Intelligence Artificielle – TD 9
Inférence en logique du premier ordre

CORRECTION

Exercice 1
Pour chacune de ces paires d'énoncés, donnez s'il existe l'unificateur le plus général.

1. $p(A,B,B)$, $p(x,y,z)$
2. $p(A,B,B)$, $p(x,x,y)$
3. $q(y, g(A,B))$, $q(g(x,x),y)$
4. $plusVieux(pere(y),y)$, $plusVieux(pere(x), Jean)$
5. $connait(pere(y),y)$, $connait(x,x)$

Solution: Il s'agit donc de trouver une substitution, la plus générale possible, permettant d'unifier les deux formules (*les rendre identiques*).
On rappelle qu'il est possible de substituer une variable par une autre variable ou une constante, mais qu'il n'est pas posible de substituer une constante par une autre.

1. $p(A,B,B)$, $p(x,y,z)$
   $\{x/A, y/B, z/B\}$
2. $p(A,B,B)$, $p(x,x,y)$
   Pas d'unificateur : x ne peut être substitué à la fois à A et à B.
3. $q(y, g(A,B))$, $q(g(x,x),y)$
   Pas d'unificateur : x ne peut être substitué à la fois à A et à B.
   OK si on normalise y.
4. $plusVieux(pere(y),y)$, $plusVieux(pere(x), Jean)$
   $\{x/Jean, y/Jean\}$
5. $connait(pere(y),y)$, $connait(x,x)$
   Pas d'unificateur : x ne peut pas être unifié à y et $pere(y)$

Exercice 2
Soit le langage $\mathcal{L}$, dont la signature $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ est la suivante :

- $\mathcal{F} = \{\}$
- $\mathcal{R} = \{p/1, q/2, r/1, s/1\}$

Soit la base de connaissances suivante construite sur le langage $\mathcal{L}$:

1. $\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ q(y,x)$
2. $\forall y\ (\exists x\ p(x) \wedge q(y,x)) \Rightarrow r(y)$
3. $\forall x,y\ r(y) \wedge s(y) \wedge p(x) \Rightarrow \neg q(y,x)$
4. $\forall x\ s(x) \Rightarrow r(x)$
5. $\exists x\ p(x)$

Prouvez par résolution que $\exists x\ r(x) \wedge \neg s(x)$

Solution: On commence par transformer la base de connaissances en FNC.

1. Ajouter la négation de la conclusion dans la base de connaissances : $\neg(\exists x\ r(x) \wedge \neg s(x))$
2. Supprimer les implications
   (a) $\forall x\ \neg p(x) \vee (\exists y\ q(y,x))$
   (b) $\forall y\ \neg(\exists x\ p(x) \wedge q(y,x)) \vee r(y)$
   (c) $\forall x,y\ \neg(r(y) \wedge s(y) \wedge p(x)) \vee \neg q(y,x)$
   (d) $\forall x\ \neg s(x) \vee r(x)$
   (e) $\exists x\ p(x)$
   (f) $\neg(\exists x\ r(x) \wedge \neg s(x))$
3. Déplacer les $\neg$ à l'intérieur des parenthèses
   (b) $\forall y\ (\forall x\ \neg p(x) \vee \neg q(y,x)) \vee r(y)$
   (c) $\forall x,y\ (\neg r(y) \vee \neg s(y) \vee \neg p(x)) \vee \neg q(y,x)$
   (f) $\forall x\ \neg r(x) \vee s(x)$
4. Normaliser les variables :
   (a) $\forall x_1\ \neg p(x_1) \vee (\exists y_1\ q(y_1,x_1))$
   (b) $\forall y_2\ (\forall x_2\ \neg p(x_2) \vee \neg q(y_2,x_2)) \vee r(y_2)$
   (c) $\forall x_3,y_3\ (\neg r(y_3) \vee \neg s(y_3) \vee \neg p(x_3)) \vee \neg q(y_3,x_3)$
   (d) $\forall x_4\ \neg s(x_4) \vee r(x_4)$
   (e) $\exists x_5\ p(x_5)$
   (f) $\forall x_6\ \neg r(x_6) \vee s(x_6)$
5. Skolémiser
   (a) $\neg p(x_1) \vee q(f(x_1),x_1)$
   (b) $\neg p(x_2) \vee \neg q(y_2,x_2) \vee r(y_2)$

