Traitement Numérique des Données
M1 – INF 2163
AIDN: Applications Interactives et Données Numériques

Transformée de Fourier discrète

Sylvie Gibet

1

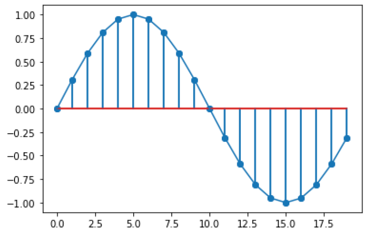
1

Échantillonnage - rappel

2

2

Rappels – sinusoide de fréquence f_0



Avec T_0 : période du signal = $1/f_0$

f_0 : fréquence fondamentale f_s =

t : vecteur temporel

ω : phase

$$\omega = 2 . \pi . f_0$$

3

3

Théorie de l'échantillonnage

D'après le théorème de Shannon-Nyquist, un signal peut être échantillonné à une fréquence supérieure ou égale à 2 fois la fréquence maximale de ce signal.

$$f_s >> 2 \text{ x } f_{max}$$

4

Séries de Fourier
Rappels

5

5

Série de Fourier (résumé)

Une **fonction périodique** s(t) qui satisfaire les **conditions de Dirichlet** peut être représentée sous la forme d'une série de Fourier, avec des termes reliés d'un point de vue harmonique (termes sinus/cosinus)

6

Série de Fourier (rappels)

- Soit un signal périodique réel : s(t) = s(t + kT), T période fondamentale
- Alors il existe une décomposition fondamentale en série de Fourier

synthèse

$$(1) \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

7

7

Série de Fourier (rappels)

- Avec les a_k et b_k : coefficients de Fourier

analyse

$$(2) \quad \begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(\frac{2\pi kt}{T})dt \\ b_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(\frac{2\pi kt}{T})dt \\ \dfrac{a_0}{2} \quad \textit{composante continue} \end{cases}$$

8

8

Série de Fourier discrète

- PASSAGE AU DISCRET

On peut transformer les coefficients de la série de Fourier **continue** aux coefficients de la série de Fourier **discrète** en faisant les substitutions suivantes :

- $t \longrightarrow nT_s$ T_s : période d'échantillonnage
- $s(t) \longrightarrow s[nT_s]$ le signal est échantillonné

9

9

Série de Fourier discrète (rappels)

- Soit un signal périodique réel : s(t) = s(t + kT), T période fondamentale
- Alors il existe une décomposition fondamentale en série de Fourier

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

synthèse

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n].\cos(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$b[k] = \sum_{k=0}^{N-1} s[n]\sin(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$c[k] = a[k] - j.b[k]$$

analyse

10

10

Série de Fourier discrète

- On a :

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n].\cos(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$b[k] = \sum_{k=0}^{N-1} s[n]\sin(\frac{2\pi kn}{N})$$

$$c[k] = a[k] - j.b[k]$$

- Ou encore :

$$\boxed{c[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n].e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}}$$

On regroupe les coeficients a_k et b_k en un seul coeficient c_k

11

11

Université Bretagne Sud

Transformée de Fourier

12

12

TF - Un peu d'histoire

- Prédictions astronomiques par Babyloniens/Egyptiens probablement grâce à des sommations trigonométriques
- 1969 : Newton
  - notion de spectre de lumière (*spectre* = fantôme) mais ne découvre pas la notion de "fréquence" (théorie *corpusculaire* & mais pas encore de théorie ondulatoire).

13

13

TF - Un peu d'histoire

- **18ème siècle : deux problèmes non résolus**
  - → <u>Les orbites des corps célestes </u>: Lagrange, Euler & Clairaut approximent les données d'observation par des combinaisons linéaires de fonctions périodiques. Clairaut,1754 (!) première formule de TFD.
  - → <u>Les cordes vibrantes</u>: Euler décrit les cordes vibrantes grâce à des sinusoïdes (équation d'ondes). **MAIS** le consensus est que les sommes de sinusoïdes représentent seulement des courbes lisses, donc grosse limitation ...

