Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°9 : Espaces vectoriels — correction —

Exercice 1. Lesquels des ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? (donner une preuve)

$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - y = 0\}$ $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0 \text{ ou } 2x + y - z = 0\}$
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 1\}$ $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |x + z| = |y|\}$
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$ $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\}$

F_1 : oui : si $(x_1, y_1) \in F_1$, $(x_2, y_2) \in F_1$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$3(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(3x_1 - y_1) + \alpha_2(3x_2 - y_2) = 0$$

donc $\alpha_1.(x_1, y_1) + \alpha_2.(x_2, y_2) \in F_1$.
F_2 : non ($\vec{0} \notin F_2$) ;
F_3 : oui (intersection de deux s.e.v) ;
F_4 : non (l'union de deux s.e.v. n'est un e.v. que si l'un des deux est inclus dans l'autre, ce qui n'est pas le cas ici, par exemple $\vec{u} = (1, 0, -1) \in F_4, \vec{v} = (0, 1, 1) \in F_4$, mais $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1, 0) \notin F_4$;
F_5 : non ($|x + z| = |y|$ se réécrit "$x + z = y$ ou $x + z = -y$", donc on est encore dans le cas d'une union de s.e.v qui n'est pas un s.e.v., par exemple $\vec{u} = (1, 1, 0) \in F_5, \vec{v} = (1, -1, 0) \in F_5$, mais $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 0) \notin F_5$;
F_6 : oui car $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$, donc on a une intersection de deux s.e.v.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivables et de dérivée continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $F = \{f \in E,\ f' + 2f = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
$\forall f, g \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f + \beta g)' + 2(\alpha f + \beta g) = \alpha(f' + 2f) + \beta(g' + 2g) = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in E$.

Exercice 3. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Si $(x, y, z) \in F, (x', y', z') \in F$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, alors
$(\alpha x + \alpha' x') + (\alpha y + \alpha' y') - (\alpha z + \alpha' z') = \alpha(x + y - z) + \alpha'(x' + y' - z') = 0$.
Si $\vec{u}, \vec{u}' \in G$, alors on peut écrire $\vec{u} = (a - b, a + b, a - 3b)$, $\vec{u}' = (a' - b', a' + b', a' - 3b')$, donc pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ on a $\alpha.\vec{u} + \alpha'.\vec{u}' = ((\alpha a + \alpha' a') - (\alpha b + \alpha' b'), (\alpha a + \alpha' a') + (\alpha b + \alpha' b'), (\alpha a + \alpha' a') - 3(\alpha b + \alpha' b')) \in G$.

(2) Déterminer $F \cap G$.
$(a - b, a + b, a - 3b) \in F \Leftrightarrow (a - b) + (a + b) - (a - 3b) = 0 \Leftrightarrow a = -3b$,
donc $F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b),\ b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\big((2, 1, 3)\big)$.

Exercice 4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) = n\}$ $F_5 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 1\}$
$F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) \leqslant n\}$ $F_6 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' + XP + P(0)X^2 = 0\}$
$F_3 = \{(X - 1)(X - 2)P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ $F_7 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(X^2) = P(X)\}$
$F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = P(2) = 0\}$ $F_8 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P \text{ a au moins 3 racines réelles}\}$

F_1 : seulement si $n = 0$ (sinon $0 \notin F_1$) ;
F_2 : oui, vu en cours, c'est $\mathbb{R}_n[X]$;
F_3 : oui car $\alpha.X(X - 1)P + \beta.X(X - 1)Q = X(X - 1)(\alpha P + \beta Q)$;
F_4 : oui car $(\alpha.P + \beta.Q)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x)$ (au passage, on peut noter que $F_4 = F_3$) ;
F_5 : non car $0 \notin F_5$;
F_6 : oui, il suffit de l'écrire (on peut aussi remarquer que F_6 est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application linéaire $P \mapsto P' + XP + P(0)X^2$) ;
F_7 : oui et même $F_7 = \text{Vect}(1)$;
F_8 : non car pas de stabilité par addition (on peut prendre par exemple $P = X(X - 2)(X + 2) = X^3 - 4X \in F_8$ et $Q = X(1 - X)(1 + X) = X - X^3 \in F_8$; alors $P + Q = -3X \notin F_8$).

