Intelligence artificielle

Inférence en logique du premier ordre

Elise Bonzon

elise.bonzon@u-paris.fr

LIPADE - Université Paris Cité
http://www.math-info.univ-paris5.fr/∽bonzon/

Inférence en logique du premier ordre

Réduction de l’inférence du premier ordre à l’inférence propositionnelle

Terme fermé ; Substitution

- Terme fermé : Terme qui ne contient pas de variable
- Substitution :
    - Paire Variable/Terme
    - Soit E un énoncé, σ un ensemble de substitutions. $E\sigma$ (ou $Subst(E, \sigma)$) représente le résultat de la substitution σ dans E
    - Exemple :
        - $E = femme(x, y)$
        - $\sigma = \{x/Hilary,\ y/Bill\}$
        - $E\sigma = femme(Hilary, Bill)$

Instanciation universelle

- Instanciation universelle (UI) : Chaque instanciation d'un énoncé universellement quantifié peut être inféré :

$$\frac{\forall v,\ \alpha}{Subst(\{v/g\}, \alpha)}$$

pour toute variable v et pour tout terme fermé g

Instanciation universelle

- Instanciation universelle (UI) : Chaque instanciation d'un énoncé universellement quantifié peut être inféré :

$$\frac{\forall v,\ \alpha}{Subst(\{v/g\}, \alpha)}$$

pour toute variable v et pour tout terme fermé g

- Par exemple, dans le langage $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ suivant :
  - $\mathcal{F} = \{pere/1, Jean/0, Richard/0\}$
  - $\mathcal{R} = \{roi/1, cupide/1, mechant/1\}$

  La phrase $\forall x\ roi(x) \land cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$ peut être instanciée en :
  - $roi(Jean) \land cupide(Jean) \Rightarrow mechant(Jean)$
  - $roi(Richard) \land cupide(Richard) \Rightarrow mechant(Richard)$
  - $roi(pere(Jean)) \land cupide(pere(Jean)) \Rightarrow mechant(pere(Jean))$
  - $\ldots$

Instanciation existentielle

- Instanciation existentielle (EI) : Pour tout énoncé α, pour toute variable v et pour un symbole de constante K qui n'apparaît pas dans la base de connaissances, on a :

$$\frac{\exists v,\ \alpha}{Subst(\{v/K\}, \alpha)}$$

Instanciation existentielle

- Instanciation existentielle (EI) : Pour tout énoncé α, pour toute variable v et pour un symbole de constante K qui n'apparaît pas dans la base de connaissances, on a :

$$\frac{\exists v,\ \alpha}{\mathit{Subst}(\{v/K\}, \alpha)}$$

- Par exemple, dans le langage $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ suivant :
  - $\mathcal{F} = \{\mathit{pere}/1, \mathit{Jean}/0, \mathit{Richard}/0\}$
  - $\mathcal{R} = \{\mathit{couronne}/1, \mathit{surTete}/2\}$

  La phrase $\exists x\ \mathit{couronne}(x) \wedge \mathit{surTete}(x, \mathit{Jean})$ peut être instanciée en :
  - $\mathit{couronne}(C_1) \wedge \mathit{surTete}(C_1, \mathit{Jean})$
  - C_1 est un nouveau symbole de constante, appelé constante de Skolem

Instanciation existentielle

- Instanciation existentielle (EI) : Pour tout énoncé α, pour toute variable v et pour un symbole de constante K qui n'apparaît pas dans la base de connaissances, on a :

$$\frac{\exists v,\ \alpha}{Subst(\{v/K\}, \alpha)}$$

- Par exemple, dans le langage $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ suivant :
  - $\mathcal{F} = \{pere/1, Jean/0, Richard/0\}$
  - $\mathcal{R} = \{couronne/1, surTete/2\}$

  La phrase $\exists x\ couronne(x) \land surTete(x, Jean)$ peut être instanciée en :
  - $couronne(C_1) \land surTete(C_1, Jean)$
  - C_1 est un nouveau symbole de constante, appelé constante de Skolem
- Cas particulier de la skolémisation

