Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°1

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Partie I

Méthode de travail

- Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
  Ne vous contentez pas de la lire.
- Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.
- Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.
- Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Exercice 1 : équations différentielles homogènes

Rappel (proposition 5.2.1 du polycopié de cours) :

Soit (E_0) l'équation différentielle homogène suivante

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

pour $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit A une primitive de α sur $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions de (E_0) est constitué des fonctions

$$y(x) = Ce^{-A(x)},\ C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},$$

- Si le domaine de définition D_α de la fonction α n'est pas égal à $\mathbb{R}$, alors l'équation différentielle et ses solutions ne sont définies que sur D_α.
- Ne pas oublier le signe "-" dans l'exponentielle.

Exercice 1

a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 1

a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :
  On se ramène à une équation dont le coefficient devant y' vaut 1 :

Exercice 1

a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :
  On se ramène à une équation dont le coefficient devant y' vaut 1 :

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :

Exercice 1

a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :
  On se ramène à une équation dont le coefficient devant y' vaut 1 :

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :
  Une primitive de $\frac{3}{2}$ est

$$x \mapsto \frac{3}{2}x,$$

  donc l'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions

$$y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x}, \; C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

- On vérifie en dérivant y :

$$y'(x) =$$

Exercice 1

a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 3y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :
  On se ramène à une équation dont le coefficient devant y' vaut 1 :

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :
  Une primitive de $\frac{3}{2}$ est

$$x \mapsto \frac{3}{2}x,$$

  donc l'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions

$$y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x}, \ C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

- On vérifie en dérivant y :

$$y'(x) = -\frac{3}{2}Ce^{-\frac{3}{2}x} = -\frac{3}{2}y(x).$$

  On a donc bien $y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = 0$ et donc également $2y'(x) + 3y(x) = 0$.

Exercice 1

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 1

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :

Exercice 1

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :

$$y'(x) - 3y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :

Exercice 1

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :

$$y'(x) - 3y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :
  Une primitive de -3 est
  $$x \mapsto -3x,$$
  donc l'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions
  $$y(x) = Ce^{3x},\ C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

- On vérifie :
  $$y'(x) =$$

Exercice 1

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$3y'(x) - 9y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On normalise l'équation :

$$y'(x) - 3y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- On résout :
  Une primitive de -3 est

$$x \mapsto -3x,$$

  donc l'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions

$$y(x) = Ce^{3x},\ C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

- On vérifie :

$$y'(x) = 3Ce^{3x} = 3y(x).$$

  On a donc bien $y'(x) - 3y(x) = 0$ et donc également $3y'(x) - 9y(x) = 0$.

Exercice 2 : équations différentielles de second membre polynomial

Rappel (proposition 5.2.3 du polycopié de cours) :

Soit (E) l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = h(x), \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

pour $\alpha, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

L'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\left\{ y_p + y \,|\, y \text{ solution de } (E_0) \right\}$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y parcourt les solutions de l'équation homogène

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme également de degré n.

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\textbf{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 2y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

L'équation est déjà normalisée. L'ensemble des solutions de (E_0) est formé des fonctions $y(x) = Ce^{-2x}, \ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p.

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche un polynôme de degré 2. On pose :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche un polynôme de degré 2. On pose :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3$$

d'où en regroupant par exposant

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche un polynôme de degré 2. On pose :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3$$

d'où en regroupant par exposant

$$(2a - 1)x^2 + (2a + 2b + 2)x + b + 2c - 3 = 0$$

Un polynôme identiquement nul est le polynôme nul, i.e. ses coefficients sont tous nuls. On identifie les coefficients en partant du coefficient dominant :

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche un polynôme de degré 2. On pose :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3$$

d'où en regroupant par exposant

$$(2a - 1)x^2 + (2a + 2b + 2)x + b + 2c - 3 = 0$$

Un polynôme identiquement nul est le polynôme nul, i.e. ses coefficients sont tous nuls. On identifie les coefficients en partant du coefficient dominant :

- $2a - 1 = 0$ d'où $a = \frac{1}{2}$
- $2a + 2b + 2 = 0$ d'où $2b = -2 - 1$ i.e. $b = -\frac{3}{2}$
- $b + 2c - 3 = 0$ d'où $c = \frac{1}{2}(3 + \frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$.

d'où $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y_p + y_C$:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4},\ C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie :

Exercice 2

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-2x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y_p + y_C$:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \ C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie :

- $y'(x) = -2Ce^{-2x} + x - \frac{3}{2}$
- $2y(x) = 2Ce^{-2x} + x^2 - 3x + \frac{9}{2}$
- donc $y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$ ce qui correspond bien à (E)

Remarque : on a bien montré que y est solution quelque soit le choix de y_C, i.e. quelque soit le choix de la constante $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :**

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$7y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$7y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

L'équation normalisée est $y'(x) + \frac{2}{7}y(x) = 0$. Les solutions de (E_0) sont de la forme $y(x) = Ce^{-\frac{2}{7}x},\ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :**

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ étape :
on cherche une solution particulière y_p avec y_p un polynôme de degré 3 :

$$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E) et on obtient :

$$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$
$$\Leftrightarrow 2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ étape :
on cherche une solution particulière y_p avec y_p un polynôme de degré 3 :

$$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} 7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \\ \Leftrightarrow 2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) &= 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

On identifie terme à terme :

- $2a = 2$, d'où $a = 1$,
- $21a + 2b = -5$, d'où $b = -13$,
- $14b + 2c = 4$, d'où $c = 93$,
- $7c + 2d = -1$, d'où $d = -326$,

d'où $y_p(x) = x^3 - 13x^2 + 93x - 326$.

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion :

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\frac{2}{7}x} + x^3 - 13x^2 + 93x - 326,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\frac{2}{7}x} + x^3 - 13x^2 + 93x - 326,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. b) Donner la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 2

2. a) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\frac{2}{7}x} + x^3 - 13x^2 + 93x - 326, \ C \in \mathbb{R}.$$

2. b) Donner la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Pour tout $C \in \mathbb{R}$, on a $y(0) = C - 326$ donc $y(0) = 0$ impose que $C = 326$.
L'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 326e^{-\frac{2}{7}x} + x^3 - 13x^2 + 93x - 326.$$

Exercice 2

3. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

a) $y'(x) - 6y(x) = 3x,\ x \in \mathbb{R}.$ *b*) $y'(x) + 3y(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y'(x) + 9y(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 2

3. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

a) $y'(x) - 6y(x) = 3x, \ x \in \mathbb{R}.$ *b*) $y'(x) + 3y(x) = x + 1, \ x \in \mathbb{R}.$

c) $y'(x) + 9y(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}.$

Solutions numériques :

a) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{6x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}, \ C \in \mathbb{R}.$

b) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}, \ C \in \mathbb{R}.$

c) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-9x} + \frac{1}{9}, \ C \in \mathbb{R}.$