Traitement Numérique des Données
M1 – INF 2163
AIDN: Applications Interactives et Données Numériques

Exercices illustratifs : Échantillonnage, séries de Fourier, Transformée de Fourier discrète

Sylvie Gibet

1

1

Exemple 1

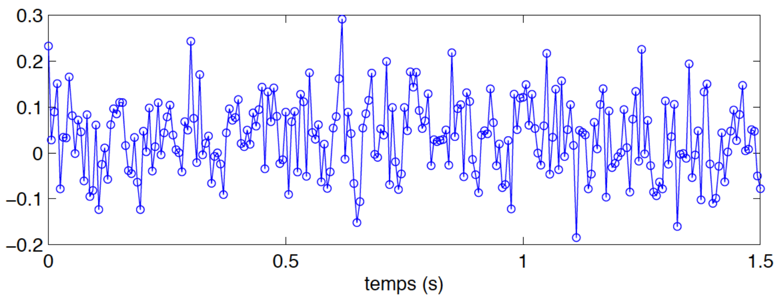
- Supposons qu'on veuille caractériser les sons enregistrés dans l'océan.
- On place un microphone dans l'eau pour enregistrer les sons, puis on amplifie le signal.
- On utilise un filtre passe-bas pour couper les sons au-dessus de 80Hz.
- On échantillonne à 160Hz.
- On procède ensuite à l'analyse du spectre.

2

2

Exemple 1

- On observe le signal en fonction du temps pour voir si on peut déduire de l'information.

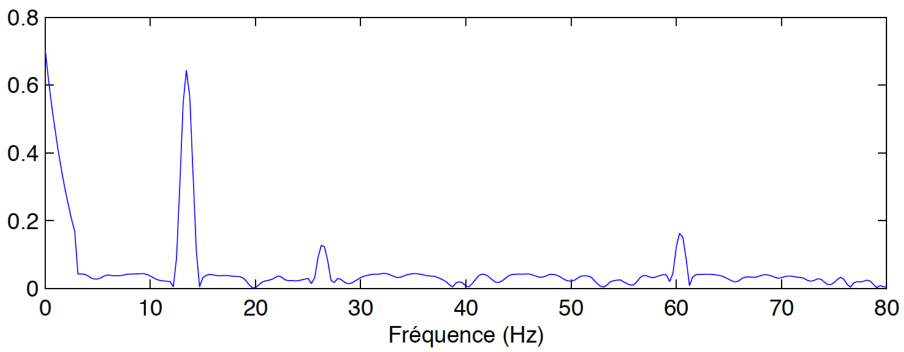


3

3

Exemple 1

Si l'on observe le spectre :



4

4

Exemple 1

Analyse du contenu spectral

- Si on ignore les pics, on voit qu'entre 10Hz et 70Hz le spectre est constant ; c'est le bruit blanc gaussien.
- Le bruit blanc gaussien est appelé ainsi parce qu'il est constant sur toutes les fréquences.
- Le bruit blanc est causé par plusieurs choses : ici, ca peut être le microphone, ou même l'océan.

5

5

Exemple 1

Analyse du contenu spectral (suite)

- Pour les fréquences très faibles, on remarque que le bruit augmente très rapidement, avec une forme qui ressemble a 1/ f : c'est le bruit rose (flicker noise).
- Ce type de bruit apparaît dans pratiquement tous les systèmes physiques, que ce soit électrique, mécanique, etc. Aucune théorie ne permet d'expliquer tous les cas où se trouve ce type de bruit.
- Pour les systèmes électriques courants, c’est généralement en-dessous de 100Hz qu’on retrouve ce type de bruit.

6

6

Exemple 1

Analyse du contenu spectral (suite) : les pics

- Il y a un pic important à 13Hz, et un pic plus faible à 26Hz, qui est probablement une harmonique de celui de 13Hz.
- Ce signal pourrait être causé par les pâles triples d'un sous-marin qui tournent à 4.33 tours/seconde.
- Cette technique est la base du sonar passif.

7

7

Exemple 2

Obtention du spectre à partir des échantillons d'un signal

- Pour obtenir le spectre d'un signal à l'aide de la TFD, il suffit d'appliquer l'équation de la TFD aux échantillons.
- Soit le signal :

$$x(t) = 0.5\cos(2\pi 44t) + 0.4\sin(2\pi 232t) + 0.5\cos(2\pi 415t)$$

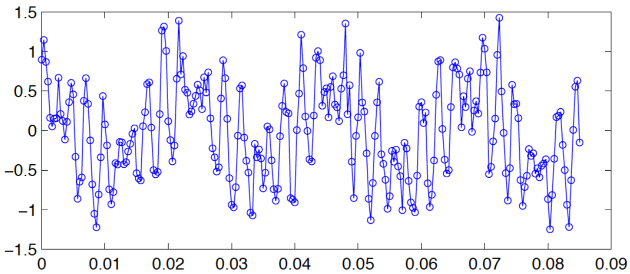
- On va ajouter du bruit blanc gaussien à ce signal
- Le signal est échantillonné à 3kHz, et on utilise 256 échantillons.

