TD 7 - Récursivité

Objectif : Comprendre / exécuter / écrire / analyser un algorithme simple sous forme récursive.

Exercice 1 - Appliquer l'algorithme de tri-fusion au vecteur $V = [5,1,8,7,4]$

Exercice 2 - Appliquer l'algorithme de tri rapide au vecteur $V = [5,1,8,7,4,8,1]$

Exercice 3 - On considère la multiplication de grands nombres en base B quelconque, dont les chiffres sont rangés dans des tableaux.

1. Par la méthode classique, pour deux nombre de taille n combien fait-on de multiplications et d'additions élémentaires (chiffre à chiffre) ?
2. Soient deux nombres U et V de longueur $2n$. On peut écrire
$$U = U_1 B^n + U2 \quad \text{et} \quad V = V_1 B^n + V_2$$
où U_1, U_2, V_1, V_2 sont des nombres de longueur n. On calcule récursivement le produit UV grâce à l'égalité :
$$\begin{aligned} UV &= (U_1 B^n + U2)(V_1 B^n + V_2) \\ &= U_1 V_1 B^{2n} + (U_1 V_2 + U_2 V_1) B^n + U_2 V_2 \\ &= U_1 V_1 B^{2n} + \big((U_1 - U_2)(V_2 - V_1) + U_2 V_2 + U_1 V_1\big) B^n + U_2 V_2 \end{aligned}$$
On note $c(n)$ le nombre d'opérations élémentaires (multiplications ou additions) pour la multiplication récursive de deux nombres de longueur n. Exprimer $c(2n)$ en fonction de $c(n)$ et n. Notez que l'addition de deux nombres de n chiffres représente n opérations élémentaires.
3. En supposant que $n = 2^p$ et en posant $x(p) = c(2^p)$, exprimer $x(p)$ en fonction de p, en utilisant la transformation en série génératrice. En déduire $c(n)$ en fonction de n.
4. Pourquoi n'a-t-on pas utilisé l'avant-dernière formule pour le calcul de UV ?

Exercice 4- Complexité du quick-sort en nombre de comparaisons.

a) Donner un encadrement de la complexité de *DivQuickSort*, notée $C_{div}(n)$.

b) La rapidité du tri rapide vient de la division du vecteur en 2 "presque-moitiés", pour lesquelles le travail est divisé par deux si le pivot choisi est une valeur médiane de V. Quel est le pire cas ? Calculer la complexité dans ce cas.

c) Dans le cas général et sous l'hypothèse que tous les éléments sont distincts :
- Exprimer $C_{div}(n|\text{pivot au rang } p)$ en fonction de n et du rang p du pivot.
- Pour un pivot au rang p, exprimer la complexité moyenne $C(n|\text{pivot au rang } p)$ en fonction de $C_{div}(n|\text{pivot au rang } p)$ et de complexités moyennes à des rangs inférieurs à n.
- En déduire la complexité moyenne $C(n)$ (quel que soit le rang du pivot) en fonction de complexités aux rangs inférieurs et de n.
- Exprimez $C(n)$ en fonction de $C(n-1)$ et de n
- En négligeant le terme en $1/n$ et en écrivant $\frac{C(n)}{n+1}$ à différents ordres, vous en déduirez une forme close ($C(n)$ fonction de n), et enfin l'ordre asymptotique. Indication : le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ a pour équivalent asymptotique $\ln(n)$.

Exercice 5 - Ecrire une version récursive de la recherche dichotomique de la première occurence d'un élément x dans un vecteur V.