Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

5. Fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme, exponentielle et puissance
   - La fonction logarithme
   - La fonction exponentielle
   - Dérivée d'une fonction réciproque
   - Graphe d'une fonction réciproque
   - Les fonctions puissance
   - La fonction exponentielle de base *a*
   - Croissances comparées

2. Fonctions trigonométriques réciproques
   - La fonction Arcsinus
   - La fonction Arccosinus
   - La fonction Arctangente
   - Équations trigonométriques
   - Valeurs remarquables de Arcsin, Arccos, Arctan

3. Fonctions hyperboliques
   - Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques
   - La fonction tangente hyperbolique
   - Équations hyperboliques et fonctions réciproques
   - Exercices (fonctions hyperboliques)

Fonctions logarithme, exponentielle et puissance

La fonction logarithme

Théorème : Il existe une unique fonction (notée ln) définie sur $]0, +\infty[$ telle que $\ln(1) = 0$ et

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriétés du logarithme

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln(1/a) = -\ln(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n. \ln a$
- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1$

- Tangente en $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

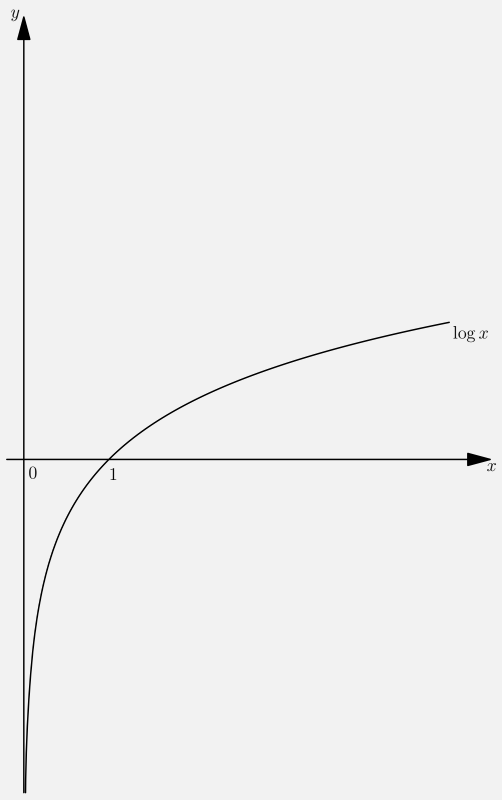
ou encore,

$$\ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$$

- Position par rapport à la tangente :

$$\forall h \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+h) \leq h.$$

Graphe de la fonction logarithme



Exercice : Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{e^x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

Notation : $\exp(x)$ ou e^x

exp est une fonction continue et strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$

On a : $\begin{cases} \exp(\ln x) = x & \forall x > 0 \\ \ln(\exp(x)) = x & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$
- $\exp(0) = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exp(-a) = 1/\exp(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n.a) = \big(\exp(a)\big)^n$
- $\exp' = \exp$

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow f(I) = J$ une fonction dérivable dont la dérivée reste de signe constant et ne s'annule pas sur I. Alors :

- f est bijective (et strictement monotone) ;
- sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Justification de la formule : en notant $g = f^{-1}$ la fonction réciproque de f, on peut écrire

$$\forall x \in J, \quad (f \circ g)(x) = x$$

donc $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Dérivée de l'exponentielle

$$(\ln \circ \exp)(x) = x$$

$$(\ln \circ \exp)'(x) = \ln'\big(\exp(x)\big).\exp'(x) = 1$$

Donc : $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$

Limites de l'exponentielle

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice : Montrer ces limites, en utilisant ce que l'on sait de la fonction logarithme.

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continue et dérivable, de dérivée continue.

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, on a :

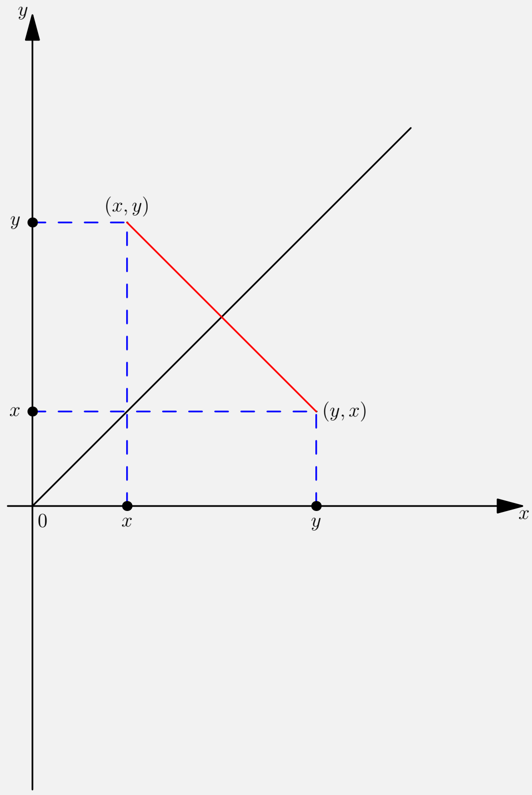
$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = x \qquad$ et $\qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

