Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°10 : Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Parmi les applications ci-dessous, reconnaître les applications linéaires, les endomorphismes et les formes linéaires. Justifier votre réponse.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (0, -x, 1)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = -z$
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x, yz)$
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$
(5) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ f(P) = \max_{x\in[0,1]} P(x)$
(6) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)X^2$
(7) $f : E \to \mathbb{R}$, $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim(u_n)$, avec E e.v. des suites convergentes
(8) $f : A \to \mathbb{R}$, avec A e.v. des suites arithmétiques et $f((u_n)) =$ raison de (u_n)

Exercice 2. Soit $f : A \to B$ une application quelconque, et $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$. Montrer que :

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective
(3) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$ avec égalité si f est surjective
(4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(6) $A_1 \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective

Exercice 3. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$, puis vérifier la cohérence du résultat à l'aide du théorème du rang.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x + y, 0, x - y)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z$
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, x, y)$
(4) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = X^2P''$
(5) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = 2P - XP'$

Exercice 4. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, lesquelles sont des isomorphismes ? (on examinera uniquement la dimension de l'espace de départ et d'arrivée de f, puis en cas de besoin $\operatorname{Ker} f$).

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, y + z)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$
(3) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(P) = (P(0), P(1), P(2))$
(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X],\ f(a, b, c) = aX(X - 1) + bX + c(X - 1)$
(5) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = X^nP(\frac{1}{X})$

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. On pose $f(\mathcal{B}) = \big(f(\vec{e}_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que :

(1) f injective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ libre
(2) f surjective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ génératrice de F
(3) f bijective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ base de F

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$.

(1) Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} - f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} f$.
(2) En déduire que $\operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f = E$ (on pourra remarquer que $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x})$)

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X^2 + 3X - 1); \quad \text{et} \quad B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\big(1, X - 1, (X - 1)^2\big).$$

Exercice 9. Pour toutes les applications linéaires $f : E \to F$ ci-dessous, calculer la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, y + z)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$
(3) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(P) = (P(0), P(1), P(2))$
(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X],\ f(a, b, c) = aX(X - 1) + bX + c(X - 1)$
(5) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = X^2P(\frac{1}{X})$

Exercice 10. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$, et l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + (1 - X)P' \end{array}$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E
(2) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(1, 1 - X, 1 + X^2, 1 - X^3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(3) Calculer les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lorsqu'elles ont un sens, calculer les expressions $A+B$, AB, BA, $B+AB$, $A+AB$.

Exercice 12. Vrai ou faux ?

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1) Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.
2) Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
3) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.
4) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
5) $AB + BA = 0$ ssi $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.
6) Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible.

Exercice 13.

Soient les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les puissances successives de J.
2) Que peut-on dire de $I - J^4$? En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14.

1) Montrer que le produit de deux matrices diagonales de dimension $n \times n$ est une matrice diagonale.
2) Soit D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'expression de D^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15.

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, répondre aux questions ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} -4x - 4y - z = -15 \\ -2x - y - z = -14 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} -2x - 2y - 3z = 2 \\ 4y + 3z = 5 \\ -1 - y - x = 1 \end{cases}$$

(1) Mettre le système sous forme matricielle.

(2) Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss vue en cours.

Exercice 17. Pour $n \geqslant 2$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on pose $A = J_n - I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

(1) Calculer J_n^2 en fonction de J_n.

(2) En déduire une expression de $(A + I_n)^2$ en donction de A et de I_n.

(3) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}A + \dfrac{2-n}{n-1}I_n$.