Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°2 — 25 novembre 2019
durée: 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

Tous les exercices sont indépendants.

Question de cours: Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1.

(1) Rappeler l'expression des dérivées des fonctions ch, sh, th et Arccos (on précisera l'intervalle de définition dans chaque cas).

(2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x).$$
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

(3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

(4) Montrer que la bijection réciproque de f, notée g, est dérivable sur I, puis que
$$\forall y \in I, \quad g'(y) = -\frac{1}{\sin y}.$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes quand elles existent, ou prouver que la limite n'existe pas.

$$(1)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^7-1}; \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} (\sin x).\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 3. Donner un équivalent (le plus simple possible) des quantités suivantes :

(1) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ quand $x \to 0$; (2) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4\ln(x^4)}{\ln \operatorname{ch} x + \sqrt{x}}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4.

(1) Retrouver, à partir du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $-\ln(1-x)$.

En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos(x) - \ln(1-x)$.

(2) Retrouver, à partir du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(3) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\frac{\cos(x) - \ln(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = x\, e^x.$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, et bijective. Dans toute la suite, on note g la fonction réciproque de f. Que peut-on dire de la monotonie de g ?

(2) (a) Simplifier, pour tout $x \geqslant 1$, l'expression $\ln(x^x) - f(\ln x)$.

(b) En déduire que l'équation $x^x = 2$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$, et exprimer cette solution à l'aide de la fonction g.

(3) Dans cette question, on considère un réel $x \geqslant 0$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = x\, e^{-u_n}.$$

(a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant x$.

(b) Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, que vaut $f(\ell)$? En déduire l'expression de ℓ à l'aide de la fonction g.

(c) Montrer que si ℓ est le réel considéré à la question précédente, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \ell = x\big(e^{-u_n} - e^{-\ell}\big).$$

(d) En déduire, grâce au théorème des accroissements finis, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant x|u_n - \ell|.$$

(e) En déduire que si $0 \leqslant x < 1$, la suite (u_n) converge.

(4) Dans cette question, on cherche un équivalent de g en $+\infty$.

(a) Montrer que

$$\forall y \geqslant e, \quad f(\ln y - \ln\ln y) \leqslant y \leqslant f(\ln y).$$

(b) En déduire que $g(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} \ln y$.