Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

3. Fonctions d'une variable réelle - continuité

4. Fonctions d'une variable réelle - dérivabilité

Fonctions dérivables

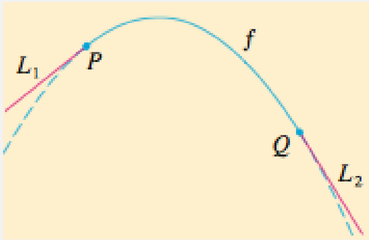
Dérivée :

- approche analytique : vitesse, accélération, taux d'une évolution temporelle :

Princ. fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{\text{Position}}''$

$\hookrightarrow$ trajectoires projectiles, satellites, planètes

- approche géométrique : tangente



Dérivée en un point

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe et est finie quand x tend vers x_0

Notation : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

Fonction dérivée

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable sur I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.

Dans ce cas la fonction

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

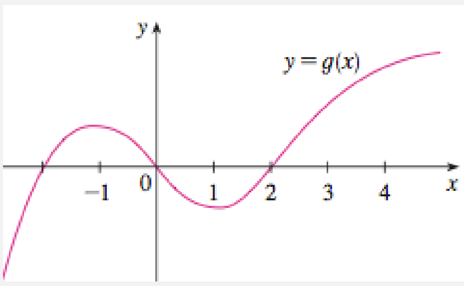
s'appelle la dérivée de f

Proposition : si f est dérivable en x_0, alors sa courbe admet en $(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

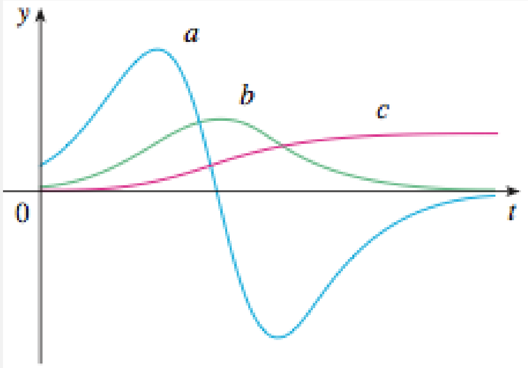
Exercice : Trouver l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $A(1,1)$ puis au point $B(0,0)$.

Exercice : Soit g la fonction dont le graphe est représenté ci dessous. Ordonner les nombres 0, $g'(-2)$, $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(4)$.



Interprétation physique : si $f(t)$ désigne la position, sur un axe, d'un mobile à l'instant t, alors $f'(t)$ désigne sa vitesse à l'instant t et $f''(t)$ désigne son accélération à l'instant t.

Exercice : Sur le graphe suivant son représentées, en fonction de l'instant t, la position d'un mobile sur un axe, sa vitesse et son accélération. Identifiez les trois courbes.



Dérivée à droite

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

a une limite à droite finie quand x tend vers x_0.

Notation : $f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Dérivée à gauche

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

a une limite à gauche finie quand x tend vers x_0.

Notation : $f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Proposition : Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 0, \\ e^x + 2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est continue et dérivable en 0.

Exercice : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Si on pose : $x - x_0 = h$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = 0$$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha(h) & = & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) & = & 0 \end{array}\right.$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$$

Donc si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+h) & = & f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h) \\ \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) & = & 0 \end{array}$$

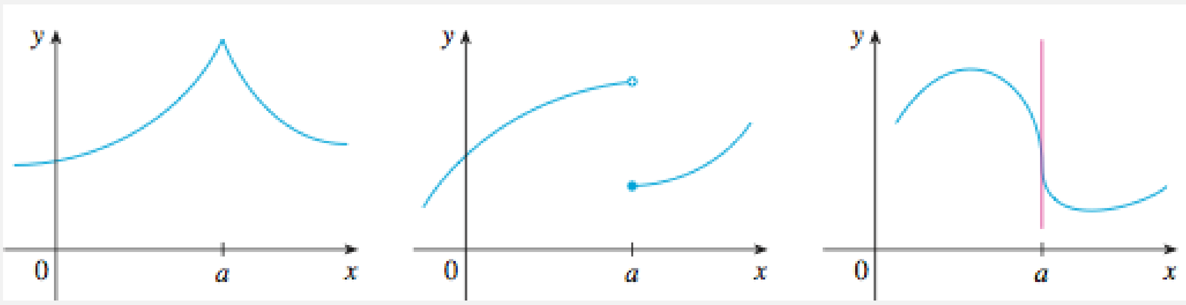
Proposition. Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0

Si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que $\alpha(0) = 0$ et $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$

On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention : Une fonction dérivable est continue ; le contraire est faux (la réciproque de cette proposition n'existe pas).

