Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°4 : Séries

2019-2020

Fiche guidée n°3

Séries numériques

Méthode de travail

Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
Ne vous contentez pas de la lire.

Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.

Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.

Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape** Posons, pour tout $n \geq 0$, $v_n = n^2 r^n$ et montrons que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape** Posons, pour tout $n \geq 0$, $v_n = n^2 r^n$ et montrons que la série $\sum v_n$ converge. On remarque d'abord que le terme général de la série est de signe quelconque. Etudions la convergence absolue de la série.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape** Posons, pour tout $n \geq 0$, $v_n = n^2 r^n$ et montrons que la série $\sum v_n$ converge. On remarque d'abord que le terme général de la série est de signe quelconque. Etudions la convergence absolue de la série.

$$\left| \frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 |r| \underset{+\infty}{\sim} |r|. \text{ Donc } \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

Ainsi d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge absolument donc elle converge.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape** Posons, pour tout $n \geq 0$, $v_n = n^2 r^n$ et montrons que la série $\sum v_n$ converge. On remarque d'abord que le terme général de la série est de signe quelconque. Etudions la convergence absolue de la série.

$$\left| \frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 |r| \underset{+\infty}{\sim} |r|. \text{ Donc } \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

Ainsi d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge absolument donc elle converge.

2$^{\text{ème}}$ **étape** Calculons la somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape** Posons, pour tout $n \geq 0$, $v_n = n^2 r^n$ et montrons que la série $\sum v_n$ converge. On remarque d'abord que le terme général de la série est de signe quelconque. Etudions la convergence absolue de la série.

$$\left| \frac{(n+1)^2 r^{n+1}}{n^2 r^n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 |r| \underset{+\infty}{\sim} |r|. \text{ Donc } \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \underset{+\infty}{\longrightarrow} |r| < 1.$$

Ainsi d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge absolument donc elle converge.

$2^{\text{ème}}$ **étape** Calculons la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$.

Rappel La série $\sum r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$ et, dans ce cas,

$$\sum_{r=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Commençons par calculer $s = \sum_{n=0}^{\infty} n r^n$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

Comme précédemment, on utilise le critère de d'Alembert pour montrer que $\sum nr^n$ converge absolument et donc converge.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

Comme précédemment, on utilise le critère de d'Alembert pour montrer que $\sum nr^n$ converge absolument et donc converge.

De plus, $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, puisque, pour $n = 0$, le terme est nul.

D'où

$$s = r\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = r\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)r^m = r\sum_{m=0}^{\infty} mr^m + r\sum_{m=0}^{\infty} r^m = rs + r\frac{1}{1-r}.$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

Comme précédemment, on utilise le critère de d'Alembert pour montrer que $\sum nr^n$ converge absolument et donc converge.

De plus, $s = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, puisque, pour $n = 0$, le terme est nul.

D'où

$$s = r\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = r\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)r^m = r\sum_{m=0}^{\infty} mr^m + r\sum_{m=0}^{\infty} r^m = rs + r\frac{1}{1-r}.$$

Ainsi, $s = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Utilisons le même procédé pour calculer $S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$.

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1}$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1} = r \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 r^m$$

$$= r \sum_{m=0}^{\infty} \left(m^2 + 2m + 1\right) r^m.$$

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \text{ avec } |r| < 1 \quad (E_5)$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n = r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1} = r \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 r^m$$

$$= r \sum_{m=0}^{\infty} \left(m^2 + 2m + 1 \right) r^m.$$

D'où, en développant,

$$S = rS + 2rs + r\frac{1}{1-r}.$$

Ainsi,

$$(1-r)S = 2rs + r\frac{1}{1-r} = \frac{2r^2}{(1-r)^2} + \frac{r}{1-r} = \frac{r^2+r}{(1-r)^2}, \quad S = r\frac{r+1}{(1-r)^3}.$$

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

En posant $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$, pour tout $N \geq 1$, on cherche la somme

$$s = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

En posant $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$, pour tout $N \geq 1$, on cherche la somme

$$s = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Pour $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= a\sum_{n=1}^{N} u_n + b\sum_{n=1}^{N} u_{n+1} + c\sum_{n=1}^{N} u_{n+2}\\ &= a\sum_{n=1}^{N} u_n + b\sum_{n=2}^{N+1} u_n + c\sum_{n=3}^{N+2} u_n\end{aligned}$$

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= (a+b+c)\sum_{n=3}^{N} u_n + a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2}) \\ &= a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2})\end{aligned}$$

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= (a+b+c)\sum_{n=3}^{N} u_n + a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2}) \\ &= a(u_1+u_2) + b(u_2+u_{N+1}) + c(u_{N+1}+u_{N+2})\end{aligned}$$

Comme $u_n \longrightarrow 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n = a(u_1+u_2) + bu_2$.

