NUMÉRATION LOGIQUE

C7 : logique
Nicole VINCENT

Introduction

- La logique est utile dans beaucoup de domaines :
  Conception de circuits
  Vérification de preuves
  Preuves de programmes
  Programmation logique
  Simulation de raisonnements en intelligence artificielle
  Linguistique
  . . .
- Le **calcul des propositions** : la première étape dans la définition de la logique et du raisonnement
- Le **calcul des prédicats** permet une formalisation achevée du raisonnement mathématique

Utilisation de la logique en maths

Comment écrire : "La fonction f n'a pas de limite en x" de manière simple avec des quantificateurs?

- On peut écrire le contraire de "f a une limite en x", c'est-à-dire :
  $\boxed{\exists}\, l \in \mathbb{R}, \boxed{\forall}\, \varepsilon > 0, \boxed{\exists}\, \alpha > 0, \boxed{\forall}\, y \in [x-\alpha, x+\alpha], |f(y) - l| < \varepsilon$
- Donne, en niant tous les quantificateurs
  $\boxed{\forall}\, l \in \mathbb{R}, \boxed{\exists}\, \varepsilon > 0, \boxed{\forall}\, \alpha > 0, \boxed{\exists}\, y \in [x-\alpha ; x+\alpha], |f(y) - l| > \varepsilon$

Définition

- Une **proposition** est une affirmation du type
  - "il pleut"
  - "2+2=3"
  - "25 est un nombre rationnel"
- On peut lui affecter une **valeur de vérité** : **vrai** ou **faux**
- Un **prédicat** est une proposition dont la véracité dépend de variables
  - "f a une limite en x"
  - "x est rationnel"

Particularités

- Une proposition ne contient ni variables, ni quantificateurs
- En calcul des prédicats on utilise les quantificateurs
  - "Tout étudiant habite à Paris"
  - "il existe un élément de l'ensemble A qui est rationnel"
- Toutes phrases ne rentrent pas dans le système vrai/faux
  - phrases auto-référentes comme "cette phrase est fausse"
  - phrases optatives comme "que la force soit avec vous !"
  - Par contre, "je souhaite que la force soit avec vous" est une proposition valide

Calcul des propositions

- Le **calcul des propositions** traite du raisonnement sur les propositions
- Il définit les **règles de déduction** qui relient les propositions, indépendamment de leur contenu.
  De la même manière qu'on peut faire des opérations sur des fonctions mathématiques f (x); g(x); h(x), indépendamment de leurs valeurs :
  f (g + h) = fg + fh
- On ne traite que des valeurs booléennes { vrai, faux } ou { 1,0 }

Calcul des prédicats

- Dans le système de **calcul des "prédicats"**, il y a une notion de contexte

  La valeur de "Je m'appelle Jean" dépend de la personne qui énonce cette phrase

  La valeur de "Je suis en Europe", dépend de l'endroit où est énoncée cette phrase.
- un prédicat est une proposition contenant des variables
  - "X est en Europe", avec X est une variable d'entrée du système

7

Université de Paris

Syntaxe et sémantique

Dans les théories de logique on distingue deux aspects

- La **syntaxe** définit le langage du calcul des propositions par les règles d'écriture des formules.
- La **sémantique** détermine les règles d'interprétation des formules
  - On attribue des valeurs de vérité (vrai/faux) aux propositions élémentaires
  - on explique comment les connecteurs se comportent vis-à-vis de ces valeurs de vérité
  - On exprime souvent ce comportement par une table de vérité.

8

Université de Paris

Illustration de syntaxe et sémantique

On considère les phrases dans une langue :

- La **syntaxe** fixe les règles d'écriture des phrases

  PHRASE = (SUJET — VERBE — COMPLEMENT)

- La **sémantique** permet l'interprétation des phrases

  Exemples de phrases :
  1. "le chat boit son lait"
  2. "le fermier conduit un troupeau"
  3. "le lait boit son chat"
  4. "un troupeau conduit le fermier"

  Une phrase dont la syntaxe est correcte, n'a pas nécessairement un sens

9

Université de Paris

Les constituants du langage

Calcul des propositions comporte un **alphabet infini**

- Les variables propositionnelles ou **propositions atomiques** Notées p_1, p_2, … ou p, q, r ,…
- Les opérateurs ou **connecteurs**. Ils permettent la construction de propositions plus complexes.

¬	**non**	négation	→ ou ⟹	**implique**	implication
∧	**et**	conjonction	⟷ ou ⟺	**équivaut**	équivalence
∨	**ou**	disjonction			

La ponctuation "(" et ")", les parenthèses permettent de lever les ambiguïtés

10

Université de Paris

Les formules propositionnelles

ensemble des mots : ensemble des suites finies d'éléments de l'alphabet

L'ensemble des formules du calcul des propositions ou **expressions bien formées** est le plus petit ensemble de mots contenant

1. les variables propositionnelles, ou atomes
2. si A est une formule, alors ¬A est une formule
3. si A et B sont des formules, alors (A ⁎ B) est une formule, où ⁎ est l'un des connecteurs binaires ⁎ ∈ { ∧ , ∨ , → , ⟷}

11

Université de Paris

Exemples

Soit (((¬a ∨ b) ∧ c) → (¬¬a ∧ ¬b))

On omet les parenthèses extrêmes ((¬a ∨ b) ∧ c) → (¬¬a ∧ ¬b)

Vérification de la cohérence des parenthèses : On attribue un poids +1 à la parenthèse ouvrante, un poids -1 à la parenthèse fermante et 0 aux autres symboles. La somme des poids d'une formule est alors nulle

comment interpréter p → q → r

Soit (p → q) → r soit p → (q → r)

12

Université de Paris

Distribution de vérité

- Une distribution de vérité est une application de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble des valeurs de vérité {0 , 1}

