Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

3. Fonctions d'une variable réelle - continuité

4. Fonctions d'une variable réelle - dérivabilité

Fonctions d’une variable réelle

1. Introduction
2. Fonctions d’une variable réelle : généralités
   - Définitions
   - Fonctions et opérations
   - Fonctions et ordre
   - Propriétés particulières
   - Monotonie
   - Limites
   - Unicité de la limite
   - Limites et opérations
   - Limites et ordre
   - Exercices
   - Formes indéterminées
   - Fonctions négligeables
   - Équivalence de fonctions
3. Fonctions d’une variable réelle, continuité
   - Définition
   - Opérations, composition et continuité
   - Prolongement par continuité
   - Fonctions croissantes
   - Image continue d’un intervalle
   - Continuité sur un intervalle fermé et borné
   - Fonctions monotones

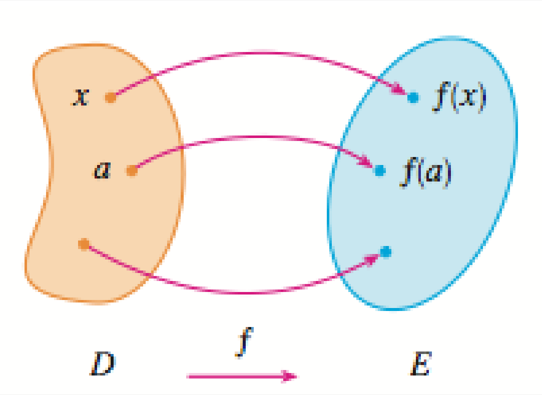
Fonction :

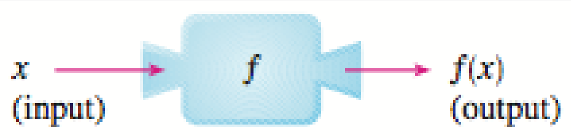
(1) machine à transformer des nombres en d'autres nombres

(2) modèle pour les évolutions temporelles

(3) courbes géométriques

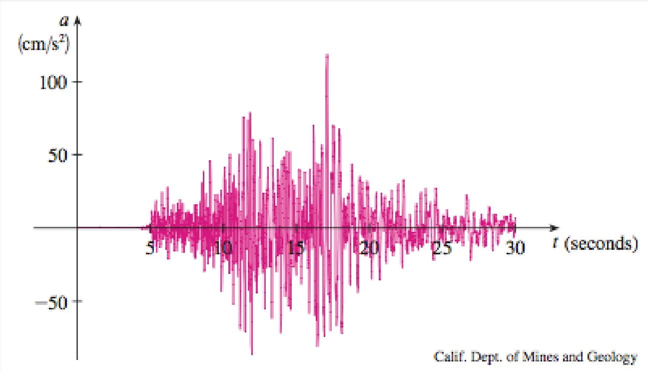
Fonction (1) : machine à transformer des nombres en d'autres nombres



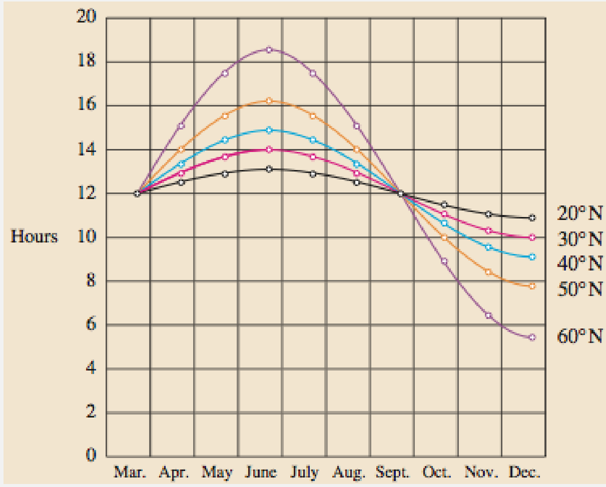


Exemple : fonction qui donne le prix $f(x)$ de l'envoi d'une lettre en fonction de son poids x en grammes.

Fonction (2) : modèle pour les évolutions temporelles

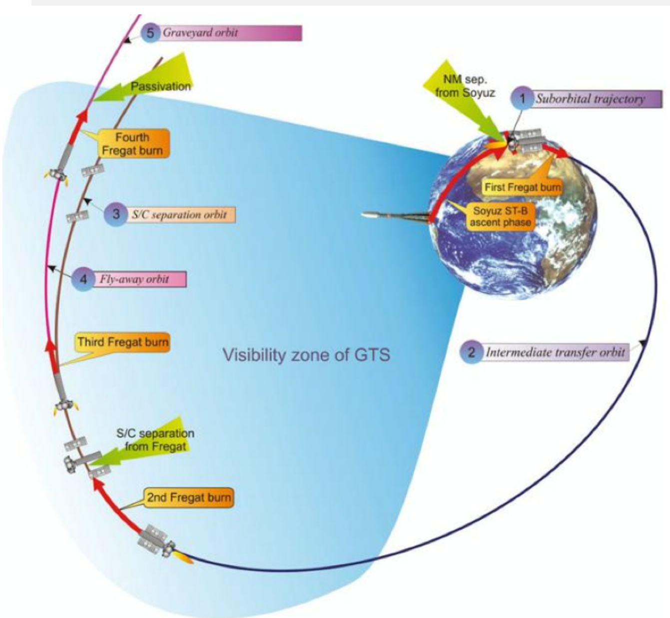


Accélération verticale en fonction du temps pendant le tremblement de terre de Los Angeles de 1994

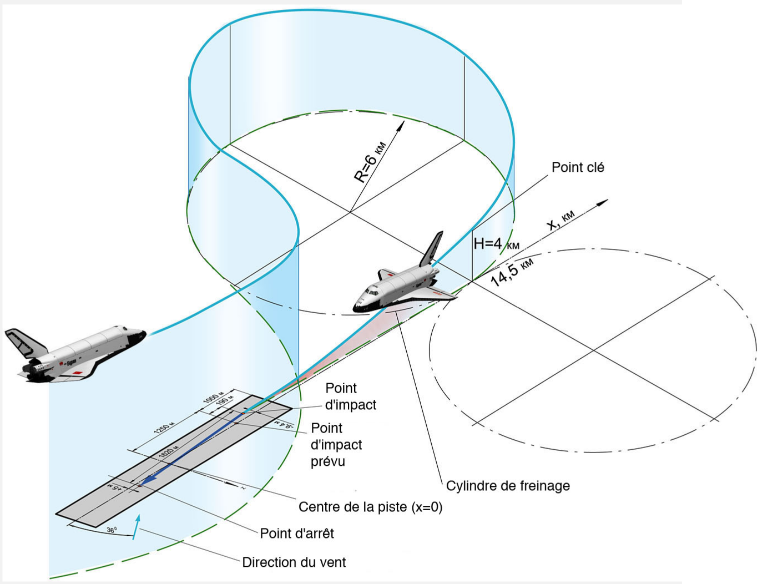


Heures d'ensoleillement/jour en fonction du mois, à diverses latitudes (Paris = 48.5° N, Marseille = 43.1° N)

Fonction (3) : courbes géométriques

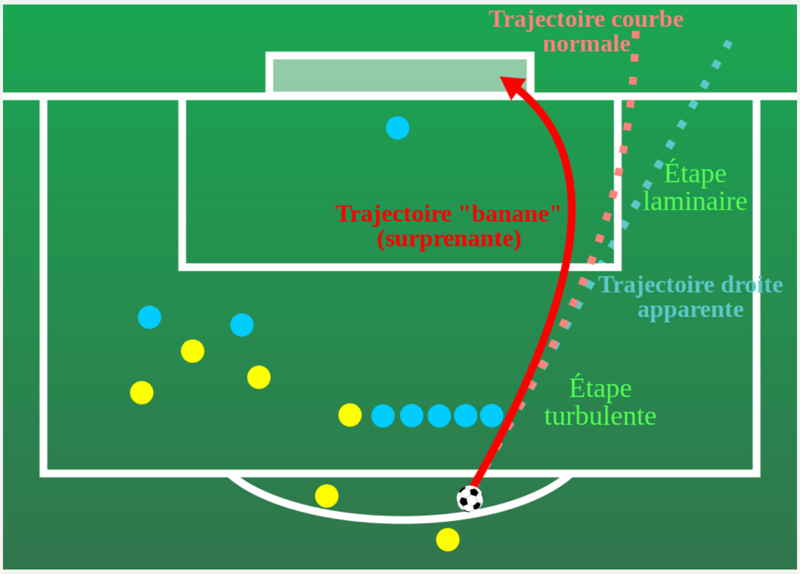


Mise en orbite d'un satellite



Atterrissage

Fonction (3) : courbes géométriques



Coup franc Roberto Carlos 1997 (effet *Magnus*)

https://www.youtube.com/watch?v=crSkWaJqx-Y

Définitions

Fonction d'une variable réelle

Une fonction réelle, de variable réelle est une application d'une partie U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On écrira :

$$U \subset \mathbb{R}, \qquad f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque : U est souvent la plus grande partie de $\mathbb{R}$ où f est calculable (définie).

Exemples

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

U est souvent appelé « le domaine de définition de f » : $\mathcal{D}_f$.

$$U = \mathbb{R}_+ \qquad f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Fonctions et opérations, composées

Somme et produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$. On définit :

