Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

8. Matrices

Matrices

Les matrices comme tableaux

Définition. Soient n et p deux entiers strictement positifs. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes) un tableau de np nombres réels (ou complexes) rangés en n lignes et p colonnes.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels (et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ pour des coefficients complexes).

Exemples

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ i & \pi & -3 \end{pmatrix}$ matrice 2×3

$\begin{pmatrix} e & -6 & \frac{7}{2} & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -8 \\ \sin\left(\frac{15\pi}{8}\right) & 0 & 0 & 18 \\ 1\,250 & e^{19} & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrice 4×4

$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 34 & \pi \end{pmatrix}$ $n = 1$: matrice ligne (ou vecteur ligne)

$\begin{pmatrix} e \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $p = 1$: matrice colonne (ou vecteur colonne)

Écriture indexée

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'élément situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, est noté a_{ij} (ou $a_{i,j}$ s'il y a une ambiguïté possible, par exemple $a_{12,43}$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$$

Matrice diagonale

Si A est une matrice carrée $(n = p)$,

les coefficients a_{ii}, $1 \le i \le n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires

Soit A une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que A est triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que A est triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somme des matrices

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On définit la somme des matrices A et B comme la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication des matrice par des scalaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la multiplication du scalaire α par la matrice A comme la matrice

$$\alpha.A = \alpha.(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$$

$$(-2).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -14 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

Théorème : Avec l'addition et la multiplication externe, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel de dimension np.

Le vecteur $\vec{0}$ de cet espace vectoriel est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficient sont nuls.

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la famille de matrices $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$, où $E_{i,j}$ est la matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls hormis le coefficient (i, j) qui vaut 1.

On a alors $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{i,j}$.

Représentation d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$

A tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on peut associer une matrice colonne (appelé souvent vecteur colonne) dont les coefficients sont les x_i, $1 \leq i \leq n$.

Remarque : l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, \ldots x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$

est un isomorphisme (on dit que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont isomorphes, c'est-à-dire identifiables l'un à l'autre)

Représentation d'un vecteur (suite)

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie (n), muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour $\vec{x} \in E$, on appelle matrice de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$. Autrement dit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \\ \mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X^3 - 2X + 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Représentation d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie (n), muni d'une base $\mathcal{B}$, et soit $(\vec{x}_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille de p vecteurs de E. Alors, la matrice de la famille $(\vec{x}_j)_{1\leq j\leq p}$ dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice de taille $n \times p$ dont le terme général a_{ij} est égal à la i-ème coordonnée de $\vec{x}_j$. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_p) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

avec, pour $1 \leq j \leq p$, $\quad X_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_j)$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(1+X, 1+2X^2, X-4X^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Représentation d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux espaces de dimension finie, munis des bases $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\left(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots u(\vec{e}_p)\right).$$

Remarque : Si $E = F$, on utilise souvent la même base $\mathcal{B}$ pour E et F et l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, la matrice de l'endomorphisme $u : P \longmapsto P'$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Image d'un vecteur

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ caractérise complètement l'application u, car

$$u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{f}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\right)\vec{f}_i.$$

$\longrightarrow$ si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\vec{x})) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\forall i \in \{1, 2, \dots n\}, \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$$

Notation : $Y = AX$, où AX est le produit matriciel de A et X

Produit matriciel

Définition. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices définies par

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$$

On définit la matrice produit de A et B par

$$AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}), \text{ avec } \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

Attention : Le produit matriciel AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k}b_{k2} = 2 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 5 \times 0 = 3$$

$$C = AB \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Représentation d'une composée

Proposition. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, où E, F, G sont 3 espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

Autrement dit, la composition d'application linéaires se traduit par la multiplication des matrices associées.

Les matrices comme applications linéaires

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ peut donc être considérée comme une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (en toute rigueur, de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) :

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

On a donc les définitions naturelles :

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathbb{R}^p,\ AX = 0\}$$

$$\mathrm{Im}\, A = \{AX,\ X \in \mathbb{R}^p\}$$

Rang d'une matrice

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Il y a égalité entre

- le rang de l'application linéaire A (et plus généralement de toute application linéaire u telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$) ;
- le rang de la famille des vecteurs colonne de A (et plus généralement de toute famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_p)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_p)$) ;
- le rang de la famille des vecteurs ligne de A.

Cette quantité est appelée rang de la matrice A, noté $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice : Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Récapitulatif

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. On a les correspondances suivantes :

$\vec{x} \in E$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\vec{x})$
$u \in \mathcal{L}(E,F)$ $v \in \mathcal{L}(F,G)$	$U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v)$
$\vec{y} = u(\vec{x})$	$Y = UX$
$v \circ u$	VU
u^{-1}	U^{-1} (sera vu plus tard)
$\mathrm{Ker}\, u$ $\mathrm{Im}\, u$ $\mathrm{rg}(u)$	$\mathrm{Ker}\, U$ $\mathrm{Im}\, U$ $\mathrm{rg}(U)$

Cas des matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n (matrices de taille $n \times n$).

Le produit de 2 matrices carrées de même taille est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en général $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice : Calculer, lorsqu'il est bien défini, le produit AB.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Règles de calcul pour la multiplication

La multiplication de matrices est distributive par rapport à l'addition

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}$

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

D'une manière générale, la formule du binôme ne s'applique pas aux matrices

Règles de calcul pour la multiplication

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}, B \in \mathcal{M}_{p,q}, C \in \mathcal{M}_{q,r}$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif, mais il est **associatif**.

