Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°4 : Séries

2019-2020

Fiche guidée n°1

Séries numériques

Méthode de travail

Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
Ne vous contentez pas de la lire.

Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.

Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.

Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Séries numériques

Rappel

Definition

*On dit que la série $\sum u_n$ converge vers $s \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) s'il existe $s \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que la suite des sommes partielles $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers s. Le nombre s est alors appelé **somme de la série**. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.*

Theorem (Théorème 3.1.3 poly)

Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Le fait que le terme général tende vers 0 est une condition **nécessaire** de convergence mais pas suffisante !

Séries numériques

Rappel

Definition

On dit que la série $\sum u_n$ converge vers $s \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) s'il existe $s \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que la suite des sommes partielles $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers s. Le nombre s est alors appelé ***somme de la série****. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.*

Theorem (Théorème 3.1.3 poly)

Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Le fait que le terme général tende vers 0 est une condition **nécessaire** de convergence mais pas suffisante !

$$\text{si} \quad \sum u_n \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\text{si} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad (\ell \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \text{diverge}$$

Attention : il existe de séries divergentes dont le terme général tend vers 0.

Séries numériques à termes positifs

Rappel
Comme les intégrales de fonctions positives, les séries à termes positifs sont plus faciles à étudier.
Les séries à termes positifs se comparent comme on a comparé les intégrales de fonctions positives.

Séries numériques à termes positifs

Rappel

Comme les intégrales de fonctions positives, les séries à termes positifs sont plus faciles à étudier.

Les séries à termes positifs se comparent comme on a comparé les intégrales de fonctions positives.

Theorem (Théorème 3.2.1 poly)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \leq N$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors

$$\text{si} \quad \sum v_n \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \text{converge}$$

$$\text{si} \quad \sum u_n \quad \text{diverge} \quad \Longrightarrow \quad \sum v_n \quad \text{diverge}$$

Séries numériques

Rappel

Definition

Deux suites sont dites équivalentes s'il existe une suite w_n tendant vers 1 telle que $u_n = v_n w_n$.

Lorsque deux suites sont équivalentes, elles s'annulent pour les mêmes indices $n \geq N$ où N est assez grand.
Si pour n assez grand v_n ne s'annule pas, une suite (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Theorem (Thèo 3.2.4 poly)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs équivalentes.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Séries numériques

Plan d'étude et outils

principales séries de référence

géometriques

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{R}$$

de Riemann

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Séries de Bertrand

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$$

Séries à termes positifs

théorèmes de comparaison
équivalences
Critère de d'Alembert
Critère de Cauchy

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} \qquad (E_1)$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** Notons que la série est à termes positifs

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} > 0$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Notons que la série est à termes positifs

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} > 0$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on étudie la limite de u_n quand n vers $+\infty$ ou un équivalent,

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} \qquad (E_1)$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** Notons que la série est à termes positifs

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} > 0$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** on étudie la limite de u_n quand n vers $+\infty$ ou un équivalent,

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1$$

Le terme général ne converge pas vers zéro donc la série diverge (d'après le Thèoreme 3.1.3).

À retenir : c'est le cas le plus simple : si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$$

la conclusion est immédiate : la série diverge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\text{ème}}$ **étape :**

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} = \frac{2^n}{n2^n} + \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\text{ème}}$ **étape :**

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} = \frac{2^n}{n2^n} + \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$$

ces deux termes tendent vers 0 donc il faut étudier plus finalement leur comportement. Or $2^n = e^{n \ln 2}$ croît plus rapidement que n (comme on l'avait vu au chapitre *Intégrales*, e^x domine x au voisinage de $+\infty$), donc inversement $\frac{1}{2^n}$ est dominé par $\frac{1}{n}$, i.e.

$$\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

On peut vérifier :

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = nu_n = 1 + \frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :**

