MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

NUMÉRATION LOGIQUE

C3 : représentation des rationnels

Nicole VINCENT

Représentation des rationnels

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} s_i b^i$$

- On peut étendre le principe des systèmes pondérés à des nombres non entiers en utilisant des poids d'exposant négatifs

$$b^{-i} = \frac{1}{b^i} \; pour \; i \geq 1$$

- Base b = 10

  Exemple :
  156,57 = $\boxed{1 \;\; 10^2 + 5 \;\; 10 + 6 \;\; 10^0}$ + 5 10^{-1} + 7 10^{-2}

- Représentation des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres rationnels ayant un **développement décimal fini**.

  Exemples :
  0,333 ; 45001,004 ; $\frac{1}{5}$ = 0,2 ; $\frac{3}{2}$ = 1,5

Représentation des rationnels

- Pas tous les rationnels, et pas tous les réels, ont une partie décimale limitée

  1/3 = 0; 33333333333… = $\sum_{i=1}^{+\infty} 3.10^{-i}$. période
  1/7 = 0,142857142857142857… période
  $\sqrt{2}$ = 1,4142135623730951454 … pas de périodicité

- Un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}^+$est un nombre décimal si et seulement si l'on peut écrire

$$x = \frac{n}{5^p . 2^q}$$

  où (n, p, q) $\in \mathbb{N}^3$ et n est premier avec 5 et 2

- Le développement décimal d'un nombre rationnel est soit limité, soit périodique (à partir d'un certain rang).

Représentation des rationnels

- Tout nombre décimal non nul admet aussi un développement décimal infini

$$1 = 0{,}999 \ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} 9.\frac{1}{10} \qquad 0{,}2 = 0{,}19999 \ldots$$

  Attention 0,99999 ≠ 0,999… = 1

  mais tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres décimaux

  Ceci permet de justifier les calculs par valeurs approchées.

- Afin d'éviter les développements illimités des nombres rationnels, on peut les représenter sous forme de fraction (réduite),
  on garde le numérateur et le dénominateur en machine.

Représentation des rationnels

On peut utiliser d'autres bases :

- Base binaire, b = 2 et symboles {0, 1}

$(\boxed{101},\boxed{011})_2$ = $\boxed{1 \;\; 2^2 + 0 \;\; 2^1 + 1 \;\; 2^0}$ + $\boxed{0 \;\; 2^{-1} + 1 \;\; 2^{-2} + 1 \;\; 2^{-3}}$ = $(5+1/4+1/8) = (5{,}375)_{10}$

- Base octale et symboles {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$(65{,}23)_8 = 6 \;\; 8^1 + 5 \;\; 8^0 + 2 \;\; 8^{-1} + 3 \;\; 8^{-2} = (53{,}296875)_{10}$

- Base hexadécimale avec {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

$(B5{,}AE)_{16} = 11.16^1+5.16^0+10.16^{-1}+14.16^{-2} = (181{,}67968)_{10}$

Représentation des rationnels

Un rationnel positif x ∈ $\mathbb{Q}^+$ admet-il un développement limité dans une base b ≥ 2 ?

Réduction en une fraction irréductible x = $(a/c)_{10}$

Alors son développement est infini si et seulement si c a un diviseur premier avec b

Son développement est limité si $x = (\frac{m}{b^k})_{10}$ *m* et *k* des entiers

$(2/4)_{10} = (1/2)_{10}$ 2/4=8/16

2 a un diviseur premier avec 3 , 2 n'a pas de diviseur premier avec 2 ou 16

$(0{,}11\underline{1} \ldots)_3$ $(0{,}1)_2$ $(0{,}8)_{16}$

$(1/8)_{10} = (1/2^3)_{10} = (5^3/10^3)_{10} = (0{,}125)_{10}$

8 a un diviseur premier avec 3 , 8 n'a pas de diviseur premier avec 2 ou 8 ou 16

$(0{,}001)_2$ $(0{,}1)_8$ $(0{,}2)_{16}$

Représentation des rationnels

- Exemples

$(1/3)_{10} = (0,333\ldots)_{10} = (0,0101\underline{01}\ldots)_2 = (0,1)_3$

$(1/6)_{10} = (0,166\underline{6}\ldots)_{10} = (0,00101\underline{01}\ldots)_2 = (0,01111\ldots)_3$

