Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, Mathématiques et Calcul 2
Fiche de TD n° 4 : Séries

Exercice 1. Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{2^n+n}{n2^n}$
3. $u_n = \dfrac{n^2+1}{(\ln\, n)^2\sqrt{n^6+2n+3}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \sin^2\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$
6. $u_n = \dfrac{\arctan\, n}{n^2+\cos^2 n+1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n(\ln\, n)}$
8. $u_n = \dfrac{\text{ch}\; n}{\text{ch}\; 2n}$
9. $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$
10. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
11. $u_n = \left(\dfrac{5n+7}{2n+1}\right)^n$
12. $u_n = \left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n$

Exercice 2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3-n+2}{n!}$
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+2}{(n-1)!}$

Exercice 3. Montrer que les séries de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature (bien que $u_n \sim v_n$).

Exercice 4. Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$
3. $u_n = (-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$
4. $u_n = \begin{cases} (-1)^k\dfrac{2}{5^k} & \text{si } \; n=2k \\ (-1)^{k+1}\dfrac{4}{5^{k+1}} & \text{si } \; n=2k+1 \end{cases}$
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$
6. $u_n = \dfrac{\cos\, n}{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin^3 n}{\sqrt{n+2}}$
8. $u_n = \dfrac{(\cos\, n)^3(n+1)}{n^3}$

Exercice 5. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{2^n}, \quad \theta\in\mathbb{R}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+n^2}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2r^n \quad \text{avec} \quad |r|<1$

Exercice 6. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui tend vers zéro et a, b, c trois réels tels que $a+b+c=0$. On pose $v_n = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}$. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 7. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
2. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Exercice 8.

1. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par
$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$
Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
2. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée par
$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$
Montrer que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On pourra chercher à exprimer u_n en fonction de v_n.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (-1)^n a_n$ et $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$.
En déduire la nature de la suite $(\ln(a_n))$ puis celle de la suite (a_n).
3. Préciser alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$.

Exercice 10. On pose pour tout $n \geq 0$
$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante.
2. Grace à une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
3. Montrer par récurrence que $u_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.
4. En revenant à la définition de u_n, montrer que
$$\frac{1}{e(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de $\sum \frac{u_n}{n}$? de $\sum(-1)^n u_n$?