Corrigé Examen 2017

Exercice 1

1. C'est l'ensemble des sommets v tels qu'il existe un chemin orienté de u à v, appelés aussi descendants de u.

2. C'est l'ensemble des sommets v tels qu'il existe un chemin orienté de v à u, appelés aussi ascendants de u.

3. Un sommet v est dans la composante fortement connexe de u si et seulement si il existe un chemin orienté de u à v et un chemin orienté de v à u.

Il suffit donc de faire les opérations suivantes :

a) déterminer l'ensemble A des descendants de u à l'aide d'un parcours en profondeur

b) déterminer l'ensemble B des ascendants de u à l'aide d'un parcours en profondeur sur le graphe aux arêtes inversées.

c) déterminer $A \cap B$

4. L'étape a) est de complexité $\Theta(m)$

L'étape b) également (l'inversion des arêtes est aussi en $\Theta(m)$)

L'étape c) est de complexité $\Theta(n \log n)$

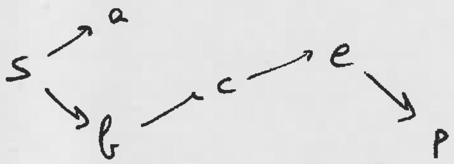
Le tout est donc de complexité $\Theta(m + n\log n)$

(c'est-à-dire $\Theta(m)$ si $m \geq n\log n$ ou $\Theta(n\log n)$ si $m < n\log n$)

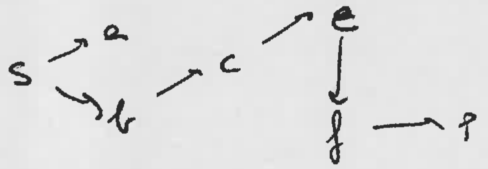
Exercice 2

1. On applique l'algorithme max-flow min-cut en partant du flux f.

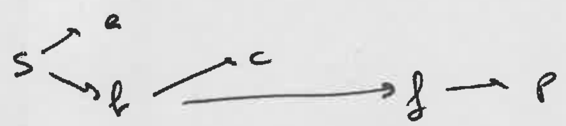
En considérant que les DFS découvrent les sommets a à g par ordre alphabétique, on obtient les DFS et les chemins non saturés successifs suivants :



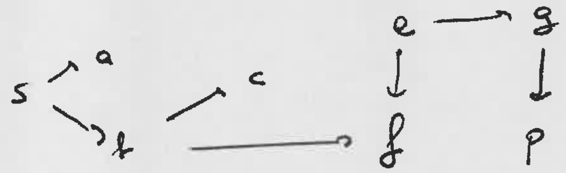
sbcep est de saturation 1



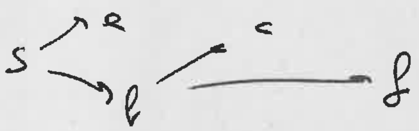
sbcefp ———— 1



sbfp ———— 2

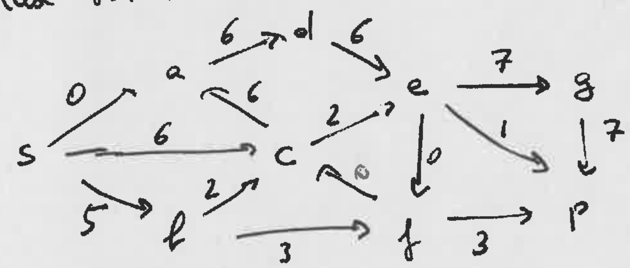


sbfegp ———— 1



p n'est plus atteint, l'algorithme s'arrête.

Le flux total est de valeur 11 :



De plus, (ce, ad, fp) est une coupe de capacité 11, ce flux est donc bien maximal.

NB : Suivant l'ordre dans lequel vous avez considéré les sommets dans les DFS, vous pourrez avoir des flux différents (mais de même valeur 11)

2. Il ne peut pas y avoir de flux de valeur 6 qui n'emprunte aucune des arêtes empruntées par f. En effet, en lui ajoutant f, on obtiendrait un flux de valeur 12, ce qui contredirait le fait que le flux trouvé en 1. était maximal.

Pour trouver la valeur maximale du second flux, il faut réappliquer max-flow min-cut sur le graphe privé des arêtes en gras. On retrouve un flot de valeur 5 (celui trouvé dans ma rédaction de la question 1.)

Exercice 3

1. Pour déterminer S, il faut lancer un DFS enraciné en s qui parcourt dans le sens direct les arêtes non saturées et dans le sens indirect les arêtes avec un flux non nul. C'est exactement le principe de l'algorithme max-flow min-cut.

Pour déterminer T, il faut lancer un DFS enraciné en p qui parcourt dans le sens indirect les arêtes non saturées et dans le sens direct les arêtes avec un flux non nul.

Comme il s'agit de deux DFS, la complexité est en $\Theta(m)$

2. Soit e une arête.

Supposons que e appartient à une coupe minimale K. Le flot maximal est alors de valeur $cap(K)$. Or, diminuer la capacité de e diminue $cap(K)$. Le nouveau flot maximal est donc de valeur inférieure au précédent. e est donc critique downstream.