$(1/5)_{10} = (0,2)_{10} = (0,00110011\underline{0011}\ldots)_2 = (0,1)_5$

$(1/11)_{10} = (0,0909\underline{09}\ldots)_{10} = (0,0021100211\underline{00211}\ldots)_3$

$= (0,000101110100010111010\underline{0010111010}\ldots)_2$

7

Conversion des rationnels

Pour convertir des nombres avec une partie fractionnaire on procède de la même façon que pour les entriers

mais par exemple les regroupements se font de part et d'autre de la virgule

Exemple : conversion de $(1001101011,11001)_2$ en base 16

$$\underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1011}_{B}\ ,\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{1000}_{8}$$

d'où $(1001101011,11001)_2 = (26B,C8)_{16}$

Par ailleurs

$(1001101011,11001)_2 = 2\ 16^2+6\ 16^1+11\ 16^0+12\ 16^{-1}+8\ 16^{-2} = (619,78125)_{10}$

8

Conversion des rationnels

Convertir $(B5,AE)_{16}$ en base 2

Pour chaque digit on a :

$(B)_{16} = (1011)_2$ $(5)_{16} = (0101)_2$ $(A)_{16} = (1010)_2$ $(E)_{16} = (1110)_2$

$$(\underbrace{B}_{1011}\ \underbrace{5}_{0101}\ ,\ \underbrace{A}_{1010}\ \underbrace{E}_{1110})_{16}$$

$(B5,AE)_{16} = (10110101,1010111)_2$

9

Conversion des rationnels

- Conversion de $(1001101011,11001)_2$ en octal
- on regroupe en paquets de 3 bits de part et d'autre de la virgule

001 001 101 011 , 110 010

et on associe les chiffres octaux

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ ,\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{010}_{2}$$

d'où

$(1001101011,11001)_2 = (1153,62)_8$

$= 1\ \ 8^3 + 1\ \ 8^2 + 5\ \ 8^1 + 3\ \ 8^0 + 6\ \ 8^{-1} + 2\ \ 8^{-2} = (619,78125)_{10}$

10

Conversion des rationnels

- Pour passer d'un nombre en base b, avec partie fractionnaire, à un nombre en base 10, on utilise l' écriture polynomiale
- Pour passer d'un nombre en base 10, avec partie décimale, à un nombre en base b :
  - On transforme la partie entière, par la méthode de soustraction ou de division, par rapport à b.
  - On transforme la partie décimale, par la méthode de soustraction ou de division mais par rapport à b^{-1}

11

Conversion de la partie fractionnaire

- On s'intéresse à la partie fractionnaire (à droite de la virgule), c'est à dire aux réels dans l'intervalle $(x)_{10} \in\ ]0 , 1[$

  $(x)_{10} = (0,\boxed{s_{-1}}s_{-2} \ldots\ s_{-k})_b$ où $s_{-k} \in \{0, 1, \ldots , b - 1\}, k \geq 1$

- Méthode par soustraction
  - on détermine d'abord les digits de plus fort poids et ensuite les digits de poids faible : dans l'ordre, les coefficients de $\boxed{b^{-1}}$, $b^{-2},\ldots , b^{-k} , \ldots$
  - pour $k \geq 1$,

    - on détermine combien de fois b^{-i} se trouve dans

    $x - s_{-1}b^{-1} - \ldots - s_{-(i-1)}b^{-(i-1)} \rightarrow s_{-i}$

    - on recommence avec $b^{-(i+1)}$ dans

    $x - s_{-1}b^{-1} - \ldots - s_{-(i-1)}b^{-(i-1)} - s_{-(i)}b^{-i} \rightarrow s_{-(i+1)}$