14

14

TF - Un peu d’histoire

- **1807 :** Fourier présente son travail sur la conduction de la chaleur $\Rightarrow$ l’analyse de Fourier est née.
  - → <u>Equation de diffusion</u> $\Leftrightarrow$ série (infinie) de sinus & cosinus. Enorme critique de la part de ses pairs, 1822 (*“Théorie Analytique de la chaleur”*).
- **19ème / 20ème siècle** : deux voies pour l’analyse de Fourier
  - Le Continu
  - Le Discret.

15

15

TF - Un peu d’histoire

- **Le CONTINU**
  - Fourier étend l’analyse à des fonctions arbitraires (Transformation de Fourier).
  - Dirichlet, Poisson, Riemann, Lebesgue attaquent la convergence des SF.
  - D’autres variantes naissent en fonction des besoins (ex.: TF à court terme – analyse de la parole).
- **Le DISCRET : méthode de calcul rapide (FFT: Fast Fourier Transform)**
  - **1805** - Gauss, 1ère utilisation de la FFT (manuscrit en Latin oublié!!! Publié en 1866).
  - **1965** - IBM Cooley & Tukey “redécouvrent” l’algorithme de la FFT (*“An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”*).
  - raffinement de l’algorithme de FFT pour la plupart des ordinateurs.

16

16

Transformée de Fourier

- Il existe plusieurs termes pour définir la transformée de signaux continus et discrets
  - Séries de Fourier (SF) : s'applique aux signaux continus périodiques – produit un spectre discret
  - Transformée de Fourier (TF) : s'applique aux signaux continus apériodiques – produit un spectre continu apériodique
  - Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) : s'applique aux signaux discrets apériodiques – produit un spectre continu périodique
  - Transformée de Fourier discrète (TFD) : s'applique aux signaux discrets apériodiques – produit un spectre discret périodique
  - Séries de Fourier discrète (SFD) : sert d'approximation aux coefficients de la SF

17

17

Transformée de Fourier

- Il existe plusieurs termes pour définir la transformée de signaux continus et discrets
  - Séries de Fourier (SF) : s'applique aux signaux continus périodiques – produit un spectre discret
  - Transformée de Fourier (TF) : s'applique aux signaux continus apériodiques – produit un spectre continu apériodique
  - Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) : s'applique aux signaux discrets apériodiques – produit un spectre continu périodique
  - Transformée de Fourier discrète (TFD) : s'applique aux signaux discrets apériodiques – produit un spectre discret périodique
  - Séries de Fourier discrète (SFD) : sert d'approximation aux coefficients de la SF

18

18

Transformée de Fourier discrète

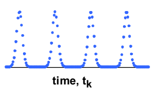
- La transformée de Fourier discrète est une méthode qui permet de décrire un signal discret en fonction de la fréquence
  - Applicable aux signaux discrétisés dans le temps ou dans l'espace (exemple du son et de l'image)
  - Même forme que la SFD mais applicable aux signaux apériodiques
  - La seule transformée qui s'applique aux problèmes de traitement numérique des données est la TFD : transformée de Fourier Discrète

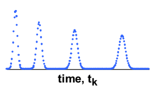
19

19

Transformée de Fourier discrète

Signal temporel d'entrée | **Spectre fréquentiel**





Discret
- Périodique *(période T)* — SFD ** Discret: $$\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$
- Apériodique
  - TFTD Continu: $$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\cdot e^{-j2\pi f n}$$
  - TFD ** Discret: $$\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

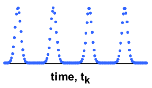
** *Calculée via FFT*

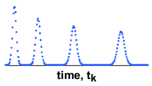
Note: $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi/T$, $s[n]=s(t_n)$, N = Nombre d'échantillons

