Algorithmique avancée

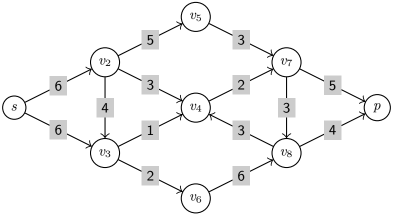
L3 Informatique
Etienne Birmelé

IV. Flots dans les graphes

Problème

On considère un graphe dirigé G tel que :

1. il existe deux ensembles disjoints S et P de sommets, respectivement appelés sources et puits ;
2. chaque arête e est valué par une capacité $c(e)$ correspondant au flux maximum pouvant transiter par cette arête.

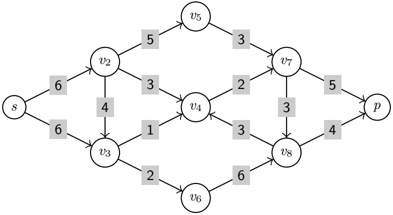


Problème

Problème

Quel est le flux maximal pouvant aller des sources vers les puits sans perte intermédiaire ?

- Dans le cas d'un graphe non-dirigé, on remplace chaque arête par deux arêtes dirigées opposées de même capacité que l'arête initiale.



Flot

Notations

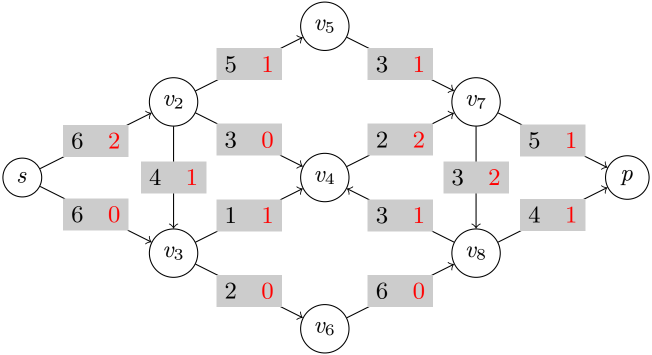
- Pour tout ensemble A de sommets, on note $\overline{A} = V(G) \setminus A$ et $(A, \overline{A})$ l'ensemble des arêtes de A vers $\overline{A}$.
- Pour toute fonction $f : E(G) \to \mathbb{R}$, on note $f^+(A) = \sum_{e \in (A, \overline{A})} f(e)$ et $f^-(A) = \sum_{e \in (\overline{A}, A)} f(e)$.

Definition

Un *flot* est une fonction $f : E(G) \to \mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout e, $0 \leq f(e) \leq c(e)$;
2. pour tout sommet $v \notin S \cup P$, $f^+(v) = f^-(v)$.

Flot



Valeur d'un flot

Proposition

Pour tout flot f dans G, $f^+(S) - f^-(S) = f^-(P) - f^+(P)$. Cette valeur est notée $val(f)$.

Le flot de l'exemple précédent est de de valeur 2.

Definition

Un flot f est maximal s'il n'existe pas de flot f' avec $val(f') > val(f)$.

Combien de sources et de puits ?

Proposition

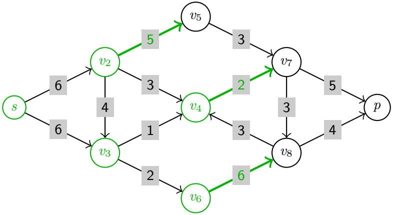
Problème 1 : *Soit* (G, c) *un graphe dirigé valué,* $S \subset V(G)$*,* $P \subset V(G)$*.*
Déterminer un flot maximal de S *vers* P*.*
Problème 2 : *Soit* (H, c) *un graphe dirigé valué,* $s \in V(H)$*,* $p \in V(H)$*.*
Déterminer un flot maximal de s *vers* p*.*
Les problèmes 1 et 2 sont équivalents.

- On se limite dorénavant au cas où il y a une source et un puits

Coupe

Definition

Une *coupe* est un couple $K = (A, \overline{A})$ tel que $s \in A$ et $p \in \overline{A}$. La *capacité d'une coupe* $cap(K)$ est la somme des capacités des arêtes allant de A à $\overline{A}$.



La coupe pour l'ensemble A correspondant aux sommets verts est de capacité 13.

Coupes et flots

Proposition

Pour toute coupe $K = (A, \overline{A})$ *et tout flot* f, $val(f) = f^+(A) - f^-(A)$.

Par conséquent, pour toute coupe K *et tout flot* f, $val(f) \leq cap(K)$.
En particulier, $\max_f val(f) \leq \min_K cap(K)$.

Théorème max-flot min-cut

Théorème

Dans tout réseau, le flot maximal a pour valeur la capacité de la coupe minimale.