Exercice : Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?



Dérivée et opérations

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0

  $$\text{et} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

  $$(f+g)' = f' + g'$$

- $f.g$ est dérivable en x_0

  $$\text{et} \quad (f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

  $$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe
- $x_0 \in I$

Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big).f'(x_0)$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$$

Dérivée d'un quotient

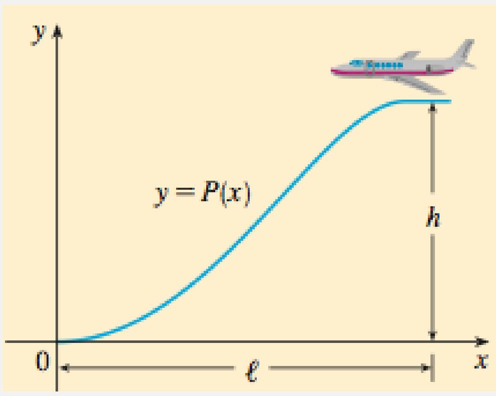
Dérivée de $\frac{f}{g}$

On écrit : $$\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Z})$		$u(x)^n$	$n \cdot u(x)^{n-1} u'(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
e^x	e^x		$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$		$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$		$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\tan(x)$	$1 + tan^2(x)$		$\tan(u(x))$	$u'(x)\left(1 + \tan^2(u(x))\right)$

Exercice : La trajectoire d'atterrissage d'un avion est soumise aux contraintes apparaissant dans la figure suivante (hauteur h, longueur ℓ, pentes initiale et finale nulles). Donner une fonction altitude $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui intègre toutes ces contraintes.



Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(1-e^x)}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0

Dérivées successives

Dérivées successives

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Dérivée seconde : Si $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on dit que f est deux-fois dérivable sur I.

Notation : $(f')' = f''$

f'' est la dérivée seconde de f sur I

Dérivée d'ordre n : On pose $f^{(0)} = f$

Pour tout p, $1 \leq p$, on définit : $f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)'$

$f^{(p)}$ s'appelle la dérivée p-ième de f.

Dérivées successives

Formule de Leibniz pour le produit de deux fonctions

Théorème (formule de Leibniz). Si f et g sont n-fois dérivables sur un intervalle I, alors :

- $f.g$ est n-fois dérivable sur I
- $\forall x, \quad (f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Noter l'analogie avec la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{pour} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Extrema locaux d'une fonction

Extrema

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

Soit $x_0 \in I$, on dit que :

- f a un maximum local en x_0, si :

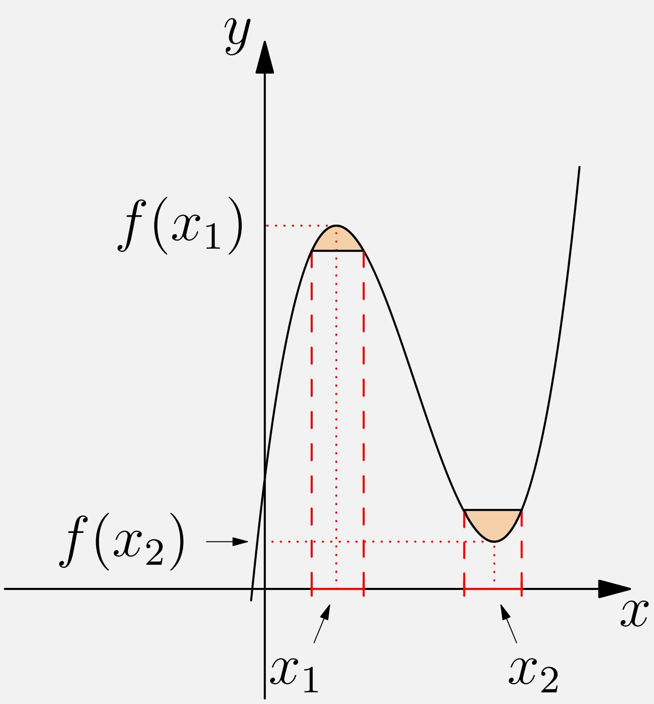
$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x,\ |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq f(x_0)$$