Ainsi, $\sum v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = a(u_1+u_2) + bu_2$.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1$^{\textbf{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1$^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1**ère** **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

2**ème** **étape :** Calculons la somme de cette série.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1$^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** Calculons la somme de cette série.

Par une décomposition en éléments simples, $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n+1}$.

On pose, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

Exercice 7

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1**ère** **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

2**ème** **étape :** Calculons la somme de cette série.

Par une décomposition en éléments simples, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}$.

On pose, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Alors,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{2}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2} - 1 - 2 + \frac{2}{N+1},$$ en reconnaissant une somme télescopique.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

On a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 3$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\frac{\pi^2}{6} - 3 = \frac{\pi^2 - 9}{3}$.

Remarque : Faites bien attention au **premier terme** de la somme lorsque vous la calculez !
Par exemple, ici pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, la somme commence à $n = 1$ donc il ne faut pas oublier d'ajouter le terme avec $n = 1$ ($\frac{1}{1^2}$) s'il manque, dans le calcul page précédente.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

1$^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

1**ère** **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, qui, à une constante près, est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

1$^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.

La série est à termes positifs et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, qui, à une constante près, est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** Calculons la somme de cette série.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.
La série est à termes positifs et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, qui, à une constante près, est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Calculons la somme de cette série.
Pour cela, remarquons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. (On a séparé les termes pairs et les termes impairs.) Toutes les séries convergent bien.

Exercice 7

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Montrons la convergence de la série.
La série est à termes positifs et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, qui, à une constante près, est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc par théorème de comparaison, la série est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Calculons la somme de cette série.
Pour cela, remarquons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. (On a séparé les termes pairs et les termes impairs.) Toutes les séries convergent bien.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Ainsi, la somme de la série vaut $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Indication : Ici, il faut montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et inversement que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Indication : Ici, il faut montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et inversement que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Indication : Ici, il faut montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et inversement que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

1**ère** **étape :** Supposons que $\sum u_n$ converge.

Il existe $s \in \mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = s$. Donc, en revenant aux sommes partielles,

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Indication : Ici, il faut montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et inversement que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

1**ère** **étape :** Supposons que $\sum u_n$ converge.

Il existe $s \in \mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = s$. Donc, en revenant aux sommes partielles,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} u_{2n} + \sum_{n=1}^{N} u_{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \sum_{n=1}^{2N+1} u_n - u_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} s - u_1.$$

Ainsi, $\sum v_n$ converge.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

2**ème** **étape :** Supposons désormais que $\sum v_n$ converge.

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons désormais que $\sum v_n$ converge.

On a toujours $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n.$

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

2$^{\textbf{ème}}$ **étape :** Supposons désormais que $\sum v_n$ converge.

On a toujours $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n$. Comme $u_n \geq 0$, on a la majoration

$$\sum_{n=2}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Exercice 8

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons désormais que $\sum v_n$ converge.

On a toujours $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n$. Comme $u_n \geq 0$, on a la majoration

$$\sum_{n=2}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n.$$

Donc, nécessairement $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n$ a une limite finie et $\sum u_n$ est convergente. On a bien montré que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Remarquons que, dans ce sens, l'hypothèse $u_n \geq 0$ est utile. Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$, $\sum u_n$ diverge, $v_n = 0$, $\sum v_n$ converge.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

1$^{\textbf{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$v_n \sim u_n.$$

Les séries sont à termes positifs, donc par théorème de comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$v_n \sim u_n.$$

Les séries sont à termes positifs, donc par théorème de comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$v_n \sim u_n.$$

Les séries sont à termes positifs, donc par théorème de comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge. Exprimons u_n en fonction de v_n.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$v_n \sim u_n.$$

Les séries sont à termes positifs, donc par théorème de comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge. Exprimons u_n en fonction de v_n. On a $(1+u_n)v_n = u_n$, donc $v_n + u_n(v_n - 1) = 0$ d'où

$$u_n = \frac{v_n}{1-v_n}.$$

Le même raisonnement aboutit à la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

$1^{\text{ère}}$ **étape :** Supposons $\sum u_n$ convergente. En particulier u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$v_n \sim u_n.$$

Les séries sont à termes positifs, donc par théorème de comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge. Exprimons u_n en fonction de v_n. On a $(1+u_n)v_n = u_n$, donc $v_n + u_n(v_n - 1) = 0$ d'où

$$u_n = \frac{v_n}{1-v_n}.$$

Le même raisonnement aboutit à la convergence de $\sum u_n$.