Exercice 5. Les familles suivantes (de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}_2[X]$ selon les cas) sont elles libres ? génératrices ? forment elles une base ? Donner le rang de la famille. Dans le cas où la famille est libre, la compléter en une base en ajoutant des vecteurs de la base canonique. Dans le cas où la famille est génératrice, en extraire une base. Dans le cas où la famille est liée, donner une relation de dépendance linéaire, extraire une famille libre maximale puis la compléter en une base.

$\mathcal{F}_1 = \big((1, 2), (-2, 4)\big)$ $\mathcal{F}_4 = \big((1, 0, 2), (0, 1, 2)\big)$ $\mathcal{F}_7 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, X^2 - 2X\big)$
$\mathcal{F}_2 = \big((1, 2), (-\pi, -2\pi)\big)$ $\mathcal{F}_5 = \big((1, 2, 3), (3, 1, 2), (4, 3, 5)\big)$ $\mathcal{F}_8 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, 1 - X\big)$
$\mathcal{F}_3 = \big((1, 2), (1, 1), (2, 1)\big)$ $\mathcal{F}_6 = \big((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$ $\mathcal{F}_9 = \big(X(X + 1), (X - 1)(X - 2)\big)$

Dans tous les cas on choisit de numéroter $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, etc. les vecteurs de la famille considérée.
$\mathcal{F}_1$: $\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2\beta = 0 \text{ et } \alpha + 2\beta = 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ donc la famille est libre donc comme elle est de cardinal 2 dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, c'est une base.
$\mathcal{F}_2$: $\vec{u}_2 = -\pi.\vec{u}_1$ donc la famille est liée ; on peut compléter la famille libre maximale $(\vec{u}_1)$ par le vecteur $(1, 0)$ pour en faire une base de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{F}_3$: $\vec{u}_1 + \vec{u}_3 = 3.\vec{u}_2$ donc la famille est liée ; comme la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ est libre, elle forme une base de $\mathbb{R}^2$ extraite de la famille génératrice $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
$\mathcal{F}_4$: la famille est libre (vérification immédiate) et peut être complétée (par exemple) par le vecteur $(0,0,1)$ pour donner une base de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{F}_5$: la famille est liée car $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$; on peut compléter $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ par n'importe lequel des 3 vecteurs de la base canonique (par exemple $(1,0,0)$) pour en faire une base de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{F}_6$: la famille est nécessairement liée car de cardinal 4 dans un e.v. de dimension 3 ; on a par exemple $\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3 = 2\vec{u}_4$; la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre et de cardinal 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{F}_7$: $X^2 = \frac{2}{3}\vec{u}_2 + \frac{1}{3}\vec{u}_3$, $1 = \vec{u}_1 - \frac{2}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{u}_3$, $X = \vec{u}_2 - \frac{2}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{u}_3 = \frac{1}{3}\vec{u}_2 - \frac{1}{3}\vec{u}_3$ donc la famille est génératrice ; comme elle est de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
$\mathcal{F}_8$: $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ donc la famille est liée ; $(\vec{u}_1, \vec{u}_2$ peut être complétée par 1 (par exemple) pour obtenir une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
$\mathcal{F}_9$: $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas proportionnels (car ils n'ont pas les mêmes racines), donc la famille est libre ; elle n'est pas génératrice car de cardinal seulement 2 ; on peut la compléter par le polynôme X (par exemple) pour en faire une base.

