Microéconomie

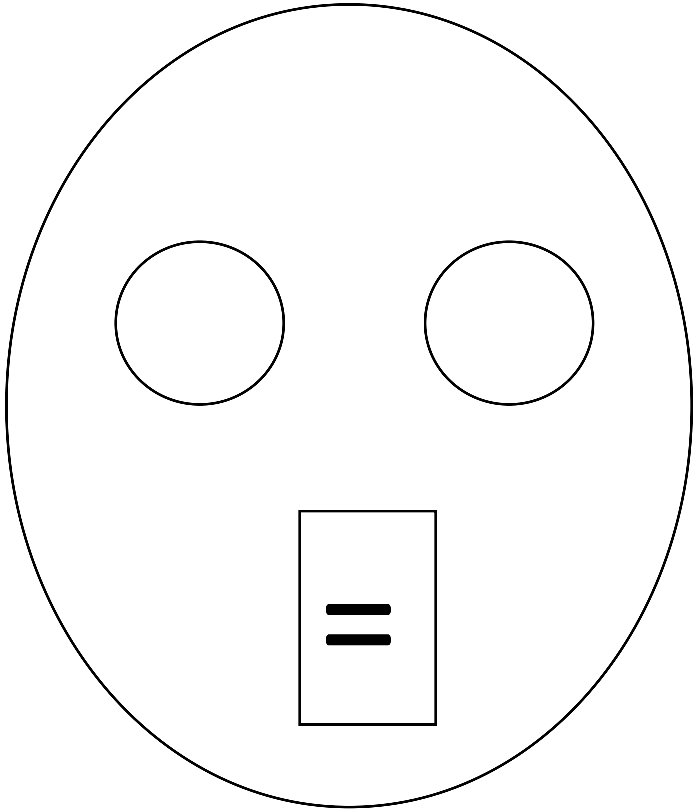
Licence MIA 1ère année - *Université Paris 5 Descartes*

Rappel de Mathématique

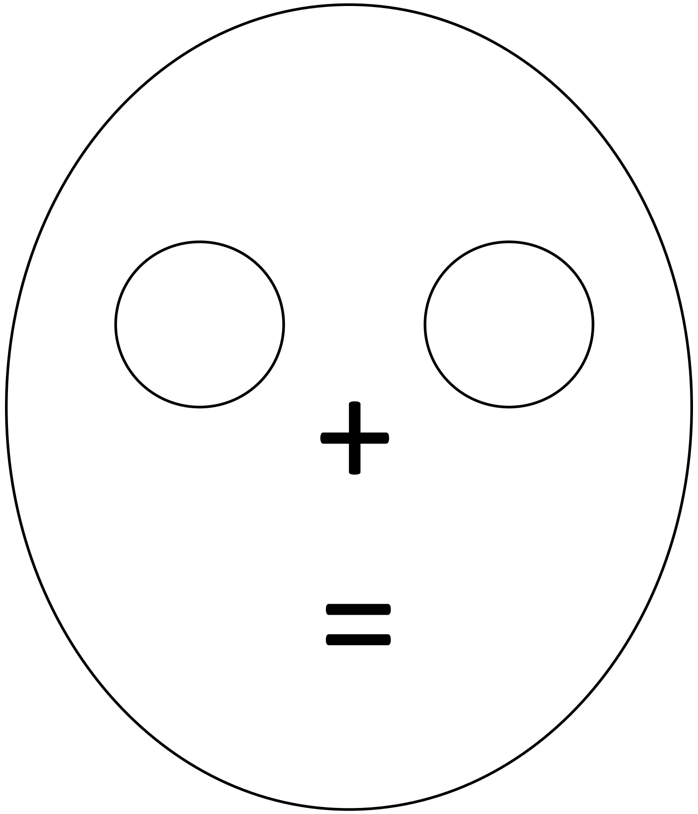
Eric Konqui

Docteur en Science Economique

Qu’est ce que c’est ?



Modèle Scientifique



Définition:

Un **modèle scientifique** est une représentation simplifiée, et souvent idéale, de la réalité d'un phénomène.

- Il permet d'élaborer une théorie (ensemble d'hypothèses, axiome,…) plus ou moins précise adhérant aux observations.
- Et de prévoir ce qu'il se passerait dans certaines conditions.
- Il fonctionne "toutes choses égales par ailleurs"
- Il est formalisé = écrit avec le langage mathématique, qui permet de décrire les relations entre les choses (sens, intensité, évolution...)
- Ses hypothèses conditionnent ses résultats et sa pertinence

On distingue les variables endogènes et les variables exogènes

En fait, c'est un modèle : *"une représentation simplifiée de la réalité ... adhérant aux observations"*.

Rappels

- ❑Définition d’une dérivés
- ❑Définition d’une dérivés seconde
- ❑Définir ce qu’est la Convéxité ou la Concavité d’une courbe
- ❑Relations algébriques de base

Modèlisation Economique

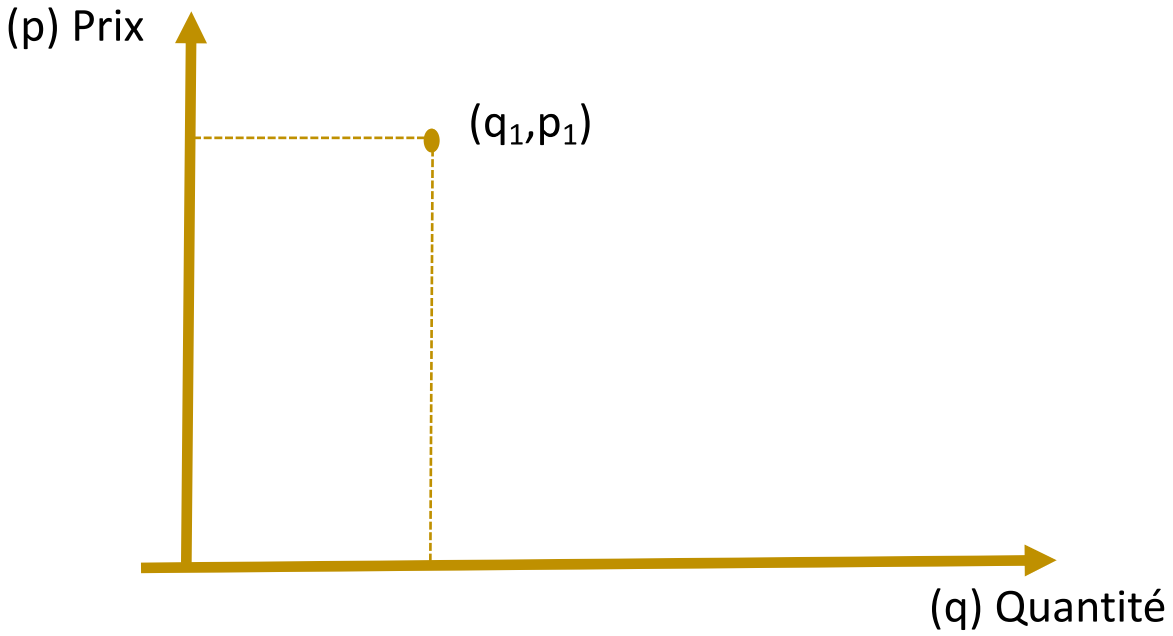
La quantité de banane que vous êtes prêt à acheter dépend des prix de ces dernières sur le marché. Compléter le tableau :

Prix	Quantité
0,1€/Unité	
0,2€/Unité	
0,3€/Unité	
0,4€/Unité	
0,5€/Unité	

Représenter graphiquement l'ensemble des quantités de bananes que vous seriez prêt à acheter en fonction de leur prix :

Modèlisation Economique

Représenter graphiquement l'ensemble des quantités de bananes que vous seriez prêt à acheter en fonction de leur prix :



Prix	Quantité	
0,1€/Unité	20	
0,2€/Unité	18	
0,3€/Unité	14	
0,4€/Unité	10	
0,5€/Unité	5	

Modèlisation Economique

A l’aide d’une fonction mathématique modéliser votre demande de Banane pour n’importe quel prix (réel positif).

- Quelle(s) hypothèse(s) devez vous faire ?
- Représenter graphiquement cette fonction.

Modèlisation Economique

A l’aide d’une fonction mathématique modéliser votre demande de Banane pour n’importe quel prix (réel positif). Quelle(s) hypothèse(s) devez vous faire ?

On cherche la relation entre toutes les valeurs possibles de p et de q

p est la variable explicative (indépendante)

q est la variable expliquée (dépendante)

La variable q est déterminée en fonction de p <=> en langage mathématique : $q = f(p)$

P est un nombre réel positif.