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

u_n est équivalent au terme général (abrégé t.g.) d'une série divergente (séries de Riemann pour $\alpha = 1$). Donc, par théorème de comparaison, la série diverge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\text{ème}}$ **étape :**

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

u_n est équivalent au terme général (abrégé t.g.) d'une série divergente (séries de Riemann pour $\alpha = 1$). Donc, par théorème de comparaison, la série diverge.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** autre méthode.

$$u_n = \frac{2^n + n}{n2^n} = \frac{2^n}{n2^n} + \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$$

On identifie que $\frac{1}{n}$ est le terme d'une série divergente (séries de Riemann pour $\alpha = 1$) et on utilise le théorème de domination (Théorème 3.2.1). On a

$$u_n \geq \frac{1}{n}$$

donc la série diverge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n^2+1}{(\ln\ n)^2\sqrt{n^6+2n+3}} \qquad (E_3)$$

1$^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n^2+1}{(\ln\ n)^2\sqrt{n^6+2n+3}} \qquad (E_3)$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
2$^{\text{ème}}$ **étape :** pour étudier la limite de u_n, il faut trouver un équivalent.
Au numérateur, on a : $n^2+1 \sim n^2$.
Au dénominateur, on a : $n^6+2n+3 \sim n^6$ donc $\sqrt{n^6+2n+3} \sim \sqrt{n^6} = n^3$.
Rappel : comme on l'avait revu au chapitre *Intrégales*, si $f \sim g$, alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.
Finalement, on obtient

$$u_n = \frac{n^2+1}{(\ln\ n)^2\sqrt{n^6+2n+3}} \sim \frac{n^2}{(\ln\ \mathrm{n})^2 n^3} = \frac{1}{n(\ln\ n)^2}.$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n^2+1}{(\ln\ n)^2\sqrt{n^6+2n+3}} \qquad (E_3)$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
2$^{\text{ème}}$ **étape :** pour étudier la limite de u_n, il faut trouver un équivalent.
Au numérateur, on a : $n^2+1 \sim n^2$.
Au dénominateur, on a : $n^6+2n+3 \sim n^6$ donc $\sqrt{n^6+2n+3} \sim \sqrt{n^6} = n^3$.
Rappel : comme on l'avait revu au chapitre *Intrégales*, si $f \sim g$, alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.
Finalement, on obtient

$$u_n = \frac{n^2+1}{(\ln\ n)^2\sqrt{n^6+2n+3}} \sim \frac{n^2}{(\ln\ \mathrm{n})^2 n^3} = \frac{1}{n(\ln\ n)^2}.$$

$\frac{1}{n(\ln n)^2}$ est le terme général d'une série convergente (séries de Bertrand avec $\beta = 2$).
Donc, par théorème de comparaison par équivalence (Théo 3.2.4 poly), la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 1

On rappelle que la première chose à faire quand on voit une série est de vérifier si le terme général u_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$.
Ce qui est une condition nécessaire.

Si cette condition est satisfaite, la série **pourrait** converger. Il faut étudier la série.

Si elle n'est pas satisfaite, la série ne converge pas.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (E_4)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On ne reconnaît pas le terme général, donc on cherche un équivalent.

Rappel : $\ln(1 + x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ tend vers 0).

On a $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n = \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^2}$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (E_4)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On ne reconnaît pas le terme général, donc on cherche un équivalent.

Rappel : $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ tend vers 0).

On a $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n = \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^2}$.

On pose $v_n = \frac{1}{n^2}$, v_n est le t.g. d'une série convergente (série de Riemann pour $\alpha = 2$). On a donc montré que $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge. D'après le théoreme de comparaison, on peut conclure que $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) \qquad (E_5)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.
On rappelle que $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, donc $\sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$
(faire un dessin d'un petit angle θ puis de l'angle $\pi + \theta$ et comparer graphiquement leur sinus pour s'en convaincre et retrouver la formule quand on a un doute).