- La preuve de ce théorème est constructive, à savoir qu'on va montrer l'existence de ce flot en présentant une manière de le construire (et donc de résoudre le Problème 2).

Saturation d'un chemin

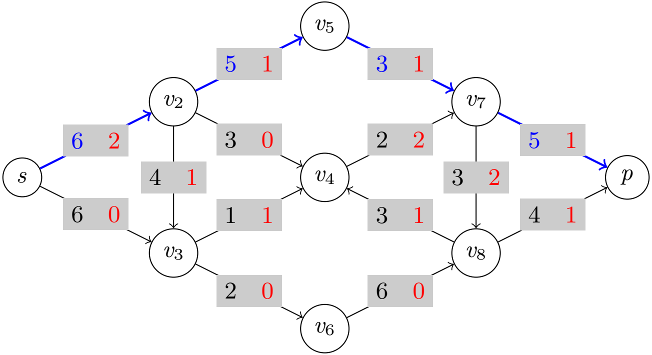
Definition

Soit f un flot et P un chemin entre s et p, les arêtes pouvant être parcourues dans les deux sens. Soit $e(P)^-$ les arêtes parcourues à contre-sens par P et $e(P)^+$ celle parcourues dans le bon sens. La saturation du chemin P est alors définie par

$$sat(P) = \min\Big(\min_{e \in e(P)^+} (c(e) - f(e)), \min_{e \in e(P)^-} f(e)\Big)$$

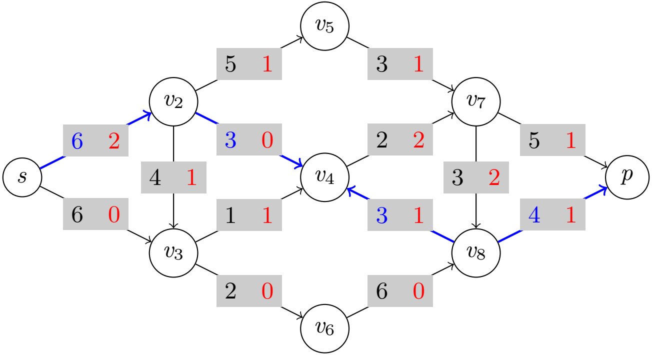
Si $sat(P) = 0$, le chemin est dit *saturé*.

Saturation d'un chemin



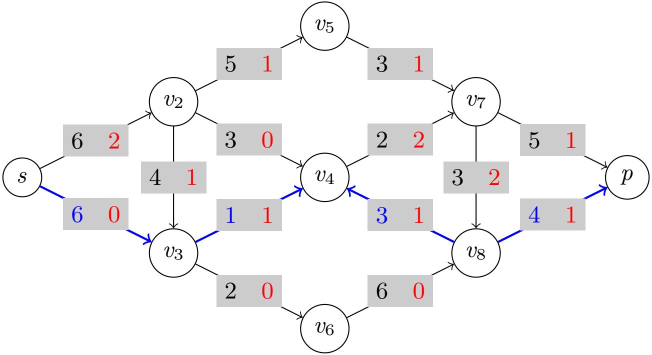
La saturation du chemin bleu est de 2.

Saturation d'un chemin



La saturation du chemin bleu est de 1.

Saturation d'un chemin



Le chemin bleu est saturé.

Saturation d'un chemin

- L'existence d'un chemin non saturé permet d'augmenter la valeur de f. En effet, en ajoutant $sat(P)$ sur les arêtes de $e(P)^+$ et en enlevant $sat(P)$ sur les arêtes de $e(P)^-$, on obtient un nouveau flot dont la valeur a augmenté de $sat(P)$.
- En fait, il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir augmenter un flot :

Proposition

Un flot f est maximal si et seulement si il n'y a pas de chemin non-saturé entre s et p.

Construction d'un flot maximal

Recherche d'un chemin saturé

On utilise une variante de l'arbre de parcours en profondeur enraciné en s :

- on parcourt une arête dans le bon sens uniquement si elle n'est pas saturée ;
- on parcourt une arête à contresens uniquement si son flot est non-nul.

