Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2
TD n°4 : Séries
2019-2020

Fiche guidée n°2
Séries numériques

Méthode de travail

- Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
  Ne vous contentez pas de la lire.
- Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.
- Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.
- Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Séries numériques

Plan d'étude et outils

- principales séries de référence
  - Séries géometriques
  - Séries de Riemann
  - Séries de Bertrand
- Séries à termes positifs
  - théorèmes de comparaison
  - équivalences
  - Critère de d'Alembert
  - Critère de Cauchy
- Séries à termes quelconques

Séries numériques à termes quelconques

Rappel pour séries à termes de signes non constants.
On parle de série alternée quand u_n change de signe pour chaque n.

Mise en garde : il n'est pas possible d'utiliser des équivalents pour des séries dont les termes ne gardent pas un signe constant à partir d'un certain rang.

Séries numériques à termes quelconques

Rappel pour séries à termes de signes non constants.
On parle de série alternée quand u_n change de signe pour chaque n.

Mise en garde : il n'est pas possible d'utiliser des équivalents pour des séries dont les termes ne gardent pas un signe constant à partir d'un certain rang.

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ où la suite (u_n) n'est pas forcément de signe constant, on peut

- démontrer que le terme général ne tend pas vers 0.
  (attention, ceci n'est qu'une condition suffisante de divergence).
- étudier la convergence absolue.
  Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolues, ou des modules s'il s'agit de nombres complexes.
  (Attention, la convergence absolue n'est qu'une condition suffisante de convergence.)

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Theorem (Théorème 3.1.3 poly)

Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Le fait que le terme général tende vers 0 est une condition **nécessaire** de convergence mais pas suffisante !

Allons traduire,

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Theorem (Théorème 3.1.3 poly)

Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Le fait que le terme général tende vers 0 est une condition **nécessaire** de convergence mais pas suffisante !

Allons traduire,

$$\begin{aligned} &\textit{si} \quad \sum u_n \quad \textit{converge} &&\Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ &\textit{si} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad (\ell \neq 0) &&\Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \textit{diverge}. \end{aligned}$$

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Theorem (Théorème 3.1.3 poly)

Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Le fait que le terme général tende vers 0 est une condition **nécessaire** de convergence mais pas suffisante !

Allons traduire,

$$\text{si} \quad \sum u_n \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\text{si} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad (\ell \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \text{diverge}.$$

Cela signifie que si le terme général ne tend pas vers 0, on est sûr d'avoir la divergence.

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Definition (Définition 3.4.1 poly)

On dit que la série $\sum u_n$ *est* ***absolument convergente*** *si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Theorem (Théo 3.4.2 poly)

Une série absolument convergente est convergente.

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Definition (Définition 3.4.1 poly)

On dit que la série $\sum u_n$ *est* ***absolument convergente*** *si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Theorem (Théo 3.4.2 poly)

Une série absolument convergente est convergente.

$$si \quad \sum |u_n| \quad converge \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad converge.$$

Séries numériques à termes quelconques

Rappel

Definition (Définition 3.4.1 poly)

On dit que la série $\sum u_n$ *est* ***absolument convergente*** *si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Theorem (Théo 3.4.2 poly)

Une série absolument convergente est convergente.

$$\textit{si} \quad \sum |u_n| \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \textit{converge}.$$

Donc, pour étudier la nature d'une série pas forcément de signe constant, on va étudier la convergence absolue.
Si le terme général ne tend pas vers 0, on peur conclure que la série diverge et il n'est pas utile d'étudier la valeur absolue.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite,
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0.$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite,
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$. Les sommes partielles oscillent entre les deux valeurs et ne convergent pas vers une limite.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite,
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$. Les sommes partielles oscillent entre les deux valeurs et ne convergent pas vers une limite.

u_n ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** termes positifs ou quelconques ?
$u_n = (-1)^n$ est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite,
$\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$. Les sommes partielles oscillent entre les deux valeurs et ne convergent pas vers une limite.

u_n ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Lien avec la suite vu au chapitre Suites,
si $u_n = (-1)^n$, alors la sous-suite (u_{2n}) des termes de rang pair converge vers 1 et la sous-suite (u_{2n+1}) des termes de rang impairs converge vers -1 .

