Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1$^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°4

Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Méthode de travail

- Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
  Ne vous contentez pas de la lire.
- Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.
- Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.
- Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Comment trouver les solutions ?

Comme pour les équations différentielles que nous avons étudié précédemment on commence (1$^{\text{ère}}$ étape) par résoudre l'équation homogène associée

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

Équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Comment trouver les solutions ?

Comme pour les équations différentielles que nous avons étudié précédemment on commence (1ère étape) par résoudre l'équation homogène associée

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

Ensuite (2ème étape) nous allons chercher une solution particulière $y_p : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle initiale (E).

Équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Comment trouver les solutions ?

Comme pour les équations différentielles que nous avons étudié précédemment on commence ($1^{\text{ère}}$ étape) par résoudre l'équation homogène associée

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

Ensuite ($2^{\text{ème}}$ étape) nous allons chercher une solution particulière $y_p : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle initiale (E).

Finalement ($3^{\text{ème}}$ étape), l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\left\{ y + y_p \;\middle|\; y \text{ solution de } (E_0) \right\} .$$

1ère étape : Solutions de l'équation homogène

Proposition 5.3.1 du polycopié de cours.

$1^{\text{ère}}$ étape : Solutions de l'équation homogène

Proposition 5.3.1 du polycopié de cours. L'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

$1^{\text{ère}}$ étape : Solutions de l'équation homogène

Proposition 5.3.1 du polycopié de cours. L'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

On associe à (E_0) son **équation caractéristique**

$$r^2 + pr + q = 0.$$

et on note $\Delta = p^2 - 4q$ le discriminant.

$1^{\text{ère}}$ étape : Solutions de l'équation homogène

Proposition 5.3.1 du polycopié de cours. L'équation homogène associée à (E) est donnée par

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{E_0}$$

On associe à (E_0) son **équation caractéristique**

$$r^2 + pr + q = 0.$$

et on note $\Delta = p^2 - 4q$ le discriminant. L'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\{C_1 y_1 + C_2 y_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

où les fonctions y_1 et y_2 sont définies comme suit.

1. Si $\Delta > 0$, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique,
2. si $\Delta = 0$, $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique,
3. si $\Delta < 0$, $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ et $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ où $a + ib$ et $a - ib$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

$2^{\text{ème}}$ étape : Trouver une solution particulière

Lorsque les coefficients devant y'', y' et y sont constants, on peut, comme pour les équations différentielles du premier ordre, chercher une solution particulière y_p sous une forme correspondant à la forme de la fonction h. Par exemple :

- Si $h(x) = Q(x)$ avec Q un polynôme, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme P : on déduit son degré selon la présence de y dans l'équation puis on introduit des coefficients à déterminer (ex $P(x) = ax + b$ si on cherche un polynôme de degré 1). Exemples :
  - $y'' + y' + y = x^2$ devient $P'' + P' + P = x^2$, le degré maximal à gauche est celui de P donc par identification avec le second membre $\deg(P) = 2$.
  - $y'' - 2y' = x^3$ devient $P'' - 2P' = x^3$, le degré maximal à gauche est celui de P' (avec $\deg(P') = \deg(P) - 1$) donc par identification avec le second membre $\deg(P) - 1 = 3$ et $\deg(P) = 4$.
  - $y'' = x$, on peut chercher directement des primitives ! Ici, $y' = x^2/2$ et $y = x^3/6$ donne une solution particulière évidente.

$2^{\text{ème}}$ étape : Trouver une solution particulière

Lorsque les coefficients devant y'', y' et y sont constants, on peut, comme pour les équations différentielles du premier ordre, chercher une solution particulière y_p sous une forme correspondant à la forme de la fonction h. Par exemple :

- Si $h(x) = Q(x)$ avec Q un polynôme, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme P : on déduit son degré selon la présence de y dans l'équation puis on introduit des coefficients à déterminer (ex $P(x) = ax + b$ si on cherche un polynôme de degré 1). Exemples :
  - $y'' + y' + y = x^2$ devient $P'' + P' + P = x^2$, le degré maximal à gauche est celui de P donc par identification avec le second membre $\deg(P) = 2$.
  - $y'' - 2y' = x^3$ devient $P'' - 2P' = x^3$, le degré maximal à gauche est celui de P' (avec $\deg(P') = \deg(P) - 1$) donc par identification avec le second membre $\deg(P) - 1 = 3$ et $\deg(P) = 4$.
  - $y'' = x$, on peut chercher directement des primitives ! Ici, $y' = x^2/2$ et $y = x^3/6$ donne une solution particulière évidente.
- Si $h(x) = Q(x)e^{bx}$ avec Q un polynôme et $b \in \mathbb{R}$, on peut chercher y_p sous la forme $P(x)e^{bx}$ avec P un polynôme à déterminer.
- Si $h(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on peut chercher y_p sous la forme $\lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

(voir la Proposition 5.3.4 du polycopié de cours pour plus de cas particuliers).