20

Transformée de Fourier discrète

Signal temporel d'entrée — **Spectre fréquentiel**





Discret
- Périodique *(période T)* — SFD ** — Discret — $\boxed{\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}$
- Apériodique
  - TFTD — Continu — $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\cdot e^{-j2\pi f n}$
  - TFD ** — Discret — $\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$

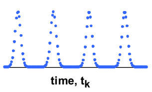
** *Calculée via FFT*

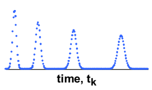
Note: $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi/T$, $s[n]=s(t_n)$, N = Nombre d'échantillons

21

Transformée de Fourier discrète

Signal temporel d'entrée — **Spectre fréquentiel**





Discret
- Périodique *(période T)* — SFD ** — Discret — $\boxed{\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}$
- Apériodique
  - TFTD — Continu — $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\cdot e^{-j2\pi f n}$
  - TFD ** — Discret — $\boxed{\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}$

** *Calculée via FFT*

Note: $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi/T$, $s[n]=s(t_n)$, N = Nombre d'échantillons

22

Série de Fourier discrète - Analyse

- On obtient : $$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n].\cos(\frac{2\pi kn}{N})$$
$$b[k] = \sum_{k=0}^{N-1} s[n]\sin(\frac{2\pi kn}{N})$$
$$c[k] = a[k] - j.b[k]$$
- Ou encore : $$\boxed{c[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n].e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}}$$

23

23

Transformée de Fourier Discrète

TFD définie par :

analyse
$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

synthèse
$$s[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k \cdot e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Résolution fréquentielle

Fréquences d'analyse fk

$$f_k = \frac{k \cdot f_S}{N}, k = 0,1,2 \ldots N-1$$

Les échantillons de la TFD *sont localisés* sur les fréquences d'analyse f_k

Note : $c_{k+N} = c_k \Leftrightarrow$ **Le** spectre est périodique, de période N

24

Transformée de Fourier Discrète – exemple

Calculer la TFD du signal suivant : x[n] = {1,2,1,0}

- N = 4, et donc $e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} = e^{-j\frac{\pi k n}{2}}$
- k=0 $\tilde{c}_0 = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{0} = 1+2+1+0 = 4$
- k=1 $\tilde{c}_1 = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{\pi n}{2}} = 1+2e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} + 0 = -j2$
- k=2 $\tilde{c}_2 = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\pi n} = 1+2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + 0 = 0$
- k=3 $\tilde{c}_3 = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{3\pi n}{2}} = 1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} + 0 = j2$

Et donc X_{TFD}={4,-j2,0,j2}

25

25

TFD - exemples

Quelques transformées de Fourier utiles

- {1,0,0,0,…,0} impulsion {1,1,1,1,…,1} constante
- {1,1,1,…,1} constante {N,0,0,0,…,0} impulsion
- *cos*(2*pnk*$_0$/N) sinusoïde 0.5N(δ[*k*-*k*$_0$]+δ[*k*-(*N*-*k*$_0$)])

26

26

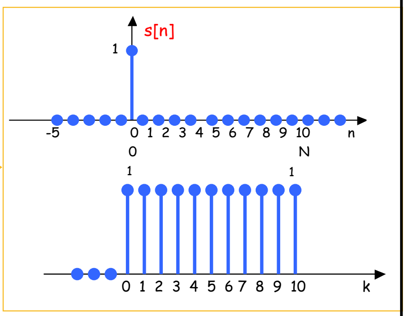
TFD - exemples

Impulsion, largeur N, discret

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ , si n=0} \\ 0 \text{ , ailleurs} \end{cases}$$

$$\boxed{\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} = \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}}$$

$$\boxed{\forall k, \quad \tilde{c}_k = \frac{1}{N}}$$



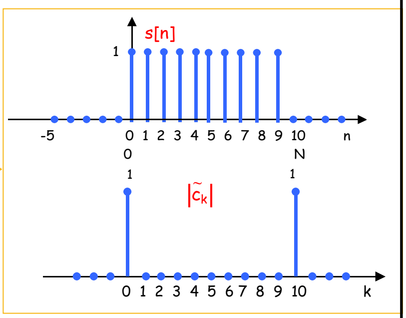
27

TFD - exemples

Signal rectangulaire, largeur N, discret

$$u[n] = \begin{cases} 1 \text{ , if } 0 \le n \le N-1 \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$$