Exemple :

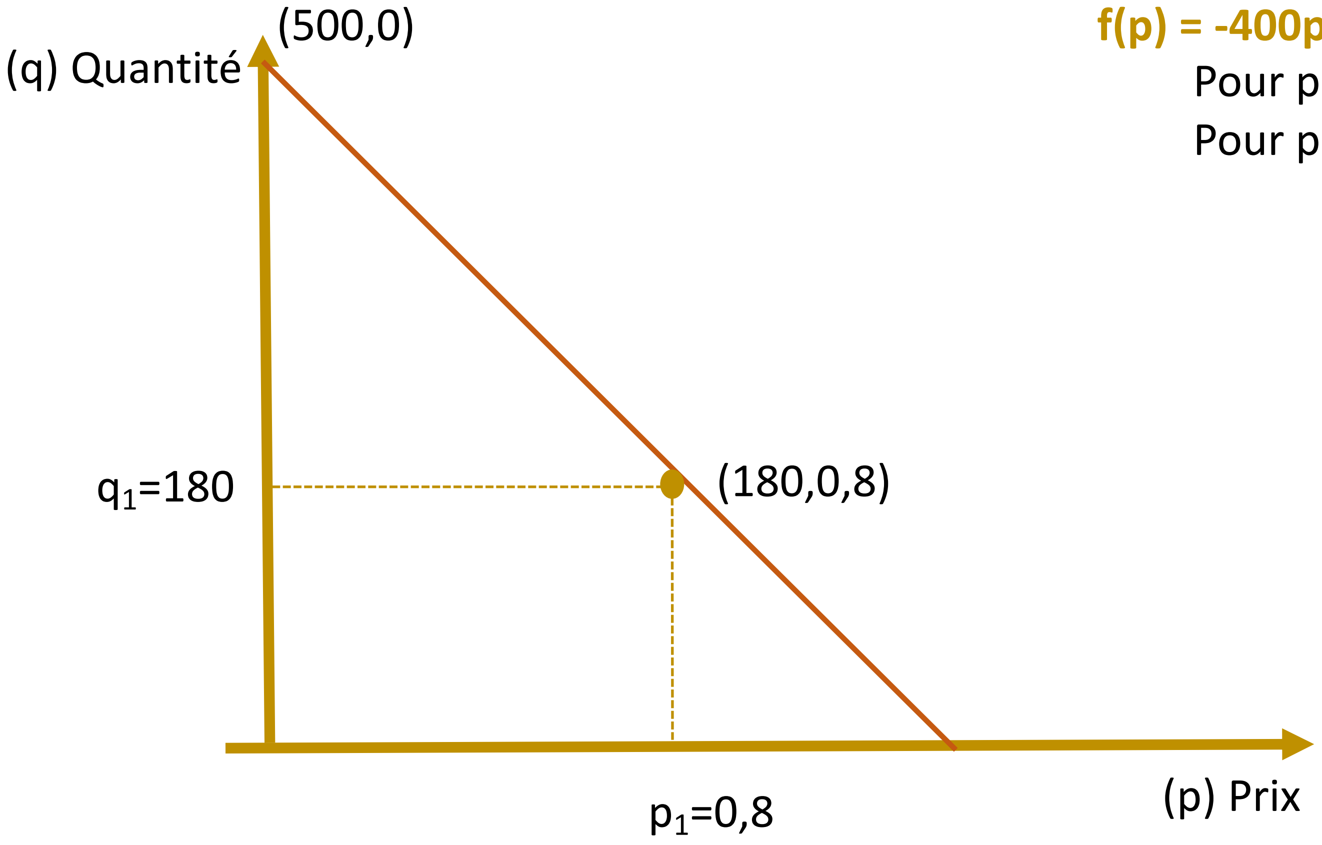
$f(p) = -400p + 100$

Pour p = 0, alors $f(p = 0) = -400 * 0 + 500= 500$

Pour p= 0,8, alors $f(p = 0,8) = -400 * 0,8 + 500= 180$

Modèlisation Economique

Représenter graphiquement l'ensemble des quantités que vous seriez prêt à acheter en fonction du prix