(c) $\neg r(y_3) \vee \neg s(y_3) \vee \neg p(x_3) \vee \neg q(y_3,x_3)$

(d) $\neg s(x_4) \vee r(x_4)$

(e) $p(A)$

(f) $\neg r(x_6) \vee s(x_6)$

6. Distribuer les $\vee$ sur les $\wedge$ pour obtenir des clauses séparées par des conjonctions : non applicable

On applique à présent la résolution :

1. $\neg p(x_1) \vee q(f(x_1),x_1)$
2. $\neg p(x_2) \vee \neg q(y_2,x_2) \vee r(y_2)$
3. $\neg r(y_3) \vee \neg s(y_3) \vee \neg p(x_3) \vee \neg q(y_3,x_3)$
4. $\neg s(x_4) \vee r(x_4)$
5. $p(A)$
6. $\neg r(x_6) \vee s(x_6)$
7. $q(f(A),A)$ (5.+1. $\{x_1/A\}$)
8. $\neg p(A) \vee r(f(A))$ (7.+2. $\{x_2/A, y_2/f(A)\}$)
9. $r(f(A))$ (8.+5. $\{\}$)
10. $s(f(A))$ (9.+6. $\{x_6/f(A)\}$)
11. $\neg s(f(A)) \vee \neg p(x_3) \vee \neg q(f(A),x_3)$ (9.+3. $\{y_3/f(A)\}$)
12. $\neg p(x_3) \vee \neg q(f(A),x_3)$ (11.+10. $\{\}$)
13. $\neg p(A)$ (7.+12. $\{x_3/A\}$)
14. $\perp$ (13.+5. $\{\}$)

Exercice 3

Soit le langage $\mathcal{L}$, dont la signature $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ est la suivante :

- $\mathcal{F} = \{A/0, f/1\}$
- $\mathcal{R} = \{p/1, q/3, r/2, s/1, w/1, d/1, e/2\}$

Soit la base de connaissances suivante construit sur le langage $\mathcal{L}$:

1. $\exists x \forall y \exists z,\ p(A) \wedge q(x, y, z)$
2. $\forall x,\ (p(x) \wedge w(x)) \Rightarrow s(x)$
3. $\forall x,\ d(x) \Rightarrow (w(x) \wedge \neg p(x))$
4. $\forall x \forall y,\ (d(x) \wedge e(x,y)) \Rightarrow w(y)$
5. $\forall x \forall y,\ r(f(x), f(y)) \Rightarrow e(x,y)$
6. $\exists x,\ d(x) \wedge r(f(x), f(A))$

Prouvez par résolution que $s(A)$

Solution:

On commence par transformer la base de connaissances en FNC.

