, B, \neg C$; puis D et $\neg D$ pour chaque modèle

Exercice 2

Décidez si chacun des énoncés suivants est valide, satisfiable ou insatisfiable.

1. $Fumee \Rightarrow Fumee$
2. $Fumee \Rightarrow Feu$
3. $(Fumee \Rightarrow Feu) \Rightarrow (\neg Fumee \Rightarrow \neg Feu)$
4. $Fumee \vee Feu \vee \neg Feu$
5. $Fumee \wedge Feu \wedge \neg Feu$
6. $((Fumee \wedge Chaleur) \Rightarrow Feu) \Leftrightarrow ((Fumee \Rightarrow Feu) \vee (Chaleur \Rightarrow Feu))$
7. $(Fumee \Rightarrow Feu) \Rightarrow ((Fumee \wedge Chaleur) \Rightarrow Feu)$

Solution:

1. $Fumee \Rightarrow Fumee$
   Valide

2. $Fumee \Rightarrow Feu$
   Satisfiable
3. $(Fumee \Rightarrow Feu) \Rightarrow (\neg Fumee \Rightarrow \neg Feu)$
   $\equiv \neg(\neg Fumee \vee Feu) \vee (Fumee \vee \neg Feu)$
   $\equiv (Fumee \wedge \neg Feu) \vee (Fumee \vee \neg Feu)$
   Satisfiable
4. $Fumee \vee Feu \vee \neg Feu$
   Valide
5. $Fumee \wedge Feu \wedge \neg Feu$
   Insatisfiable
6. $((Fumee \wedge Chaleur) \Rightarrow Feu) \Leftrightarrow ((Fumee \Rightarrow Feu) \vee (Chaleur \Rightarrow Feu))$
   $\equiv (\neg Fumee \vee \neg Chaleur \vee Feu) \Leftrightarrow (\neg Fumee \vee Feu \vee \neg Chaleur \vee Feu)$
   Valide
7. $(Fumee \Rightarrow Feu) \Rightarrow ((Fumee \wedge Chaleur) \Rightarrow Feu)$
   $\equiv \neg(\neg Fumee \vee Feu) \vee (\neg Fumee \vee \neg Chaleur \vee Feu)$
   $\equiv (Fumee \wedge \neg Feu) \vee \neg Fumee \vee \neg Chaleur \vee Feu$
   Valide

Exercice 3

1. Montrez que la formule suivante est une tautologie :

$$(p \wedge q) \vee r \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

Solution:

- Si r est vrai, la formule est vraie
- Si r est faux :
  - ◇ Si p est faux, la formule est vraie
  - ◇ Si q est faux, la formule est vraie
  - ◇ Si p et q sont tous les deux vrais, la formule est vraie

2. Pour chacun des trois ensembles de formules suivants, indiquez s'il est inconsistant. Dans le cas contraire, donnez-en un modèle
   (a) $\{p \vee q, p \Rightarrow q, \neg q\}$
   (b) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, r \Rightarrow \neg p\}$
   (c) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, r \Rightarrow \neg p, p \vee \neg s, s\}$

Solution:

(a) Inconsistant : q est faux, donc p est vrai, donc q doit être vrai
(b) Satisfiable, avec le modèle : p faux, q faux, r faux
(c) Inconsistant : s est vrai, donc p est vrai, donc q est vrai, donc r est vrai, donc p est faux

Exercice 4

On rappelle que $\alpha \models \beta$ ssi β est vraie dans tous modèles dans lesquels α est vraie. Prouver les énumérations suivantes :

1. α est valide si et seulement si $Vrai \models \alpha$

   Solution: Rappel : $\alpha \models \beta$ **ssi** $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$.
   Un énoncé valide est un énoncé vrai dans tous les modèles. L'énoncé $Vrai$ est vrai dans tous les modèles. Donc,

   $\Rightarrow$ si α est valide, α et $vrai$ sont vrais dans tous les modèles, donc $vrai \models \alpha$

   $\Leftarrow$ si $vrai \models \alpha$, α doit être vrai dans tous les modèles, donc α est valide

2. Pour tout α, $Faux \models \alpha$

   Solution: $Faux$ n'est vrai dans aucun modèle, donc α est vraie dans tous les modèles dans lesquels $Faux$ est vrai
   $M(Faux) = \emptyset \subseteq M(\alpha), \forall\alpha$

3. $\alpha \models \beta$ si et seulement si l'énoncé $(\alpha \Rightarrow \beta)$ est valide

   Solution:

   $\Rightarrow$ si $\alpha \models \beta$, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Soit m un modèle.

