Intelligence artificielle

Agents logiques

Elise Bonzon

elise.bonzon@u-paris.fr

LIPADE - Université de Paris

http://www.math-info.univ-paris5.fr/∽bonzon/

Motivations

- Agents fondés sur les connaissances
  - Représentation des connaissances
  - Processus de raisonnement

Motivations

- Agents fondés sur les connaissances
  - Représentation des connaissances
  - Processus de raisonnement

$\Rightarrow$ Tirer parti de connaissances grâce à une capacité à combiner et recombiner des informations pour les adapter à une multitude de fins.

  - $\rightarrow$ Mathématicien démontre un théorème
  - $\rightarrow$ Astronome calcule la durée de vie de la Terre

Motivations

- Agents fondés sur les connaissances
  - Représentation des connaissances
  - Processus de raisonnement

⇒ Tirer parti de connaissances grâce à une capacité à combiner et recombiner des informations pour les adapter à une multitude de fins.

→ Mathématicien démontre un théorème

→ Astronome calcule la durée de vie de la Terre

⇒ Environnements *partiellement observables* : combiner connaissances générales et percepts reçus pour inférer des aspects cachés de l'état courant.

→ Médecin ausculte un patient

→ Compréhension du langage naturel :

- "John a vu le diamant à travers le carreau et l'a convoité"
- "John a lancé un caillou à travers le carreau et l'a cassé"
- Connaissances de **sens commun**

Agents logiques

1. Agents fondés sur les connaissances
2. Le monde du Wumpus
3. Principe généraux de la logique
4. Logique propositionnelle
5. Conclusion

Agents fondés sur les connaissances

Base de connaissances (BC)

- Base de connaissances : ensemble d'énoncés exprimés dans un langage formel
- Les agents logiques peuvent être vus :
  - au niveau des connaissances : ce qu'ils savent, quelle que soit l'implémentation
  - au niveau des implémentations : structures de données dans la base de connaissances, et les algorithmes qui les manipulent
- Approche **déclarative** pour construire la base de connaissances
  - `Tell` : ce qu'ils doivent savoir
  - `Ask` : demander ce qu'ils doivent faire. La réponse doit **résulter** de la base de connaissances

Agent basé sur les connaissances

Un agent basé sur les connaissances doit être capable de :

- Représenter les états, les actions
- Incorporer de nouvelles perceptions
- Mettre à jour sa représentation interne du monde
- Déduire les propriétés cachées du monde
- Déduire les actions appropriées

Exemple simple d'un agent basé sur les connaissances

Programme agent basé sur les connaissances

fonction KB-Agent(*percept*) **retourne** *action*

    variables statiques : *KB*, base de connaissances
                    t, compteur initialisé à 0, indique le temps

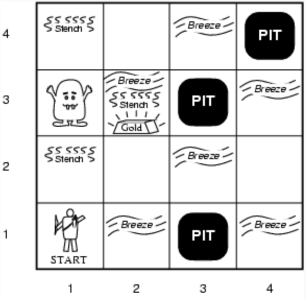
    Tell(*KB*, Make-percept-sentence(*percept*, *t*))
    action $\leftarrow$ Ask(*KB*, Make-action-query(*t*))
    Tell(*KB*, Make-action-sentence(*action*, *t*))
    $t \leftarrow t + 1$
    retourner *action*

Le monde du Wumpus

Le monde du Wumpus

- Environnement
  - Agent commence en case [1,1]
  - Cases adjacentes au Wumpus sentent mauvais
  - Brise dans les cases adjacentes aux puits
  - Lueur dans la cases contenant de l'or
  - Tirer tue le Wumpus s'il est en face
  - On ne peut tirer qu'une fois
  - S'il est tué, le Wumpus crie
  - Choc si l'agent se heurte à un mur
  - Saisir l'or si même case que l'agent
- Capteurs : odeur, brise, lueur, choc, cri
- Percepts : liste de 5 symboles

