TD 1

Exercice 1.1

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & \cdots & & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & \end{array}$$

$$L = \begin{array}{c} 12 \\ 15 \\ 23 \\ 24 \\ \vdots \end{array} \qquad A = \begin{array}{l} 1,\ \{2,5\} \\ 2,\ \{1,3,4\} \\ 3,\ \{2,4,6\} \\ \vdots \end{array}$$

Exercice 1.2

1. La somme de la ligne et de la colonne correspondant à v vaut $d(v)$

2.

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \hline 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 3 & 0 & 0 & & & & & & \\ 4 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & \\ 5 & 0 & 1 & & & & & & \\ 6 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}$$

3. La somme de la ligne correspondant à v vaut $d(v)$
Tout colonne a une somme de 2

4. $$(\Pi\, {}^t\Pi)_{uv} = \sum_{e \in E} \Pi_{ue} ({}^t\Pi)_{ev}$$
$$= \sum_{e\in E} \Pi_{ue}\, \Pi_{ve}$$

Si $u \neq v$, $\Pi_{ue} \Pi_{ve} = \mathbb{1}_{\{e \text{ est une arête entre } u \text{ et } v\}}$

donc $$\sum_{e \in E} \Pi_{ue} \Pi_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{si une telle arête existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= A_{uv}$$

Si $u = v$, $\Pi_{ue} \Pi_{ue} = \mathbb{1}_{\{e \text{ est incidente à } u\}}$

donc $$\sum_{e \in E} \Pi_{ue} \Pi_{ue} = d(u) = D_{uu}$$

Comme $A_{uu} = 0$ et $D_{uv} = 0$ si $u \neq v$,

$$\Pi^t \Pi = A + D$$

Exercice 1.3 1. cf cours. On compte le nombre de paires (sommet, arête) incidentes (= le nombre de 1 dans la matrice Π ~~de~~ de l'exercice 2).

La somme par lignes (sommets) vaut $\sum_i d_i$
colonnes (arêtes) $2m$

donc $\sum d_i = 2m$

2. $$n \delta \leq \sum_i d_i \leq n \Delta$$

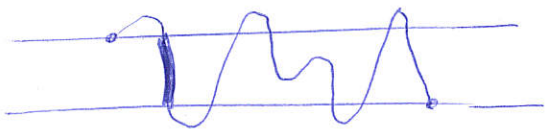
car $\forall i$, $\delta \leq d_i \leq \Delta$. Or $\sum_i d_i = 2m$ donc

$$\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$$

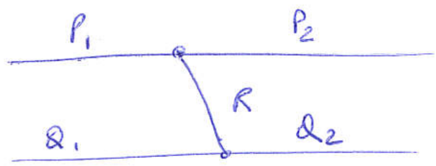
Exercice 1. 4

<u>G non orienté</u> : Supposons que G contient deux plus longs chemins disjoints P et Q.

G est connexe donc il existe un chemin R reliant P et Q



Quitte à prendre un sous-chemin de R (gras), on peut supposer que les extrémités de R sont ses seuls sommets dans P et Q



On découpe P et Q en $P_1 \cup P_2$ et $Q_1 \cup Q_2$ comme indiqué et on note ~~en minuscule~~ $\ell(p)$ la longueur d'un chemin.

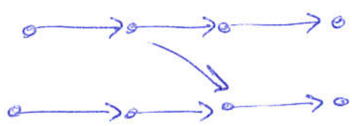
Alors $\ell(R) \geq 1$ et

$$\ell(P_1 \cup R \cup Q_2) + \ell(Q_1 \cup R \cup P_2) = \ell(P_1) + \ell(P_2) + \ell(Q_1) + \ell(Q_2) + 2\,\ell(R)$$

$$> \ell(P) + \ell(Q)$$

L'un des deux chemins $P_1 \cup R \cup Q_2$ et $P_2 \cup R \cup Q_1$ est donc plus long que les plus longs chemins. <u>Contradiction</u>.

<u>G orienté</u> la réponse est non pour un graphe faiblement connexe :



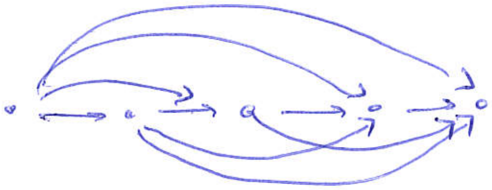
Exercice 1.5

En supposant que la relation d'amitié est symétrique, on peut encoder la situation avec un graphe dont les sommets sont les individus et les arêtes représentent les liens d'amitié.

Quitte à se restreindre à un sous-groupe (on peut choisir une composante connexe du graphe de départ), on suppose que le graphe est connexe.

Alors tout individu a au moins un voisin et au plus $n-1$ voisins. Comme il y a n individus, deux d'entre eux ont le même nombre de voisins.

Remarque : Dans le cas non-orienté (plus réaliste pour les sociologues), la seule configuration dans laquelle tous les degrés externes sont différents est la relation d'ordre total : on peut classer les individus tel que chacun se déclare ami avec l'ensemble de ceux qui le succède :

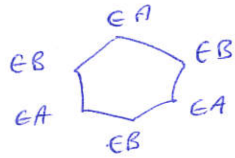


Peu probable en réalité !

