Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

1. Nombres complexes et polynômes

Nombres complexes et polynômes

Pourquoi les nombres complexes ?

Indispensables, notamment via l'analyse de Fourier, en :

- physique (mécanique des fluides, mécanique quantique, cosmologie)
- traitement du signal
- probabilités et statistiques
- traitement des images (algorithmes de Snapshat, Instagram, Photoshop, etc...)
- . . .

Historique

Introduits au XVIe siècle par Cardan, Bombelli, ... comme un artifice pour résoudre l'équation du 3e degré.

Exemple : Pour résoudre l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

les formules générales imposent de résoudre d'abord

$$x^2 + 6x + \frac{343}{27} = 0$$

dont le discriminant $\Delta = 6^2 - 4.\frac{343}{27} = \frac{-400}{27}$ est négatif !
L'introduction du nombre "imaginaire" $\sqrt{\Delta}$ (dont le carré est négatif) permet alors de continuer formellement les calculs, qui aboutissent ensuite à des solutions (1,2,-3) toutes réelles !

Artifice "magique" à l'époque, aujourd'hui notion bien comprise.

On définit formellement le nombre imaginaire i comme une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \quad , \quad x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

- x est la partie réelle de z, notée : $x = \mathrm{Re}(z)$
- y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \mathrm{Im}(z)$

- $z = x + iy = 0 \iff x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $zz' = zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$
- $x + iy = x' + iy' \iff x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
- Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

... donc $\dfrac{x' + iy'}{x + iy} = \dfrac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \dfrac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} + i\dfrac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$

Exercices

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $(5 + 6i) + (3 - 2i)$
2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (3 - \frac{5}{2}i)$
3. $(3 + 2i)(5 - 3i)$
4. $(1 - \frac{i}{3})(2 + 6i)$
5. $2(4 + i)$
6. i^3
7. i^4
8. $\frac{1}{2+3i}$
9. $\frac{2+2i}{2-i}$
10. $\frac{3-5i}{3+2i}$

Somme de puissances

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$;

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots\cdots + b^1 a^{n-1} + a^n) \\ &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = (b-a)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k} \end{aligned}$$

avec $a^0 = b^0 = 1$.

$n = 0$: $\quad b - a = (b-a) \times 1$

$n = 1$: $\quad b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$n = 2$: $\quad b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

Conséquence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 0$,

$$z^{n+1} - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n)$$

et donc, si $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Nombres complexes et polynômes | Deux formules à connaître

Somme de puissances : démonstration

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$;

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots\cdots + b^1 a^{n-1} + a^n)$$

Posons $S = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots\cdots + b^1 a^{n-1} + a^n$. On a :

$$\begin{aligned} (b-a)S &= bS - Sa \\ &= (b^{n+1} + b^n a + b^{n-1}a^2 + \cdots\cdots + ba^n) \\ &\quad -(b^n a + b^{n-1}a^2 + \cdots\cdots + ba^n + a^{n+1}) \\ &= b^{n+1} - a^{n+1} \end{aligned}$$

Le binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout nombre entier $n \neq 0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

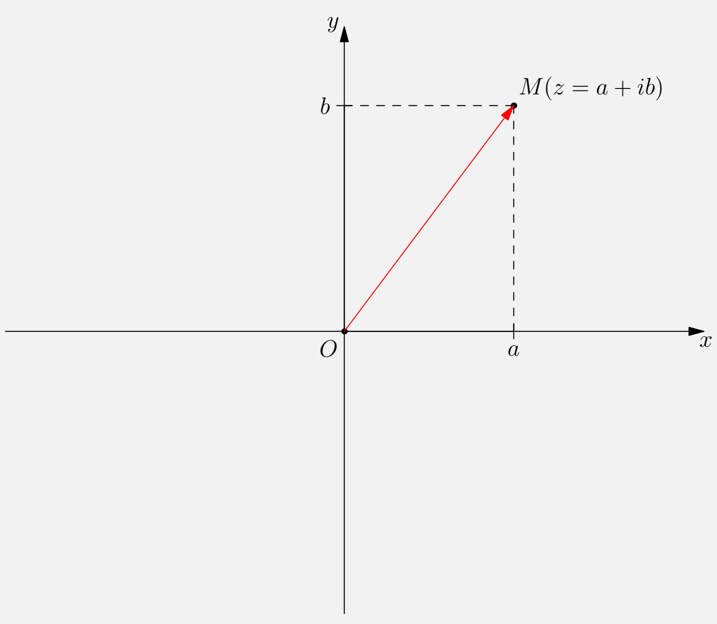
avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

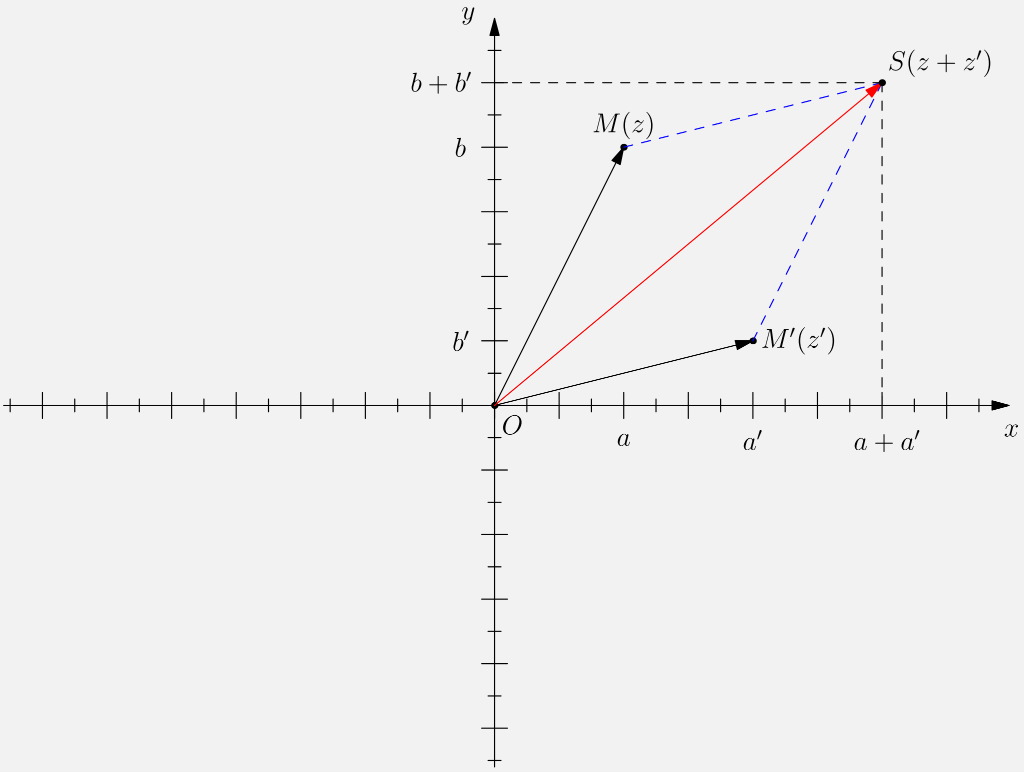
- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$
- $(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5b + 15\,a^4b^2 + 20\,a^3b^3 + 15\,a^2b^4 + 6\,ab^5 + b^6$