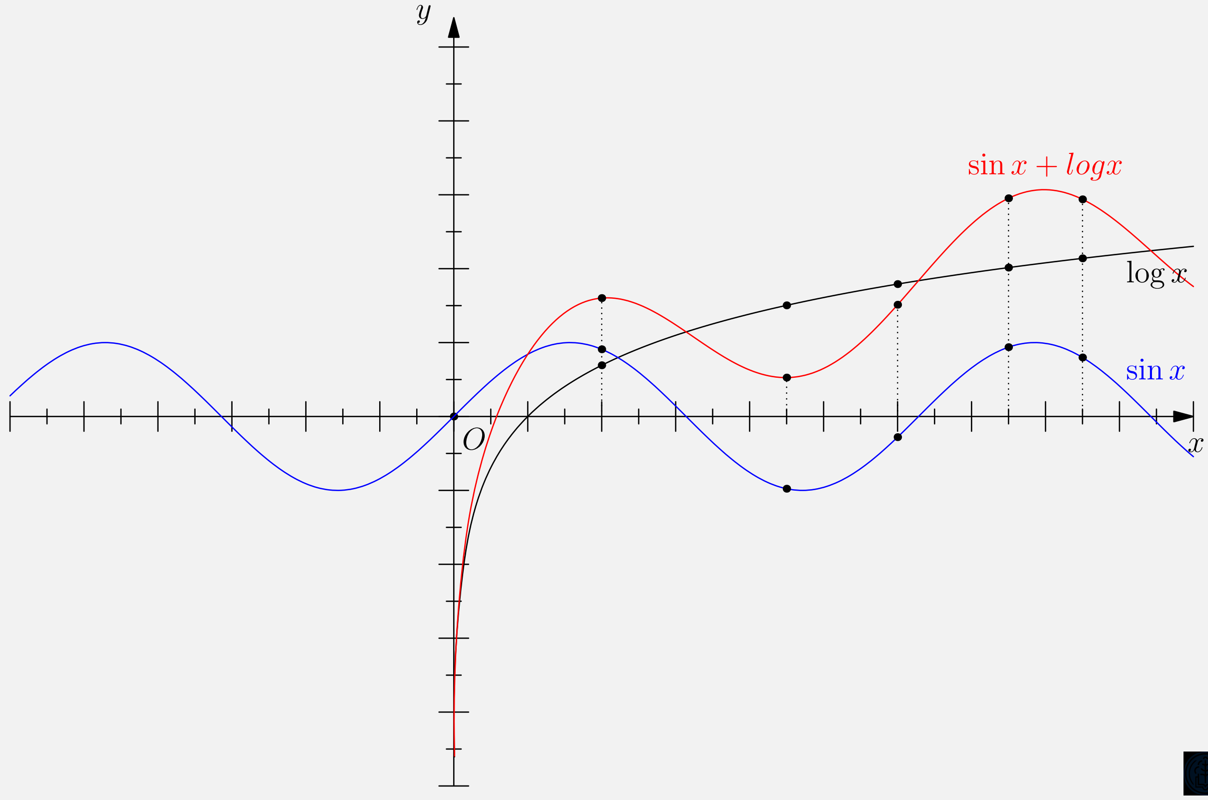
- La somme :

$$f+g : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

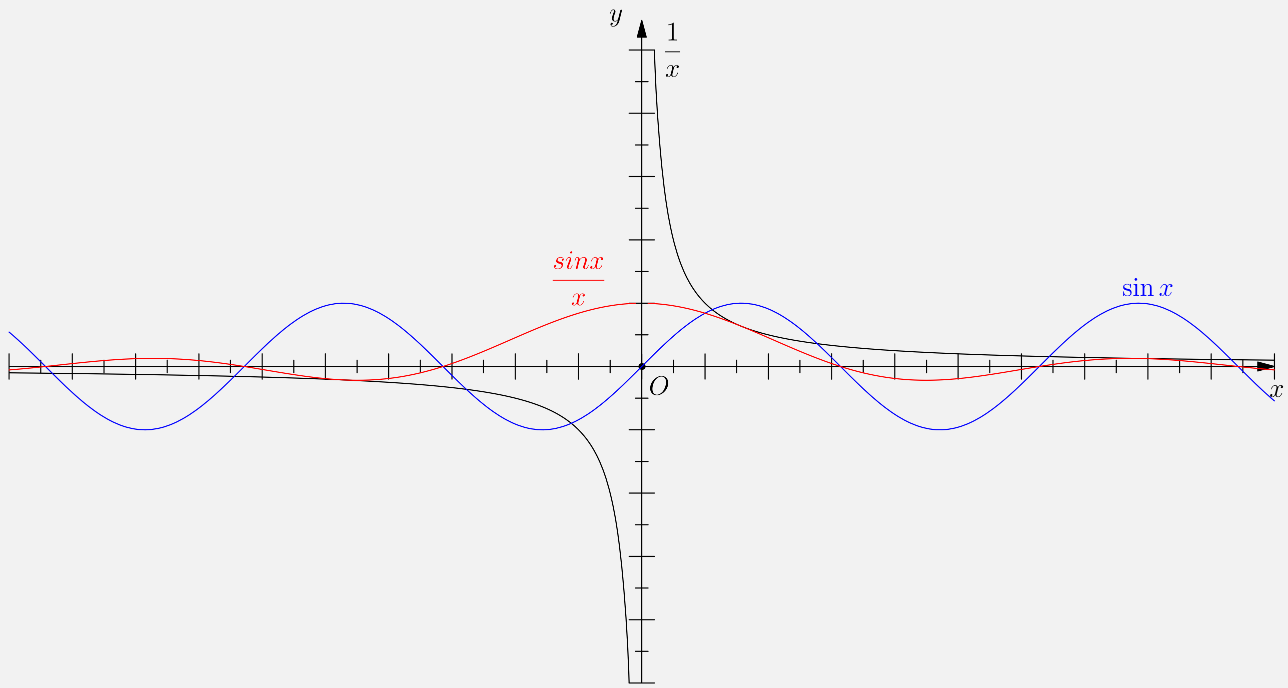
- Le produit :

$$f.g : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f.g(x) = f(x).g(x) \end{array}$$

$h(x) = \ln x + \sin x$



$h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



Composée de fonctions

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f(U) \subset V$. On définit la composée de f et g :

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)).$$

Exercice : Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$, donner $f \circ g$ et $g \circ f$.

Fonctions et ordre

Comparaison des fonctions

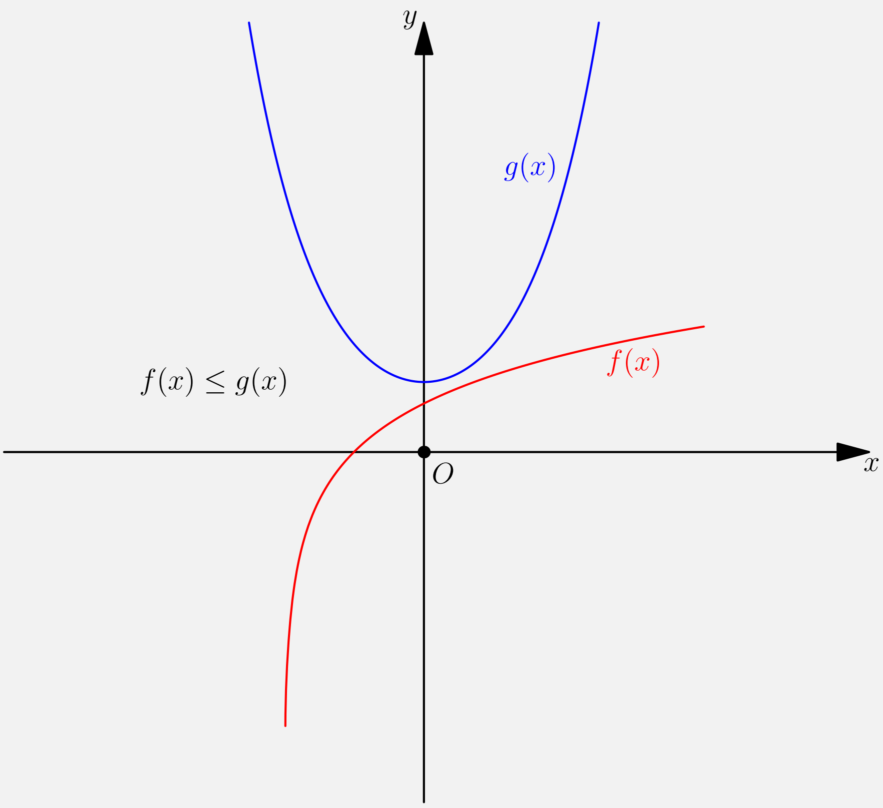
Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est inférieure à g sur U si

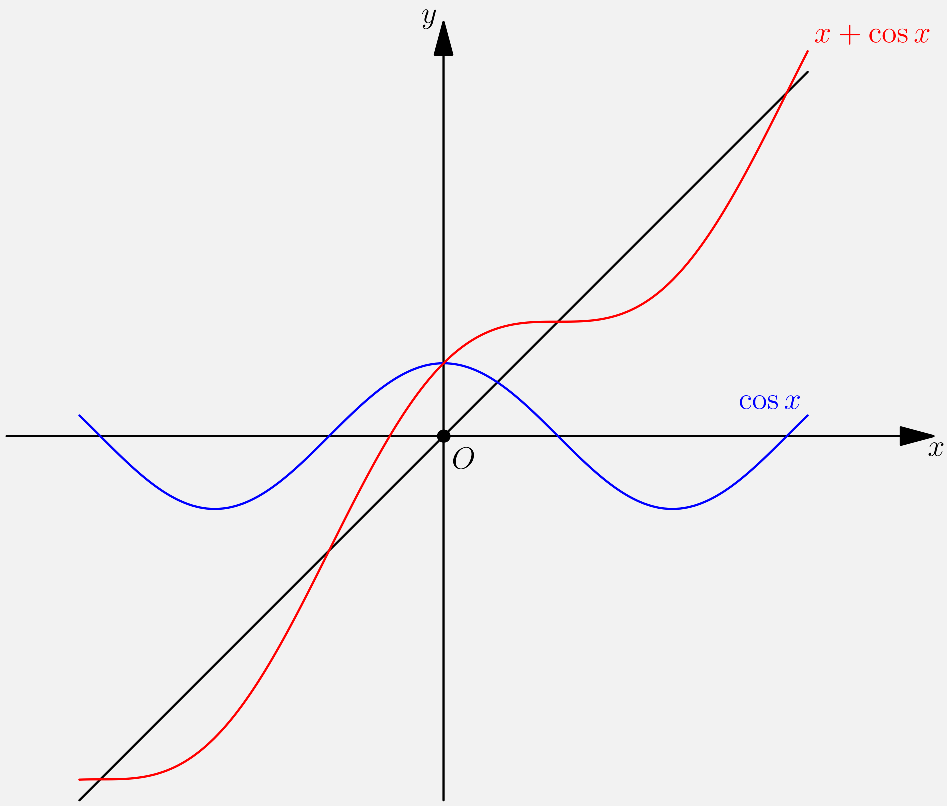
$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g(x)$$

Notation : $f \leq g$

Remarque : Deux fonctions ne sont pas toujours comparables.



Comparaison des fonctions



Comparaison des fonctions

Exercice : Dans chacun des cas suivants, dire si $f \leq g$, si $g \leq f$ ou si aucun des deux n'est vrai.

