Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

# Feuille de TD n°8 : Développements limités

**Exercice 1.** Donner le développement limité en 0 de

1) $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
2) $\sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 5.
3) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+2x}$ à l'ordre 3.
4) $\dfrac{\big(\ln(1-x)\big)^2}{x^2}$ à l'ordre 3.
5) $\dfrac{3x^2+3x+2}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
6) $\dfrac{(\operatorname{Arctan} x)^2}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
7) $\operatorname{sh}(x^2)\operatorname{ch}(x)$ à l'ordre 5.
8) $\operatorname{Argth} x$ à l'ordre 5.

**Exercice 2.**

1) Soit $f$ et $g$ deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^3)$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $fg$.

2) Soit $f$ et $g$ deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 - x + 3x^2 + o(x^2)$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $fg$.

**Exercice 3.** On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$.

1) Écrire le développement limité d'ordre $n$ de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.
2) En déduire le développement limité d'ordre $n+3$ de $f$ au voisinage de 0.
3) En déduire la valeur de $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4.**

(1) Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$.

(2) Écrire le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, et en déduire un développement limité à l'ordre 4 de $f$ en 0.

(3) En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on conclure de la même façon que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

(4) Trouver un équivalent quand $x \to 0$ de $\dfrac{\sin(x)}{x} - \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

**Exercice 5.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + x + 3x^2 + o(x^2)$. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g \circ f$.

**Exercice 6.**

1) Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4, et le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0, à l'ordre 4.

2) En déduire le développement limité de $\ln(\cos x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

**Exercice 7.** Vrai ou faux ? (justifier par une preuve ou un contre-exemple)

1) Si $f$ est dérivable au voisinage de 0 et si $f'$ admet un développement limité d'ordre $k \geqslant 0$ au voisinage de 0, alors $f$ admet un développement limité d'ordre $k+1$ au voisinage de 0.

2) Si $f$ admet un développement limité d'ordre $k \geqslant 1$ au voisinage de 0, alors $f'$ admet un développement limité d'ordre $k-1$ au voisinage de 0.

3) Si $f$ et $g$ admettent un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0, alors $g \circ f$ aussi.

4) Si $f$ possède un développement limité au voisinage de $a$ à l'ordre $n$, alors $f$ possède un développement limité au voisinage de $a$ à l'ordre $k$ pour tout $k \leqslant n$.

5) Si $f \in \mathcal{C}^n([-1,1])$, alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

6) $f$ est dérivable en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

7) $f$ est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 8.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = 1+x+2x^2+o(x^2)$ et $g(x) = 1 + 3x^2 + o(x^2)$. Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{f}$ puis de $\frac{g}{f}$.

**Exercice 9.**

1) Calculer le développement limité au voisinage de 0 de à l'ordre 3 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x^2+x^4}$.

2) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $(1+x)^{\frac{1}{1-x^2+x^4}}$.

**Exercice 10.** Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x+\ln(1-x)-1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{Arcsin} x} \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x\ln x} \qquad 3)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$$

**Exercice 11.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$ .

1) Effectuer un développement limité de $f$ en 0, à l'ordre 3.

2) En déduire l'équation de la tangente au graphe de $f$ au point de coordonnées $(0,f(0))$.

3) Étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point. Que peut-on dire du point de coordonnées $(0,f(0))$ ?

**Exercice 12.** Pour $x>0$, trouver un développement asymptotique à 3 termes quand $n\to+\infty$ de $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

**Exercice 13.** Calculer les développements limités en 0 de

1) $\dfrac{3x+1}{2+3x+x^2}$ à l'ordre 2 ; 2) $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 ; 3) $\ln(4-8x+x^2)$ à l'ordre 4.

**Exercice 14.** Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} \qquad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1+\sin^2 x)}{x^2}$$

**Exercice 15.** Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$ .

1) Quel est le domaine de définition de $f$ ?

2) Donner le développement limité de $f$ en 0, à l'ordre 2.

3) Calculer la limite de $f$ en 0. En déduire que $f$ est prolongeable par continuité en 0.

**Exercice 16.** Si une fonction est $n$ fois dérivable en 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0. Nous allons montrer que la réciproque est fausse. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=x^3\sin(\frac{1}{x^2}), \quad \forall x\neq 0. \end{cases}$$

1) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que $f$ n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $\forall x,\ |f(x)|\leqslant |x|^3$, et en déduire que $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 17 (DM 8).** Déterminer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x\sin x}{2}}-e^{1-\cos x}}{\frac{x\sin x}{2}-(1-\cos x)}; \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \quad (a>0,b>0);$$

$$3)\ \lim_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\ln(1+kx)} \quad \text{(discuter selon les valeurs de } a_1,a_2,\dots a_n\in\mathbb{R})$$

**Exercice 18 (DM 8).** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et la récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin(u_n)$.

(1) Montrer que $0<u_n<\frac{\pi}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(2) Montrer que $u_n\to 0$.

(3) À l'aide d'un développement limité, déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$. En déduire la limite de $v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}^2}-\dfrac{1}{u_n^2}$.

(4) En déduire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Pour la question 4, on pourra utiliser sans démonstration le Lemme de Cesaro (voir feuille de TD n° 3) : *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers une limite $L\in\mathbb{R}$, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $y_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ converge aussi vers $L$.*