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.
On rappelle que $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, donc $\sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$
(faire un dessin d'un petit angle θ puis de l'angle $\pi + \theta$ et comparer graphiquement leur sinus pour s'en convaincre et retrouver la formule quand on a un doute).

$2^{\text{ème}}$ **étape :** $\frac{\pi}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc u_n tend vers $\sin^2(0) = 0$. On ne reconnaît pas le terme général, donc on cherche un équivalent.
Rappel : $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 donc
$u_n = \sin^2(\frac{\pi}{n}) \sim (\frac{\pi}{n})^2 = \frac{\pi^2}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs.
On rappelle que $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, donc $\sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$
(faire un dessin d'un petit angle θ puis de l'angle $\pi + \theta$ et comparer graphiquement leur sinus pour s'en convaincre et retrouver la formule quand on a un doute).

$2^{\text{ème}}$ **étape :** $\frac{\pi}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc u_n tend vers $\sin^2(0) = 0$. On ne reconnaît pas le terme général, donc on cherche un équivalent.
Rappel : $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 donc
$u_n = \sin^2(\frac{\pi}{n}) \sim (\frac{\pi}{n})^2 = \frac{\pi^2}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.

On reconnaît à une constante près une série de Riemann pour $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pour $\alpha = 2$, on sait que cette série converge, donc par le théorème de comparaison $\sum u_n$ aussi.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** On a $0 \leq \text{Arctan } n < \frac{\pi}{2}$ pour $n \geq 0$ et le dénominateur est strictement positif car pour tout n, $\cos^2 n \geq -1$ donc $\cos^2 n + 1 \geq 0$. Donc pour $n \geq 1$, $n^2 + \cos^2 n + 1 > 0$ et pour $n = 0$, le dénominateur vaut 2 de sorte que la fraction est toujours bien définie et positive.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** On a $0 \leq \text{Arctan } n < \frac{\pi}{2}$ pour $n \geq 0$ et le dénominateur est strictement positif car pour tout n, $\cos^2 n \geq -1$ donc $\cos^2 n + 1 \geq 0$. Donc pour $n \geq 1$, $n^2 + \cos^2 n + 1 > 0$ et pour $n = 0$, le dénominateur vaut 2 de sorte que la fraction est toujours bien définie et positive.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on étudie la limite de u_n.

Au numérateur, on a $\text{Arctan } n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Au dénominateur, on a $n^2 + \cos^2 n + 1 \geq n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} = 0.$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

Méthode 1 : on cherche maintenant un équivalent. Pour le numérateur, l'équivalent est donné par la limite $\pi/2$. Au dénominateur, on a $\cos^2 n$ et 1 qui sont bornés et n^2 qui explose, donc intuitivement, le dénominateur est équivalent à n^2. Vérifions le :

$$\frac{n^2 + \cos^2 n + 1}{n^2} = 1 + \frac{\cos^2 n + 1}{n^2}$$

or

$$0 \leq \frac{\cos^2 n + 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\cos^2 n + 1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ainsi

$$\frac{n^2}{n^2 + \cos^2 n + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \qquad \text{i.e.} \qquad n^2 + \cos^2 n + 1 \sim n^2.$$

et finalement, $u_n \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$. À une constante près, on reconnaît une série de Riemann pour $\alpha = 2$ donc une série convergente et par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ est une série convergente.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

Méthode 2 : on utilise le théorème de domination.

On a déjà observé que $n^2 + \cos^2 n + 1 \geq n^2$ donc

$$\frac{1}{n^2 + \cos^2 n + 1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De plus, Arctan $n \leq \frac{\pi}{2}$ donc

$$u_n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{Arctan } n}{n^2 + \cos^2 n + 1} \qquad (E_6)$$

Méthode 2 : on utilise le théorème de domination.