Réduction à l'inférence propositionnelle

- Base de connaissances :
  - $\forall x \; roi(x) \land cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$
  - $\exists x \; couronne(x) \land surTete(x, Jean)$
  - $roi(Jean)$
  - $cupide(Jean)$
  - $frere(Richard, Jean)$
- Instanciation universelle : **toutes** les substitutions possibles :
  - $roi(Jean) \land cupide(Jean) \Rightarrow mechant(Jean)$
  - $roi(Richard) \land cupide(Richard) \Rightarrow mechant(Richard)$
  - $couronne(C_1) \land surTete(C_1, Jean)$
  - $roi(Jean)$
  - $cupide(Jean)$
  - $frere(Richard, Jean)$
- La nouvelle BC est propositionnalisée

Réduction à l'inférence propositionnelle

- Toute base de connaissances en logique du 1er ordre peut être propositionnalisée de manière à préserver la relation de conséquence
  - $\rightarrow$ un énoncé est déduit de la nouvelle base de connaissances si et seulement si il peut être déduit de la base de connaissances originale
- Idée : propositionnaliser la BC et la requête, appliquer la résolution, retourner un résultat
- Problème : Avec les symboles de fonction, l'ensemble des substitutions possibles des termes fermé est infini
  - $pere(pere(pere(Jean)))$

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

- Idée :
  - instancier d'abord avec toutes les constantes (*Richard*, *Jean*) ;
  - puis les termes de profondeur 1 (*pere*(*Richard*), *pere*(*Jean*))
  - puis les termes de profondeur 2, ...

  $\rightarrow$ obtenir l'énoncé conséquence

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Herbrandt (1930)

Si un énoncé est conséquence de la BC de premier ordre d'origine, alors il existe une preuve qui ne fait appel qu'à un sous ensemble **fini** de la BC propositionnalisée.

- Idée :
  - instancier d'abord avec toutes les constantes ($Richard$, $Jean$) ;
  - puis les termes de profondeur 1 ($pere(Richard)$, $pere(Jean)$)
  - puis les termes de profondeur 2, ...

  $\rightarrow$ obtenir l'énoncé conséquence
- Problème : fonctionne si l'énoncé est conséquence, mais **boucle si l'énoncé n'est pas conséquence**

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Turing et Church (1936)

En logique du premier ordre, la question de la conséquence logique est semi-décidable

Réduction à l'inférence propositionnelle

Théorème de Turing et Church (1936)

En logique du premier ordre, la question de la conséquence logique est semi-décidable

$\Rightarrow$ Il existe des algorithmes qui disent "oui" à tout énoncé conséquence, mais il n'en existe pas qui disent "non" à tout énoncé non-conséquence.

Problèmes de la propositionnalisation

- La propositionnalisation peut générer beaucoup d'énoncés inutiles
- Exemple :
  - $\forall x \; roi(x) \wedge cupide(x) \Rightarrow mechant(x)$
  - $roi(Jean)$
  - $\forall y, cupide(y)$
  - $frere(Richard, Jean)$

  → On déduit $mechant(Jean)$, mais également beaucoup d'énoncés comme $cupide(Richard)$ qui sont non pertinents
- Avec p prédicats k-aires et n constantes, il y a $p.n^k$ instanciations

Unification

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(y)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(Jean)$

  $\rightarrow \ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(y)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(Jean)$

  $\rightarrow \ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$
- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow\ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$
- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	échec

Unification

- On pourrait obtenir l'inférence immédiatement si l'on pouvait trouver une substitution θ telle que $roi(x)$ et $cupide(x)$ correspondent à $roi(Jean)$ et $cupide(y)$

  $\rightarrow \ \theta = \{x/Jean,\ y/Jean\}$

- Unify$(\alpha, \beta) = \theta$ si $\alpha\theta = \beta\theta$

p	q	θ
$connait(Jean, x)$	$connait(Jean, Jeanne)$	$\{x/Jeanne\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, Bill)$	$\{x/Bill,\ y/Jean\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(y, mere(y))$	$\{y/Jean,\ x/mere(Jean)\}$
$connait(Jean, x)$	$connait(x, Bill)$	échec

