Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°6

Exercice 5

Exercice 5

Cette fiche donne les solutions de l'exercice 5 du TD 3 sur les équations différentielles.

La solution de la question 9 est détaillée et les autres réponses sont données sans démonstration. Nous vous invitons à nous posez toutes vos questions sur le forum Moodle.

En particulier, si vous souhaitez que l'on développe la correction de certaines questions, n'hésitez pas.

Bon travail à tous et à toutes !

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

1[ère] **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

1[ère] **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 3y(x) = 0 \qquad (1)$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 3y(x) = 0 \tag{1}$$

L'équation est déjà normalisée. Les solutions de (1) sont de la forme $y_0(x) = Ce^{-3x}$, avec C une constante réelle.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

1$^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 3y(x) = 0 \qquad (1)$$

L'équation est déjà normalisée. Les solutions de (1) sont de la forme $y_0(x) = Ce^{-3x}$, avec C une constante réelle.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E).

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + 3y(x) = 0 \tag{1}$$

L'équation est déjà normalisée. Les solutions de (1) sont de la forme $y_0(x) = Ce^{-3x}$, avec C une constante réelle.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E).

Remarque : (Voir poly, section 3.2.3) Considérons une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$y'(x) + \alpha y(x) = h(x) \qquad \text{(E)}$$

Si $h(x)$ est une somme $h_1(x) + \cdots + h_k(x)$ où pour chaque h_i on sait trouver une solution particulière y_{p_i} de l'équation $y'(x) + \alpha y(x) = h_i(x)$, alors la fonction

$$y_p = y_{p_1} + \cdots + y_{p_k}$$

est une solution de (E). On dit que l'on superpose les diverses solutions particulières.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Rappel des formes connues

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
- Si h est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, on peut chercher y_p sous cette forme.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Rappel des formes connues

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
- Si h est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, on peut chercher y_p sous cette forme.

2$^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E).

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Rappel des formes connues

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
- Si h est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, on peut chercher y_p sous cette forme.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E). Nous allons donc procéder en 3 étapes.

- Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = x.$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Rappel des formes connues

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
- Si h est une combinaison linéaire de sinus et de cosinus, on peut chercher y_p sous cette forme.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E). Nous allons donc procéder en 3 étapes.

- Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = x$.

  Les coefficients de cette équation sont constants, et le second membre est un polynôme de degré 1 donc il existe un polynôme de degré 1 $y_{p_1}(x) = ax + b$ solution de l'équation. En injectant y_{p_1} dans l'équation, on obtient :

$$a + 3(ax + b) = x \quad \Leftrightarrow \quad 3ax + a + 3b = x \qquad (2)$$

  Par identification, $\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{a}{3} = -\frac{1}{9} \end{cases}$.

  Ainsi, $y_{p_1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = -e^{3x} \quad (E2)$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = -e^{3x} \quad (E2)$.

  Ici, le second membre est sous la forme d'une constante (polynôme de degré 0) et d'une exponentielle donc on cherche une solution de la forme $y_{p_2} = P(x)e^{3x}$. On injecte y_{p_2} dans l'équation précédente et on obtient :

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = -e^{3x} \quad (E2)$.

  Ici, le second membre est sous la forme d'une constante (polynôme de degré 0) et d'une exponentielle donc on cherche une solution de la forme $y_{p_2} = P(x)e^{3x}$. On injecte y_{p_2} dans l'équation précédente et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{3x} + P(x)3e^{3x} + 3P(x)e^{3x} = -e^{3x} \\ \iff \quad & (P'(x) + 6P(x))e^{3x} = -e^{3x} \\ \iff \quad & P'(x) + 6P(x) = -1 \end{aligned}$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = -e^{3x} \quad (E2)$.

Ici, le second membre est sous la forme d'une constante (polynôme de degré 0) et d'une exponentielle donc on cherche une solution de la forme $y_{p_2} = P(x)e^{3x}$. On injecte y_{p_2} dans l'équation précédente et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{3x} + P(x)3e^{3x} + 3P(x)e^{3x} = -e^{3x} \\ \iff \quad & (P'(x) + 6P(x))e^{3x} = -e^{3x} \\ \iff \quad & P'(x) + 6P(x) = -1 \end{aligned}$$

Une forme évidente pour P est $P(x) = -\frac{1}{6}$ (puisque dans ce cas $P'(x) = 0$). Ainsi, $y_{p_2} = -\frac{1}{6}e^{3x}$ est une solution de $(E2)$.

