Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°3 :
Suites (1ère partie)

Exercice 1. Ces suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Le c as échéant, préciser leur raison. Dans tous les cas, calculer leur terme général u_n.

$$a)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{\pi u_n}{\sqrt{17}} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad b)\begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n \\ u_0 = 0 \end{cases} \quad c)\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad d)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes :

1) (t_n) suite arithmétique de raison 10 telle que $t_{1000} = 0$.
2) (u_n) suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_{10} = 118$.
2) (v_n) suite géométrique réelle telle que $v_0 = 3$ et $v_5 = -96$.
3) (w_n) une suite géométrique de raison -2 telle que $w_5 = 320$.

Exercice 3. Soient (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

pour tout n, et dont les termes initiaux sont $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

On définit la suite à valeur complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$. Pour tout n, calculer z_{n+1} en fonction de z_n et en déduire les termes généraux de (x_n) et (y_n) ainsi que les limites de ces deux suites.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{2^k} \quad b)\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1} \quad c)\sum_{k=0}^{n} \frac{1+4^k}{3^k} \quad d)\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

Exercice 6. Les suites suivantes sont-elles majorées ? minorées ? croissantes ? décroissantes ? convergentes ?

$$a)\ u_n = (-3)^n + 3^n \quad b)\ u_n = \frac{n+1000}{n+2012} \quad c)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \quad d)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Exercice 7. On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 2y_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3y_n}{5} \end{cases} \text{, pour } n \in \mathbb{N}.$$

1) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = y_n - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (w_n) est géométrique, convergente et déterminer sa limite.
2) Montrer que la (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.
3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite que nous noterons L.
4) Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de L.

Exercice 8. Parmi les énoncés suivants, déterminer et prouver ceux qui sont vrais, donner un contre exemple pour les autres.

a) Toute suite non minorée tend vers $-\infty$.
b) Toutes suite bornée est convergente.
c) Toute suite convergente est bornée.
d) Si (u_n) tend vers $l > 0$, alors (u_n) est positive ou nulle à partir d'un certain rang.
e) Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
f) Si la suite $(|u_n|)$ converge alors la suite (u_n) converge aussi.
g) Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $(|u_n|)$ converge vers la même limite.
h) Si les suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite, alors $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.
i) Si la suite (u_n) converge, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
j) Si la suite (u_n) vérifie que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge.

Exercice 9. Soit a un réel et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et la récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 + \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.
2) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est nécessairement 1.
3) On suppose $a \in [0, 1]$. Montrer par récurrence que $u_n \leqslant 1$. En déduire que (u_n) est convergente.
4) On suppose $a > 1$. Montrer que (u_n) diverge.
5) On suppose $a < 0$. Calculer u_1. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 10. Parmi les énoncés suivants, déterminer ceux qui sont vrais et donner un contre exemple pour les autres.

1) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) converge vers l et (v_n) est décroissante, alors (v_n) converge vers l.
2) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) croissante, (v_n) décroissante alors (u_n) et (v_n) convergent.
3) Si $u_n \leqslant v_n$, (u_n) croissante, (v_n) décroissante, et $(u_n - v_n)$ tend vers 0, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
4) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.

Exercice 11. Dans chacun des cas qui suivent, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1) $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (Lemme de Cesaro).

On souhaite montrer le résultat suivant : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$ converge aussi vers L.

1) Dans cette question, on suppose que $L = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
1)a) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$.
1)b) Montrer que $\forall n > N$, $\quad \left|\dfrac{1}{n}(u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots + u_n)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
1)c) Montrer qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > P$, $\quad \left|\dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_N)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
1)d) En déduire que pour tout $n > \max(N, P)$, on a $|v_n| \leqslant \varepsilon$, et conclure que $\lim(v_n) = 0$.
2) On considère maintenant le cas où L est quelconque. Montrer que $\lim(v_n) = L$ (on pourra considérer une suite annexe définie par $u'_n = u_n - L$).
3) Déduire du lemme de Cesaro que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = L$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = L$.
4) Application : calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 13 (DM 3). Soit $a > 2$. Le but de cet exercice est de donner un sens à l'écriture

$$\phi = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{\cdots}}}.$$

Pour ce faire, on considère la suite (ϕ_n) définie par $\phi_0 = a$ et la récurrence $\phi_{n+1} = a - \frac{1}{\phi_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Écrire (sans simplifier) les termes ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, puis expliquer en quoi cette suite est liée à l'écriture de ϕ.
2) Montrer par récurrence que la suite (ϕ_n) est bien définie et vérifie $1 \leqslant \phi_n \leqslant a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Calculer, en fonction de a, les racines du polynôme $P = X^2 - aX + 1$, notées r_1 et r_2 (avec $r_1 \leqslant r_2$).
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \phi_{n+1} - \phi_n = \dfrac{-1}{\phi_n}(\phi_n - r_1)(\phi_n - r_2)$.
5) Montrer par récurrence que $\phi_n \geqslant r_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser, en le justifiant, que $a - r_2 = \frac{1}{r_2}$).
6) En déduire que la suite (ϕ_n) est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
7) Calculer $4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{\cdots}}}$.

Exercice 14 (DM 3). Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}.$$

1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
3) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (u_n) est décroissante.
4) Montrer de même que (v_n) est croissante.
5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, puis qu'elles ont la même limite (notée L).
6) Exprimer $u_{n+1}v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire l'expression explicite de L en fonction de a et b.
7) En déduire que $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (inégalité des 3 moyennes).