- Normalisation séparée : renommer les variables de façon à empêcher toute interférence de nom

  $\rightarrow \ connait(z_{12}, Bill)$

Unification

- Il peut y avoir plusieurs unificateurs :
  - $connait(Jean, x)$ et $connait(y, z)$

  $\rightarrow\ \theta = \{y/Jean,\ x/z\}$

  $\rightarrow\ \theta = \{y/Jean,\ x/Jean,\ z/Jean\}$
- Le premier unificateur est **plus général** que le second
- Il existe un seul unificateur plus général (MGU, Most General Unifier) qui est unique, au renommage des variables près

  $\rightarrow$ MGU $= \theta = \{y/Jean,\ x/z\}$

Skolemisation

Skolemisation

Skolémisation

Skolémisation : Suppression des quantificateurs d'une formule, afin d'appliquer une procédure d'inférence

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel
- Exemple :

$$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \land (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel
- Exemple :

$$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

x ne dépend d'aucune variable universellement quantifiée. Remplacée par une constante de Skolem, et on supprime le quantificateur.

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel
- Exemple :

$$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

x ne dépend d'aucune variable universellement quantifiée. Remplacée par une constante de Skolem, et on supprime le quantificateur. On obtient :

$$\forall y, z \exists t, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, t))$$

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel
- Exemple :

$$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \land (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

t **dépend** des variables y et z, universellement quantifiée et placées avant.

$$\forall y, z \exists t, p(A) \land (q(y, z) \Rightarrow r(A, t))$$

Skolemisation - Quantificateurs existentiels

Quantificateurs existentiels : 2 cas

- **Variables qui ne dépendent pas d'une variable universellement quantifiée** : constante de Skolem, qui n'appartient pas déjà à la base de connaissances
- **Variables qui dépendent de variable(s) universellement quantifiée(s)** : fonction de Skolem dont les arguments sont les variables universelles dans la portée du quantificateur universel
- Exemple :

$$\exists x \forall y, z \exists t, p(x) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(x, t))$$

t **dépend** des variables y et z, universellement quantifiées et placées avant. Remplacée par une fonction de Skolem, et on supprime le quantificateur. On obtient :

$$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

Skolemisation - Quantificateurs universels

Les quantificateurs universels sont **ensuite** simplement supprimés :

Skolemisation - Quantificateurs universels

Les quantificateurs universels sont **ensuite** simplement supprimés :

$$\forall y, z, p(A) \wedge (q(y,z) \Rightarrow r(A, f(y,z)))$$

devient

$$p(A) \wedge (q(y,z) \Rightarrow r(A, f(y,z)))$$

Skolemisation - Quantificateurs universels

Les quantificateurs universels sont **ensuite** simplement supprimés :

$$\forall y, z, p(A) \land (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

devient

$$p(A) \land (q(y, z) \Rightarrow r(A, f(y, z)))$$

La formule est skolémisée.

Modus Ponens généralisé

Modus Ponens généralisé

$$\frac{p_1', p_2', \ldots, p_n', (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)}{q\theta}$$

avec $\forall i,\ p_i'\theta = p_i\theta$

- Par exemple :

p_1' est $roi(Jean)$	p_1 est $roi(x)$
p_2' est $cupide(y)$	p_2 est $cupide(x)$
θ est $\{x/Jean,\ y/Jean\}$	q est $mechant(x)$
θq est $mechant(Jean)$	

- Le Modus Ponens généralisé est utilisé sur des bases de connaissances composées de clauses définies (exactement un littéral positif)
- Toutes les variables sont supposées universellement quantifiées (les formules sont **skolémisées**, les variables existentiellement quantifiées on été remplacées par des constantes ou des fonctions de Skolem)

Chaînage avant

Exemple de base de connaissance

Base de connaissance

La loi stipule que c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles. Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique, a des missiles, et tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West, qui est américain.

