

Algorithmique avancée

Contrôle Final

19/01/2021

Nom :

Prénom :

Numéro :

- La clarté de la rédaction est primordiale. Vous pouvez utiliser des dessins pour éclairer vos propos mais ce n'est pas suffisant. Evitez les formulations de type *On voit bien que*.
- Quand l'application d'un algorithme est demandé, il faut convaincre le correcteur que vous savez utiliser l'algorithme et donc développer son exécution, au moins sur plusieurs étapes. La réponse finale ne saurait suffire.
- Ne passez pas trop de temps sur une question, vous pouvez utiliser les résultats des questions non résolues par la suite.

Commentaires Etudiants/Professeur :

Exercice 1. Graphes planaires et complexité (3 points)

```

fonction G = planaire(G)
  tant que G n'est pas planaire faire
    pour tout x sommet de G faire
      V = liste des voisins de x
      M = barycentre des sommets de V
      si on diminue le nombre d'intersections d'arcs
        alors placer x en M
      fin si
    fin faire
  fin faire

```

FIGURE 1 – Algo Planarité

1. Pouvez-vous estimer la complexité du bloc conditionnel *Si* ?
2. Pouvez-vous estimer la complexité du bloc de boucle *Pour tout* ?
3. Pouvez-vous estimer la complexité de l'algorithme et comment borner cette complexité si nécessaire ?

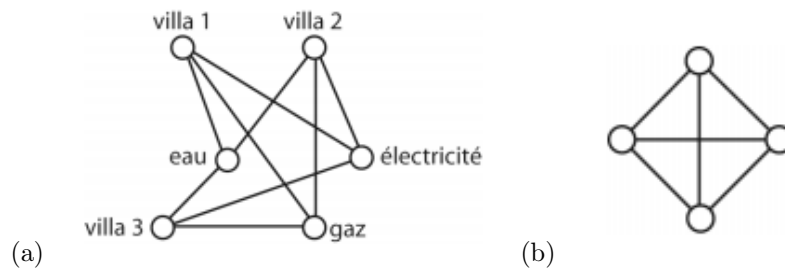


FIGURE 2 – (a) Graphe G1 (b) Graphe G2

4. Le graphe G_1 est-il planaire ? Justifier la réponse.

5. Le graphe G_2 est-il planaire ? Justifier la réponse.

Exercice 2. Parcours et complexité (3 points)

On considère un graphe orienté G et un sommet u de G .

1. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u ?

2. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u sur le graphe obtenu en inversant le sens de toutes les arêtes ?

3. En déduire un algorithme permettant de déterminer les composantes fortement connexes de G .

4. On admet que déterminer l'intersection de deux ensembles A et B est de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$, où $n = |A| + |B|$. En déduire la complexité de l'algorithme précédent.

5. Pourriez-vous justifier que l'intersection de deux ensembles A et B est de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$?

Exercice 3. Algorithme de Dijkstra et complexité (4 points)

L'algorithme de Dijkstra s'applique sur un graphe orienté exactement comme sur un graphe non-orienté, en ne considérant les arêtes que si elles sont prises dans le bon sens.

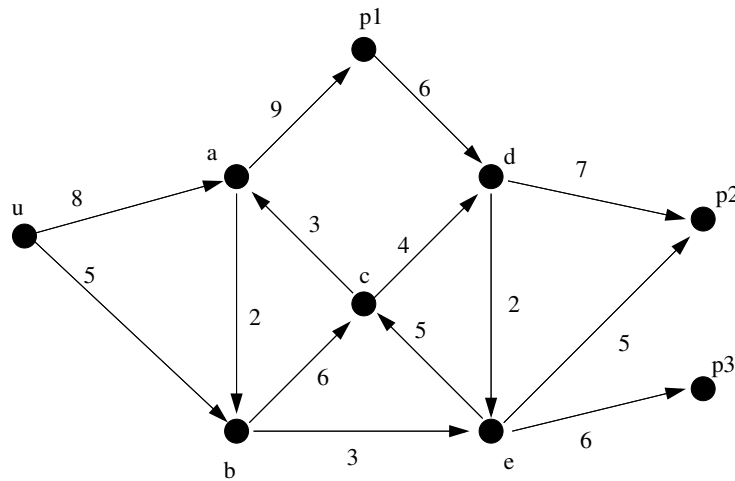


FIGURE 3 – Graphe G3

1. Appliquer cet algorithme au graphe G3 pour déterminer le coût minimal d'acheminement des marchandises de l'usine u au port p_3 .
La rédaction indiquera dans quel ordre les sommets du graphe sont ajoutés à la solution partielle.