$\tilde{c}_k = (1/N)\, e^{-j\pi k(N-1)/N} \sin(\pi k)/ \sin(\pi k/N)$



Remarque : un signal qui est court dans le temps est long en fréquence et vice-versa

28

Fast Fourier Transform

- FFT

X = fft(x) (X est complexe !)

- On peut utiliser 2 formes de représentation de la TFD
  - forme réelle et imaginaire (complexe)
  - forme polaire (amplitude et phase)

- Convention : on utilise une minuscule pour représenter un signal en fonction du temps (x[n]) et une majuscule pour représenter un signal en fonction de la fréquence (X[n])

29

29

Fast Fourier Transform (FFT)

- Il existe plusieurs méthodes pour calculer la TFD, mais la plus rapide est la FFT (Fast Fourier Transform)
- J.W. Cooley et J.W. Tukey : 2 ingénieurs à l'origine de l'invention de la FFT (article paru en 1965)
- TFD : opération d'ordre N^2 multiplications
- FFT : $log_2(N)$ multiplications ➔ beaucoup plus rapide !

30

FFT et Python

- Forme réelle et imaginaire

$X(f) = real(X(f)) + j\ imag(X(f))$

- Forme polaire

$X(f) = abs(X)\ .\ exp(\cos \Phi(f) + j.\ \sin \Phi(f))$

$abs(X(f))$: amplitude du spectre (magnitude)

$\Phi(f) = angle(X(f))$: phase du spectre

31

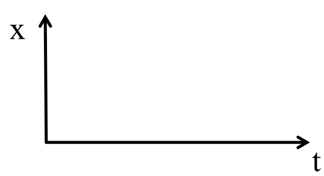
31

FFT et Python

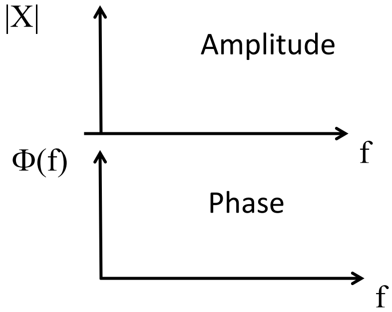
- En Python : X = np.fft(x)

X : transformée de Fourier du signal x échantillonné

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle

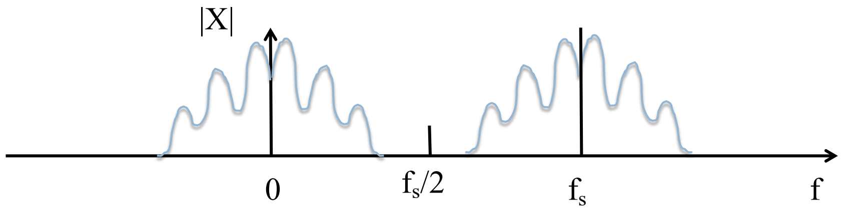


32

32

Transformée de Fourier discrète

Représentation fréquentielle : périodicité



Nécessité d'avoir fs >> fmax (théorème de Shannon-Nyquist)

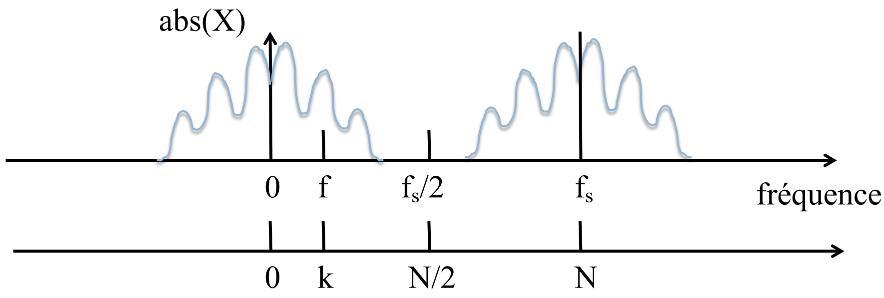
Sinon, phénomène de repliement de spectre ! (voir en TP)