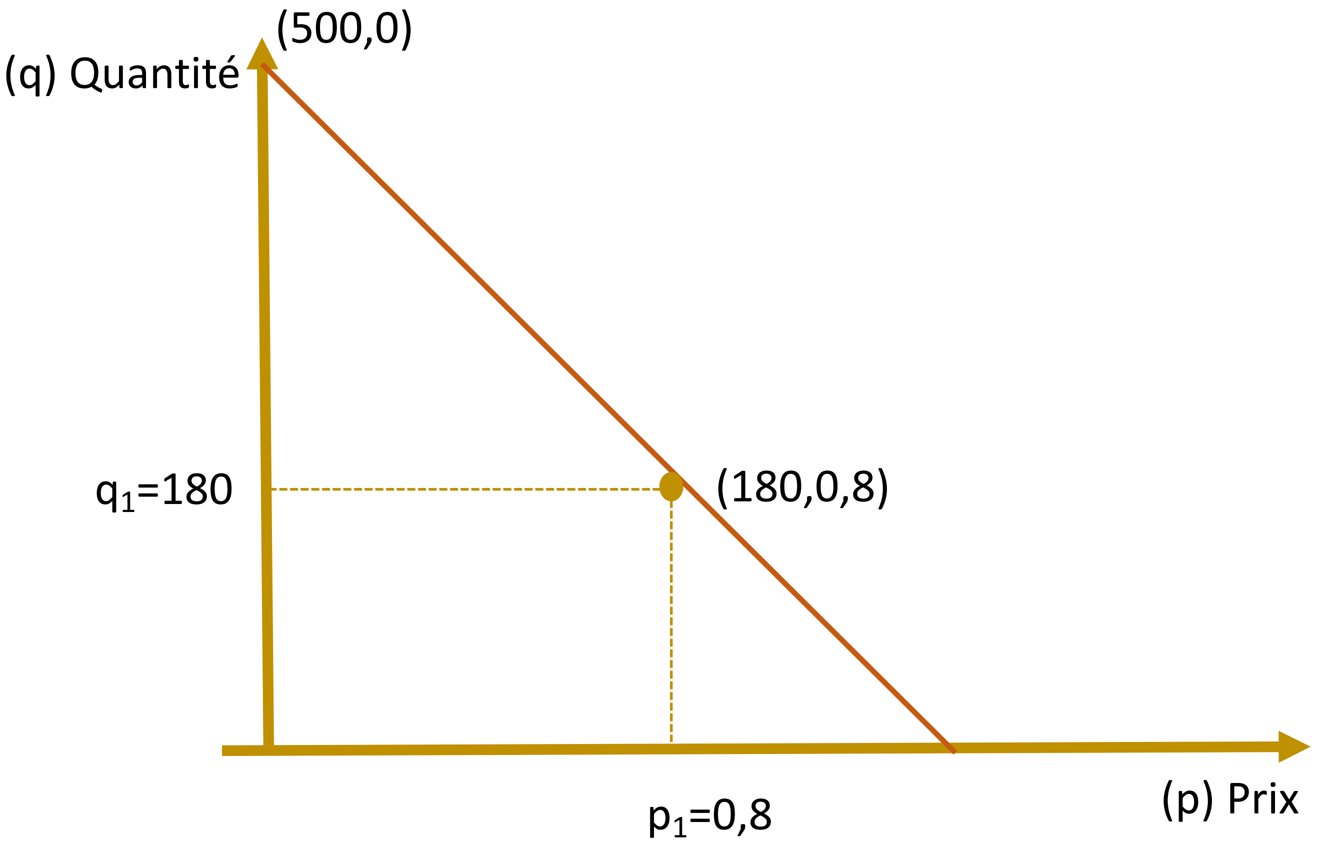
f(p) = -400p + 100

Pour p = 0, alors f(p = 0) = -400 * 0 + 500= 500

Pour p= 0,8, alors f(p = 0,8) = -400 * 0,8 + 500= 180

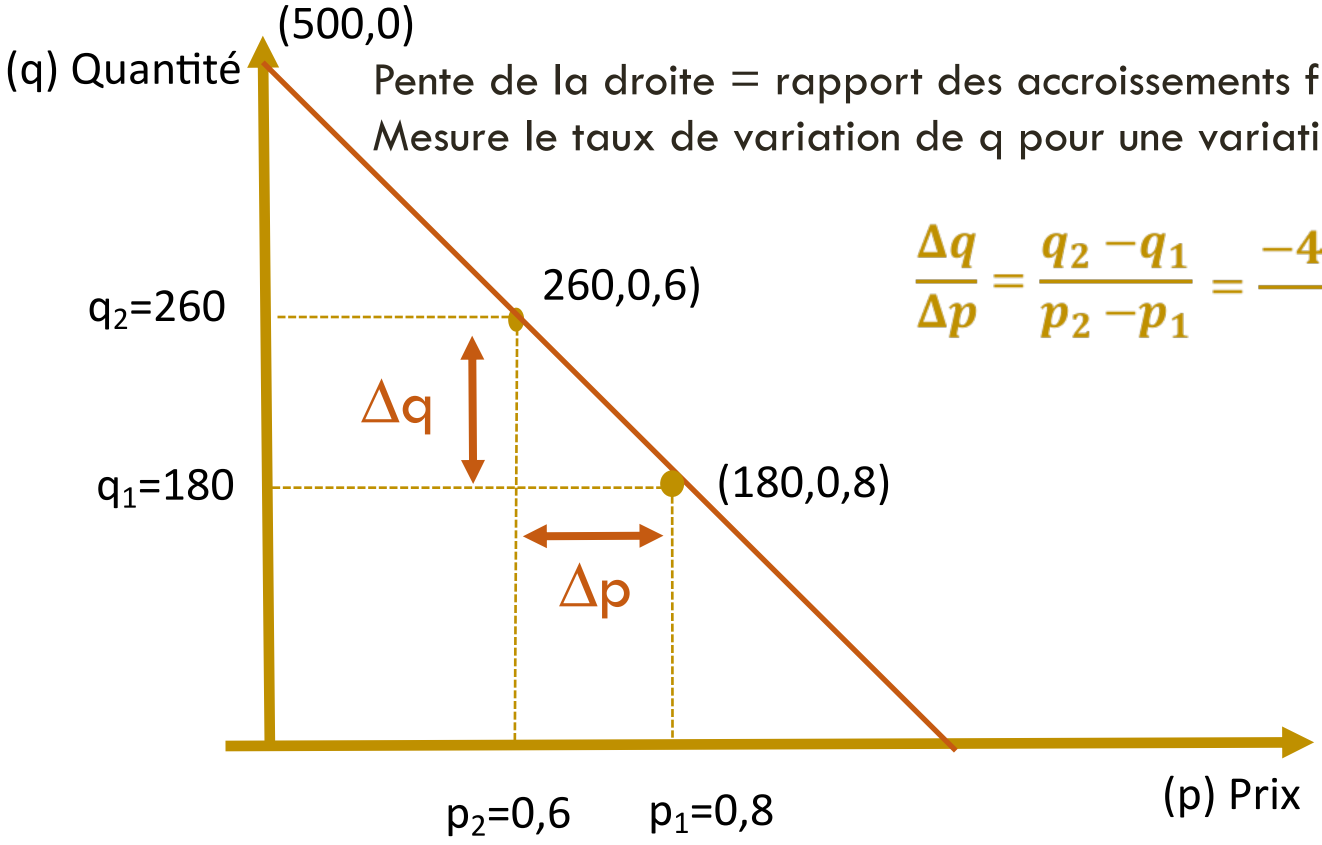
Modèlisation Economique

Quel est la pente de la droite d'équation **$q = -400p + 100$**



Modèlisation Economique

Quelle est la pente de la droite d'équation **q = -400p + 500**



Pente de la droite = rapport des accroissements finis Δq sur Δp.

Mesure le taux de variation de q pour une variation donnée de p

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{-400p_2 + 500 - (-400p_1 + 500)}{p_2 - p_1}$$

$$= \frac{400(-p_2 + p_1)}{p_2 - p_1} = -400$$

f(p) = -400p + 100

Pour p = 0, alors f(p = 0) = -400 * 0 + 500= 500

Pour p= 0,6, alors f(p = 0,6) = -400 * 0,6 + 500= 260

Relation entre 2 variables

La fonction $f(x) = 2x + 1$ est une fonction affine de forme $f(x) = ax + b$

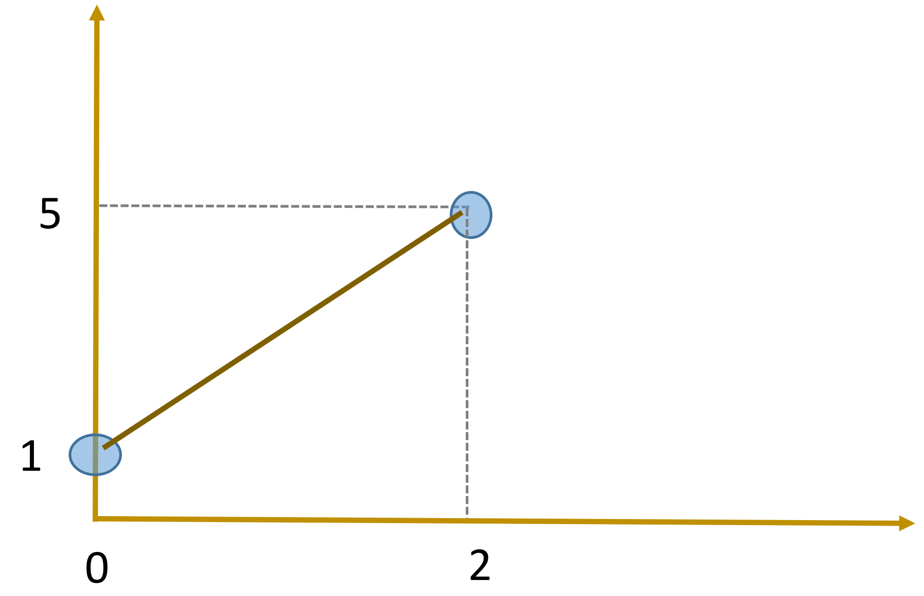
Sa représentation est une droite qui coupe l'axe des ordonnées en b.

Il suffit de placer deux points : on choisit deux valeurs pour x et on calcule les

valeurs f(x) correspondantes.

Exemple : $f(x) = 2x + 1$

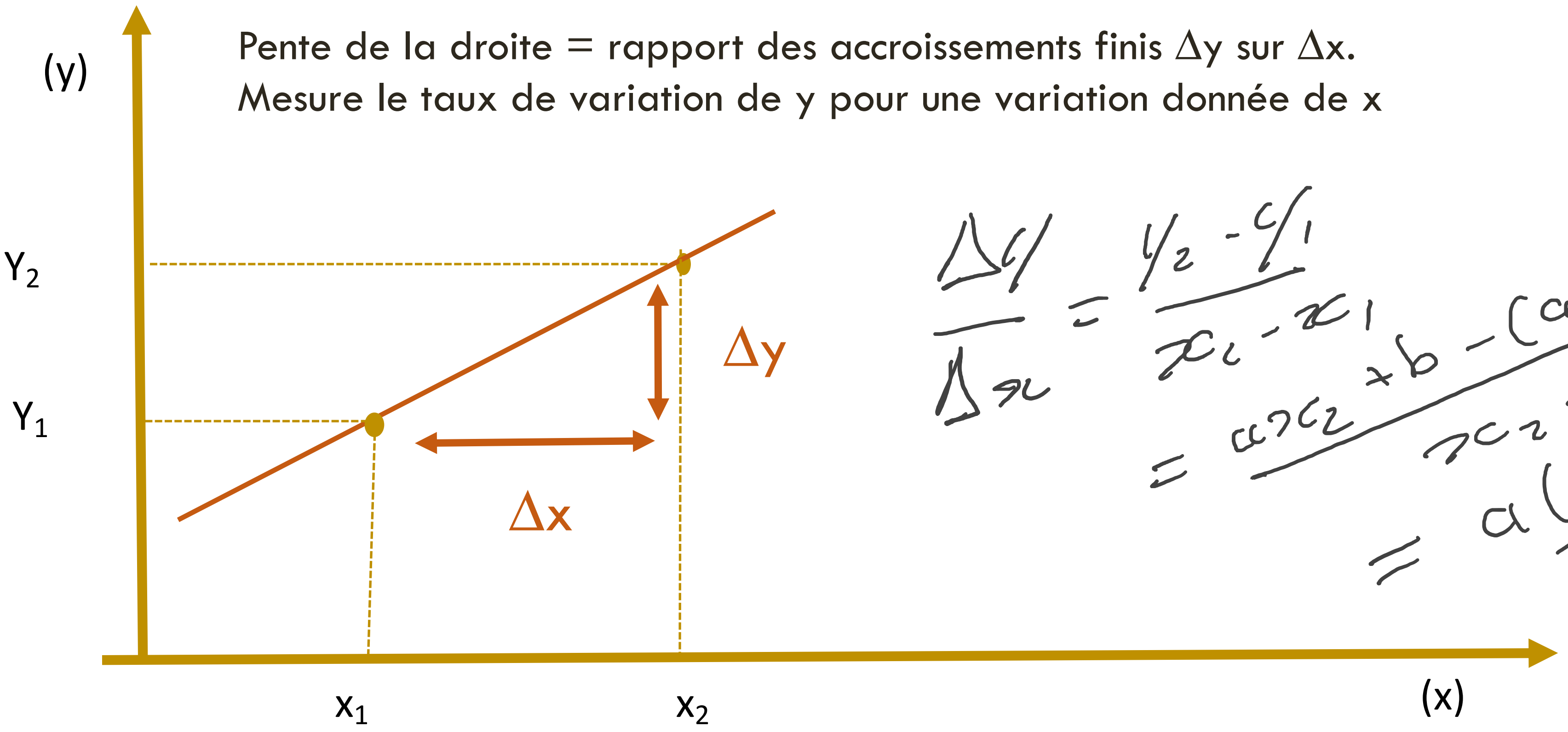
$f(x = 0) = 1$
$f(x = 2) = 2 * 2 + 1 = 5$