Exercice 6. A tout réel λ, on associe la famille $\mathcal{F}_\lambda = \big((1,0,\lambda),(1,1,\lambda),(\lambda,0,1)\big)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\lambda$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
La famille $\mathcal{F}_\lambda$ est de cardinal 3, et $\mathbb{R}^3$ est un e.v. de dimension 3, donc la famille $\mathcal{F}_\lambda$ est une base ssi elle est libre.

$$\alpha.(1,0,\lambda)+\beta.(1,1,\lambda)+\gamma.(\lambda,0,1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+\lambda\gamma=0\\ \beta=0\\ \lambda\alpha+\lambda\beta+\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+\lambda\gamma=0\\ \beta=0\\ \lambda\alpha+\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+\lambda\gamma=0\\ \beta=0\\ (1-\lambda^2)\gamma=0\end{array}\right.$$

Si $\lambda^2 = 1$, alors $(\alpha,\beta,\gamma) = (-\lambda,0,1)$ est solution donc la famille n'est pas libre. Si $\lambda^2 \neq 1$, la seule solution est $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$ donc la famille est libre.
Conclusion : la famille $\mathcal{F}_\lambda$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $\lambda^2 \neq 1$.

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les ensembles

$$F = \{(x,y,z,t) \in E,\ x-2y=0 \text{ et } y-2z=0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z,t) \in E,\ x+z=y+t\}.$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
La vérification ne pose pas de difficulté (un exemple de rédaction est donné pour F_1 dans l'exercice 1).

(2) Donner une base de F, une base de G, et une base de $F \cap G$.
Si $(x,y,z,t) \in F$, alors $y = 2x$ et $z = \frac{1}{2}y = x$, donc $F = \{(x,2x,x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((1,2,1,0),(0,0,0,1)\big)$ et comme la famille $\big((1,2,1,0),(0,0,0,1)\big)$ est libre, c'est une base de F.
On a $G = \{(x,y,z,x+z-y),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\big)$
et comme la famille $\big((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\big)$ est libre, c'est une base de G.
Si $(x,y,z,t) \in F \cap G$, alors $y = 2x$, $z = x$ et $t = x+z-y = 0$,
donc $F \cap G = \{(x,2x,x,0),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1,2,1,0)\big)$.

(3) Montrer que $E = F + G$. A-t-on $E = F \oplus G$?
Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a $(x,y,z,t) = (x,y,z,x+z-y) + (0,0,0,t-x-z+y)$ avec $(x,y,z,x+z-y) \in G$ et $(0,0,0,t-x-z+y) \in F$, donc $E = F + G$.
On a pas $E = F \oplus G$ car $F \cap G \neq \{0\}$.

(4) Donner un supplémentaire de F dans E.
F est de dimension 2 et E de dimension 4, on obtient donc un supplémentaire de F dans E en complétant la base de F donnée à la question 2 en une base de E (ce qui nécessite l'ajout de 2 vecteurs). Si l'on choisit (par exemple) $H = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big)$, on a bien $\dim H = \dim F = 2$ et $F \cap H = \{0\}$ (la vérification ne pose pas de difficulté), donc $F \oplus H = E$ ce qui signifie que H est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Rappeler l'expression de $\sin(x+\alpha)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, pour $x, \alpha \in \mathbb{R}$.
$\sin(x+\alpha) = \sin x \cos\alpha + \sin\alpha \cos x$.

(2) En déduire la dimension de $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}\big)$, où $\vec{u}_\alpha = (x \mapsto \sin(x+\alpha))$.
D'après la question précédente, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\vec{u}_\alpha \in \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$, donc $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}\big) \subset \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$, et il y a égalité puisque $\vec{u}_0 = \sin$ et $\vec{u}_{\pi/2} = \cos$. Or La famille $(\sin,\cos)$ est libre dans E, car si $\alpha\sin+\beta\cos = 0$, alors en évaluant cette fonction en $\frac{\pi}{2}$ et en 0 on obtent $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, $\dim\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}\big) = 2$.

