Théorie des Langages – Feuille nº 6

GRAMMAIRES HORS-CONTEXTE

CORRECTION

Exercice 1 - Transformez les grammaires suivantes en grammaires réduites :

$$\begin{array}{lll} G_1 = \langle V_1, \Sigma_1, P_1, S\rangle, \Sigma_1 = \{a,b\}, & & \\ V_1 = \{a,b,S,X,Y,Z\}, P_1 : & & \\ S & \rightarrow & aXXY|bX \\ X & \rightarrow & aX|a \\ Y & \rightarrow & aY|YY \\ Z & \rightarrow & bX|aS \end{array} \qquad \begin{array}{lll} G_2 = \langle V_2, \Sigma_2, P_2, S\rangle, \Sigma_2 = \{a,b,c\}, & & \\ V_2 = \{a,b,c,S,X,Y\}, P_2 : & & \\ S & \rightarrow & aSY|bX \\ X & \rightarrow & bX \\ Y & \rightarrow & cY|a \end{array}$$

Grammaire réduite : tous les symboles non terminaux sont utiles (productifs et accessibles).

Grammaire G_1 :

1. **Suppression des symboles non productifs** : $\{X,S,Z\}$ sont productifs.
   On supprime Y non productif. On obtient :

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & bX \\ X & \rightarrow & aX|a \\ Z & \rightarrow & bX|aS \end{array}$$

2. **Suppression des symboles non accessibles** : $\{S,X\}$ sont accessibles.
   On supprime Z non accessible

On obtient la grammaire G_1 réduite :

$$\begin{array}{lll} G_1 = \langle V_1, \Sigma_1, P_1, S\rangle, \Sigma_1 = \{a,b\}, & & \\ V_1 = \{a,b,S,X\}, P_1 : & & \\ S & \rightarrow & bX \\ X & \rightarrow & aX|a \end{array}$$

Grammaire G_2 :

1. **Suppression des symboles non productifs** : $\{Y\}$ est productif.
   L'axiome S de la grammaire n'est pas productif.

On obtient la grammaire G_2 réduite :

$$G_2 = \langle V_2, \Sigma_2, P_2, S\rangle, \Sigma_2 = \{a,b\}, V_2 = \{a,b,S\}, P_2 = \emptyset$$

Exercice 2 - Supprimez les ε-règles de la grammaire suivante :

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle, \Sigma = \{a,b\}, V = \{a,b,S,X,Y\}, P :} \\
S & \rightarrow & XY|aXbXa \\
X & \rightarrow & aX|\varepsilon \\
Y & \rightarrow & b|\varepsilon
\end{array}
$$

Symboles annulables : $\{X, Y, S\}$

— **Pour X** : $X \rightarrow aX|a$

— **Pour Y** : $Y \rightarrow b$

— **Pour S** : $S \rightarrow X|Y|XY|aXbXa|abXa|aXba|aba$

Exercice 3 - Supprimez les règles unitaires des grammaires suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{G_1 = \langle V_2, \Sigma_1, P_1, S\rangle, \Sigma_1 = \{a,b,c\},} \\
\multicolumn{3}{l}{V_1 = \{a,b,c,S,X,Y\}, P_1 :} \\
S & \rightarrow & aSbX|X \\
X & \rightarrow & XYc|Y \\
Y & \rightarrow & ab|bc|ac
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{G_2 = \langle V_3, \Sigma_2, P_2, S\rangle, \Sigma_2 = \{a,b\},} \\
\multicolumn{3}{l}{V_2 = \{a,b,S,X,Y,Z\}, P_2 :} \\
S & \rightarrow & aX|Y|bZ \\
X & \rightarrow & bY|S \\
Y & \rightarrow & X|aZ|bbXZ \\
Z & \rightarrow & aS|bY
\end{array}
$$

Grammaire G_1 :

1. **Règles unitaires** : $S \rightarrow X$, $X \rightarrow Y$. On a : $S > X > Y$.
2. $X \rightarrow Y$ devient $X \rightarrow ab|bc|ac$
3. $S \rightarrow X$ devient $S \rightarrow XYc|ab|bc|ac$

On obtient :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aSbX|XYc|ab|bc|ac \\
X & \rightarrow & XYc|ab|bc|ac \\
Y & \rightarrow & ab|bc|ac
\end{array}
$$

Grammaire G_2 :

1. **Règles unitaires** : $S \rightarrow Y$, $X \rightarrow S$, $Y \rightarrow X$.
   On a : $S > Y > X > S$, donc $S \approx X \approx Y$. On peut donc remplacer tous ces symboles par le même. On obtient :

$$
\begin{array}{lcl}
\multicolumn{3}{l}{G_2 = \langle V_3, \Sigma_2, P_2, S\rangle, \Sigma_2 = \{a,b\},} \\
\multicolumn{3}{l}{V_2 = \{a,b,S,Z\}, P_2 :} \\
S & \rightarrow & aS|bZ|bS|aZ|bbSZ \\
Z & \rightarrow & aS|bS
\end{array}
$$

Exercice 4 - Transformez la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$, avec $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, $V = \{S,X,Y,Z,T,M,a,b,c,d\}$, et l'ensemble de règles P suivant en une grammaire équivalente propre et réduite.