33

33

Transformée de Fourier discrète

Échelle fréquentielle discrète



TF{x[n]} = {X[k]}   avec k/N = f/fs

x[n] échantillonné : 0 à N échantillons (échelle temporelle)
X[k] échantilloné : 0 à fs échantillons, avec k/N = f/fs

34

34

Exemples
Analyse spectrale d'un signal

35

35

Exemple 0 – code Python

- **Echelle temporelle**

x[n] échantillonné : 0 à N échantillons (échelle temporelle)

```
n = np.arange(N)   #création d'une échelle temporelle de
t = n / fs         # 0 à N-1
```

ou

```
t = np.linspace(0,(N-1)/fs, N)
```

- **Echelle fréquentielle**

X[k] échantillonné : 0 à fs échantillons, avec k/N = f/fs

F =np.linspace(0,fs,N), avec N puissance de 2

36

36

Exemple 0

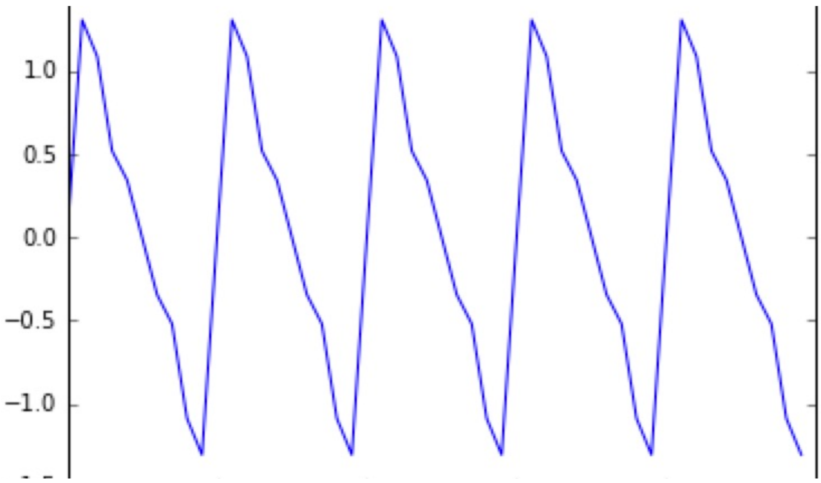
- Création d'un signal échantillonné (4 sinusoïdes aux fréquences 1, 2, 3 et 4 Hz

```
def genSin (N,f,fs) :
    t = np.linspace(0,(N-1)/fs, N) ; pi = np.pi
     x=np.sin(2*pi*f*t);
    return(x)
fe = 10  ; N=1024 ; T = float(N-1)/fe
echantillons = np.zeros(N)
echantillons =
genSin(N,1,fe)+0.5*genSin(N,2,fe)+0.25*genSin(N,3,fe)+0.01*genSin(N,4,fe)
n=np.arange(N)
plt.plot(n[0:50], echantillons[0:50])
```

37

37

Exemple 0 : signal temporel synthétisé



38

38

Exemple 0 - Spectre du signal

- Spectre du signal – parties réelle et imaginaire

```
TFD = fft(echantillons)        # spectre du signal
Re = np.real(TFD)              # partie réelle
Im = np.imag(TFD)              # partie imaginaire
```

39

39

Exemple 0 – Affichage du spectre

- Partie réelle du spectre

```
freq =np.linspace(0,fe,N)

figure(figsize=(10,4))
plot(freq,Re,'g')
xlabel('fréquence')
ylabel('Réelle')
axis([0,fe/2,0,Re.max()])
grid()
```