- f a un minimum local en x_0, si :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x,\ |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq f(x_0)$$

- extremum = maximum ou minimum

Extrema

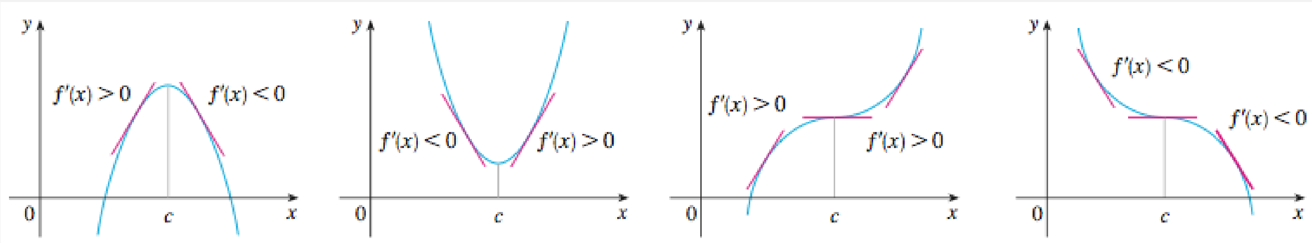


Condition nécessaire pour un extremum

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

Attention : On peut avoir $f'(x_0) = 0$ sans que la fonction ait un extremum en x_0 (la condition n’est pas suffisante).



Remarque : Une fonction peut avoir un extremum en x_0 sans être dérivable en x_0.

Exercice

Quel est, à volume fixé, la forme du cylindre de surface minimale ?
motivation : construire une boite de conserve de volume donné (et d’épaisseur donnée) avec le moins de métal possible.

Soit V le volume du cylindre, R le rayon de sa base, et h sa hauteur,

$$V = \pi R^2 h \quad \text{donc} \quad h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

La surface du cylindre est

$$f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Exercice (suite)

$$f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall R > 0, \quad f'(R) = 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V)$$

Le seul minimum local de f est atteint quand $2\pi R^3 = V$, soit $h = 2R$.

C'est le minimum global de f car $\lim_0 f = \lim_{+\infty} f = +\infty$ (faire un tableau de variation)

La cylindre solution a donc un diamètre égal à sa hauteur.

