TD4

Exercice 1

Flots	sa	sc	ab	ac	bc	ap	cp	valeur
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	1	0	1	1
	2	0	0	1	0	1	1	2
	2	0	1	0	1	1	1	2
	2	0	1	1	1	0	2	2
	3	0	1	1	1	1	2	3

+ la même liste en ajoutant 1 sur sc et cp
+ ———————— 2 ————————

$\Rightarrow$ 24 flots à énumérer alors que le graphe est très simple et avec des capacités faibles. Ne jamais utiliser cette méthode !

Ici, le maximal est

3 2 1 1 1 1 ~~4~~ , de valeur 5

Coupes

A	$\bar{A}$	capacité	
s	a b c p	6	
s a	b c p	7	
s c	a b p	9	
s b	a c p	7	
s a b	c p	5	←
s a c	b p	9	
s b c	a p	6	
s a b c	p	6	

Mêmes remarques

Exercice 2

On applique l'algorithme Max-Flow Min-Cut

Ex Chemin augmentant 1 $u_1 \to a \to p_1$ 8

2 $u_1 \to b \to e \to p_3$ 7

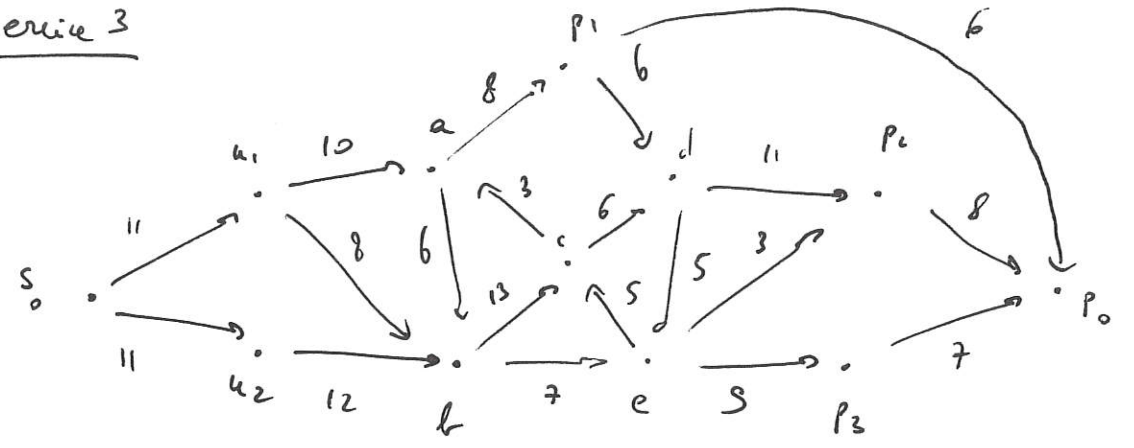
3 $u_2 \to b \to c \to d \to p_2$ 6

On obtient un flot de 21. Les arêtes $\{ap_1, cd, be\}$ sont saturées et définissent bien une coupe.

2. Il faut investir sur les arêtes de la coupe précédente

Exercice 3

1.



2. $\Leftarrow$ Si un tel flot existe, chaque source s_i émet bien moins de $\sigma(s_i)$ puis la valeur du flot sur l'arête (s_0, s_i) est bornée par $\sigma(s_i)$.

De plus, chaque puits reçoit exactement $\delta(p_i)$. Le flot est donc admissible.

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe un flot admissible dans G. Si un puits reçoit un flot supérieur à $\delta(p_i)$, on peut remonter l'un des chemins vers les sources et diminuer le flot pour que p_i reçoive exactement $\delta(p_i)$.

Le nouveau flot vérifie toujours que les sources émettent moins que leur capacité d'émission. On peut donc étendre ce flot à H et obtenir un flot qui sature les arêtes (p_i, p_0).

3. $A = \{$ tous les sommets de H sauf $p_0 \}$ et $\bar{A} = \{p_0\}$ définissent une coupe de H. Si toutes les arêtes de A à $\bar{A}$ sont saturées, le flot est bien maximal.

4. $s_0 \to u_1 \to a \to p_1 \to p_0$ de valeur 6 $\to (p_1, p_0)$ saturée

$s_0 \to u_2 \to b \to e \to p_3 \to p_0$ —— 7 $\to (p_3, p_0)$ saturée

$s_0 \to u_2 \to b \to c \to d \to p_2 \to p_0$ —— 4

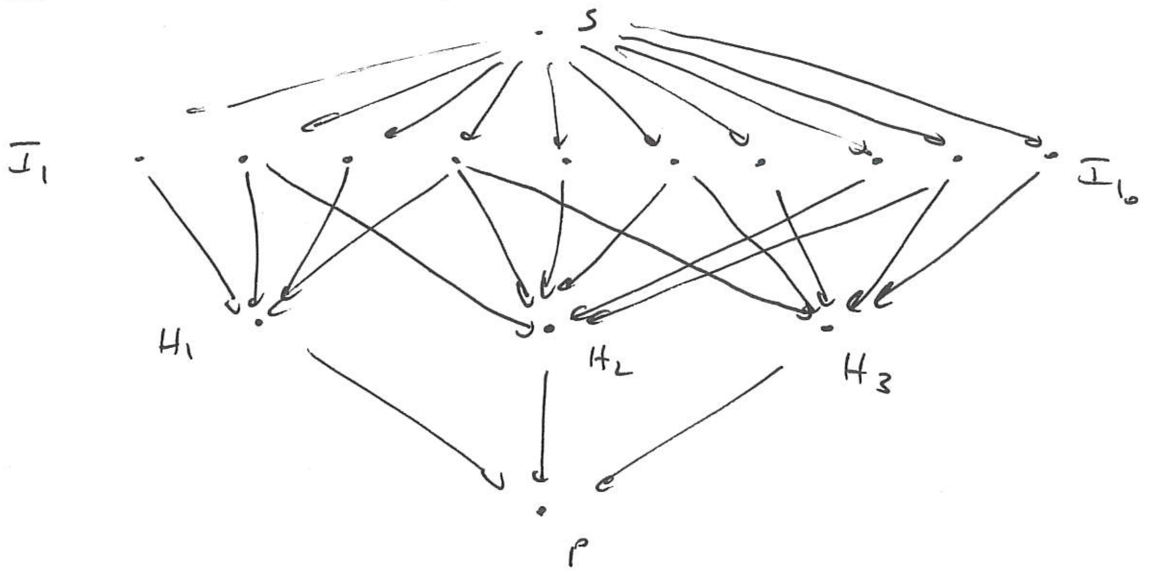
$s_0 \to u_1 \to a \to p_1 \to d \to p_2 \to p_0$ —— 2 $\}$ p_2, p_0 saturée