$$\text{donc} \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

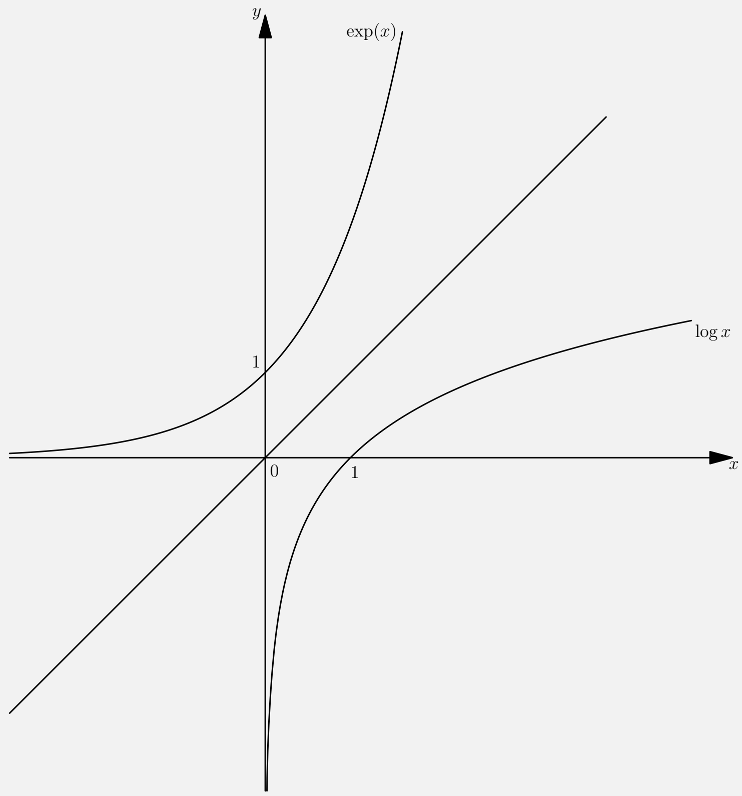
Soit $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ le graphe de la fonction f :

$(x, y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) = (y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$

Graphe d'une fonction réciproque



Graphe de la fonction exponentielle



La fonction puissance b

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle « a puissance b » le nombre réel définit par :

$$a^b = \exp(b. \ln a)$$

Propriétés :

- $1^b = 1 = a^0$
- $a^b \times a^c = a^{b+c}$
- $a^b / a^c = a^{b-c}$
- $1/a^b = a^{-b}$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $a^b \times c^b = (ac)^b$
- $(a^b)/(c^b) = (a/c)^b$

La fonction puissance b

Soit $b \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} u & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & u(x) = x^b = \exp(b.\ln x) \end{array}$$

s'appelle la fonction puissance b.

Dérivées des fonctions puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = \exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = \exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

$$u'(x) = b.\exp(-\ln x).\exp(b.\ln x) = b.\exp\big((b-1).\ln x\big)$$

$$u'(x) = b\,x^{b-1}$$

Propriétés des fonctions puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[,\quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x),\quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

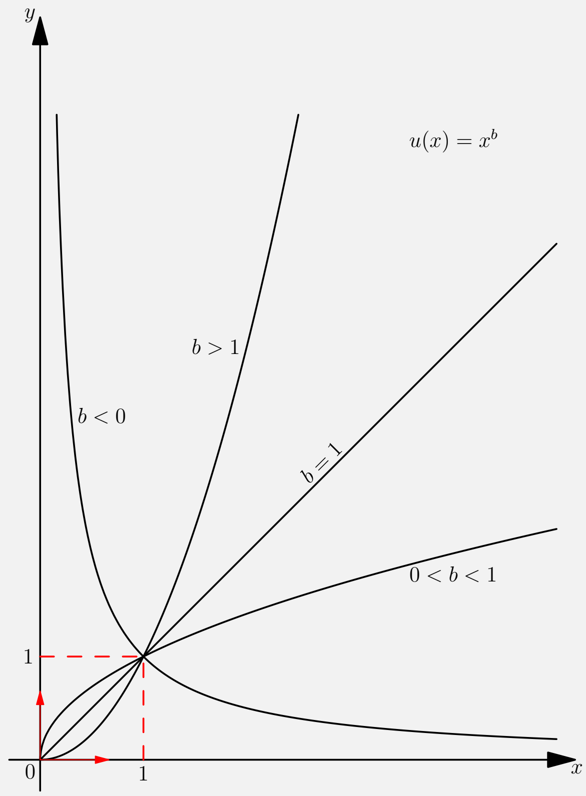
- $b > 0$
  - $u'(x) = b \exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance b est strictement croissante.
  - $\lim_{x \to +\infty}(b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$
  - $\lim_{x \to 0}(b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} x^b = 0$:
    la fonction puissance b se prolonge par continuité en 0 en posant : $u(0) = 0$
  - Si $b > 1$: $\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{b-1} = \lim_{x \to 0} \exp\big((b-1)\ln x\big) = 0$:
    la fonction puissance b est dérivable à droite en 0, $u'_d(0) = 0$, et la tangente au graphe est horizontale.
  - Si $0 < b < 1$: $\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{b-1} = \lim_{x \to 0} \exp\big((b-1)\ln x\big) = +\infty$:
    la fonction puissance b n'est pas dérivable en 0, la tangente au graphe est verticale.

Propriétés des fonctions puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[,\quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x),\quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

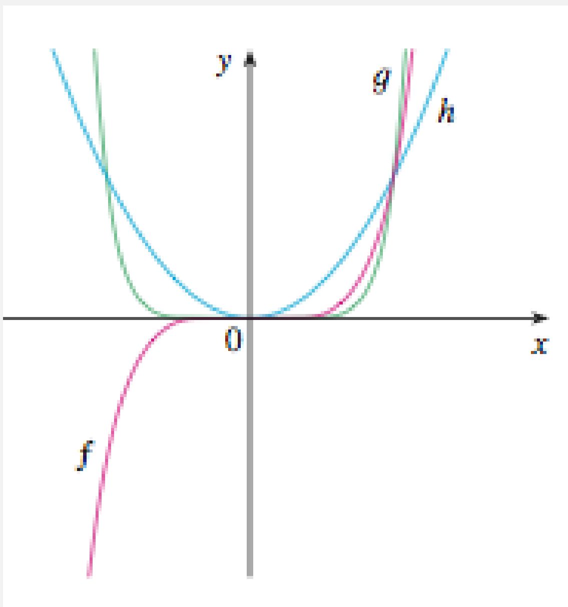
- $b < 0$
  - $u'(x) = b \exp\big((b-1)\ln x\big) < 0$: la fonction puissance b est strictement décroissante.
  - $\lim_{x \to +\infty}(b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0$
  - $\lim_{x \to 0}(b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} x^b = +\infty$
- $b = 0$. La fonction puissance 0 est constante de valeur 1.