(3) Quel est le rang de la famille $(\mathrm{ch},\mathrm{sh},\exp)$?
La famille $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est libre car si $\alpha\,\mathrm{ch}+\beta\,\mathrm{sh} = 0$, alors $\alpha = 0$ (on évalue la fonction en 0) et donc $\beta = 0$ (on évalue la fonction en 1 par exemple). Comme $\exp = \mathrm{ch}+\mathrm{sh}$, on en déduit que le rang de la famille $(\mathrm{ch},\mathrm{sh},\exp)$ est 2.

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ lesquelles des affirmations ci-dessous sont exactes ? (justifier)

(1) $\mathrm{Vect}(X+1, X-1) \oplus \mathrm{Vect}(X^2+X+1) = \mathbb{R}_2[X]$
Vrai car $(X+1, X-1, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En effet c'est une famille libre car si $\alpha(X+1) + \beta(X-1) + \gamma(X^2+X+1) = 0$, alors $\gamma = 0$ (coefficient de X^2) et en évaluant le polynôme en 1 et -1 on trouve

$\alpha = \beta = 0$. Comme cette famille libre est de cardinal 3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, elle est également génératrice.

(2) $\mathrm{Vect}\big((X-1)^3, (X-2)^3\big) \oplus \{\lambda X^3,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_3[X]$
Faux car si l'affirmation était vraie, on aurait alors $\mathrm{Vect}\big((X-1)^3, (X-2)^3, X^3\big) = \mathbb{R}_3[X]$, ce qui est impossible puisqu'une famille de cardinal 3 ne peut être génératrice d'un e.v. de dimension 4.

(3) $\{aX^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\} \oplus \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_2[X]$
Faux car $1 \in \{aX^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\} \cap \mathrm{Vect}(1, X)$.

(4) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}[X]$
On a bien $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\} + \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}[X]$ car tout polynôme P s'écrit $P = P - P(1) + P(1)$, avec $P - P(1) \in \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ et $P(1) \in \mathrm{Vect}(1)$. Par ailleurs, la somme est directe car si $P(1) = 0$ et $P \in \mathrm{Vect}(1)$, P est un polynôme constant qui s'annule en 1, donc le polynôme nul. L'affirmation est donc vraie.

(5) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{R}[X]$
Vrai pour la même raison que précédemment, en écrivant cette fois $P = P - P(1)X + P(1)X$.

(6) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{R}[X]$
Faux car Le polynôme constant égal à 1 ne peut pas s'écrire sous la forme $1 = P + \lambda X$ avec $P(0) = 0$.

(7) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P'(0) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}\big(1, X\big) = \mathbb{R}[X]$
Posons $E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}\big(1, X\big)$. On a bien $E + F = \mathbb{R}[X]$ car tout polynôme P s'écrit $P = P - P(0) - P'(0)X + P(0) + P'(0)X$, avec $P - P(0) - P'(0)X \in E$ et $P(0) + P'(0)X \in F$.
Par ailleurs, si $P \in E \cap F$, alors $P = a + bX$ et $P(0) = P'(0) = 0 \Rightarrow a = b = 0$. La somme est donc bien directe : l'affirmation est vraie.

(8) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = -P(X)\} = \mathbb{R}[X]$
Vrai : le seul polynôme à la fois pair et impair est le polynôme nul, et tout polynôme s'écrit comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair (on peut le montrer en groupant séparément les termes de degrés pairs et impairs, ou bien en écrivant $P = \frac{P(X)+P(-X)}{2} + \frac{P(X)-P(-X)}{2}$.

Exercice 10. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$F = \{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$. Quels sont les dimensions respectives de F et G ?
Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in F \cap G$, alors $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ et $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 0$, donc $nx_1 = 0$ et par conséquent $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. On a donc $F \cap G = \{0\}$.
Pour $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, posons $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i = x_i - m$ et $z_i = m$. On a à la fois $(y_i) \in F$, $(z_i) \in G$ et $(x_i) = (y_i) + (z_i)$, donc $F + G = \mathbb{R}^n$.
Conclusion : on a bien montré que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.
$G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, \ldots, 1)\big)$ donc $\dim G = 1$. Comme $\dim \mathbb{R}^n = n$ et $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$, on en déduit que $\dim G = n - 1$.

