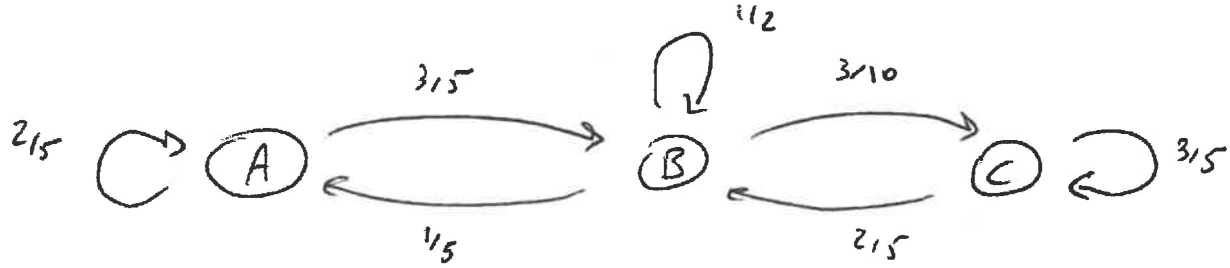
TD 5

Ex 1

$\boxed{P_1}$

1. La somme des coefficients par ligne vaut 1.

2.



3. Le graphe est fortement connexe : tous les états sont récurrents

4. $(x, y, z)\, P_1 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = x \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{5}z = y \\ \frac{3}{10}y + \frac{3}{5}z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5x \\ 6x + 5y + 4z = 10y \\ 3y + 6z = 10z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 21x + 4z = 30x \\ 9x = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = \frac{9}{4}x \end{cases}$$

Or, $x + y + z = 1$ donc $\left(3 + 1 + \frac{9}{4}\right)x = 1$

$$\frac{25}{4}x = 1$$

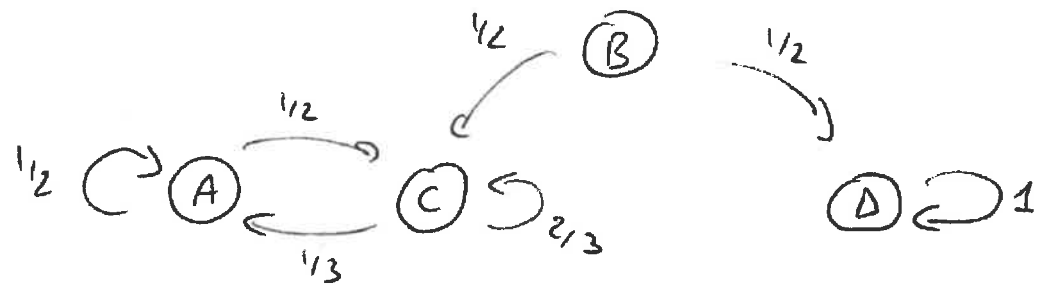
d'où $x = \frac{4}{}$, $y = \frac{12}{}$, $z = \frac{9}{}$

Il s'agit de l'unique distribution invariante, vers laquelle converge toute chaîne de Markov.

P2

1. la somme des coefficients par ligne vaut 1.

2.



3. les composantes fortement connexes sont $\{B\}$, $\{A, C\}$ et $\{D\}$.

$\{B\}$ a une arête sortante donc B est transient

$\{A, C\}$ et $\{D\}$ n'en ont pas donc A, C et D sont récurrents.

4. Résoudre $(x, y, z, t)\, P_2 = (x, y, z, t)$

avec $x + y + z + t = 1$.