  Exemple : δ {a , b} → { 0 , 1}

  δ(a) = 0 ou 1 de même pour δ(b), il y a 2^2 = 4 distributions de vérité possibles

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1

Université de Paris

Distribution de vérité

- Une distribution étant fixée et F une formule
- on définit δ(F), ou val(F,δ) à partir des tables de vérité

Une distribution de vérité se prolonge ainsi en une application de l'ensemble des formules dans { 0 , 1 }

Université de Paris

Tables de vérité des connecteurs

- On peut écrire δ(¬a) connecteur unaire

a	¬a
1	0
0	1

- Les tables de vérité des connecteurs binaires sont

a	b	a∧b	a∨b	a→b	a↔b
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Université de Paris

Tables de vérité des connecteurs

- On peut ainsi donner le comportement associé à chaque formule
  - ¬a prend la valeur 1 si et seulement si a prend la valeur 0.
  - a → b prend la valeur 0 si et seulement si a prend la valeur 1 et b prend la valeur 0.

Université de Paris

Sémantique : valeurs d'une formule

- Une distribution donnée est un **modèle** de F si δ(F) = 1

  F = a ∨ b   la distribution δ(a) = 1 et δ(b) = 0 est un modèle pour la formule

- Une formule F est une **tautologie** si pour toute distribution δ, on a δ(F) = 1   On dit que F est **valide**   On note ⊨ F

  F = a ∨ ¬a   est une tautologie, donc   ⊨ (a ∨ ¬a)

- Une formule F est une **antilogie** si pour toute distribution δ, on a δ(F) = 0   On dit que F est une **contradiction** ou insatisfaisable

  F = a ∧ ¬a est une antilogie

Université de Paris

Sémantique : valeur d'une formule

- Si la formule F prend au moins une fois la valeur 1, on dit que F est **satisfaisable**.
- Deux formules F et G sont **équivalentes** si et seulement si pour toute distribution δ on a δ(F) = δ(G).

  On note "F eq G"

- Exemple :

  F = (a ∨ b) et G = ¬(¬a ∧ ¬b)

On a bien F eq G

Université de Paris

Remarque

- ne pas confondre $\leftrightarrow$ et eq

Le premier est un symbole du langage formel, ou un opérateur, au même titre que $\vee$, $\wedge$, $\neg$
le second un symbole du métalangage
$(F \leftrightarrow G)$ est une formule, "F eq G" énonce une propriété des formules F et G

"F eq G" est un énoncé équivalent à. $\vDash F \leftrightarrow G$

- $a \leftrightarrow b$ s'apparente à l' égalité $a = b$,
- l'équivalence eq s'apparente à l'égalité entre fonctions

19

Exemple

- Evaluation de $A = ((\neg a \vee b) \wedge c) \rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg b)$.

On pose $F = ((\neg a \vee b) \wedge c)$ et $G = (\neg\neg a \wedge \neg b)$.

a	b	c	¬a∨b	F	G	F→G
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

20

Exemple

- Evaluation de $B = ((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow (p \vee q)$

On pose $F = (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$

p	q	r	p∨r	q ∨ ¬r	F	p ∨ q	B
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

La formule B est une tautologie : $\vDash ((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow (p \vee q)$

21

Quelques tautologies

Pour toutes formules A, B :

- $\vDash (A \rightarrow A)$ identité
- $\vDash (A \vee \neg A)$ tiers exclus
- $\vDash (A \rightarrow (A \vee B))$
- $\vDash (A \wedge \neg A) \rightarrow B$
- $\vDash ((A \wedge B) \rightarrow A)$
- $\vDash [A \rightarrow (B \rightarrow A)]$

Pour toutes formules A, B et C :

- $\vDash (A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ exemple de syllogisme
- $\vDash \{ [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)] \}$
- $\vDash \{ (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow [(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)] \}$

22

Lois de MORGAN

Pour toutes formules A et B :

$\neg(A \wedge B)$ eq $(\neg A) \vee (\neg B)$

"non(A et B) équivaut à (non A) ou (non B)"

$\neg(A \vee B)$ eq $(\neg A) \wedge (\neg B)$

"non(A ou B) équivaut à (non A) et (non B)"

23

Formules équivalentes

Pour toutes formules propositionnelles p, q et r :

- $(\neg\neg p)$ eq p involution
- $((p \wedge q) \vee r)$ eq $((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$
- $((p \vee q) \wedge r)$ eq $((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ distributivité du $\wedge$ par rapport à $\vee$
- $(p \rightarrow q)$ eq $(\neg q \rightarrow \neg p)$ contraposition
- $(p \rightarrow q)$ eq $(\neg p \vee q)$
- $\neg(p \rightarrow q)$ eq $(p \wedge \neg q)$
- $(p \leftrightarrow q)$ eq $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
- $(p \leftrightarrow q)$ eq $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

24

Systèmes complets de connecteurs

Un système de connecteurs est dit **complet** si toute formule valide (syntaxe correcte) du calcul des propositions peut se construire à partir des connecteurs du système

Exemple 1 : le système $\{\neg , \wedge, \vee\}$ est un système complet de connecteurs.

$(a \rightarrow b)$ eq :$(a \wedge \neg b)$, et $(a \leftrightarrow b)$ eq $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

Exemple 2 : les systèmes $\{\neg , \wedge\}$ et $\{\neg , \vee\}$ sont complets. (lois de De Morgan)

Exemple 3 : comme $(p \vee q)$ eq $(\neg p \rightarrow q)$ le système $\{\neg , \rightarrow\}$ est complet.

Application : Lors de la construction de circuits logiques ceci permet d'utiliser un nombre limité de “circuits de base”.

25

Université de Paris