On a déjà observé que $n^2 + \cos^2 n + 1 \geq n^2$ donc

$$\frac{1}{n^2 + \cos^2 n + 1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De plus, Arctan $n \leq \frac{\pi}{2}$ donc

$$u_n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}.$$

À une constante près, on reconnaît une série de Riemann pour $\alpha = 2$ donc une série convergente et par théorème de domination, on en déduit que $\sum u_n$ est une série convergente.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)} \qquad (E_7)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)} \qquad (E_7)$$

Rappel :

Theorem (Théorème comparaison séries-intégrales)

Soit $u_n = f(n)$ pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante (avec $a \in \mathbb{N}$). La série $\sum u_n$ est de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)} \qquad (E_7)$$

Rappel :

Theorem (Théorème comparaison séries-intégrales)

Soit $u_n = f(n)$ pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante (avec $a \in \mathbb{N}$). La série $\sum u_n$ est de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs pour $n > 0$,

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)} \qquad (E_7)$$

Rappel :

Theorem (Théorème comparaison séries-intégrales)

Soit $u_n = f(n)$ pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante (avec $a \in \mathbb{N}$). La série $\sum u_n$ est de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs pour $n > 0$,
en plus, u_n est le terme général d'une série de Bertrand qui diverge avec $\beta = 1$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)} \qquad (E_7)$$

Rappel :

Theorem (Théorème comparaison séries-intégrales)

Soit $u_n = f(n)$ pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante (avec $a \in \mathbb{N}$). La série $\sum u_n$ est de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs pour $n > 0$,
en plus, u_n est le terme général d'une série de Bertrand qui diverge avec $\beta = 1$.

Cela se prouve aussi par comparaison série/intégrale : on a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)}$, fonction positive décroissante sur $[2, +\infty[$.
Une primitive de f est donnée par $F(x) = \ln(\ln x)$ qui tend vers $+\infty$ pour $x \to +\infty$.
L'intégrale de f en $+\infty$ ne converge pas donc, par comparaison série/intégrale, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

1$^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

1**ème** **étape :** la série est à termes positifs
On rappelle que par définition, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
On rappelle que par définition, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
$2^{\text{ème}}$ **étape :** étude limite ou équivalent,

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
On rappelle que par définition, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
$2^{\text{ème}}$ **étape :** étude limite ou équivalent,

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} = \frac{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}{\frac{e^{2n} + e^{-2n}}{2}} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{n-2n} = e^{-n}.$$

En effet, au numérateur, e^{-n} tend vers 0 et e^n explose, donc $e^n + e^{-n} \sim e^n$. Idem au dénominateur.
On déduit en particulier de cet équivalent, que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
On rappelle que par définition, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
$2^{\text{ème}}$ **étape :** étude limite ou équivalent,

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} = \frac{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}{\frac{e^{2n} + e^{-2n}}{2}} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{n-2n} = e^{-n}.$$

En effet, au numérateur, e^{-n} tend vers 0 et e^n explose, donc $e^n + e^{-n} \sim e^n$. Idem au dénominateur.
On déduit en particulier de cet équivalent, que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme pour les intégrales, on se ramène au critère de Riemann par domination : on a $n^2 e^{-n} \longrightarrow 0$ donc $e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$, pour n suffisamment grand. Par critère de Riemann et théorème de comparaison, la série de terme général u_n converge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
On rappelle que par définition, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
$2^{\text{ème}}$ **étape :** étude limite ou équivalent,

$$u_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n} = \frac{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}{\frac{e^{2n} + e^{-2n}}{2}} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{n-2n} = e^{-n}.$$

En effet, au numérateur, e^{-n} tend vers 0 et e^n explose, donc $e^n + e^{-n} \sim e^n$. Idem au dénominateur.
On déduit en particulier de cet équivalent, que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme pour les intégrales, on se ramène au critère de Riemann par domination : on a $n^2 e^{-n} \longrightarrow 0$ donc $e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$, pour n suffisamment grand. Par critère de Riemann et théorème de comparaison, la série de terme général u_n converge.

