Correction du partiel du 16.3.2010

2.1 a) Soit K le nombre de plus proches voisins de S_i

$$P(\overline{R_i}|S_i) = P(R_{j_1} \text{ ou } R_{j_2} \text{ ou} \cdots \text{ou } R_{j_K} | S_i)$$

$$= \sum_{j \in \{j_1 \cdots j_K\}} P(R_j | S_i)$$

car les événements $R_j | S_i$ sont disjoints

$$= Kp$$

Pour les 4 symboles extérieurs, $K=2$

$\rightarrow P(\overline{R_i}|S_i) = 2p$

Pour les 4 symboles intérieurs, $K=4$

$\rightarrow P(\overline{R_i}|S_i) = 4p$

b) $$e = \bigcup_{i=1}^{8} \{(\overline{R_i}, S_i)\}$$

$$P_e = \sum_{i=1}^{8} P(\overline{R_i}, S_i)$$ car les événements $(\overline{R_i}, S_i)$ sont disjoints

$$= \sum_{i=1}^{8} P(\overline{R_i}|S_i) P(S_i)$$

$$= \frac{1}{8}(4 \times 2p + 4 \times 4p)$$

$$= 3p$$

(2.2) a) On génère des mots de 6 bits

Syndrôme $s = r H^T$ avec r le mot reçu

= vecteur de 3 bits

Donc 8 syndrômes possibles (y compris 000)

b) Les vecteurs d'erreur ont 6 bits

- Nombre de vecteurs e ayant au + 1 bit à 1
  = nombre de vecteurs e ayant 0 ou 1 bit à 1
  $= 1 + 6$
  $= 7$

- Nombre de vecteurs e ayant au + 2 bits à 1
  $= 1 + 6 + C_6^2$
  $= 1 + 6 + \frac{6 \times 5}{2}$
  $= 22$

c) Si 0 ou 1 erreur, le nombre de vecteurs e possibles est < au nombre de syndrômes possibles

Donc on peut associer un syndrôme à chaque e

Ce n'est pas le cas si on a 0 à 2 erreurs

Donc pouvoir de correction = $\underline{1}$

d)

Mots à coder	Mots de code	P_H
000	000 000	0
001	001 011	3
010	010 110	3
011	011 101	4
100	100 101	3
101	101 110	4
110	110 011	4
111	111 000	3

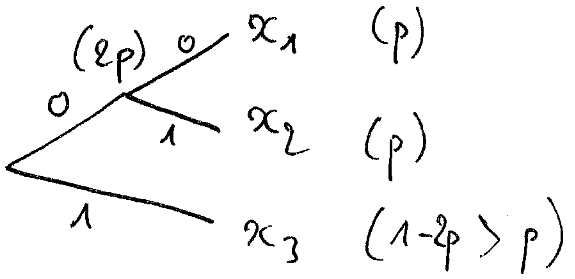
e) $d_{min} = P_H^{min} = 3$

Pouvoir de correction

$= \left[\frac{3-1}{2}\right] = 1$

2.3 a) Si $p < 1/3$, $P(x_3) = 1 - 2p > \frac{1}{3}$

D'où le codage de Huffman :



$\{x_1, x_2, x_3\}$ sont donc codés respectivement par $\{00, 01, 1\}$

b) $D = \frac{L}{\overline{T}}$ avec L la longueur moyenne des mots

$$L = \sum_{i=1}^{3} P(x_i)\, n_i = 2p + 2p + (1-2p) = 2p+1$$

$H(X)$ est indépendante du codage, de même que D_I

Donc $\overline{T}$ est indépendant du codage.

Si on utilise un code de longueur fixe, $L = 2$

$\rightarrow D' = 2/\overline{T}$

Donc $D < D'$ car $p < 1/3$

$$D/D' = \frac{2p+1}{2} \xrightarrow[p \to 0]{} \frac{1}{2}$$