03/10/22 TP04 - Fourier - 1 (1)

Trait. Données

- signal carrée impair : $s(-t) = -s(t)$, signal périodique
- période $T_0 = 2\pi$ $f_0 = \frac{1}{2\pi}$ Hz ω_0

$T_s = \frac{1}{f_s}$

- freq d'échantillonnage (f_s) : plus grande que f_0 $\begin{cases} \times 10 \\ \times 20 \\ \times 5 \end{cases}$

Si s est périodique et vérifie les conditions de Dirichlet, donc s est décomposable en séries de Fourier.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2\pi(k \cdot f_0)t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2\pi(k \cdot f_0)t)$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$
$$+ \frac{a_0}{2} + a_2 \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_0 \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\pi \cdot 2f_0 \cdot t)$$
$$+ \ldots + a_p \cdot \cos(2\pi(pf_0) \cdot t) + b_p \cdot \sin(2\pi \cdot pf_0 t)$$

S : signal échantillonné : vecteur de valeurs réelles

t = np.arange(N).Ts

ou : t = np.linspace(0, (n-1)Ts, N)

On peut calculer les a_k, b_k :

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} s(t) \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)\, dt \\ b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} s(t) \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)\, dt \end{cases}$$

Pour notre signal carré : $s(t) = 1$ si $t \in [0, T_0/2]$

$s(t) = -1$ si $t \in [-\frac{T_0}{2}, 0]$

a_ℓ : $\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} s(t)\cdot\cos(2\pi \ell f_0)t\cdot dt + \ldots$

$= \frac{2}{T_0}\int \cos(2\pi \ell f_0)t\cdot dt + \ldots$

$= \frac{2}{T_0}\cdot\left[\frac{\sin(2\pi \ell f_0 t)}{2\pi \ell f_0}\right]_{T_0/2}^{0} + \ldots$

$= \frac{2}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2\pi\ell}\left[-\sin\left(\frac{2\pi\ell}{T_0}\left(\frac{-T_0}{2}\right)\right)\right] + \ldots$

si $\ell = 1$, $\sin(\pi) = 0$ $\quad = \frac{-2}{2\pi\ell}(\sin(\ell\pi)) = \frac{1}{\ell\pi}\cdot\sin(2\pi) + \ldots$

si $\ell = 2$, $\sin(2\pi) = 0$

$\vdots \quad \vdots$

$\ldots \frac{2}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} s(t)\cdot\cos(2\pi\ell f_0)t\cdot dt = 0$

$b_\ell = \frac{2}{T_0}\left(\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\cdot\sin(2\pi\ell f_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\cdot\sin(2\pi\ell f_0 t)\ldots\right)$

$= \frac{-2}{T_0}\left[\frac{-\cos(2\pi\ell f_0 t)}{2\pi\ell f_0}\right] + \frac{2}{T_0}\left[\frac{-\cos(2\pi\ell f_0 t)}{2\pi\ell f_0}\right]_0^{T_0/2}$

$= \frac{-2}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2\pi\ell}\left(-1+\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}\cdot\frac{-T_0}{2}\right)\right) + \frac{2}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2\pi\ell}\left[-\cos\left(\frac{2\pi\ell}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}\right)\ldots\right.$

$= \frac{-1}{\ell\pi}(-1+\cos(\ell\pi)) + \frac{1}{\ell\pi}(-\cos(\ell\pi)+1)$

$b_\ell = \frac{2}{\ell\pi}(1-\cos(\ell\pi))$

si ℓ est pair $= \frac{2}{\ell\pi}(1-\cos(\ell(2\times x\times\pi))) = \frac{2}{\ell\pi}(1-1) = 0$

Donc $b_\ell = 2\left(\frac{1-(-1)^\ell}{\ell\pi}\right)$

si ℓ est impair : $\frac{2}{\ell\pi}(1-(-1)) = \frac{4}{\ell\pi}$

03/10/22

Trait. Donnée

TP04 Fourier - 1 (2)

$s = \frac{a_0}{2} + b_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 t) + b_3 \sin(2\pi (3 f_0) t) + \ldots +$

(t, f_0, f_s)

p : nb de termes

p = 79 (ex du cours)

synthèse du signal t

$\ell = 1 \ldots p$

terme : $b_\ell \cdot \sin(2\pi \cdot \ell f_0 t)$