Théorie des Langages – Feuille n° 1

Alphabets et Langages

CORRECTION

Exercice 1 - On considère l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. On rappelle que $|w|$ représente la longueur du mot w, et ϵ représente le mot vide. Soit deux mots $w = ababc$ et $q = caba$.

1. Calculez w^0, w^1 et w^2
2. Calculez wq^2w
3. Calculez $|w|_{ab}$, $|(ab)^4|$ et $|(ab)^4|_{aba}$
4. Donnez les préfixes, les préfixes propres, les suffixes et les suffixes propres de q
5. Donnez le miroir du mot wq.

> 1. $w^0 = \epsilon$, $w^1 = ababc$ et $w^2 = ababcababc$
> 2. $wq^2w = ababccabacabaababc$
> 3. $|w|_{ab} = |ababc|_{ab} = 2$,
> $|(ab)^4| = |abababab| = 8$
> $|(ab)^4|_{aba} = |abababab|_{aba} = 3$
> 4. — Préfixes : $\{\epsilon, c, ca, cab, caba\}$
>   — Préfixes propres : $\{\epsilon, c, ca, cab\}$
>   — Suffixes : $\{\epsilon, a, ba, aba, caba\}$
>   — Préfixes propres : $\{\epsilon, a, ba, aba\}$
> 5. $\tilde{wq} = abaccbaba$

Exercice 2 - Soit l'alphabet $X = \{a, b\}$.

1. Montrez qu'il ne peut y avoir de mot $w \in X^*$ tel que $aw = wb$.

> On suppose qu'il existe w tel que $aw = wb$.
> On a alors $|aw|_a = |wb|_a$. Donc $|a|_a + |w|_a = |w|_a + |b|_a$. Donc $|w|_a + 1 = |w|_a$.
> Impossible, w tel que $aw = wb$ n'existe donc pas.

2. Quels sont les deux langages dont la fermeture par l'étoile donne le langage uniquement composé du mot vide ϵ ?

> Par définition, la fermeture par l'étoile contient le mot vide.
> — $L = \{\epsilon\}$, $L^* = \{\epsilon\}$
> — $L = \emptyset$, $L^* = \{\epsilon\}$

3. Les mots suivants sont-ils générés par le langage $(ab)^*b^*$: ϵ, a, aa, ba, $abbb$,$ababb$, $baba$? Même question avec le langage $(ab^*)b^*$.

> — $(ab)^*b^*$: ϵ, $abbb$, $ababb$
> — $(ab^*)b^*$: a, $abbb$

Exercice 3 - On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$. Donner les langages correspondant aux propriétés suivantes :

1. Les mots qui commencent par ab ;
2. Les mots qui terminent par bb ;
3. les mots qui ne contiennent aucun b ;
4. les mots qui ne contiennent pas ab ;
5. les mots qui contiennent au moins un a ;
6. les mots qui ne commencent pas par ba ;
7. les mots de longueur paire

> 1. $ab(a+b)^*$
> 2. $(a+b)^*bb$
> 3. a^*
> 4. b^*a^*
> 5. $(a+b)^*a(a+b)^*$
> 6. $a(a+b)^* + b + bb(a+b)^*$
> 7. $((a+b)(a+b))^*$

Exercice 4 - On considère l'alphabet $X = \{a, b, c\}$.

1. Calculez les ensembles X^0, X^1 et X^2

> — $X^0 = \{\epsilon\}$
> — $X^1 = \{a, b, c\}$
> — $X^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

2. Pour chacun des ensembles suivants, caractérisez L_1^*, et calculez $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$, $L_2.L_1$

$$\begin{array}{lll} L_1 = \{ab, bb\} & \text{et} & L_2 = \{a, ab, bbc, ca\} \\ L_1 = \{\epsilon\} & \text{et} & L_2 = \{bbc, ca\} \\ L_1 = \emptyset & \text{et} & L_2 = \{bbc, ca\} \\ L_1 = \{ab, bb\} & \text{et} & L_2 = X^* \end{array}$$

1. $L_1 = \{ab, bb\}$ et $L_2 = \{a, ab, bbc, ca\}$
   - $L_1^* = \{\epsilon, ab, bb, abab, abbb, bbab, bbbb, \ldots\}$ – mots de longueur paire, formés de a et de b, les a étant sur des positions impaires
   - $L_1 \cap L_2 = \{ab\}$
   - $L_1 \cup L_2 = \{ab, bb, a, bbc, ca\}$
   - $L_1.L_2 = \{aba, abab, abbbc, abca, bba, bbab, bbbbc, bbca\}$
   - $L_2.L_1 = \{aab, abb, abab, abbb, bbcab, bbcbb, caab, cabb\}$
2. $L_1 = \{\epsilon\}$ et $L_2 = \{bbc, ca\}$
   - $L_1^* = \{\epsilon\}$; $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
   - $L_1 \cup L_2 = \{\epsilon, bbc, ca\}$; $L_1.L_2 = L_2.L_1 = L_2$
3. $L_1 = \emptyset$ et $L_2 = \{bbc, ca\}$
   - $L_1^* = \{\epsilon\}$; $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
   - $L_1 \cup L_2 = \{bbc, ca\}$; $L_1.L_2 = L_2.L_1 = L_1$
4. $L_1 = \{ab, bb\}$ et $L_2 = X^*$
   - L_1^* cf. question 1.
   - $L_1 \cap L_2 = L_1$; $L_1 \cup L_2 = L_2$
   - $L_1.L_2$: ensemble de mots de longueur ≥ 2 construits sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, qui commencent par ab ou bb
   - $L_2.L_1$: ensemble de mots de longueur ≥ 2 construits sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, qui finissent par ab ou bb

Exercice 5 - On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$, et les langages L_1 et L_2 suivants :

$$L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 = \{b^n a^n | n \in \mathbb{N}\}$$

Calculez $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1.L_2$, L_1^2.