Graphes des fonctions puissance



Exercice : Associer chacune des équations suivantes avec une des courbes :

$$y = x^2 \quad ; \quad y = x^5 \quad ; \quad y = x^8$$



Exponentielle de base *a*

Soit $a > 0$. La fonction

$$v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \end{array}$$

s'appelle la fonction exponentielle de base *a*

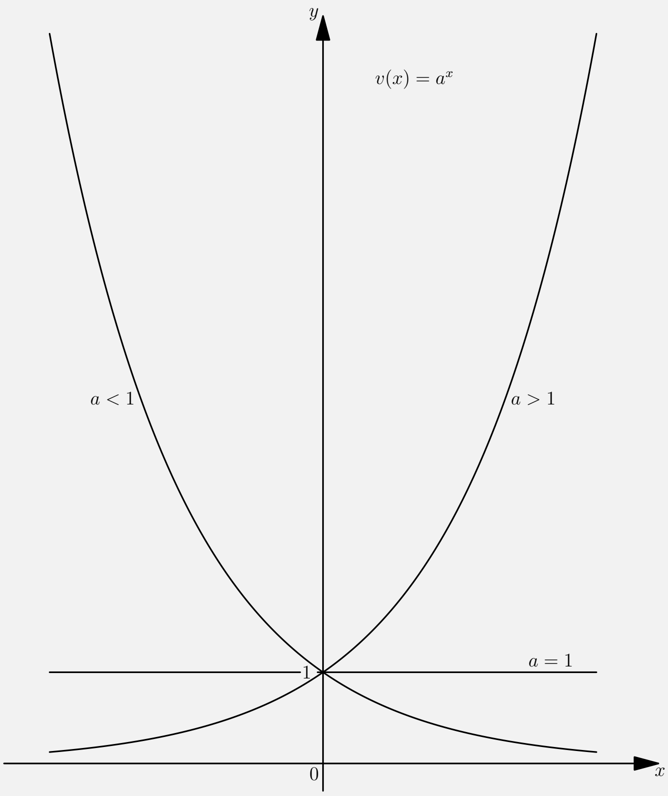
$$v'(x) = \ln(a).\exp\big(x.\ln(a)\big) = \ln(a).a^x$$

Propriétés de l'exponentielle de base *a*

$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \quad v'(x) = \ln(a).a^x$

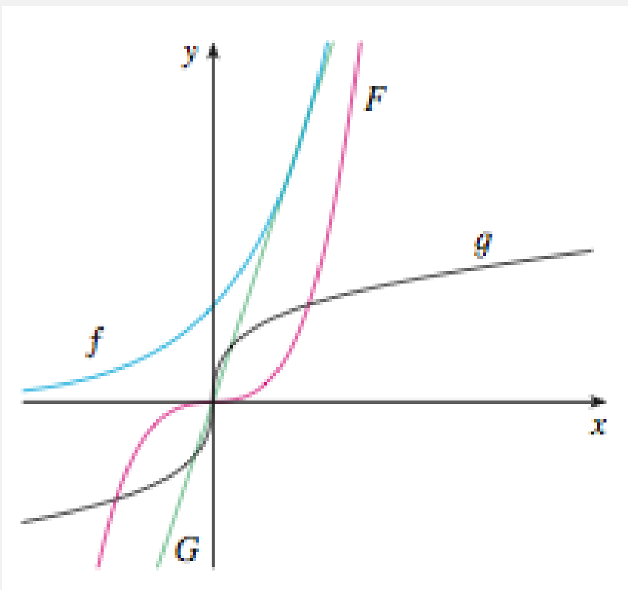
- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$
     la fonction exponentielle de base *a* est strictement croissante.
  2. $\lim_{x\to+\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$
  3. $\lim_{x\to-\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
- Si $a < 1$:
  1. $\ln a < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) < 0$
     la fonction exponentielle de base *a* est strictement décroissante.
  2. $\lim_{x\to+\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
  3. $\lim_{x\to-\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$

Graphe de l'exponentielle de base *a*



Exercice : Associer chacune des équations suivantes avec une des courbes :

$$y = 3x \quad ; \quad y = x^3 \quad ; \quad y = 3^x \quad ; \quad y = x^{\frac{1}{3}}$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$

$\forall x > 1: \quad 0 \leq \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 2\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(u(x)\right)}{u(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \Big(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b = \Big(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b = \Big(\frac{b}{a}\Big)^b\Big(\frac{\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b$$

En posant $u(x) = x^{\frac{a}{b}}$: $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

Exercice : Montrer les limites suivantes :

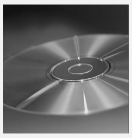
1. Pour $a > 0,\ b > 0,$ $\lim_{x\to 0} x^a\big|\ln x\big|^b = 0$
2. Pour $a > 0,\ b > 0,$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$
3. Pour $a > 0,\ b > 0,$ $\lim_{x\to-\infty} |x|^b \exp(ax) = 0$
4. Pour $a > 0,\ b > 0,$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln(x))^b} = +\infty$

Exercice : Donner les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. $f(x) = x^{-5}\ln(|x|) - x^2 + \ln(|x|)$
2. $f(x) = x^{-5}e^{2x} + x^{-2}e^{-x} - 3x^4 - 2x^2$
3. $f(x) = x^{-3}\ln(|x|) - x^2 + \ln(|x|) + e^x + e^{-x}$

Fonctions trigonométriques réciproques

Fonctions trigonométriques et théorie du signal



Signal : quantité variant
avec le temps. Permet de coder musique, films, etc...

Théorie de Fourier : Tout signal périodique de période T est, à une approximation près, un mélange de fonctions trigonométriques $\sin(\frac{2k\pi t}{T})$ et $\cos(\frac{2k\pi t}{T})$ ($k \in \mathbb{Z}$).

