Algorithmique avancée
Examen

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les exercices peuvent être traités dans le désordre.
La notation prendra en compte le soin et la clarté de la rédaction.

Exercice 1.

Partie I

1. Soit G un graphe orienté dont tous les sommets sont de degré sortant au moins 1. En considérant une feuille bien choisie d' un parcours en profondeur, justifier que G contient forcément un cycle orienté.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que si tous les sommets d'un graphe sont de degré entrant au moins 1, ce dernier admet un cycle orienté.

Partie II

On considère un ensemble de tâches $u_1, \ldots, u_n$ à effectuer, certaines tâches devant être effectuées avant d'autres. On cherche à ordonner ces tâches de façon à ce que toutes les contraintes d'ordre soient respectées.

Il est possible de coder les contraintes sous la forme d'un graphe orienté G dont les tâches sont les sommets et tel qu'une arête (u_i, u_j) signifie que u_i doit être effectué avant u_j.

3. Montrer que si le problème d'ordonnancement a une solution, le graphe G est un graphe sans cycle orienté.
4. On suppose par la suite que le problème a une solution et donc que le graphe G est acyclique. Au vu des résultats de la partie I, justifier l'existence d'une tâche dont on est sûr qu'elle peut être effectuée avant toutes les autres.
5. En déduire un algorithme permettant soit d'ordonner les tâches de G en respectant les contraintes, soit de conclure que le problème ne peut pas être résolu.
6. Quelle est la complexité de cet algorithme ?
7. L'appliquer au graphe composé de sommets notés A à F avec les contraintes suivantes :

A est effectuée avant F
C est effectuée avant A et E
B est effectuée avant D et E
D est effectuée avant C et F

Exercice 2.

1. Trouver un flot maximal dans le graphe de la Figure 1. Vous donnerez les différents chemins construits et la valeur associée.

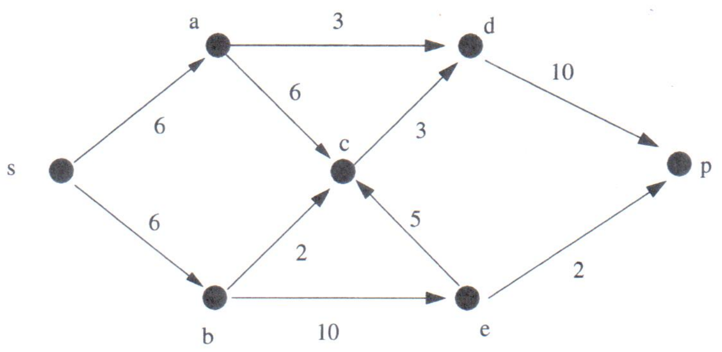

FIGURE 1 –

2. Quelles sont les arêtes de la coupe minimale associée ?
3. Soit G une instance d'un problème de flot maximal et soit f un flot maximal sur G. On considère une arête e de G et on augmente sa capacité de 1.

   En vous basant sur des arbres de parcours, déterminez un algorithme de complexité $\mathcal{O}(m)$ qui permet de déterminer si le flot f peut être aug menté.

Exercice 3.

On considère la chaîne de Markov dont les états sont indexés par les lettres de A à G et dont la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne.

2. Déterminer l'ensemble des états récurrents et transients.
3. Déterminer la distribution invariante sur la chaîne restreinte aux états C, D et F.
4. Que peut on dire de la distribution limite de la chaîne si la distribution initiale vérifie $\mathbb{P}(s_0 = C) = 1$? (le point de départ est forcément C).
5. Même question si $\mathbb{P}(s_0 = G) = 1$.
6. Même question pour une distribution initiale quelconque. Comment mo difier la chaîne pour avoir une distribution limite unique en ne modifiant que peu les probabilités de transition ?

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de développer un algorithme efficace pour déter miner le diamètre d'un arbre.

1. On considère un arbre T, et l'arbre T' obtenu en supprimant toutes les feuilles de T. Démontrer que $diam(T) = diam(T') + 2$ (il faut pour cela démontrer les deu inégalités $\leq$ et $\geq$).
2. Que peut on dire du diamètre d'un arbre qui a un ou deux sommets ?
3. Déduire des questions précédentes un algorithme qui détermine le dia mètre d'un arbre.
4. Déterminer la complexité de votre algorithme.