Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

# Feuille de TD n° 7 : Fonctions usuelles

**Exercice 1.** Calculer

$a)$ $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ $b)$ $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$ $c)$ $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ $d)$ $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ $e)$ $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$.

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)$ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ $(E_2)$ $\sin x = \frac{1}{3}$ $(E_3)$ $\cos x = \frac{\pi}{4}$ $(E_4)$ $\tan x = 1$ $(E_5)$ $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$.

**Exercice 3.** Démontrer les identités suivantes (on précisera si besoin le domaine de validité) :

$a)$ $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} = \ln(x)$ $b)$ $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ $c)$ $\operatorname{Arctan}(2\sqrt{2}) + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}) = \pi$

$d)$ $\frac{\sin(x+y+z)}{\cos(x)\cos(y)\cos(z)} = \tan(x)+\tan(y)+\tan(z)-\tan(x)\tan(y)\tan(z)$

**Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)$ $\operatorname{sh} x = 2$ $(E_2)$ $\operatorname{th}\ x = 3$ $(E_3)$ $\operatorname{ch} x = 1$

**Exercice 5.** Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$ $b)$ $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$

**Exercice 6.** Démontrer, pour tout $x \geqslant 0$, les inégalités suivantes :

$a)$ $\operatorname{sh}(x) \geqslant x$ $b)$ $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$ $c)$ $\operatorname{sh}(x) \geqslant x + \frac{x^3}{6}$.

**Exercice 7.** Démontrer de deux manières différentes que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)$.

**Exercice 8.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

**Exercice 9.**

(1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$. Étudier la limite de $(S_n)$.

**Exercice 10 (DM 7).** Démontrer les identités suivantes (on précisera le domaine de validité) :

$a)$ $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$ $b)$ $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$c)$ $\operatorname{Argth}(\sin(2x)) = 2\operatorname{Argth}(\tan(x))$ $d)$ $\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

**Exercice 11 (DM 7).** Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ est un argument de $z$. Comment faut-il corriger la formule si $x < 0$ ?

(2) Montrer que $(3+i)^2(7+i) = 50(1+i)$

(3) En déduire que $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$

(4) Montrer sur le même principe la formule de John Machin (utilisée pour calculer les décimales de $\pi$) :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$