Exercice : Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle matrice identité la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Proposition : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$I_n \times A = A \times I_p = A.$$

Puissances d'une matrice carré

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, les puissances A^k ($k \in \mathbb{N}$) de A sont définies par

- $A^0 = I_n$
- $A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$

Ainsi, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A \dots$

Question : pourrait-on ainsi définir les puissances d'une matrice non carrée ?

Exercice : Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \ (\lambda I_n)^k = \lambda^k I_n$

Exercice :

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^2 et A^3.
2. Pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer B^2 et B^3.

Application

On considère la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

On souhaite calculer “à la main” u_{32}
(ou $u_{10^{18}}$ avec un ordinateur).

$u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$, ...

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Donc par récurrence, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} u_{32} \\ u_{33} \end{pmatrix} = A^{32} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A^8 = A^4 \times A^4 = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$

$A^{16} = A^8 \times A^8 = \begin{pmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{pmatrix}$

$A^{32} = A^{16} \times A^{16} = \begin{pmatrix} 1346269 & 2178309 \\ 2178309 & 3524578 \end{pmatrix}$

d'où $A^{32} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2178309 \\ 3524578 \end{pmatrix}$ et donc $u_{32} = 2178309$.

Matrices inversibles

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

Remarque : en fait, l'une des deux conditions ($AB = I_n$ ou $BA = I_n$) suffit, l'autre s'en déduit par le théorème du rang

Proposition : Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors :

1. Son inverse est unique (on le note A^{-1})
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi inversible, alors $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Preuve (Remarque) : Si $AB = I_n$, alors $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ donc par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} B) = n$ donc $\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors} \quad BAB = B \quad & \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ BA(Bx) = Bx \\ & \Rightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,\ BAy = y \ \ (\text{car } \operatorname{Im} B = \mathbb{R}^n) \\ & \Rightarrow \quad BA = I_n. \end{aligned}$$

On montre de même que $BA = I_n \Rightarrow AB = I_n$.

Preuve (Proposition) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

1. l'inverse de A est unique :
   Soit B et C deux inverses de A, alors $BAC = (BA)C = I_nC = C$ mais également $BAC = B(AC) = BI_n = B$ donc $B = C$
2. l'inverse de A^{-1} est A, car $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
3. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi inversible, alors :
   $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

La méthode du pivot de Gauss

Pour calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss, on considère les opérations suivantes :

- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres
- Permuter des lignes

On appelle ces règles les règles élémentaires

Calcul de l'inverse

Soit à calculer l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Règle du jeu : Transformer la matrice de gauche en la matrice de droite, en n'appliquant que des règles élémentaires.

Calcul de l’inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de l’inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - 6L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de l’inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \tfrac{32}{11} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de l’inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow \tfrac{11}{12} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{11} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

Calcul de l’inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

Calcul de l’inverse

Conclusion : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

vérification : $1 \times 2 + (-5) \times (-2) = 12$

etc.

Déterminant et inverse d'une matrice 2 × 2

Définition. Le déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est le réel défini par $\det(A) = ad - bc$.

Proposition. Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si c'est le cas, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Corollaire : Les deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Remarque : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Exercice :

1) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Inverser la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Inverser la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Systèmes linéaires

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues, un système d'équations du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice du système.

Le n-uplet $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est le second membre du système.

Écriture matricielle d'un système linéaire

On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

s'écrit $Ax = b$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Si la matrice A du système est carrée inversible, le système a une solution unique :

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = A^{-1}b$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Soit à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcr} x - y + 2z & = & 5 \\ 3x + 2y + z & = & 10 \\ 2x - 3y - 2z & = & -10 \end{array}\right.$$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 3L_1$$
$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{5}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_2$$
$$L_3 \rightsquigarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{7} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Conclusion : l'unique solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcr} x - y + 2z & = & 5 \\ 3x + 2y + z & = & 10 \\ 2x - 3y - 2z & = & -10 \end{array}\right.$$

est $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Exercice : Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x-y+2z &= 1 \\ 3x+y+5z &= -1 \end{cases}$$

Résolution d'un système linéaire : cas général

Soit le système linéaire (écrit matriciellement) $Ax = b$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^n$

- **Soit** $b \notin \operatorname{Im} A$ → aucune solution
- **Soit** $b \in \operatorname{Im} A$

  On peut alors écrire $Ax_0 = b$, d'où
  $Ax = b \Leftrightarrow Ax = Ax_0 \Leftrightarrow A(x-x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker} A$

  L'ensemble des solutions est alors $\{x_0 + x,\ x \in \operatorname{Ker} A\}$

  Ceci comprend notamment le cas $n = p$ et A inversible (système dit "de Cramer"), dans lequel la solution est unique ($\operatorname{Ker} A = \{0\}$), donnée par $x = A^{-1}b$

Exercice : Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 3 \\ & -3y & -z & = & -1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 3 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & -1 \\ 2x & -3y & -z & = & -1 \end{cases}$$

Applications

Exercice : Trouver un polynôme P, de degré minimal, tel que la fonction $x \mapsto P(x)$ et la fonction sinus aient les mêmes valeurs en $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$, et la même dérivée en $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice :

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 0$ et $P(n) - P(n-1) = n^2$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
2. Montrer que le polynôme $Q(X) = P(X) - P(X-1) - X^2$ est de degré au plus 2. En déduire, au vu des racines connues de Q, que $Q = 0$.
3. En déduire l'expression explicite de $\sum_{n=1}^{N} n^2$ en fonction de N