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?

$$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$$

u_n est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?

$$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$$

u_n est le terme général d'une série alternée.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pouvons chercher un équivalent de $|u_n|$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$
u_n est le terme général d'une série alternée.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pouvons chercher un équivalent de $|u_n|$.
$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} = v_n$ terme général d'une série convergente.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots$
u_n est le terme général d'une série alternée.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pouvons chercher un équivalent de $|u_n|$.
$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} = v_n$ terme général d'une série convergente.

Donc, $\sum |u_n|$ converge car $|u_n|$ est équivalent à une série avec le terme général v_n.
Par le théorème précédente, on sait que la convergence absolue implique la convergence et on peut conclure que aussi $\sum u_n$ converge.

Rappel : $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann avec $\alpha = 2$ convergente.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n + 100}{3n + 1} \right)^n \qquad (E_3)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \qquad (E_3)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \qquad (E_3)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \qquad (E_3)$$

1$^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

2$^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
la présence d'une puissance appelle à utiliser le critère de Cauchy,
nous pouvons étudier la limite de $\sqrt[n]{|u_n|}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \qquad (E_3)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
la présence d'une puissance appelle à utiliser le critère de Cauchy,
nous pouvons étudier la limite de $\sqrt[n]{|u_n|}$.
$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$; $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{2n+100}{3n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} < 1.$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \qquad (E_3)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
la présence d'une puissance appelle à utiliser le critère de Cauchy,
nous pouvons étudier la limite de $\sqrt[n]{|u_n|}$.

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n ; \ \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{2n+100}{3n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} < 1.$$

Par le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ est absolument convergente (cela signifie que $\sum |u_n|$ converge).
La série $\sum u_n$ est donc convergente par le théorème précédente.

$\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell = \frac{2}{3} < 1$. D'après le critère de Cauchy la série $\sum |u_n|$ converge et donc aussi $\sum u_n$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques avec terme général défini pas morceaux.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques avec terme général défini pas morceaux.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques avec terme général défini pas morceaux.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pourrions utiliser par exemple le critère de d'Alembert et donc étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

1$^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques avec terme général défini pas morceaux.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pourrions utiliser par exemple le critère de d'Alembert et donc étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
évaluons le rapport dans les deux cas, c'est-à-dire $n = 2k$ et $n = 2k+1$.
Dans le cas pair $n = 2k$, on a que $u_n = \dfrac{(-1)^k 2}{5^k}$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{k+1} 4}{5^{k+1}}$.
D'où, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{k+1} 4}{5^{k+1}} \dfrac{5^k}{(-1)^k 2} = -\dfrac{2}{5}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{2}{5^k} & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques avec terme général défini pas morceaux.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
nous pourrions utiliser par exemple le critère de d'Alembert et donc étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
évaluons le rapport dans les deux cas, c'est-à-dire $n = 2k$ et $n = 2k+1$.
Dans le cas pair $n = 2k$, on a que $u_n = \dfrac{(-1)^k 2}{5^k}$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{k+1} 4}{5^{k+1}}$.
D'où, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{k+1} 4}{5^{k+1}} \dfrac{5^k}{(-1)^k 2} = -\dfrac{2}{5}$.
Dans le cas impair $n = 2k+1$, on a que $u_n = \dfrac{(-1)^{k+1} 4}{5^{k+1}}$. u_{n+1} a indice pair maintenant,
en fait, pour l'indice n+1 : $(2k+1+1 = 2(k+1))$) donc,

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{k+1} 2}{5^{k+1}} \text{ . D'où, } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{k+1} 2}{5^{k+1}} \frac{5^{k+1}}{(-1)^{k+1} 4} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

En résumant,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} -\dfrac{2}{5} & \text{si} \quad n = 2k \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

et $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{2}{5} & \text{si} \quad n = 2k \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$. Par le critère de d'Alembert, la série (E_4) de terme général u_n est absolument convergente.
Elle est donc convergente.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

1**ème** **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

2**ème** **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
Cette série n'est pas absolument convergente. En effet, $|u_n| = \dfrac{1}{n \ln n}$ terme général d'une série divergente d'après l'Exercice 1 (ou série de Bertrand avec $\beta = 1$).

