

Représentation des rationnels Pas tous les rationnels, et pas tous les réels, ont une partie décimale limitée 1/3 = 0; 33333333333... = $\sum_{i=1}^{+\infty} 3.10^{-i}$. période 1/7 = 0.142857142857142857... période $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730951454 ... pas de périodicité • Un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}^+$ est un nombre décimal si et seulement si l'on $x = \frac{n}{5^p.\,2^q}$ où (n, p, q) $\in \mathbb{N}^3$ et n est premier avec 5 et 2

• Le développement décimal d'un nombre rationnel est soit limité, soit périodique (à partir d'un certain rang). 3

Sciences
Université de Paris

Représentation des rationnels Tout nombre décimal non nul admet aussi un développement décimal infini 0,2 = 0,19999 ... Attention 0.99999 ≠ 0.999... = 1 mais tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres décimaux Ceci permet de justifier les calculs par valeurs approchées. • Afin d'éviter les développements illimités des nombres rationnels, on peut les représenter sous forme de fraction (réduite), on garde le numérateur et le dénominateur en machine. Sciences Université de Paris

Représentation des rationnels On peut utiliser d'autres bases : • Base binaire, b = 2 et symboles {0, 1} $(101 \ 011)_2 = 1 \ 2^2 + 0 \ 2^1 + 1 \ 2^0 + 0 \ 2^{-1} + 1 \ 2^{-2} + 1 \ 2^{-3} = (5+1/4+1/8)=(5,375)_{10}$ • Base octale et symboles {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} $(65,23)_8 = 6 \ 8^1 + 5 \ 8^0 + 2 \ 8^{-1} + 3 \ 8^{-2} = (53,296875)_{10}$ • Base hexadécimale avec {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F} $(\mathsf{B5},\mathsf{AE})_{16} = 11.16^1 + 5.16^0 + 10.16^{-1} + 14.16^{-2} = (181,67968)_{10}$ Sciences Université de Paris 5

Représentation des rationnels Un rationnel positif $x \in \mathbb{Q}^+$ admet-il un développement limité dans une base $b \ge 2$? Réduction en une fraction irréductible x = (a/c)10 Alors son développement est infini si et seulement si c a un diviseur premier avec b Son développement est limité si $x=(\frac{n}{\hbar r})_{10}$ m et k des entiers $(2/4)_{10} = (1/2)_{10}$ 2/4=8/16 a un diviseur premier avec 3 , 2 n'a pas de diviseur premier avec 2 ou 16 (0,111 ...)3 (0,11<u>1</u> ...)3 (0,1)2 (0,8)16 $(1/8)_{10} = (1/2^3)_{10} = (5^3/10^3)_{10} = (0,125)_{10}$ 8 a un diviseur premier avec 3 , 8 n'a pas de diviseur premier avec 2 ou 8 ou 16 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,1)8 (0,001)2 (0,001

Représentation des rationnels

Exemples

7

```
(1/3)_{10} = (0,333...)_{10} = (0,01010\underline{1}...)_2 = (0,1)_3
(1/6)_{10} = (0,1666...)_{10} = (0,001\overline{010101...})_2 = (0,01111...)_3
(1/5)_{10} = (0,2)_{10} = (0,001100110\underline{011...})_2 = (0,1)_5
(1/11)_{10} = (0.090909 - ...)_{10} = (0.002110021100211...)_3
       = (0,000101110100010111010<u>001011101</u>...)<sub>2</sub>
```



Conversion des rationnels Pour convertir des nombres avec une partie fractionnaire on procède de la même façon que pour les entriers mais par exemple les regroupements se font de part et d'autre de la virgule Exemple: conversion de (1001101011,11001)2 en base 16 0010 0110 1011 , 1100 1000 6 С d'où (1001101011,11001)2 = (26B,C8)16 Par ailleurs $(1001101011,11001)_2 = 2\ 16^2 + 6\ 16^1 + 11\ 16^0 + 12\ 16^{-1} + 8\ 16^{-2} = (619,78125)_{\frac{10}{2010}}$