$2^{\text{ème}}$ étape : Trouver une solution particulière

Lorsque les coefficients devant y'', y' et y sont constants, on peut, comme pour les équations différentielles du premier ordre, chercher une solution particulière y_p sous une forme correspondant à la forme de la fonction h. Par exemple :

- Si $h(x) = Q(x)$ avec Q un polynôme, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme P : on déduit son degré selon la présence de y dans l'équation puis on introduit des coefficients à déterminer (ex $P(x) = ax + b$ si on cherche un polynôme de degré 1). Exemples :
  - $y'' + y' + y = x^2$ devient $P'' + P' + P = x^2$, le degré maximal à gauche est celui de P donc par identification avec le second membre $\deg(P) = 2$.
  - $y'' - 2y' = x^3$ devient $P'' - 2P' = x^3$, le degré maximal à gauche est celui de P' (avec $\deg(P') = \deg(P) - 1$) donc par identification avec le second membre $\deg(P) - 1 = 3$ et $\deg(P) = 4$.
  - $y'' = x$, on peut chercher directement des primitives ! Ici, $y' = x^2/2$ et $y = x^3/6$ donne une solution particulière évidente.
- Si $h(x) = Q(x)e^{bx}$ avec Q un polynôme et $b \in \mathbb{R}$, on peut chercher y_p sous la forme $P(x)e^{bx}$ avec P un polynôme à déterminer.
- Si $h(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on peut chercher y_p sous la forme $\lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

(voir la Proposition 5.3.4 du polycopié de cours pour plus de cas particuliers).

En dehors de ces situations, on utilise la méthode de la variation des constantes pour les équations différentielles du deuxième ordre (on le verra dans l'exercice 4).

$3^{\text{ème}}$ étape : Exprimer les solutions

On a juste à exprimer l'ensemble des solutions de (E) comme

$$\left\{ y + y_p \;\middle|\; y \text{ solution de } (E_0) \right\}$$

où y_p est la solution particulière trouvée dans l'étape précédente.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 1$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 1$.
Racines : $r_1 = 1,\ r_2 = 2$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 1$.
Racines : $r_1 = 1,\ r_2 = 2$.

Comme $\Delta > 0$ les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1x + a_0$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 3a_1 + 2(a_1 x + a_0) = x,$$

qu'on peut réécrire

$$2a_1 x + (a_0 - 3a_1) = x.$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{\textbf{ème}}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 3a_1 + 2(a_1 x + a_0) = x,$$

qu'on peut réécrire

$$2a_1 x + (a_0 - 3a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $2a_1 = 1$, d'où $a_1 = 1/2$
- $a_0 - 3a_1 = 0$, d'où $a_0 = 3/4$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 3a_1 + 2(a_1 x + a_0) = x,$$

qu'on peut réécrire

$$2a_1 x + (a_0 - 3a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $2a_1 = 1$, d'où $a_1 = 1/2$
- $a_0 - 3a_1 = 0$, d'où $a_0 = 3/4$

Donc

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4},$$

est une solution particulière de (E).

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 3a_1 + 2(a_1 x + a_0) = x,$$

qu'on peut réécrire

$$2a_1 x + (a_0 - 3a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $2a_1 = 1$, d'où $a_1 = 1/2$
- $a_0 - 3a_1 = 0$, d'où $a_0 = 3/4$

Donc

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4},$$

est une solution particulière de (E).

$3^{\text{ème}}$ **étape :** Ainsi, toute solution de (E) est de la forme

$$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}, \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1**ère étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 0$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 0$.
Racines : $r_1 = 1, \; r_2 = 1$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1^ère **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 0$.
Racines : $r_1 = 1, \; r_2 = 1$.