   - si $m \in M(\alpha)$, alors $m \in M(\beta)$. α et β sont vrais dans m, donc $\alpha \Rightarrow \beta$ vrai dans m
   - si $m \notin M(\alpha)$, alors $\alpha \Rightarrow \beta$ vrai dans m

   $\Leftarrow$ $\alpha \Rightarrow \beta$ est valide.
   Soit $m \in M(\alpha)$, donc α est vrai dans m. Comme $\alpha \Rightarrow \beta$ est valide, $\alpha \Rightarrow \beta$ est vrai dans m. Donc β est vrai dans m, et $m \in M(\beta)$. Donc $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

4. $\alpha \models \beta$ si et seulement si l'énoncé $(\alpha \wedge \neg\beta)$ est insatisfiable

   Solution: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ est insatisfiable si cet énoncé est faux dans tous les modèles. Donc, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ est vrai dans tous les modèles. Donc $\neg\alpha \vee \beta$ est valide. Donc d'après 3, $\alpha \models \beta$.

Exercice 5
Soit le vocabulaire suivant :

t :	La musique est triste	r :	La musique est rythmée	e :	Il écoute de la musique
d :	Il danse	b :	Il baille	j :	Il est joyeux

Traduire en logique propositionnelle les phrases suivantes :
1. La musique n'est ni triste ni rythmée
2. Il ne baille pas, il est même joyeux.
3. Quand il écoute de la musique rythmée, il est joyeux et il danse.
4. S'il danse en baillant, c'est qu'il n'est pas joyeux.
5. Il écoute en ce moment de la musique triste sans bailler.
6. S'il écoute de la musique et qu'il danse, c'est qu'il est joyeux.

Solution:
1. $\neg t \wedge \neg r$
2. $\neg b \wedge j$
3. $(e \wedge r) \Rightarrow (j \wedge d)$
4. $(d \wedge b) \Rightarrow \neg j$
5. $e \wedge t \wedge \neg b$
6. $(d \wedge e) \Rightarrow j$

Exercice 6
Définir le vocabulaire, et traduire en logique propositionnelle les phrases suivantes :
1. Mon père et ma mère ont les yeux marrons et j'ai les yeux bleus
2. J'ai les yeux bleus si et seulement si je porte le gène ABleu et le gène BBleu
3. Je porte le gène ABleu si et seulement si ma mère le porte, et le gène BBleu si et seulement si mon père le porte.
4. Ma mère a les yeux marrons si elle porte le gène ABleu et le gène BMarron

Solution: *Un erreur fréquente sur cet exercice est de choisir le vocabulaire suivant :*
P : père ; M : mère ; J : moi ; MN yeux marrons ; B : yeux bleus
La première phrase se traduit alors par $P \wedge MN \wedge M \wedge MN \wedge J \wedge B$. Comme la conjonction est commutative, on a :

$$P \wedge MN \wedge M \wedge MN \wedge J \wedge B \equiv P \wedge M \wedge J \wedge B \wedge MN$$

Qui a les yeux bleus ? Les yeux marrons ? Il est indispensable de lier, à travers le vocabulaire, l'objet et sa caractéristique.

Voca : PM : mon père a les yeux marrons ; MM : ma mère a les yeux marrons ; B : j'ai les yeux bleus ; AB : je porte le gène AB ; BB : je porte le gène BB ; MAB : ma mère porte le gène ABleu ; PBB : mon père porte le gène BBleu ; MBM : ma mère porte le gène BMarron

1. $PM \wedge MM \wedge B$
2. $B \Leftrightarrow (AB \wedge BB)$
3. $(AB \Leftrightarrow MAB) \wedge (BB \Leftrightarrow PBB)$
4. $(MAB \wedge MBM) \Rightarrow MM$

Exercice 7
Appliquez la résolution pour prouver la relation de conséquences suivante :

$$\{p \vee q \vee r, \neg p \vee q \vee r, \neg q \vee r\} \models r$$

Solution: *Résolution par contradiction : on applique le théorème de la déduction dans sa forme $\alpha \models \beta$ si et seulement si l'énoncé $(\alpha \wedge \neg\beta)$ est insatisfiable.*
On rajoute la négation de la conclusion ($\neg r$) dans la base de connaissance, et on essaie de trouver une contradiction.