  Ex : [odeur, brise, rien, rien, rien]
- Actions : tourne gauche, tourne droite, avance, attrape, tire

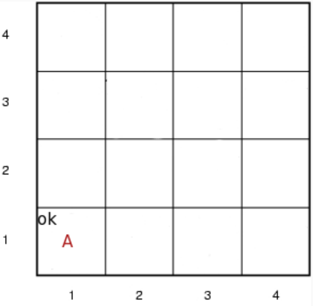


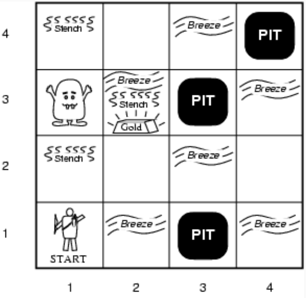
- Mesure de performance :
  - or : +1000 ;
  - mort : -1000 ;
  - action : -1 ;
  - utiliser la flèche : -10

Caractérisation du monde du Wumpus

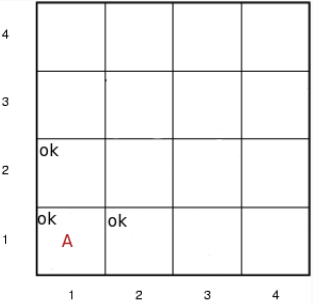
- **Totalement observable** Non. Perception locale uniquement
- **Déterministe** Oui
- **Épisodique** Non. Séquentiel au niveau des actions
- **Statique** Oui. Le Wumpus et les puits ne bougent pas
- **Discret** Oui
- **Mono-agent** Oui. Le Wumpus est une caractéristique de la nature