1. $f(x) = x^2 + 1\,,\;\; g(x) = \cos(x)$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 1\,,\; g(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,,\;\; g(x) = x^2 + 2x + 3$
4. $f(x) = \dfrac{4-x^2}{1+x^2}\,,\;\; g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propriétés particulières

Parité, imparité

Définition. Soit U une partie de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad -x \in U.$$

On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est :

- paire si $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$
- impaire si $\forall x \in U, \quad f(-x) = -f(x)$

Périodicité

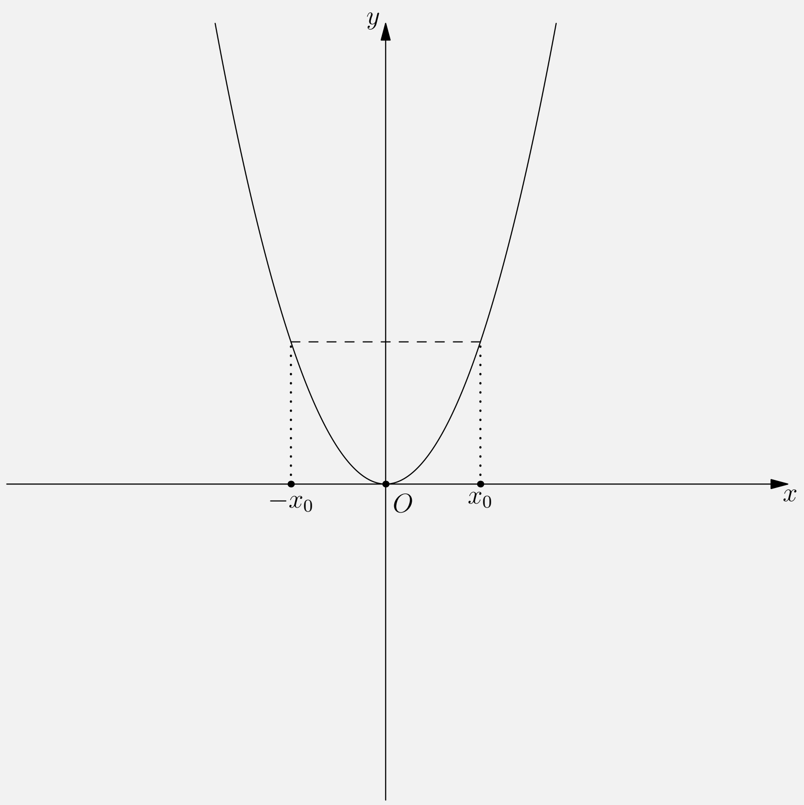
Définition. Soit $T > 0$ et U une partie de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad x + T \in U.$$

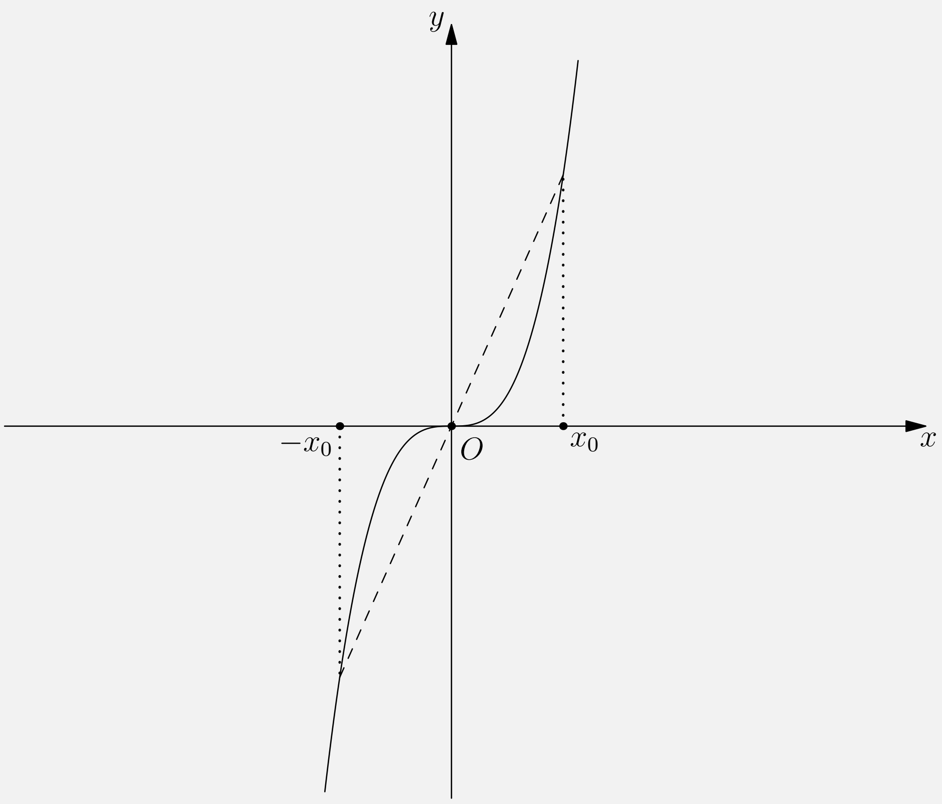
On dit qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est *T-périodique* si

$$\forall x \in U, \;\; f(x+T) = f(x).$$

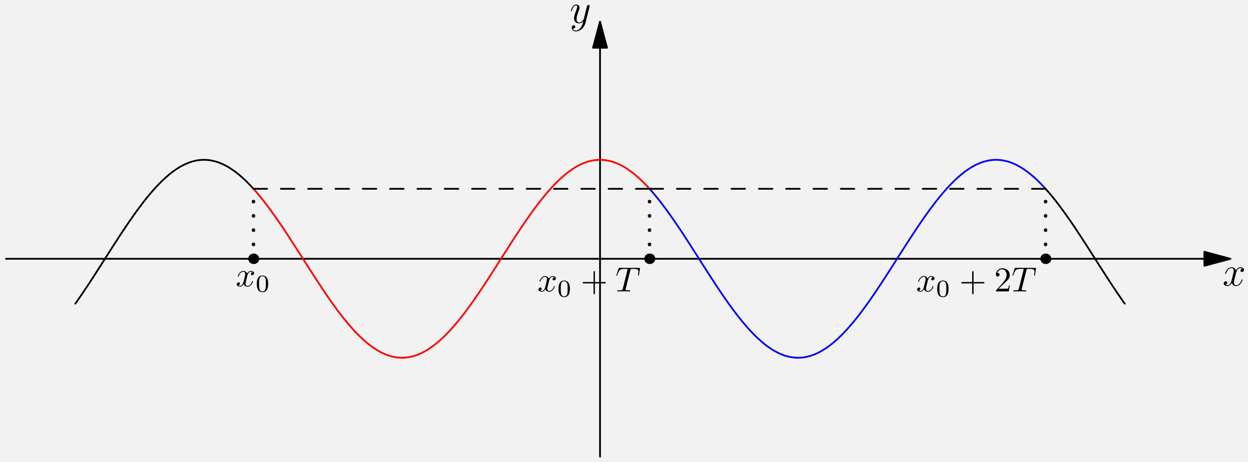
Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique



Parité, imparité, périodicité

Exercice : Dans chacun des cas suivants, dire si f est paire, impaire, périodique.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = \sin(4x)$
3. $f(x) = x(x^4 - 3)$
4. $f(x) = \cos(x)$
5. $f(x) = x|x|$
6. $f(x) = \sin^2(3x)$
7. $f(x) = \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$
8. $f(x) = \dfrac{4 - x^3}{1 + x^2}$

Monotonie

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U, \quad V \neq \emptyset$.

On dit que :

- f est croissante sur V si $\forall x, y \in V, \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$
- f est décroissante sur V si $\forall x, y \in V, \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$
- f est strictement croissante sur V si $\forall x, y \in V, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$
- f est strictement décroissante sur V si $\forall x, y \in V, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U.

- Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f+g$ est croissante sur U
- Si f et g sont croissantes sur U et si f et g sont positives sur U, le produit $f.g$ est croissant sur U
- Si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, si leur composée $f \circ g$ existe, alors $f \circ g$ est croissante
- Si une des deux fonctions, f ou g, est croissante et l'autre décroissante et si leur composée existe, alors $f \circ g$ est décroissante

Limites

Limites finies

Limite en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

Définition. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

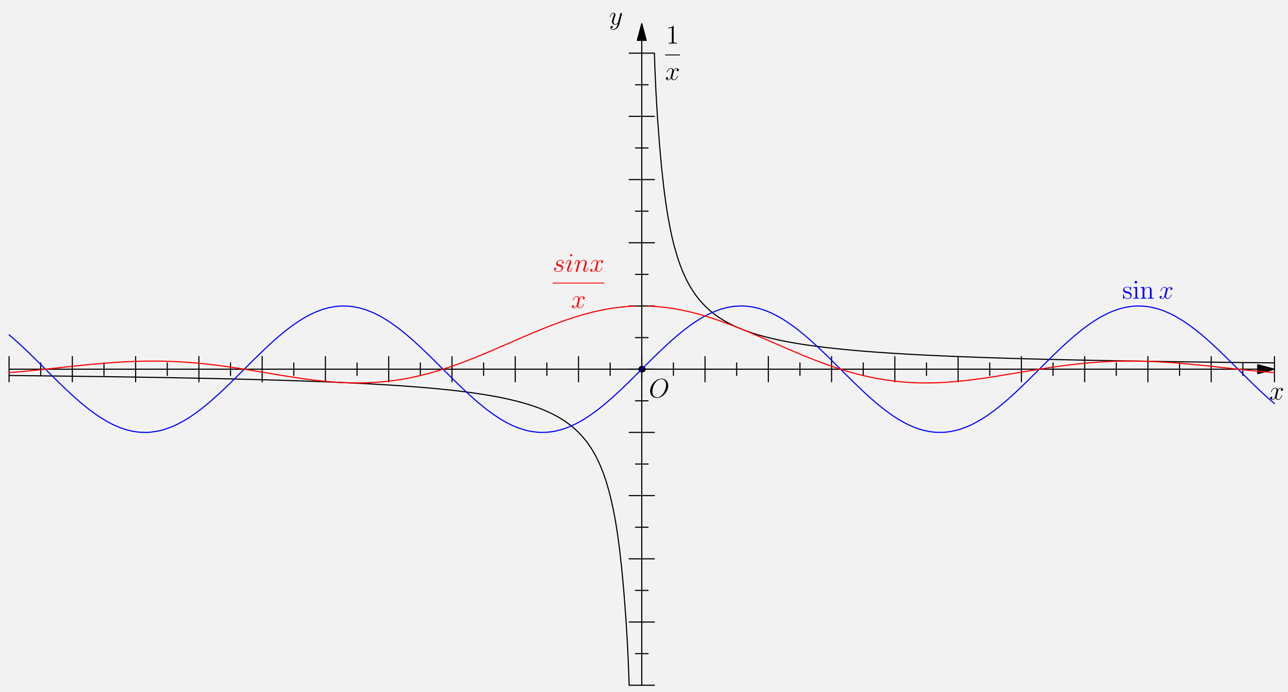
On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Remarque : La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour avoir une limite en x_0.