1. Ajouter la négation de la conclusion dans la base de connaissances : $\neg s(A)$
2. Supprimer les implications
   (a) $\exists x \forall y \exists z,\ p(A) \wedge q(x, y, z)$
   (b) $\forall x,\ \neg(p(x) \wedge w(x)) \vee s(x)$
   (c) $\forall x,\ \neg d(x) \vee (w(x) \wedge \neg p(x))$
   (d) $\forall x \forall y,\ \neg(d(x) \wedge e(x,y)) \vee w(y)$
   (e) $\forall x \forall y,\ \neg r(f(x), f(y)) \vee e(x,y)$
   (f) $\exists x,\ d(x) \wedge r(f(x), f(A))$
   (g) $\neg s(A)$
3. Déplacer les $\neg$ à l'intérieur des parenthèses
   (b) $\forall x,\ \neg p(x) \vee \neg w(x) \vee s(x)$
   (d) $\forall x \forall y,\ \neg d(x) \vee \neg e(x,y) \vee w(y)$
4. Normaliser les variables :
   (a) $\exists x_1 \forall y_1 \exists z_1,\ p(A) \wedge q(x_1, y_1, z_1)$
   (b) $\forall x_2,\ \neg p(x_2) \vee \neg w(x_2) \vee s(x_2)$
   (c) $\forall x_3,\ \neg d(x_3) \vee (w(x_3) \wedge \neg p(x_3))$
   (d) $\forall x_4 \forall y_4,\ \neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,y_4) \vee w(y_4)$
   (e) $\forall x_5 \forall y_5,\ \neg r(f(x_5), f(y_5)) \vee e(x_5,y_5)$
   (f) $\exists x_6,\ d(x_6) \wedge r(f(x_6), f(A))$
   (g) $\neg s(A)$
5. Skolémiser

(a) $p(A) \wedge q(B, y_1, g(y_1))$ (attention : nouvelle variable, nouvelle fonction)
(b) $\neg p(x_2) \vee \neg w(x_2) \vee s(x_2)$
(c) $\neg d(x_3) \vee (w(x_3) \wedge \neg p(x_3))$
(d) $\neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,y_4) \vee w(y_4)$
(e) $\neg r(f(x_5), f(y_5)) \vee e(x_5,y_5)$
(f) $d(C) \wedge r(f(C), f(A))$
(g) $\neg s(A)$

6. Distribuer les $\vee$ sur les $\wedge$ pour obtenir des clauses séparées par des conjonctions :
   (a) $p(A)$
   (b) $q(B, y_1, g(y_1))$
   (c) $\neg p(x_2) \vee \neg w(x_2) \vee s(x_2)$
   (d) $\neg d(x_3) \vee w(x_3)$
   (e) $\neg d(x_3) \vee \neg p(x_3))$
   (f) $\neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,y_4) \vee w(y_4)$
   (g) $\neg r(f(x_5), f(y_5)) \vee e(x_5,y_5)$
   (h) $d(C)$
   (i) $r(f(C), f(A))$
   (j) $\neg s(A)$

On applique à présent la résolution :

1. $p(A)$
2. $q(B, y_1, g(y_1))$
3. $\neg p(x_2) \vee \neg w(x_2) \vee s(x_2)$
4. $\neg d(x_3) \vee w(x_3)$
5. $\neg d(x_3) \vee \neg p(x_3))$
6. $\neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,y_4) \vee w(y_4)$
7. $\neg r(f(x_5), f(y_5)) \vee e(x_5,y_5)$
8. $d(C)$
9. $r(f(C), f(A))$
10. $\neg s(A)$
11. $\neg p(A) \vee \neg w(A)$ (10.+3. $\{x_3/A\}$)
12. $\neg p(A) \vee \neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,A)$ (11.+6. $\{y_4/A\}$)
13. $\neg d(x_4) \vee \neg e(x_4,A)$ (12.+1. $\{\}$)
14. $\neg e(C,A)$ (13.+8. $\{x_4/C\}$)
15. $\neg r(f(C), f(A))$ (14.+7. $\{x_5/C, y_5/A\}$)
16. $\perp$ (15.+9. $\{\}$)

Exercice 4

Peut-on déduire que “Certains êtres intelligents ne savent pas lire” à partir des faits suivants :

1. Quiconque sait lire est instruit
2. Les dauphins ne sont pas instruits
3. Certains dauphins sont intelligents

Solution: Commençons par traduire les phrases en logique des prédicats :

Vocabulaire :

- Prédicats :
  - ◇ lire(x) : x sait lire
  - ◇ instruit(x) : x est instruit
  - ◇ intelligent(x) : x est intelligent
  - ◇ dauphin(x) : x est un dauphin
- Ni constante, ni fonction