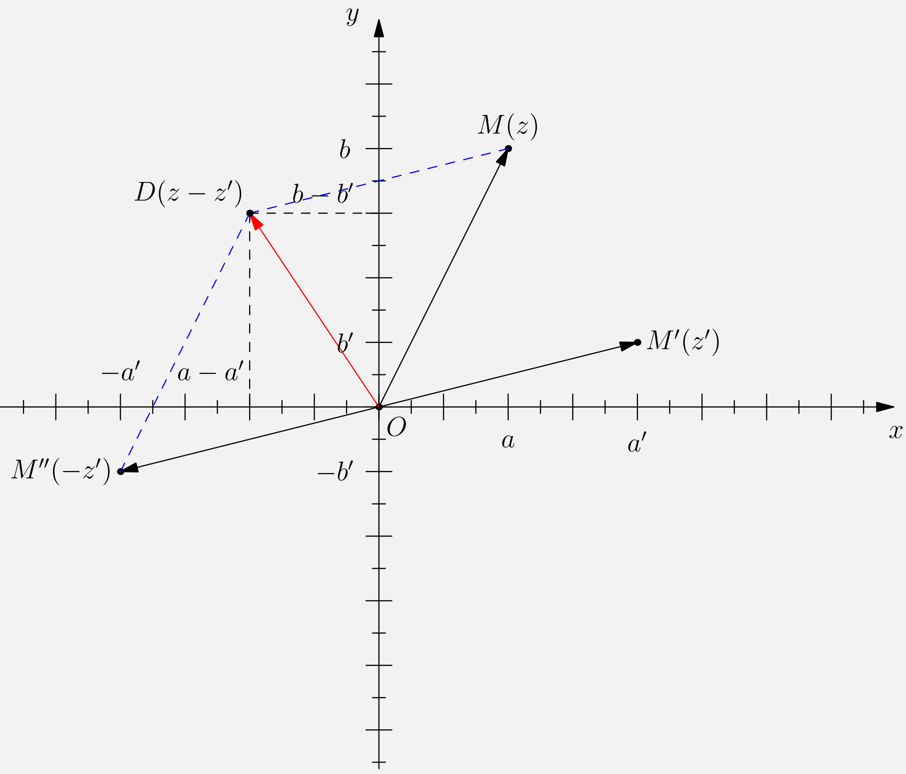
Exercice : Soit $z = 2 - i$. Mettre z^4, puis $1 + z + z^2 + z^3$ sous la forme $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées $(a\,,b)$ dans le plan.



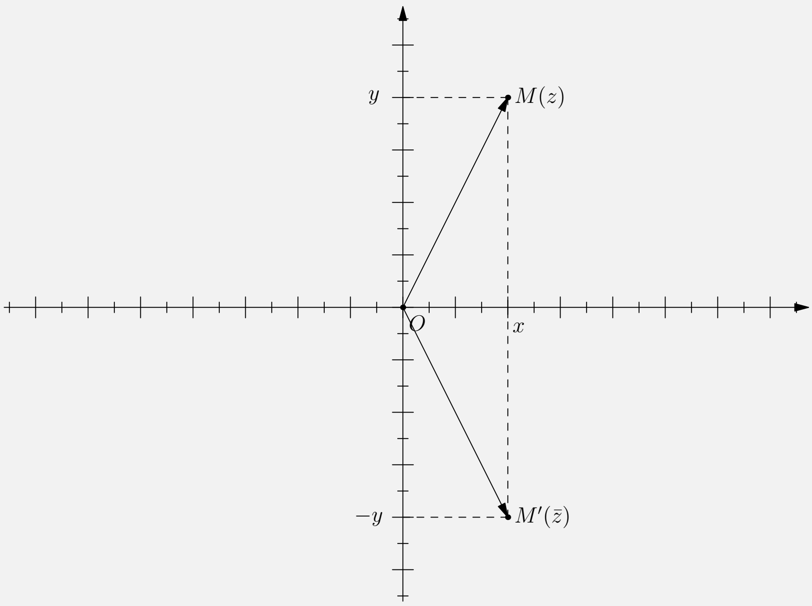

y
b + b'
S(z + z')
M(z)
b
b'
M'(z')
O
a
a'
a + a'
x


y
M(z)
b
D(z − z')
b − b'
b'
M'(z')
−a'
a − a'
O
a
a'
x
M''(−z')
−b'