Par exemple, f peut être définie sur un intervalle $I =]x_0, a[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

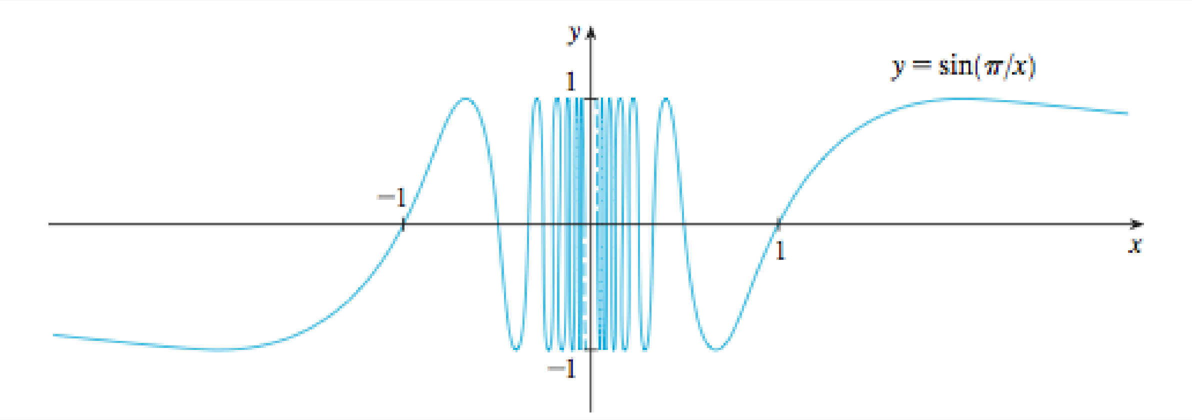
$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Exercice : Quelle semble-être, à la lecture de ce tableau, la limite de $\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ lorsque $x \to 0$?

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.001	0.16667

La fonction suivante semble-t-elle avoir une limite en 0 ?



Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$|x^2 - 0| \leq \varepsilon \qquad \iff \qquad x^2 \leq \varepsilon$$

Si on choisit $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \qquad |x^2 - 0| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Exemple : $\lim_{x\to 1} 3x+2=5$

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\alpha, 1+\alpha]$,

$$|3x+2-5| \leq \varepsilon$$

On a

$$\begin{aligned} |3x+2-5| \leq \varepsilon &\iff -\varepsilon \leq 3x+2-5 \leq \varepsilon \\ &\iff 3-\varepsilon \leq 3x \leq 3+\varepsilon \\ &\iff 1-\frac{\varepsilon}{3} \leq x \leq 1+\frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Si on choisit $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$, on a bien

$$\forall x \in [1-\alpha, 1+\alpha], \qquad |3x+2-5| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to 1} 3x+2=5$$

Exemple : $\lim_{x\to 0} e^x=1$

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|e^x-1| \leq \varepsilon$,
càd $\quad -\varepsilon \leq e^x-1 \leq \varepsilon, \quad \iff \quad 1-\varepsilon \leq e^x \leq 1+\varepsilon$

On a $e^x \leq 1+\varepsilon \iff x \leq \ln(1+\varepsilon)$

et, si $1-\varepsilon > 0$, $\qquad 1-\varepsilon \leq e^x \iff \ln(1-\varepsilon) \leq x$.

Donc

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon \leq e^x \leq 1+\varepsilon &\iff \ln(1-\varepsilon) \leq x \leq \ln(1+\varepsilon) \\ &\Longleftarrow |x| \leq \min\{\ln(1+\varepsilon), -\ln(1-\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Donc si on choisit $\alpha = \min\{\ln(1+\varepsilon), -\ln(1-\varepsilon)\}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \qquad |e^x-1| \leq \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

Limite finie quand x tend vers $+\infty$

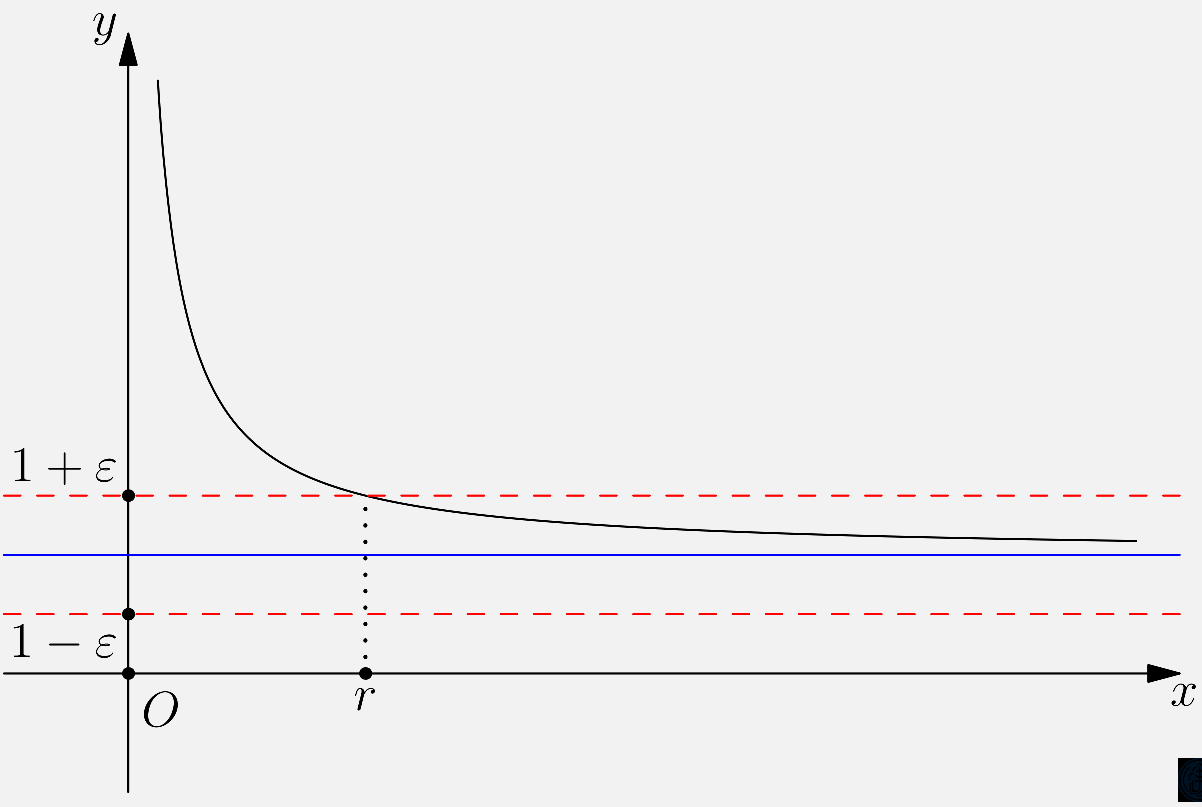
Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty,+\infty[$ ou $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition. On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Limite finie quand x tend vers $+\infty$



Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche r tel que pour tout $x \geq r$,

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Si on choisit $r = \frac{1}{\varepsilon}$, on a bien

$$\forall x \geq r, \qquad \left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exercice : Donner la limite $\lim_{x\to+\infty} x^{-2}$ (avec démonstration).

Limite finie quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

Exemple : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche r tel que pour tout $x \leq r$,

$$|e^x - 0| \leq \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq \ln(\varepsilon)$$

Si on choisit $r = \ln(\varepsilon)$, on a bien

$$\forall x \leq r, \qquad |e^x - 0| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Limites infinies

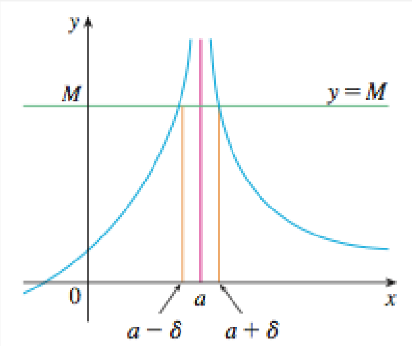
Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers a

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I, et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

Définition. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq M$$



On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Soit $A > 0$.

On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x^2} \geq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Si on choisit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$, on a bien

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha],\ x \neq 0, \qquad \frac{1}{x^2} \geq A$$

Ceci étant valable pour tout $A > 0$ (donc a fortiori pour tout A réel), on a bien montré que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty]$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, si

$$\forall A,\ \exists r > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq r \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Notation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Soit $A > 0$. On cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \geq r$,

$$x^2 \geq A \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq \sqrt{A}$$

Si on choisit $r = \sqrt{A}$, on a bien

$$\forall x \geq r, \qquad x^2 \geq A$$

Ceci étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a bien montré que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Exercice : Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Soit I l'un des intervalles $]-\infty,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$ ou $]-\infty,a]$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, si

$$\forall A,\ \exists r,\ \forall x \in I, \quad x \le r \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge A$$

Notation : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Limites infinies

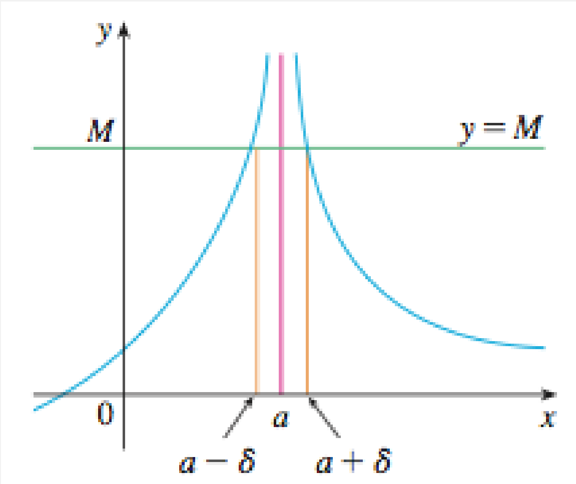
La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

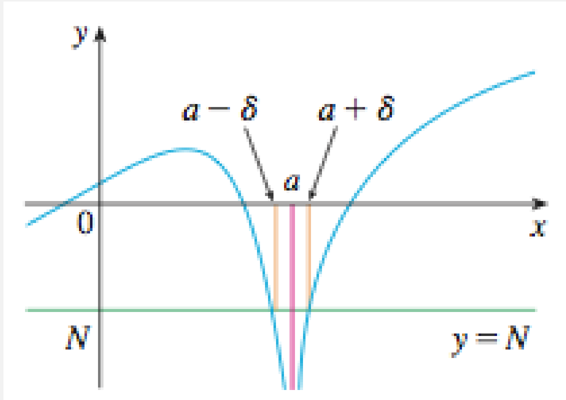
1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$

si : $-f$ tend vers $+\infty$

1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$



$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$:
$\forall M, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta],$
$f(x) > M.$



$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$:
$\forall N, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta],$
$f(x) < N.$