Théorème de Rolle

Théorème des accroissements finis

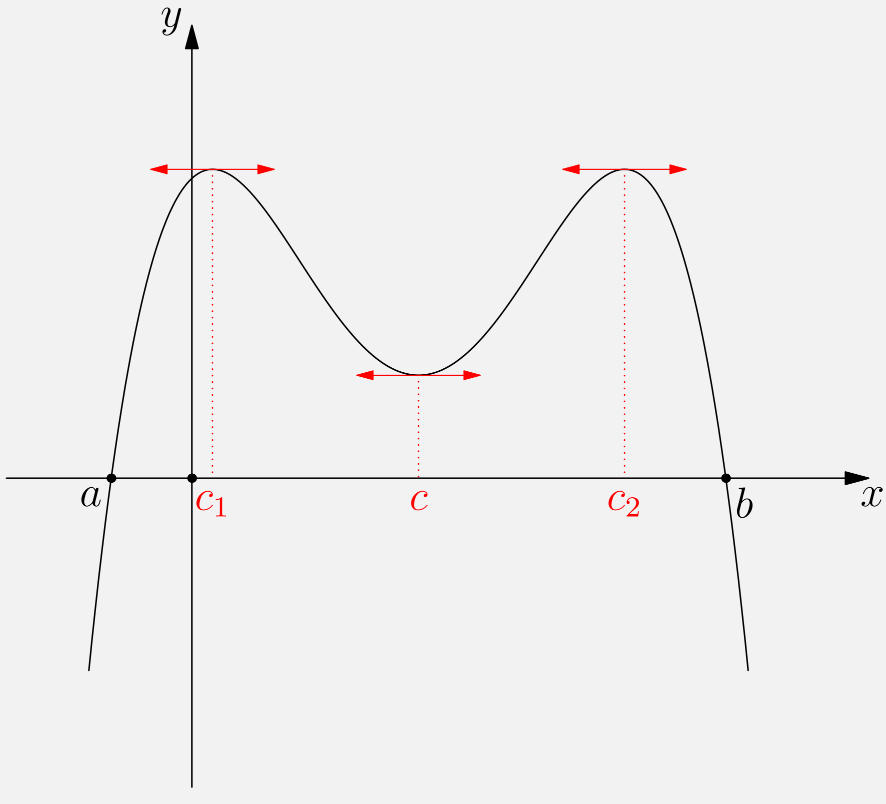
Théorème de Rolle

Théorème de Rolle. Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a\,,b[$ (intervalle ouvert)
- Si $f(a) = f(b)$

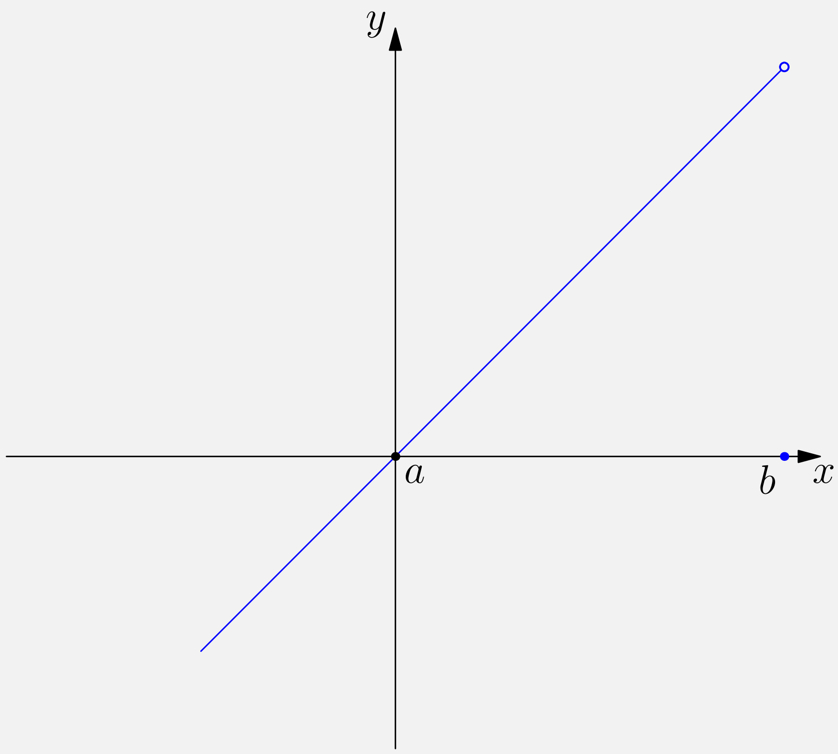
Alors il existe $c \in]a\,,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème de Rolle