Supposons que e n'appartient pas à une coupe minimale. En baissant suffisamment peu la capacité de e (de 1 si les capacités sont entières), on ne change pas la valeur de la coupe minimale, donc la valeur du flot maximal. e n'est donc pas critique downstream.

3. Supposons que (u,v) est critique upstream. Alors, augmenter la capacité de e entraine l'existence d'un chemin non saturé de s à p passant par e (sinon on ne pourrait pas augmenter le flux). Il existe par conséquent un chemin non saturé de s à u, donc $u \in S$, et un chemin ~~non~~ saturé de v à p, donc $v \in T$.

4. Inversement, si $u \in S$ et $v \in T$, e est clairement critique upstream puisque augmenter la capacité de e crée alors un chemin non saturé.

D'après la question 1, il suffit donc de

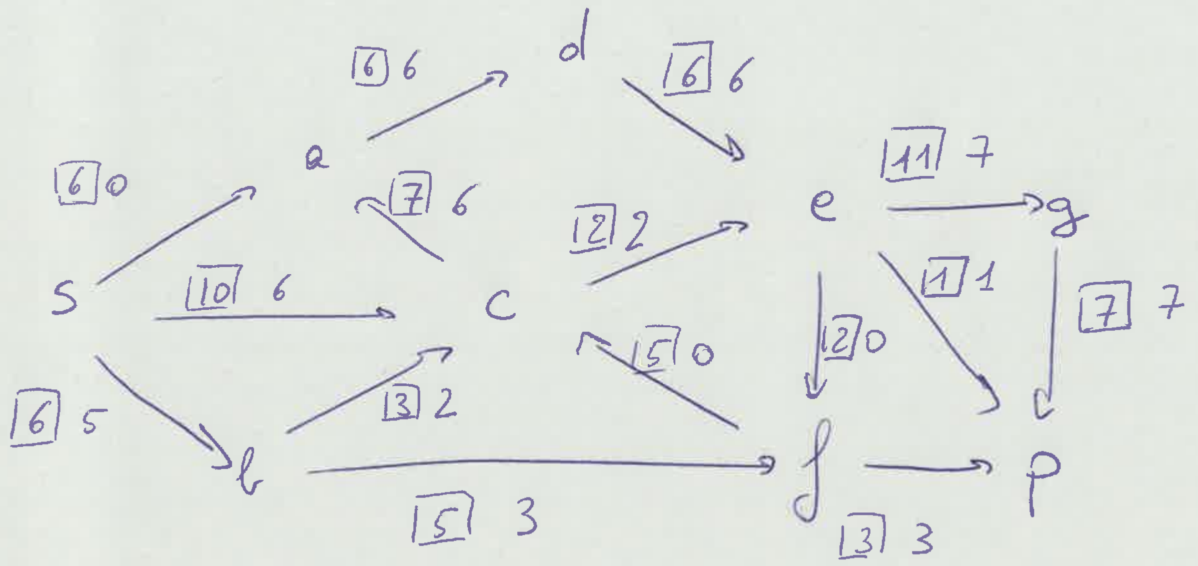
a) déterminer S à l'aide d'un DFS tel que décrit en question 1.

b) —— T —— DFS ——

c) déterminer les arêtes de S à T

Le flux maximal trouvé dans l'exercice précédent

était (les capacités sont □)



On a alors $S = \{a, b, c, f\}$

$T = \{p\}$

La seule arête critique upstream est donc l'arête fp.

Exercice 4

1. Les composantes fortement connexes du graphe sont :

- $\{A\}$. Une arête en sort, A est donc transient.
- $\{D\}$. Une arête en sort, D est donc transient.
- $\{BG\}$. Aucune arête n'en sort, B et G sont récurrents.
- $\{CEF\}$. Aucune arête n'en sort, C, E et F sont récurrents.

2.
$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ E \\ F \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.
$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} y + \frac{1}{4} z = x \\ \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} y + \frac{3}{4} z = y \\ \frac{1}{2} x = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + z = 4x \\ 2x + 3y + 3z = 4y \\ 2z = x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} x \\ y = \frac{5}{2} x \\ 2x + \frac{3}{2} x = \frac{5}{2} x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} x \\ y = \frac{5}{2} x \end{array} \right.$$

Les solutions de ${}^tX = {}^tXP$ sont donc les vecteurs de la forme $\left(x, \frac{5}{2} x, \frac{1}{2} x\right)$

4. La chaîne réduite à (C, E, F) est une chaîne irréductible ($\{C, E, F\}$ est une composante fortement connexe) et apériodique (il y a une boucle sur E).

La mesure X_n de la chaîne après n pas, quelle que soit la mesure X_0 de départ, tend donc vers l'unique mesure invariante.

Or, d'après 3., cette mesure est de la forme

$$\left(x, \frac{5}{2}x, \frac{1}{2}x\right)$$

Comme il s'agit d'une mesure,

$$x + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x = 1$$

$$4x = 1$$

La mesure invariante est donc $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

En d'autres termes, quelle que soit la position de départ, un marcheur aléatoire aura, pour un nombre de pas assez grand, une probabilité $\frac{1}{4}$ d'être en A, $\frac{5}{8}$ d'être en B et $\frac{1}{8}$ d'être en C.