
Théorie des Langages

EXERCICES DIVERS

Exercice 1 - Soit U un ensemble fini d'éléments. Une liste de U est une séquence commençant par le symbole "[", se terminant par le symbole "]", et contenant des éléments de U séparés par des ",". Les mots "[A,B,C,C,A]" ou encore "[C]" sont des listes d'éléments de $U = \{A, B, C\}$. Tout au long de l'exercice, on fera le fait qu'une liste contient toujours au moins un élément, i.e. le mot "[]" n'est pas une liste.

1. Est-il possible de reconnaître l'ensemble des listes d'éléments de $U = \{A, B, C\}$ avec un automate fini ? Si votre réponse est positive, donnez un automate fini reconnaissant ce langage, en indiquant précisément l'alphabet, l'état initial et le(s) état(s) finaux.
2. Dans le cas où U est totalement ordonné, on s'intéresse aux listes croissantes. Dans ces listes ordonnées, tout élément de la liste doit être supérieur ou égal à son prédécesseur. Peut-on reconnaître ces listes avec un automate fini ? Justifiez une réponse positive en représentant un tel automate dans le cas où $U = \{A, B\}$ où on dira que $A < B$. Sinon, expliquer pourquoi.
3. Jusqu'à présent, seules les listes simples étaient traitées. Cependant, il est possible d'étendre cette notion à des listes de listes comme par exemple $[A, [B, B], [C], [A, B, C]]$ ou encore $[[A], B, [C, C]]$. Est-il possible de reconnaître des listes de listes avec un automate fini ? Justifiez une réponse positive en représentant un tel automate dans le cas où $U = \{A, B\}$.
4. Enfin on peut bien sûr étendre récursivement pour également avoir des listes de listes de listes, etc comme $[A, [[B, B], A], [C], [[A, B, C]]]$. Est-il possible de reconnaître ces listes avec un automate fini ? Justifiez une réponse positive en représentant un tel automate dans le cas où $U = \{A, B\}$.

Exercice 2 - Le but de cet exercice est de modéliser un distributeur de boissons par un automate fini. L'alphabet d'entrée $\Sigma = \{d, v, c\}$ correspond aux pièces de 10, 20 et 50 centimes acceptées par le distributeur. Une boisson coûte 50 centimes.

1. Construisez un automate déterministe reconnaissant toutes les séquences de pièces dont le total est 50 centimes.
2. Le but est maintenant de modéliser un distributeur qui rend la monnaie. Pour l'en rendre capable, nous allons compléter l'automate pour qu'il puisse non seulement "lire" (engranger) des pièces, mais également en "écrire" (en rendre). On parle alors de *transducteur fini*. Concrètement, chaque transition de votre nouvelle automate sera étiquetée par une paire entrée/sortie, notée a/b . Emprunter une transition étiquetée a/b s'interprète comme : *lire un a et écrire un b* .

En partant de l'automate fini de la question 1), construire un transducteur fini simulant un distributeur qui rendrait la monnaie : pour toute séquence en entrée dont le total excède 50 centimes, votre transducteur doit produire en sortie une séquence dont la somme est la différence entre le montant entré et cinquante centimes.

Par exemple, la séquence de pièce (i.e. le mot) "dcv" doit être accepté et doit retourner, au choix, "dv", "ddd" ou "vd".

Exercice 3 [Jeu du barman aveugle] - Un barman et un client jouent au jeu suivant. Sur une table, entre les deux, se trouve un plateau où sont disposés quatre verres placés en carré. Ces verres peuvent être à l'envers ou à l'endroit. Le sens des verres (i.e. la configuration initiale) est choisi par le client et est inconnu du barman. Pour s'en assurer, celui-ci met un bandeau sur les yeux qui le rend aveugle et à interdiction de toucher les verres. Voici le déroulement de la partie :

- A chaque tour, le barman demande au client de retourner 1, 2 ou 3 verres de son choix (par exemple le barman dit au client de retourner le verre en haut à gauche et le verre en bas à gauche).
- Si tous les verres sont dans la même sens (i.e. tous à l'endroit ou tous à l'envers), le barman gagne.
- Le barman possède 10 chances pour y parvenir, sinon le client gagne. A la fin de chaque tour, le client doit dire si le barman a gagné ou pas (il ne peut pas mentir!).

Le but est de modéliser ce jeu via un automate pour savoir s'il existe une stratégie permettant au barman de gagner quelque soit la configuration initiale.

1. Calculer le nombre total de configurations possibles et énumérer les.
2. Justifier qu'il n'y a en fait que quatre dispositions réellement différentes (dont une où les verres sont tous dans le même sens).
3. Construire maintenant l'automate fini non-déterministe qui permet de représenter ce jeu. (Indications : les quatre dispositions précédemment trouvées sont les états de l'automate et les transitions sont les manipulations permettant de passer d'une configuration à une autre).
4. Déterminer l'automate.
5. Grâce à cet automate, aider le barman à trouver une stratégie lui permettant de gagner quelque soit la configuration initiale.

Note : Cet exercice met en jeu des techniques de construction d'automate et permet de bien comprendre comment le non-déterminisme est fondamental pour modéliser certains problèmes.