1. $L_1 \cup L_2 = \{a^n b^n, b^n a^n | n \in \mathbb{N}\} = \{\epsilon, ab, ba, aabb, bbaa, \ldots\}$
2. $L_1 \cap L_2 = \{\epsilon\}$
3. $L_1.L_2 = \{a^n b^{n+p} a^p | n, p \in \mathbb{N}\}$
4. $L_1^2 = L_1.L_1 = \{a^n b^n a^p b^p | n, p \in \mathbb{N}\}$

Exercice 6 - On considère des langages sur un alphabet quelconque.

1. Démontrez les propriétés suivantes :

   (a) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L.L_1 \subseteq L.L_2$

   (b) $L.(L_1 \cup L_2) = L.L_1 \cup L.L_2$

- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L.L_1 \subseteq L.L_2$
  Soit $w \in L.L_1$, on veut montrer que $w \in L.L_2$.
  $\exists u \in L, v \in L_1$ tels que $w = u.v$. Comme $L_1 \subseteq L_2$, $v \in L2$. Donc $w = u.v \in L.L2$.
- $L.(L_1 \cup L_2) = L.L_1 \cup L.L_2$
  - $\subseteq$: Soit $w \in L.(L_1 \cup L_2)$. Donc $\exists u \in L, v \in L_1 \cup L_2$ tels que $w = u.v$. On a alors deux possibilités :
    - $v \in L_1$, $w = u.v \in L.L_1$ et donc $w \in L.L_1 \cup L.L_2$
    - $v \in L_2$, $w = u.v \in L.L_2$ et donc $w \in L.L_1 \cup L.L_2$
  - $\supseteq$: Soit $w \in L.L_1 \cup L.L_2$. Donc, soit $w \in L.L_1$, soit $w \in L.L_2$.
    - $w \in L.L_1$. Comme $L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$, d'après la propriété (a), $L.L_1 \subseteq L.(L_1 \cup L_2)$. Donc $w \in L.(L_1 \cup L_2)$
    - $w \in L.L_2$. Comme $L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$, d'après la propriété (a), $L.L_2 \subseteq L.(L_1 \cup L_2)$. Donc $w \in L.(L_1 \cup L_2)$

2. Montrez que $L.(L_1 \cap L_2) \subseteq L.L_1 \cap L.L_2$. A l'aide d'un contre-exemple, montrez que l'égalité n'est pas forcément atteinte.

Soit $w \in L.(L_1 \cap L_2)$. Alors, $\exists u \in L, v \in L_1 \cap L_2$ tels que $w = u.v$. Comme $v \in L_1$, $w \in L.L_1$; et $v \in L_2$, $w \in L.L_2$. Donc $w \in L.L_1 \cap L.L_2$.
Contre-exemple : $L = \{a, ab\}$, $L_1 = \{\epsilon\}$, $L_2 = \{b\}$.
On a $ab \in L.L_1 \cap L.L_2$, mais $ab \notin L.(L_1 \cap L_2)$

Exercice 7

1. Est-ce que les éléments suivants sont des monoïdes ?
   (a) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$
   (b) $\langle \mathbb{N}, -, 0 \rangle$

(a) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ est un monoïde car :
- $\mathbb{N}$ est un ensemble (l'ensemble des entiers naturels)
- (stabilité) $\forall a, b \in \mathbb{N}$, on a $a + b \in \mathbb{N}$
- (associativité) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, on a $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (élément neutre) $\forall a \in \mathbb{N}$, on a $a + 0 = a = 0 + a$

(b) $\langle \mathbb{N}, -, 0 \rangle$ n'est pas un monoïde car :
- $\mathbb{N}$ est un ensemble (l'ensemble des entiers naturels)
- (pas stable) $\exists a \in \mathbb{N}$, $\exists b \in \mathbb{N}$ tel que $a - b \notin \mathbb{N}$ (ex : tous les cas où $a < b$)

2. Est-ce que $\langle 3\mathbb{N}, +, 0 \rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$?

OUI, $\langle 3\mathbb{N}, +, 0 \rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ car :
- $3\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
- (élément neutre) $0 = 3 \times 0 \in 3\mathbb{N}$
- (stabilité)
  $\forall a \in 3\mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, a = 3k$
  $\forall b \in 3\mathbb{N} \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}, b = 3k'$
  $\Rightarrow a + b = 3k + 3k' = 3(k + k') \in 3\mathbb{N}$

3. Soit $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ impair}\}$. Est-ce que $\langle B, +, 0 \rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$?

NON, $\langle B, +, 0 \rangle$ n'est pas un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ car :
- $B \subset \mathbb{N}$
- (pas stable) ex : $1 \in B$ et $3 \in B$ mais $1 + 3 = 4 \notin B$
  Preuve plus formelle :
  $\forall a \in B \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, a = 2k + 1$
  $\forall b \in B \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}, b = 2k' + 1$
  $\Rightarrow a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k') + 2 \notin B$