Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°2 — 26 novembre 2018
durée: 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln(x^2+1).$$

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et justifier la continuité de la fonction f sur cet ensemble.

(2) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]0, +\infty[$.

(4) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'.

(5) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans A, où A est un ensemble que l'on précisera.

(6) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

(7) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $1 - \dfrac{2x}{1+x^2} \geqslant 0$.

(8) En déduire, à l'aide du théorème des accroissements finis, que si $1 \leqslant x < y$ alors
$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x-y|.$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes quand elles existent, ou prouver que la limite n'existe pas.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5 - 4x^6 + 20 \ln x}{4x^5 + 1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\sin x + 1} - 1}{2x^2 - 5x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{Arcsin} x}$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et justifier la continuité de la fonction f sur cet ensemble.

(2) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note encore f la fonction prolongée.

(3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

(4) Montrer que f est dérivable en 0.

(5) Étudier la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0. Est-ce que f' est continue en 0 ?

Exercice 4.

(1) Calculer le développement limité de $f(x) = e^{x^2} + \sin(x)$ à l'ordre 4 en 0.

(2) Soit g et h deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par

$$g(x) = 2 - x + o(x^2) \qquad \text{et} \qquad h(x) = 3x + x^2 - 2x^3 + o(x^3).$$

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g \times h$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

(1) Étudier, pour n fixé, les variations de f_n sur $[0, 1]$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. Dans toute la suite, on note x_n cette solution (autrement dit, x_n est défini par $f_n(x_n) = 0$ pour tout n).

(3) Montrer que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(4) Montrer que la suite $(n\, x_n)$ est bornée, et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(5) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.