Pente d’une Droite

Quelle est la pente de la droite d’équation **y = ax + b**

Pente de la droite = rapport des accroissements finis Δy sur Δx.
Mesure le taux de variation de y pour une variation donnée de x



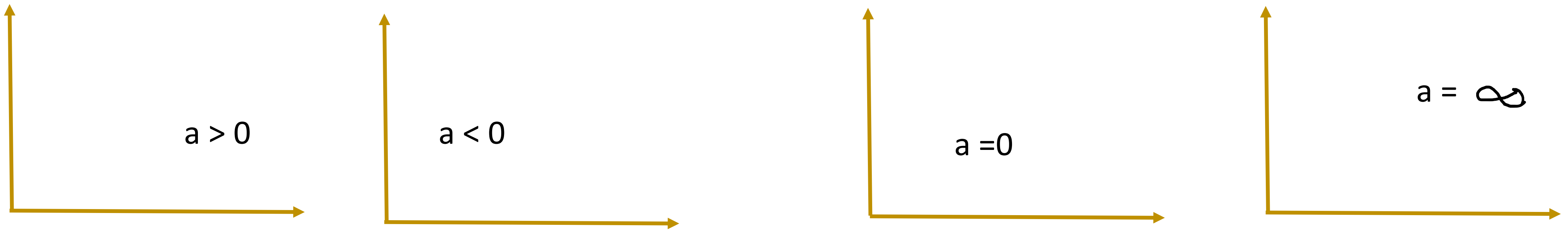
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Pente d’une Droite

Signe de la **pente** d’une droite **y = ax + b**
Sens de la variation de y par rapport à la variation de x

- a > 0 y est une fonction croissante de x (quand x augmente, y augmente)
- a > 0 y est une fonction décroissante de x (quand x augmente, y diminue)
- a = 0 y est une fonction constante qui ne varie pas quand x varie
- a est infini x est une constante

Tracer les courbes correspondantes à chaque cas :

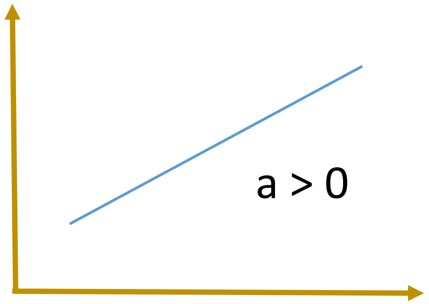


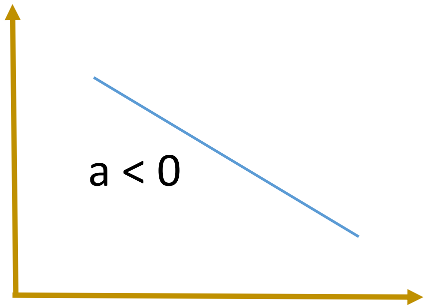
Pente d’une Droite

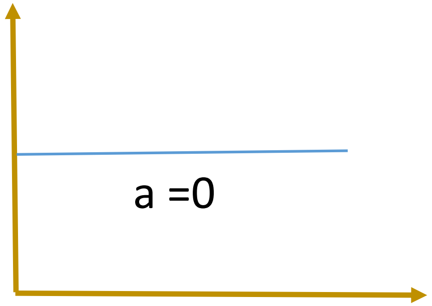
Signe de la **pente** d’une droite $\mathbf{y = ax + b}$
Sens de la variation de y par rapport à la variation de x

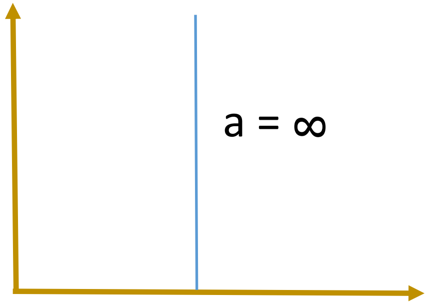
- $a > 0$ y est une fonction croissante de x (quand x augmente, y augmente)
- $a > 0$ y est une fonction décroissante de x (quand x augmente, y diminue)
- $a = 0$ y est une fonction constante qui ne varie pas quand x varie
- a est infini x est une constante

Tracer les courbes correspondantes à chaque cas :









Dérivée d'une Fonction

Définition : lorsqu'elle existe, la dérivée f'(x) d'une fonction y = f(x) est la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de la fonction Δy et l'accroissement de la variable Δx lorsque Δx tend vers zéro.

Interprétation : en d'autres termes, c'est une fonction qui donne, pour chaque x possible, de combien varie la fonction y = f(x) lorsque x augmente infiniment peu (= « varie à la marge »).

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Fonction f(x)	Dérivée f'(x)
$f(x) = constante$	$f'(x) =$
$f(x) = ax$	$f'(x) =$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) =$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{a}{x} = x^{-1}$	$f'(x) =$
$f(x) = a\sqrt{x} = x^{1/2}$	$f'(x) =$
$f(x) = \log(x)$	$f'(x) =$

Dérivée d'une Fonction

Définition : lorsqu'elle existe, la dérivée f'(x) d'une fonction y = f(x) est la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de la fonction Δy et l'accroissement de la variable Δx lorsque Δx tend vers zéro.

Interprétation : en d'autres termes, c'est une fonction qui donne, pour chaque x possible, de combien varie la fonction y = f(x) lorsque x augmente infiniment peu (= « varie à la marge »).

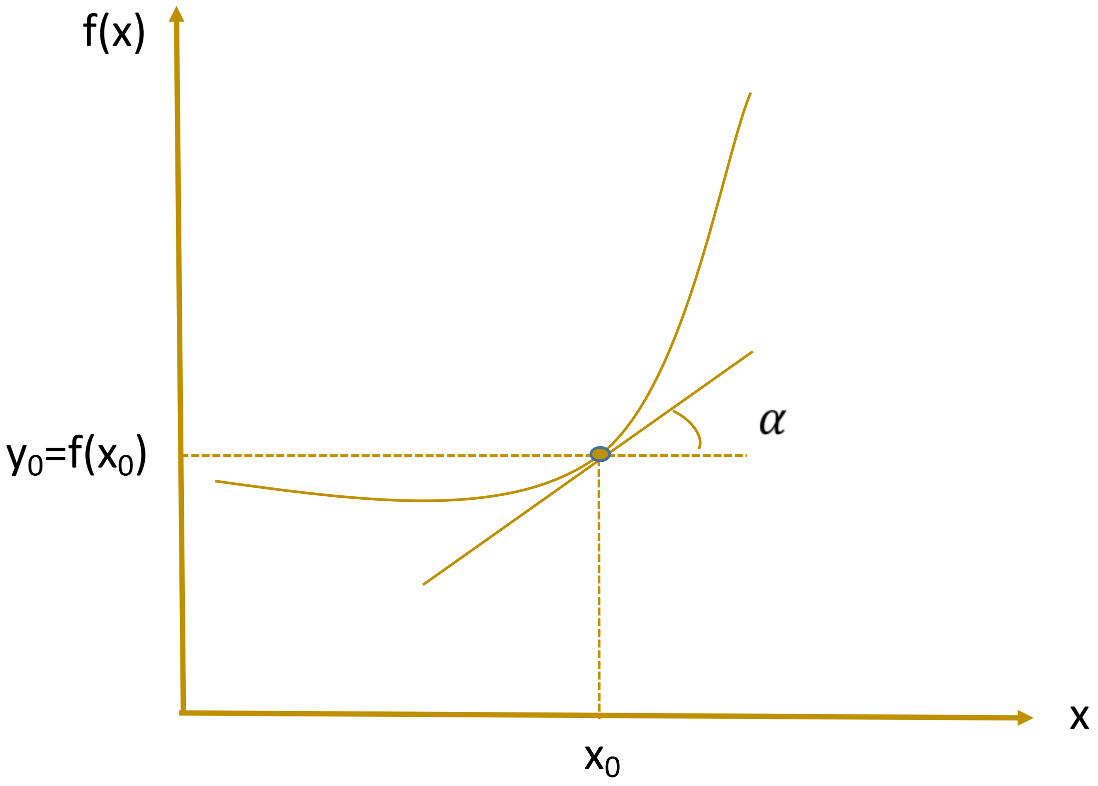
$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Fonction f(x)	Dérivée f'(x)
$f(x) = constante$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = nax^{n-1}$
$f(x) = \frac{a}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -a/x^2$
$f(x) = a\sqrt{x} = x^{1/2}$	$f'(x) = a/2\sqrt{x}$
$f(x) = \log(x)$	$f'(x) = 1/x$

