Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

# Partiel 2019-2020 avec correction

**Exercice 1** Après avoir défini leur domaine de définition, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

(1)
$$f(x) = x^2 e^{2x}$$

(2)
$$f(x) = \sin^3(x)\cos^2(x)$$

**CORRECTION**

**(1)** $D_f = \mathbb{R}$
**$f$ est continue donc elle admet des primitives sur $D_f$**
**Soit** $[c,t] \subset \mathbb{R}$
**Par IPP1 :** $u = x^2$, $u' = 2x$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$ $\quad v' = e^{2x}$
$F(t) = \left[\frac{x^2}{2}e^{2x}\right]_c^t - \int_c^t xe^{2x}dx = \frac{t^2}{2}e^{2t} - \int_c^t xe^{2x}dx$
**Par IPP2 :** $u = x$, $u' = 1$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$ $\quad v' = e^{2x}$
$\int_c^t xe^{2x}dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_c^t - \int_c^t \frac{e^{2x}}{2}dx = t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}$
**d'où** $F(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t} - \frac{t}{2}e^{2t} + \frac{e^{2t}}{4} + \textbf{cte} = \frac{e^{2t}}{2}(t^2 - t + \frac{1}{2}) + \textbf{cte}$
$F = \{F_c(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **tq** $F_c(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ **est l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

**(2)** $D_f = \mathbb{R}$
**$f$ est continue donc elle admet des primitives sur $D_f$**
**Soit** $[c,t] \subset \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$
$F(t) = \displaystyle\int_c^t f(x)dx = -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^3 c}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^5 c}{5} = -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^5}{5}.$
$F(t) = -\dfrac{\cos^3 t}{3} + \dfrac{\cos^5 t}{5} + \textbf{cte}$
**est une primitive de $f$ sur $D_f$ et** $F = \{F_c(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **tq** $F_c(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ **est l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

**Exercice 2** **Calculer les intégrales suivantes :**

**(1)**
$$I_1 = \int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4} - 3t - t^2}}dt$$

**(2)**
$$I_2 = \int_2^3 \frac{t}{t^2 - 5t + 4}dt$$

**CORRECTION**

**(1)** **On pose** $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\frac{7}{4} - 3t - t^2}}$, **$f$ est définie sur $[0, 1/4]$ car $t \to \frac{7}{4} - 3t - t^2$ est strictement positive dans $[0, 1/4]$**
$(\Delta = 16,\ t_1 = -7/2,\ t_2 = 1/2)$
**$f$ est continue sur $[0, 1/4]$ donc $I_1$ existe et on a :**

$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{-(t+3/2)^2+4}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t+3}{4}\right)^2}}$

**On pose** $u = \frac{2t+3}{4}$**,** $dt = 2du$**, d'où** $I_1 = \displaystyle\int_{3/4}^{7/8} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\arcsin(u)]_{3/4}^{7/8}$

**ou directement** $I_1 = \dfrac{1}{2} 2 \left[\arcsin(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4})\right]_0^{1/4}$

**Donc, conclusion :** $I_1 = \arcsin \frac{7}{8} - \arcsin \frac{3}{4}$.

**(2)** $f(t) = \dfrac{t}{t^2-5t+4}$ **est définie sur** $[2,3]$ **car** $t \to t^2 - 5t + 4$ **est strictement négative sur** $[2,3]$ $(\Delta = 9$**,** $t_1 = 1$**,** $t_2 = 4)$

$f$ **est continue sur** $[2,3]$ **donc** $I_2$ **existe et on a :**

$f(t) = \dfrac{t}{t^2-5t+4} = \dfrac{t}{(t-1)(t-4)} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t-4}$

**On obtient :** $a = -\dfrac{1}{3}$ **et** $b = \dfrac{4}{3}$

$I_2 = \displaystyle\int_2^3 -\frac{1}{3}\frac{1}{t-1} + \frac{4}{3}\frac{1}{t-4} dt = -\frac{1}{3}[\ln|t-1|]_2^3 + \frac{4}{3}[\ln|t-4|]_2^3$