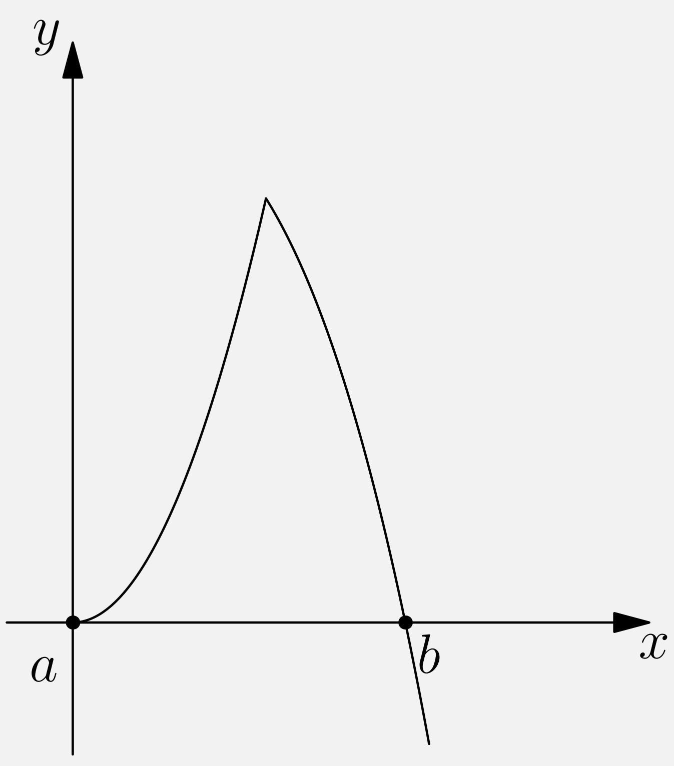
Le théorème de Rolle ne s'applique pas

Si f n'est pas continue sur $[a, b]$



Le théorème de Rolle ne s'applique pas

Si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$



Exercice

Comment utiliser le théorème de Rolle

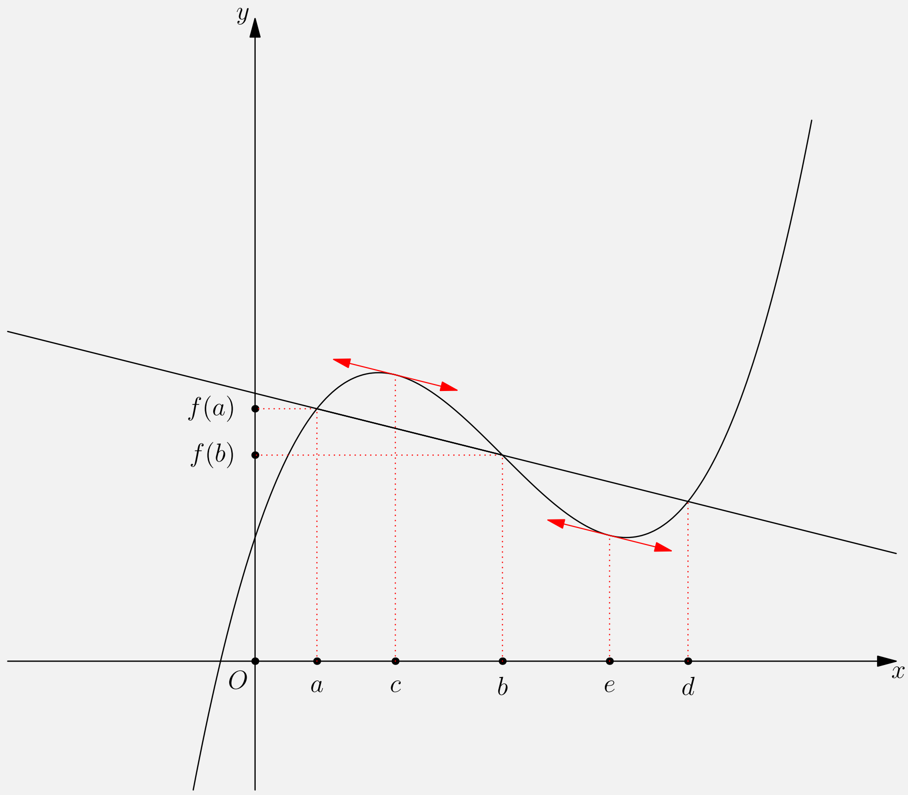
Entre deux racines de l'équation : $e^x \sin x = 1$, il existe une racine de l'équation : $e^x \cos x = -1$

Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis. Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Théorème des accroissements finis

