TD 10 - Arbres

Objectif : Savoir représenter et manipuler les arbres.

Exercice 1 - Soit un arbre binaire étiqueté, donné par un tableau de trois lignes dans lequel pour chaque indice i les trois lignes contiennent dans l'ordre :

— l'étiquette du noeud i
— l'indice dans le tableau où se trouve le fils gauche du noeud i, avec par convention 0 si ce dernier n'existe pas
— l'indice dans le tableau où se trouve le fils droit du noeud i, avec par convention 0 si ce dernier n'existe pas.

Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Arbre	a	+	b	+	c	*	d	*	e	-	f	+	g	/	h
	0	12	0	10	0	5	0	2	0	9	0	1	0	13	0
	0	6	0	14	0	7	0	4	0	11	0	3	0	15	0

1. Combien de noeuds possède cet arbre ?
2. Où se trouve (à quel indice) la racine de l'arbre ?
3. Représenter graphiquement l'arbre.
4. Donner ses parcours en ordre préfixe, symétrique et suffixe.

Exercice 2 - Dessiner l'arbre B dont les parcours en ordres préfixe et symétrique sont respectivement a, b, d, f, c, e et d, f, b, a, e, c.

Exercice 3 - Soit l'arbre général suivant :

```
          5
        / | \
      7   6   3
     / \     / \
    9   8   4   2
    |           |
   10           1
```

Donner son code de Prüfer.

Exercice 4 - On considère un arbre général dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, \ldots, 16\}$ et dont le code de Prüfer est :

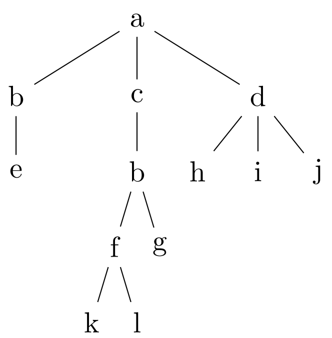
5 4 5 9 12 4 1 14 5 9 10 14 1 1 9

— Quel est la racine, le nombre de sommets et le nombre de feuilles de cet arbre ?
— Reconstruire l'arbre correspondant à ce codage

Exercice 5 - Représenter graphiquement l'arbre représenté par l'expression complètement parenthésée suivante :

$$(4(5(1)(2)(8(3)(12)))(13(7))(6(14(15)(9)))(10(17)(11(16))))$$

Exercice 6 - Transformer l'arbre général suivant en arbre binaire, par la bijection "fils ainé gauche - frère immédiat droit". Faites la transformation inverse et vérifiez que vous retrouvez bien l'arbre initial. Quels sont les avantages et inconvénients de cette représentation par rapport au code de Prüfer ?



Exercice 7 - Démontrer par induction que le décodage du code de Prüfer d'un arbre donne bien le même arbre. Indications :

— prendre comme relation d'ordre :

$$A < B \quad \Leftrightarrow \quad A = B \text{ rétréci par suppression(s successives) de feuille(s)}$$

— pour démontrer l'hypothèse d'induction, pour un arbre A quelconque, considérer A' l'arbre obtenu en supprimant la plus petite feuille de A.

Exercice 8 - Écriture parenthésée d'un arbre binaire

Montrer par induction que l'écriture parenthésée d'un arbre binaire, telle que réalisée par l'algorithme 1, contient autant de parenthèses ouvrantes que fermantes. Vous utiliserez la relation d'ordre "est un sous-arbre de"[1]. *La démonstration est simple mais elle doit être rédigée avec rigueur et précision.*

Algorithm 1: Fonction ecritParentheses(A) d'écriture parenthésée d'un arbre binaire A.

début
    /* ENTRÉES : Un arbre binaire A */
    /* SORTIE : Écriture parenthésée de A */
    si *Non*(est_vide(A)) **alors**
        écrit("(")
        écrit(contenu(racine(A)))
        ecritParentheses($G(A)$)
        ecritParentheses($D(A)$)
        écrit(")")
fin

1. En notant $\leq$ cette relation, $A \leq B$ ssi $A = B$ ou $A \leq G(B)$ ou $A \leq D(B)$