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,

Cette série n'est pas absolument convergente. En effet, $|u_n| = \dfrac{1}{n \ln n}$ terme général d'une série divergente d'après l'Exercice 1 (ou série de Bertrand avec $\beta = 1$).

C'est une série alternée $(-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n>0} = \frac{1}{n \ln n}$, suite positive, décroissante et tendant vers 0. La série converge.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** la série est à termes positifs ?
Non, série numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier la limite de sa valeur absolue,
Cette série n'est pas absolument convergente. En effet, $|u_n| = \dfrac{1}{n \ln n}$ terme général d'une série divergente d'après l'Exercice 1 (ou série de Bertrand avec $\beta = 1$).

C'est une série alternée $(-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n>0} = \frac{1}{n \ln n}$, suite positive, décroissante et tendant vers 0. La série converge.

Attention ! : si la série de valeurs absolues/modules diverge (positivement), alors la série du départ $\sum u_n$ ne convergera absolument pas. Mais elle peut diverger ou converger et dans ce cas, on dira qu'elle converge (simplement).

Si la série n'est pas absolument convergente, on peut rien conclure sur la convergence (simple). Elle pourrait diverger ou converger. En fait, dans cet exercice, nous avons vu que la série converge.

Exercice 4

Rappel

Theorem (Théorème 3.4.3 poly (Abel, hors programme))

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que*

- *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0 à l'infini.*
- *Les sommes partielles de la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées :*

$$\exists M, \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_0 + \cdots + b_n| \leq M.$$

Alors, la série $\sum a_n b_n$ *converge.*

Remarque. Le critère de convergence des séries alternées (dans le programme du cours et utilisé dans l'Ex.3) est un sous-cas de ce théorème : si (a_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série $\displaystyle\sum(-1)^n a_n$ est convergente.

Corollaire du théorème (hors programme) :
Soit θ un réel tel que $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Soit a_n une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0 à l'infini. Les séries $\sum e^{i\theta n} a_n ; \sum \cos(n\theta) a_n ; \sum \sin(n\theta) a_n$ convergent.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général,

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

1**ème** **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

2**ème** **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général,

Pour $n > 0$, $|u_n| \geq \dfrac{|\sin^3 n|}{n} \geq \dfrac{\sin^4 n}{n} = v_n$. Par linéarisation,

$$|u_n| \geq \frac{|\sin^3 n|}{n} \geq \frac{\sin^4 n}{n} = \frac{1}{8}\frac{\cos 4n}{n} - \frac{4}{8}\frac{\cos 2n}{n} + \frac{3}{8}\frac{1}{n}.$$

Rappel : $\sin^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$, montré à partir de $\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général,

Pour $n > 0$, $|u_n| \geq \dfrac{|\sin^3 n|}{n} \geq \dfrac{\sin^4 n}{n} = v_n$. Par linéarisation,

$$|u_n| \geq \frac{|\sin^3 n|}{n} \geq \frac{\sin^4 n}{n} = \frac{1}{8}\frac{\cos 4n}{n} - \frac{4}{8}\frac{\cos 2n}{n} + \frac{3}{8}\frac{1}{n}.$$

Rappel : $\sin^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$, montré à partir de $\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$.

v_n est le terme général d'une série divergente (somme de deux séries convergentes et

d'une série divergente).

Cette série n'est pas absolument convergente.