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

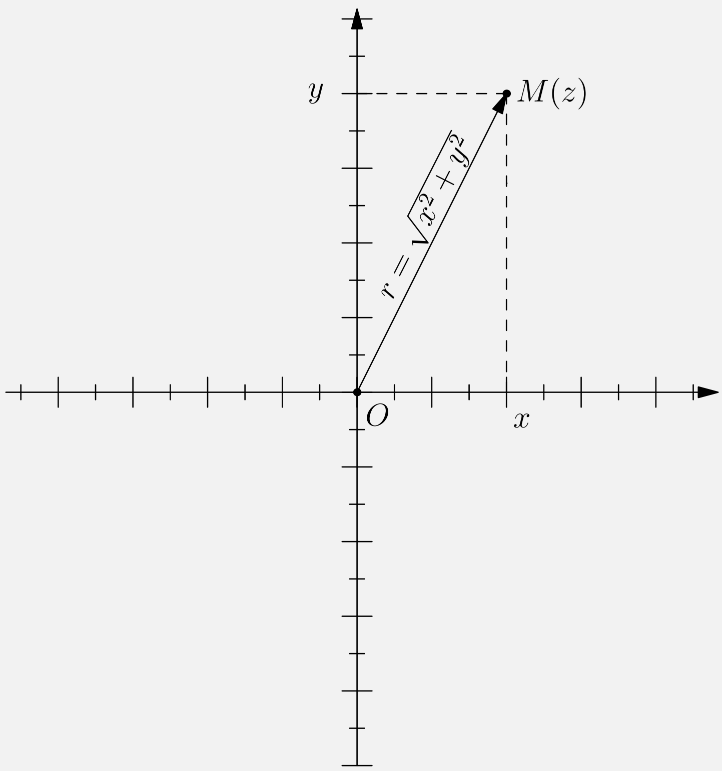
- $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\quad \overline{(\bar{z})} = z$, $\quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Exercice : a) Calculer $\overline{2 + 3i}$. b) Résoudre $z + 2\bar{z} = 0$.

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$; $|1/z| = 1/|z|$; $|z/z'| = |z|/|z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



On considère le plan complexe, muni d'un repère orthonormé.

Proposition : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$|z - z_0| = r$$

est le cercle de centre Ω (d'affixe z_0) et de rayon r.

Proposition : Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$|z - a| = |z - b|$$

est la médiatrice du segment $[AB]$, où A et B sont les points d'affixes a et b respectivement.

Proposition : Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation

$$\mathrm{Re}(az) = \alpha$$

est une droite (qui passe par le point d'affixe α/a).

Proposition : Tout nombre complexe a deux racines carrées opposées.

Exemple : trouver les racines carrées de $3 + 4i$

On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = 3 + 4i$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{cases}$$

D'où les deux solutions : $(x, y) = (2, 1)$ et $(x, y) = (-2, -1)$

Pour trouver les racines d'un nombre complexe $a+ib$,

on pose : $(x+iy)^2 = a+ib$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a & (1) \\ 2xy & = & b & (2) \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2

L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y (2 solutions possibles)

Exercice : Trouver les racines carrées des nombres complexes $4+3i$ et -4.

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\big(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\big) = 0 \\ &= a\big[\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\big] = 0 \\ &= a\big[\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\big] = 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les nombres complexes z, tels que $z + \dfrac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :

Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

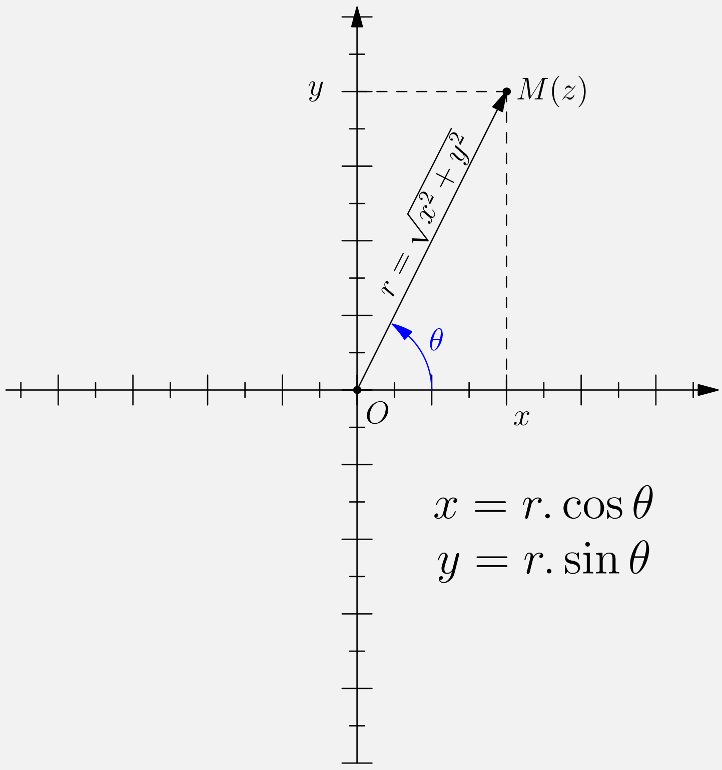
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$z = -\frac{b}{2\,a}$$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$2z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad z^2 + 2z + 5 = 0.$$



$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$

On dit qu'un réel θ est un argument du nombre complexe $z = x + iy$ ($z \neq 0$) s'il vérifie

$$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

On a alors

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

c'est-à-dire

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$

Remarque : tous les $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z

$\hookrightarrow$ On appelle argument principal de z l'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ argument de z

Notation : $\theta = \arg(z)$

Exemples

- $z = 1 + i \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
  Donc :
  $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $z = 3 + i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
  Donc :
  $z = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- $z = 1 - i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
  Donc :
  $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Exercice : Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = -3 + 3i$
2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
3. $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i$
4. $z_4 = 8i$
5. $z_5 = -2$

Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$$

$$= rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

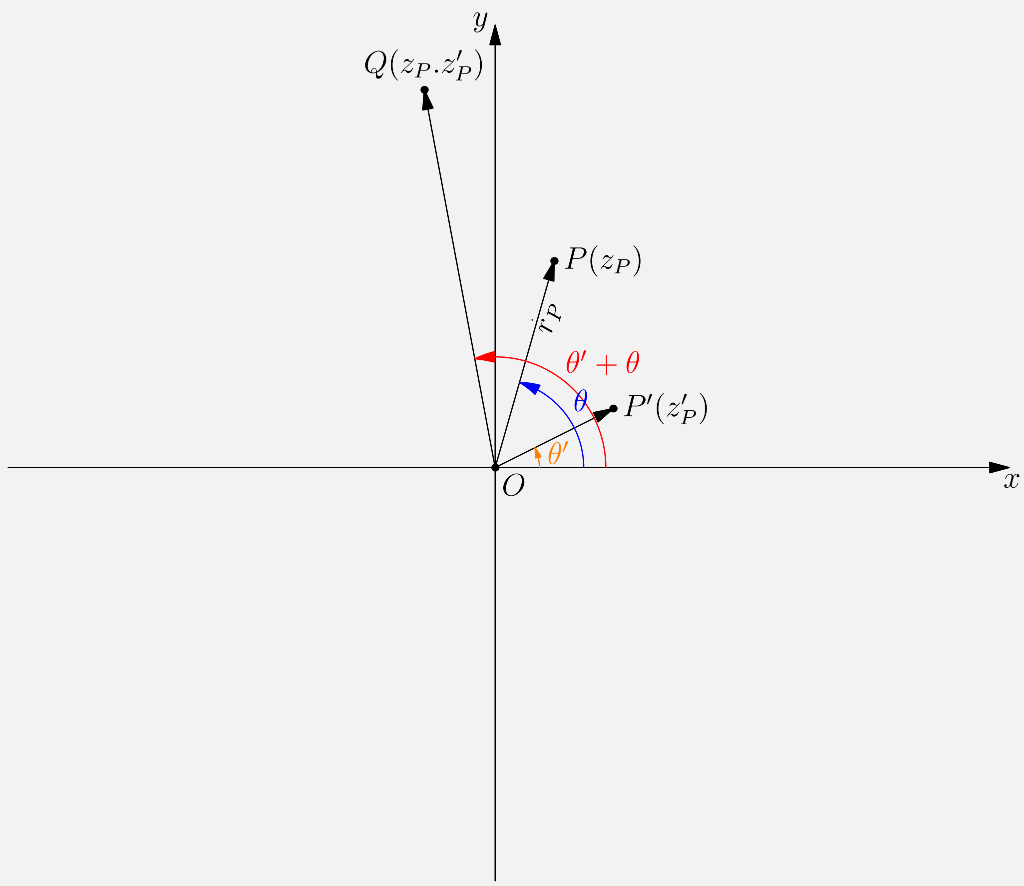
$$\hookrightarrow \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

l'égalité a lieu modulo 2π, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On multiplie les modules
- On additionne les arguments (modulo 2π)



- $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{r^2}$$

$$\hookrightarrow \arg(z^{-1}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

- $$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\big(\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)\big)$$

$$\hookrightarrow \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \quad (2\pi)$$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On divise les modules
- On soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur (modulo 2π)

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{zz\ldots z}_{n\text{-fois}} \\ &= \underbrace{rr\ldots r}_{n\text{-fois}}.\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\ldots(\cos\theta + i\sin\theta)}_{n\text{-fois}} \\ &= r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n z^{-n} = z^n \left(r^{-n}\big(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\big)\right) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}\big(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\big)}$$
$$= r^n\big(\cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)\big)$$
$$= r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$$

$\hookrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n\arg(z) \quad (2\pi)$

Ecriture trigonométrique et racine carrée

On vient de voir

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) \implies z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

$\hookrightarrow$ z admet pour racines carrées $\pm\sqrt{r}\big(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\big)$.

Exercice :

1. Mettre sous la forme trigonométrique le nombre complexe $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$.
2. Trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{z^2}{4} + z - i\sqrt{3} = 0$

Formule de Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

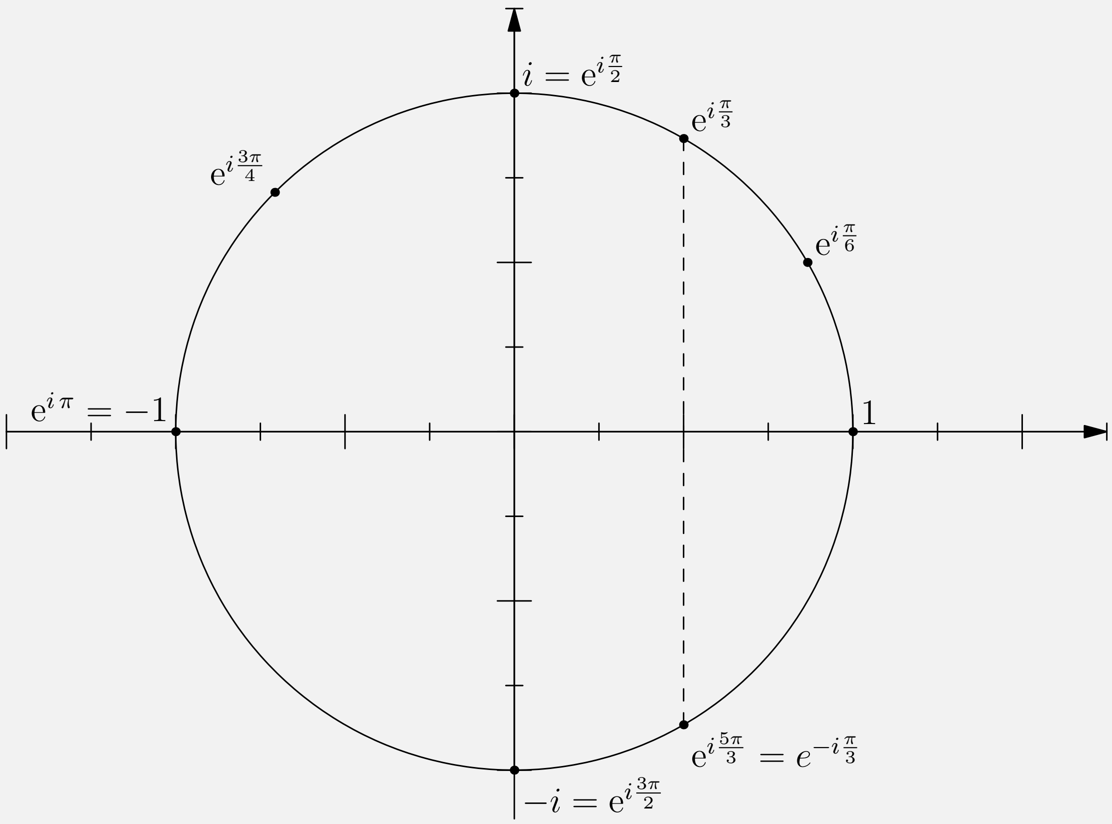
  Autrement dit, si θ est un argument de z, alors $z = |z|e^{i\theta}$.
- Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit

