Théorie des Langages – Feuille n° 1
ALPHABETS, LANGAGES ET GRAMMAIRES

Exercice 1 - On considère l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. On rappelle que $|w|$ représente la longueur du mot w, et ϵ représente le mot vide. Soit deux mots $w = ababc$ et $q = caba$.

1. Calculez w^0, w^1 et w^2
2. Calculez wq^2w
3. Calculez $|w|_{ab}$, $|(ab)^4|$ et $|(ab)^4|_{aba}$
4. Donnez les préfixes, les préfixes propres, les suffixes et les suffixes propres de q
5. Donnez le miroir du mot wq.

Exercice 2 - Soit l'alphabet $X = \{a, b\}$.

1. Montrez qu'il ne peut y avoir de mot $w \in X^*$ tel que $aw = wb$.
2. Quels sont les deux langages dont la fermeture par l'étoile donne le langage uniquement composé du mot vide ϵ ?
3. Les mots suivants sont-ils générés par le langage $(ab)^*b^*$: ϵ, a, aa, ba, $abbb$,$ababb$, $baba$? Même question avec le langage $(ab^*)b^*$.

Exercice 3 - On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$. Donner les langages correspondant aux propriétés suivantes :

1. Les mots qui commencent par ab ;
2. Les mots qui terminent par bb ;
3. les mots qui ne contiennent aucun b ;
4. les mots qui ne contiennent pas ab ;
5. les mots qui contiennent au moins un a ;
6. les mots qui ne commencent pas par ba ;
7. les mots de longueur paire

Exercice 4 - On considère l'alphabet $X = \{a, b, c\}$.

1. Calculez les ensembles X^0, X^1 et X^2
2. Pour chacun des ensembles suivants, caractérisez L_1^*, et calculez $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$, $L_2.L_1$

$$\begin{array}{lll} L_1 = \{ab, bb\} & \text{et} & L_2 = \{a, ab, bbc, ca\} \\ L_1 = \{\epsilon\} & \text{et} & L_2 = \{bbc, ca\} \\ L_1 = \emptyset & \text{et} & L_2 = \{bbc, ca\} \\ L_1 = \{ab, bb\} & \text{et} & L_2 = X^* \end{array}$$

Exercice 5 - On considère l'alphabet $X = \{a, b\}$, et les langages L_1 et L_2 suivants :

$$L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 = \{b^n a^n | n \in \mathbb{N}\}$$

Calculez $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1.L_2$, L_1^2.

Exercice 6 - On considère des langages sur un alphabet quelconque.

1. Démontrez les propriétés suivantes :
   (a) $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L.L_1 \subseteq L.L_2$
   (b) $L.(L_1 \cup L_2) = L.L_1 \cup L.L_2$
2. Montrez que $L.(L_1 \cap L_2) \subseteq L.L_1 \cap L.L_2$. A l'aide d'un contre-exemple, montrez que l'égalité n'est pas forcément atteinte.

Exercice 7

1. Est-ce que les éléments suivants sont des monoïdes ?
   (a) $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$
   (b) $\langle \mathbb{N}, -, 0\rangle$
2. Est-ce que $\langle 3\mathbb{N}, +, 0\rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$?
3. Soit $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \ impair\}$. Est-ce que $\langle B, +, 0\rangle$ est un sous-monoïde de $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$?

Exercice 8 - Soient les langages L_1, L_2, L_3 et L_4 suivants construits sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Montrer que ces 4 langages sont tous deux à deux différents.

- $L_1 = (a + b)^*ca^*b^*$
- $L_2 = a^*b^*c(a + b)^*$
- $L_3 = (a^* + b^*)ca^*b^*$
- $L_4 = \{(a + b)^n ca^m b^n,\ n, m \in \mathbb{N}\}$

Exercice 9 - Soient les langages L_1, L_2 et L_3 construits sur l'alphabet $X = \{a, b\}$. On rappelle que $(a + b) = \{a\} \cup \{b\}$.

$$L_1 = \{a^n b(a + b)^n, n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 = \{(a + b)^n ba^n, n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_3 = \{(a + b)^n b(a + b)^n, n \in \mathbb{N}\}$$

1. Montrez que les langages L_1, L_2 et L_3 ne sont pas égaux
2. Soit $L_4 = \{(a + b)^m ba^n, m, n \in \mathbb{N}\}$. Montrez que $L_2 \neq L_4$
3. Donnez les grammaires qui engendrent L_2 et L_4

Exercice 10 - Soit la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$, avec $V = \{a, b, S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ et $P = \{S \to aSa; S \to bSb; S \to \epsilon\}$.

1. Soit $G' = \langle V, \Sigma, P', S\rangle$, avec $P' = P \cup \{S \to SS\}$. Montrez que $aabaab \in \mathcal{L}(G')$. Montrez ensuite que G' est ambigüe.
2. Quel est le langage engendré par G ? Démontrez
3. Pourquoi G n'est pas ambigüe ?

Exercice 11 - Soit la grammaire $G = \langle V, \Sigma, P, A\rangle$, avec $V = \{a, b, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ et $P = \{A \to aA|bB; B \to b|bB\}$.

1. De quel type est la grammaire G ?
2. Construisez l'arbre de dérivation de profondeur 4 de G.
3. A l'aide des règles de production et des mots dérivés de l'arbre de dérivation, déduisez quel est le langage généré par G (écriture en compréhension) ?