Conversion des rationnels

Convertir (B5,AE)₁₆ en base 2 Pour chaque digit on a:

> $(B)_{16} = (1011)_2$ $(5)_{16} = (0101)_2$ $(A)_{16} = (1010)_2$ $(E)_{16} = (1110)_2$

(B 5 , A E)₁₆ 1011 0101 1010 1110

9

11

 $(B5,AE)_{16} = (10110101,1010111)_2$

Sciences Université de Paris

Conversion des rationnels

- Conversion de (1001101011,11001)2 en octal
- on regroupe en paquets de 3 bits de part et d'autre de la virgule 001 001 101 011 , 110 010

et on associe les chiffres octaux

001 001 101 011, 110 010 1 1 5 3 6 2

ďoù

 $(1001101011,11001)_2 = (1153,62)_8$

= 1 $8^3 + 1$ $8^2 + 5$ $8^1 + 3$ $8^0 + 6$ $8^{-1} + 2$ $8^{-2} = (619,78125)_{10}$

Sciences Université de Paris

Conversion des rationnels

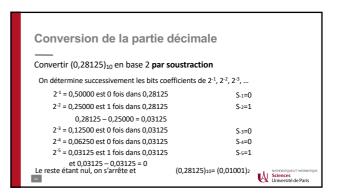
- Pour passer d'un nombre en base b, avec partie fractionnaire, à un nombre en base 10, on utilise l'écriture polynomiale
- Pour passer d'un nombre en base 10, avec partie décimale, à
 - On transforme la partie entière, par la méthode de soustraction ou de division, par rapport à b.
 - On transforme la partie décimale, par la méthode de soustraction ou de division mais par rapport à b

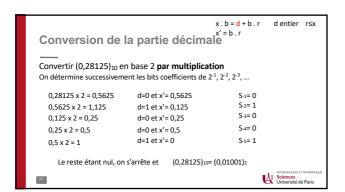


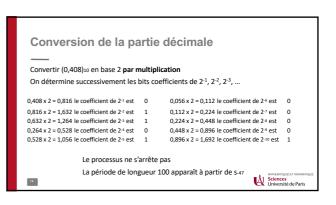
Conversion de la partie fractionnaire

- On s'intéresse à la partie fractionnaire (à droite de la virgule), c'est à dire aux réels dans l'intervalle (x)10 \in]0 , 1[(x)10 \in (0 \le s-2 ... s-k)b où s-k \in {0, 1, ... , b - 1}, k \ge 1
- Méthode par soustraction
 - on détermine d'abord les digits de plus fort poids et ensuite les digits de poids faible : dans l'ordre, les coefficients de $\overline{b^{*1}}$ b' $2,\dots$, b*, ...
 - pour k ≥ 1, - on détermine combien de fois b-i se trouve dans
 - $x = s \cdot 1b^{-1} \cdot ... \cdot s \cdot (i \cdot 1)b^{-(i \cdot 1)}$ on recommence avec $b^{-(i + 1)}$ dans $x - s \hbox{-} 1b^{-1} \hbox{-} \dots \hbox{-} s \hbox{-} (i \hbox{-} 1)b^{-(i \hbox{-} 1)} - s \hbox{-} (i)b^{-i} \quad \xrightarrow{} s \hbox{-} (i \hbox{+} 1)$
 - ce procédé ne s'arrête pas nécessairement









Conversion de la partie décimale en base 8

Convertir (0,28125)₁₀ en base 8 par multiplication

0,28125*8 = 2,2500 s₋₁ = 2 et x' = 0,25

0,25*8 = 2,00 s₋₂ = 2 et x' = 0

Le reste étant nul, on s'arrête et (0,28125)₁₀ = (0,22)₈

