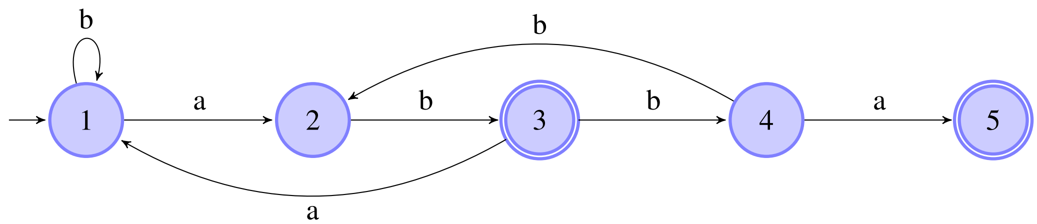
Théorie des Langages – Feuille n° 3

AUTOMATES FINIS

CORRECTION

Exercice 1 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Soit l'automate M suivant



1. Combien d'etats possède l'automate M ? Donner l'ensemble des états finaux, et l'ensemble des états initiaux

   M possède 5 états : $Q = \{1,2,3,4,5\}$. $F = \{3,5\}$, $q_0 = 1$.

2. L'automate M est-il déterministe ?

   Oui, il est déterministe : un seul état initial ; au maximum un seul transition pour chaque lettre de l'alphabet à chaque état.

3. Dans quel état se trouve l'automate après avoir lu le mot *bbabbb* ? Ce mot est-il reconnu par l'automate ? accepté par l'automate ? Mêmes questions pour le mot *babaabba*.

   bbabbb : dans l'état $2 \notin F$. Mot reconnu mais pas accepté.

   $$(1, bbabbb) \rightarrow (1, babbb) \rightarrow (1, abbb) \rightarrow (2, bbb) \rightarrow (3, bb) \rightarrow (4, b) \rightarrow (5, \varepsilon)$$

   babaabba : dans l'état $5 \in F$. Mot reconnu et accepté.

   $$(1, babaabba) \rightarrow (1, abaabba) \rightarrow (2, baabba) \rightarrow (3, aabba) \rightarrow (1, abba) \rightarrow (2, bba) \rightarrow (3, ba)$$

   $$\rightarrow (4, a) \rightarrow (5, \varepsilon)$$

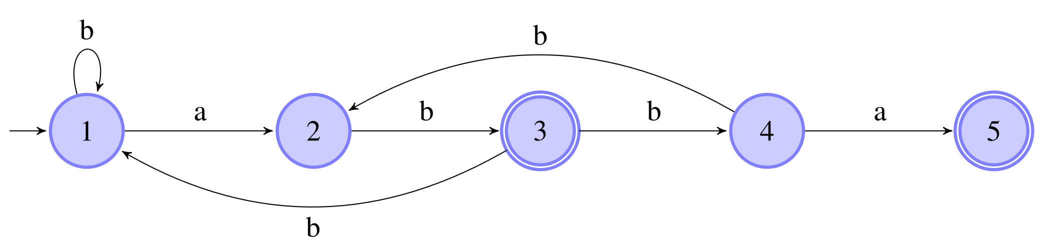
4. L'automate M est-il complet ? Le mot *baa* est-il reconnu par cet automate ? accepté par cet automate ?

   M n'est pas complet : pas de transition a et b pour 5, pas de transition a pour 2.

   $$(1, baa) \rightarrow (1, aa) \rightarrow (2, a)$$

   Echec. Mot non reconnu par l'automate (pas de transition a pour l'état 2).

5. L'automate suivant M' est-il déterministe ?



M' n'est pas déterministe : 2 transitions b à partir de l'état 3

6. Dans quels états peut-être l'automate M' après avoir lu *babba* ? Ce mot est-il accepté par cet automate ?

$$(1,babba) \to (1,abba) \to (2,bba) \to (3,ba) \to_1 (1,a) \to (2,\varepsilon)$$

ou

$$(1,babba) \to (1,abba) \to (2,bba) \to (3,ba) \to_2 (4,a) \to (5,\varepsilon)$$

Etats $2 \notin F$ ou $5 \in F$. Donc le mot est accepté par M'