8

8

Exemple 2

Le signal est le suivant :



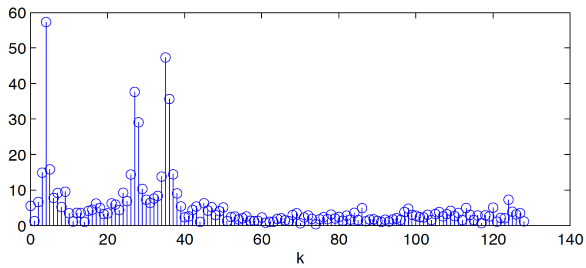
N = 256 ; Fs = 3000
t = np.linspace(0,(N-1)/Fs, N)
x = 0.5*cos(2*pi*t*44)+0.4*sin(2*pi*t*322)+0.5*cos(2*pi*t*415)

9

9

Exemple 2

A l'aide de la TFD, on obtient le spectre suivant :



X = fft(x)

10

10

Exemple 2

Quelques remarques sur la figure précédente :

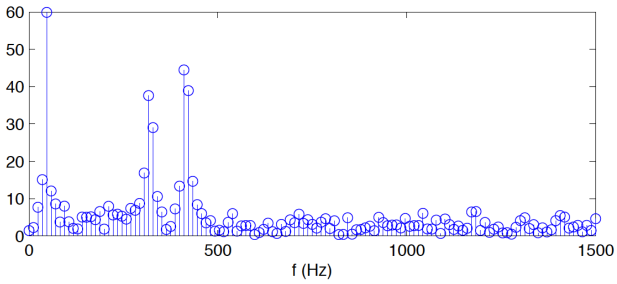
- L'abscisse est en fonction de k, et pas en fonction de la fréquence.
- Il faut transformer l'abscisse de sorte qu'elle soit en fonction de la fréquence d'échantillonnage, si on veut que le graphe ait du sens
- Les points de 0 a 128 doivent varier de 0 a 1500Hz (d'après le théorème de Shannon Nyquist).

11

11

Exemple 2

En fonction de la fréquence :



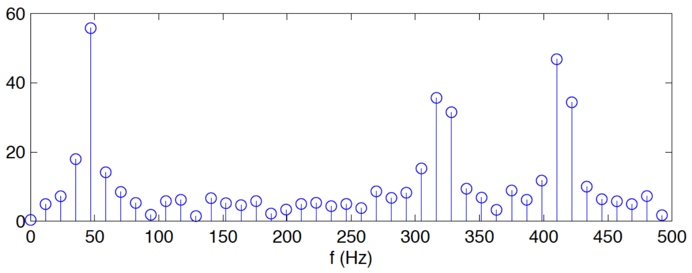

```
f = np.linspace(0,Fs/2,N/2)
plt.stem(f[0:128],abs(X[0:128]))
```

12

12

Exemple 2

Comme il y a peu d'information utile après 500Hz, on fait un zoom sur cette partie du spectre à l'aide de la commande *xlim*.



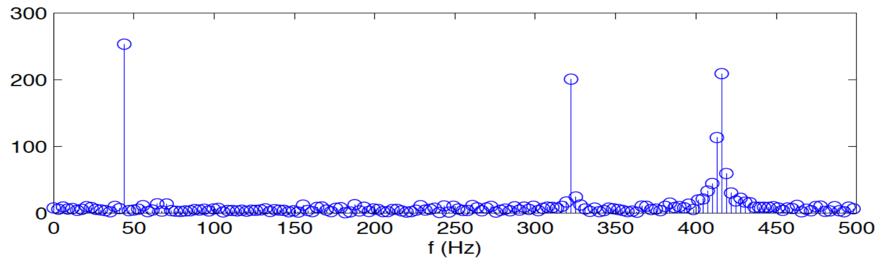
Cependant, la résolution spectrale (Fs/N) est de 11.72Hz, ce qui ne permet pas de bien déterminer les fréquences. Il faudrait utiliser plus de points.

13

13

Exemple 2

Avec 1024 points, la résolution est bien meilleure.



Cependant, plus on a de points, plus le temps de calcul est élevé.