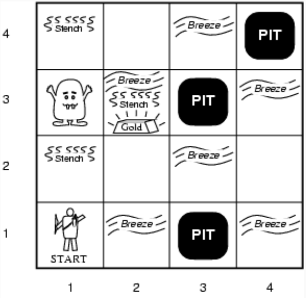
Explorer un monde du Wumpus



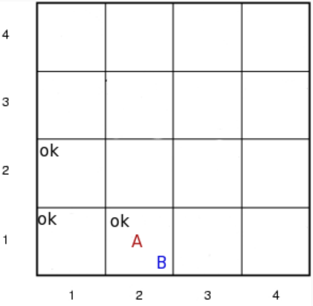


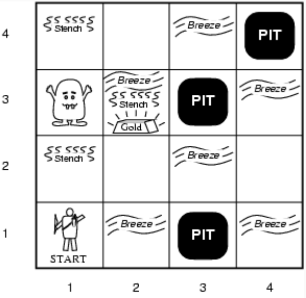
Explorer un monde du Wumpus



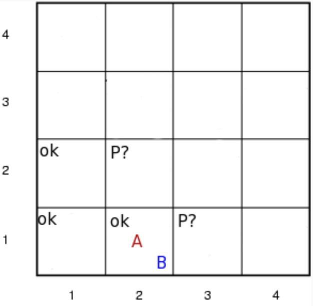


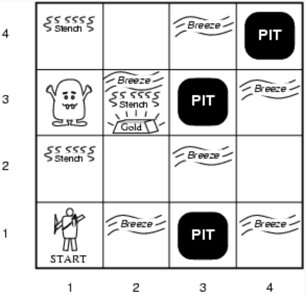
Explorer un monde du Wumpus



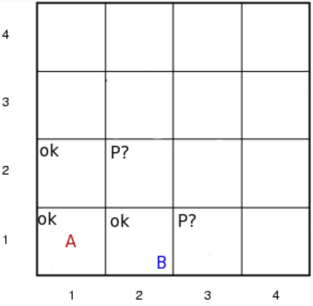


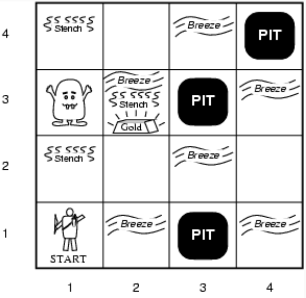
Explorer un monde du Wumpus



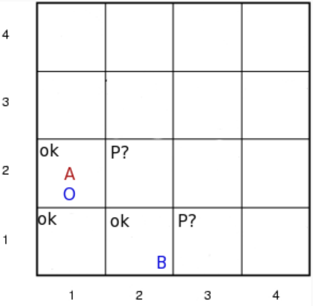


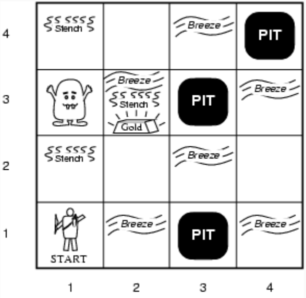
Explorer un monde du Wumpus



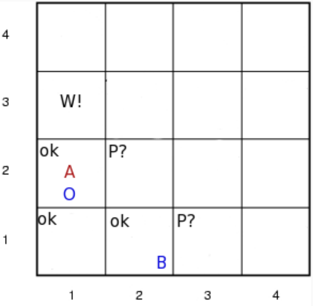


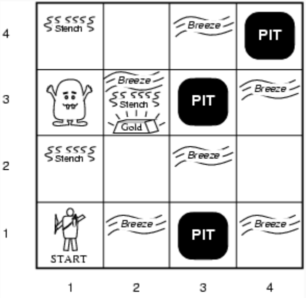
Explorer un monde du Wumpus



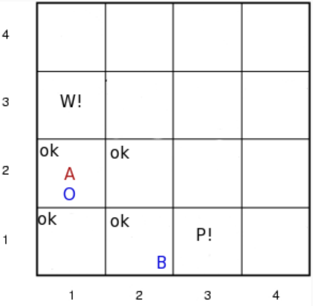


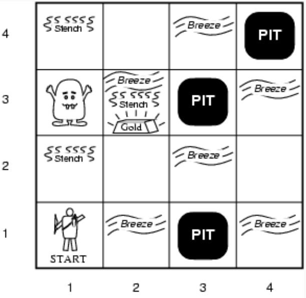
Explorer un monde du Wumpus



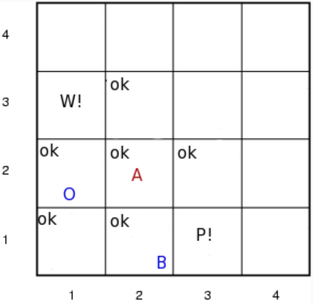


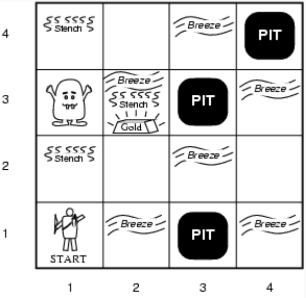
Explorer un monde du Wumpus



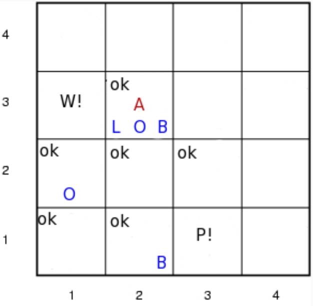


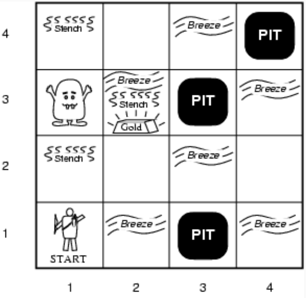
Explorer un monde du Wumpus





Explorer un monde du Wumpus





Principe généraux de la logique

Principe généraux de la logique

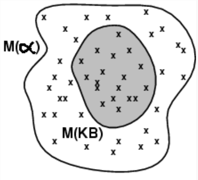
- **Logique** : langage formel permettant de représenter des informations à partir desquelles on peut tirer des conclusions
- La **syntaxe** désigne les phrases (ou énoncés) bien formées dans le langage
- La **sémantique** désigne la signification, le sens de ces phrases
- Par exemple, dans le langage arithmétique :
  - $x + y = 4$ est une phrase syntaxiquement correcte
  - $x4y+ =$ n'en est pas une
  - $2 + 3 = 4$ est une phrase syntaxiquement correcte mais sémantiquement incorrecte