$\Rightarrow$ Prouvons que West est un criminel

Exemple de base de connaissance – Traduction

- “... c’est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles” :
- “Nono ...a des missiles” :
- “tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West” :
- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l’Amérique est considéré comme hostile :
- “West, qui est américain” :
- “Le pays Nono, un ennemi de l’Amérique” :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :
- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :
- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :
- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- “... c’est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles” :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- “Nono ...a des missiles” :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- “tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West” :
- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l’Amérique est considéré comme hostile :
- “West, qui est américain” :
- “Le pays Nono, un ennemi de l’Amérique” :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; \mathit{americain}(x) \land \mathit{arme}(y) \land \mathit{vend}(x, y, z) \land \mathit{hostile}(z) \Rightarrow \mathit{criminel}(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; \mathit{missile}(x) \land \mathit{possede}(\mathit{Nono}, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; \mathit{missile}(x) \land \mathit{possede}(\mathit{Nono}, x) \Rightarrow \mathit{vend}(\mathit{West}, x, \mathit{Nono})$$

- Les missiles sont des armes :
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :
- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; \mathit{americain}(x) \wedge \mathit{arme}(y) \wedge \mathit{vend}(x, y, z) \wedge \mathit{hostile}(z) \Rightarrow \mathit{criminel}(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; \mathit{missile}(x) \wedge \mathit{possede}(\mathit{Nono}, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; \mathit{missile}(x) \wedge \mathit{possede}(\mathit{Nono}, x) \Rightarrow \mathit{vend}(\mathit{West}, x, \mathit{Nono})$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; \mathit{missile}(x) \Rightarrow \mathit{arme}(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :
- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \land possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" :
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \ americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \ missile(x) \land possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \ missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \ missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \ ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" : $americain(West)$
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" :

Exemple de base de connaissance – Traduction

- "... c'est un crime pour un américain de vendre des armes à des nations hostiles" :

$$\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$$

- "Nono ...a des missiles" :

$$\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$$

- "tous ses missiles lui ont été vendus par le colonel West" :

$$\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$$

- Les missiles sont des armes : $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
- Un ennemi de l'Amérique est considéré comme hostile :

$$\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$$

- "West, qui est américain" : $americain(West)$
- "Le pays Nono, un ennemi de l'Amérique" : $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x \; missile(x) \land possede(Nono, x)$
3. $\forall x \; missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $\forall x \forall y \forall z \; americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x,y,z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $missile(M1)$
3. $possede(Nono, M1)$
4. $\forall x \ missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $\forall x \ missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $\forall x \ ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $missile(M1)$
3. $possede(Nono, M1)$
4. $\forall x \; missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $\forall x \; missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $\forall x \; ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Skolémisation

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $missile(M1)$
3. $possede(Nono, M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage avant

1. $americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage avant

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Tour 1 : $possede(Nono, M1)$, $missile(M1)$, $americain(West)$, $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage avant

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Tour 1 : $possede(Nono, M1)$, $missile(M1)$, $americain(West)$, $ennemi(Nono, Amerique)$
- Tour 2 :
    9. $vend(West, M1, Nono)$ (3., 2. avec 4. ; $\{x/M1\}$)
    10. $arme(M1)$ (3. avec 5. ; $\{x/M1\}$)
    11. $hostile(Nono)$ (8. avec 6. ; $\{x/Nono\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage avant

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Tour 1 : $possede(Nono, M1)$, $missile(M1)$, $americain(West)$, $ennemi(Nono, Amerique)$
- Tour 2 :
  9. $vend(West, M1, Nono)$ (3., 2. avec 4. ; $\{x/M1\}$)
  10. $arme(M1)$ (3. avec 5. ; $\{x/M1\}$)
  11. $hostile(Nono)$ (8. avec 6. ; $\{x/Nono\}$)
- Tour 3 :
  12. $criminel(West)$ (7., 10., 9., 11. avec 1. ; $\{x/West, y/M1, z/Nono\}$)

Propriétés du chaînage avant

- Valide et complet pour les bases de connaissances de clauses définies
- Datalog : base de connaissances de clauses définies **sans symboles de fonctions**
  - Le chaînage avant termine en un nombre fini d'itérations
- Peut ne pas terminer dans le cadre général si α n'est pas conséquence