On remarque que dans ce cas $u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général,

Pour $n > 0$, $|u_n| \geq \dfrac{|\sin^3 n|}{n} \geq \dfrac{\sin^4 n}{n} = v_n$. Par linéarisation,

$$|u_n| \geq \frac{|\sin^3 n|}{n} \geq \frac{\sin^4 n}{n} = \frac{1}{8}\frac{\cos 4n}{n} - \frac{4}{8}\frac{\cos 2n}{n} + \frac{3}{8}\frac{1}{n}.$$

Rappel : $\sin^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$, montré à partir de $\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$.

v_n est le terme général d'une série divergente (somme de deux séries convergentes et

d'une série divergente).

Cette série n'est pas absolument convergente.

On remarque que dans ce cas $u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Voyons si cette série converge. En effet, par linéarisation, $u_n = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin 3n}{\sqrt{n+2}} + \dfrac{3}{4}\dfrac{\sin\ n}{\sqrt{n+2}}$.

Rappel : $\sin^3(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$, car $\sin(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$ et

$\sin^3(x) = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{2^3 i^3} = \frac{1}{(2^2 i^2)}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{-3}{2^2 i^2}\frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}$.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}} \qquad (E_7)$$

En fait, après linéarisation de la puissance, $u_n = -\frac{1}{4}\frac{\sin 3n}{\sqrt{n+2}} + \frac{3}{4}\frac{\sin\ n}{\sqrt{n+2}}$,

donc, $\displaystyle\sum_n u_n = \sum_n \left(-\frac{1}{4}\frac{\sin 3n}{\sqrt{n+2}} + \frac{3}{4}\frac{\sin\ n}{\sqrt{n+2}} \right)$.

La série de terme général $-\frac{1}{4}\frac{\sin 3n}{\sqrt{n+2}}$ et la série de terme général $\frac{3}{4}\frac{\sin\ n}{\sqrt{n+2}}$ convergent par application du théorème d'Abel (corollaire, hors programme).
Pour les plus curieux, la démonstration/procédure est la même que dans le poly à la page 70/71.

En fait, les séries sont du type $\sum sin(n\theta)a_n$, avec a_n suite positive, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.

Vérifier la limite pour a_n et les hypothèses annoncées ci-dessus.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(\cos\, n)^3 (n+1)}{n^3} \qquad (E_8)$$

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(\cos\ n)^3(n+1)}{n^3} \qquad (E_8)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(\cos\, n)^3(n+1)}{n^3} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général u_n

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(\cos\ n)^3(n+1)}{n^3} \qquad (E_8)$$

$1^{\text{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général u_n
$u_n = \dfrac{(\cos\ n)^3(n+1)}{n^3}$, tout simplement $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|\cos^3 n|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} = v_n$ terme général d'une série convergente.

Exercice 4

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(\cos\ n)^3(n+1)}{n^3} \qquad (E_8)$$

$1^{\textbf{ème}}$ **étape :** Séries numérique à termes quelconques.

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** étudier le comportement de la valeur absolue du terme général u_n $u_n = \dfrac{(\cos\ n)^3(n+1)}{n^3}$, tout simplement $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|\cos^3 n|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} = v_n$ terme général d'une série convergente.

La série est absolument convergente, donc convergente.

Séries à termes quelconques

Dans les prochains exercices, nous calculerons la somme des séries après avoir démontré leur convergence.

Quelques astuces et conseils pour calculer la somme d'une série $\sum u_n$,

- écrire la suite (u_n) sous une forme "télescopique" (où il y a un terme précédente ou suivant le terme général), $u_n = v_n - v_{n-1}$, alors les termes en (v_n) se simplifient
(exemple dans l'Exercice 2 : E_1 ou E_3).
- utiliser la somme d'une série connue, et s'y ramener par des combinaisons linéaires, des changements d'indices..ecc..
(par exemple, utilisé dans l'Exercice 2 : E_4 ou E_5).
- pour calculer des sommes proches des sommes géométriques $\sum_k x^k$, par exemple $\sum_k kx^k$ ou $\sum_k \frac{x^k}{k+1}$, on peut se ramener à une somme finie, utiliser la somme de la suite géométrique...en essayant de manipuler notre expression (on verra bien aussi dans cet exercice 5 : E_5).