  - $x + y = 4$ est vraie ssi x et y sont des nombres, et que leur somme fait 4
  - $x + y = 4$ est vraie dans un monde où $x = 1$ et $y = 3$
  - $x + y = 4$ est fausse dans un monde où $x = 2$ et $y = 1$

Relation de conséquences

- Relation de conséquences : un énoncé découle logiquement d'un autre énoncé : $\alpha \models \beta$
- $\alpha \models \beta$ est vraie si et seulement si β est vraie dans tous mondes où α est vraie
  - Si α est vraie, β doit être vraie
  - Par exemple, $(x + y = 4) \models (x + y \leq 4)$
- Base de connaissances = ensemble d'énoncés. Une BC a un énoncé pour conséquence : $BC \models \alpha$
- La relation de conséquences est une relation entre des énoncés (la syntaxe) basée sur la sémantique

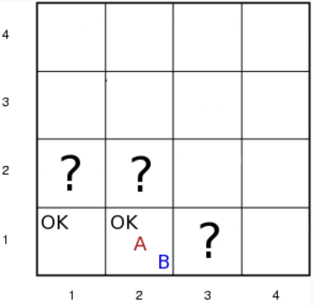
Les modèles

- Les logiciens pensent en terme de modèles, qui sont des mondes structurés dans lesquels la vérité ou la fausseté de chaque énoncé peut être évaluée
- m est un modèle de l'énoncé α si α est vraie dans m
- $M(\alpha)$ est l'ensemble de tous les modèles de α
- $BC \models \alpha$ si et seulement si $M(BC) \subseteq M(\alpha)$

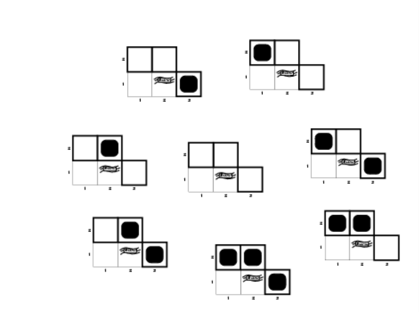


Relation de conséquences dans le monde du Wumpus

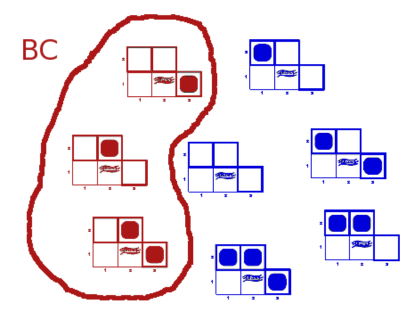
- Situation après avoir effectué
  - Rien en [1,1]
  - Droite
  - Brise en [2,1]
- Considérer les modèles possible pour la base de connaissances en ne considérant que les puits
- $2^3 = 8$ modèles possibles



Modèles du monde du Wumpus

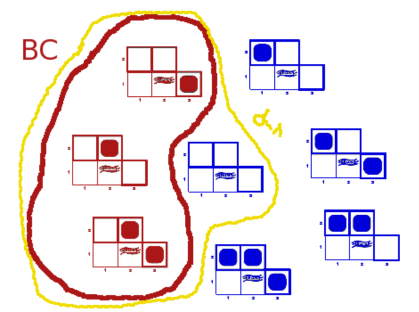


Modèles du monde du Wumpus



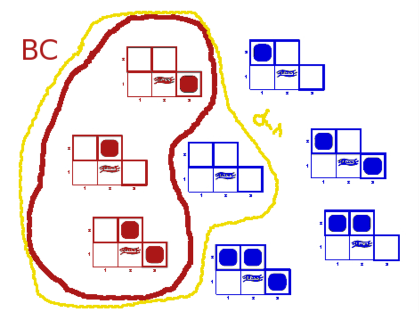
- BC = règles du monde Wumpus + observations