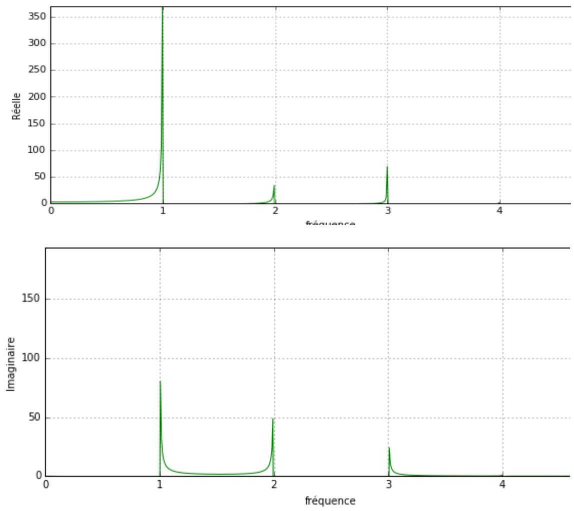
- Partie imaginaire

```
figure(figsize=(10,4))
plot(freq,Im,'g')
xlabel('fréquence')
ylabel('Imaginaire')
axis([0,fe/2,0,Im.max()])
grid()
```

40

40

Spectre du signal : parties réelles et imaginaires



41

41

Spectre du signal - calcul

- Spectre du signal : amplitude (magnitude et phase)

```
TFD = fft(echantillons)       # spectre du signal
A = np.abs(TFD/N)             # amplitude du spectre
An = A/A.max()                # amplitude normalisée
Ph = np.angle(TFD/N)          # phase normalisée
```

42

42

Spectre du signal - affichage

- Amplitude

```
freq =np.linspace(0,fe,N)

figure(figsize=(10,4))
plot(freq,An,'b')
xlabel('fréquence')
ylabel('Amplitude')
axis([0,fe/2,0,An.max()])
grid()
```

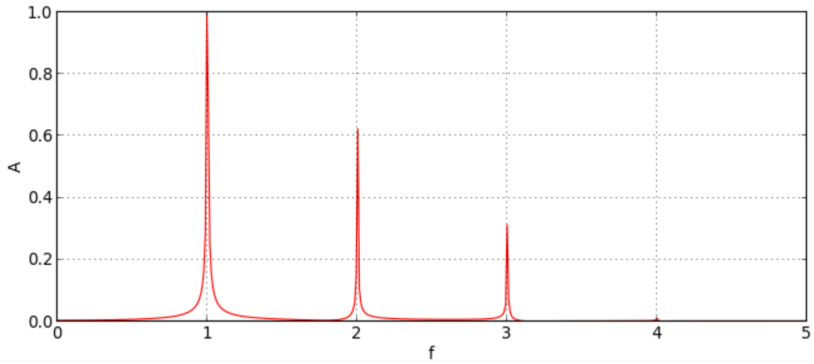
- Phase

```
figure(figsize=(10,4))
plot(freq,Ph,'r')
xlabel('fréquence')
ylabel('Phase')
axis([0,fe/2,0,Ph.max()])
grid()
```

43

43

Spectre du signal : amplitude

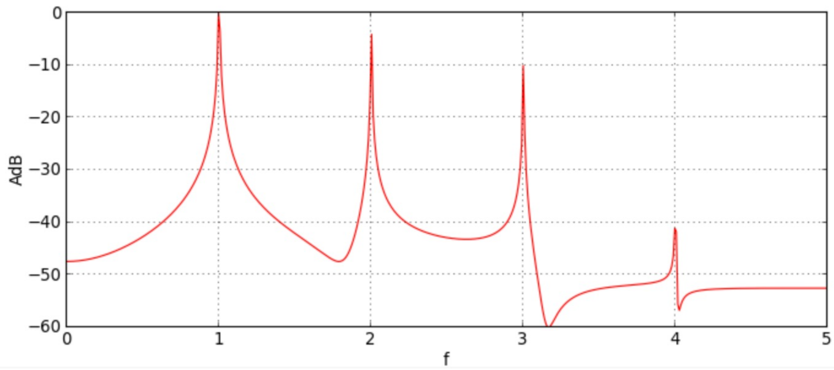


44

44

Spectre du signal : en dB

spectre_db = 20*np.log10(An)



