Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°2 : Polynômes

Exercice 1. Factoriser complètement (dans $\mathbb{C}$) chacun des polynômes ci-dessous :

(1) $P_1 = 2X^3 - X$
(2) $P_2 = 2X^3 + X$
(3) $P_3 = X^2 - 3iX + i - 3$
(4) $P_4 = -3X^3 + 9X^2 + 2X - 6$ (calculer d'abord $P_4(3)$)
(5) $P_5 = X^3 - 2X + 1$ (trouver d'abord une racine évidente)

Exercice 2. L'ensemble des racines du polynôme $P = X^6 - 5X^5 + 8X^4 - 4X^3$ est $\{0, 1, 2\}$. En calculant les dérivées successives de P, déterminer la multiplicité de chacune, puis écrire P sous forme factorisée.

Exercice 3. Si a et b vérifient $a + b = s$ et $ab = p$, quelles sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$? En déduire deux complexes a et b tels que $a + b = i$ et $ab = 1$.

Exercice 4. Soit P un polynôme à coefficients réels.

(1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P.
(2) En déduire que P peut s'écrire sous la forme
$$P = C(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n).(X^2 + b_1X + c_1)(X^2 + b_2X + c_2) \dots (X^2 + b_pX + c_p),$$
pour un certain choix de $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, et des réels C, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$, $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ tels que $b_j^2 < 4c_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Exercice 5.

(1) Développer, pour x et y réels, l'expression $(x + iy)^9$.
(2) On pose $P = 9X - 84X^3 + 126X^5 - 36X^7 + X^9$. Montrer que P peut s'écrire sous la forme $P = X(X^2 - 3)Q$, où Q est un polynôme que l'on explicitera.
(3) Déduire des deux questions précédentes que l'ensemble des racines du polynôme $X^6 - 33X^4 + 27X^2 - 3$ est $\left\{\tan \frac{k\pi}{9}\right\}_{k \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}}$.

Exercice 6 (DM 2). Soit P un polynôme non nul à coefficients complexes. On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$.

(1) Quel est le degré de Q ?
(2) Soit z une racine de P de multiplicité k. À quelle condition (sur k) z est-elle aussi une racine de P' ? Quelle est alors sa multiplicité ? En déduire que z est nécessairement une racine de Q.
(3) Montrer que P est nécessairement de la forme $P = C(X - \alpha)^n$.

Exercice 7 (DM 2). L'objectif de cet exercice est de trouver une racine réelle du polynôme $P = X^3 + 6X - 1$.

(1) On considère une racine réelle x de P, et deux réels u et v tels que $x = u + v$ et $uv = -2$. Développer $P(u + v)$, puis en déduire que u et v sont solutions du système
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u^3v^3 = -8. \end{cases}$$
(2) En déduire des valeurs convenables pour u^3 et v^3 (on pourra s'inspirer de l'exercice 3), puis l'expression explicite de x à l'aide de la fonction “racine cubique” (notée $x \mapsto \sqrt[3]{x}$), bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(3) Vérifier que la valeur de x obtenue convient en calculant $P(x)$ à l'aide d'une calculatrice.