Modèles du monde du Wumpus



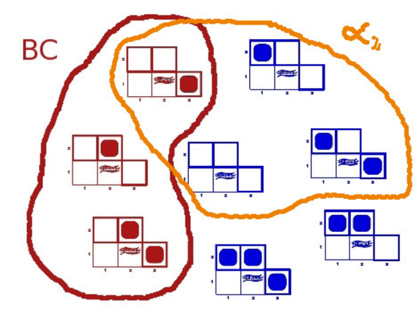
- BC = règles du monde Wumpus + observations
- α_1 = "[1,2] est sans puits"

Modèles du monde du Wumpus



- BC = règles du monde Wumpus + observations
- α_1 = "[1,2] est sans puits"
- $BC \models \alpha_1$, prouvé par vérification des modèles (*model checking*)

Modèles du monde du Wumpus



- BC = règles du monde Wumpus + observations
- α_2 = "[2,2] est sans puits"
- $BC \not\models \alpha_2$

Inférence logique

- $KB \vdash_i \alpha$: l'énoncé α est dérivé de KB par la procédure i
- Validité (soundness) : i est valide si, lorsque $KB \vdash_i \alpha$ est vrai, alors $KB \models \alpha$ est également vrai
- Complétude (completness) : i est complète si, lorsque $KB \models \alpha$ est vrai, alors $KB \vdash_i \alpha$ est également vrai
- Une procédure valide et complète permet de répondre à toute question dont la réponse peut être déduite de la base de connaissances

Logique propositionnelle

Logique propositionnelle

Syntaxe

Logique propositionnelle - syntaxe

- Les atomes :
  - Constantes logiques $\top$ (vrai) et $\bot$ (faux)
  - **Symbole propositionnel** : proposition qui peut être vraie ou fausse
    a, b, c...
- Les connecteurs logiques :
  - $\neg$ (négation)
  - $\wedge$ (et)
  - $\vee$ (ou)
  - $\Rightarrow$ (implication)
  - $\Leftrightarrow$ (équivalence)
- Un atome (précédé ou non de $\neg$) est appelé un littéral
- Les formules bien formées (wffs)

Logique propositionnelle - syntaxe

Formule bien formée

- Tout atome est une wff
- Si E_1 et E_2 sont des wffs, alors
  - $\neg E_1$ est une wff (négation)
  - $E_1 \wedge E_2$ est une wff (conjonction)
  - $E_1 \vee E_2$ est une wff (disjonction)
  - $E_1 \Rightarrow E_2$ est une wff (implication)
  - $E_1 \Leftrightarrow E_2$ est une wff (équivalence)
- **Ordre de priorité des opérateurs** : $\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Base de connaissances du monde du Wumpus (simplifié)

- $P_{i,j}$ vrai s'il y a un puits en $[i, j]$
- $B_{i,j}$ vrai s'il y a une brise en $[i, j]$
- Base de connaissances :
  - $R_1 : \neg P_{1,1}$
  - Brise ssi puits dans une case adjacente :
    $R_2 : B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
    $R_3 : B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$
  - $R_4 : \neg B_{1,1}$
  - $R_5 : B_{2,1}$
- BC : $R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5$

Logique propositionnelle

Sémantique

Logique propositionnelle - sémantique

- Un modèle : une valeur de vérité (*vrai* ou *faux*) pour chaque symbole propositionnel
  - 3 symboles propositionnels $P_{1,1}$, $P_{2,2}$ et $P_{3,1}$
  - $m_1 = \{P_{1,1} = Faux,\ P_{2,2} = Faux,\ P_{3,1} = Vrai\}$