$I_2 = -1/3 \ln 2 - 1/3 \ln 1 + 4/3 \ln 1 - 4/3 \ln 2 = -\frac{5}{3} \ln 2.$

**Exercice 3**

**(1) Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :**

**(a)**

$$J_1 = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad (u = e^x)$$

**(b)**

$$J_2 = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx \qquad (u = \ln x)$$

**(2) On cherche à calculer** $J_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ **:**

**(a) A l'aide du changement de variable** $u = \cos x$**, montrer que**

$$J_3 = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 du + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2}{1+u^2} du$$

**(b) En déduire que**

$$J_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

**CORRECTION**

**(1)(a)** $f$ **est définie sur** $[1,2]$ **car** $1 + e^x > 0$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$

$f$ **est continue sur** $[1,2]$ **donc l'intégrale existe**

**On pose** $u = e^x$**,** $du = e^x dx$

$J_1 = \displaystyle\int_{e^1}^{e^2} \frac{u}{1+u}\frac{du}{u} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{1+u} du$

$J_1 = \ln\left(\dfrac{1+e^2}{1+e}\right)$

**(b)** $f$ **est définie sur** $[1,e]$ $(D_f = \mathbb{R}^{+*} = ]0, +\infty[\ )$

$f$ **est continue sur** $[1,e]$ **donc l'intégrale existe**

$u = \ln x$**,** $du = dx/x$

$J_2 = \int_0^1 \frac{u^n}{x} x du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$J_2 = \frac{1}{n+1}$

**(2) Calcul de** $J_3$

**(a)** $f$ **est définie sur** $[0, \pi/4] \subset \mathbb{R}$ **car** $1 + \cos^2 x > 1$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$

$f$ **est continue sur** $[0, \pi/4]$ **donc l'intégrale existe**

$du = -\sin x dx$

$\sin^3 x dx = (\sin^2 x)\sin x dx = -\sin^2 x du = -(1-\cos^2 x)du = -(1-u^2)du$

$$J_3 = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{(1-u^2)}{1+u^2}du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{(1-u^2)}{1+u^2}du$$

$$J_3 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2-(1+u^2)}{1+u^2}du = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 du + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2}{1+u^2}du$$

**(b)** $J_3 = -[u]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 + [2\arctan(x)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\pi}{4} - 2\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2})$

**Exercice 4 Déterminer la nature des intégrales suivantes**

**(1)**
$$K_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t-1)}{t^4+1}dt$$

**(2)**
$$K_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+2t^{2/3}}dt$$

**(3)**
$$K_3 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-t}}dt$$

**Étudier la convergence absolue et la convergence de l'intégrale**

**(4)**
$$Q_1 = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

**CORRECTION**

**(1)** $f$ **est définie et continue sur** $[2, +\infty[$
**Fonction positive.**
$\frac{\ln(t-1)}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^4}$
**pour** $t$ **suffisamment grand** $\ln t \leqslant t^2$ **donc** $\frac{\ln t}{t^4} \leqslant \frac{1}{t^2}$
**donc** $K_1$ **CV car** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ **intégrale de Riemann avec** $\alpha = 2 > 1$.

**(2)** $f$ **est définie et continue sur** $[1, +\infty[$
**Fonction positive.**
$\frac{1}{1+2t^{2/3}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^{2/3}}$
$K_2$ **DV parce que** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}}dt$ **intégrale de Riemann avec** $\alpha = 2/3 < 1$.

**(3)** $f$ **est définie et continue sur** $[0, 3[$
**Fonction positive.**
**On se ramène à une limite en 0 avec le changement de variable** $u = 3-t$.
**On pose** $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{3-t}}dt$ **pour** $x \in [0, 3[$ **(pas de changement de variable sur des intégrales impropres)**
$F(x) = -\int_3^x \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int_x^3 \frac{1}{\sqrt{u}}du$ **donc** $K_3 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{u}}du$
**CV parce que on obtient l'intégrale de Riemann avec** $\alpha = 1/2 < 1$.

**(4)** $D_f = ]0, +\infty[$
$\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$
**donc on a CV absolue parce que on obtient l'intégrale de Riemann avec** $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
**La convergence absolue implique la convergence de l'intégrale, donc** $Q_1$ **CV.**