45

45

Spectre du signal : en dB

- Si le signal était échantillonné sur une durée infinie, les raies seraient de largeur nulle (puisque le signal est périodique).

- L'élargissement de la base des raies est un effet de la durée finie de l'échantillon, c'est-à-dire de l'application d'une fenêtre de troncature au signal.

- S'il n'est pas gênant dans le cas d'un spectre discret, cet élargissement peut réduire la résolution dans le cas d'un spectre continu.

- On constate également des erreurs sur les hauteurs relatives des raies, qui viennent du fait que la résolution fréquentielle (inverse de la durée de l'échantillon) est insuffisante pour saisir le maximum des raies.

46

46

TFD - exemples

Sinusoïde, fréquence f_0 $s[n] = \cos(2\pi k_0 n/N)$

N échantillons

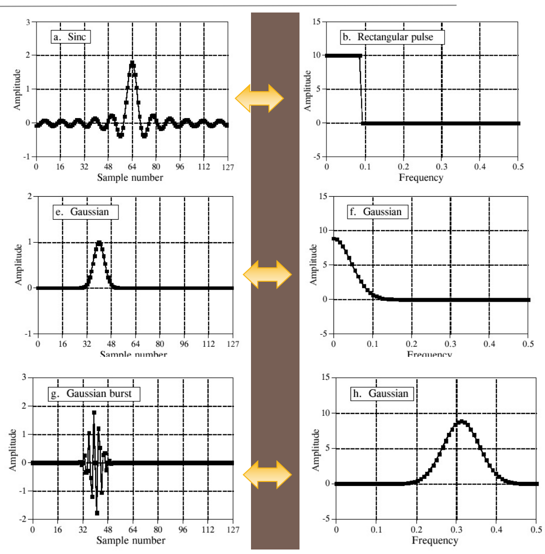
$$c_k = (1/N)\, e^{j\pi\{(Nf_0-k)-(Nf_0-k)/N\}}\, (½)\, \sin\{\pi(Nf_0-k)\}/ \sin\{\pi(Nf_0-k)/N\} +$$
$$(1/N)\, e^{j\pi\{(Nf_0+k)-(Nf_0+k)/N\}}\, (½)\, \sin\{\pi(Nf_0+k)\}/ \sin\{\pi(Nf_0+k)/N\}$$

soit une valeur (amplitude) de 0.5 N ($\delta[k - k_0] + \delta[k - (N - k_0)]$)

47

TFD – Autres exemples

Les TFD correspondent aux versions échantillonnées de la TFTD avec fenêtrage



48

Propriétés de la TFD

- Si X_{TFD} est la TFD d'un signal discret x[n], alors on a :

$kx[n]$	$\longleftrightarrow$	$kX_{TFD}[k]$	**linéarité**
$x_1[n] + x_2[n]$	$\longleftrightarrow$	$X_1[k] + X_2[k]$	**additivité**
$x[-n]$	$\longleftrightarrow$	$X_{TFD}[-k] = X^{-j}{}_{TFD}[k]^*$	**repliement**
$x[n-s]$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi sk}{N}} X_{TFD}[k]$	**déphasage**
$x[n].y[n]$	$\longleftrightarrow$	$1/N\ X_{TFD}[k] * Y_{TFD}[k]$	**multiplication**
$x[n]*y[n]$	$\longleftrightarrow$	$1/N\ X_{TFD}[k].Y_{TFD}[k]$	**convolution**

*X^{-j} : X conjugué

49