Autre méthode : on a montré que $u_n \sim v_n$ avec $v_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$;
$\sum u_n$ est donc équivalent à une série géométrique de raison $r = \frac{1}{e}$, or $|r| < 1$ donc la série converge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{10^n}{n!} \qquad (E_9)$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{10^n}{n!} \qquad (E_9)$$

$1^{\text{\textbf{ème}}}$ **étape :** la série est à termes positifs

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{10^n}{n!} \qquad (E_9)$$

1**ème** **étape :** la série est à termes positifs
2**ème** **étape :** la présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (Thèo 3.3.3 poly) et donc d'étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a :

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{10^n}{n!} \qquad (E_9)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
$2^{\text{ème}}$ **étape :** la présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (Thèo 3.3.3 poly) et donc d'étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10^{n+1}}{10^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = 10 \cdot \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rappel : $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{10^n}{n!} \qquad (E_9)$$

1$^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
2$^{\textbf{ème}}$ **étape :** la présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (Thèo 3.3.3 poly) et donc d'étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10^{n+1}}{10^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = 10 \cdot \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rappel : $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Par critère de d'Alembert, la série converge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
2$^{\text{ème}}$ **étape :** la présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert et donc d'étudier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** la présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert et donc d'étudier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient une forme indéterminée $(+\infty \cdot \ln 1 = +\infty \cdot 0)$ donc on cherche un équivalent. Par division euclidienne et en utilisant $\ln(1+x) \sim_0 x$, on a

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$$

donc

$$n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim -\frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} -1$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Par critère de d'Alembert, la série converge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (E_{10})$$

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Par critère de d'Alembert, la série converge.

Remarque : On a montré une famille de limites à connaître :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{5n+7}{2n+1}\right)^n \qquad (E_{11})$$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{5n+7}{2n+1}\right)^n \qquad (E_{11})$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs
$\left(\dfrac{5n+7}{2n+1}\right) > 0\,;$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{5n+7}{2n+1}\right)^n \qquad (E_{11})$$

1**ème** **étape :** la série est à termes positifs

$\left(\frac{5n+7}{2n+1}\right) > 0\,;$

On prend $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{5n+7}{2n+1}$ et on étudie la limite.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{5n+7}{2n+1}\right)^n \qquad (E_{11})$$

1**ème** **étape :** la série est à termes positifs
$\left(\dfrac{5n+7}{2n+1}\right) > 0\,;$
On prend $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{5n+7}{2n+1}$ et on étudie la limite.
$\frac{5n+7}{2n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{2} > 1.$
Par critère de Cauchy, la série diverge.

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n \qquad (E_{12})$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n \qquad (E_{12})$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

$u_n = \left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n$;

$\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n}{4n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} < 1.$

Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n \qquad (E_{12})$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs

$u_n = \left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n$;

$\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n}{4n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} < 1.$

Par critère de Cauchy, la série converge.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.
On a : $u_n = \dfrac{1}{(n+6)(n+7)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Donc la série (E_1) est convergente par théorème de comparaison.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.
On a : $u_n = \dfrac{1}{(n+6)(n+7)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Donc la série (E_1) est convergente par théorème de comparaison.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** En posant $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$ pour tout $N \geq 0$, on cherche la somme

$$s = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

On a : $u_n = \dfrac{1}{(n+6)(n+7)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Donc la série (E_1) est convergente par théorème de comparaison.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** En posant $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$ pour tout $N \geq 0$, on cherche la somme

$$s = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Par décomposition en éléments simples, on a pour $n \geq 0$,

$$\frac{1}{(n+6)(n+7)} = \frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7} \qquad (*).$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

On reconnaît une série télescopique :

$$S_N = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N+6} - \frac{1}{N+7}\right)$$

qui se simplifie en réarrangeant les termes

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{N+6} + \frac{1}{N+6}\right) - \frac{1}{N+7} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{N+7}. \end{aligned}$$