Ou Comme B est transient, on sait que toute mesure invariante est nulle sur B. De plus, $\{A, C\}$ et $\{D\}$ étant des composantes fortement connexes séparées, toute mesure invariante s'écrit comme une combinaison linéaire d'une mesure invariante sur $\{A, C\}$ et d'une mesure invariante sur $\{D\}$:

$$(x, y, z, t) = \lambda (x, 0, z, 0) + (1 - \lambda)(0, 0, 0, t).$$

avec $\begin{cases} (x, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} (x, z) \\ x + z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} t = t \\ t = 1 \end{cases}$

$$(x, z) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (x, z) \iff \begin{cases} \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} z = x \\ \frac{1}{2} x + \frac{2}{3} z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 2z = 6x \\ 3x + 4z = 6z \end{cases}$$

$$\iff z = \frac{3}{2} x$$

Comme $x + z = 1$, $\quad x = \frac{2}{5}$ et $z = \frac{3}{5}$

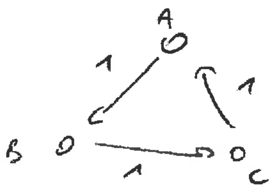
Finalement, les mesures invariantes sont de la forme

$$\left(\frac{2}{5}\lambda, 0, \frac{3}{5}\lambda, 1 - \lambda \right) \qquad \lambda \in [0, 1]$$

~~On~~ retrouve exactement cette réponse en résolvant $\begin{cases} (x\ y\ z\ t) P_2 = (x\ y\ z\ t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$

$\boxed{P_3}$ 1. La somme des coefficients par ligne vaut 1.

2.



3. Le graphe est fortement connexe : tous les états sont récurrents

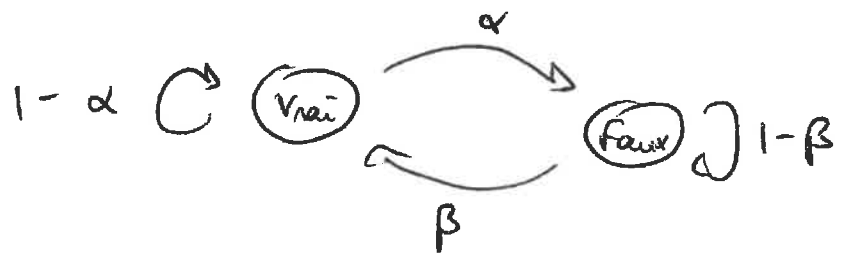
4. $(x y z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \iff \begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases}$

$x + y + z = 1$ et la seule mesure [illegible]

1) La chaîne est périodique et il n'y a pas convergence vers la mesure invariante.

Exercice 2

1.



2. La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

La probabilité que l'information soit vraie au bout de n pas est le premier coefficient de $(1,0)\,P^n$

La chaîne étant irréductible, elle tend vers le premier coefficient de l'unique solution de $\begin{cases} (x,y)\,P = (x,y) \\ x+y=1 \end{cases}$

$$(x,y)\,P = (x,y) \iff \begin{cases} (1-\alpha)x + \beta y = x \\ \alpha x + (1-\beta)y = y \end{cases}$$

$$\iff \alpha x = \beta y$$

Comme $x+y=1$, $\begin{cases} x = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \\ y = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{cases}$

La valeur limite est donc $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

Exercice 3

1. On considère la chaîne de Markov telle que chaque arête est remplacée par deux arêtes orientées de sens opposé. Le graphe de départ étant connexe, le graphe ainsi construit est fortement connexe et la chaîne de Markov associée à la marche aléatoire équiprobable est irréductible.

Le graphe contenant des cycles dont les longueurs sont premières entre elles, la chaîne est également apériodique.

La mesure invariante est donc unique.

2. $\mu = \mu P$

avec $P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d(i)} & \text{si } j \in N(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $\mu(i) = \sum_{j} \mu(j) P_{ji}$

$= \sum_{j \in N(i)} \frac{1}{d(j)} \mu(j)$

3. Si G est régulier de degré d,

$\mu(i) = \frac{1}{d} \sum_{j \in N(i)} \mu(j)$

La mesure uniforme, pour laquelle $\mu(i) = \frac{1}{n}$ $\forall i$, vérifie cette égalité. La mesure invariante étant unique, il s'agit de la mesure uniforme.