Fonctions d'une variable réelle Limites

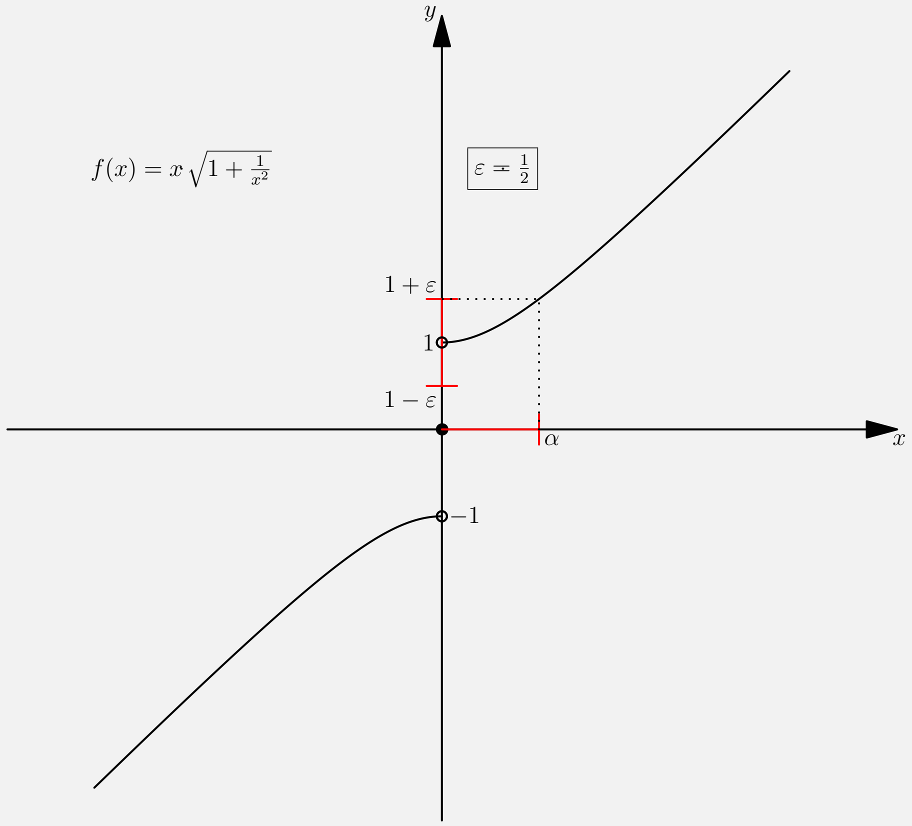
Limites à gauche et à droite

Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- Si
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$$
on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche.
Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

- Si
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$
on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite.
Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Exercice : Donner $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$.



Notations 0^+, 0^-, ℓ^+, ℓ^-

Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, pour $a = x_0$ ou $a = x_0^{\pm}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

On note

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^+$$

si pour x dans un voisinage de a, $f(x) > 0$.

On note

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0^-$$

si pour x dans un voisinage de a, $f(x) < 0$.

Plus généralement, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell^+ \text{ (ou } \ell^-\text{)}$$

si pour x dans un voisinage de a, $f(x) > 0$ (ou $f(x) < 0$).

Exercice : Vrai ou faux ?

1. $\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$
2. $\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^-$
3. $\lim_{x \to 0^+} x^3 = 0^-$
4. $\lim_{x \to 0^-} x^3 = 0^-$
5. $\lim_{x \to 0^+} \sin(x) = 0^+$
6. $\lim_{x \to 0^-} \sin(x) = 0^-$
7. $\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1^-$
8. $\lim_{x \to 0^-} \cos(x) = 1^+$

Unicité de la limite

Proposition : Si une fonction f a une limite (en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$) , cette limite est unique.

Limites et opérations

Les limites des fonctions sont compatibles avec les opérations classiques (sommes, différences, produits, quotients, composées,...).

En particulier,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

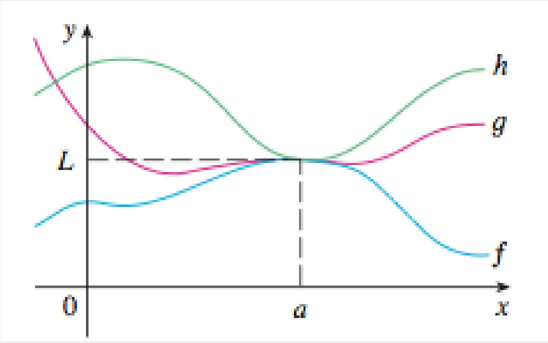
et

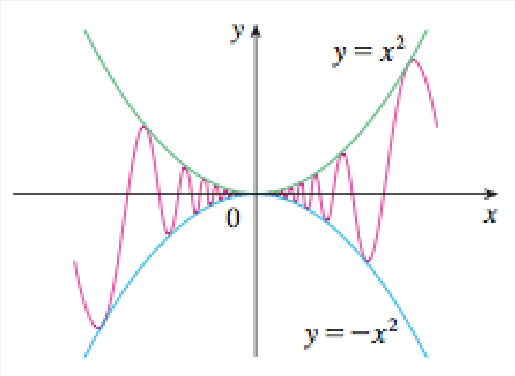
$$\lim_{x \to a} f(x) = 0^- \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Limites et ordre

Les résultats de comparaison (th. d'encadrement, etc...) valables pour les suites sont valables pour les fonctions.

« Théorème des gendarmes »





Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$
2. $\lim_{x \to 0} \sin(x) x^2$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) x^3$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) + x^2$

2. $\lim_{x \to +\infty} (2 + \cos(x))x^4$

3. $\lim_{x \to -\infty} (2 + \cos(x))x^3$

4. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

5. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

« Théorème des gendarmes »

Corollaire. Soit f et g deux fonctions.

Si f est bornée et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0$

Limites et comparaisons : exemple

Corollaire. Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x \to +\infty} x^2 + \frac{\sin(x)}{2}$
2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \sin(\pi/x)$
3. $\lim_{x \to +\infty} e^{x+\cos(\pi/3+x)}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sin(1/x)} + \cos(x)$

Exercice : Que valent les limites suivantes ?

1. $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{|x|}}$
4. $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{|x|}}$
5. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 3|x|}{x}$
6. $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 3|x|}{x}$
7. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + x^{-1}} - \sqrt{x^{-1}}$

Formes indéterminées

Formes indéterminées

On n’a pas de critère pour :

- $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)-g(x)\big)$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty-\infty)$
- $\lim_{x\to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ $(\frac{0}{0})$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\frac{\infty}{\infty})$
- $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ (1^{∞})
- $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)}$ quand $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (∞^{0})

Limites de polynômes lorsque $x \to \pm\infty$

Soit

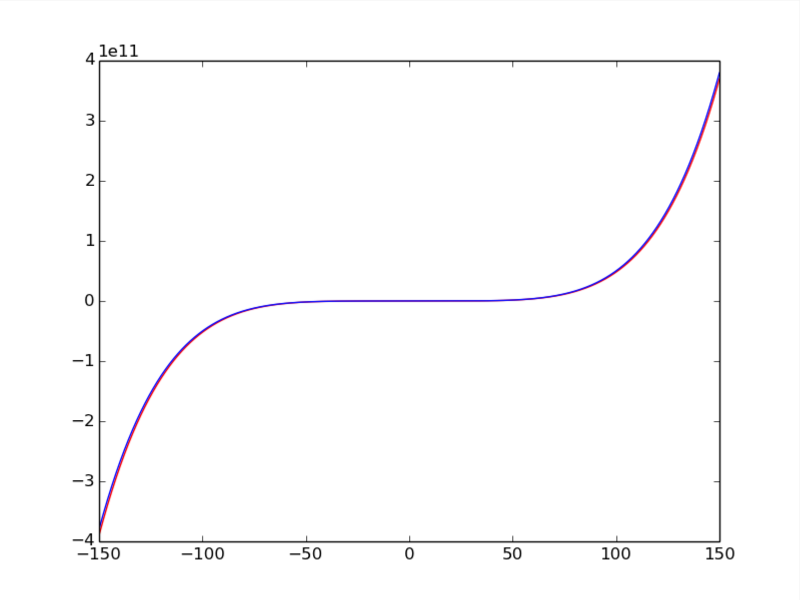
$$P(x) \quad = \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$(n \geq 1,\ a_n \neq 0)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ -\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

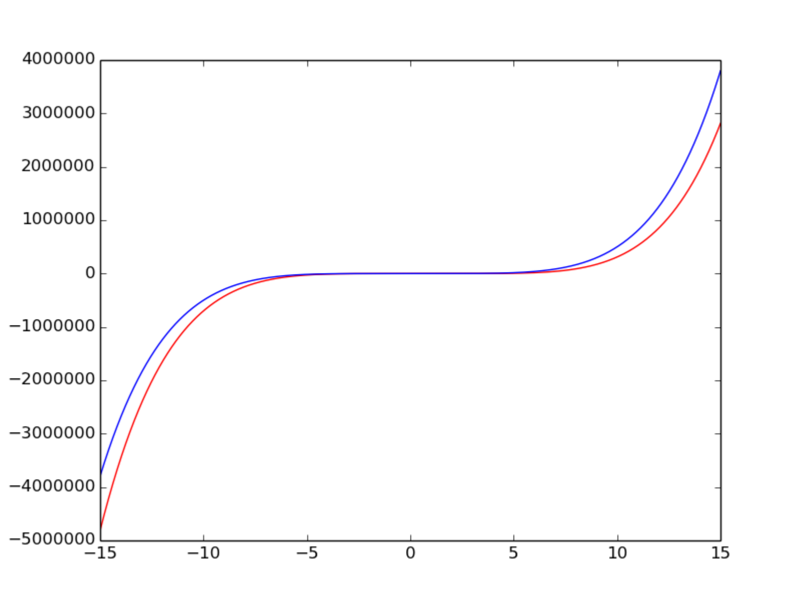
Attention : valable en $\pm\infty$ seulement.



$5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x - 40$ et $5x^5$ sur $[-150, 150]$

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Attention : valable en $\pm\infty$ seulement.