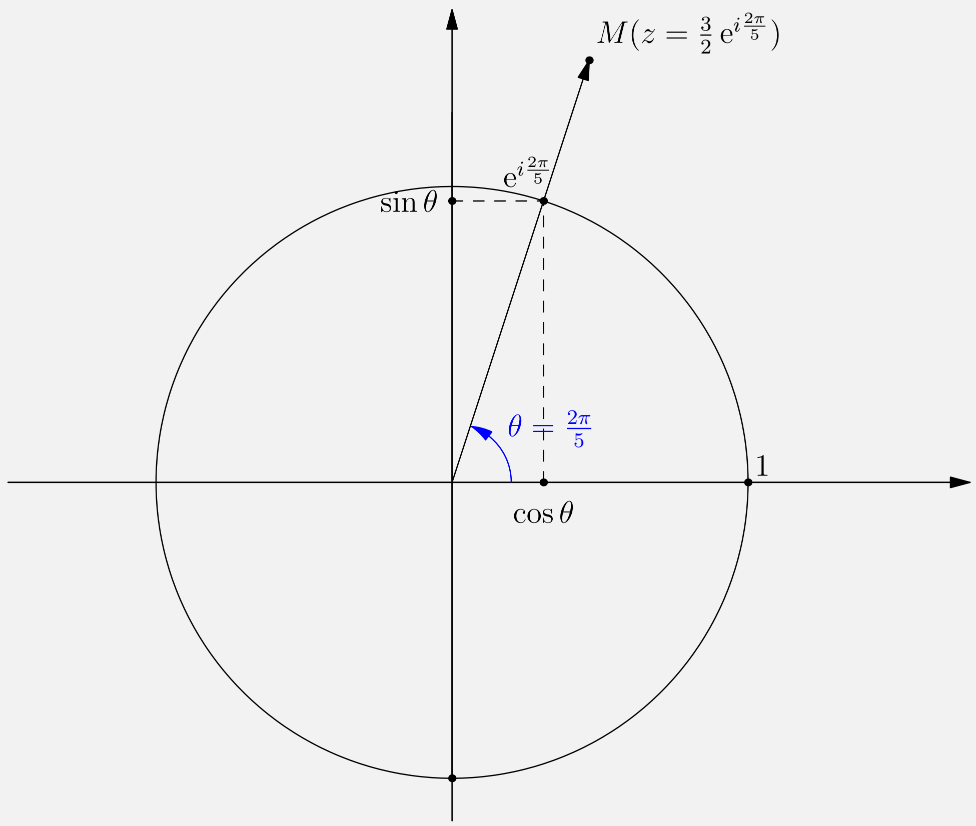
$$e^z = e^x e^{iy}.$$

On vérifie alors que pour tous nombres complexes z et z' et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$
$$1/e^z = e^{-z}$$
$$e^z/e^{z'} = e^{z-z'}$$
$$\left(e^z\right)^n = e^{nz}$$

Les nombres complexes de module 1





On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$
3. exponentielle : $z = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$

Racine *n-ième* d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine *n-ième* de z tout nombre complexe

$$a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tel que

$$z = a^n$$

$$z = a^n \iff r(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$\iff \begin{cases} \varrho^n &= r \\ n\alpha &= \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \varrho &= \sqrt[n]{r} \\ \alpha &= \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

et on peut se limiter aux $k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n-1$.

Théorème : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non-nul, a n racines n-*ièmes* :

$$a_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$0 \leq k \leq n-1$$

Racines *n-ièmes* de l'unité

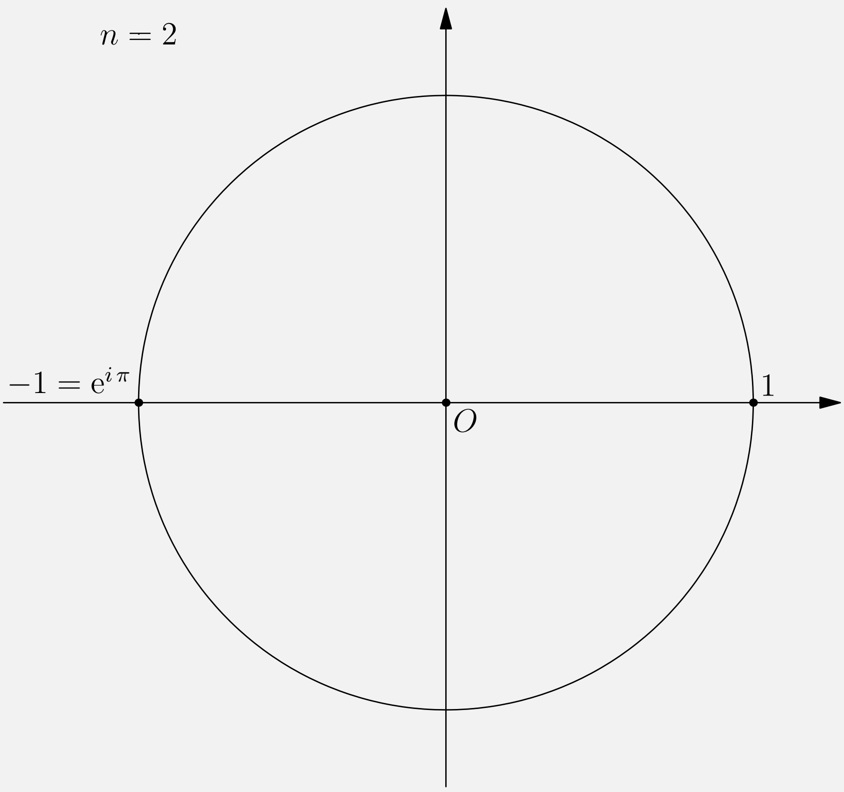
Si $z = 1$: $r = 1$, $\theta = 0$.