Dérivée d’une Fonction

Graphiquement :

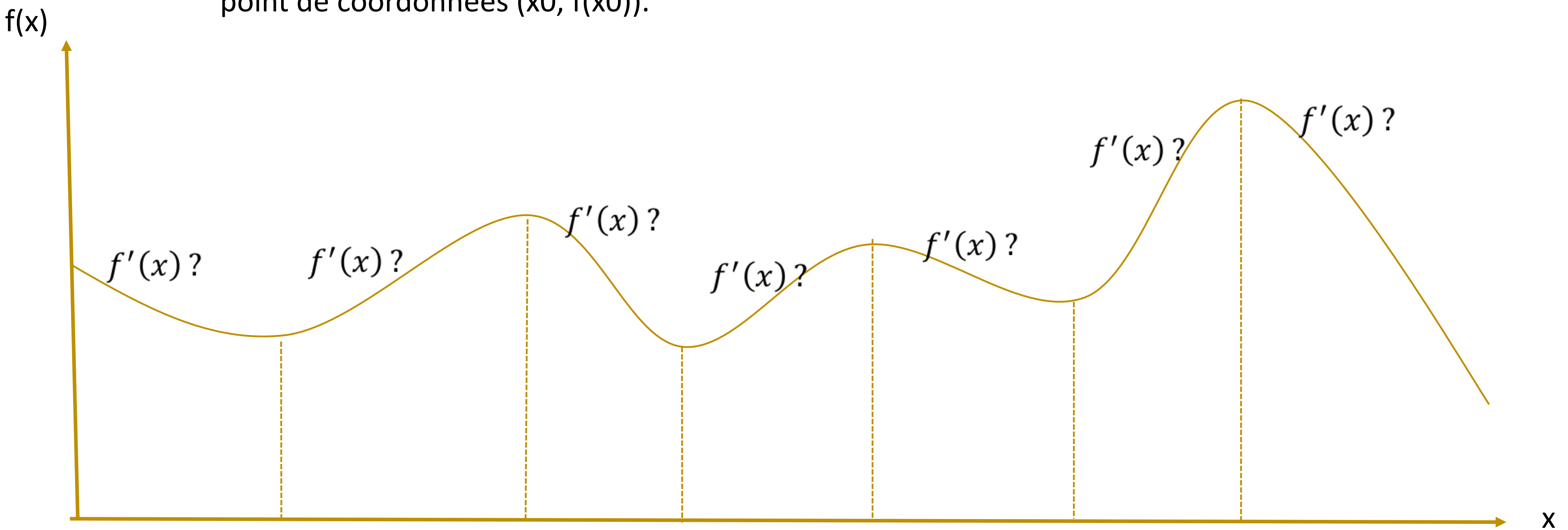
pour la valeur $x = x_0$ de la variable x, la valeur de la dérivée $f'(x = x_0) = f'(x_0)$ est égale à la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f(x) au point de coordonnées $(x_0, y_0 = f(x_0))$.



Dérivée d'une Fonction

Signe de la dérivée :

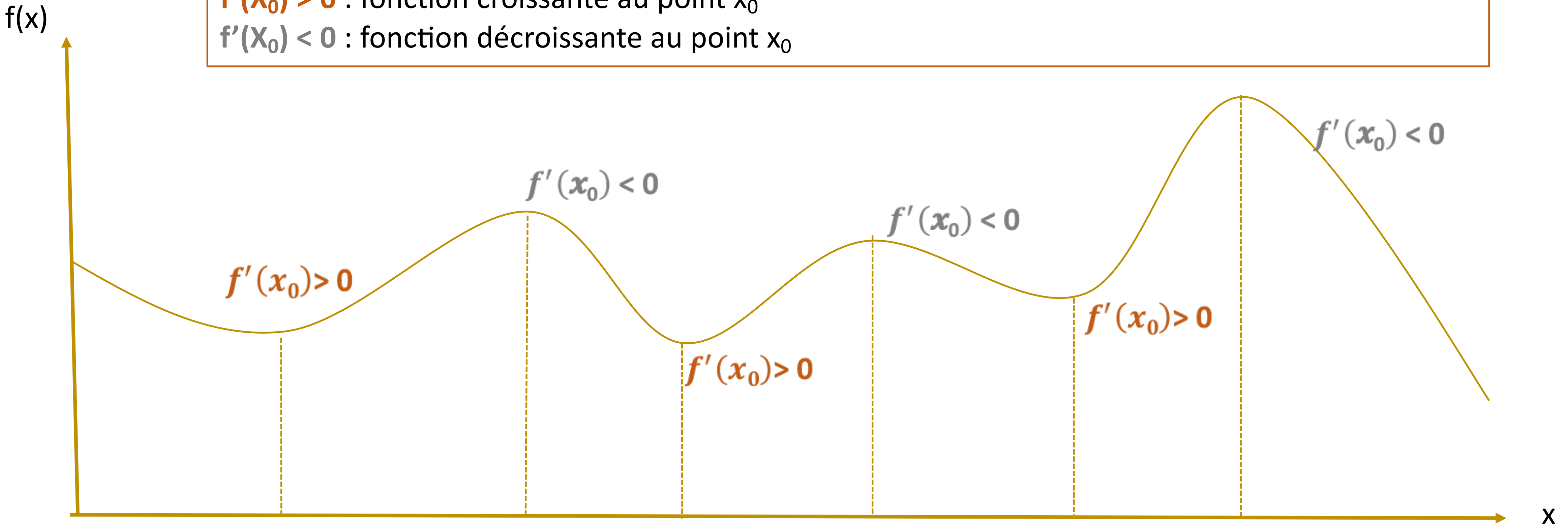
le signe de la dérivée f'(x0) informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction f(x0) au point de coordonnées (x0, f(x0)).



Dérivée d'une Fonction

Signe de la dérivée : le signe de la dérivée $f'(x_0)$ informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction $f(x_0)$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

$f'(X_0) > 0$: fonction croissante au point x_0
$f'(X_0) < 0$: fonction décroissante au point x_0