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

1**ère** **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

$1^{\text{\textbf{ère}}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est un série à termes négatifs. On a droit aux équivalents (ou passer par la valeur absolue).

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est un série à termes négatifs. On a droit aux équivalents (ou passer par la valeur absolue).

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \ln\frac{15}{16} + \cdots$. Pour les valeurs comprises entre 0 et 1, le logarithme est négatif. On peut le voir aussi comme,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln\frac{4}{3} - \ln\frac{9}{8} - \ln\frac{16}{15} - \cdots$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est un série à termes négatifs. On a droit aux équivalents (ou passer par la valeur absolue).

$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \ln\frac{15}{16} + \cdots$. Pour les valeurs comprises entre 0 et 1, le logarithme est négatif. On peut le voir aussi comme,

$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln\frac{4}{3} - \ln\frac{9}{8} - \ln\frac{16}{15} - \cdots$

On étudie le comportement de u_n :

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

1$^{\text{ère}}$ étape : on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est un série à termes négatifs. On a droit aux équivalents (ou passer par la valeur absolue).
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \ln\frac{15}{16} + \cdots$. Pour les valeurs comprises entre 0 et 1, le logarithme est négatif. On peut le voir aussi comme,
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln\frac{4}{3} - \ln\frac{9}{8} - \ln\frac{16}{15} - \cdots$
On étudie le comportement de u_n :
u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On ne reconnaît pas le terme général, donc on cherche un équivalent. (même raisonnement que dans l'Ex. (E_4)).

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

Rappel : $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0)
On a $\ln(1+(-\frac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

Rappel : $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0)
On a $\ln(1+(-\frac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

$u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

2**ère** **étape :** on cherche la somme de notre série.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

Rappel : $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0)
On a $\ln(1 + (-\frac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.
$u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente.
$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série.
Pour tout $N \geq 1$,

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right),$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2).$$

(les termes sont simplifiés entre eux).

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (E_1)$$

Rappel : $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0)
On a $\ln(1 + (-\frac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.
$u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente.
$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série.
Pour tout $N \geq 1$,

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right),$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2).$$

(les termes sont simplifiés entre eux). D'où $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
u_n est de la forme $(-1)^n a_n$ avec $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. On a $a_n \geq 0$, car $\frac{n+1}{n-1} \geq 1$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
u_n est de la forme $(-1)^n a_n$ avec $a_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$. On a $a_n \geq 0$, car $\dfrac{n+1}{n-1} \geq 1$.
Comme ln est une fonction croissante et que $\dfrac{n+1}{n-1} = 1 + \dfrac{2}{n-1}$, on peut conclure que a_n décroît. Par ailleurs, a_n tend vers 0. La série converge par le résultat sur les séries alternées.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

1ère **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
u_n est de la forme $(-1)^n a_n$ avec $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. On a $a_n \geq 0$, car $\frac{n+1}{n-1} \geq 1$.
Comme ln est une fonction croissante et que $\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$, on peut conclure que a_n décroît. Par ailleurs, a_n tend vers 0. La série converge par le résultat sur les séries alternées.

On peut montrer qu'elle ne converge pas absolument. En effet,

$$|u_n| = |a_n| = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1},$$

terme général d'une série divergente.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad (E_2)$$

$2^{\textbf{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

Pour le calcul précédente, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n &= \sum_{n=2}^{N}(-1)^n \ln(n+1) - \sum_{n=2}^{N}(-1)^n \ln(n-1)\\
&= \sum_{n=3}^{N+1}(-1)^{n-1} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n+1} \ln(n)\\
&= (-1)^N \ln N + (-1)^{N+1}\ln(N+1) - (-1)^2\ln(1) - (-1)^3\ln(2)\\
&= (-1)^N(\ln N + (-1)\ln(N+1)) + \ln(2)\\
&= (-1)^N \ln\frac{N}{N+1} + \ln 2 \longrightarrow \ln(2).
\end{aligned}$$

Conclusion, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln(2).$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ série à termes quelconques.