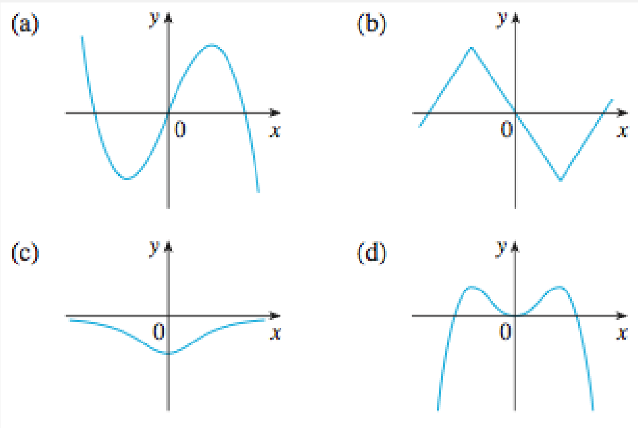
Corollaires

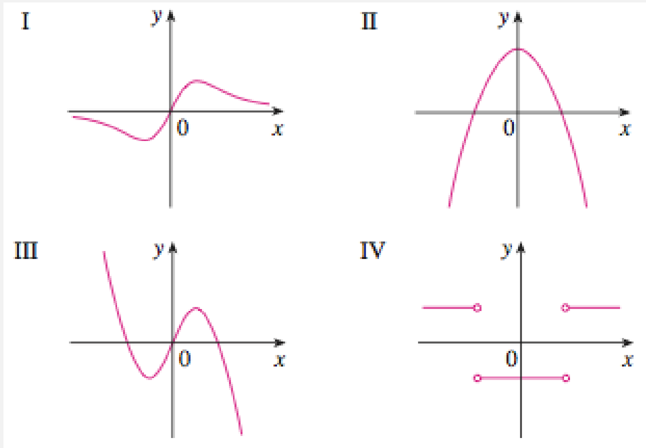
Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

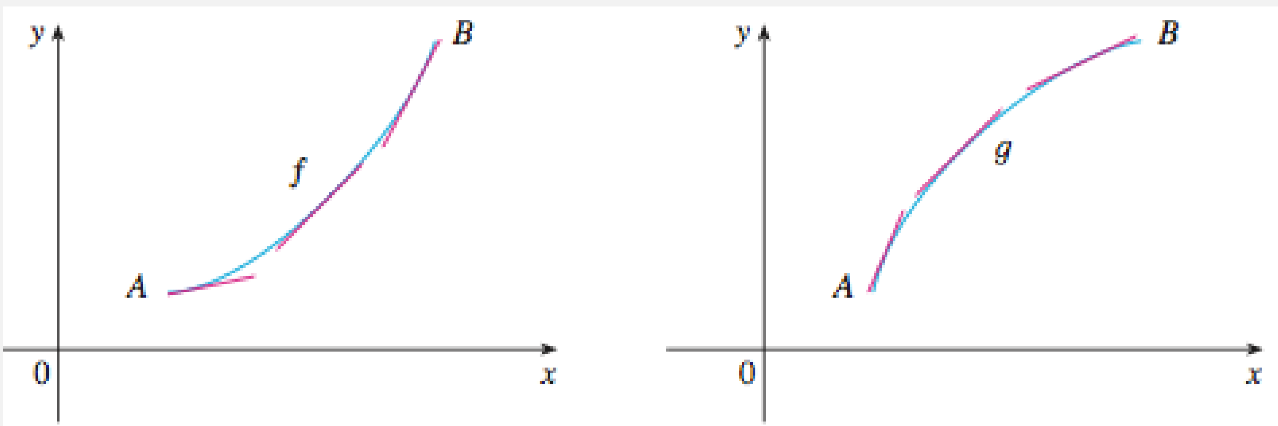
- **Corollaire 1 :** Si $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est constante sur $[a, b]$
- **Corollaire 2 :** Si $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est croissante sur $[a, b]$
- **Corollaire 3 :** Si $f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est décroissante sur $[a, b]$

Exercice : Associer les courbes représentatives des functions (a)–(d) aux courbes de dérivées correspondantes I–IV.