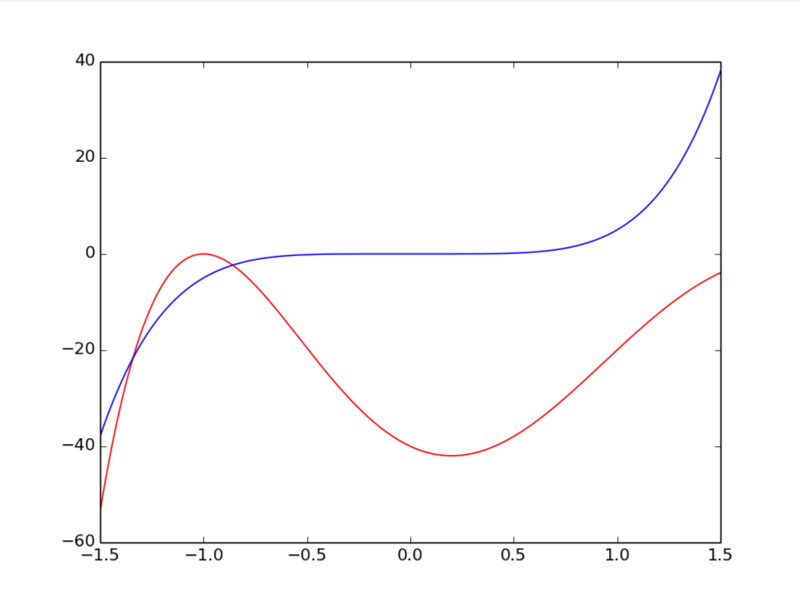


$5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x - 40$ et $5x^5$ sur $[-15, 15]$

Fonctions d'une variable réelle
Formes indéterminées

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Attention : valable en $\pm\infty$ seulement.



$5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x - 40$ et $5x^5$ sur $[-1.5, 1.5]$

Limites de fractions rationnelles lorsque $x \longrightarrow +\infty$

Soient

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0) \\ Q(x) &= b_p x^p + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \qquad (p \geq 1,\ b_p \neq 0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \frac{a_n}{b_p} & \text{si } n = p \\ +\infty & \text{si } n > p \text{ et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \\ -\infty & \text{si } n > p \text{ et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \end{cases}$$

Limites de fractions rationnelles lorsque $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \frac{a_n}{b_p} & \text{si } n = p \\ +\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ pair et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \\ +\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ impair et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \\ -\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ pair et } \frac{a_n}{b_p} < 0 \\ -\infty & \text{si } n > p,\ n-p \text{ impair et } \frac{a_n}{b_p} > 0 \end{cases}$$

Croissance comparée

Croissance comparée

Pour $a > 0$, $b > 0$, on a

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = \lim_{x \to 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} |x|^b e^{ax} = 0$

Fonctions négligeables

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$, et deux fonctions f et g définies sur un voisinage I de a. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, ce que l'on note $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Comme pour les suites, on utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de a, et telles que g ne s'annule pas sur I. Alors

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

On a une définition et une caractérisation similaires lorsque :

- I est un voisinage à droite de a :

$$f(x) = \underset{x \to a^+}{o}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} 0$$

  et de même à gauche de a ($x \to a^-$) ;

- $a = +\infty$ et I est de la forme $]A, +\infty[$:

$$f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  et de même en $-\infty$ ($x \to -\infty$).

Exemples :

$$x^2 = \underset{x \to 0}{o}(x) \qquad x = \underset{x \to 0^+}{o}(\sqrt{x})$$

$$x = \underset{x \to +\infty}{o}(x^2) \qquad \sqrt{x} = \underset{x \to +\infty}{o}(x)$$

Croissance comparée

On peut ainsi reformuler les relations de croissances comparées avec des $o()$:

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, alors

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x}).$$

Par manipulations algébriques et changement de variable ($y = \frac{1}{x}$, $y = -x$, etc.) on peut retrouver d'autres relations classiques de croissance comparée :

$$|\ln x|^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \qquad e^{-\gamma x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \qquad \text{etc.}$$

Équivalence de fonctions

Définition. On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ou de la forme r^+ ou r^- pour un réel r), ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x)).$$

Remarque : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

Proposition. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, telles que g ne s'annule pas. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \iff \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

Preuve :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \underset{x\to a}{o}(1)$$

Manipulation des $o()$ et des équivalents

Toutes les règles de manipulation des $o()$ et des équivalents, vues pour les suites, s'appliquent aussi pour les fonctions.

Exercice :
Donner un équivalent, le plus simple possible, des fonctions suivantes aux points spécifiés :

1. $f_1(x) = x + x^2 + x^3$ en $x = +\infty$, puis en $x = 0$
2. $f_2(x) = \sin x + \cos x$ en $x = 0$, puis en $x = \frac{\pi}{2}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $x = +\infty$
4. $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x^2+1)}$ en $x = +\infty$, puis en $x = 0$.

Exercice

Exercice : Trouver, si elle existe, la limite quand $x \to 0^+$ de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{x^2 \ln x}{e^{-\frac{1}{x}} + x \cos x} + \frac{x + \sqrt{x |\ln x|}}{1 + \sqrt{|\ln x|}} \right).$$

1) On a $e^{-y} \underset{y \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{y}\right)$ donc $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to 0^+}{=} o(x)$

$$\text{et} \quad e^{-\frac{1}{x}} + x \cos x = o(x) + x(1 + o(1)) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$$

$$\text{donc} \quad \frac{x^2 \ln x}{e^{-\frac{1}{x}} + x \cos(x)} \underset{x \to 0^+}{\sim} x \ln x.$$

Exercice (suite)

2) De plus,

$$\frac{x+\sqrt{x|\ln x|}}{1+\sqrt{|\ln x|}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x|\ln x|}}{\sqrt{|\ln x|}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^2\ln x}{e^{-\frac{1}{x}}+x\cos x}+\frac{x+\sqrt{x|\ln x|}}{1+\sqrt{|\ln x|}}\right) \\ &= \frac{x\ln x+\underset{x\to 0^+}{o}(x\ln x)+\sqrt{x}+\underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}+\underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1+\underset{x\to 0^+}{o}(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

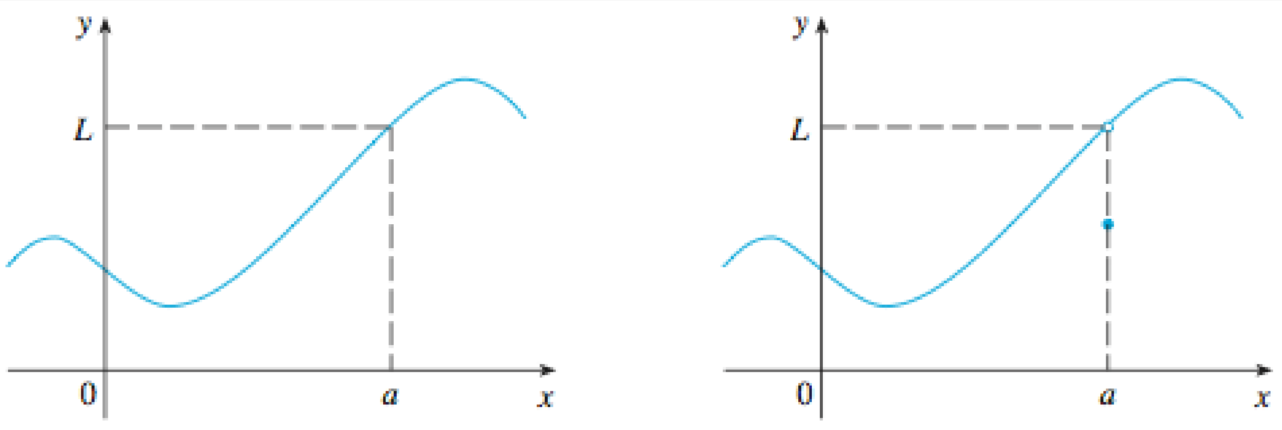
Exercices

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x)+\sqrt{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4x-1}{x\ln(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$

Exercices

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(\sqrt{x}-x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

Continuité



Gauche : f est continue en a, droite : f est non continue en a

Fonction continue

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A.

- Pour $a \in A$, on dit que f est continue en a si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$
c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$(x \in A \quad \text{et} \quad |x-a| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$
- On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Exercice : Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

1. la fonction f qui à un instant t associe la température en haut de la tour Eiffel à l'instant t

2. la fonction partie entière de x, notée $x \mapsto E(x)$
   $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x :
   $E(5,43) = 5$, $E(4) = 4$, $E(-1,7) = -2 \ldots$.

3. la fonction $f(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

4. la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd(p, q)} = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (réponse : f est continue sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, discontinue sur $[0,1] \cap \mathbb{Q}$)

Les sommes, différences, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.

De plus, toutes les fonctions usuelles sont continues là où elles sont définies.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour tout suite (u_n) d'éléménts de I,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a).$$

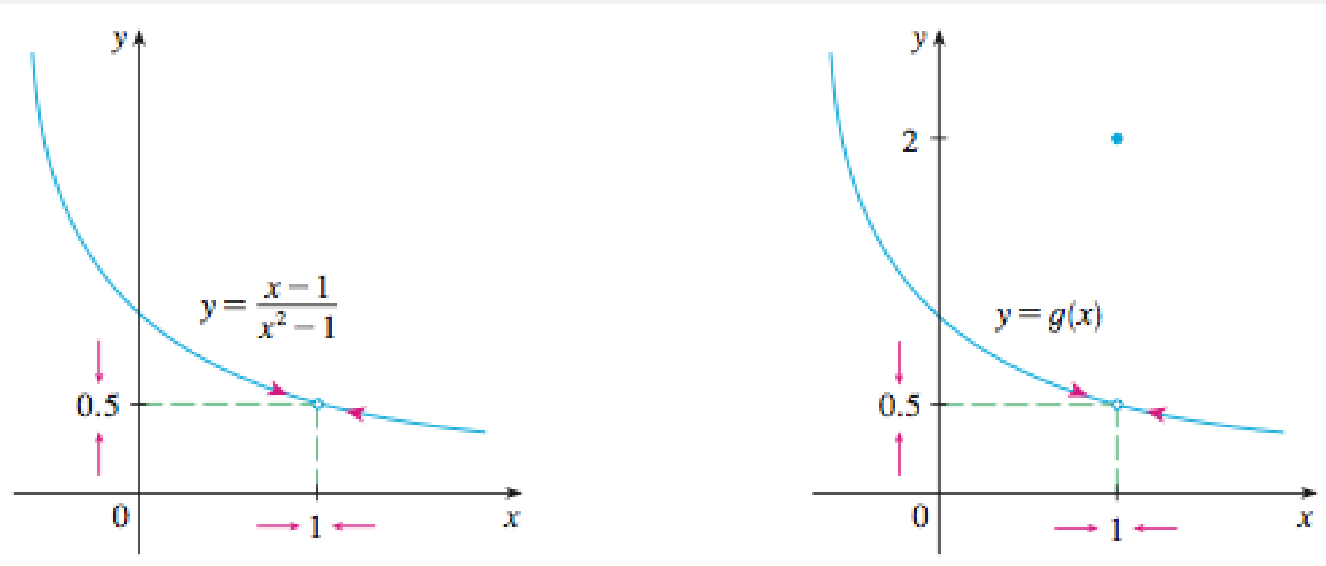
Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite définie $u_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Si (u_n) converge vers un réel $L \in I$
2. et si f est continue en L,

alors L vérifie $f(L) = L$

Prolongement par continuité : exemple



Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a, b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell = g(a)$: g est continue en a

g est le prolongement par continuité de f en a.