$\left|\dfrac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$ terme général d'une série convergente.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ série à termes quelconques.

$\displaystyle\left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série, $\displaystyle s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}\right)$

Rappel : $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, donc $Im(e^{in\theta}) = \sin(n\theta)$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ série à termes quelconques.

$\displaystyle\left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche la somme de notre série, $\displaystyle s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}\right)$

Rappel : $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, donc $Im(e^{in\theta}) = \sin(n\theta)$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Im(e^{in\theta})}{2^n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n\right)$$

Série géométrique de raison $r = \frac{e^{i\theta}}{2}$, $|r| < 1$. Donc, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

$$s = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{2 - e^{i\theta}}\right)$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$s = \mathrm{Im}\ (z) = \mathrm{Im}\ \left(\frac{2}{2 - e^{i\theta}}\right)$. Pour chercher la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{z} = 2 - e^{-i\theta}$.

$z = \dfrac{2}{2 - e^{i\theta}} \cdot \dfrac{2 - e^{-i\theta}}{2 - e^{-i\theta}} = \dfrac{4 - 2e^{-i\theta}}{|2 - e^{i\theta}|^2} = \dfrac{4 - 2e^{-i\theta}}{(2 - \cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2)}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$s = \text{Im }(z) = \text{Im }\left(\dfrac{2}{2-e^{i\theta}}\right)$. Pour chercher la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{z} = 2 - e^{-i\theta}$.

$$z = \frac{2}{2-e^{i\theta}} \cdot \frac{2-e^{-i\theta}}{2-e^{-i\theta}} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{|2-e^{i\theta}|^2} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{(2-\cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2)}.$$

Rappel : $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = \text{Re }^2 z + \text{Im }^2 z = z\bar{z}$;
Pour $z = 2 - e^{i\theta} = 2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; $\quad \text{Re }(z) = 2 - \cos(\theta)$; $\quad \text{Im } z = -\sin(\theta)$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$s = \text{Im } (z) = \text{Im } \left(\frac{2}{2 - e^{i\theta}}\right)$. Pour chercher la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{z} = 2 - e^{-i\theta}$.

$$z = \frac{2}{2 - e^{i\theta}} \cdot \frac{2 - e^{-i\theta}}{2 - e^{-i\theta}} = \frac{4 - 2e^{-i\theta}}{|2 - e^{i\theta}|^2} = \frac{4 - 2e^{-i\theta}}{(2 - \cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2)}.$$

Rappel : $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = \text{Re }^2 z + \text{Im }^2 z = z\bar{z}$;
Pour $z = 2 - e^{i\theta} = 2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; $\quad$ Re $(z) = 2 - \cos(\theta)$; $\quad$ Im $z = -\sin(\theta)$.

Donc, $z = \dfrac{4 - 2e^{-i\theta}}{4 - 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \dfrac{4 - 2e^{-i\theta}}{5 - 4\cos(\theta)} = \dfrac{4}{5 - 4\cos(\theta)} + \dfrac{-2e^{-i\theta}}{5 - 4\cos(\theta)}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$s = \text{Im }(z) = \text{Im }\left(\dfrac{2}{2-e^{i\theta}}\right)$. Pour chercher la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{z} = 2 - e^{-i\theta}$.

$$z = \frac{2}{2-e^{i\theta}} \cdot \frac{2-e^{-i\theta}}{2-e^{-i\theta}} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{|2-e^{i\theta}|^2} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{(2-\cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2)}.$$

Rappel : $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = \text{Re }^2 z + \text{Im }^2 z = z\bar{z}$;

Pour $z = 2 - e^{i\theta} = 2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; Re $(z) = 2 - \cos(\theta)$; Im $z = -\sin(\theta)$.