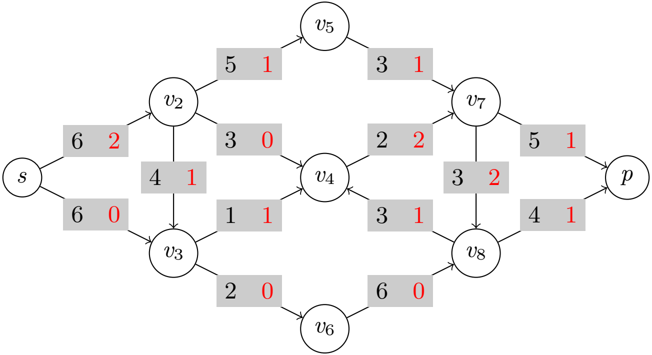
Si p est atteint lors de ce parcours, le chemin P allant de s à p dans l'arbre de parcours est un chemin non-saturé. Sa saturation vaut

$$\alpha = \min\Big(\min_{e \in e(P)^+} (c(e) - f(e)), \min_{e \in e(P)^-} f(e)\Big)$$

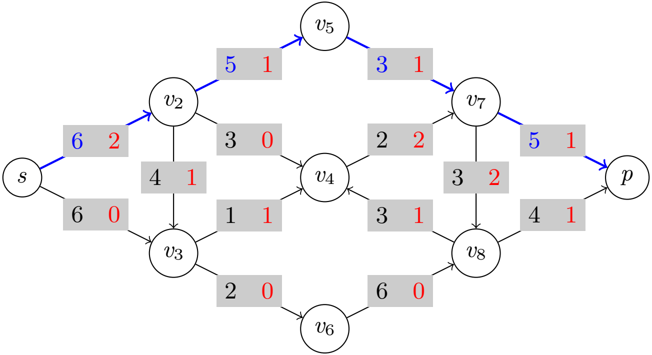
Construction d'un flot maximal

- on part d'un flot connu, par exemple le flot nul.
- tant que l'on trouve un chemin non-saturé entre s et p (parfois appelé chemin augmentant), on remet le flot à jour. Quand cela n'est plus possible, l'algorithme stoppe.

Exemple

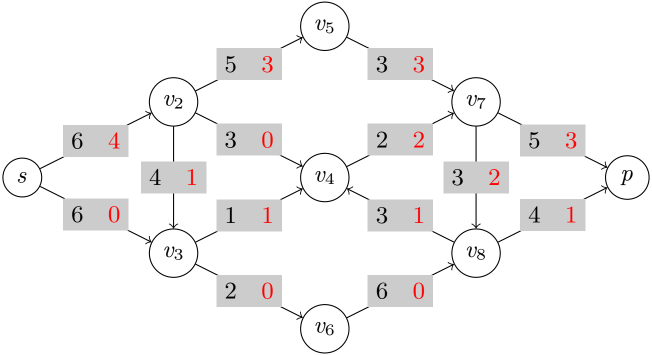


Exemple



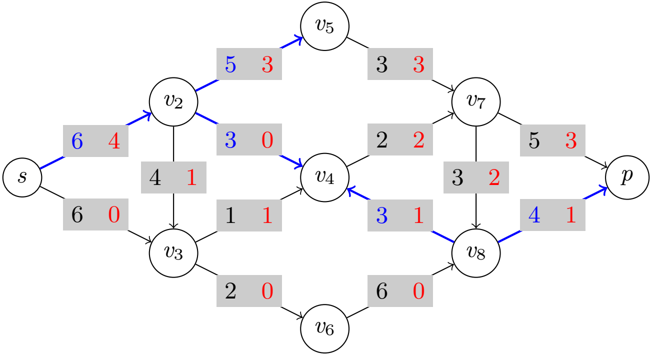
Le parcours en profondeur donne un chemin augmentant de saturation 2.

Exemple



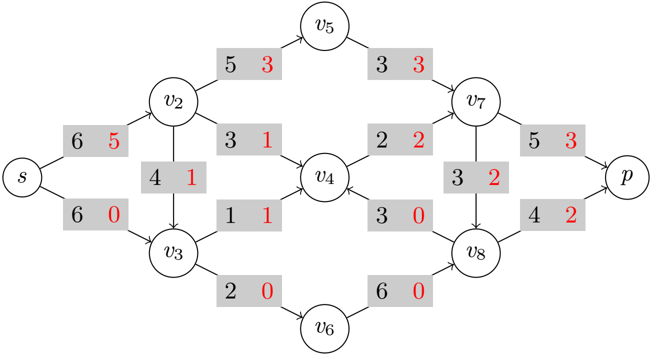
On augmente le flot le long de ce chemin.

Exemple



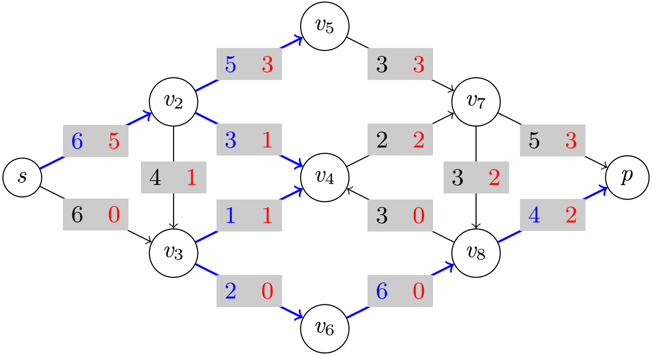
Le parcours en profondeur donne un chemin de saturation 1.