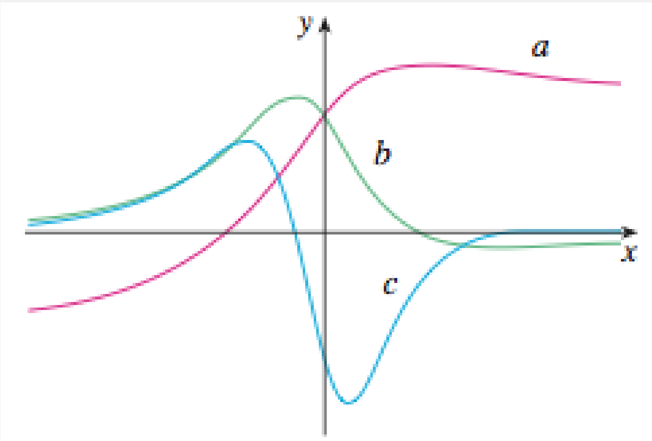


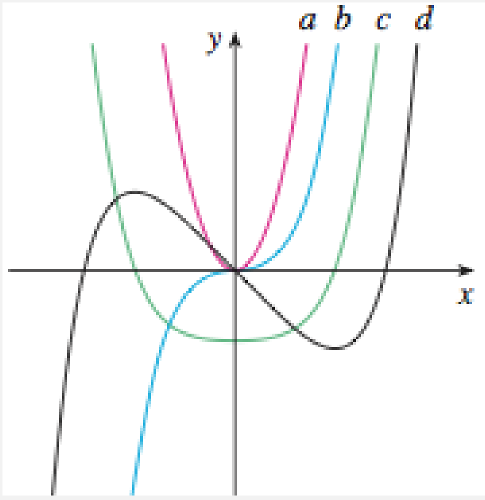


Exercice : Les courbes de deux fonctions f et g ont été représentées ci dessous, avec certaines de leurs tangentes. Sauriez-vous donner les signes de f'' et de g'' ?



Exercice : a) Sur la figure de gauche sont représentées les fonctions f, f', f''. Identifiez-les.
b) Sur la figure de droite sont représentées les fonctions g, g', g'', g'''. Identifiez-les.





Inégalité des accroissements finis

Théorème (Inégalité des accroissements finis).
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et vérifiant

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq K$$

pour une certaine constante $K > 0$. Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

Exercice : Prouver que pour tous $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,
$|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Exercice : Prouver que pour tout $x \geq 0$, $|\sin(x)| \leq x$.

Règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital

Théorème. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage I d'un réel a, et dérivables en a.

$$\text{Si } \begin{cases} f(a) = g(a) = 0 \\ g'(a) \neq 0 \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Preuve : On peut écrire, pour $h \neq 0$ et $a + h \in I$,

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h) = h.f'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

et de même,

$$g(a+h) = h.g'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h).$$

On a donc

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h.f'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h)}{h.g'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h)} = \frac{f'(a) + \underset{h \to 0}{o}(1)}{g'(a) + \underset{h \to 0}{o}(1)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Exercice : Calculer

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1}.$$

Exercice : Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x \cos x - x}.$$

Applications

Équivalents à connaître

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\sin'(0) = 1)$
- $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\tan'(0) = 1)$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\ln'(1) = 1)$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ car $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ $(\exp'(0) = 1)$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- plus généralement : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

  En effet $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ avec
  $f(x) = (1+x)^\alpha$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ et $f'(0) = \alpha$.

Exercice

Exercice : Soit n un entier naturel, et a et b deux nombres réels. Montrer que le polynôme $P = X^n + aX + b$ a au plus 3 racines réelles.

• Si $n \leq 3$, P est de degré au plus 3 donc admet au plus 3 racines.
• Si $n \geq 4$, montrons le résultat par l'absurde.
Supposons que P admette 4 racines réelles $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
D'après le théorème de Rolle, comme P est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $P(x_1) = P(x_2) = 0$, il existe $y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $P'(y_1) = 0$.
On montre de même l'existence de $y_2 \in]x_2, x_3[$ et $y_3 \in]x_3, x_4[$, racines de P'.
Avec la même méthode appliquée à P' pour y_1, y_2, y_3, on obtient l'existence de deux racines z_1 et z_2 de P'' avec $z_1 < z_2$.
Or $P'' = n(n-1)X^{n-2}$ n'admet qu'une racine (0), on a donc une contradiction et le résultat est démontré.

Exercice

Exercice : Trouver tous les réels $t > 0$ tels que $4^t - 3^t = 2^t - 1$.

Posons, pour $x > 0$, $f(x) = x^t$ (c'est-à-dire $f(x) = \exp(t \ln x)$).
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{t}{x}.\exp(t \ln x) = tx^{t-1}$.
L'équation de départ se réécrit $f(4) - f(3) = f(2) - f(1)$.
Appliquons le théorème des accroissements finis entre 3 et 4 (f continue sur $[3, 4]$, dérivable sur $]3, 4[$) :

$$\exists c \in]3, 4[, \quad \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = f'(c)$$

soit $f(4) - f(3) = tc^{t-1}$. De même (entre 1 et 2) on obtient l'existence de $d \in]1, 2[$ tel que $f(2) - f(1) = td^{t-1}$.
On a donc $c^{t-1} = d^{t-1}$, soit $(t-1)\ln c = (t-1)\ln d$.
Conclusion : l'unique solution est $t = 1$.