Remarque : Le coefficient de l'exponentielle pour définir y_p est bien le même que celui dans le second membre de l'équation (e^{3x} ici).

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = \cos(x/2) \quad (E3)$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = \cos(x/2) \quad (E3)$.

  Ici, le second membre est sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus donc on cherche une solution de la forme $y_{p_3} = a\cos(\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{x}{2})$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = \cos(x/2) \quad (E3)$.

  Ici, le second membre est sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus donc on cherche une solution de la forme $y_{p_3} = a\cos(\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{x}{2})$. Attention à ne pas oublier la partie en sinus ici.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = \cos(x/2) \quad (E3)$.

Ici, le second membre est sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus donc on cherche une solution de la forme $y_{p_3} = a\cos(\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{x}{2})$.
Attention à ne pas oublier la partie en sinus ici.

Dans ce cas, $y'_{p_3}(x) = -\frac{a}{2}\sin(\frac{x}{2}) + \frac{b}{2}\cos(\frac{x}{2})$. On injecte y_{p_3} dans l'équation précédente et on obtient :

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

– Cherchons une solution de l'équation $\quad y'(x) + 3y(x) = \cos(x/2) \quad (E3)$.

Ici, le second membre est sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus donc on cherche une solution de la forme $y_{p_3} = a\cos(\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{x}{2})$. Attention à ne pas oublier la partie en sinus ici.

Dans ce cas, $y'_{p_3}(x) = -\frac{a}{2}\sin(\frac{x}{2}) + \frac{b}{2}\cos(\frac{x}{2})$. On injecte y_{p_3} dans l'équation précédente et on obtient :

$$-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{b}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3a\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3b\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\iff \quad \begin{cases} \frac{b}{2} + 3a = 1 \\ -\frac{a}{2} + 3b = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} b = 2 - 6a \\ a = \frac{12}{37} \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi, $y_{p_3} = \frac{12}{37}\cos(x/2) + \frac{2}{37}\sin(x/2)$ est une solution de $(E3)$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Pour conclure, la fonction

$$y_p = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{12}{37}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{37}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

est une solution de l'équation (E).

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Pour conclure, la fonction

$$y_p = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{12}{37}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{37}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

est une solution de l'équation (E).

Finalement, les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{12}{37}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{37}\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

Pour conclure, la fonction

$$y_p = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{12}{37}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{37}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

est une solution de l'équation (E).

Finalement, les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{12}{37}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{37}\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarquez que pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle, la méthode de la variation de la constante fonctionne toujours (quelque soit h le second membre, même si les coefficients de l'équation ne sont pas constants).

Nous vous proposons de retrouver une solution particulière avec cette méthode. (L'occasion de retrouver des notions du premier chapitre...)

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

On cherche donc une solution de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape** **(2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

On cherche donc une solution de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$.
Or, $y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. En injectant y_p dans l'équation (E), on obtient :

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape (2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

On cherche donc une solution de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$.
Or, $y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. En injectant y_p dans l'équation (E), on obtient :

$$C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = x - e^{3x} + \cos(x/2)$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

On cherche donc une solution de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$.
Or, $y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. En injectant y_p dans l'équation (E), on obtient :

$$C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = x - e^{3x} + \cos(x/2)$$

Ainsi, on cherche une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$C'(x) = xe^{3x} - e^{6x} + cos(x/2)e^{3x}.$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape (2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

On cherche donc une solution de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$.
Or, $y_p'(x) = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. En injectant y_p dans l'équation (E), on obtient :

$$C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = x - e^{3x} + \cos(x/2)$$

Ainsi, on cherche une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$C'(x) = xe^{3x} - e^{6x} + cos(x/2)e^{3x}.$$

On veut donc trouver une primitive de la fonction C', c'est-à-dire :

$$\int_c^t C'(x)dx = \int_c^t xe^{3x}dx - \int_c^t e^{6x}dx + \int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx,$$

pour $[c, t]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape** **(2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape (2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$. Nous allons procéder par intégration par parties, en posant