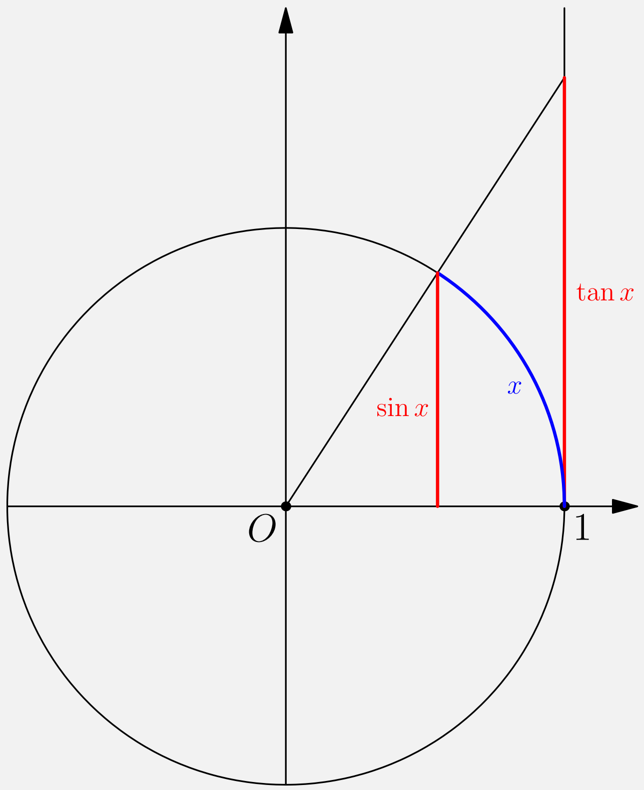
Plus le nombre de fonctions trigonométriques utilisées est important, plus l'approximation est bonne

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\sin' x=\cos x>0$$



La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right).\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right).\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1,1[$

$$\sin' x = \cos x > 0 \text{ puisque } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

La fonction sinus est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1,1[$.

La fonction Arcsinus

La restriction de la fonction sinus à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ admet une réciproque, la fonction Arcsin $:]-1,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui vérifie :

- Arcsin est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \sin(\operatorname{Arcsin} x) &= x \quad \forall x \in]-1,1[\\ \operatorname{Arcsin}(\sin x) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

  Attention, bien que les deux termes soient toujours définis, on n'a pas $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ pour tout x réel !
- $\forall x \in]-1,1[, \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

  Preuve : on a $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1-x^2$ avec $\operatorname{Arcsin} x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos(\operatorname{Arcsin} x) > 0$.

La dérivée de Arcsinus

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la dérivée de la fonction sinus (cos) est de signe constant et ne s'annule pas, donc la fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'\left(\mathrm{Arcsin}\,x\right)} = \frac{1}{\cos\left(\mathrm{Arcsin}\,x\right)}$$

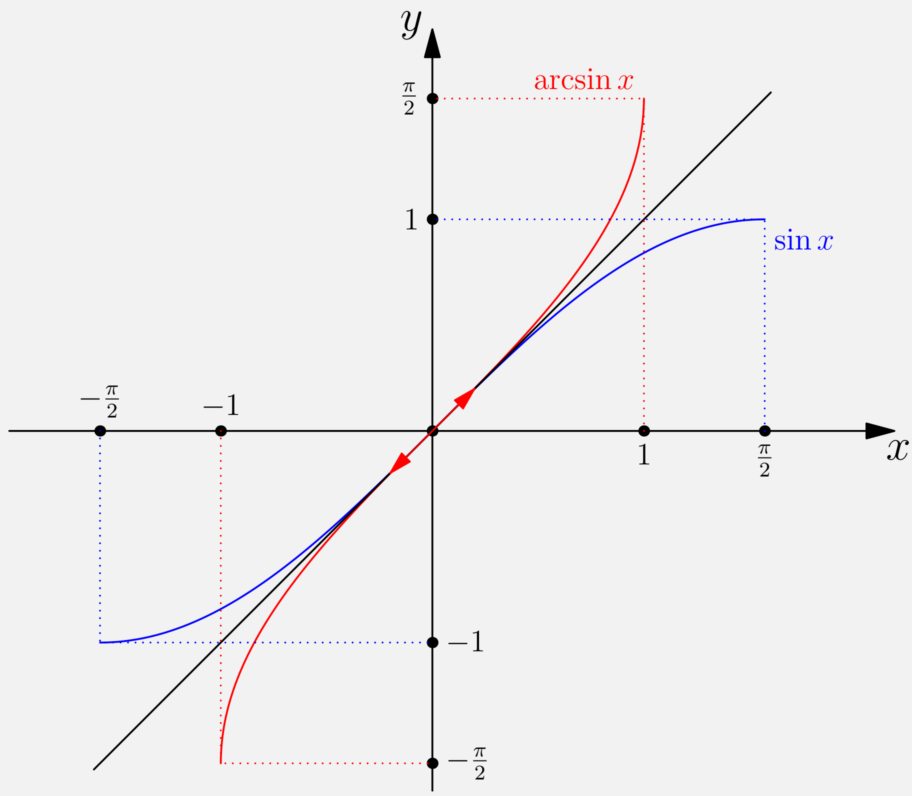
$$\text{donc} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition de Arcsinus sur $[-1, 1]$

La fonction sinus est aussi une bijection continue de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$, ce qui permet d'étendre la fonction Arcsinus comme une bijection continue de $[-1, 1]$ vers $[-\pi/2, \pi/2]$.

Attention : Arcsinus n'est pas dérivable en -1 et en 1.

Les graphes de Sinus et Arcsinus



La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$, à valeurs dans $]-1\,,1[$

$$\cos' x = -\sin x < 0 \text{ puisque } x \in]0\,,\pi[$$

La fonction cosinus est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,,\pi[$, c'est donc bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1\,,1[$.