Logique propositionnelle - sémantique

- Un modèle : une valeur de vérité (*vrai* ou *faux*) pour chaque symbole propositionnel
    - 3 symboles propositionnels $P_{1,1}$, $P_{2,2}$ et $P_{3,1}$
    - $m_1 = \{P_{1,1} = Faux,\ P_{2,2} = Faux,\ P_{3,1} = Vrai\}$
- n symboles propositionnels $= 2^n$ modèles possibles

Logique propositionnelle - sémantique

- Un modèle : une valeur de vérité (*vrai* ou *faux*) pour chaque symbole propositionnel
  - 3 symboles propositionnels $P_{1,1}$, $P_{2,2}$ et $P_{3,1}$
  - $m_1 = \{P_{1,1} = Faux,\ P_{2,2} = Faux,\ P_{3,1} = Vrai\}$
- n symboles propositionnels $= 2^n$ modèles possibles
- Attention !
  - Un modèle m est une affectation de valeurs de vérité à chaque symbole propositionnel
  - m est un modèle de α si α est *vrai* dans m

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$\neg E$ est vrai ssi E est faux

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$\neg E$	est vrai ssi	E est faux
$E_1 \wedge E_2$	est vrai ssi	E_1 est vrai **et** E_2 est vrai

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$$
\begin{array}{lll}
\neg E & \text{est vrai ssi} & E \text{ est faux} \\
E_1 \wedge E_2 & \text{est vrai ssi} & E_1 \text{ est vrai } \textbf{et } E_2 \text{ est vrai} \\
E_1 \vee E_2 & \text{est vrai ssi} & E_1 \text{ est vrai } \textbf{ou } E_2 \text{ est vrai}
\end{array}
$$

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$$
\begin{array}{ccl}
\neg E & \text{est vrai ssi} & E \text{ est faux} \\
E_1 \wedge E_2 & \text{est vrai ssi} & E_1 \text{ est vrai } \textbf{et } E_2 \text{ est vrai} \\
E_1 \vee E_2 & \text{est vrai ssi} & E_1 \text{ est vrai } \textbf{ou } E_2 \text{ est vrai} \\
E_1 \Rightarrow E_2 & \text{est vrai ssi} & E_1 \text{ est faux } \textbf{ou } E_2 \text{ est vrai}
\end{array}
$$

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$\neg E$	est vrai ssi	E est faux
$E_1 \wedge E_2$	est vrai ssi	E_1 est vrai **et** E_2 est vrai
$E_1 \vee E_2$	est vrai ssi	E_1 est vrai **ou** E_2 est vrai
$E_1 \Rightarrow E_2$	est vrai ssi	E_1 est faux **ou** E_2 est vrai
$E_1 \Rightarrow E_2$	est faux ssi	E_1 est vrai **et** E_2 est faux

Logique propositionnelle - sémantique

Règles pour évaluer un énoncé en fonction d'un modèle m :

$\neg E$	est vrai ssi	E est faux
$E_1 \wedge E_2$	est vrai ssi	E_1 est vrai **et** E_2 est vrai
$E_1 \vee E_2$	est vrai ssi	E_1 est vrai **ou** E_2 est vrai
$E_1 \Rightarrow E_2$	est vrai ssi	E_1 est faux **ou** E_2 est vrai
$E_1 \Rightarrow E_2$	est faux ssi	E_1 est vrai **et** E_2 est faux
$E_1 \Leftrightarrow E_2$	est vrai ssi	$E_1 \Rightarrow E_2$ est vrai **et** $E_2 \Rightarrow E_1$ est vrai

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
vrai	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
faux	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*
faux	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
vrai	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
vrai	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
faux	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*
faux	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*