  $\rightarrow$ Inévitable : la conséquence logique pour des clauses définies est semi-décidable
- Chaînage avant incrémental : pas besoin de tester une règle à l'itération k si l'un de ses prémisses n'a pas été ajouté à l'itération $k-1$

Chaînage arrière

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y\}$)
    - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y, y/M1\}$), $arme(M1)$ est prouvé
    - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y, y/M1\}$), $arme(M1)$ est prouvé
  - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)
- Pour prouver $vend(West, M1, z)$, $\rightarrow$ prouver $missile(M1)$ et $possede(z, M1)$ (4., $\{x/M1\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y, y/M1\}$), $arme(M1)$ est prouvé
  - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)
- Pour prouver $vend(West, M1, z)$, $\rightarrow$ prouver $missile(M1)$ et $possede(z, M1)$ (4., $\{x/M1\}$)
  - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \land arme(y) \land vend(x, y, z) \land hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \land possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y, y/M1\}$), $arme(M1)$ est prouvé
    - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)
- Pour prouver $vend(West, M1, z)$, $\rightarrow$ prouver $missile(M1)$ et $possede(z, M1)$ (4., $\{x/M1\}$)
    - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{\}$)
    - $possede(Nono, M1)$ est prouvé (2. ; $\{z/Nono\}$)

Exemple de base de connaissance – Preuve par chaînage arrière

1. $americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $possede(Nono, M1)$
3. $missile(M1)$
4. $missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
5. $missile(x) \Rightarrow arme(x)$
6. $ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

- Pour prouver $criminel(West)$, $\rightarrow$ prouver $americain(West)$, $arme(y)$, $vend(West, y, z)$, $hostile(z)$ (1., $\{x/West\}$)
- $americain(West)$ est prouvé (7., $\{\}$)
- Pour prouver $arme(y)$, $\rightarrow$ prouver $missile(y)$ (5., $\{x/y, y/M1\}$), $arme(M1)$ est prouvé
  - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{y/M1\}$)
- Pour prouver $vend(West, M1, z)$, $\rightarrow$ prouver $missile(M1)$ et $possede(z, M1)$ (4., $\{x/M1\}$)
  - $missile(M1)$ est prouvé (3. ; $\{\}$)
  - $possede(Nono, M1)$ est prouvé (2. ; $\{z/Nono\}$)
- Pour prouver $hostile(Nono)$, $\rightarrow$ prouver $ennemi(Nono, Amerique)$ (7., $\{x/Nono\}$)
  - $ennemi(Nono, Amerique)$ est prouvé (8. ; $\{\}$)

Propriétés du chaînage arrière

- Chaînage arrière en profondeur d'abord : la complexité spatiale est linéaire en la taille de la preuve
- Incomplet : boucles infinies
  - $\rightarrow$ Comparer le but actuel avec tous les buts empilés
- Inefficace : sous-buts redondants
  - $\rightarrow$ Mettre en cache les résultats précédents (espace supplémentaire)
- Utilisé pour la programmation logique

Résolution

Résolution

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \;\; m_1 \vee \ldots \vee m_n}{(l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots m_n)\theta}$$

avec Unify$(l_i, \neg m_j) = \theta$

- Les deux clauses sont supposées être normalisées séparément
  $\rightarrow$ ne partagent aucune variable
- Exemple :

$$\frac{(animal(x) \vee aimer(g(x), x)), \;\; (\neg aimer(u, v) \vee \neg tuer(u, v))}{animal(x) \vee \neg tuer(g(x), x)}$$

  avec $\theta = \{u/g(x), \;\; v/x\}$
- Résolution appliquée sur CNF$(BC \wedge \neg\alpha)$: complète pour la logique du 1er ordre

Conversion en CNF

"Toute personne qui aime tous les animaux est aimée par quelqu'un"

$$\forall x \ (\forall y \ animal(y) \Rightarrow aimer(x, y)) \Rightarrow (\exists y \ aimer(y, x))$$