    - ce procédé ne s'arrête pas nécessairement

12

Conversion de la partie fractionnaire

- Soit $(x)_{10} \in]0\ ,\ 1[$, on veut écrire $(x)_{10} = (0, s_{-1}s_{-2}\ \ldots\ s_{-k}\ \ldots)_b$ où $s_{-k} \in \{0, 1, \ldots , b-1\}$; $k \geq 1$
- Méthode par multiplication
  - on détermine d'abord les digits de plus fort poids et ensuite les digits de poids faible : dans l'ordre, les coefficients de b^{-1}; b^{-2},… , b^{-k}, …
  - on a $x = \boxed{d}\ b^{-1} + r$ où $d \in \{0, 1, \ldots , b - 1\}$ est le nombre de fois que b^{-1} est dans x et $r \in [0, x[$ est le reste

  en pratique, au lieu de diviser par b^{-1}, on multiplie par b :

  - on calcule $x\ .\ b = \boxed{d} + b\ .\ r$

  - on garde $d \in \{0, 1, \ldots , b - 1\}$ qui est à gauche de la virgule,

  le reste $x' = b\ .\ r \in [0, 1[$ est à droite de la virgule

  - si $x' \neq 0$, on recommence en multipliant x' par b

  ce procédé ne s'arrête pas nécessairement

Conversion de la partie décimale

Convertir $(0,28125)_{10}$ en base 2 **par soustraction**

On détermine successivement les bits coefficients de 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, …

2^{-1} = 0,50000 est 0 fois dans 0,28125 — $S_{-1}=0$

2^{-2} = 0,25000 est 1 fois dans 0,28125 — $S_{-2}=1$

0,28125 – 0,25000 = 0,03125

2^{-3} = 0,12500 est 0 fois dans 0,03125 — $S_{-3}=0$

2^{-4} = 0,06250 est 0 fois dans 0,03125 — $S_{-4}=0$

2^{-5} = 0,03125 est 1 fois dans 0,03125 — $S_{-5}=1$

et 0,03125 – 0,03125 = 0

Le reste étant nul, on s'arrête et $(0,28125)_{10}= (0,01001)_2$

x . b = d + b . r   d entier   r≤x

x' = b . r

Conversion de la partie décimale

Convertir $(0,28125)_{10}$ en base 2 **par multiplication**

On détermine successivement les bits coefficients de 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, …

0,28125 x 2 = 0,5625	d=0 et x'= 0,5625	S_{-1}= 0
0,5625 x 2 = 1,125	d=1 et x'= 0,125	S_{-2}= 1
0,125 x 2 = 0,25	d=0 et x'= 0,25	S_{-3}= 0
0,25 x 2 = 0,5	d=0 et x'= 0,5	S_{-4}= 0
0,5 x 2 = 1	d=1 et x'= 0	S_{-5}= 1

Le reste étant nul, on s'arrête et $(0,28125)_{10}= (0,01001)_2$

Conversion de la partie décimale

Convertir $(0,408)_{10}$ en base 2 **par multiplication**

On détermine successivement les bits coefficients de 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, …

0,408 x 2 = 0,816 le coefficient de 2^{-1} est	0	0,056 x 2 = 0,112 le coefficient de 2^{-6} est	0
0,816 x 2 = 1,632 le coefficient de 2^{-2} est	1	0,112 x 2 = 0,224 le coefficient de 2^{-7} est	0
0,632 x 2 = 1,264 le coefficient de 2^{-3} est	1	0,224 x 2 = 0,448 le coefficient de 2^{-8} est	0
0,264 x 2 = 0,528 le coefficient de 2^{-4} est	0	0,448 x 2 = 0,896 le coefficient de 2^{-9} est	0
0,528 x 2 = 1,056 le coefficient de 2^{-5} est	1	0,896 x 2 = 1,692 le coefficient de 2^{-10} est	1

Le processus ne s'arrête pas

La période de longueur 100 apparaît à partir de s_{-47}

Conversion de la partie décimale en base 8

Convertir $(0,28125)_{10}$ en base 8 par **multiplication**

0,28125*8 = 2,2500 s_{-1} = 2 et x' = 0,25

0,25*8 = 2,00 s_{-2} = 2 et x' = 0

Le reste étant nul, on s'arrête et $(0,28125)_{10} = (0,22)_8$

Conversion de la partie décimale en base 8

Convertir $(0,28125)_{10}$ en base 8 par multiplication

On peut vérifier en passant par la base 2 :

On avait trouvé $(0,28125)_{10} = (0,01001)_2$

Il suffit de décomposer par paquets de 3

$$0\ ,\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{010}_{2}$$

0, 2 2