- La valeur de vérité d'une wff est calculée récursivement en utilisant la table de vérité ci-dessus
- Une wff peut avoir différentes valeurs de vérité dans différentes interprétations (différents modèles)

Base de connaissances du monde du Wumpus (simplifié)

- 7 symboles propositionnels : $2^7 = 128$ modèles possibles

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	BC
faux	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*faux*	*faux*
faux	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
faux	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*
faux	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	$\underline{\textit{vrai}}$
faux	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	$\underline{\textit{vrai}}$
faux	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	$\underline{\textit{vrai}}$
faux	*vrai*	*faux*	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
vrai	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*	*faux*	*vrai*	*faux*

Logique propositionnelle

Inférence par énumération

Inférence par énumération

Énumération en profondeur d'abord de tous les modèles

fonction TT-Entails(KB, α) **retourne** *vrai* ou *faux*
  variables statiques : KB, base de connaissances
    α, requête, énoncé propositionnel
  symboles $\leftarrow$ liste de symboles propositionnels dans KB et α
  retourner TT-Check-All(KB, α, *symboles*, [])

fonction TT-Check-All(KB, α, *symboles*, *modele*) **retourne** *vrai* ou *faux*
  si Empty ?(*symboles*) **alors**
    si PL-True ?(KB, *modele*) **alors retourner** PL-True ?(α, *modele*)
    sinon retourner *vrai*
  sinon faire
    $P \leftarrow$ First(*symboles*) ; *reste* $\leftarrow$ Rest(*symboles*)
    retourner TT-Check-All(KB, α, *reste*, Extend(P, *vrai*, *modele*))
      et TT-Check-All(KB, α, *reste*, Extend(P, *faux*, *modele*))

Inférence par énumération

- Algorithme **valide** et **complet**
- Pour n symboles :
    - complexité temporelle en $O(2^n)$
    - complexité spatiale en $O(n)$

Logique propositionnelle

Équivalence, validité, satisfiabilité

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$(\alpha \wedge \beta) \quad \equiv \quad (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \quad &\equiv \quad (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) \quad &\equiv \quad (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee
\end{aligned}$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) &\equiv (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee \\
((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \text{ associativité de } \wedge
\end{aligned}$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) &\equiv (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee \\
((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \text{ associativité de } \wedge \\
((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \text{ associativité de } \vee
\end{aligned}$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) &\equiv (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee \\
((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \text{ associativité de } \wedge \\
((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \text{ associativité de } \vee \\
\neg(\neg \alpha) &\equiv \alpha \text{ élimination de la double négation}
\end{aligned}$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) &\equiv (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee \\
((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \text{ associativité de } \wedge \\
((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \text{ associativité de } \vee \\
\neg(\neg\alpha) &\equiv \alpha \text{ élimination de la double négation} \\
(\alpha \Rightarrow \beta) &\equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \text{ contraposition}
\end{aligned}$$

Équivalence logique (1/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\beta \wedge \alpha) \text{ commutativité de } \wedge \\
(\alpha \vee \beta) &\equiv (\beta \vee \alpha) \text{ commutativité de } \vee \\
((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \text{ associativité de } \wedge \\
((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \text{ associativité de } \vee \\
\neg(\neg\alpha) &\equiv \alpha \text{ élimination de la double négation} \\
(\alpha \Rightarrow \beta) &\equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \text{ contraposition} \\
(\alpha \Rightarrow \beta) &\equiv (\neg\alpha \vee \beta) \text{ élimination de l'implication}
\end{aligned}$$

Équivalence logique (2/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \quad \equiv \quad ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \text{ élimination de l'équivalence}$$

Équivalence logique (2/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \Leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)) \text{ élimination de l'équivalence} \\
\neg(\alpha \land \beta) &\equiv (\neg\alpha \lor \neg\beta) \text{ De Morgan}
\end{aligned}$$