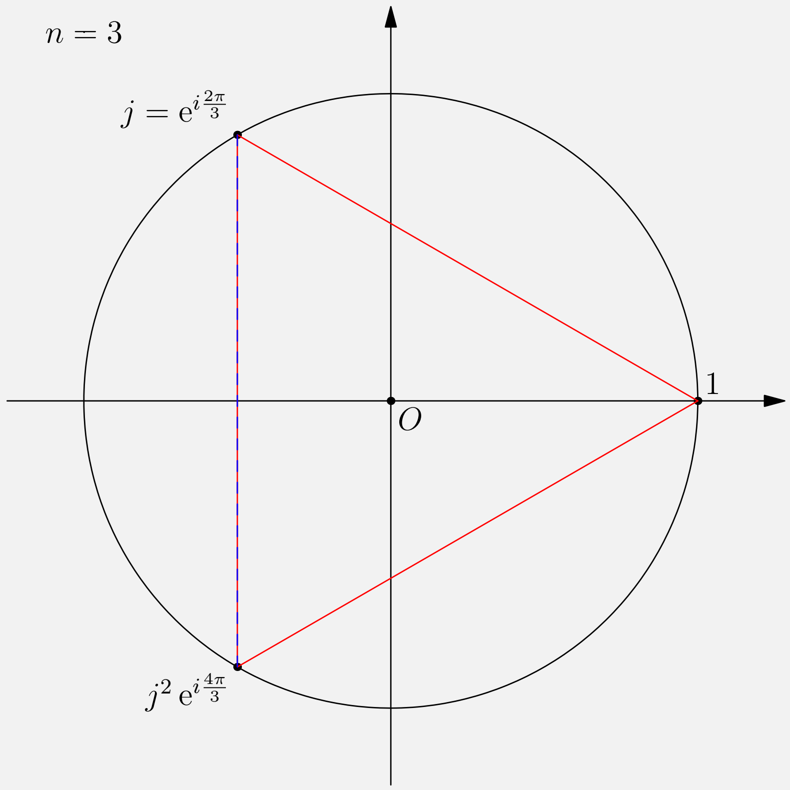
Les nombres complexes

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad 0 \le k \le n-1$$

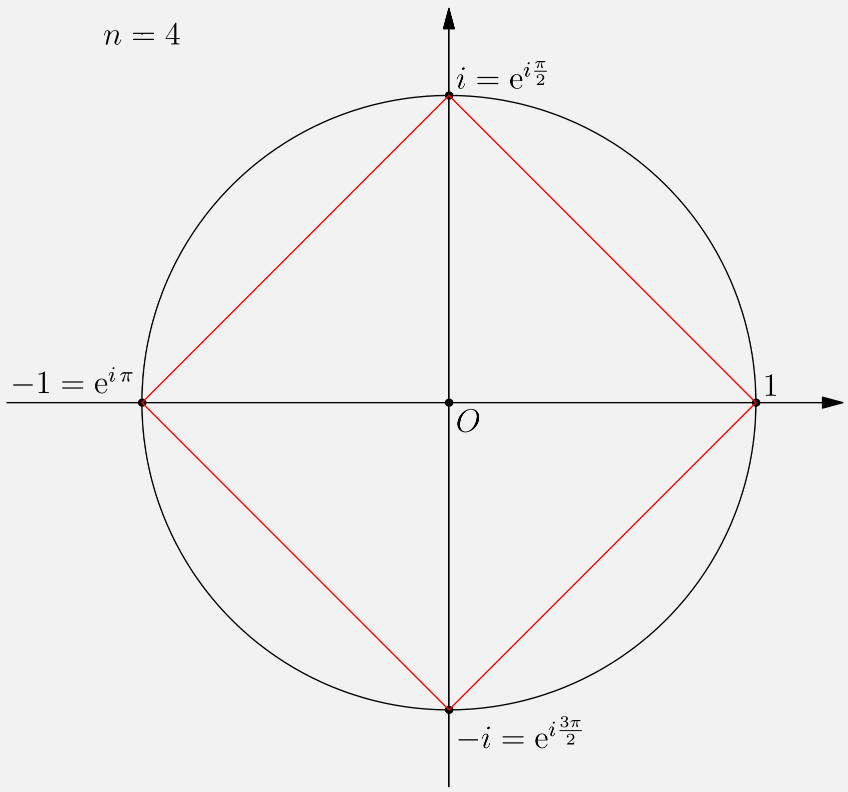
s'appellent les racines *n-ièmes* de l'unité.

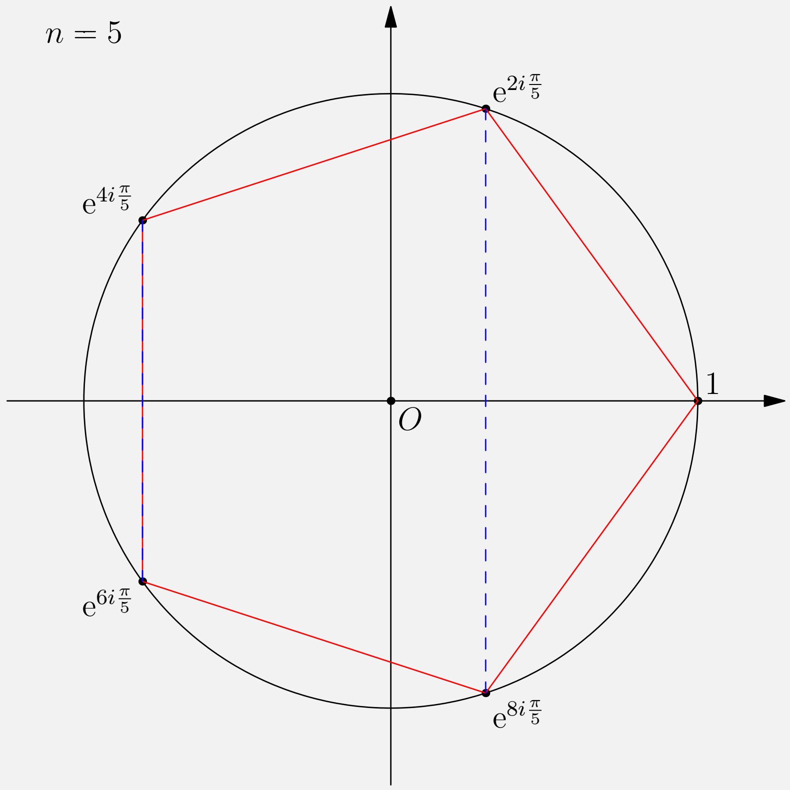
On a, pour tout k, $w_k = w_1^k$ et $w_k^n = 1$