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape** **(2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$. Nous allons procéder par intégration par parties, en posant

$$u(x) = x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape (**$2^{\text{ème}}$ **méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$. Nous allons procéder par intégration par parties, en posant

$$u(x) = x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_c^t xe^{3x}dx &= \left[\frac{xe^{3x}}{3}\right]_c^t - \int_c^t e^{3x}dx = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{ce^{3c}}{3} - \left[\frac{xe^{3x}}{9}\right]_c^t \\ &= \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + -\frac{ce^{3c}}{3} + \frac{e^{3c}}{9} = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + \text{ constante.}\end{aligned}$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$. Nous allons procéder par intégration par parties, en posant

$$u(x) = x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_c^t xe^{3x}dx &= \left[\frac{xe^{3x}}{3}\right]_c^t - \int_c^t e^{3x}dx = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{ce^{3c}}{3} - \left[\frac{xe^{3x}}{9}\right]_c^t \\ &= \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + -\frac{ce^{3c}}{3} + \frac{e^{3c}}{9} = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + \text{ constante.}\end{aligned}$$

– De même, $\displaystyle\int_c^t e^{6x}dx$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape ($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t xe^{3x}dx$. Nous allons procéder par intégration par parties, en posant

$$u(x) = x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Donc,

$$\int_c^t xe^{3x}dx = \left[\frac{xe^{3x}}{3}\right]_c^t - \int_c^t e^{3x}dx = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{ce^{3c}}{3} - \left[\frac{xe^{3x}}{9}\right]_c^t$$
$$= \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + -\frac{ce^{3c}}{3} + \frac{e^{3c}}{9} = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + \text{ constante.}$$

– De même, $\displaystyle\int_c^t e^{6x}dx = \left[\frac{e^{6x}}{6}\right]_c^t = \frac{e^{6t}}{6} + \text{ constante.}$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape** **(2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape (2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx$.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx$.

  Rappelez vous l'exercice 3.4 du TD1 : il va falloir faire deux intégrations par parties à la suite.

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx$.

Rappelez vous l'exercice 3.4 du TD1 : il va falloir faire deux intégrations par parties à la suite.

Après les 2 IPP, on otient

$$\underbrace{\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx}_{I_3} = \frac{e^{3t}}{3}\cos(t/2) + \frac{1}{18}e^{3t}\sin(t/2) - \frac{1}{36}\underbrace{\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx}_{I_3} + \text{cste}.$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape (2$^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.

– Calculons $\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx$.

  Rappelez vous l'exercice 3.4 du TD1 : il va falloir faire deux intégrations par parties à la suite.

  Après les 2 IPP, on otient

$$\underbrace{\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx}_{I_3} = \frac{e^{3t}}{3}\cos(t/2) + \frac{1}{18}e^{3t}\sin(t/2) - \frac{1}{36}\underbrace{\int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx}_{I_3} + \text{cste.}$$

  Ainsi

$$I_3 = \int_c^t \cos(x/2)e^{3x}dx = \frac{36}{37}\left(\frac{e^{3t}}{3}\cos(t/2) + \frac{1}{18}e^{3t}\sin(t/2)\right) + \text{ constante.}$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.
En additionnant les trois intégrales, on peut choisir la fonction C définie par

$$C(x) = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{6x}}{6} + \frac{12}{37}e^{3x}\cos(x/2) + \frac{2}{37}e^{3x}\sin(x/2).$$

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** **($2^{\text{ème}}$ méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.
En additionnant les trois intégrales, on peut choisir la fonction C définie par

$$C(x) = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{6x}}{6} + \frac{12}{37}e^{3x}\cos(x/2) + \frac{2}{37}e^{3x}\sin(x/2).$$

On a toujours $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$. Ainsi, la fonction

$$y_p(x) = C(x)e^{-3x} = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{3x}}{6} + \frac{12}{37}\cos(x/2) + \frac{2}{37}\sin(x/2)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 5.9.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 3y(x) = x - e^{3x} + \cos(x/2) \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape (**$2^{\text{ème}}$ **méthode)** On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E), avec la méthode de la variation de la constante.
En additionnant les trois intégrales, on peut choisir la fonction C définie par

$$C(x) = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{6x}}{6} + \frac{12}{37}e^{3x}\cos(x/2) + \frac{2}{37}e^{3x}\sin(x/2).$$

On a toujours $y_p(x) = C(x)e^{-3x}$. Ainsi, la fonction

$$y_p(x) = C(x)e^{-3x} = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{3x}}{6} + \frac{12}{37}\cos(x/2) + \frac{2}{37}\sin(x/2)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

On obtient bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Exercice 5

La suite de cette fiche rassemble les solutions des autres questions de l'exercice, sans détail de calculs. Si besoin, n'hésitez pas à nous poser des questions.