Comme $\Delta = 0$ les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 2a_1 + a_1 x + a_0 = x,$$

qu'on peut réécrire

$$a_1 x + (a_0 - 2a_1) = x.$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 2a_1 + a_1x + a_0 = x,$$

qu'on peut réécrire

$$a_1x + (a_0 - 2a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1$
- $a_0 - 2a_1 = 0$, d'où $a_0 = 2$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 2a_1 + a_1 x + a_0 = x,$$

qu'on peut réécrire

$$a_1 x + (a_0 - 2a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1$
- $a_0 - 2a_1 = 0$, d'où $a_0 = 2$

Donc

$$y_p(x) = x + 2$$

est une solution particulière de (E).

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Les coefficients devant y'', y' et y sont constants. Le second membre est un polynôme de degré 1. Le coefficient de y est non nul donc on cherche donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 - 2a_1 + a_1 x + a_0 = x,$$

qu'on peut réécrire

$$a_1 x + (a_0 - 2a_1) = x.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1$
- $a_0 - 2a_1 = 0$, d'où $a_0 = 2$

Donc

$$y_p(x) = x + 2$$

est une solution particulière de (E).

$3^{\text{ème}}$ **étape :** Ainsi, toute solution de (E) est de la forme

$$y(x) = x + 2 + C_1 e^x + C_2 x e^x, \ C_1 \in \mathbb{R}, \ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\textbf{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 9y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -36$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -36$.
Racines : $r_1 = 0 + 3i,\ r_2 = 0 - 3i$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 9y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -36$.
Racines : $r_1 = 0 + 3i$, $r_2 = 0 - 3i$.

Comme $\Delta < 0$ les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = C_1 e^0 \cos 3x + C_2 e^0 \sin 3x, \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}$$

soit encore

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 + 9a_1 x + 9a_0 = x + 1.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1/9$
- $a_0 = 1/9$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 + 9a_1 x + 9a_0 = x + 1.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1/9$
- $a_0 = 1/9$

Donc

$$y_p(x) = \frac{x+1}{9},$$

est une solution particulière de (E).

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$. Alors, $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$0 + 9a_1 x + 9a_0 = x + 1.$$

On identifie terme à terme :

- $a_1 = 1/9$
- $a_0 = 1/9$

Donc

$$y_p(x) = \frac{x+1}{9},$$

est une solution particulière de (E).

$3^{\textbf{ème}}$ **étape :** Ainsi, toute solution de (E) est de la forme

$$y(x) = \frac{x+1}{9} + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

La méthode de la variation des constantes

Dans ce dernier exercice nous appliquerons la méthode de la variation des constantes pour trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

La méthode de la variation des constantes

Dans ce dernier exercice nous appliquerons la méthode de la variation des constantes pour trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Nous allons utiliser les solutions de l'équation homogène

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{E_0}$$

qui seront de la forme $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, comme expliqué précédemment (proposition 5.3.1 du polycopié ou troisième slide de ce document).

La méthode de la variation des constantes

Dans ce dernier exercice nous appliquerons la méthode de la variation des constantes pour trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad x \in I, \tag{E}$$

où $p, q \in \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Nous allons utiliser les solutions de l'équation homogène

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{E_0}$$

qui seront de la forme $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, comme expliqué précédemment (proposition 5.3.1 du polycopié ou troisième slide de ce document).

Une fois que nous aurons trouvé les solutions fondamentales $y_1(x), y_2(x)$ de l'équation homogène (E_0), on cherchera une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ seront des fonctions dérivables. Nous imposerons une condition additionnelle à ces fonctions, à savoir

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$

qui va s'avérer réalisable et qui simplifiera les calculs.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -16$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 4y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -16$.
Racines : $r_1 = 0 + 2i, \; r_2 = 0 - 2i$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$.
Discriminant : $\Delta = -16$.
Racines : $r_1 = 0 + 2i,\ r_2 = 0 - 2i$.