7. Même question pour le mot *abbb*.

$$(1,abbb) \to (2,bbb) \to (3,bb) \to_1 (1,b) \to (1,\varepsilon)$$

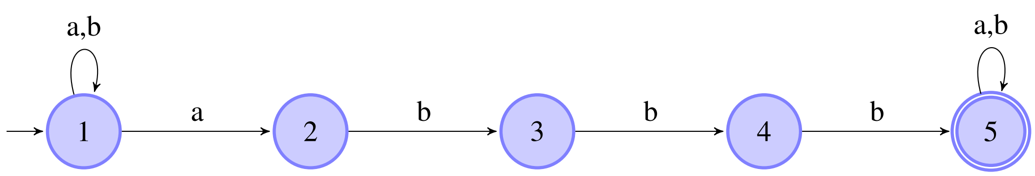
ou

$$(1,abbb) \to (2,bbb) \to (3,bb) \to_2 (4,b) \to (2,\varepsilon)$$

Etats $2 \notin F$ ou $1 \notin F$. Donc le mot n'est pas accepté par M'

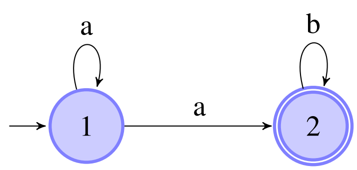
Exercice 2 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Pour chacun des automates suivants, dire s'il est déterministe et s'il est complet. Décrire ensuite le langage reconnu par cet automate.

1. Automate M_1



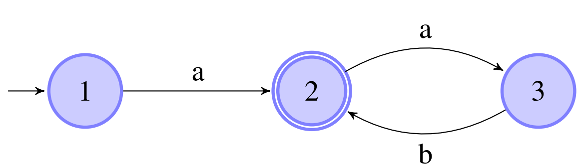
M_1 pas déterministe (2 transitions a à l'état 1), pas complet (pas de transition a à l'état 2).
$\mathcal{L}(M_1) = (a+b)^*abbb(a+b)^*$ (tous les mots qui contiennent la séquence *abbb*)

2. Automate M_2



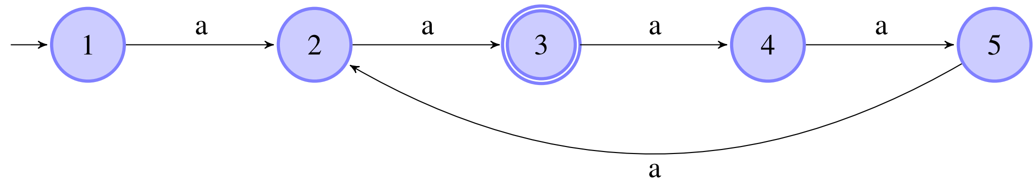
M_2 pas déterministe (2 transitions a à l'état 1), pas complet (pas de transition a à l'état 2).
$\mathcal{L}(M_2) = a^*ab^*$

3. Automate M_3



M_3 déterministe (un seul état initial, une transition au maximum par lettre de l'alphabet et par état), pas complet (pas de transition b à l'état 1).
$\mathcal{L}(M_3) = a(ab)^*$

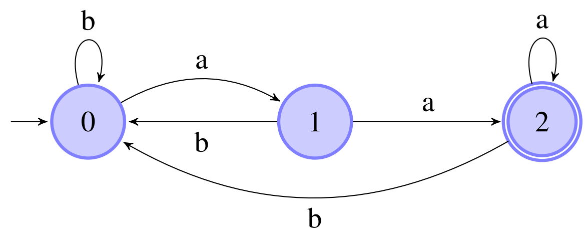
4. Automate M_4



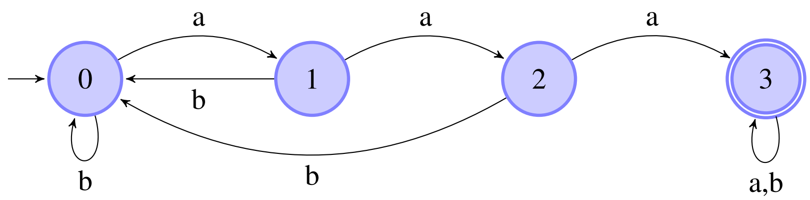
M_4 déterministe (un seul état initial, une transition au maximum par lettre de l'alphabet et par état), pas complet sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ (pas de transition b).
$\mathcal{L}(M_4) = aa(aaaa)^*$

Exercice 3 - Dans chacun des cas suivants, donner un automate **déterministe et complet** reconnaissant le langage sur l'alphabet $\{a,b\}$:

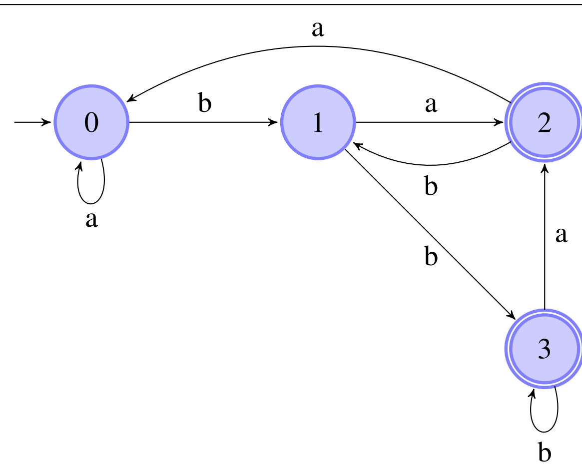
1. l'ensemble des mots se terminant par 'aa'



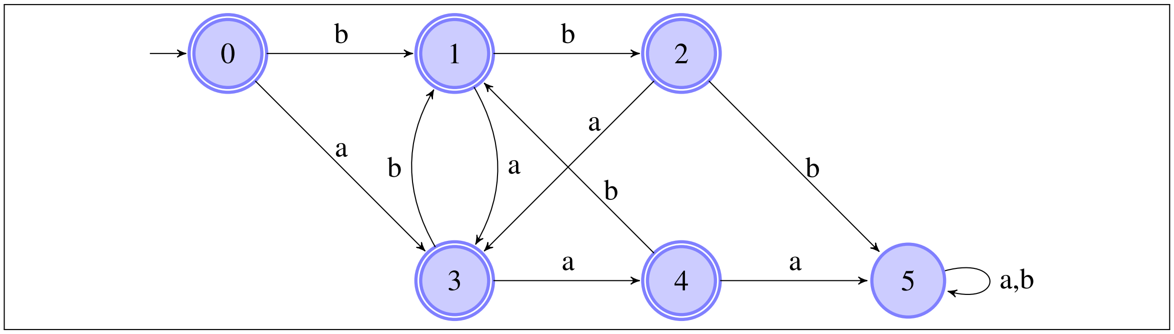
2. l'ensemble des mots ayant au moins 3 'a' consécutifs



3. l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 'b'

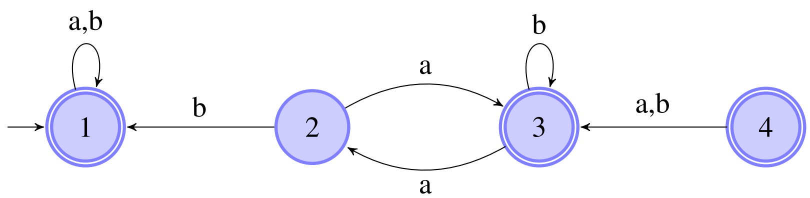


4. l’ensemble des mots qui contiennent au plus deux ’a’ consécutifs et au plus deux ’b’ consécutifs

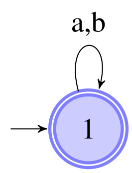


Exercice 4 - Dans chacun des cas suivants, émonder l’automate :

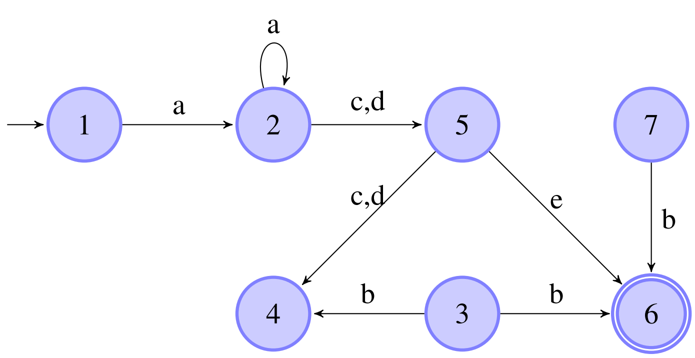
1. Automate M_1



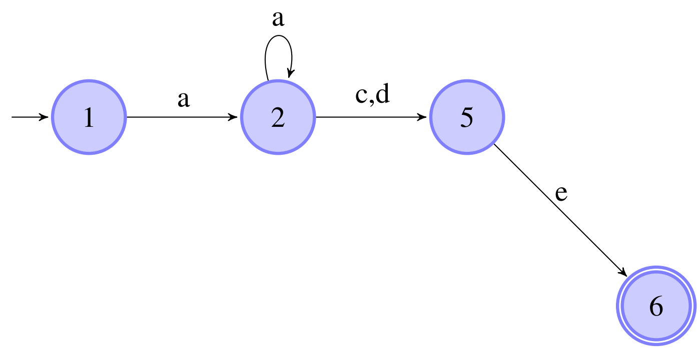
$Acc = \{1\}$
$CoAcc = \{1,2,3,4\}$
$U = Acc \cap CoAcc = \{1\}$



