MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

NUMÉRATION LOGIQUE

C1 : Histoire des nombres

Nicole VINCENT

Organisation

- Cours 12 h ; TD 12 h
  1 séance de 2 heures aujourd'hui
  Puis 10 séances de 1 heure chaque semaine
- 9 groupes de TD
  2 heures/semaine tous les quinze jours
  commencent la semaine prochaine ou la suivante
- Contrôle
  - Contrôle continu
    - 3 CC : CC1 : 24 février, CC2 : 23 mars et CC3 : fin avril
  - Pas d'examen
  - Note finale : [CC1+CC2+CC3]/3

2

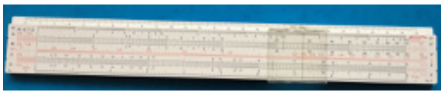
Objectifs du module

- Comprendre les principes de la **numération**, les représentations des nombres en machine et les limites de ces représentations
- Comprendre la **logique** des propositions et ses applications aux déductions et circuits logiques

3

Pour aider à calculer

- Boulier
- Règle à calcul

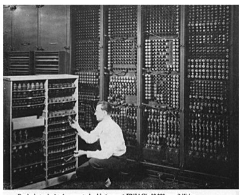


4

Les outils

- Machine à additionner, à multiplier,
B. Pascal 1642 (Pascaline)
- Machine électronique

ENIAC, Univ. de Pennsylvanie (1946-55), 30 tonnes sur 167 m2.
Nombres signés de 10 chiffres : 5:000 additions simples/seconde,
357 multiplications/sec,
38 divisions/sec. (source Wikipedia).



Replacing a bad tube meant checking among ENIAC's 19,000 possibilities.

5

Les outils

- Boulier
- Règle à calcul
- Machine de Pascal (1642)
- Machine électronique (1946)
- Calculatrice (1972)
- Ordinateur individuel (1978)

6

La naissance des nombres

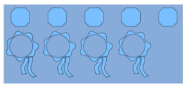
- La notion de nombre : un, deux, . . . ? beaucoup !
- Sans aide “technologique”, les animaux, homme compris, ne peuvent pas vraiment compter au-delà de 6 ou 7... (cf expérience des oiseaux dans la tour)
- Dans une ancienne tribu brésilienne, on compte jusqu’à 2! Tous les nombres au dessus sont nommés ”booltha” (beaucoup).
- Ordinal s’oppose à cardinal :
  - l’ordinal ordonne premier, deuxième, …
  - Le cardinal est une quantité pure : un, deux, …

Fondements théoriques

7 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Compter ≠ Comparer

- Sans savoir compter, l’homme sait si deux collections ont la même taille, grâce à la technique d’appariement d’objets :



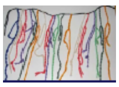
- Pour compter, on peut faire une entaille sur un bâton
  Permet de mesurer les variations d’un jour sur l’autre

Représentation des nombres

8 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Dénombrement – Matérialisation d’un entier

- faire des entailles sur un os, sur une branche ou des nœuds sur des cordelettes, . . .
- utiliser un repère corporel évident : la main ou les deux mains, les pieds, la tête, . . .



Syntaxe pour écriture et lecture non ambigüe

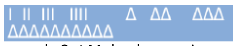
9 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Introduction de symboles : représentation

- Des ”noms” et symboles apparaissent pour les nombres
- Concepts abstraits, séparés des objets dénombrés.
  - Symbolisations figuratives
  - Symbolisations verbales
  - Symbolisations écrites

noms intuitifs (main) ou mots détachés de l’intuition (cinq)

Notations fondées sur l’intuition visuelle



Utilisation de l’initiale du nom du nombre, par exemple C et M chez les romains

Chiffres : symboles détachés de toute intuition visuelle directe : 3, 5, 6, . . .

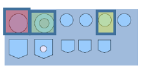
10 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Exemple de représentation

- Fin du IVème millénaire avant notre ère en Mésopotamie on trouve des marques faites en creux dans l’argile

Type additif

- Exemple :



3600+36000+10+10+10+10+60+600+1+1+1 = 40303

11 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Principe de la représentation

- Les symboles de numération correspondent à des multiplications entre eux par 6 ou par 10

60 = 6 10 ; 600 = 10 60 ; 3600 = 6 600 ; 36000 = 3600 10 = 60 60

- Un nombre entier est décomposé en multiples de 36000,
  le reste en multiples de 3600
  puis le reste en multiples de 600, . . .