Exercice 11. On considère une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *échelonnée en degré*, c'est-à-dire telle que $d^o(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, puis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Montrons par récurrence la propriété $(\mathcal{P}_n)$: "toute famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ échelonnée en degré est une base de $\mathbb{R}_n[X]$".
- $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car si $d^o(P_0) = 0$, P_0 est un polynôme constant non nul donc constitue bien une base (à un élément) de $\mathbb{R}_0[X]$ (e.v. des polynômes constants).
- supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie, et considérons une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{n+1})$ échelonnée en degré. Comme cette famille est de cardinal $n + 2 = \dim \mathbb{R}_{n+1}[X]$, pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit λX^{n+1} le terme dominant de P_{n+1} (on a $\lambda \neq 0$ car $d^o P_{n+1} = n + 1$). Si $Q = a_0 P_0 + \ldots + a_{n+1} P_{n+1} = 0$, le terme dominant de Q est $a_{n+1}\lambda X^{n+1}$, donc $a_{n+1} = 0$. On a donc $a_0 P_0 + \ldots + a_n P_n = 0$, mais comme par hypothèse de récurrence la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre, on en déduit que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Par conséquent, la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{n+1})$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la remarque précédente.

Il reste à montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Cette famille est libre car toute combinaison linéaire (finie par définition) est une combinaison linéaire des éléments d'une famille (libre d'après ce qui précède) de type $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, où n est l'indice le plus grand utilisé dans la combinaison linéaire finie de départ.
Par ailleurs, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$, puisque pour tout polynôme P, on a $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour $n = d^o(P)$ et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12. Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\big(x \mapsto e^{ax}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre (on pourra s'intéresser au comportement à l'infini d'une combinaison linéaire de ces fonctions).
Raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $\big(x \mapsto e^{ax}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ soit liée. Il existe donc des réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que la fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{a_k x}$$

soit la fonction nulle. Quitte à enlever les couples (a_i, α_i) pour lesquels $\alpha_i = 0$, on peut supposer qu'aucun des α_i n'est nul. On a alors, par croissance comparée, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha_n e^{a_n x}$, ce qui est impossible puisque f est la fonction nulle. Cette contradiction montre donc que l'hypothèse de départ est absurde, donc que la famille $\big(x \mapsto e^{ax}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 13 (DM 9).
Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant la récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que E est un espace vectoriel
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Posons $w = \alpha u + \beta v$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} = \alpha(4u_{n+1} - 4u_n) + \beta(4v_{n+1} - 4v_n) = 4w_{n+1} - 4w_n,$$
donc $w \in E$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel des suites réelles.

(2) Soit $v = (v_n)$ l'élément de E vérifiant $v_0 = 1, v_1 = 0$, et $w = (w_n)$ l'élément de E vérifiant $w_0 = 0, w_1 = 1$. Montrer que la famille (v, w) est libre.
Si $\alpha v + \beta w = 0$, alors en particulier $\alpha v_0 + \beta w_0 = 0$ (ce qui implique $\alpha = 0$), et $\alpha v_1 + \beta w_1 = 0$ (ce qui implique $\beta = 0$), autrement dit $\alpha = \beta = 0$. La famille (v, w) est donc libre.

(3) Exprimer tout élément $u = (u_n)$ de E en fonction de v, w, u_0 et u_1. En déduire que (v, w) est une base de E, et la dimension de E.
Soit $z = (z_n)$ l'élément de E défini par $z = u_0.v + u_1.w$. On a $z_0 = u_0$, $z_1 = u_1$, et comme $z \in E$, la suite (z_n) vérifie la récurrence $z_{n+2} = 4z_{n+1} - 4z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $z = u$.
Conclusion : tout élément $u \in E$ s'écrit $u = u_0.v + u_1.w$.
On en déduit que la famille (v, w) et génératrice de E, et comme elle est libre (question précédente), c'est une base de E, donc $\dim E = 2$.