Conversion en CNF

“Toute personne qui aime tous les animaux est aimée par quelqu’un”

$$\forall x\ (\forall y\ animal(y) \Rightarrow aimer(x,y)) \Rightarrow (\exists y\ aimer(y,x))$$

1. Elimination des implications :

$$\forall x\ \neg(\forall y\ \neg animal(y) \vee aimer(x,y)) \vee (\exists y\ aimer(y,x))$$

Conversion en CNF

"Toute personne qui aime tous les animaux est aimée par quelqu'un"

$$\forall x\ (\forall y\ animal(y) \Rightarrow aimer(x,y)) \Rightarrow (\exists y\ aimer(y,x))$$

1. Elimination des implications :

$$\forall x\ \neg(\forall y\ \neg animal(y) \vee aimer(x,y)) \vee (\exists y\ aimer(y,x))$$

2. Déplacement des $\neg$ vers l'intérieur :
   - $\neg\forall x\ p \equiv \exists x \neg p$
   - $\neg\exists x\ p \equiv \forall x \neg p$

$$\forall x\ (\exists y \neg(\neg animal(y) \vee aimer(x,y))) \vee (\exists y\ aimer(y,x))$$

$$\equiv \forall x\ (\exists y\ animal(y) \wedge \neg aimer(x,y)) \vee (\exists y\ aimer(y,x))$$

Conversion en CNF

3. Normalisation des variables : chaque quantificateur doit utiliser une variable différente

$$\forall x\ (\exists y\ animal(y) \wedge \neg aimer(x, y)) \vee (\exists z\ aimer(z, x))$$

Conversion en CNF

3. Normalisation des variables : chaque quantificateur doit utiliser une variable différente

$$\forall x\ (\exists y\ animal(y) \land \neg aimer(x,y)) \lor (\exists z\ aimer(z,x))$$

4. Skolémisation :

$$(animal(f(x)) \land \neg aimer(x, f(x))) \lor aimer(g(x), x)$$

Conversion en CNF

3. Normalisation des variables : chaque quantificateur doit utiliser une variable différente

$$\forall x \; (\exists y \; animal(y) \wedge \neg aimer(x, y)) \vee (\exists z \; aimer(z, x))$$

4. Skolémisation :

$$(animal(f(x)) \wedge \neg aimer(x, f(x))) \vee aimer(g(x), x)$$

5. Distribution de $\vee$ sur $\wedge$

$$(animal(f(x)) \vee aimer(g(x), x)) \wedge (\neg aimer(x, f(x)) \vee aimer(g(x), x))$$

Conversion en CNF

3. Normalisation des variables : chaque quantificateur doit utiliser une variable différente

$$\forall x\ (\exists y\ animal(y) \wedge \neg aimer(x,y)) \vee (\exists z\ aimer(z,x))$$

4. Skolémisation :

$$(animal(f(x)) \wedge \neg aimer(x,f(x))) \vee aimer(g(x),x)$$

5. Distribution de $\vee$ sur $\wedge$

$$(animal(f(x)) \vee aimer(g(x),x)) \wedge (\neg aimer(x,f(x)) \vee aimer(g(x),x))$$

Attention ! L'ordre d'application des règles doit être respecté !

Exemple

1. $\forall x \forall y \forall z\ americain(x) \wedge arme(y) \wedge vend(x, y, z) \wedge hostile(z) \Rightarrow criminel(x)$
2. $\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x) \Rightarrow vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x\ missile(x) \Rightarrow arme(x)$
5. $\forall x\ ennemi(x, Amerique) \Rightarrow hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple – suppression des implications

1. $\forall x \forall y \forall z\ \neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $\exists x\ missile(x) \wedge possede(Nono, x)$
3. $\forall x\ \neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\forall x\ \neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\forall x\ \neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple – Skolémisation

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A) \wedge possede(Nono, A)$
3. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
4. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
5. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
6. $americain(West)$
7. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple – Mise sous forme de clause