La fonction Arccosinus

La restriction de la fonction cosinus à $]0,\pi[$ admet une réciproque, la fonction Arccos $:]-1,1[\longrightarrow]0,\pi[$, qui vérifie :

- Arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\operatorname{Arccos} x) &= x \quad \forall x\in]-1,1[\\ \operatorname{Arccos}(\cos x) &= x \quad \forall x\in]0,\pi[\end{cases}$
- $\forall x\in]-1,1[,\ \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall \alpha,\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x\right) = \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$

$\Rightarrow \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x\right)\right) = \operatorname{Arccos}(x)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}(x)$ car $\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x \in]0,\pi[$

donc $\forall x\in]-1,1[,\quad \operatorname{Arccos} x+\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$

La dérivée de Arccosinus

La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\operatorname{Arccos} x+\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Arccos}'(x) = -\operatorname{Arcsin}' x$$

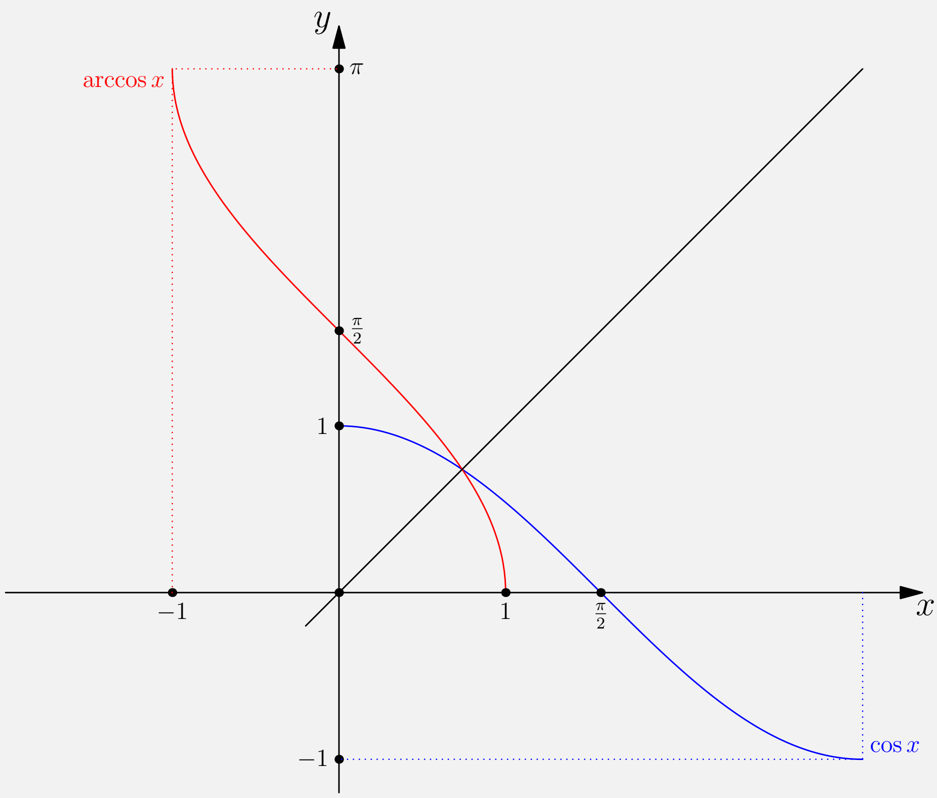
$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition de Arccosinus sur $[-1, 1]$

La fonction cosinus est aussi une bijection continue de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$, ce qui permet d'étendre la fonction Arccosinus comme une bijection continue de $[-1, 1]$ vers $[0, \pi]$.

Attention : Arccosinus n'est pas dérivable en -1 et en 1.

Les graphes de Cosinus et Arccosinus



La fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

La fonction tangente est périodique de période π.

La dérivée de la fonction tangente

La fonction tangente est continue et dérivable, comme quotient de fonction continues et dérivables, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

La fonction tangente est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

La fonction Arctangente

La restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ admet une réciproque, la fonction Arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui vérifie :

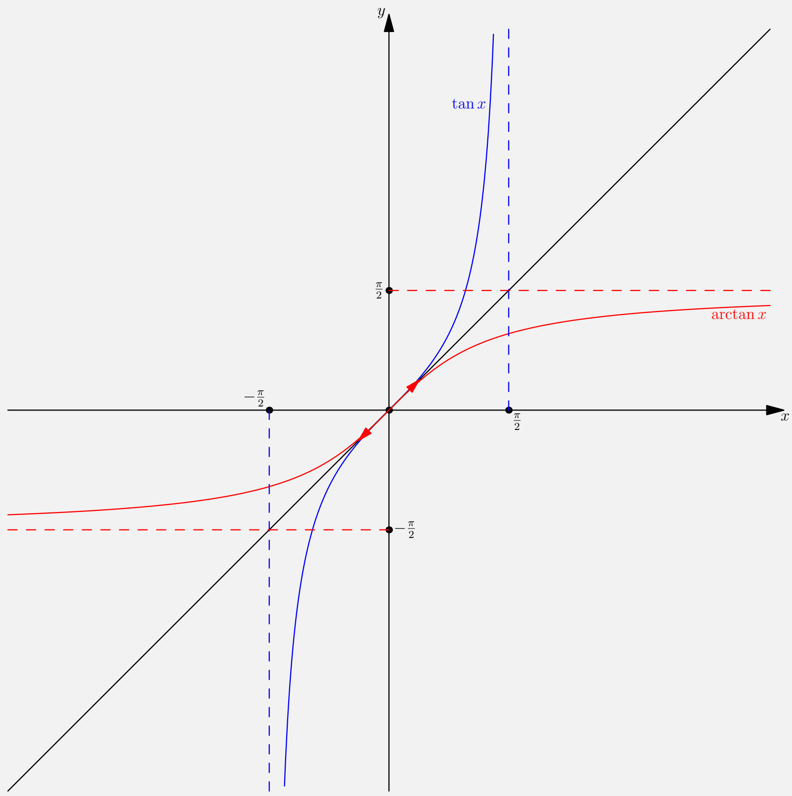
- Arctan est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \tan(\operatorname{Arctan} x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Arctan}(\tan x) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$
- $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2}$