14

14

Fenêtre de Hamming

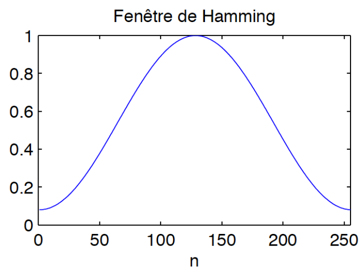
- Une façon d'améliorer les pics sans utiliser plus de points est de multiplier le signal en fonction du temps par une composante appelée fenêtre de *Hamming*.
- La fenêtre de *Hamming* va atténuer les bouts du signal. En terme de spectre, la fenêtre de *Hamming* va rendre les pics plus grands par rapport au bruit, mais ça va aussi les élargir.
- Il existe plusieurs autres fenêtres.

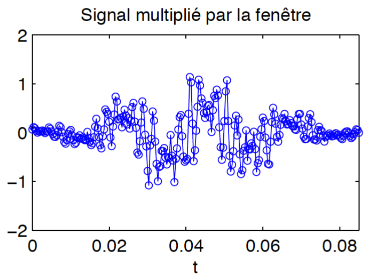
15

15

Fenêtre de Hamming

- Effet de la fenêtre de *Hamming* :





- Définie sur la fenêtre [0,T] par :

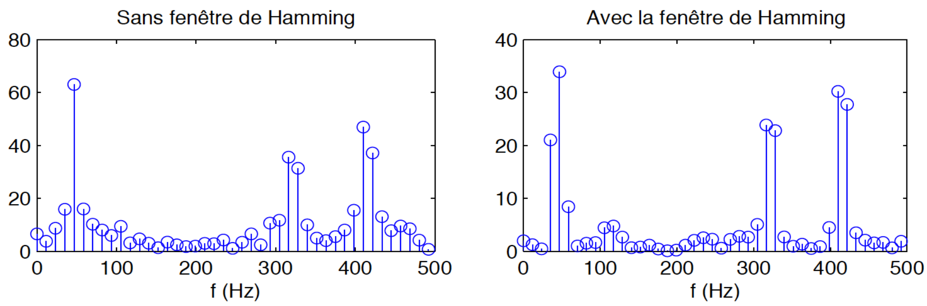
$w(t) = 0.54 – 0.4 \cos(2\pi/T \,.\, t)$

16

16

Fenêtre de Hamming

- Effet de la fenêtre de *Hamming* sur le spectre



17

17

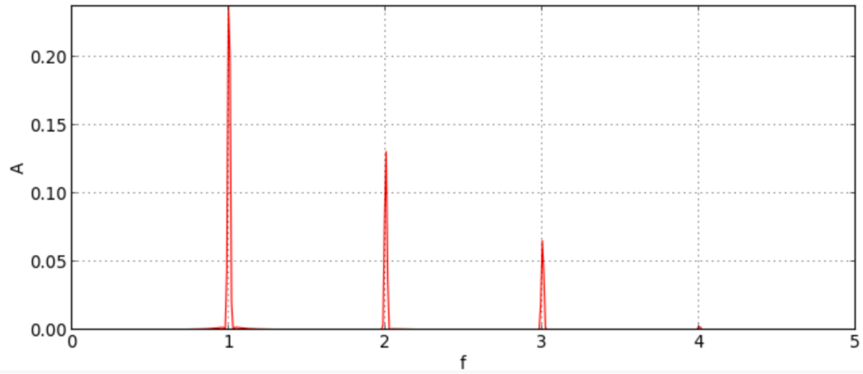
Application d'une fenêtre de Hamming

```
hamming = signal.hamming(N)
figure(figsize=(8,4))
plot(hamming)
xlabel('k')
ylabel('A')
grid()
echantillons = echantillons*hamming
spectre = np.abs(fft(echantillons))/N
figure(figsize=(10,4))
plot(freq,spectre,'r')
xlabel('f')
ylabel('A')
axis([0,fe/2,0,spectre.max()])
grid()
```