Donc, $z = \dfrac{4-2e^{-i\theta}}{4-4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \dfrac{4-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)} = \dfrac{4}{5-4\cos(\theta)} + \dfrac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)}$.

$$s = \text{Im } z = \text{Im }\left(\frac{4}{5-4\cos(\theta)} + \frac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)}\right).$$

$\text{Im }\dfrac{4}{5-4\cos(\theta)} = 0$ car $\frac{4}{5-4\cos(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\text{Im}\dfrac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)} = \dfrac{2\sin(\theta)}{5-4\cos(\theta)}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (E_3)$$

$s = \text{Im } (z) = \text{Im } \left(\dfrac{2}{2-e^{i\theta}}\right)$. Pour chercher la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur, i.e. $\bar{z} = 2 - e^{-i\theta}$.

$$z = \frac{2}{2-e^{i\theta}} \cdot \frac{2-e^{-i\theta}}{2-e^{-i\theta}} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{|2-e^{i\theta}|^2} = \frac{4-2e^{-i\theta}}{(2-\cos(\theta))^2 + (-\sin(\theta)^2)}.$$

Rappel : $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = \text{Re }^2 z + \text{Im }^2 z = z\bar{z}$;
Pour $z = 2 - e^{i\theta} = 2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; $\quad \text{Re } (z) = 2 - \cos(\theta)$; $\quad \text{Im } z = -\sin(\theta)$.

Donc, $z = \dfrac{4-2e^{-i\theta}}{4-4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \dfrac{4-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)} = \dfrac{4}{5-4\cos(\theta)} + \dfrac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)}$.

$s = \text{Im } z = \text{Im } \left(\dfrac{4}{5-4\cos(\theta)} + \dfrac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)}\right)$.

$\text{Im } \dfrac{4}{5-4\cos(\theta)} = 0$ car $\frac{4}{5-4\cos(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\text{Im} \dfrac{-2e^{-i\theta}}{5-4\cos(\theta)} = \dfrac{2\sin(\theta)}{5-4\cos(\theta)}$.

Conclusion, $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} = \frac{2 \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!} + \frac{n^2}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n).$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!} + \frac{n^2}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n).$$

Les séries $I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$ et $I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ sont convergentes par le critère d'Alembert.
Donc, la série $\sum u_n$ converge.
Justifier.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!} + \frac{n^2}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n).$$

Les séries $I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$ et $I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ sont convergentes par le critère d'Alembert.
Donc, la série $\sum u_n$ converge.
Justifier.
Même raisonnement dans l'Ex.1 E_9 et dans l'Ex.2, E_5, E_6. Il faut étudier le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\frac{w_{n+1}}{w_n}$. Pour la première partie, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{2n} = \frac{2(n+1)n!}{n!(n+1)2n} = \frac{1}{n}$
$\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Alors, $\sum u_n$ converge.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!} + \frac{n^2}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n).$$

Les séries $I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$ et $I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ sont convergentes par le critère d'Alembert.
Donc, la série $\sum u_n$ converge.
Justifier.
Même raisonnement dans l'Ex.1 E_9 et dans l'Ex.2, E_5, E_6. Il faut étudier le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\frac{w_{n+1}}{w_n}$. Pour la première partie, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{2n} = \frac{2(n+1)n!}{n!(n+1)2n} = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Alors, $\sum u_n$ converge.