Ainsi, les séries ont la même nature.

Remarque : Attention, ici, on ne peut déduire que $v_n \sim u_n$ que parce que $u_n \longrightarrow 0$ (ou $v_n \longrightarrow 0$) qui vient de la convergence de $\sum u_n$ (ou de $\sum v_n$). Sans cette hypothèse, nous n'avons pas l'équivalence.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

Rappel : Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer qu'une suite (a_n) est décroissante :

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
- Si (a_n) est à termes strictement positifs, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.
- Poser f une fonction telle que $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que f est décroissante.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

Rappel : Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer qu'une suite (a_n) est décroissante :

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
- Si (a_n) est à termes strictement positifs, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.
- Poser f une fonction telle que $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que f est décroissante.

Ici, en observant la forme de la suite (a_n) (puissances, factorielles), et en remarquant que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, on étudie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

Rappel : Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer qu'une suite (a_n) est décroissante :

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
- Si (a_n) est à termes strictement positifs, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.
- Poser f une fonction telle que $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que f est décroissante.

Ici, en observant la forme de la suite (a_n) (puissances, factorielles), et en remarquant que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, on étudie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}\,\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1.$$

Donc la suite (a_n) est décroissante.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.
Remarquons d'abord que la série est à termes positifs. On peut simplifier l'écriture de v_n :

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.

Remarquons d'abord que la série est à termes positifs. On peut simplifier l'écriture de v_n :

$$v_n = -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = -\ln\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\right) = -\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.

Remarquons d'abord que la série est à termes positifs. On peut simplifier l'écriture de v_n :

$$
\begin{aligned}
v_n &= -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = -\ln\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\right) = -\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\
&= -\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.
Remarquons d'abord que la série est à termes positifs. On peut simplifier l'écriture de v_n :

$$v_n = -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = -\ln\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\right) = -\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$
$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

On rappelle que $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ donc $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n+1}$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Notons $v_n = -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ et montrons que $\sum v_n$ diverge.
Remarquons d'abord que la série est à termes positifs. On peut simplifier l'écriture de v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = -\ln\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\right) = -\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

On rappelle que $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$ donc $-\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n+1}$.
La série de terme général $\dfrac{1}{2n+1}$ diverge. Donc la série de terme général v_n diverge.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

On a aussi $v_n = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

On a aussi $v_n = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \Big(\ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)\Big) = \ln(a_0) - \ln(a_N)$$

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

On a aussi $v_n = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)\big) = \ln(a_0) - \ln(a_N)$$

Ainsi, la série de terme général v_n est de même nature que la suite $(\ln(a_n))$. Par conséquent, la suite $(\ln(a_n))$ diverge.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

On a aussi $v_n = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)\big) = \ln(a_0) - \ln(a_N)$$

Ainsi, la série de terme général v_n est de même nature que la suite $(\ln(a_n))$. Par conséquent, la suite $(\ln(a_n))$ diverge.

La suite (a_n) est décroissante et la fonction ln est croissante donc la suite $(\ln(a_n))$ est décroissante et elle diverge.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).

On a aussi $v_n = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \Big(\ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)\Big) = \ln(a_0) - \ln(a_N)$$

Ainsi, la série de terme général v_n est de même nature que la suite $(\ln(a_n))$. Par conséquent, la suite $(\ln(a_n))$ diverge.

La suite (a_n) est décroissante et la fonction ln est croissante donc la suite $(\ln(a_n))$ est décroissante et elle diverge.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = -\infty$. Par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Préciser alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Préciser alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$.

Rappel : Critère spécial des séries alternées Soit (a_n) une suite réelle décroissante et tendant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Préciser alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} w_n$.

Rappel : Critère spécial des séries alternées Soit (a_n) une suite réelle décroissante et tendant vers 0. Alors la série $\displaystyle\sum (-1)^n a_n$ converge.

On sait que (a_n) est une suite positive, décroissante qui tend vers 0 donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\displaystyle\sum w_n$ converge.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.

Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, pour tout $n \geq 0$, on a

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante.

Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.

Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

Ainsi, $0 \leq x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x}$ et donc par monotonie de l'intégrale

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

En posant $f'(x) = x^n$ et $g(x) = e^{-x}$, on a $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $g'(x) = -e^{-x}$.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

En posant $f'(x) = x^n$ et $g(x) = e^{-x}$, on a $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $g'(x) = -e^{-x}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} (-e^{-x})\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\, \mathrm{d}x. \\ &= \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} u_{n+1} \end{aligned}$$

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

En posant $f'(x) = x^n$ et $g(x) = e^{-x}$, on a $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $g'(x) = -e^{-x}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} (-e^{-x}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} \, \mathrm{d}x. \\ &= \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} u_{n+1} \end{aligned}$$

Remarque : Notez que faire l'intégration par partie "dans l'autre sens" donne la même relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} et donc fonctionne aussi :

$$u_n = \left[x^n (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} (-e^{-x}) \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + n u_{n-1}.$$

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

3. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right). \tag{1}$$

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

3. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right). \tag{1}$$

Rappel : Démonstration par récurrence Une démonstration par récurrence se fait en deux temps :

– Initialisation : Vérifier la propriété pour un entier n_0.
– Hérédité : Supposer que la propriété est satisfaite pour un rang n et prouver qu'elle est vérifiée au rang $n+1$.

Alors la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

3. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right). \qquad (1)$$

1ière **étape** Pour $n = 0$, on a $u_0 = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{0!}{e}\left(e - 1\right)$. L'égalité (1) est donc vraie au rang 0.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

3. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right). \qquad (1)$$

$1^{\text{ière}}$ **étape** Pour $n = 0$, on a $u_0 = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{0!}{e}\left(e - 1\right)$. L'égalité (1) est donc vraie au rang 0.

$2^{\text{ème}}$ **étape** Supposons que l'égalité (1) est vérifiée au rang $n \geq 0$. D'après la relation trouvée à la question 2, on a $u_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)u_n$.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$
$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

3. Montrer par récurrence, que pour tout $n \geq 0$,
$$u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right). \qquad (1)$$

1ière **étape** Pour $n = 0$, on a $u_0 = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{0!}{e}\Big(e - 1\Big)$. L'égalité (1) est donc vraie au rang 0.

2ème **étape** Supposons que l'égalité (1) est vérifiée au rang $n \geq 0$. D'après la relation trouvée à la question 2, on a $u_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)u_n$.
Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence,
$$u_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)u_n = -\frac{1}{e} + (n+1)\frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right).$$

Ainsi, l'égalité (1) est vérifiée au rang n. Ainsi, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

4. En revenant à la définition de u_n, montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

4. En revenant à la définition de u_n, montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $n \geq 0$, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$,

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

4. En revenant à la définition de u_n, montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $n \geq 0$, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a

$e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0} = 1$, par décroissance de la fonction $(x \mapsto e^{-x})$.

Exercice 10

On pose pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

4. En revenant à la définition de u_n, montrer que

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $n \geq 0$, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a

$e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0} = 1$, par décroissance de la fonction $(x \mapsto e^{-x})$. Ainsi,

$$\frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n,$$

et donc en intégrant on a

$$\frac{1}{e} \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

D'où, $$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?

   – Montrons que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?

– Montrons que $\sum u_n$ diverge. La série $\sum u_n$ est de terme général positif et

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n.$$

Or $\sum \frac{1}{e(n+1)}$ est, à une constante près, une série de Riemman divergente donc par comparaison la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum(-1)^n u_n$?

- Montrons que $\sum u_n$ diverge. La série $\sum u_n$ est de terme général positif et

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n.$$

  Or $\sum \frac{1}{e(n+1)}$ est, à une constante près, une série de Riemman divergente donc par comparaison la série $\sum u_n$ diverge.

- Montrons que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?

- Montrons que $\sum u_n$ diverge. La série $\sum u_n$ est de terme général positif et

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n.$$

  Or $\sum \frac{1}{e(n+1)}$ est, à une constante près, une série de Riemman divergente donc par comparaison la série $\sum u_n$ diverge.

- Montrons que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge. La série est de terme général positif et

$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

  Or $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison, $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum(-1)^n u_n$?

- Montrons que $\sum u_n$ diverge. La série $\sum u_n$ est de terme général positif et

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n.$$

  Or $\sum \frac{1}{e(n+1)}$ est, à une constante près, une série de Riemman divergente donc par comparaison la série $\sum u_n$ diverge.

- Montrons que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge. La série est de terme général positif et

$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

  Or $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison, $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

- Montrons que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 10

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum (-1)^n u_n$?

- Montrons que $\sum u_n$ diverge. La série $\sum u_n$ est de terme général positif et

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n.$$

  Or $\sum \frac{1}{e(n+1)}$ est, à une constante près, une série de Riemman divergente donc par comparaison la série $\sum u_n$ diverge.

- Montrons que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge. La série est de terme général positif et

$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

  Or $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison, $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

- Montrons que $\sum (-1)^n u_n$ converge. On a montré que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante et $\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, donc, par encadrement, u_n tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ converge.