2. On suppose qu'un coût de passage c_v est affecté également à chaque sommet v , et que le coût total d'un chemin est alors égal à la somme des coûts des arêtes et des sommets traversés.

Proposer et justifier une modification de l'algorithme de Dijkstra pour trouver un chemin de coût minimal avec ce nouveau coût.

Exercice 4. Recherche Opérationnelle (5 points)

Chaque semaine un camion de collecte des déchets recyclables doit parcourir les rues d'un village dont le plan est donné sur le graphe G4. On supposera pour simplifier que toutes les rues sont à double sens. Les longueurs des rues sont indiquées.

On suppose pour commencer que la collecte se fait le long des rues ?

1. Quelle distance minimum le camion doit-il parcourir ?

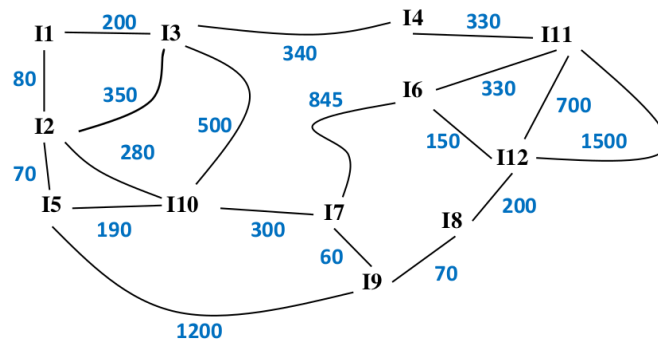


FIGURE 4 – Graphe G4

2. On doit fournir au chauffeur un plan de parcours minimisant la distance totale parcourue. A quelle problématique de théorie des graphes sommes-nous confrontés ?

3. Le chauffeur part du sommet I_1 et y revient. Comment construire un plan de parcours optimal ?

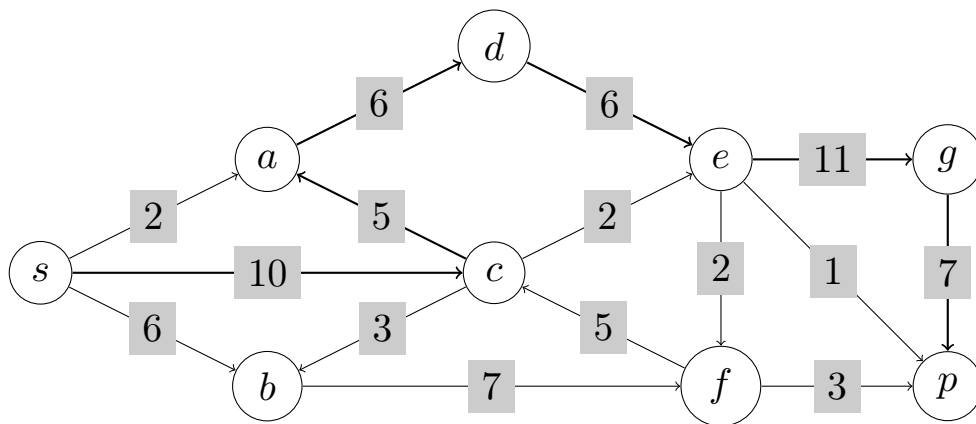
4. Le construire.

5. Si la collecte se fait au niveau des intersections de rues, on doit fournir au chauffeur un nouveau plan de parcours minimisant la distance totale parcourue. A quelle problématique de théorie des graphes sommes-nous

confrontés ? Pouvez-vous proposer une solution au chauffeur ? Et estimer ce coût ou le borner ?