1. Quiconque sait lire est instruit
   $\forall x \; lire(x) \Rightarrow instruit(x)$
2. Les dauphins ne sont pas instruits
   $\forall y \; dauphin(y) \Rightarrow \neg instruit(y)$
3. Certains dauphins sont intelligents
   $\exists t \; dauphin(t) \wedge intelligent(t)$
4. Certains êtres intelligents ne savent pas lire
   $\exists u \; intelligent(u) \wedge \neg lire(u)$

Base de connaissances sous FNC et skolémisée, et appliquons la résolution :

1. $\neg lire(x) \vee instruit(x)$
2. $\neg dauphin(y) \vee \neg instruit(y)$
3. $dauphin(M)$
4. $intelligent(M)$
5. $\neg intelligent(u) \vee lire(u)$

6. $\neg instruit(M)$ (2.+3., $\{y/M\}$)
7. $lire(M)$ (4.+5., $\{u/M\}$)
8. $instruit(M)$ (1.+7., $\{x/M\}$)
9. $\perp$ (6.+8., $\{\}$)

Exercice 5

Peut-on déduire que “Harry est plus rapide que Ralph” à partir des faits suivants :

1. Les chevaux sont plus rapides que les chiens
2. Il existe un levrier plus rapide que tous les lapins
3. Les levriers sont des chiens
4. Harry est un cheval
5. Ralph est un lapin
6. La relation “plus rapide que” est transitive

Solution: Commençons par traduire les phrases en logique des prédicats :
Vocabulaire :

- Prédicats :
  - cheval(x) : x est un cheval
  - chien(x) : x est un chien
  - plusrapide(x,y) : x est plus rapide que y
  - levrier(x) : x est un levrier
  - lapin(x) : x est un lapin
- Constantes : Ralph, Harry
- Pas de fonction

1. Les chevaux sont plus rapides que les chiens
   $\forall x, \forall y \; cheval(x) \wedge chien(y) \Rightarrow plusrapide(x,y)$
2. Il existe un levrier plus rapide que tous les lapins
   $\exists t \; levrier(t) \wedge (\forall z \; lapin(z) \Rightarrow plusrapide(t,z))$
3. Les levriers sont des chiens
   $\forall u \; levrier(u) \Rightarrow chien(u)$
4. Harry est un cheval
   $cheval(Harry)$
5. Ralph est un lapin
   $lapin(Ralph)$
6. La relation “plus rapide que” est transitive
   $\forall a,b,c \; plusrapide(a,b) \wedge plusrapide(b,c) \Rightarrow plusrapide(a,c)$
7. Non (Harry est plus rapide que Ralph)
   $\neg plusrapide(Harry,Ralph)$

Base de connaissances sous FNC et skolémisée, et appliquons la résolution :

1. $\neg cheval(x) \vee \neg chien(y) \vee plusrapide(x,y)$
2. $levrier(N)$
3. $\neg lapin(z) \vee plusrapide(N,z)$

4. $\neg levrier(u) \lor chien(u)$
5. $cheval(Harry)$
6. $lapin(Ralph)$
7. $\neg plusrapide(a{,}b) \lor \neg plusrapide(b{,}c) \lor plusrapide(a{,}c)$
8. $\neg plusrapide(Harry{,}Ralph)$

9. $\neg chien(y) \lor plusrapide(Harry{,}y)$ (1.+5., $\{x/Harry\}$)
10. $plusrapide(N{,}Ralph)$ (3.+6., $\{z/Ralph\}$)
11. $chien(N)$ (2.+4., $\{u/N\}$)
12. $plusrapide(Harry{,}N)$ (9.+11., $\{y/N\}$)
13. $\neg plusrapide(Harry{,}b) \lor \neg plusrapide(b{,}Ralph)$ (7.+8., $\{a/Harry, c/Ralph\}$)
14. $\neg plusrapide(Harry{,}N)$ (13.+10., $\{b/N\}$)
15. $\perp$ (14.+12. $\{\}$)