$s_0 \to u_1 \to b \to c \to d \to p_2 \to p_0$ —— 2

$\Rightarrow$ OK

Exercice 4

1.



2. ~~Toutes les arêtes étant de capacité 1 entre les I et les H, un flot entier revient à affecter un patient à un hôpital~~

Comme il y a n arêtes de capacité 1 issues de la source, un flot de valeur n les sature toutes.

Chaque I_i reçoit donc 1 et renvoie par conséquent 1.
Comme le flot est entier, chaque I_i est "relié" à un exactement un hôpital par le flot.

Un flot correspond donc à une affectation des malades s'il est de valeur n.

3. On trouvera une affectation avec au plus $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ malades par hopital s'il existe un flot de valeur n et fixant les capacités des arêtes entre les hopitaux et p à $\lceil \frac{n}{k} \rceil$

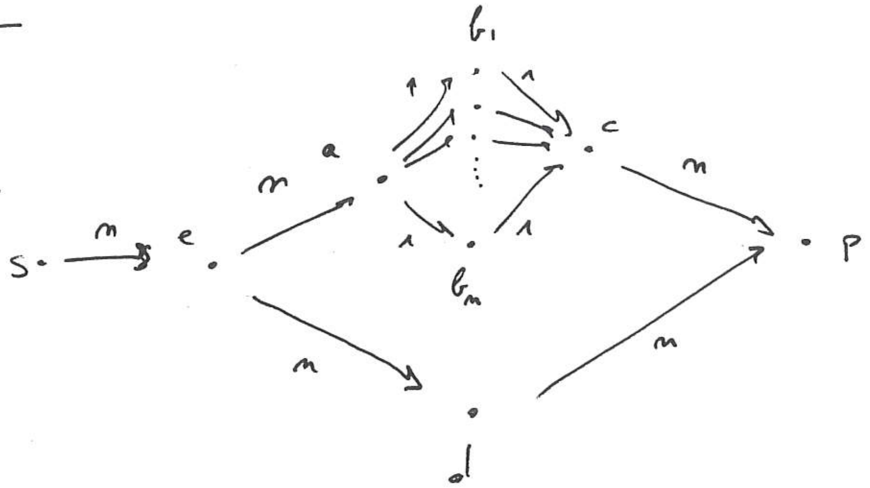
4. Faire comme en 3, faire tourner max-flow min-cut, regarder si le flot max est de capacité n.

Complexité du max-flow min cut : O(m × nombre de chemins augmentants)

↳ dépend de l'implémentation de la recherche des chemins (cf Ex5)

Ex 5

1.



Si on passe par le haut, on peut construire n chemins augmentant
bas, un seul suffit

Remarque : Si le graphe est grand, on ne voit rien à l'oeil et cela risque bien d'arriver !

2. Chaque arête a une capacité d'au plus C et une coupe contient au plus toutes les arêtes.

3. Lancer un DFS sur les arêtes sur lesquelles on peut augmenter le flot de K :

- si $c(e) - f(e) \geq K$ en les prenant dans le bon sens
- si $f(e) \geq K$ ——— mauvais sens

Le résultat, si on peut relier la source au puits, est un chemin augmentant de saturation au moins K. Inversement, si un tel chemin existe, il sera trouvé par cette méthode.

4. L'algorithme réalise l'étape de la question 3 pour des valeurs de K de plus en plus petites. A la fin, il les réalise pour $K=1$, donc tout chemin augmentant finira par être trouvé

Pour le graphe de 4.2.,

$C = 13$

$\Rightarrow$ La première valeur de K est 8.

On trouve $u_1 \to a \to p_1$ de saturation 8

$\Rightarrow$ Valeur suivante de K est 4.

$u_2 \to b \to e \to p_2$ —— 7

$u_1 \to b \to c \to d \to p_2$ —— 6

On s'arrête.

5. Soit A l'ensemble des sommets découverts par le DFS de la question 3. Alors toute arête de A vers $\bar{A}$ ne peut pas accueillir de flot supplémentaire de valeur K : elle est donc de capacité $\leq k$ dans le graphe résiduel.

La coupe $(A, \bar{A})$ est donc de capacité $\leq Km$ à la fin de la question 3.

Comme $K \leftarrow K/2$ à la ligne 7, ~~lorsque~~ le DFS a été appliqué pour 2K quand on est à la ligne 4, d'où la réponse

6. ~~les lignes 5-6~~ A chaque execution de la ligne 6, le flot est augmenté d'au moins K. Il ne peut donc être augmenté que 2m fois

7. $\Theta(m \times m \times \log_2 C)$

DFS — Q6 — valeurs de K