La dérivée de Arctangente

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\quad \tan' x \neq 0$, donc la fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Les graphes de Tangente et Arctangente



Équations trigonométriques

Équation $\sin x = a, \quad a \in [-1, 1]$

$a \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \alpha = \text{Arcsin}\, a$

L'équation s'écrit : $\sin x = \sin \alpha$

$\sin x - \sin \alpha = 2 \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & & & & & & \\ & \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Équation $\cos x = a, \quad a \in [-1, 1]$

$a \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [0, \pi] \quad \alpha = \text{Arccos}\, a$

L'équation s'écrit : $\cos x = \cos \alpha$

$\cos x - \cos \alpha = -2 \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & & & & & & \\ & \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

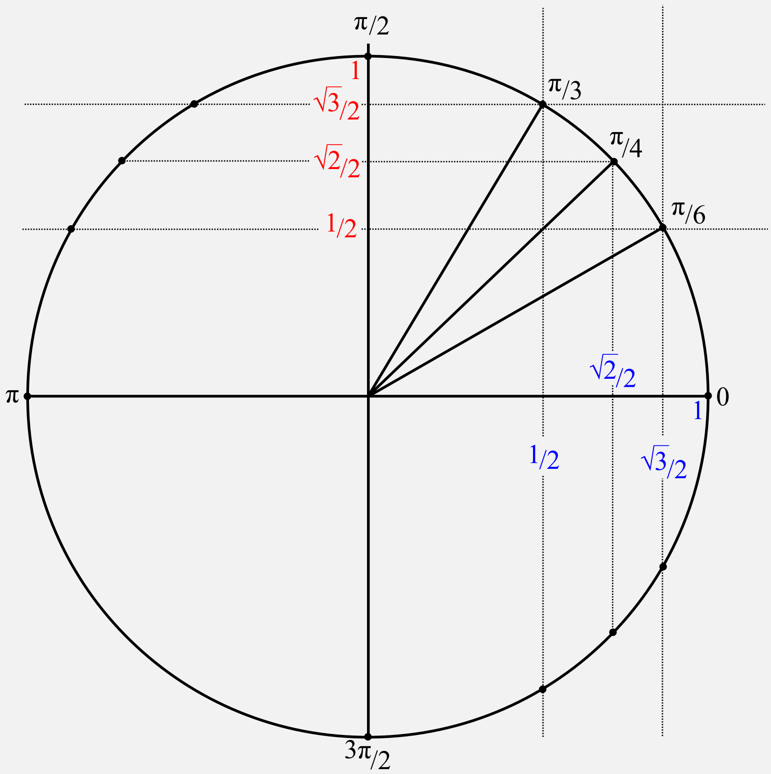
Équation $\tan x = a, \quad a \in \mathbb{R}$

En posant $\alpha = \text{Arctan}(a)$, l'équation s'écrit : $\tan x = \tan \alpha$

Comme la fonction tangente est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et π-périodique, l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = a$ est donc

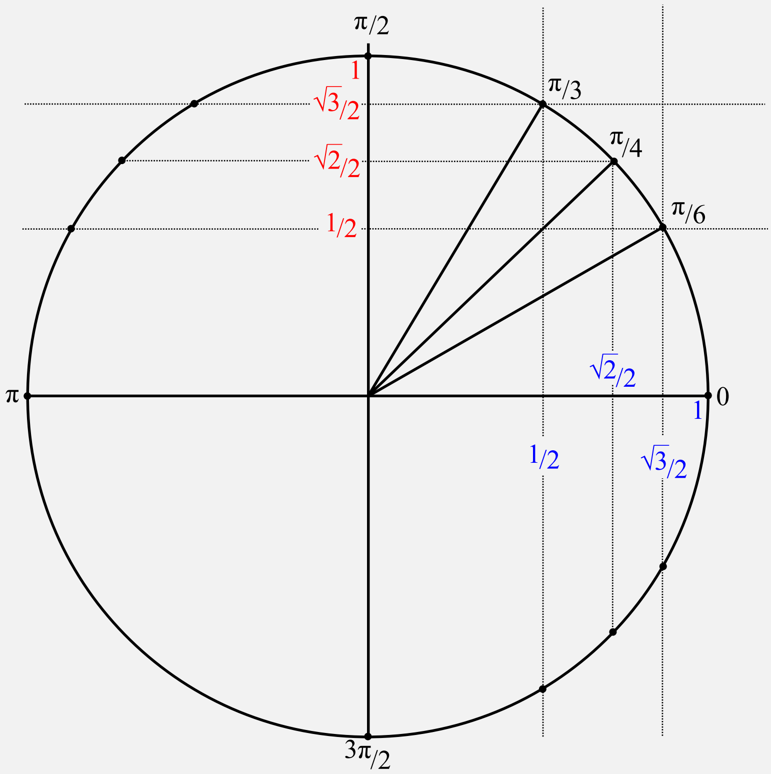
$$\{\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad \alpha = \text{Arctan}(a).$$