Opérons ce réarrangement rigoureusement :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+6} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+7} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+6} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1+6}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+6} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n+6} = \left(\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+6}\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+6} + \frac{1}{N+7}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{N+7}.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} \qquad (E_1)$$

D'où, $s = \lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{N+7} \right) = \frac{1}{6}$,

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)} = \frac{1}{6}$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \qquad (E_2)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

1ère **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Notons que $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est positif pour $n \geq 1$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus, $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Notons que $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est positif pour $n \geq 1$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus, $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. À une constante près, il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). Donc par théorème de comparaison la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Notons que $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est positif pour $n \geq 1$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus, $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. À une constante près, il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). Donc par théorème de comparaison la série $\sum u_n$ est convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de la série.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Notons que $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est positif pour $n \geq 1$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus, $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. À une constante près, il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). Donc par théorème de comparaison la série $\sum u_n$ est convergente.

$2^{\textbf{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de la série.
Par décomposition en éléments simples, on a pour $n \geq 1$,

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

Notons que $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$ est positif pour $n \geq 1$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus, $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. À une constante près, il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). Donc par théorème de comparaison la série $\sum u_n$ est convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de la série.
Par décomposition en éléments simples, on a pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \qquad (E_2)$$

À une constante près, il s'agit encore d'une série télescopique.
Pour n parcourant $\mathbb{Z}$, $2n$ parcourt tous les entiers pairs une fois, $2n-1$ parcourt donc tous les entiers impairs une fois, et il en va de même pour $2n+1$. Ainsi, on a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

À une constante près, il s'agit encore d'une série télescopique.
Pour n parcourant $\mathbb{Z}$, $2n$ parcourt tous les entiers pairs une fois, $2n-1$ parcourt donc tous les entiers impairs une fois, et il en va de même pour $2n+1$. Ainsi, on a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Donc, pour tout $N \geq 1$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2N+1}$$

(on a isolé le premier terme de la première somme et le dernier terme de la deuxième somme).

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad (E_2)$$

À une constante près, il s'agit encore d'une série télescopique.
Pour n parcourant $\mathbb{Z}$, $2n$ parcourt tous les entiers pairs une fois, $2n-1$ parcourt donc tous les entiers impairs une fois, et il en va de même pour $2n+1$. Ainsi, on a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Donc, pour tout $N \geq 1$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2N+1}$$

(on a isolé le premier terme de la première somme et le dernier terme de la deuxième somme).

D'où en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes et critères)

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes et critères)

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes et critères)

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

u_n est le terme général d'une série convergente. Donc la série est convergente par théorème de comparaison.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes et critères)

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

u_n est le terme général d'une série convergente. Donc la série est convergente par théorème de comparaison.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série.

En multipliant par la quantité conjuguée $n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}$ en haut et en bas, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1)-(n+1)^2 n} = \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^3+n^2-n^3-2n^2-n} \\
&= \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n^2-n} = \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

On reconnaît une série télescopique, on a pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

(on a isolé le premier terme de la première somme et le dernier terme de la deuxième somme).

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad (E_3)$$

On reconnaît une série télescopique, on a pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

(on a isolé le premier terme de la première somme et le dernier terme de la deuxième somme).

D'où en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

1**ère** **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes, critères)

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

1**ère étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes, critères)

$u_n = \frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

La série (E_4) converge comme somme de deux séries géométriques convergentes (car de raisons respectives $r = \frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$ inférieures strictes à 1).

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes, critères)

$u_n = \frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

La série (E_4) converge comme somme de deux séries géométriques convergentes (car de raisons respectives $r = \frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$ inférieures strictes à 1).

$2^{\textbf{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série,

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons (théorèmes, critères)
$u_n = \frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$
La série (E_4) converge comme somme de deux séries géométriques convergentes (car de raisons respectives $r = \frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$ inférieures strictes à 1).