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & XY|ZX & Z & \rightarrow & M|\varepsilon \\ X & \rightarrow & a|b|\varepsilon & T & \rightarrow & a|d \\ Y & \rightarrow & YZ|TY & M & \rightarrow & aY|c|d|\varepsilon \end{array}$$

1. **Réduire la grammaire**
   (a) **Symboles productifs** : $\{X,Z,T,M,S\}$. Non productif : Y, on le supprime. On obtient :

   $$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & ZX & Z & \rightarrow & M|\varepsilon \\ X & \rightarrow & a|b|\varepsilon & T & \rightarrow & a|d \\ M & \rightarrow & c|d|\varepsilon & & & \end{array}$$

   (b) **Symboles accessibles** : $\{S,Z,X,M\}$. T non accessible, on le supprime.

   $$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & ZX & Z & \rightarrow & M|\varepsilon \\ X & \rightarrow & a|b|\varepsilon & M & \rightarrow & c|d|\varepsilon \end{array}$$

   La grammaire est réduite.
2. **Nettoyer la grammaire**
   (a) **Supprimer les ε-règles**. Symboles annulables : $\{Z,X,M,S\}$. On obtient :

   $$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & ZX|Z|X & Z & \rightarrow & M \\ X & \rightarrow & a|b & M & \rightarrow & c|d \end{array}$$

   (b) **Supprimer les règles unitaires** : $S > X$; $S > Z > M$.
   — $Z \rightarrow M$ devient $Z \rightarrow c|d$
   — $S \rightarrow Z$ devient $S \rightarrow c|d$
   — $S \rightarrow X$ devient $S \rightarrow a|b$
   On obtient :

   $$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & ZX|a|b|c|d & Z & \rightarrow & c|d \\ X & \rightarrow & a|b & M & \rightarrow & c|d \end{array}$$

3. **Symboles accessibles** : M n'est plus accessible. On obtient la grammaire propre et réduite suivante :
   $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$, avec $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, $V = \{S,X,Z,a,b,c,d\}$, $P =$

   $$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S & \rightarrow & ZX|a|b|c|d & Z & \rightarrow & c|d \\ X & \rightarrow & a|b & & & \end{array}$$

Exercice 5 - Soit la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$, avec $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{S, T, F, a, b\}$, et l'ensemble de règles P suivant. Mettre cette grammaire sous forme normale de Chomsky.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aS|bTF|aT|bF \\
T & \rightarrow & aTT|bFF|a \\
F & \rightarrow & aST|bFF|b
\end{array}
$$

G est propre et réduite.

1. On introduit 2 nouveaux symboles non terminaux, A et B, tels que :

$$
\begin{array}{lcl}
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$

2. On transforme les règles :
   - $S \rightarrow aS$ devient $S \rightarrow AS$
   - $S \rightarrow bTF$ devient $S \rightarrow BX$, $X \rightarrow TF$
   - $S \rightarrow aT$ devient $S \rightarrow AT$
   - $S \rightarrow bF$ devient $S \rightarrow BF$
   - $T \rightarrow aTT$ devient $T \rightarrow AY$, $Y \rightarrow TT$
   - $T \rightarrow bFF$ devient $T \rightarrow BZ$, $Z \rightarrow FF$
   - $F \rightarrow aST$ devient $F \rightarrow AV$, $V \rightarrow ST$
   - $F \rightarrow bFF$ devient $F \rightarrow BZ$, $Z \rightarrow FF$

On obtient la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky : $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$, avec $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{S, T, F, A, B, V, X, Y, Z, a, b\}$, et l'ensemble de règles P suivant.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AS|BX|AT|BF \\
T & \rightarrow & AY|BZ|a \\
F & \rightarrow & AV|BZ|b \\
A & \rightarrow & a \\
B & \rightarrow & b \\
X & \rightarrow & TF \\
Y & \rightarrow & TT \\
Z & \rightarrow & FF \\
V & \rightarrow & ST
\end{array}
$$