La position des symboles n’a aucune importance

12 — MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Notion de base

- Selon les civilisations, le nombre clé de la numération a varié :
  - 60 pour les Sumériens
  - 5 en Amérique du Sud, en Afrique
  - 10 chez les Chinois et les Indiens
  - 12 en Europe dans le système anglais :
    12 pouces dans un pied, 12 pence dans un shilling
  - 20 chez les Mayas, au Japon, en Europe, . . . (quatre-vingt)
- actuellement
  - Le 10 dans le système décimal
  - le 60 dans le nombre de minutes/secondes et la mesure d'angles en degrés : 360°

13

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Opérations : Addition

- Le nombre de symboles est réduit et on répète autant de fois que nécessaire . . .
- Il suffit de faire une juxtaposition
- Fastidieux pour les grands nombres

Exemple :
notation en chiffres romains où l'on a aussi une variante soustractive.

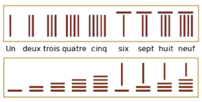
MMMCCLVIII = 3258 ; MMMCDXLIV = 3444

14

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Principe de position

- Principe multiplicatif
- Apparu dans des cultures différentes :
  - A Babylone (II ème millénaire avant notre ère)
  - En Chine (Ier siècle avant notre ère)
  - En Inde (vers le Vème siècle ap. JC)
  - Chez les Mayas (IVème au IXème siècle ap. JC)



Principe multiplicatif

exemple 1987 s'écrit
2026 s'écrit

Le blanc/vide pour signifier l'absence, i.e. le "0"

15

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Utilisation de la base 10

- Il y a dix chiffres de 0 à 9,
  on ajoute 1 à gauche du zéro pour représenter dix objets
- On obtient ainsi 10, . . . , 99, ensuite 100, . . . , 999, . . .

Le nombre "7659" est décomposé en
7 1000 + 6 100 + 5 10 + 9
écrit au départ
7 1000 6 100 5 10 9

- Petit à petit, la notation explicite du rang des unités disparaît

16

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Numération 'moderne'

- L'Inde berceau de la numération moderne
- Transmise à travers les arabo-musulmans jusque dans l'occident chrétien vers le XIème siècle.
- On parle de " chiffres arabes " usage établi vers le XVème siècle.
- Les savants arabo-musulmans ont développé les mathématiques, en particulier le calcul algébrique i.e. les techniques de réduction des calculs.

17

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Unités de mesures en informatique

- Un **Bit** (abréviation de **BI**nary digi**T**)

Plus petite quantité d'information, ne prend que deux valeurs
0 ou 1,
"faux" ou "vrai".

Pour représenter physiquement une information binaire on peut utiliser la polarisation magnétique, le courant électrique, l'intensité lumineuse, . . .

- Un **Octet** (byte en anglais) est composé de 8 bits :

0 1 1 0 0 0 1 0

Les octets sont utiles pour exprimer des quantités de données.

Un octet peut représenter 2^8 = 256 informations différentes

18

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE Sciences Université de Paris

Unités de mesures en informatique

- En informatique, les préfixes kilo , méga , giga ,

$2^{10} = 1024$; $2^{20} = 2^{10} . 2^{10}$; $2^{30} = 2^{10} . 2^{10} . 2^{10}$

et non pas les puissances de 10 ($10^3 = 1000$, $10^6 = 10^3.10^3$,. . .) utilisées dans le Système international d'unités (SI).

1 Kilooctet (Ko)	vaut $2^{10} = 1024$ octets
1 Mégaoctet (Mo)	vaut 1024 Ko, soit 2^{20} octets
1 Gigaoctet (Go)	vaut 1024 Mo, soit 2^{30} octets

- Attention : ceci est en contradiction avec les recommandations de la Commission électrotechnique internationale (IEC) qui préconise depuis 1999 l'utilisation des préfixes binaires !

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris

Préfixes binaires et préfixes décimaux

Préfixes binaires (préfixes CEI)

Nom	Symb.	Facteur
kibi	Ki	$2^{10} = 1\,024$
mébi	Mi	$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$
gibi	Gi	2^{30}
tébi	Ti	2^{40}
pébi	Pi	2^{50}
exbi	Ei	2^{60}
zébi	Zi	2^{70}
yobi	Yi	2^{80}

Préfixes décimaux (préfixes SI)

Nom	Symb.	Facteur
kilo	k	$10^3 = 1\,000$
méga	M	$10^6 = 1\,000\,000$
giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
téra	T	$10^{12} = 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3$
péta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}

- Les préfixes binaires sont préconisés pour les télécommunications et l'électronique. Mais attention, de façon légale on a

$$1\text{ko} = 10^3 \text{ octets, } 1\text{Mo} = 10^6 \text{ octets et } 1\text{Go} = 10^9 \text{ octets.}$$

- Les préfixes décimaux sont utilisés pour les mesures physiques (distance, poids,. . .)

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Sciences
Université de Paris