Algorithmique avancée
Examen

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les exercices peuvent être traités dans le désordre.
La notation prendra en compte le soin et la clarté de la rédaction.

Exercice 1.

On considère un graphe orienté G et un sommet u de G.

1. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u ?
2. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u sur le graphe obtenu en inversant le sens de toutes les arêtes ?
3. En déduire un algorithme permettant de déterminer les composantes fortement connexes de G.
4. On admet que déterminer l'intersection de deux ensembles A et B est de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$, où $n = |A| + |B|$. En déduire la complexité de l'algorithme précédent.

Exercice 2.

Un théorème central en théorie des graphes est le suivant :

Théorème 1 (Menger). Soit G un graphe non-orienté simple et u et v deux sommets de G. Pour tout entier k, il existe soit k chemins disjoints entre u et v, soit un ensemble d'au plus $k-1$ sommets dont la suppression déconnecte u de v.

Ce théorème a également une version basée sur les arêtes (et qui est en fait une étape dans la démonstration du théorème précédent). Il utilise la notion de chemins arêtes-disjoints, qui sont des chemins qui peuvent éventuellement partager des sommets mais n'ont aucune arête en commun.

Théorème 2 (Menger). Soit G un graphe non-orienté simple et u et v deux sommets de G. Pour tout entier k, il existe soit k chemins arêtes-disjoints entre u et v, soit un ensemble d'au plus $k-1$ arêtes dont la suppression déconnecte u de v (au sens où il n'y a plus de chemin de u vers v).

Soit G un graphe non-orienté simple et u et v deux sommets de G. On construit un graphe H en remplaçant chaque arête de G par deux arêtes orientées opposées, de capacité 1. u est considéré comme la source de H et v comme son puits.

1. Démontrer qu'il existe k chemins arêtes-disjoints de u à v dans G si et seulement si il existe un flot de valeur k dans H.
2. Démontrer qu'il existe un ensemble d'au plus $k-1$ arêtes dont la suppression déconnecte u de v dans G si et seulement si il existe une coupe de capacité au plus $k-1$ dans H.
3. Démontrer le second théorème de Menger.

Exercice 3.

La figure 1 montre un graphe de communication avec les capacités de chacune des liaisons. On suppose qu'un flux f de valeur 6 circule déjà entre l'émetteur s et le récepteur p le long du chemin (s, c, a, f, d, g, p) (arêtes en gras).

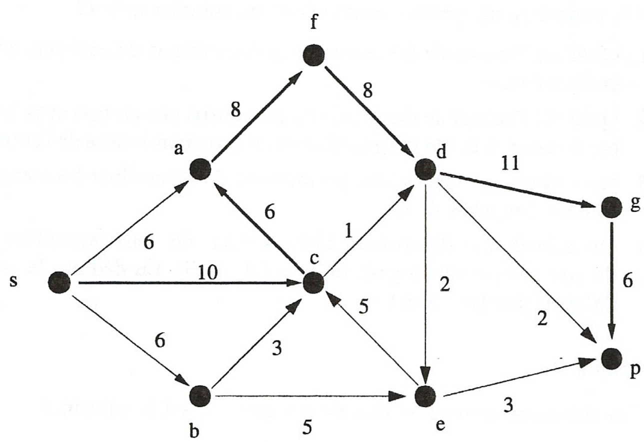

FIGURE 1 –

1. Quelle est la valeur du flux maximal qui peut être transmis de l'émetteur au récepteur en augmentant le flux actuel (c'est à dire que le nouveau flux f' doit vérifier $f'(e) \geq f(e)$ pour toute arête) ?
2. Pour pallier à des défaillances de liaisons, le client souhaite garder le flux actuel f et envoyer un flux supplémentaire de même valeur n'empruntant aucune arête en commun avec f. Est-ce possible ? Si non, quelle est la valeur maximale du second flux dont il peut bénéficier ?
3. L'augmentation de 1 de la capacité d'une arête coûte 1000 euros. Combien devez-vous dépenser pour accéder à la requête du client ?

Exercice 4.

On considère la chaîne de Markov représentée à la figure 2.

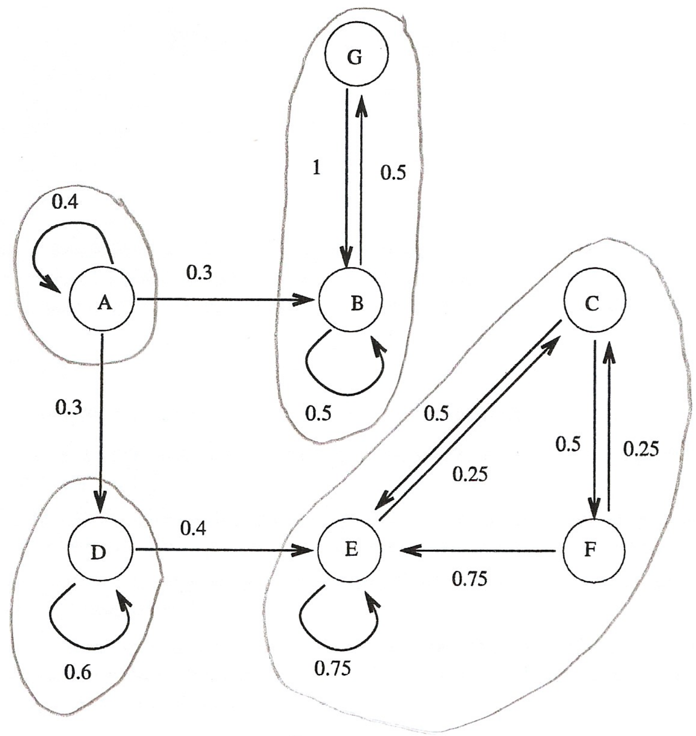

FIGURE 2 –

1. Déterminer les composante fortement connexes du graphe. En déduire l'ensemble des états récurrents et transients.
2. On considère la chaîne réduite aux états C, E et F. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne.
3. On considère la même chaîne réduite aux états C, E et F. On note P' sa matrice de transition. Résoudre ${}^tX = {}^tXP'$.
4. Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de la chaîne restreinte aux états C, E et F ?