18

18

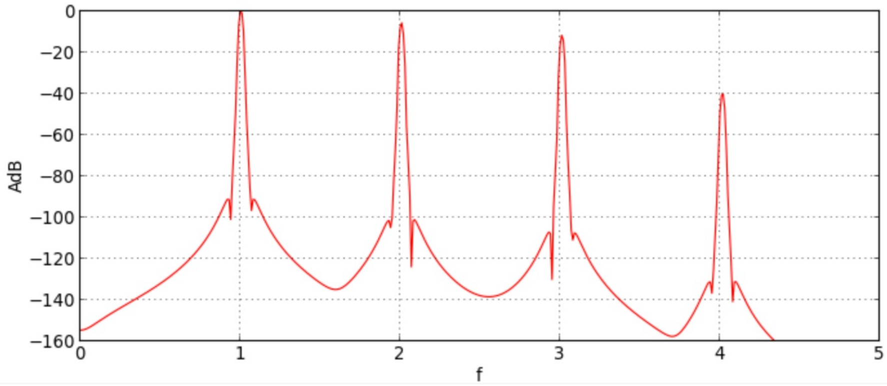
TFD du signal avec fenêtre de Hamming



19

19

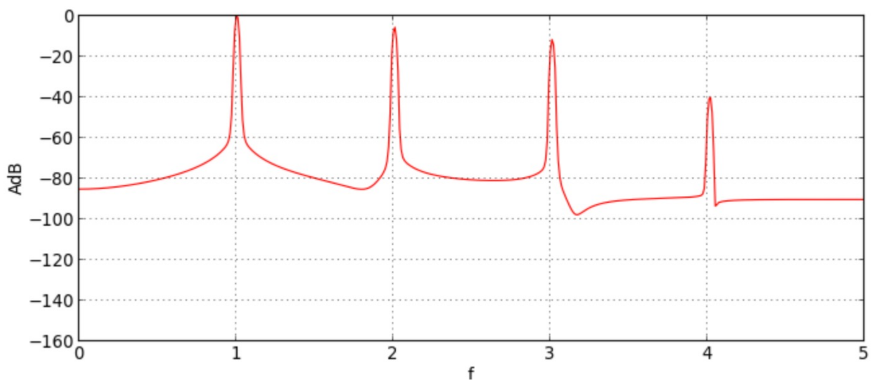
TFD du signal avec fenêtre de Hamming (en dB)



20

20

TFD du signal avec fenêtre de Hanning (en dB)



21

21

Exercices à chercher à la maison

22

22

Théorème de Nyquist/Shannon

- A quelle fréquence doit on échantillonner les signaux suivants ?

s1(t) =

$$0.5 + 0.5.\cos(1600.\pi.t) + \sin(1200.\pi.t) - 2.\cos(400.\pi.t)$$

s2(t) =

$$2.\cos(20.\pi.t)+\sin(50.\pi.t)-5.\cos(100.\pi.t)$$

23

Périodicité, séries de Fourier

- Les fonctions suivantes sont-elle périodiques, et si oui, quelle est la période ?

$$\cos(t) - \sin(2.t)$$

$$5.\cos(3t) - 2.\sin(6.t)$$

$$\cos(t) + \cos(\pi.t)$$

24

Séries de Fourier

- Les signaux suivants sont-ils décomposables en série de Fourier ? Quelles sont les conditions à respecter ?

$$0.5 + 0.5.\cos(1600.\pi.t) + \sin(1200.\pi.t) - 2.\cos(400.\pi.t)$$

$$2.\cos(20.\pi.t)+\sin(50.\pi.t)-5.\cos(100.\pi.t)$$

25

Séries de Fourier

- Donnez les coefficients de Fourier des signaux suivants :

$$0.5 + 0.5.\cos(1600.\pi.t) + \sin(1200.\pi.t) - 2.\cos(400.\pi.t)$$

$$2.\sin(40.\pi.t)+\sin(100.\pi.t)-5.\cos(140.\pi.t)$$

$$\cos(t) - \sin(2.t)$$

$$5.\cos(3t) - 2.\sin(6.t)$$

$$(1) \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

26

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

- X = fft(x)
- Exemple de signal sinusoïdal : f0 = 200 Hz, fs = 600 Hz, fs/2 = 300 Hz

Tracez la partie réelle de la transformée de Fourier de ce signal, avec un axe fréquentiel des abcisses f (de 0 à fs en Hz).

27

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

- X = fft(x)
- Soit le signal sinusoïdal suivant : f0 = 200 Hz, fs = 300 Hz, fs/2 = 150 Hz

Une raie à 100 Hz apparaît, pourquoi ?

28

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

Autre exemple de signal temporel composé d'une combinaison linéaire des 3 fréquences : : f0 = 20 Hz, f1 = 60 Hz, f2 = 90 Hz, fs = 400
s = genSin(N,f0,fe)+0.7*genSin(N,f1,fe) + genSin(N,f2,fe)
Tracez le signal temporel avec N = 256

29

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

f0 = 20 Hz, f1 = 60 Hz, f2 = 90 Hz, fs = 400
Tracez le spectre du signal précédent (axe fréquentiel de 0 à fs)

30

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

f0 = 20 Hz, f1 = 60 Hz, f2 = 90 Hz, fs = 400
Tracez le spectre du signal précédent (axe fréquentiel de 0 à fs/2)

31

Transformée de Fourier – représentation du spectre en fréquence

Autre exemple : f0 = 20 Hz, f1 = 60 Hz, f2 = 90 Hz, fs = 140
Entre 0 et fs : quelles sont les fréquences qui apparaissent dans le spectre ?
Vous tracerez ce spectre de 0 à 140 Hz.
Expliquez ce que vous observez.

32