Valeurs remarquables pour Arcsin



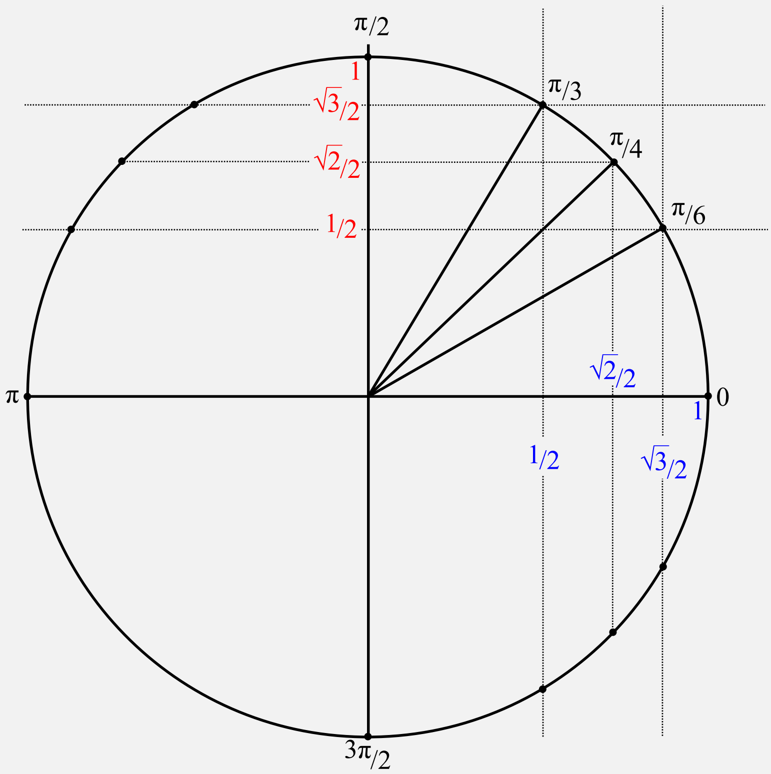
t	$\text{Arcsin}\, t$
1	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
0	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$

Valeurs remarquables pour Arccos



t	$\operatorname{Arccos} t$
1	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	π

Valeurs remarquables pour Arctan



t	$\operatorname{Arctan} t$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$
0	0
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$

Exercice : Résoudre l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice : Résoudre l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice : Résoudre l'équation $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Fonctions hyperboliques

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques

On définit la fonction sinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On définit la fonction cosinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$: la fonction ch est paire
- $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$
- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 1$

Fonctions circulaires et fonctions hyperboliques

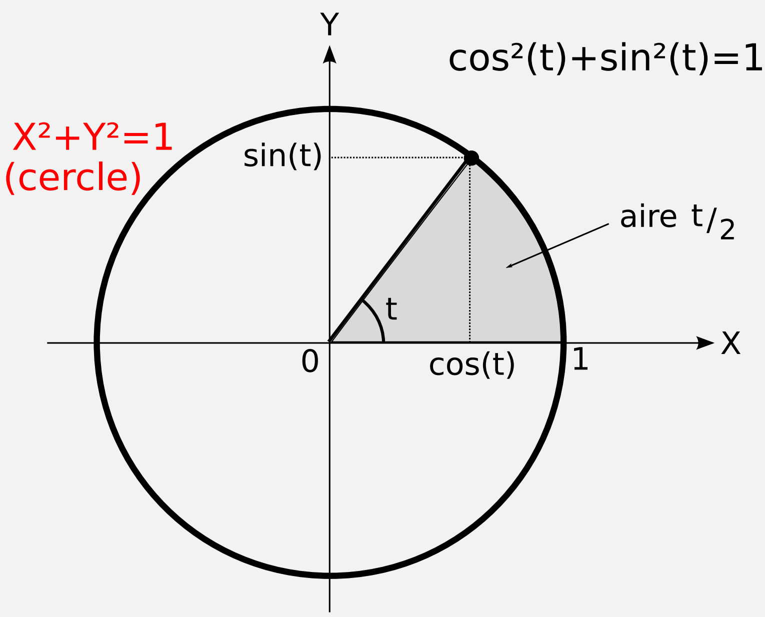
Les fonction cos et sin permettrent de représenter le cercle unité d'équation $X^2 + Y^2 = 1$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} X = \cos(t) \\ Y = \sin(t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

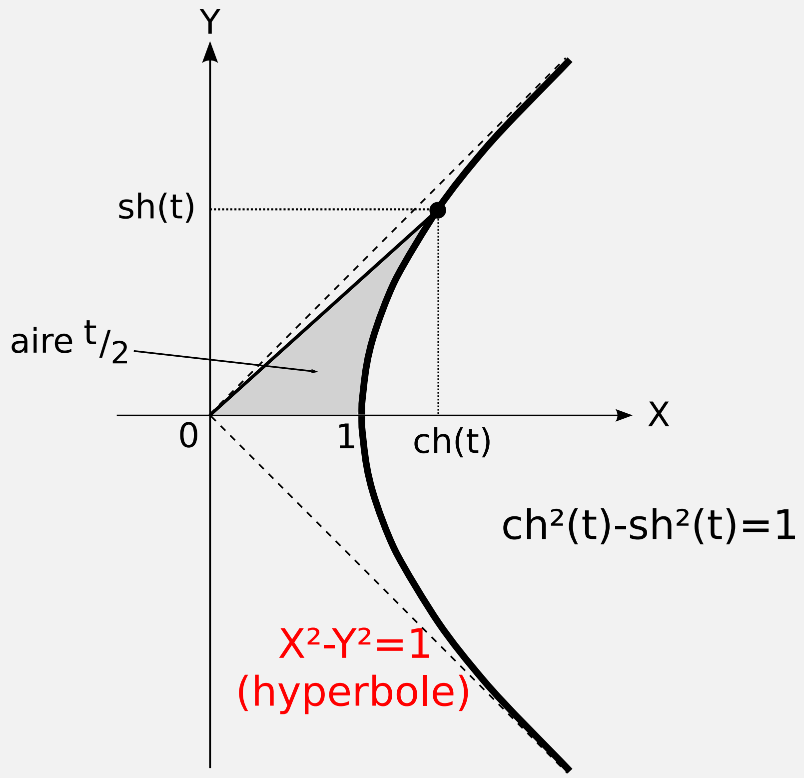
Il en va de même des fonctions ch et sh, qui permettent de représenter la branche $X > 0$ de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} X = \mathrm{ch}(t) \\ Y = \mathrm{sh}(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Représentation paramétrique du cercle



Représentation paramétrique de l'hyperbole



Dérivées et variations de sh et ch

- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$: sh est strictement croissante.