1. $p \vee q \vee r$
2. $\neg p \vee q \vee r$
3. $\neg q \vee r$
4. $\neg r$
5. (3.+4.) $\neg q$
6. (1.+4.) $p \vee q$
7. (5.+6.) p
8. (2.+4.) $\neg p \vee q$
9. (8.+5.) $\neg p$
10. (7.+9.) $\perp$

Exercice 8
Appliquez la résolution pour prouver la relation de conséquences suivante :

$$\{p \vee \neg r \vee \neg t, r, t \vee \neg p \vee \neg r, t \vee \neg q, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\} \models \neg q$$

Solution:

1. $p \vee \neg r \vee \neg t$
2. r
3. $t \vee \neg p \vee \neg r$
4. $t \vee \neg q$
5. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
6. q
7. (6.+5) $\neg p \vee \neg r$
8. (2.+7.) $\neg p$
9. (1.+8.) $\neg r \vee \neg t$
10. (4.+6.) t
11. (10.+9.) $\neg r$
12. (2.+11.) $\perp$

Exercice 9
Soit la base de connaissances suivante :

1. $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow t)$
2. $(\neg q \Rightarrow s) \wedge (\neg p \Rightarrow s)$
3. $(t \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow r)$

Transformez cette base de connaissances en bases de clauses BC, et utilisez la résolution pour prouver que $BC \models r$

Solution: On commence par transformer la bases de connaissances en forme normale conjonctive :

$$\begin{array}{lllll} 1. & (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow t) & \equiv & (p \vee q) \wedge (\neg q \vee t) \\ 2. & (\neg q \Rightarrow s) \wedge (\neg p \Rightarrow s) & \equiv & (q \vee s) \wedge (p \vee s) \\ 3. & (t \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow r) & \equiv & (\neg t \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \end{array}$$

On peut à présent appliquer la résolution, en ajoutant la négation de la conclusion dans la base de connaissances :

1. $p \vee q$
2. $\neg q \vee t$
3. $q \vee s$
4. $p \vee s$
5. $\neg t \vee r$
6. $\neg p \vee r$
7. $\neg r$
8. (6.+7) $\neg p$
9. (1.+8.) q
10. (2.+9.) t
11. (5.+10). r
12. (7.+11.) $\perp$

Exercice 10
Soit la base de connaissances suivante :

1. $b \Rightarrow (a \wedge d)$
2. $(g \Rightarrow b) \wedge (g \Rightarrow h)$
3. $a \wedge b \wedge d \wedge h \Rightarrow e \wedge c$
4. $c \wedge d \wedge e \Rightarrow f$

Transformez cette base de connaissances en bases de clauses BC, et utilisez la résolution pour prouver que $BC \models (\neg g \vee f)$

Solution: On commence par transformer la bases de connaissances en forme normale conjonctive :

$$\begin{array}{lll} 1. & b \Rightarrow (a \wedge d) & \equiv \neg b \vee (a \wedge d) \\ & & \equiv (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee d) \\ 2. & (g \Rightarrow b) \wedge (g \Rightarrow h) & \equiv (\neg g \vee b) \wedge (\neg g \vee h) \\ 3. & a \wedge b \wedge d \wedge h \Rightarrow e \wedge c & \equiv \neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee (e \wedge c) \\ & & \equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee e) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee c) \\ 4. & c \wedge d \wedge e \Rightarrow f & \equiv \neg c \vee \neg d \vee \neg e \vee f \\ \neg Conclusion. & \neg(\neg g \vee f) & \equiv g \wedge \neg f \end{array}$$

On peut à présent appliquer la résolution, en ajoutant la négation de la conclusion dans la base de connaissances :

1. $\neg b \vee a$
2. $\neg b \vee d$
3. $\neg g \vee b$
4. $\neg g \vee h$
5. $\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee e$
6. $\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee c$
7. $\neg d \vee \neg e \vee \neg c \vee f$
8. g
9. $\neg f$
10. (5.+7) $\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee \neg c \vee f$
11. (10.+6.) $\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee f$
12. (11.+1.) $\neg b \vee \neg d \vee \neg h \vee f$
13. (12.+2.) $\neg b \vee \neg h \vee f$
14. (13.+3.) $\neg g \vee \neg h \vee f$
15. (14.+4.) $\neg g \vee f$
16. (15.+8.) f
17. (16. + 9) $\perp$

Exercice 11
Traduire en logique propositionnelle les phrases suivantes :

1. Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.
2. Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.
3. Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.
4. Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

Utilisez le principe de résolution pour prouver que Jules est toujours en forme en été.