Pour la deuxième partie, on a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n!(n+1)} \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

La méthode systématique est de décomposer le numérateur en une combinaison linéaire de $n(n-1)$, n et 1, méthode déjà vue dans l'Exercice 2.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

La méthode systématique est de décomposer le numérateur en une combinaison linéaire de $n(n-1)$, n et 1, méthode déjà vue dans l'Exercice 2.
Plus rapidement, ici, on peut dire,

$$I_1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

Rappel, $n! = n(n-1)!$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} \qquad (E_4)$$

La méthode systématique est de décomposer le numérateur en une combinaison linéaire de $n(n-1)$, n et 1, méthode déjà vue dans l'Exercice 2.
Plus rapidement, ici, on peut dire,

$$I_1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

Rappel, $n! = n(n-1)!$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e. \end{aligned}$$

D'où, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e + 2e = 4e.$

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)|r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

1**ère** **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)|r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

On peut conclure après le critère de d'Alembert que la série est absolument convergente.

Exercice 5

Avant de corriger le dernier exercice de la section "Exercice 5", on va donner une prémisse. Montrons que la série suivante est convergente et calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)|r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

On peut conclure après le critère de d'Alembert que la série est absolument convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** On calcule la somme de la série.

On veut montrer que $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice 5

$2^{\textbf{ère}}$ **étape :** On calcule la somme de la série.

Nous allons montrer que $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice 5

2$^{\text{ère}}$ **étape :** On calcule la somme de la série.

Nous allons montrer que $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Pour cela écrivons : $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = 0 + r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, (puisque pour $n = 0$ le terme est nul.)
On peut l'écrire donc,

Exercice 5

2$^{\text{ère}}$ **étape :** On calcule la somme de la série.

Nous allons montrer que $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ avec $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Pour cela écrivons : $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = 0 + r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, (puisque pour $n = 0$ le terme est nul.)

On peut l'écrire donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n r = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = r\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} + r\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1}$$

(En fait, $r\cdot r^0 + r\cdot r^1 + r\cdot r^2 + \cdots + r\cdot 0 + r\cdot 1\cdot r + r\cdot 2\cdot r^2 + \cdots = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^2 + 2r^3 + \cdots$ $= r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$).

Ou bien aussi, $s = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = r\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = r\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)r^m$ (changement d'indice),

$s = r\sum_{m=0}^{\infty} r^m + r\sum_{m=0}^{\infty} mr^m$. Donc, $s = \frac{r}{1-r} + rs$.

D'où le résultat, en résolvant cette équation en s : $s = \frac{r}{1-r} + rs$.

$$s - rs = \frac{r}{1-r} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{r}{1-r}\frac{1}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

1$^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad \textit{avec} \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

On peut conclure pour le critère de d'Alembert que la série est absolument convergente et donc aussi convergente.

Exercice 5

Maintenant nous sommes prêts pour le dernier exercice (E_5).
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on montre la convergence avec les outils dont nous disposons.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$ avec $|r| < 1$. On peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |r| \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

On peut conclure pour le critère de d'Alembert que la série est absolument convergente et donc aussi convergente.

$2^{\text{ère}}$ **étape :** On calcule la somme de la série. On s'inspire du calcul de la série plus simple vue tout à l'heure $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$, où on a montré que $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

Posant $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = 0 + r + 4r^2 + 9r^3 + \cdots$, on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1} = r \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 r^m = r \sum_{m=0}^{\infty} \left(m^2 + 2m + 1\right) r^m.$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \quad avec \quad |r| < 1 \qquad (E_5)$$

Posant $S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = 0 + r + 4r^2 + 9r^3 + \cdots$, on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1} = r \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 r^m = r \sum_{m=0}^{\infty} \left(m^2 + 2m + 1 \right) r^m.$$

D'où

$$S = r \sum_{m=0}^{\infty} m^2 r^m + r \sum_{m=0}^{\infty} 2m r^m + r \sum_{m=0}^{\infty} r^m = rS + 2rs + r \frac{1}{1-r}.$$

Ainsi (en résolvant cette équation en S),

$$(1-r)S = 2rs + r\frac{1}{1-r} = 2\frac{r^2}{(1-r)^2} + \frac{r}{1-r} = r\frac{r+1}{(1-r)^2}.$$

Conclusion : $S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = r\frac{r+1}{(1-r)^3}$, avec $|r| < 1$.