Si $x > 0 \quad x > -x \quad \Rightarrow \quad e^x > e^{-x}$ donc :

	Si $x > 0$	$\mathrm{sh}(x) > 0$	$\Rightarrow$	ch croissante
Par imparité	Si $x < 0$	$\mathrm{sh}(x) < 0$	$\Rightarrow$	ch décroissante

$\mathrm{ch}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \neq 0 \ \ \mathrm{ch}(x) > 1$

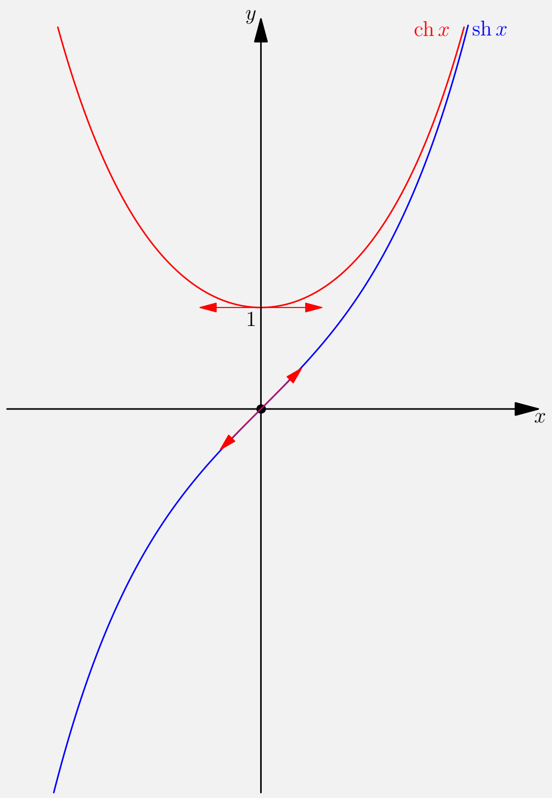
Limites des fonctions sh et ch

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x) \\ \lim_{x\to+\infty} \big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 0 \end{cases}$$

Les graphes de sh et ch



La fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Dérivée :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Variations et limites de th(x)

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

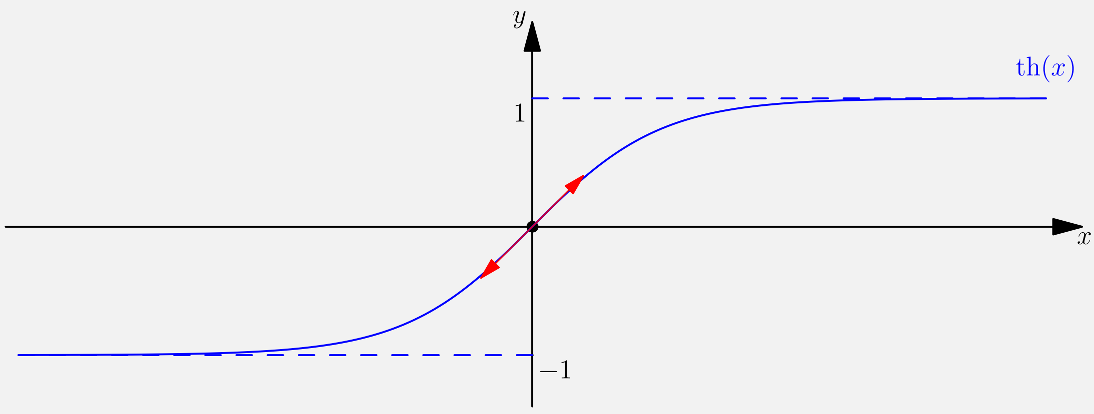
La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

La fonction th étant impaire : $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$

Graphe de tangente hyperbolique



Équation $\mathrm{sh}\, x = a \quad a \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ae^x - 1 = 0$$

L'équation $X^2 - 2aX - 1 = 0$ a une seule racine positive : $a + \sqrt{a^2+1}$.

$$\mathrm{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction

$$\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Équation $\mathrm{ch}\,x = a \quad a \geq 1$

$$\mathrm{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

L'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ a deux racines positives :
$u = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $v = a - \sqrt{a^2 - 1}$ qui vérifient : $uv = 1$

$$\mathrm{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\mathrm{ch} : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est la fonction

$$\mathrm{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Équation $\mathrm{th}x = a \quad a \in]-1, 1[$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\mathrm{th}x = a \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = a(e^{2x} + 1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$$

$\dfrac{1+a}{1-a} > 0$:

$$\mathrm{th}x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

$\hookrightarrow$ la réciproque de la bijection $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est la fonction

$$\mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Exercice

1) Développer, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$ b) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$ c) $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$

2) En déduire les identités suivantes :

- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$

3) En déduire directement :

- $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
- $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$
- $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$
- $1 = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$
- $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x)$

Exercice

Démontrer l'identité suivante pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$$

puis en déduire directement :

a) $$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th}(x) - \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$$

b) $$\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$$

Fonctions circulaires et hyperboliques sur $\mathbb{C}$ (hors programme)

On peut généraliser les définitions connues pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \ \mathrm{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

On a alors immédiatement les identités :

$$\mathrm{ch}(iz) = \cos(z), \quad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z), \quad \mathrm{th}(iz) = i\tan(z).$$

Ces identités permettent de retrouver les identités hyperboliques à partir des identités circulaires (et réciproquement).

Fonctions circulaires et hyperboliques sur $\mathbb{C}$ (hors programme)

$$\mathrm{ch}(iz) = \cos(z), \quad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z), \quad \mathrm{th}(iz) = i\tan(z).$$

$$\begin{aligned} & \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{ch}^2(iz) + \left(\frac{1}{i}\mathrm{sh}(iz)\right)^2 = 1 \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{ch}^2(iz) - \mathrm{sh}^2(iz) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(iz + iz') &= \cos(z + z') \\ &= \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z') \\ &= \cos(z)\cos(z') + i^2\sin(z)\sin(z') \\ &= \mathrm{ch}(iz)\,\mathrm{ch}(iz') + \mathrm{sh}(iz)\,\mathrm{sh}(iz'). \end{aligned}$$