Solution: Voca : V : Jules est en vacances ; L : Jules lit le journal ; M : Jules à la mer ; E : C'est l'été ; F : Jules en forme

1. $L \Rightarrow \neg V$
2. $E \Rightarrow M$ *(Il suffit que P pour Q : $P \Rightarrow Q$)*
3. $(M \wedge \neg F) \Rightarrow L$
4. $\neg V \Rightarrow \neg L$
5. Concl : $E \Rightarrow F$; $\neg$Concl : $E \wedge \neg F$

Transformation de la base de connaissance en FNC :

1. $\neg L \vee \neg V$
2. $\neg E \vee M$
3. $\neg M \vee F \vee L$
4. $V \vee \neg L$
5. E
6. $\neg F$
7. (2.+5.) M
8. (3.+7.) $F \vee L$
9. (8.+6.) L
10. (1.+9.) $\neg V$
11. (10.+4.) $\neg L$
12. (11.+9.) $\perp$

Exercice 12

Soit la base de connaissance suivante :

1. $B \wedge D \wedge E \Rightarrow F$
2. $G \wedge D \Rightarrow A$
3. $C \wedge F \Rightarrow A$
4. $B \Rightarrow X$
5. $D \Rightarrow E$
6. $X \wedge A \Rightarrow H$
7. $C \Rightarrow D$
8. $X \wedge C \Rightarrow A$
9. $X \wedge B \Rightarrow D$
10. B
11. C

Peut-on conclure sur H en chaînage avant ? En chaînage arrière ?

Solution: Chaînage avant : on parcourt les règles, dans l'ordre dans lequel elles apparaissent, et déduisons des nouvelles connaissances dès que nous le pouvons. Nous nous arrêtons lorsqu'on a pas déduit de nouvelle connaissance dans un tour, ou quand on a trouvé le but cherché.

1. Tour 1
    - 10. B est vrai
    - 11. C est vrai
2. Tour 2
    - 4. Comme B est vrai, X est vrai
    - 7. Comme C est vrai, D est vrai
    - 8. Comme X et C sont vrais, A est vrai
    - 9. Comme X et B sont vrais, D est vrai (*déjà prouvé*)
3. Tour 3
    - 5. Comme D est vrai, E est vrai
    - 6. : Comme X et A sont vrais, H est vrai

<u>Chaînage arrière</u> : On part du but recherché, et on essaie de prouver les prémisses des règles qui le génèrent
Pour prouver H, il faut prouver X et A (6.)

- Pour prouver X, il faut prouver B (4.)
    - ◇ B est vrai (10.)
- Pour prouver A, il faut prouver G et D (2.)
    - ◇ Impossible de prouver G, il n'est dans aucune partie droite des règles → **échec**
- Pour prouver A, il faut prouver C et F (3.)
    - ◇ C est vrai (11.)
    - ◇ Pour prouver F, il faut prouver B , D et E
        - ⋆ B est vrai (4.)
        - ⋆ Pour prouver D il faut prouver C
            - ∗ C est vrai (11.)
        - ⋆ Pour prouver E il faut prouver D (5.)
            - ∗ D est vrai (déjà prouvé)

Exercice 13
Soit la base de connaissance suivante :

1. $E \wedge B \Rightarrow C$
2. $B \wedge D \Rightarrow A$
3. $I \wedge H \Rightarrow B$
4. $D \wedge E \Rightarrow B$
5. $B \wedge D \Rightarrow F$
6. $E \wedge F \Rightarrow O$
7. E
8. F

Peut-on conclure sur C en chaînage arrière ?

Solution: Chaînage arrière :
Pour prouver C, il faut prouver E et B (1.)

- E est prouvé (7.)
- Pour prouver B, il faut prouver I et H (3.)
    - ◇ Impossible de prouver I, il n'est dans aucune partie droite des règles $\rightarrow$ **échec**
- Pour prouver B, il faut prouver D et E (4.)
    - ◇ Impossible de prouver D, il n'est dans aucune partie droite des règles $\rightarrow$ **échec**
- Il n'y a pas d'autre règle pour prouver B, c'est donc un **échec**

Il n'y a pas d'autre règle pour prouver C, C n'est donc pas conséquence logique de cette base de connaissances.