Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°1 — 21 octobre 2019
durée: 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(1) Calculer z^2 sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

(2) En déduire le module et l'argument principal de z.

Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z-(1-2i)}{1-(1+2i)z}$.

(1) Déterminer pour quel complexe z la fonction f n'est pas définie. On le mettra sous forme algébrique.

(2) Montrer que si $|z| = 1$, alors $|f(z)| = 1$.

Exercice 3. Calculer explicitement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\theta + 2k\varphi).$$

Exercice 4. On considère le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 8$.

(1) Rappeler la définition d'une racine de multiplicité m d'un polynôme.

(2) Calculer P' et déterminer ses racines. En déduire la valeur de l'unique racine double de P (notée r dans la suite).

(3) Déterminer le polynôme R tel que $P = (X-r)^2 R$, où r est la racine double de P trouvée à la question précédente.

(4) En déduire toutes les racines de P (dans $\mathbb{C}$), puis écrire P sous forme complètement factorisée.

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et strictement positifs.

(2) Exprimer $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2$ en fonction de u_n et v_n, et en déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (u_n) est croissante.

(4) Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (v_n) est décroissante.

(5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, et qu'elles ont la même limite.

Exercice 6. Pour chaque suite (u_n) définie ci-dessous, calculer un équivalent (le plus simple possible) de u_n, puis déterminer la limite (ou justifier l'absence de limite) de (u_n).

(1) $u_n = n^2 \left(\ln n - n^{1/10}\right)$

(2) $u_n = \dfrac{\ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$

(3) $u_n = \dfrac{n! + n^n}{n^{n-1} + e^{2n}} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}\right)$

(4) $u_n = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{n}} - \ln(e^n + (-1)^n)$