Exercice 5. Recherche Opérationnelle et flots (5 points)

On considère le graphe orienté $G5$, dont les arêtes ont une capacité positive,

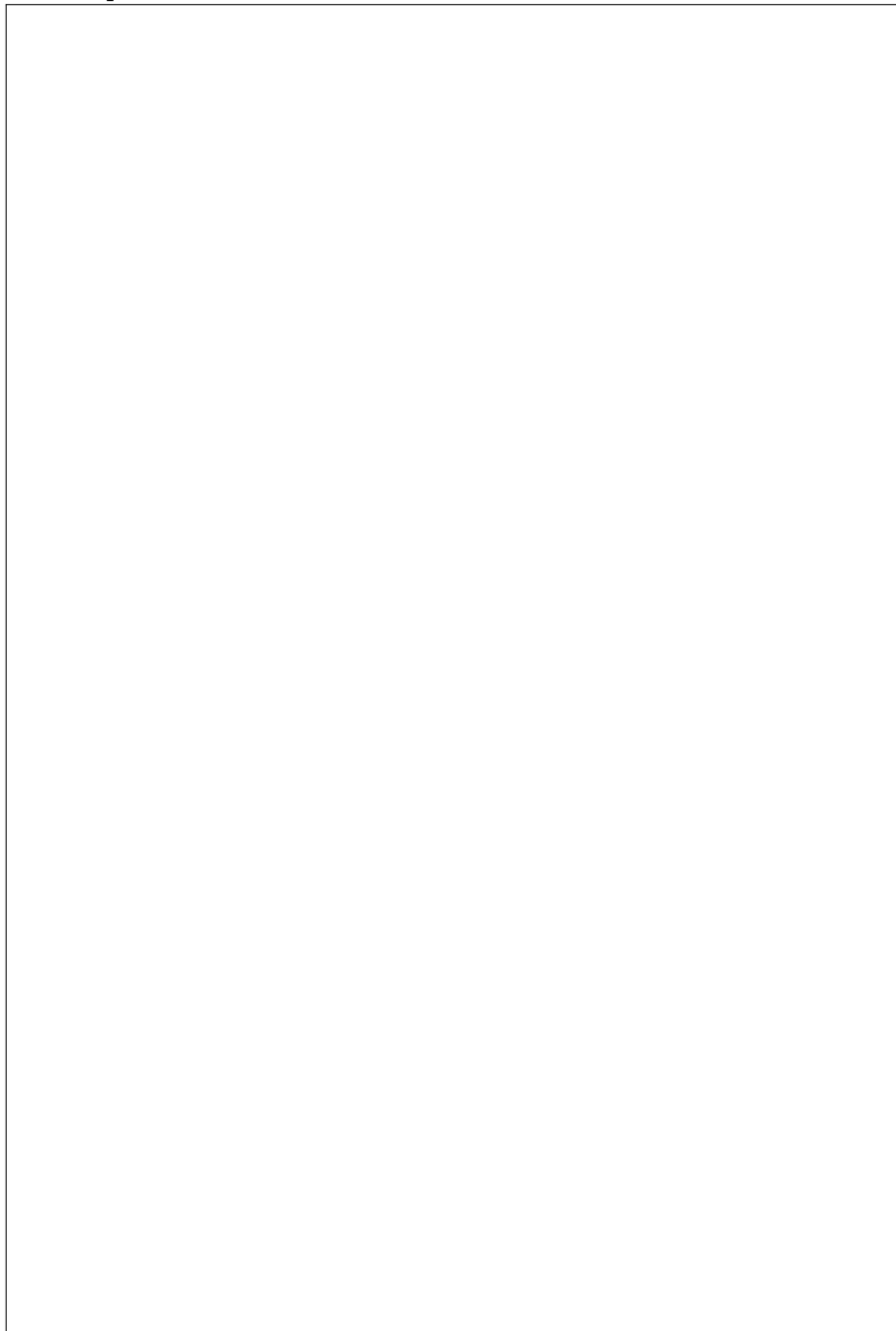


1. Quel est le flot maximal sur ce réseau de distribution ?

2. Quelles voies de distributions améliorer (avec un budget contraint) en priorité pour augmenter ce flux maximal ?

3. Question bonus (2 points) : Proposer une méthode pour les découvrir automatiquement ?

Compléments



Brouillons