Exemple



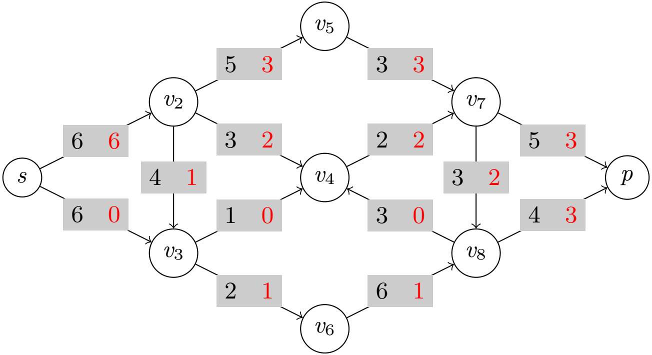
On augmente le flot le long de ce chemin.

Exemple



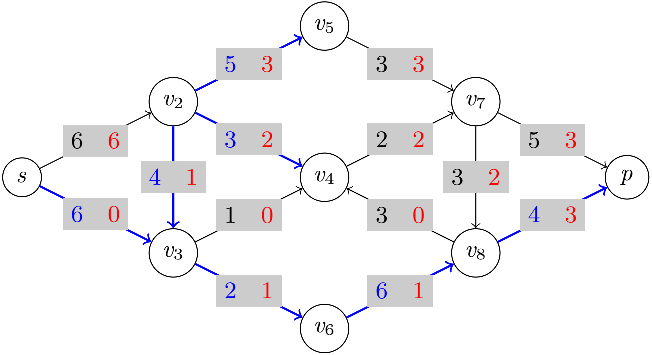
Le parcours en profondeur donne un chemin de saturation 1.

Exemple



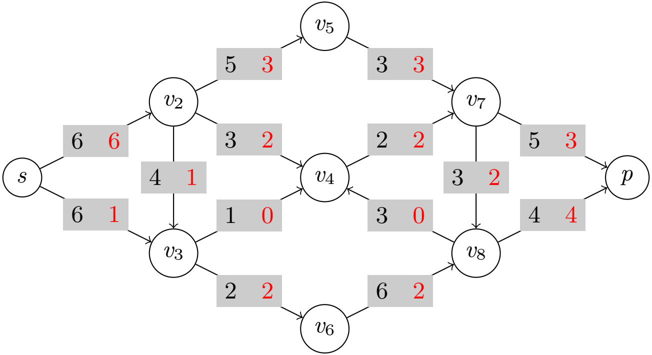
On augmente le flot le long de ce chemin.

Exemple



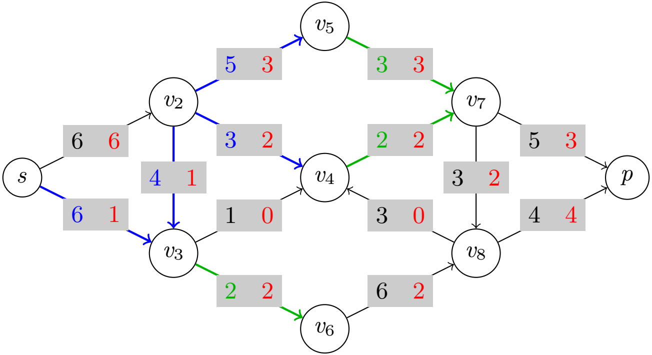
Le parcours en profondeur donne un chemin augmentatn de saturation 1.

Exemple



On augmente le flot le long de ce chemin.

Exemple



Le parcours en profondeur ne donne plus de chamin augmentant, l'algorithme s'arrête.
Le flot maximal (pas forcément unique) est de valeur 7, une coupe minimale est $(A, \overline(A)$, où A désigne les sommets atteints par le dernier parcours en largeur.

Une conséquence : le(s) théorème(s) de Menger

Théorème

Soit S et P deux ensembles de sommets d'un graphe G. Pour tout entier k, soit il existe $k+1$ chemins arêtes-disjoints reliant S à P, soit il existe au plus k arêtes dont la suppression déconnecte S de P.

Definition

Un séparateur d'un graphe est un ensemble de sommets X tel que $G \setminus X$ a un nombre de composantes connexes supérieur à celui de G.
Soit S et P deux ensembles de sommets. Un (S, P)-séparateur X est un séparateur tel qu'aucun chemin reliant un sommet de S à un sommet de P n'existe dans $G \setminus X$.

Théorème

Un graphe contient k chemins disjoints entre deux ensembles de sommets S et P si et seulement si G ne contient pas de (S, P)-séparateur de taille au plus $k-1$.