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série,
Rappel : pour retrouver la formule de la somme partielle d'une série géométrique, on écrit :

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^N)(1-x) &= 1-x+x-x^2+x^2-x^3+\ldots-x^{N+1}\\ &= 1-x^{N+1} \quad \text{(encore une somme télescopique).}\end{aligned}$$

d'où

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

Si $0 < x < 1$, en passant à la limite x^{N+1} tend vers 0 et $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

On peut commencer la somme à partir de n'importe quel rang.
Par exemple, à partir de $n = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots + x^N)(1 - x) &= x^3 - x^4 + x^4 - x^5 + \ldots - x^{N+1} \\ &= x^3 - x^{N+1} \quad \text{(encore une somme télescopique).}\end{aligned}$$

d'où

$$x^3 + x^4 + x^5 + \ldots + x^N = \frac{x^3 - x^{N+1}}{1 - x} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{x^3}{1 - x}.$$

Conclusion : au dénominateur, on a toujours 1 moins la raison x. Au numérateur de la somme partielle au rang N, on a le premier terme de la somme moins la raison à la puissance $N + 1$.
En passant à la limite quand $x < 1$, il reste le premier terme divisé par 1 moins la raison.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \qquad (E_4)$$

Retour à l'exercice : les sommes partielles commencent au rang $n = 2$ et les raisons sont strictement inférieures à 1 donc en passant directement à la limite on trouve

$$\begin{aligned}(E_4) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

On a $u_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{n!} = v_n$.

La présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (voir Exercice 1 (E_9)). On regarde donc la limite de

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3} \sim \frac{n^3}{n^4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

On a $u_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{n!} = v_n$.

La présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (voir Exercice 1 (E_9)). On regarde donc la limite de

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3} \sim \frac{n^3}{n^4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ avec $\ell < 1$. D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge et par comparaison $\sum u_n$ aussi car $u_n \sim v_n$ et les u_n sont positifs.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série. Pour cela, on va se ramener à la formule de l'exponentielle

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et donc} \qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Commençons par écrire que $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} = s_1 + s_2$ avec $s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n}{n!}$ et

$$s_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

Il nous reste donc à calculer s_1. On vient de voir avec s_2 qu'on sait calculer des termes de la forme constante/factorielle. On a donc réécrire s_1 de la sorte.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

Pour simplifier la fraction, l'idée est de se ramener à des expressions du type

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{(n-2)!}, \quad \ldots$$

Au numérateur de s_1, on a $n^3 - n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)$ (voir slide 38).

Donc pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \frac{n^3 - n}{n!} &= \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)(n-3!)} \\ &= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} \end{aligned}$$

et pour $n < 3$, on a

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{n^3 - n}{n!} = 0 + 0 + \frac{2^3 - 2}{2!} = 3.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

D'où

$$s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n}{n!} = 3 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

et $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = -\frac{1}{0!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Donc

$$s_1 = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) = 4e.$$

Et finalement, $s = s_1 + s_2 = 4e + 2e = 6e$.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

Retour sur la méthode :
Pour se ramener à la somme d'une exponentielle, on fait des divisions euclidiennes successives du numérateur par des polynômes de la forme $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots$
Ici, $n^3 - n + 2$ est un polynôme de degré 3, donc on commence par une division euclidienne par $n(n-1)(n-2)$ (de degré 3). Le plus simple étant d'écrire :

$$n(n-1)(n-2) = n(n^2 - 3n + 2) = n^3 - 3n^2 + 2n$$

et

$$n^3 - n + 2 - (n^3 - 3n^2 + 2n) = 3n^2 - 3n + 2$$

donc

$$n^3 - n + 2 = n(n-1)(n-2) + 3n^2 - 3n + 2.$$

L'expression en bleue étant le reste de cette division euclidienne. C'est un polynôme de degré 2, donc on en fait sa division euclidienne par $n(n-1) = n^2 - n$ (de degré 2).

$$3n^2 - 3n + 2 = 3n(n-1) + 2.$$

Cette fois le reste (égal à 2) est une constante donc on a fini :

$$n^3 - n + 2 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + 2.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} \qquad (E_5)$$

Retour sur la méthode :
De cette expression $n^3 - n + 2 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + 2$, on déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n + 2}{n!} = cst + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

où cst est une constante dépendant des premiers termes. Et on a vu comment calculer ce type de somme.