Utilisation des opérations

Exercice : Expliquer pourquoi les fonctions suivantes sont continues.

1. La fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x^2+1}$$

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - \sin x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Utilisation des limites

Exercice : Expliquer pourquoi les fonctions suivantes sont continues.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = \dfrac{x-1}{x^2-1} \quad \text{si } x \neq 1 \\ f(1) & = 1/2 \end{cases}$$

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) & = \dfrac{x^3+8}{x+2} \quad \text{si } x \neq -2 \\ g(-2) & = 12 \end{cases}$$

Exercice : Peut-on prolonger la fonction $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$ par continuité à $\mathbb{R}$?

Théorème. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b
  2. $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)$
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

Théorème valide si on remplace b par $+\infty$

Démonstration (1)

f croissante et majorée sur $[a, b[$. Montrons que

$$\lim_{x \to b} f(x) = \ell = \sup_{x \in [a,b[} f(x) := \sup\{f(x);\, x \in [a,b[\}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition du sup, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0)$.

Alors pour tout $x \in [x_0, b[$, on a

$$\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc montré que $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$.

Fonctions d'une variable réelle Fonctions croissantes

Démonstration (2)

f croissante et non majorée sur $[a, b[$. Montrons que

$$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

Soit $A > 0$.

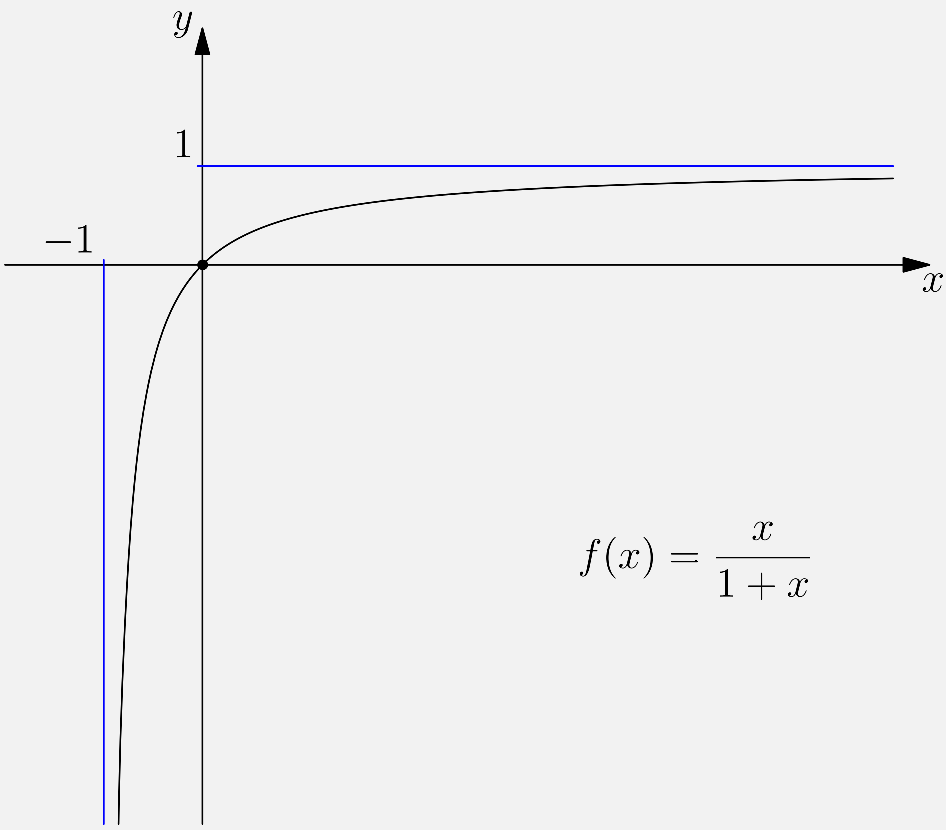
A n'est pas un majorant de f, donc il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $A < f(x_0)$.

Alors pour tout $x \in [x_0, b[$, on a

$$A < f(x_0) \leq f(x)$$

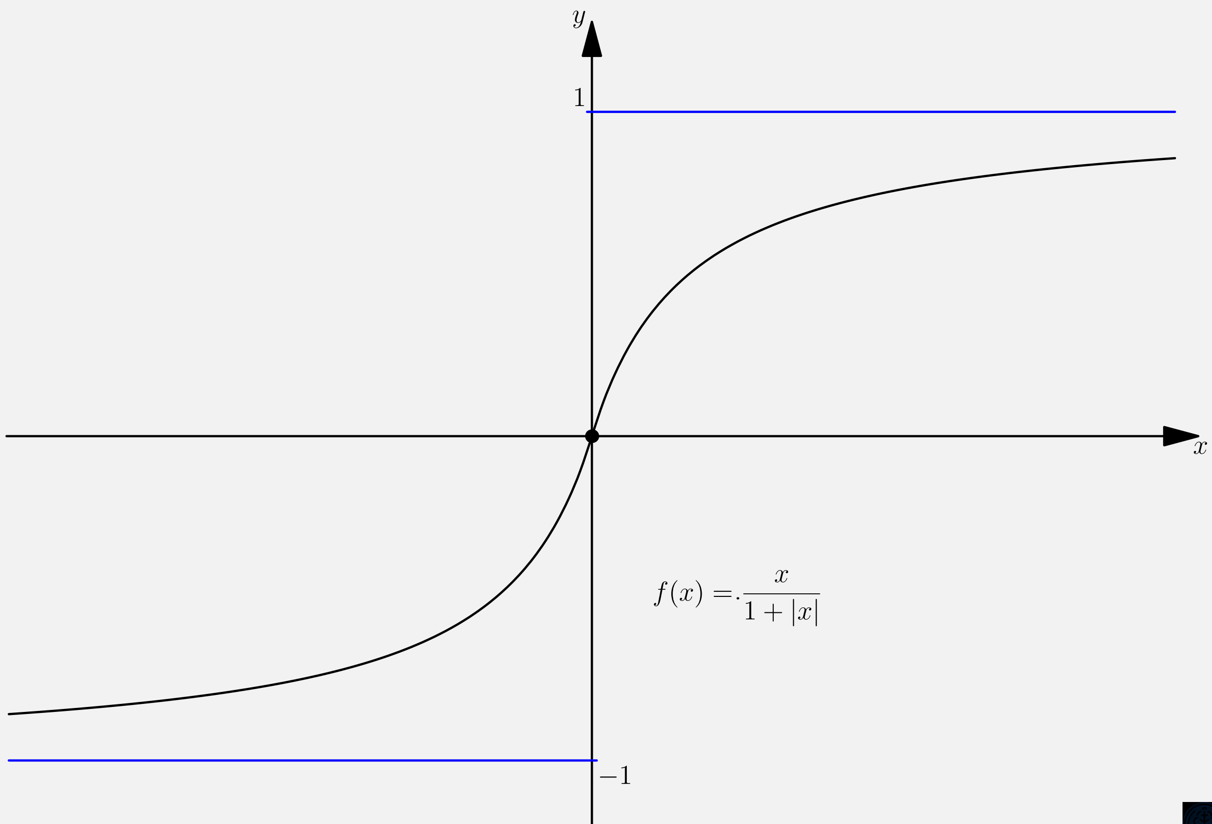
Ceci étant valable pour tout $A > 0$, on a donc montré que $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Fonction croissante majorée, non minorée



$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Fonction croissante majorée et minorée



$$f(x) = .\frac{x}{1+|x|}$$

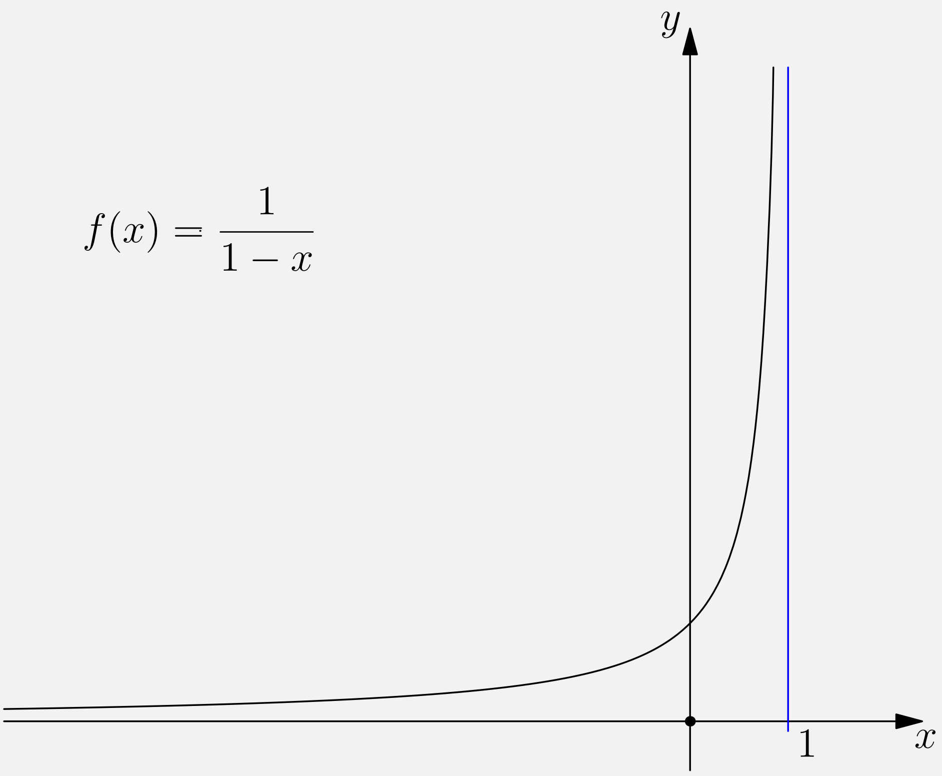
Théorème. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a
  2. $\lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in]a,b]} f(x)$
- Si f n’est pas minorée, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème valide si on remplace a par $-\infty$