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(x, y, z) \lor \neg hostile(z) \lor criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \lor \neg possede(Nono, x) \lor vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \lor arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \lor hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(x, y, z) \lor \neg hostile(z) \lor criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \lor \neg possede(Nono, x) \lor vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \lor arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \lor hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(West, y, z) \lor \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \vee \neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \vee \neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \vee \neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)
14. $hostile(Nono)$ (6.+8. $\{x/Nono\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(x, y, z) \lor \neg hostile(z) \lor criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \lor \neg possede(Nono, x) \lor vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \lor arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \lor hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(West, y, z) \lor \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \lor \neg vend(West, A, z) \lor \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \lor \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)
14. $hostile(Nono)$ (6.+8. $\{x/Nono\}$)
15. $\neg vend(West, A, Nono)$ (13.+14. $\{z/Nono\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(x, y, z) \lor \neg hostile(z) \lor criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \lor \neg possede(Nono, x) \lor vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \lor arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \lor hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \lor \neg arme(y) \lor \neg vend(West, y, z) \lor \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \lor \neg vend(West, A, z) \lor \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \lor \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)
14. $hostile(Nono)$ (6.+8. $\{x/Nono\}$)
15. $\neg vend(West, A, Nono)$ (13.+14. $\{z/Nono\}$)
16. $\neg possede(Nono, A) \lor vend(West, A, Nono)$ (2.+4. $\{x/A\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \vee \neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)
14. $hostile(Nono)$ (6.+8. $\{x/Nono\}$)
15. $\neg vend(West, A, Nono)$ (13.+14. $\{z/Nono\}$)
16. $\neg possede(Nono, A) \vee vend(West, A, Nono)$ (2.+4. $\{x/A\}$)
17. $vend(West, A, Nono)$ (16.+3. $\{\}$)

Exemple – Résolution

1. $\neg americain(x) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(x, y, z) \vee \neg hostile(z) \vee criminel(x)$
2. $missile(A)$
3. $possede(Nono, A)$
4. $\neg missile(x) \vee \neg possede(Nono, x) \vee vend(West, x, Nono)$
5. $\neg missile(x) \vee arme(x)$
6. $\neg ennemi(x, Amerique) \vee hostile(x)$
7. $americain(West)$
8. $ennemi(Nono, Amerique)$
9. $\neg criminel(West)$ (négation de la conclusion)
10. $\neg americain(West) \vee \neg arme(y) \vee \neg vend(West, y, z) \vee \neg hostile(z)$ (9.+1. $\{x/West\}$)
11. $arme(A)$ (2.+5. $\{x/A\}$)
12. $\neg americain(West) \vee \neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (10.+11. $\{y/A\}$)
13. $\neg vend(West, A, z) \vee \neg hostile(z)$ (12.+7. $\{\}$)
14. $hostile(Nono)$ (6.+8. $\{x/Nono\}$)
15. $\neg vend(West, A, Nono)$ (13.+14. $\{z/Nono\}$)
16. $\neg possede(Nono, A) \vee vend(West, A, Nono)$ (2.+4. $\{x/A\}$)
17. $vend(West, A, Nono)$ (16.+3. $\{\}$)
18. $\perp$ (17.+15. $\{\}$)

Conclusion

Pour conclure

- Un **langage de représentation** est défini par sa **syntaxe** et sa **sémantique**
- Une **procédure d'inférence** permet de calculer de nouvelles expressions à partir d'expressions existantes
- Elle est **correcte** si elle permet de dériver des expressions vraies à partir de prémisses vraies
- Elle est **complète** si elle permet de dériver toutes les expressions vraies découlant d'un ensemble de prémisses
- La **logique des propositions** décrit des faits simples sur le monde
- La **logique des prédicats** permet d'exprimer des relations et de raisonner à leur propos

D'autres logiques ?

- La température du réacteur est élevée
  - $\Rightarrow$ Logique floue
- Les blondes ont souvent les yeux bleus
  - $\Rightarrow$ Raisonnement incertain (e.g. Raisonnement bayésien)
- En l'absence de raison de croire le contraire, on peut supposer que chaque adulte que l'on rencontre sait lire
  - $\Rightarrow$ Logique des défauts