Dérivée Seconde

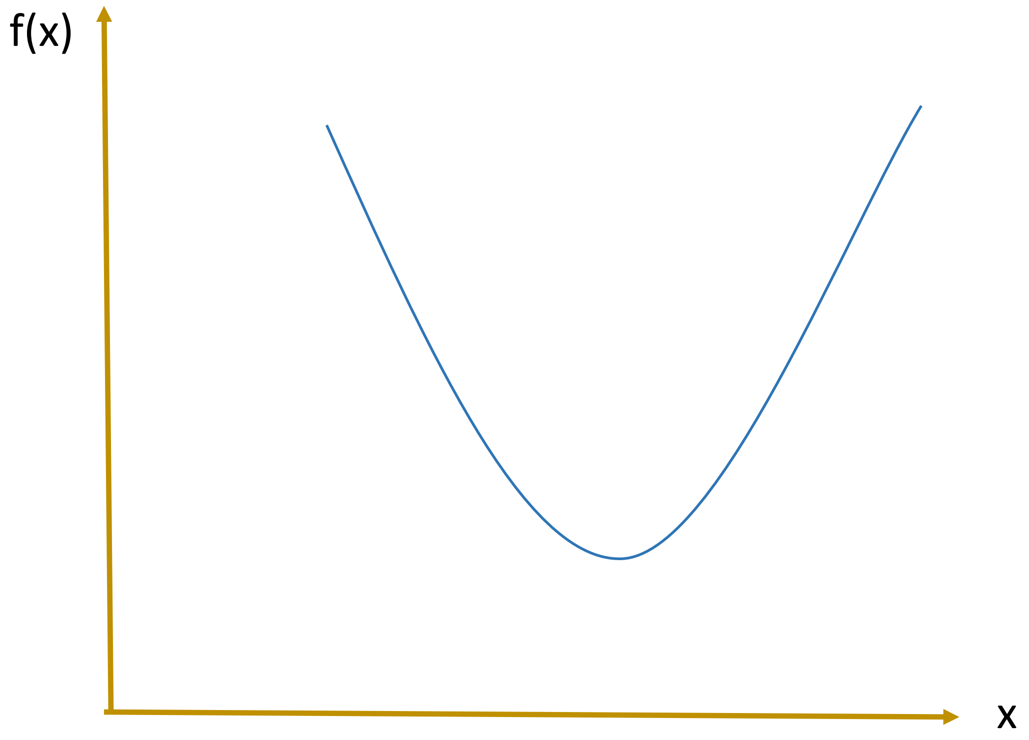
Définition : la dérivée seconde f’’(x) d’une fonction f(x) est la dérivée de la dérivée première f’(x) de cette fonction.

Notation : on écrit aussi f'' (x) = $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x^2}$

Signe de la dérivée seconde, convexité et concavité

f’’(x) > 0 fonction f(x) convexe

f’’(x) < 0 fonction f(x) concave



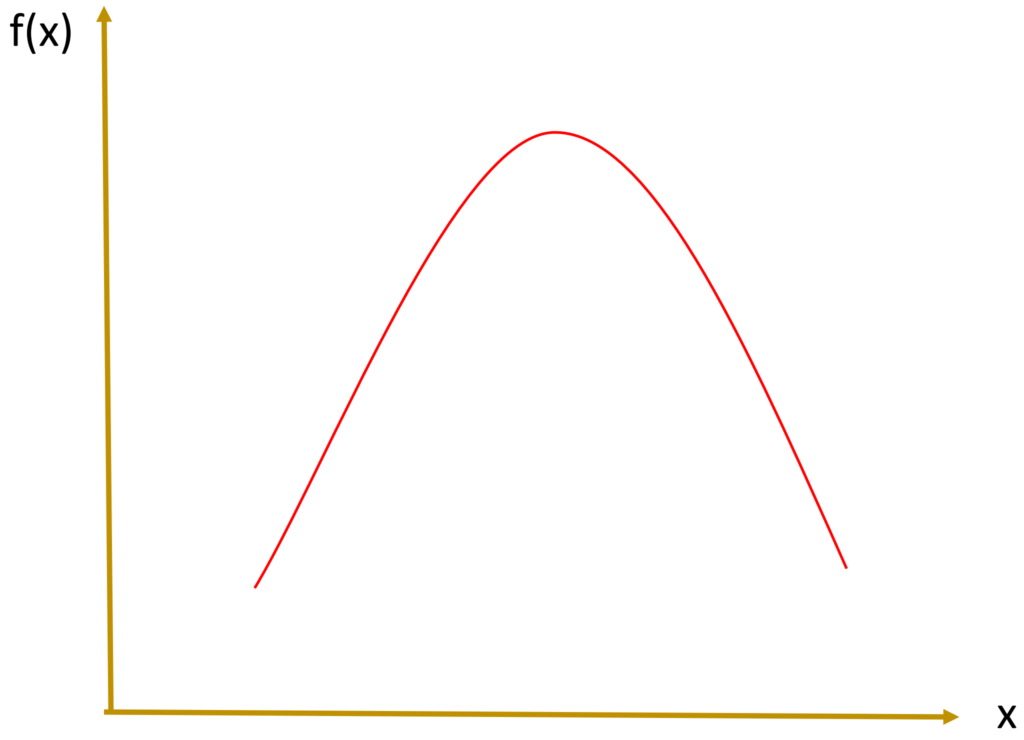
Dérivée Seconde

Définition : la dérivée seconde f''(x) d'une fonction f(x) est la dérivée de la dérivée première f'(x) de cette fonction.

Notation : on écrit aussi f'' (x) = $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x^2}$

Signe de la dérivée seconde, convexité et concavite

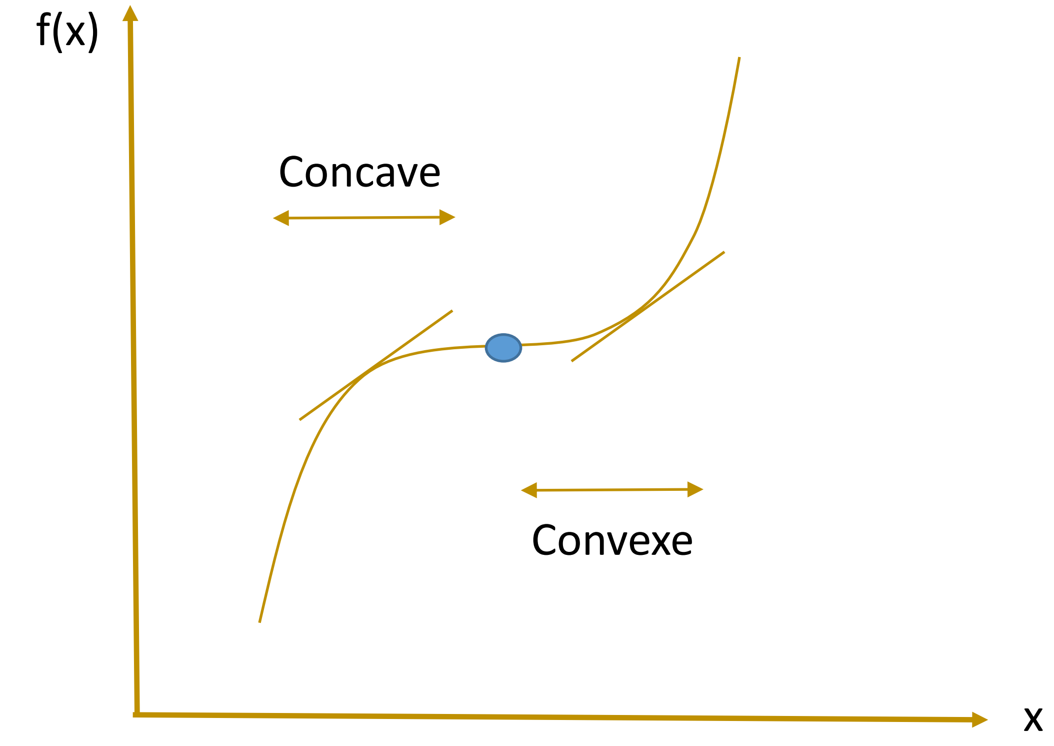
f''(x) > 0 fonction f(x) convexe
f''(x) < 0 fonction f(x) concave

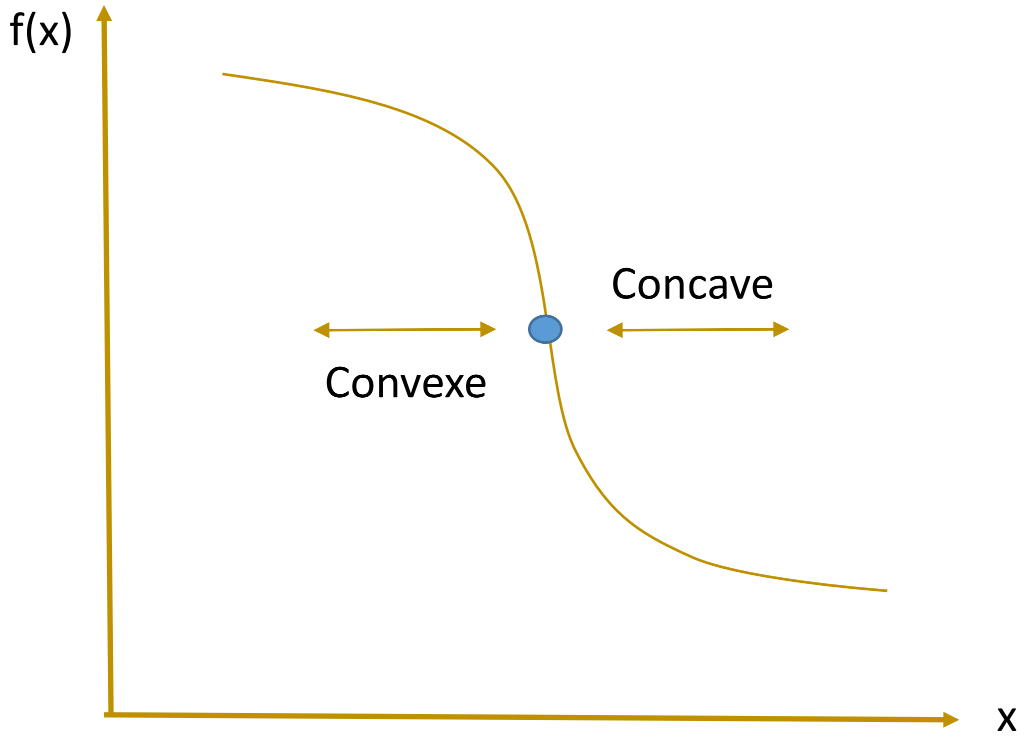


Dérivée Seconde

Point d'inflexion: un point d'inflexion est un changement de courbure d'une courbe représentative, sans changement de sa croissance / décroissance.

