Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MIA

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 1er avril 2010

Documents et téléphones interdits, calculatrices inutiles.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les cinq parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (6 points)

a) Pour un code en bloc de matrice génératrice G, comment appelle-t-on la matrice H telle que $GH^T = 0$? A quoi sert cette matrice ?

b) Qu'est-ce que le seuil de masquage d'un son et comment est-il utilisé pour le codage perceptif ?

c) Un son autour de 2 kHz, quantifié sur 10 bits (en virgule fixe) est joué à 50 dB. Le bruit de quantification est-il audible ? Que se passe-t-il si le niveau est porté à 70 dB ? (justifier). Rappel : le rapport signal à bruit de quantification, en dB, vaut $6k$, où k désigne le nombre de bit par échantillon.

d) Quelles sont les deux étapes de la numérisation d'un son ? Laquelle peut être sans perte d'information et à quelle condition ?

e) Quel est le rôle du filtre adapté dans un récepteur ? Quel est son effet collatéral ?

f) Dans une transmission en bande de base, le signal reçu à un instant t est-il une variable aléatoire discrète ou continue ? (expliquer)

2 Exercices

2.1 Détection de symboles (4 points)

Les symboles utilisés dans les transmissions par modulation OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) peuvent être représentés par une constellation dans un espace multi-dimensionnel. Les points de la figure 1 correspondent aux 8 symboles d'une modulation OFDM à 3 porteuses, ils constituent les 8 sommets d'un cube.

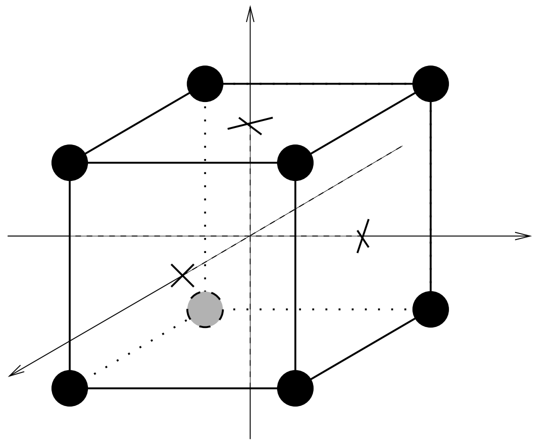

FIG. 1 – Constellation d'une modulation OFDM à 3 porteuses.

Le bruit de la liaison provoque un déplacement aléatoire du point reçu par rapport à la position du symbole émis. Comme le symbole détecté est celui le plus proche du point reçu, une erreur survient dès que le déplacement est trop important. On supppose que lors de l'émission d'un symbole, les seuls risques d'erreur de détection sont liés à une confusion avec un de ses plus proches voisins (des déplacements plus importants sont trop peu probables). Pour l'émission d'un symbole S_i, la probabilité de confusion avec un de ses plus proches voisins S_j est notée :

$$\mathrm{P}(R_j|S_i) = p$$

où R_j désigne l'événement "détection de S_j en réception".

a) Calculer $\mathrm{P}(\overline{R_i}|S_i)$ pour chaque symbole de la constellation. ($\overline{R_i}$ signifie "détection d'un symbole différent de S_i).

b) Définir de manière ensembliste l'événement erreur. Calculer la probabilité d'erreur P_e dans le cas où les symboles sont équiprobables.

2.2 Codage de source (3 points)

Soit une source ternaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(x_1) = \mathrm{P}(x_2) = p$ et $\mathrm{P}(x_3) = 1 - 2p$, avec $p < 1/3$. Cette source a un débit d'information donné, indépendant du codage, D_I. Ce débit peut s'exprimer : $D_I = H(X)/\overline{T}$, où $H(X)$ désigne l'entropie de X et $\overline{T}$ la durée moyenne d'un symbole.

a) Construire un code de Huffman pour X.

b) Comparer le débit binaire D (en nombre d'éléments binaire par seconde) nécessaire avec ce codage au débit D' que nécessiterait un code de longueur fixe, notamment pour p faible.

2.3 Codage de canal : codes en bloc (4 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(5,2)$ défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est le pouvoir de correction de ce code ?

b) Soit une transmission sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p \ll 1$.
- Sans codage, quelle est la probabilité qu'un mot de deux éléments binaires soit erroné ?
- Avec codage et **après correction**, quelle est la probabilité d'erreur par mot codé ?

Vous ferez des calculs approchés en tenant compte du fait que $p \ll 1$. Des formules éventuellement utiles sont en annexe.

Comparez les deux probabilités d'erreur pour $p = 10^{-2}$.

2.4 Codage de canal : codes convolutifs (3 points)

La figure 2 représente le diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2,1,3)$.

a) Quelle est la sortie associée à l'entrée 01011 ?

b) Supposons que l'on code une longue séquence de 1. Sans faire de diagramme en treillis, montrer que 2 erreurs lors de la transmission suffisent à produire une infinité d'erreurs en réception lors du décodage.

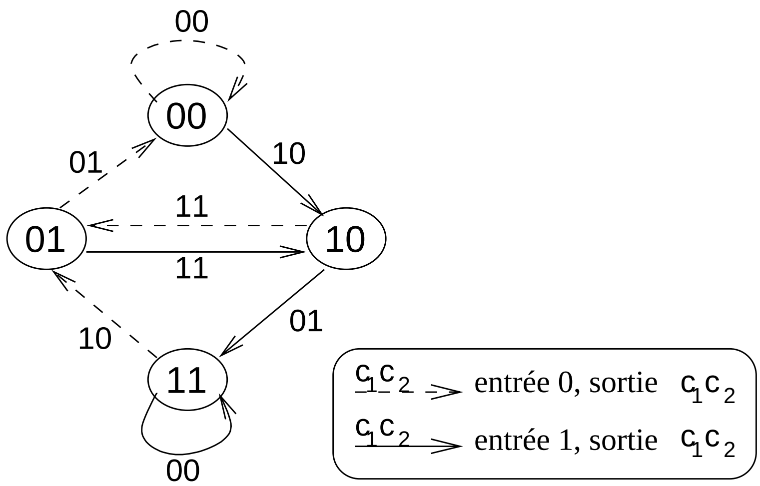

FIG. 2 – Diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2,1,3)$.

3 Annexes

Codes correcteurs

Pour un code en bloc linéaire de distance minimale $d_{\min}$, le pouvoir de détection vaut $d_{\min} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$.

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Entropie

L'entropie d'une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$, est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

Formules de maths

$$\begin{aligned}
(1-x)^2 &= 1 - 2x + x^2 \\
(1-x)^3 &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
(1-x)^4 &= 1 - 4x + 6x^2 - 4x + x^4 \\
(1-x)^5 &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5
\end{aligned}$$