Si le numérateur était un polynôme de degré 4, on ferait les divisions euclidiennes successives par

$n(n-1)(n-2)(n-3)$ (de degré 4)

$n(n-1)(n-2)$

$n(n-1)$

n

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

1$^{\text{ère}}$ étape : on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

On a $u_n = \dfrac{n^2+2}{(n-1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{(n-1)!} = v_n$.

La présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (voir Exercice 1 (E_9)). On regarde donc la limite de

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n \cdot n^2} \sim \frac{n^2}{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

1

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

On a $u_n = \dfrac{n^2+2}{(n-1)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{(n-1)!} = v_n$.

La présence d'une factorielle appelle à utiliser le critère de d'Alembert (voir Exercice 1 (E_9)). On regarde donc la limite de

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n \cdot n^2} \sim \frac{n^2}{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ avec $\ell < 1$. D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge et par comparaison $\sum u_n$ aussi car $u_n \sim v_n$ et les u_n sont positifs.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

2$^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série. On commence par se ramener à une factorielle $n!$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!}.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série. On commence par se ramener à une factorielle $n!$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!}.$$

Le numérateur est un polynôme de degré 2, on fait les divisions euclidiennes successives par $n(n-1)$ et n.

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

2**ère étape :** on cherche la somme de notre série. On commence par se ramener à une factorielle $n!$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!}.$$

Le numérateur est un polynôme de degré 2, on fait les divisions euclidiennes successives par $n(n-1)$ et n.
On a $n(n-1) = n^2 - n$ donc $n^2+2n+3 = n(n-1)+3n+3$ de sorte que pour $n \geq 2$,

$$\frac{n^2+2n+3}{n!} = \frac{n(n-1)+3n+3}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}.$$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} \qquad (E_6)$$

D'où
$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!} = \frac{1^2+2\cdot 1+3}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n!} \\
&= 6 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)+3n+3}{n!} \\
&= 6 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n!} \\
&= 6 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 6 + e + 3(e-1) + 3(e-1-1) \\
&= 7e - 3.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Rappel pour séries à termes de signes non constants.
On parle de série alternée quand u_n change de signe pour chaque n.

Mise en garde : il n'est pas possible d'utiliser des équivalents pour des séries dont les termes ne gardent pas un signe constant à partir d'un certain rang.

Theorem (Critère spécial des séries alternées)

Soit (a_n) *une suite réelle décroissante et tendant vers 0. Alors la série*

$$\sum (-1)^n a_n$$

converge.

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série du type $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   Le terme a_n est décroissante et tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série du type $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   Le terme a_n est décroissante et tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Donc d'après le critère précédent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série du type $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   Le terme a_n est décroissante et tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Donc d'après le critère précédent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ est par contre le terme général d'une série divergente. En effet,

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série du type $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   Le terme a_n est décroissante et tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Donc d'après le critère précédent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ est par contre le terme général d'une série divergente. En effet,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série du type $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Le terme a_n est décroissante et tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Donc d'après le critère précédent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ est par contre le terme général d'une série divergente. En effet,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

   Or on a vu que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et on sait d'après le critère de Riemann pour $\alpha = 1$ que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3

Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

3. Montrons que $u_n \sim v_n$. On a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n(-1)^n} = 1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

or $\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

L'exercice 3 est un exemple de séries à termes équivalents, mais de natures différentes. Il montre que pour appliquer le théorème de comparaison, la condition de positivité est nécessaire.