Équivalence logique (2/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \Leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \text{ élimination de l'équivalence} \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \text{ De Morgan} \\
\neg(\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \text{ De Morgan}
\end{aligned}$$

Équivalence logique (2/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \Leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \text{ élimination de l'équivalence} \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \text{ De Morgan} \\
\neg(\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \text{ De Morgan} \\
(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) &\equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \text{ distributivité de } \wedge \text{ par rapport à } \vee
\end{aligned}$$

Équivalence logique (2/2)

Équivalence logique

Deux énoncés sont logiquement équivalents si et seulement s'ils sont vrais dans les même modèles :

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \models \beta \text{ et } \beta \models \alpha$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \Leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \text{ élimination de l'équivalence} \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \text{ De Morgan} \\
\neg(\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \text{ De Morgan} \\
(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) &\equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \text{ distributivité de } \wedge \text{ par rapport à } \vee \\
(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) &\equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \text{ distributivité de } \vee \text{ par rapport à } \wedge
\end{aligned}
$$

Validité et satisfiabilité

- Un énoncé est valide s'il est vrai dans tous les modèles. On dit aussi tautologie
  - Exemples : $\top$; $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow A$; $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Validité et satisfiabilité

- Un énoncé est valide s'il est vrai dans tous les modèles. On dit aussi tautologie
  - Exemples : $\top$; $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow A$; $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Théorème de la déduction

$KB \models \alpha$ si et seulement si $(KB \Rightarrow \alpha)$ est valide

Validité et satisfiabilité

- Un énoncé est valide s'il est vrai dans tous les modèles. On dit aussi tautologie
  - Exemples : $\top$; $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow A$; $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Théorème de la déduction

$KB \models \alpha$ si et seulement si $(KB \Rightarrow \alpha)$ est valide

- Un énoncé est satisfiable s'il est vrai dans certains modèles
  - Exemples : $A \vee B$; C

Validité et satisfiabilité

- Un énoncé est valide s'il est vrai dans tous les modèles. On dit aussi tautologie
  - Exemples : $\top$; $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow A$; $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Théorème de la déduction

$$KB \models \alpha \text{ si et seulement si } (KB \Rightarrow \alpha) \text{ est valide}$$

- Un énoncé est satisfiable s'il est vrai dans certains modèles
  - Exemples : $A \vee B$; C
- Un énoncé est insatisfiable s'il n'est vrai dans aucun modèle
  - Exemple : $A \wedge \neg A$

Validité et satisfiabilité

- Un énoncé est valide s'il est vrai dans tous les modèles. On dit aussi tautologie
  - Exemples : $\top$; $A \vee \neg A$; $A \Rightarrow A$; $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Théorème de la déduction

$$KB \models \alpha \text{ si et seulement si } (KB \Rightarrow \alpha) \text{ est valide}$$

- Un énoncé est satisfiable s'il est vrai dans certains modèles
  - Exemples : $A \vee B$; C
- Un énoncé est insatisfiable s'il n'est vrai dans aucun modèle
  - Exemple : $A \wedge \neg A$

Théorème de la déduction

$$KB \models \alpha \text{ si et seulement si } (KB \wedge \neg\alpha) \text{ est insatisfiable}$$

Conclusion

Conclusion

- Les agents logiques appliquent l'**inférence** sur une **base de connaissances** pour déduire de nouvelles informations et prendre une décision
- Concepts basiques de la logique
  - **Syntaxe** : structure formelle des **énoncés**
  - **Sémantique** : **vérité** de chaque énoncé dans un **modèle**
  - **Conséquence** : vérité nécessaire d'un énoncé par rapport à un autre
  - **Inférence** : dérivation de nouveaux énoncés à partir d'anciens
  - **Validité** : l'inférence ne dérive que des énoncés qui sont des conséquences
  - **Complétude** : l'inférence dérive tous les énoncés qui sont des conséquences