Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°3
12 janvier 2015

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h30.

NB : *Ce sujet contient 8 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE DANS LA CASE "OBSERVATIONS".

On rappelle les développements limités suivants. Ils sont donnés au voisinage de 0, où n et p sont des entiers quelconques et a un réel quelconque.

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right) \\
\mathrm{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)...(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

On rappelle également le théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a,b]$ (intervalle fermé)
- f est dérivable sur $]a,b[$ (intervalle ouvert)

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Exercice 1.

1) Donner sous forme algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 1 - i$.
2) Donner sous forme exponentielle et sous forme algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
1) & \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1} - 2x & ; \quad 2) & \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} - x}{\ln x} \\
3) & \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & ; \quad 4) & \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \sin(x)}{x^2} \\
5) & \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(5x)}{\exp(2x) - 1} & ; \quad 6) & \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\sin(\frac{x^2}{2}) - 1 + \cos(x)}
\end{array}$$

Exercice 3. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(1+x)$.

1) Calculer le développement limité du produit $f \times g$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2) Calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1 + f(x)g(x)}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Exercice 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$: "$u_n > 0$ et $v_n > 0$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.a) Montrer, sans démonstration par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$.

2.b) En déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.c) En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers deux limites finies que l'on appellera ℓ_1 et ℓ_2.

4) Montrer que $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?

Exercice 5.

1) Soit $k \geqslant 2$ un entier. En appliquant le théorème des accroissements finis (*cf préambule*) à la fonction $f(x) = -\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[k-1, k]$, montrer que

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$

2) Soit $(u_n)_{n \geqslant 2}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

2.a) En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

2.b) A l'aide de l'inégalité de la question 1, montrer que $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

2.c) Montrer que la suite (u_n) est convergente *(on ne demande pas de calculer la limite).*

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera également f ce prolongement.

3) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède au moins une solution dans l'intervalle $]0, \sqrt{\pi}[$.

4) L'objectif de cette question est de montrer que cette solution est unique.

4.a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4.b) On pose $h(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.
Calculer h', donner son signe, et montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $h(x) \leqslant 0$

4.c) On pose $g(x) = x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)$. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{\pi}]$, $g(x) \leqslant 0$.

4.d) En déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0, \sqrt{\pi}[$.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in E \mid 3x + 2y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $\mathcal{G} = \{(2, 0, 5), (2, 0, 7), (0, 1, 0)\}$.

2.a) Montrer que $\mathcal{G}$ est une famille libre.

2.b) Donner la dimension de l'espace vectoriel E.

2.c) Montrer que $\mathcal{G}$ est une base de E.

Exercice 8.

1) Soient A une matrice de dimension $m \times n$ et B une matrice de dimension $p \times q$.
Sous quelle condition le produit AB a-t-il un sens ?

2) Soient A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.a) Calculer le produit AB.

2.b) Calculer la matrice inverse de A *(on admettra que A est inversible).*

2.c) Résoudre le système suivant en le mettant sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x - z &= 2 \\ 4x + y - 2z &= 3 \\ -5x - 3y - 2z &= -1 \end{cases}$$