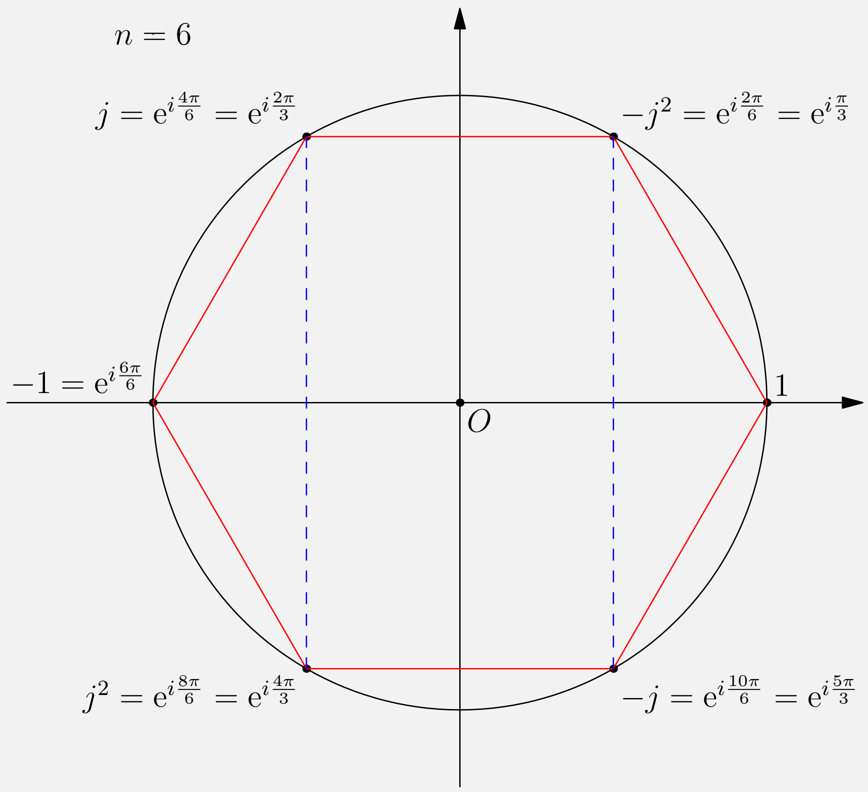




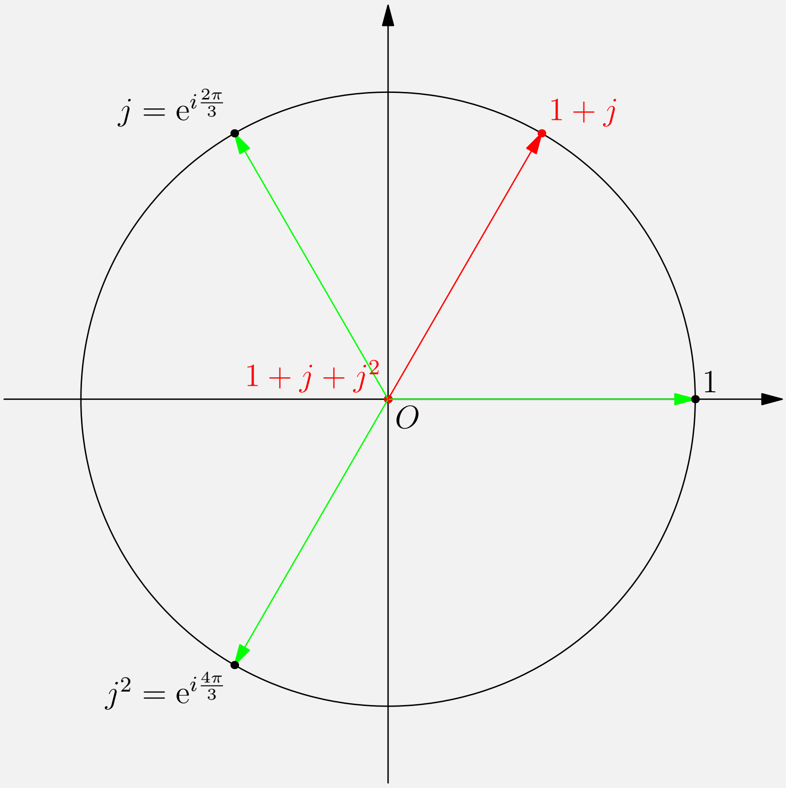
Nombres complexes et polynômes
Racines des nombres complexes




$n = 5$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$n = 6$
$j = e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$-j^2 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
$-1 = e^{i\frac{6\pi}{6}}$
1
O
$j^2 = e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$-j = e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Somme des racines n-ièmes de l'unité



Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

La somme des racines *n-ièmes* de l'unité est nulle

Soient $n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z :

$$a^n = b^n = z.$$

Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \omega_k \quad \Leftrightarrow \quad a = b.\omega_k$$

où $\omega_k (0 \le k \le n-1)$ est une racine *n-ième* de l'unité.

Théorème : On obtient les n racines *n-ièmes* d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines *n-ièmes* de l'unité.

