

Algorithmique avancée

Examen

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Les exercices peuvent être traités dans le désordre.

La notation prendra en compte le soin et la clarté de la rédaction.

Exercice 1.

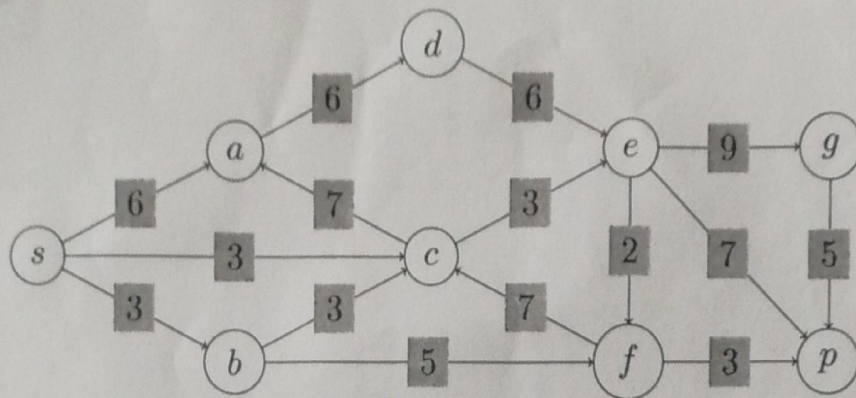
On considère un graphe orienté G et un sommet u de G .

1. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u ?
2. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u sur le graphe obtenu en inversant le sens de toutes les arêtes ?
3. En déduire un algorithme permettant de déterminer les composantes fortement connexes de G .
4. On admet que déterminer l'intersection de deux ensembles A et B est de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$, où $n = |A| + |B|$. En déduire la complexité de l'algorithme précédent.

Exercice 2.

La figure 1 montre un graphe de communication avec les capacités de chacune des liaisons.

1. Quelle est la valeur du flux maximal qui peut être transmis de l'émetteur au récepteur ? Vous direz quels chemins vous considérez et comment vous le déterminez.
2. Comment déterminer l'ensemble des sommets tels qu'on pourrait augmenter le flux de s à chacun de ces sommets ?
3. Comment déterminer l'ensemble des sommets tels qu'on pourrait augmenter le flux entre ses sommets et p ?
4. En déduire comment déterminer l'ensemble des arêtes dont une augmentation de la capacité entraînerait une augmentation du flux de s à p .

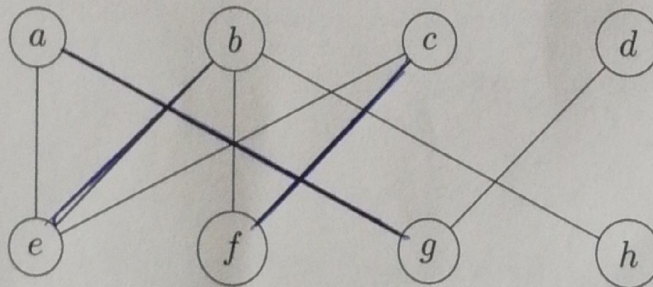


Exercice 3.

On considère un graphe biparti, formé de deux ensembles de sommets A et B de taille n . On rappelle que, comme le graphe est biparti, toute arête relie un sommet de A à un sommet de B .

Un *matching* est un ensemble de couples de sommets liés par une arête. La figure montre un exemple de graphe avec $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{e, f, g, h\}$. Les arêtes en rouge forment un matching de cardinal 3.

Le but de cet exercice est de déterminer un algorithme permettant de trouver un matching de cardinal maximum.



On oriente les arêtes de A vers B , on ajoute une source s avec une arête de s vers chacun des sommets de A et un puits p avec une arête chaque sommet de B vers p .

1. Pour des valeurs de capacités bien choisies, un matching correspond à un flot entre s et p , de valeur égale à la cardinalité du matching. Proposer un choix de capacités qui vérifie cette proposition, et la démontrer.
2. En déduire un algorithme qui permet de déterminer un matching maximal à partir d'un matching initial quelconque (éventuellement vide).

3. L'appliquer au graphe et au matching de la figure 2.

Exercice 4.

On considère la chaîne de Markov représentée à la figure 3.

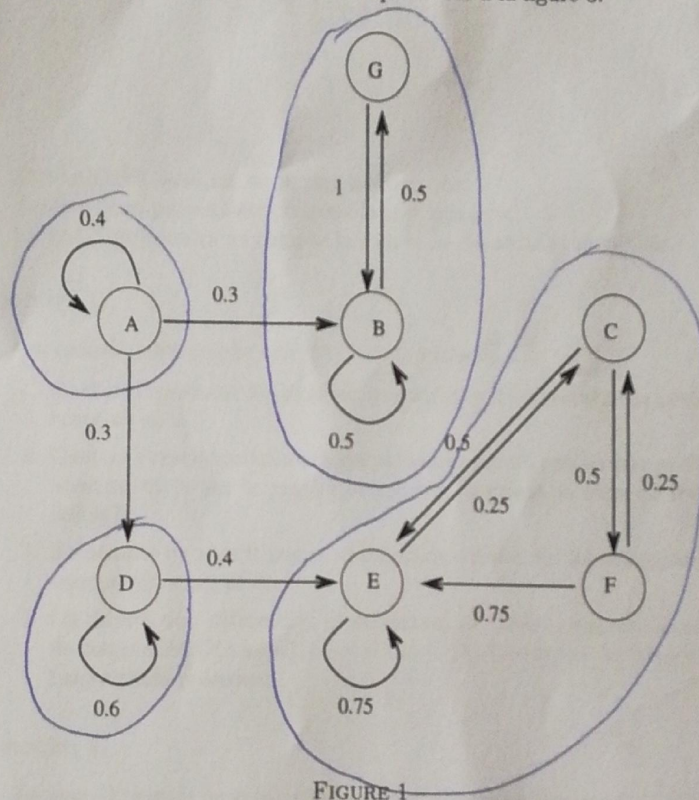


FIGURE 1

1. Déterminer les composantes fortement connexes du graphe. En déduire l'ensemble des états récurrents et transients.
2. On considère la chaîne réduite aux états C, E et F. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne.
3. Résoudre ${}^tX = {}^tXP$.
4. Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de la chaîne restreinte aux états C, E et F? Justifier votre réponse.