Exercice 1.6

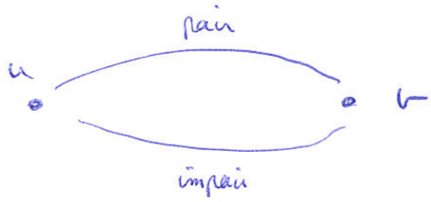
1. $m(A)\, m(B)$. $\quad d(G) = \dfrac{m}{m(A)\, m(B)}$

2. ~~le~~ Le long de tout cycle alternent les sommets de A et de B



Il est donc forcément pair.

3. ⓐ Supposons qu'il existe u et v reliés par deux chemins de parité différentes et disjoints en-dehors de leurs extrémités.

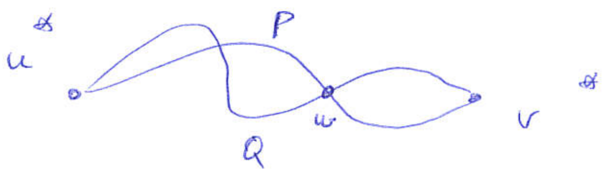


On crée alors un cycle impair.

ⓑ Supposons qu'il existe une ou plusieurs paires (u,v) reliés par des chemins de parité différente. Soit $\ell(u,v)$ la plus petite somme des longueurs de tels chemins entre u et v.

On considère le couple u^*, v^* tel que $\ell(u^*,v^*)$ est minimal. Il existe P impair et Q pair les reliants et tels que $\ell(P) + \ell(Q) = \ell(u^*,v^*)$.

D'après ⓐ, P et Q ont un sommet interne commun w



Soient P_1 et Q_1 les sous-chemins de P et Q entre u^* et w
P_2 - Q_2 ——————— w et v^*.

Comme $\ell(P)$ est impaire, $\ell(P_1)$ et $\ell(P_2)$ sont de parités différentes
Comme $\ell(Q)$ est pair, $\ell(Q_1)$ et $\ell(Q_2)$ sont de même parité

Donc $\ell(P_1)$ et $\ell(Q_1)$ sont de parités différentes
ou $\ell(P_2)$ et $\ell(Q_2)$ ———————

Supposons que c'est le cas pour $\ell(P_1)$ et $\ell(Q_1)$. Alors
$\ell(u^*, w) < \ell(u^*, v^*)$ → Contradiction.

De même pour $\ell(P_2)$ et $\ell(Q_2)$.

4. On fixe un sommet u quelconque.
D'après 3, $V(G) = A \cup B$

où $A = \{ v \mid \text{tous les chemins de } u \text{ à } v \text{ sont pairs} \}$

$B = \{ v \mid$ ——————— impairs $\}$

Ces ensembles sont trivialement disjoints. De plus, aucune arête ne peut être interne à A ou B puisqu'elle créerait des chemins de parité différente.

Exercice 1.7

1. $\underline{k=1}$ L'existence d'une marche de longueur 1 est équivalente à la présence de l'arête

<u>Supposons la propriété vraie pour k</u>

$$(\Pi^{k+1})_{u,v} = \sum_{w \in V(G)} (\Pi^k)_{u,w} \Pi_{w,v}$$

$$= \sum_{w \text{ voisin de } v} (\Pi^k)_{u,w}$$

Or, à chaque marche de longueur $k+1$ entre u et v correspond une marche de longueur k entre u et un voisin de w et inversement : la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \text{marches de longueur } k+1 \\ \text{entre } u \text{ et } v \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{marches longueur } k \\ \text{entre } u \text{ et } N(v) \end{array} \right\}$$

$$m \longmapsto k \text{ premiers pas de } m$$

est une bijection. La propriété est donc encore vraie par récurrence pour $k+1$.

2. I et Π commutent donc

$$(I+\Pi)^k = \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} \Pi^{k'} I^{k-k'}$$

$$= \sum_{k'=0}^{k} \binom{k}{k'} \Pi^{k'}$$

Tous les coefficients dans cette somme étant positifs, $((I+\Pi)^k)_{u,v} > 0$ si et seulement l'un des $(\Pi^{k'})_{u,v}$ est >0.

3. Supposons qu'il existe une marche entre u et v.

Soit P la marche la plus courte. Si un sommet x se répète dans P :

$$P = \underbrace{u \dots x}_{P_1} \underbrace{\dots x}_{P_2} \underbrace{\dots v}_{P_3}$$

la marche $P_1 \cup P_3$ est encore une marche entre u et v, de longueur inférieure $\Rightarrow$ contradiction.

Par conséquent, P est un chemin

4. G est connexe $\Leftrightarrow$ $\forall (u,v)$, il existe un chemin entre u et v

$\Leftrightarrow$ $\forall (u,v)$, —— une marche —— (Q3)

$\Leftrightarrow$ $\forall (u,v)$, $\exists k' \leq n$ tq $(M^{k'})_{u,v} > 0$ (Q1)

$\Leftrightarrow$ $\forall (u,v)$, $((I+M)^n)_{u,v} > 0$ (Q2)

5. Un produit de matrice est quadratique et il faut en faire n

$\Rightarrow$ algorithme cubique

$\Rightarrow$ bien moins efficace que BFS ou DFS, ne pas se fatiguer à l'implémenter !