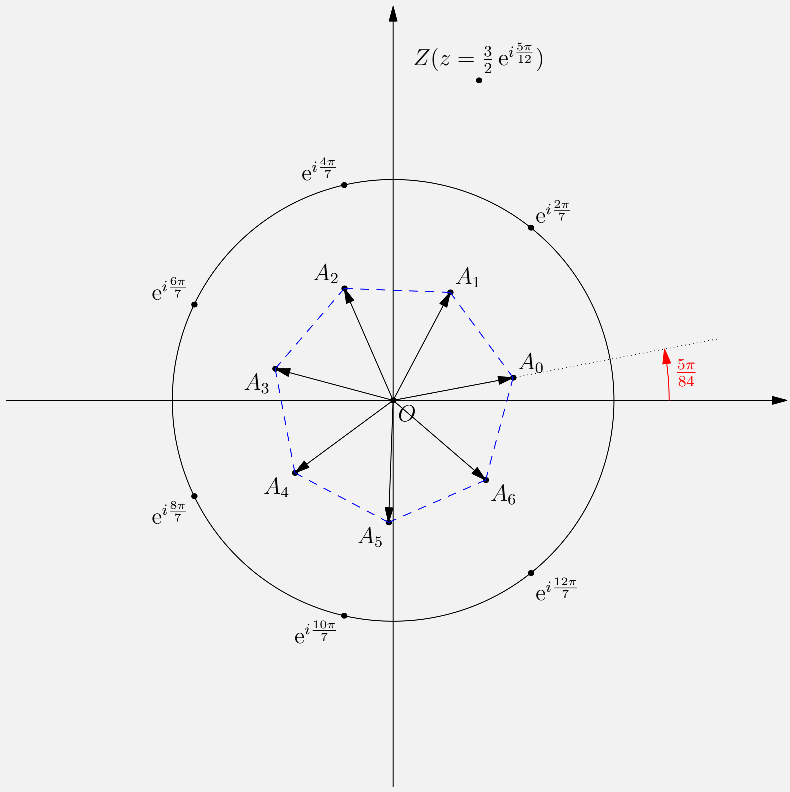
Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} \qquad a_0 = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{7\times 12}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{84}}$$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i\frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{12\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{149\pi}{84}}$



Exercice : Donner les trois racines cubiques du même nombre complexe $Z = 1 + i$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ défini par $\quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$$\mathrm{Re}(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\mathrm{Im}(z) = \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad ; \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ.

$\hookrightarrow$ utilité :

primitives des fonctions $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$: inconnues

primitives des fonctions $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$: connues

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
2^3 \cos^3 \theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\
&= (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= 2\cos 3\theta + 6\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

- On écrit : $2^n \cos^n \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$
- On développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme
- On regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Exercice : Linéariser $\cos^4\theta$ et $\sin^4\theta$.

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$$

$$\sin n\theta = \mathrm{Im}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= (\cos\theta)^4 + 4\,i\,(cos\theta)^3\sin\theta \\ &\quad + 6\,i^2\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4\,i^3\,(cos\theta)(\sin\theta)^3 \\ &\quad + i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

$$\sin 4\theta = 4\,(cos\theta)^3\sin\theta - 4\,cos\theta(\sin\theta)^3$$

Exercice : Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Trigonométrie (suite)

On montre de même avec la formule d'Euler, que pour tous a et b réels :

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

moyen mnémotechnique : “si co co si co co moins si si”

Trigonométrie (suite)

On peut se contenter de mémoriser

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et de retrouver les autres en changeant a en $\frac{\pi}{2} - a$ et b en $\frac{\pi}{2} \pm b$ ou $\pi + b$ selon les cas, puisque

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Polynômes

Définition : On appelle polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) une suite finie de coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ que l'on écrit sous la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$.

Vocabulaire et propriétés :

- un terme a_kX^k ($a_k \neq 0$) est appelé monôme de degré k
- le degré du polynôme est celui de son monôme de plus haut degré (appelé terme dominant)
- les opérations usuelles $P + Q$ et $P.Q$ munissent l'ensemble des polynômes d'une structure naturelle d'anneau
- Le symbole X est appelée variable ou indéterminée du polynôme

Racines et factorisation

Théorème : Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n, et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\alpha) = 0$ (on dit que α est une racine de P)

(ii) Il existe un polynôme Q de degré $n-1$, tel que $P = (X-\alpha).Q$

Le polynôme Q s'obtient de proche en proche, en commençant par le terme de plus haut degré. Par exemple si $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$, on a $P(2) = 0$ donc on peut écrire

$$\begin{aligned} P &= (X-2)(X^2 + \ldots) \text{ (on identifie le terme en } X^3) \\ &= (X-2)(X^2 - X + \ldots) \text{ (on identifie le terme en } X^2) \\ &= (X-2)(X^2 - X + 1) \text{ (on identifie le terme en } X). \end{aligned}$$

Racines multiples

Définition : Si α est une racine de P, on appelle multiplicité de α le plus grand entier k tel que l'on puisse factoriser P sous la forme $P = (X-\alpha)^k Q$ (avec Q polynôme, $Q \neq 0$).

Exemple : Le polynôme $X^3(X-1)(X-2)^2$ admet 3 racines : 0 (de multiplicité 3), 1 (racine simple), et 2 (racine double).

Définition : Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. On appelle polynôme dérivé de P (noté P') le polynôme

$$P' = a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^{n-1}.$$

En itérant le processus, on définit ainsi les dérivées successives P', P'', $P^{(3)}$, etc.

Théorème : $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité k de P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré n, à coefficients complexes, a exactement n racines complexes (comptées autant de fois que leur multiplicité).

Corollaire : Tout polynôme P de degré n, à coefficients complexes, peut s'écrire sous la forme

$$P = C(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n),$$

où C est le coefficient dominant de P et les complexes α_i sont les racines de P, comptées autant de fois que leur multiplicité.

Calcul des racines d'un polynôme

Si P est un polynôme de degré 1 ($P = a_0 + a_1X$), il admet $-a_0/a_1$ comme unique racine.

Si P est un polynôme de degré 2, ses 2 racines complexes (éventuellement confondues) peuvent se calculer explicitement à l'aide de racines carrées (formules usuelles avec le discriminant).

Si P est un polynôme de degré 3 ou 4, on dispose de formules du même genre (mais beaucoup plus compliquées) qui décrivent les racines de P.

En revanche, le théorème d'Abel (hors programme) affirme qu'il n'existe pas de telles formules générales lorsque le degré de P est au moins égal à 5. On est alors contraint d'avoir recours au calul numérique approché (méthode de dichotomie, de Newton, etc.).