La courbe passe par un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule (alors que la dérivée première ne change pas de signe).

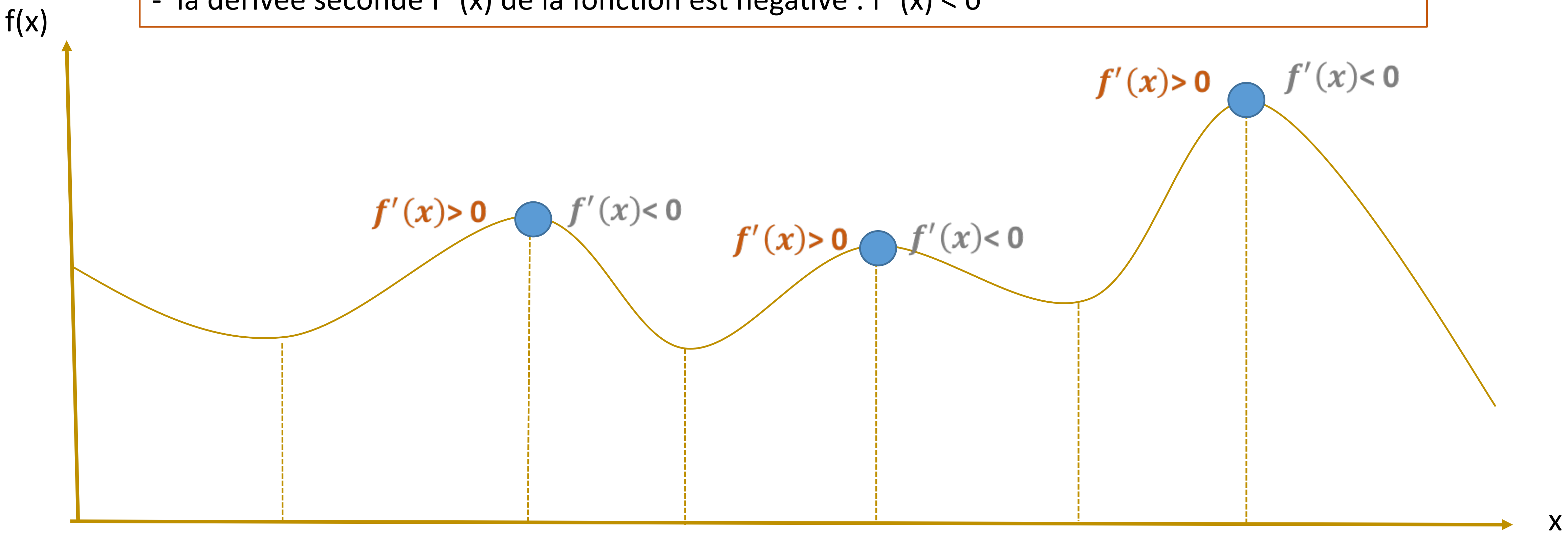




Maximum ou Minimum d'une fonction

Un extremum d'une fonction correspond aux points où sa dérivée première s'annule.
Au point maximum d'une fonction

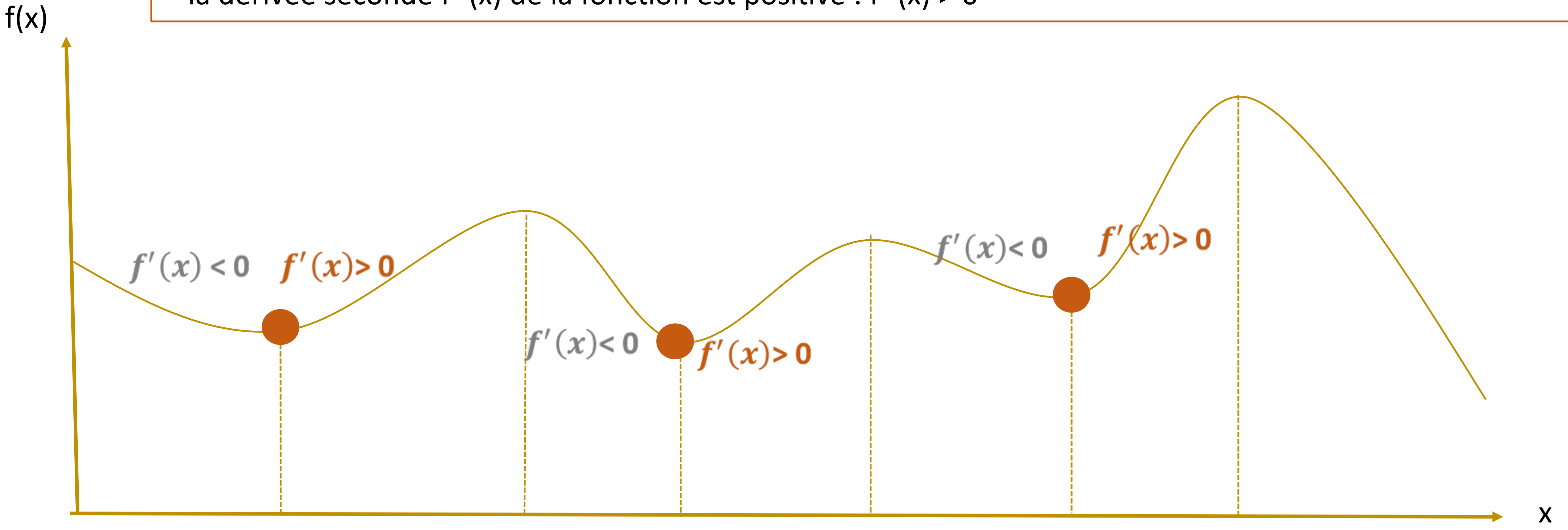
- la fonction cesse d'être croissante et devient décroissante = on passe de f'(x) > 0 à f'(x) < 0.
- la dérivée seconde f''(x) de la fonction est négative : f''(x) < 0



Maximum ou Minimum d'une fonction

Un extremum d'une fonction correspond aux points où sa dérivée première s'annule.
Au point minimum d'une fonction

- la fonction cesse d'être décroissante et devient croissante = on passe de $f'(x) < 0$ à $f'(x) > 0$.
- la dérivée seconde $f''(x)$ de la fonction est positive : $f''(x) > 0$



Maximum ou Minimum d’une fonction

Exemple numérique :

fonction f(x) = -x2 + 4x + 1

Dérivée première :

Extremum pour :

Dérivée seconde :

Vérification avec le tracé de la courbe représentative

Maximum ou Minimum d'une fonction

Exemple numérique :