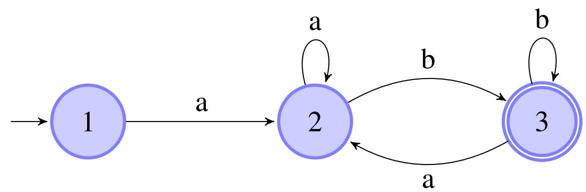
2. Automate M_2



$Acc = \{1,2,4,5,6\}$
$CoAcc = \{1,2,3,5,6,7\}$
$U = Acc \cap CoAcc = \{1,2,5,6\}$



3. Automate M_3

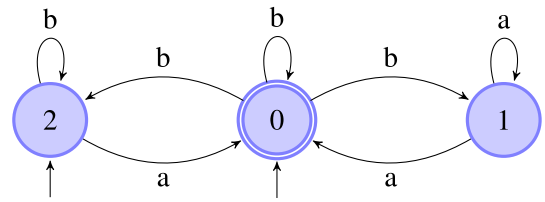


$Acc = CoAcc = U = \{1,2,3\}$
L'automate est déjà émondé.

Exercice 5 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Pour chacun des automates suivants :

— Donner le système d'équations de l'automate
— Déterminiser l'automate
— Caractériser le langage $\mathcal{L}(M)$ reconnu par l'automate

1. automate M_1

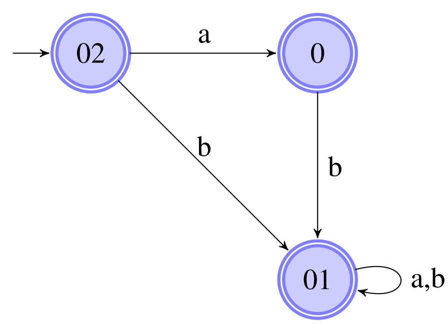


Système d'équations de l'automate :

$$\begin{aligned} L_0 &= bL_0 + bL_1 + bL_2 + \varepsilon = b(L_0 + L_1 + L_2) + \varepsilon \\ L_1 &= a(L_0 + L_1) \\ L_2 &= aL_0 + bL_2 \end{aligned}$$

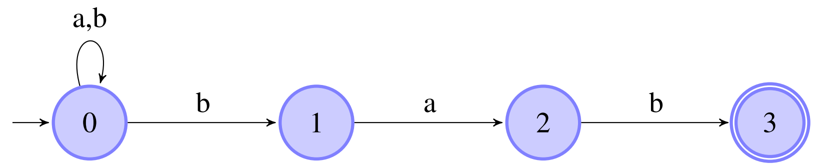
Processus pour rendre l'automate déterministe :
$\mathcal{L}(M) = L_0 + L_2$

$$\begin{aligned} L_0 + L_2 &= aL_0 + b(L_0 + L_1 + L_2) + \varepsilon \\ L_0 &= b(L_0 + L_1 + L_2) + \varepsilon \\ L_0 + L_1 + L_2 &= a(L_0 + L_1) + b(L_0 + L_1 + L_2) + \varepsilon \\ L_0 + L_1 &= a(L_0 + L_1) + b(L_0 + L_1 + L_2) + \varepsilon = L_0 + L_1 + L_2 \end{aligned}$$



$\mathcal{L}(M) = \varepsilon + a + ab(a+b)^* + b(a+b)^* = (a+\varepsilon)(\varepsilon + b(a+b)^*)$