Exercice 5.1-4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-7x} + \frac{1}{10}e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.1-4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-7x} + \frac{1}{10}e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + y = e^{-4x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-x} - \frac{1}{3}e^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.1-4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-7x} + \frac{1}{10}e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + y = e^{-4x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-x} - \frac{1}{3}e^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. $y' - 6y = 3x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{6x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.1-4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-7x} + \frac{1}{10}e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + y = e^{-4x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-x} - \frac{1}{3}e^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. $y' - 6y = 3x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{6x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. $y' + 9y = 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-9x} + \frac{1}{9}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5-8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5-8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6. $y' - 4y = x^2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5-8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6. $y' - 4y = x^2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7. $y' + y = 2\cos(x)$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-x} + \cos(x) + \sin(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5-8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6. $y' - 4y = x^2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7. $y' + y = 2\cos(x)$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{-x} + \cos(x) + \sin(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

8. $y' - 3y = (x+1)e^{3x}$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Ce^{3x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.10-13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

10. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{C}{x^2+1} + \frac{2x^3}{3(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.10-13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

10. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{C}{x^2+1} + \frac{2x^3}{3(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

11. $y'' - 4y' + y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{3})x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.10-13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

10. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{C}{x^2+1} + \frac{2x^3}{3(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

11. $y'' - 4y' + y = 0$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{3})x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

12. $y'' - 2y' + 3y = 0$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^x \sin(\sqrt{2}x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.10-13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

10. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{C}{x^2+1} + \frac{2x^3}{3(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

11. $y'' - 4y' + y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{3})x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

12. $y'' - 2y' + 3y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{x} \cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^{x} \sin(\sqrt{2}x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

13. $y'' - 3y' - 6y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.14-17

Résoudre les équations différentielles suivantes :

14. $y'' - 3y' - 6y = 7$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}x} - \frac{7}{6}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.14-17

Résoudre les équations différentielles suivantes :

14. $y'' - 3y' - 6y = 7$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}x} - \frac{7}{6}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. $y'' - 6y' = 8$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{4}{3}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.14-17

Résoudre les équations différentielles suivantes :

14. $y'' - 3y' - 6y = 7$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}x} - \frac{7}{6}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. $y'' - 6y' = 8$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{4}{3}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

16. $y'' = 5$

Ici, vous pouvez utiliser la méthode habituelle, mais vous pouvez aussi simplement intégrer 2 fois y'' !

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 x + \frac{5}{2}x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.14-17

Résoudre les équations différentielles suivantes :

14. $y'' - 3y' - 6y = 7$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{33}}{2}x} - \frac{7}{6}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. $y'' - 6y' = 8$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{4}{3}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

16. $y'' = 5$

Ici, vous pouvez utiliser la méthode habituelle, mais vous pouvez aussi simplement intégrer 2 fois y'' !

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 x + \frac{5}{2}x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

17. $y'' - 3y' + y = x^3 - 2x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} + x^3 + 9x^2 + 46x + 120, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.18-21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

18. $y'' + 4y' = 2x + 2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.18-21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

18. $y'' + 4y' = 2x + 2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

19. $y'' = e^{2x} - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.18-21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

18. $y'' + 4y' = 2x + 2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

19. $y'' = e^{2x} - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

20. $y'' - y' - 5y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.18-21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

18. $y'' + 4y' = 2x + 2$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

19. $y'' = e^{2x} - 1$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

20. $y'' - y' - 5y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

21. $y'' - y' - 5y = 3e^x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{3}{5}e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.22-25

Résoudre les équations différentielles suivantes :

22. $y'' - 2y' + 10y = x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + \frac{1}{10}x + \frac{1}{50}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.22-25

Résoudre les équations différentielles suivantes :

22. $y'' - 2y' + 10y = x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + \frac{1}{10}x + \frac{1}{50}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

23. $y'' + 2y' = x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.22-25

Résoudre les équations différentielles suivantes :

22. $y'' - 2y' + 10y = x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + \frac{1}{10}x + \frac{1}{50}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

23. $y'' + 2y' = x$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

24. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.22-25

Résoudre les équations différentielles suivantes :

22. $y'' - 2y' + 10y = x$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + \frac{1}{10}x + \frac{1}{50}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

23. $y'' + 2y' = x$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

24. $y'' - 3y' + 2y = 0$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

25. $y'' - 2y' + 2y = e^x$
Les solutions sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x) + e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$