Fonction croissante minorée, non majorée

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



Fonction croissante ni majorée, ni minorée

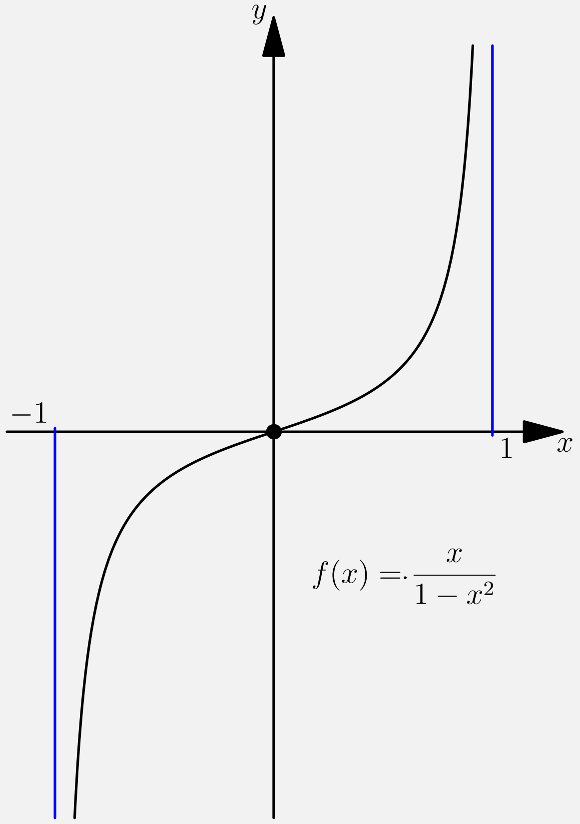
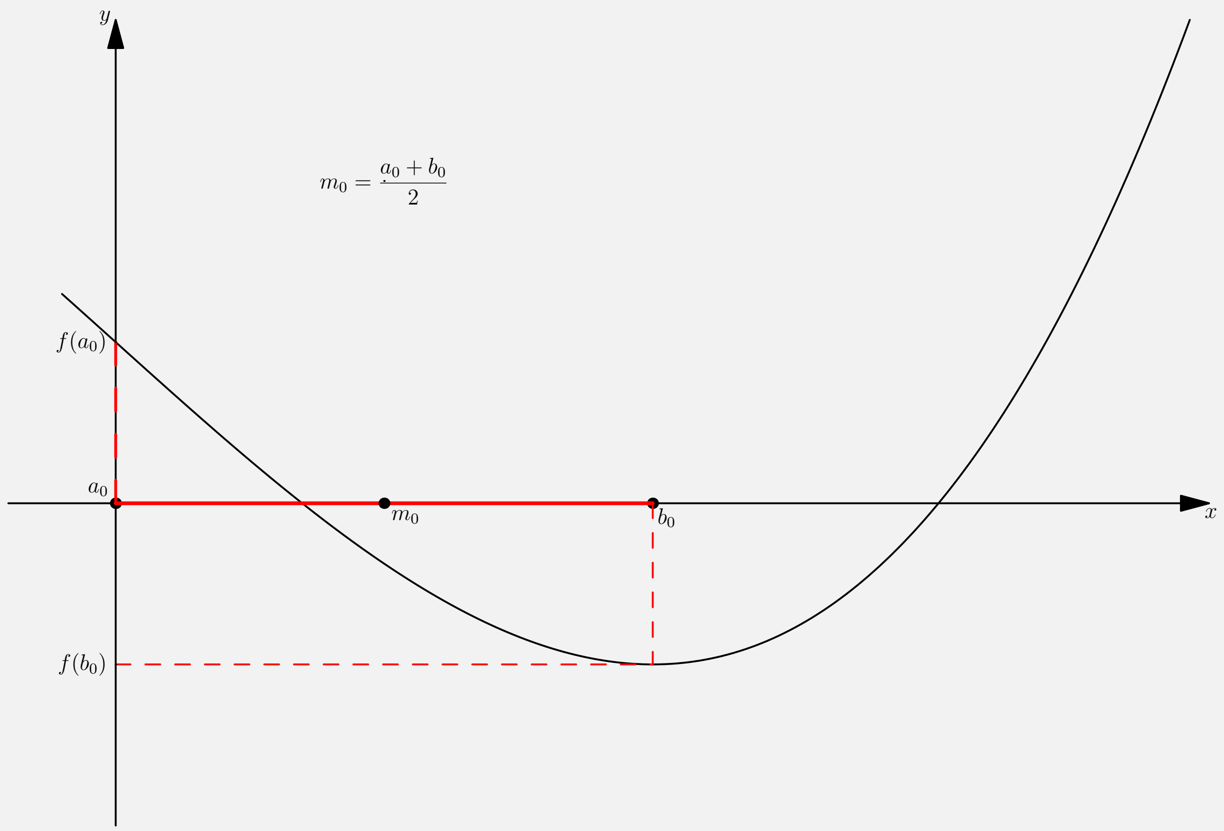


Image continue d’un intervalle

Proposition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors

il existe au moins un nombre $c \in]a\,,b[$ tel que $f(c) = 0$.



Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0, \quad c = m_0$
- Si $f(m_0) > 0, \quad a_1 = m_0,$ et $b_1 = b_0$ donc $f(a_1) > 0$
- Si $f(m_0) < 0, \quad a_1 = a_0,$ et $b_1 = m_0$ donc $f(b_1) < 0$

$$a_0 < m_0 < b_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$$

$$b_1 - a_1 = \begin{cases} b_0 - m_0 & = & b_0 - \frac{a_0+b_0}{2} & = & \frac{b_0-a_0}{2} & (\text{si } f(m_0) > 0) \\ m_0 - a_0 & = & \frac{a_0+b_0}{2} - a_0 & = & \frac{b_0-a_0}{2} & (\text{si } f(m_0) < 0) \end{cases}$$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0, \quad c = m_1$
- Si $f(m_1) > 0, \quad a_2 = m_1,$ et $b_2 = b_1$ donc $f(a_2) > 0$
- Si $f(m_1) < 0, \quad a_2 = a_1,$ et $b_2 = m_1$ donc $f(b_2) < 0$

$$a_1 < m_1 < b_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

$$b_2 - a_2 = \begin{cases} b_1 - m_1 & = & \frac{b_1-a_1}{2} & = & \frac{b_0-a_0}{2^2} & (\text{si } f(m_1) > 0) \\ m_1 - a_1 & = & \frac{b_1-a_1}{2} & = & \frac{b_0-a_0}{2^2} & (\text{si } f(m_1) < 0) \end{cases}$$

Par récurrence on construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante
- $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad$ donc $\quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite c.

f est continue, donc $\quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(a_n) > 0 & \Rightarrow & f(c) \geq 0 \\ f(b_n) < 0 & \Rightarrow & f(c) \leq 0 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad f(c) = 0$$

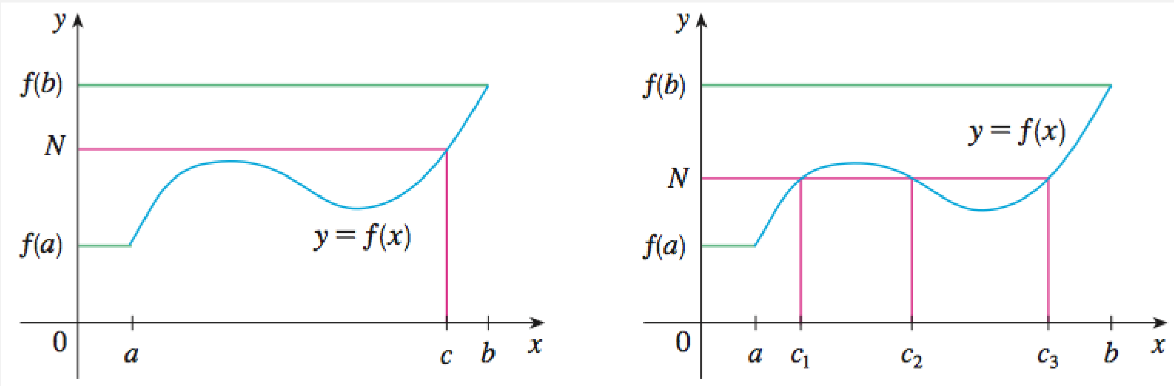
Corollaire. Un polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ;

Soit N un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$;

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = N$.



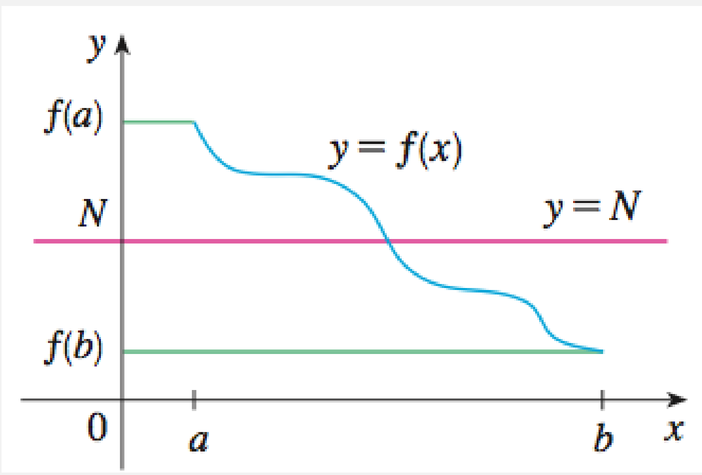
Fonctions d'une variable réelle Image continue d'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ;

Soit N un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$;

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = N$.



Exercice : Prouver que l'équation

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet (au moins) une solution entre 1 et 2.

Exercice : Un moine tibétain quitte son monastère à 7h un jour et arrive au sommet de la montagne à 19h ce jour là. Le lendemain, il quitte le sommet à 7h un jour et arrive à son monastère à 19h, en passant par le même chemin. Montrer qu'il existe un lieu de ce chemin où il est passé exactement à la même heure les deux jours.

Corollaire. Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Exercice : Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.

Théorème. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors :

1. La fonction f est bornée sur $[a\,,b]$
2. $f\big([a\,,b]\big) = [m\,,M]$,

   avec $m = \inf\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$.

Rappel : Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

Définition. Une application (quelconque) $f : A \to B$ est :

- injective si deux éléments distincts de A n'ont jamais la même image par f, c'est-à-dire

  $$\forall a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

  autre caractérisation : tout élément de B a **au plus** un antécédent par f
- surjective si tout élément de B a au moins un antécédent par f, c'est-à-dire

  $$\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b$$
- bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de B a **exactement** un antécédent par f (la fonction qui à un élément de B fait correspondre son antécédent est f^{-1})

Exercice : Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_1(x) = x^2$;
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ avec $f_2(x) = x^2$;
- $f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ avec $f_3(x) = \sin x$;
- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_4(x) = e^x$.
- $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ avec $f_5(x) = e^x$.

Proposition. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.

Preuve : Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f strictement croissante. Soient alors $x, y \in I$ tels que $x \neq y$.

Soit $x < y$ et alors $f(x) < f(y)$.

Soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$.

Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$.

Conclusion : f est injective.

Théorème. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.
3. La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Exercice :
a) Montrer que pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ solution de $xe^x = y$.
b) On note cette solution, qui dépend de y, $g(y)$. Donner le tableau de variation de la fonction g entre 0 et $+\infty$.

Exercice : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

Donner une formule pour $f^{-1}(x)$.