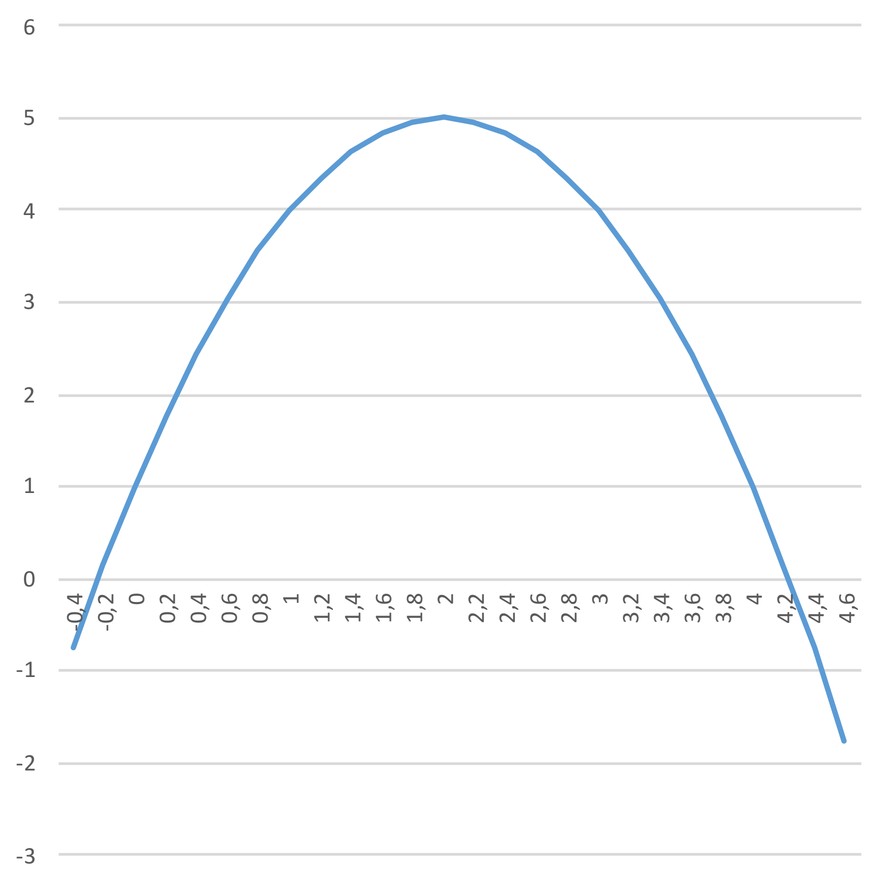
fonction f(x) = -x2 + 4x + 1

Dérivée première : $f'(x) = -2x + 4$

Extremum pour tous les x tels que $f'(x) = 0$ soit tels que $-2x+4 = 0$ soit tels que $x = 2$

Dérivée seconde : $f''(x) = -2 < 0$ donc l'extremum est un maximum (et la courbe est concave car $f''(x)$ est toujours négative).

Vérification avec le tracé de la courbe représentative



Fonction de plusieurs variables

Définition : une variable $y = f(x, z)$ peut dépendre de deux variables indépendantes (x et z) ou plus. Chaque couple de valeurs (x, z) détermine une valeur de y.

Exemple : la quantité demandée de courgettes (y) dépend du prix des tomates (x) mais aussi du prix des tomates (z) et du revenu du consommateur (r), de sorte que :

$y = f(x, z, r) = -0,5x + 0,7y + 0,2r + 2$

Si

- le prix des courgettes x est égal à 1
- le prix des tomates z est égal à 2
- le revenu du consommateur est égal à 5

Alors la quantité de courgettes demandée est égale à :

$y = -0,5*1+0,7*2+0,2*5+2 = 3,9$ kilos de courgettes

Fonction de plusieurs variables

Dérivée partielles d'une fonction de plusieurs variables

Soit une fonction y = f(x, z).
Une variation de y peut venir soit des variations de x, soit de celles de z.

- en calculant la dérivée partielle de y par rapport à x, on traite z comme si c'était une constante et on peut étudier l'influence des variations de x sur y.

- symétriquement, en calculant la dérivée partielle de y par rapport à z, on traite x comme si c'était une constante et on peut étudier l'influence des variations de z sur y.

On note $f'x\,(x, z) = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ la dérivée partielle de f(x, z) par rapport à x
On note $f'z\,(x, z) = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ la dérivée partielle de f(x, z) par rapport à z

Fonction de plusieurs variables

Exemple : $f(x, y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$
On veut calculer les dérivées partielles au point f(0, 7)

Dérivée partielle par rapport à x : on traite z comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} =$$

Au point f(0, 7), on a :

Dérivée partielle par rapport à z : on traite x comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial Z} =$$

Au point f(0, 7), on a :

Fonction de plusieurs variables

Exemple : $f(x, y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$
On veut calculer les dérivées partielles au point f(0, 7)

Dérivée partielle par rapport à x : on traite z comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = 10x + 2 + z$$

Au point f(0, 7), on a : $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = 10 * 0 + 2 + 7 = 9$

Dérivée partielle par rapport à z : on traite x comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial Z} =$$

Au point f(0, 7), on a :

Fonction de plusieurs variables

Exemple : $f(x, y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$
On veut calculer les dérivées partielles au point f(0, 7)

Dérivée partielle par rapport à x : on traite z comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = 10x + 2 + z$$

Au point f(0, 7), on a : $\frac{\partial f(0,7)}{\partial x} = 10 * 0 + 2 + 7 = 9$

Dérivée partielle par rapport à z : on traite x comme si c'était une constante (elle est « inerte » dans le calcul)

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial Z} = 3z^2 - 2z + x$$

Au point f(0, 7), on a : $\frac{\partial f(0,7)}{\partial x} = 3 * 49 - 2 * 7 = 147 - 14 = 133$

Fonction de plusieurs variables

Dérivées partielles secondes
On peut calculer la dérivée d'une dérivée partielle, soit par rapport à la même variable, soit par rapport à l'autre variable (on parle alors de dérivées croisées)

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x^2}$= est la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ la dérivée par rapport à x de f(x, z)

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z^2}$= est la dérivée par rapport à z de $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$= la dérivée par rapport à z de f(x, z)

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z \partial x}$= est la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$= la dérivée par rapport à z de f(x, z)

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z}$ = est la dérivée par rapport à z de $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ la dérivée par rapport à x de f(x, z)

Propriété : $\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z \partial x}=\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z}$ égalité des dérivées croisées

Fonction de plusieurs variables

Exemple (suite) : $f(x,y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$

$\frac{\partial f(x{,}z)}{\partial x}$=

$\frac{\partial f(x{,}z)}{\partial z}$=

$\frac{\partial^2 f(x{,}z)}{\partial x^2}$=

$\frac{\partial^2 f(x{,}z)}{\partial x \partial z}$=

$\frac{\partial^2 f(x{,}z)}{\partial z^2}$=

$\frac{\partial^2 f(x{,}z)}{\partial z \partial x}$=

Fonction de plusieurs variables

Exemple (suite) : $f(x, y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$

$\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$= $10x + 2 + z$

$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$= $3z^2 - 2z + x$

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x^2}$= 10

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial x \partial z}$= 1

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z^2}$= $6z \ - 2$

$\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z \partial x}$= 1

Fonction de plusieurs variables

Remarque : la dérivée totale d'une fonction de deux variables s'écrit :

$$df = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z} dz$$

Exemple:

$$f(x,y) = 5x^2 + 2x + \; z^3 - z^2 + xz + 4$$

$df(x,y) = ???$

Fonction de plusieurs variables

Remarque : la dérivée totale d'une fonction de deux variables s'écrit :

$$df = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}dz$$

Exemple:

$$f(x,y) = 5x^2 + 2x + \ z^3 - z^2 + xz + 4$$

$$df(x,y) = (10x \quad + 2 + \ z)dx + (\ 3z^2 - 2z \quad + x)dz$$

Rappels d'algèbre

Opposé et inverse d'un nombre a

- –a est l'opposé du nombre ?
- 1/a est l'inverse du nombre ?

Identités remarquables

- $(a+b)^2$ = ?
- $(a-b)^2$ = ?
- $(a+b)(a-b)$ = ?

Exposants

- x^a+x^b = ?
- $(x^a)^b$ = ?
- x^a / x^b =?
- x^{-n} = ?
- x^1 = ?
- $x^{0,5}$ = ?
- x^0 = ?

Rappels d'algèbre

Opposé et inverse d'un nombre a

- $-a$ est l'opposé du nombre a
- 1/ a est l'inverse du nombre a

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a+b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ecriture de fractions superposées

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Racines et exposants

- $x^a x^b = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^a / x^b = x^{a-b}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $x^{0,5} = x^{1/2} = \sqrt{x}$
- $x^0 = 1$
- $x^1 = x$

A Faire…

Pour chacun de ces fonctions calculés les dérivés partielles indiquez si ces fonctions sont convexes ou concave

- $Ua\ (x, y) = 3x^{1/3} \cdot 4y^{1/2}$
- $Ub\ (x, y) = 6x^{3} + 7y^{2}$
- $Uc\ (x, y) = 2x \cdot y^{2} + 3y$
- $U(q_1,q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$,
- $V(q_1,q_2) = q_1^{\delta} q_2^{1-\delta}$

$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x}=$

$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z}=$

$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2}=$

$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x \partial z}=$

$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial z^2}=$

$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial z \partial x}=$