Comme $\Delta < 0$ les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes. On considère y_p de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

et on impose la contrainte

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

2**ème étape :** On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes. On considère y_p de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

et on impose la contrainte

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x - 2\,C_1(x)\sin 2x + 2\,C_2(x)\cos 2x \\ &= -2\,C_1(x)\sin 2x + 2\,C_2(x)\cos 2x, \\ y_p''(x) &= -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x - 4\,C_1(x)\cos 2x - 4\,C_2(x)\sin 2x. \end{aligned}$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière par la méthode de la variation des constantes. On considère y_p de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

et on impose la contrainte

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x - 2\,C_1(x)\sin 2x + 2\,C_2(x)\cos 2x \\ &= -2\,C_1(x)\sin 2x + 2\,C_2(x)\cos 2x, \\ y_p''(x) &= -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x - 4\,C_1(x)\cos 2x - 4\,C_2(x)\sin 2x. \end{aligned}$$

On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$y_p''(x) - 4y_p(x) = -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x = \tan x.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Alors $y_p(x)$ est une solution particulière de (E) si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x = \tan x, \end{cases}$$

où la première équation correspond à la contrainte que nous avons imposée précédemment.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Alors $y_p(x)$ est une solution particulière de (E) si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x = \tan x, \end{cases}$$

où la première équation correspond à la contrainte que nous avons imposée précédemment. D'après la première équation $C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{cos 2x}$ pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Alors $y_p(x)$ est une solution particulière de (E) si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x = \tan x, \end{cases}$$

où la première équation correspond à la contrainte que nous avons imposée précédemment. D'après la première équation $C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{cos 2x}$ pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
& 2C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 2x}{cos 2x} + \cos 2x\right) = \tan x \\
\iff \quad & 2C_2'(x)\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = \tan x \cos 2x \qquad \text{car } \cos 2x \neq 0 \\
\iff \quad & 2C_2'(x) = \tan x \cos 2x \qquad \text{car } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \\
\iff \quad & 2C_2'(x) = \tan x(2\cos^2 x - 1) \\
\iff \quad & 2C_2'(x) = 2\sin x \cos x - \tan x \\
\iff \quad & C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2}\tan x
\end{aligned}$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Alors $y_p(x)$ est une solution particulière de (E) si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2\,C_1'(x)\sin 2x + 2\,C_2'(x)\cos 2x = \tan x, \end{cases}$$

où la première équation correspond à la contrainte que nous avons imposée précédemment. D'après la première équation $C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{cos 2x}$ pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} & 2C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 2x}{cos 2x} + \cos 2x\right) = \tan x & \\ \iff\quad & 2C_2'(x)\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = \tan x \cos 2x & \text{car } \cos 2x \neq 0 \\ \iff\quad & 2C_2'(x) = \tan x \cos 2x & \text{car } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \\ \iff\quad & 2C_2'(x) = \tan x(2\cos^2 x - 1) & \\ \iff\quad & 2C_2'(x) = 2\sin x \cos x - \tan x & \\ \iff\quad & C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2}\tan x & \end{aligned}$$

Donc, pour $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\tan x \cos 2x}{2}\frac{2\sin x \cos x}{\cos 2x} = \sin^2(x) = \frac{\cos 2x - 1}{2}.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Par continuité des fonctions C_1' et C_2', les équations précédentes sont aussi vérifiées quand $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Par continuité des fonctions C_1' et C_2', les équations précédentes sont aussi vérifiées quand $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Ainsi le système d'équations précédent est équivalent à

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\cos 2x - 1}{2}, \\ C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2}\tan x. \end{cases}$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Par continuité des fonctions C_1' et C_2', les équations précédentes sont aussi vérifiées quand $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Ainsi le système d'équations précédent est équivalent à

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\cos 2x - 1}{2}, \\ C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2} \tan x. \end{cases}$$

D'où $C_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$, $C_2(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln(\cos x)$ est une solution au système.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Par continuité des fonctions C_1' et C_2', les équations précédentes sont aussi vérifiées quand $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Ainsi le système d'équations précédent est équivalent à

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\cos 2x - 1}{2}, \\ C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2}\tan x. \end{cases}$$

D'où $C_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$, $C_2(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x)$ est une solution au système. Donc

$$y_p(x) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x)\right)\sin 2x,$$

est une solution particulière de (E).

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (E)$$

Par continuité des fonctions C_1' et C_2', les équations précédentes sont aussi vérifiées quand $x = \pm\frac{\pi}{4}$. Ainsi le système d'équations précédent est équivalent à

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\cos 2x - 1}{2}, \\ C_2'(x) = \sin x \cos x - \frac{1}{2}\tan x. \end{cases}$$

D'où $C_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$, $C_2(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x)$ est une solution au système. Donc

$$y_p(x) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x)\right)\sin 2x,$$

est une solution particulière de (E).

3$^{\text{ème}}$ **étape :** Ainsi, toute solution de (E) est de la forme

$$y(x) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x) + C_2\right)\sin 2x,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$