(4) Montrer que les deux suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans E, et qu'elles forment une famille libre. En déduire qu'elles forment une base de E.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4.2^{n+1} - 4.2^n = 2^{n+2}(2-1) = 2^{n+2}$ donc $(2^n) \in E$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n = 2^{n+2}(2(n+1) - n) = (n+2)2^{n+2}$ donc $(n2^n) \in E$.
Enfin, si $\alpha 2^n + \beta n 2^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\alpha = 0$ $(n = 0)$ et $2\alpha + 2\beta = 0$ $(n = 1)$ donc $\alpha = \beta = 0$. La famille $\big((2^n), (n2^n)\big)$ est donc libre.
La famille $\big((2^n), (n2^n)\big)$ est libre, donc comme elle est de cardinal 2 dans E qui est de dimension 2, c'est une base de E.

(5) En déduire, pour tout élément (u_n) de E, l'écriture explicite de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
D'après la question précédente, la famille $\big((2^n), (n2^n)\big)$ est une base de E. Tout élément $u \in E$ peut donc s'écrire de manière unique sous la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$, et on peut identifier les valeurs de α et β en prenant les valeurs $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donne $u_0 = \alpha$ et $u_1 = 2\alpha + 2\beta$, soit $\beta = \frac{1}{2}u_1 - u_0$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 2^n + (\dfrac{1}{2}u_1 - u_0)n2^n$.

Exercice 14 (DM 9).
Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère, les fonctions $f_a : x \mapsto |x - a|$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont tous distincts et $\alpha_1 \neq 0$, alors la fonction définie par
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x - a_i|$$
n'est pas dérivable en $x = a_1$.
On peut écrire $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $g(x) = \alpha_1|x - a_1|$ et $h(x) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i|x - a_i|$, et comme les (a_i) sont tous distincts, la fonction h est dérivable en $x = a_1$ (aucune des valeurs absolues présentes dans la définition de h ne s'annule en $x = a_1$). La fonction g est dérivable à gauche et à droite en a_1, et
$$g'_+(a_1) = \alpha_1, \quad g'_-(a_1) = -\alpha_1.$$
Par conséquent, la fonction f est dérivable à gauche et à droite en a_1, et
$$f'_+(a_1) = \alpha_1 + h'(a_1), \quad f'_-(a_1) = -\alpha_1 + h'(a_1).$$
Comme $\alpha_1 \neq 0$, ces deux dérivées sont distinctes et f n'est donc pas dérivable en $x = a_1$.

(2) En déduire que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre. On rappelle qu'une famille (finie ou infinie) est libre ssi la seule combinaison linéaire (finie par définition) des éléments de la famille qui produit le vecteur nul est celle qui n'a que des coefficients nuls.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ soit liée. On peut donc trouver une combinaison linéaire (finie par définition) des $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ qui produit la fonction nulle, sans que tous les coefficients de la combinaison linéaire soient nuls. Autrement dit, il existe des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts, et des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x - a_i|$$
soit la fonction nulle. Quitte à enlever les couples (α_i, a_i) tels que $\alpha_i = 0$, on peut supposer qu'aucun des coefficients α_i n'est nul (donc en particulier $\alpha_1 \neq 0$). D'après la question 1, on sait donc que f n'est pas dérivable en a_1, ce qui est absurde puisque f est la fonction nulle. Par conséquent, l'hypothèse de départ est absurde et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est donc libre.

(3) Comment s'appellent les éléments de $\mathrm{Vect}\big((f_a)_{a\in\mathbb{R}}\big)$?
On reconnaît les fonctions affines par morceaux.