2. automate M_2

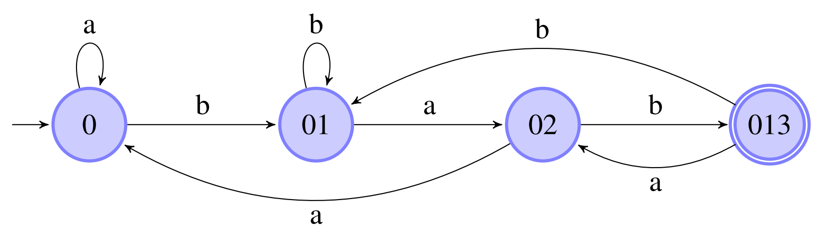


Système d'équations de l'automate :

$$\begin{aligned}
L_0 &= aL_0 + bL_0 + bL_1 = aL_0 + b(L_0 + L_1) \\
L_1 &= aL_2 \\
L_2 &= bL_3 \\
L_3 &= \varepsilon
\end{aligned}$$

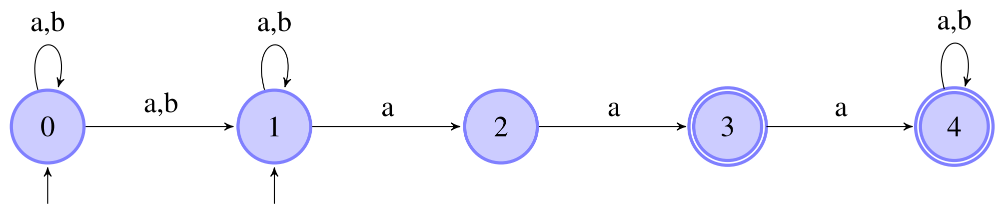
Processus pour rendre l'automate déterministe :
$\mathcal{L}(M) = L_0$

$$\begin{aligned}
L_0 &= aL_0 + b(L_0 + L_1) \\
L_0 + L_1 &= a(L_0 + L_2) + b(L_0 + L_1) \\
L_0 + L_2 &= aL_0 + b(L_0 + L_1 + L_3) \\
L_0 + L_1 + L_3 &= a(L_0 + L_2) + b(L_0 + L_1) + \varepsilon
\end{aligned}$$



$\mathcal{L}(M) = (a+b)^*bab$

3. automate M_3

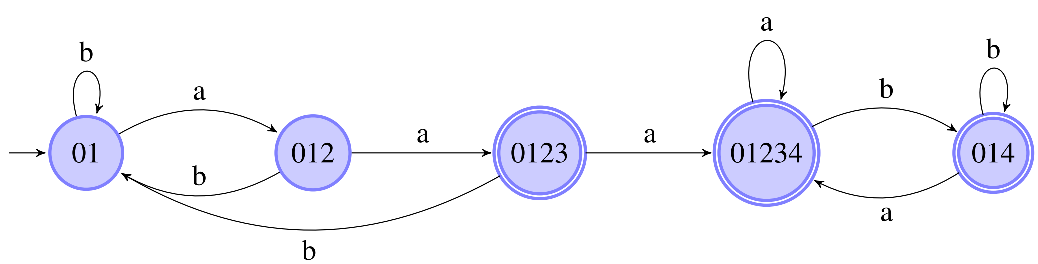


Système d'équations de l'automate :

$$
\begin{array}{lcl}
L_0 & = & a(L_0+L_1)+b(L_0+L_1) \\
L_1 & = & a(L_1+L_2)+bL_1 \\
L_2 & = & aL_3 \\
L_3 & = & aL_4+\varepsilon \\
L_4 & = & aL_4+bL_4+\varepsilon
\end{array}
$$

Processus pour rendre l'automate déterministe :
$\mathcal{L}(M) = L_0+L_1$

$$
\begin{array}{lcl}
L_0+L_1 & = & a(L_0+L_1+L_2)+b(L_0+L_1) \\
L_0+L_1+L_2 & = & a(L_0+L_1+L_2+L_3)+b(L_0+L_1) \\
L_0+L_1+L_2+L_3 & = & a(L_0+L_1+L_2+L_3+L_4)+b(L_0+L_1)+\varepsilon \\
L_0+L_1+L_2+L_3+L_4 & = & a(L_0+L_1+L_2+L_3+L_4)+b(L_0+L_1+L_4)+\varepsilon \\
L_0+L_1+L_4 & = & a(L_0+L_1+L_2+L_4)+b(L_0+L_1+L_4)+\varepsilon \\
L_0+L_1+L_2+L_4 & = & a(L_0+L_1+L_2+L_3+L_4)+b(L_0+L_1+L_4)+\varepsilon = L_0+L_1+L_2+L_3+L_4
\end{array}
$$



$\mathcal{L}(M) = (a+b)^*((aaa(a+b)^*)+aa)$