

## **Numération Logique**

**Licence 1<sup>ère</sup> année**

**année 2019 - 2020**

**Recueil  
de  
documents de travail**

**Pr. Nicole VINCENT**



## Table des matières

<b>cours n° 1.....</b>	<b>5</b>
<b>TD1 .....</b>	<b>6</b>
<b>cours n° 2.....</b>	<b>8</b>
<b>TD2 .....</b>	<b>9</b>
<b>cours n° 3.....</b>	<b>10</b>
<b>TD3 .....</b>	<b>11</b>
<b>cours n° 4.....</b>	<b>12</b>
<b>TD4 .....</b>	<b>13</b>
<b>cours n° 5.....</b>	<b>14</b>
<b>TD5 .....</b>	<b>15</b>
<b>cours n° 6.....</b>	<b>16</b>
<b>TD6 .....</b>	<b>17</b>
<b>cours n° 7.....</b>	<b>18</b>
<b>TD7 .....</b>	<b>19</b>
<b>cours n° 8.....</b>	<b>20</b>
<b>TD8 .....</b>	<b>21</b>
<b>cours n° 9.....</b>	<b>22</b>
<b>TD9 .....</b>	<b>23</b>
<b>cours n° 10.....</b>	<b>24</b>
<b>TD10 .....</b>	<b>25</b>
<b>cours n° 11.....</b>	<b>27</b>
<b>TD11 .....</b>	<b>28</b>
<b>cours n° 12.....</b>	<b>29</b>
<b>TD12 .....</b>	<b>30</b>

## Programme du semestre

Cours n° 1	Cours : histoire de la numération
Cours n° 2	Cours : représentations des nombres entiers et conversions
Cours n° 3	Cours : représentation des rationnels
Cours n° 4	Cours : représentation des entiers – complément à 2
Cours n° 5	Cours : représentation des nombres réels en machine
Cours n° 6	Cours : calcul modulaire
Cours n° 7	Cours : calcul des propositions
Cours n° 8	Cours : formes normales
Cours n° 9	Cours : algèbre de Boole – Table de Karnaugh
Cours n° 10	Cours : circuits logiques
Cours n° 11	Cours : arbres de Beth et déductions
Cours n° 12	Cours : révisions

**Cours n°1**

**Le but** est ici de comprendre l'évolution historique dans la représentation des entiers

## Représentation unaire

Bâtons                      3            s'écrit    **|||**

## Représentation par paquets

Symboles                      le clou et le chevron

La position des symboles n'a aucune importance

clou chevron clou    a la même valeur que    clou clou chevron

Principe additif              addition par juxtaposition des représentations

## Représentation par position – utilisation de l'espace

Dans le système décimal, un symbole à la place  $n$  à partir de la droite représente combien de  $10^{n-1}$  sont contenus dans le nombre

Si  $10^{n-1}$  n'est pas contenu dans le nombre, on pourrait matérialiser par un espace

Dans la pratique un zéro matérialise cet espace

Principe multiplicatif              chaque symbole est multiplié par une grandeur fixe fonction de sa position

Système de mesure informatique est de cette nature

Un bit : un symbole



Un octet : 8 symboles consécutifs

## Travail à réaliser – TD1








### Exercice 1

Les Babyloniens utilisaient un système hybride de base 60. C'est une numération additive jusqu'à 60. Puis c'est une numération de position, c'est-à-dire que le nombre dépend de la position des symboles utilisés, l'espace servant à séparer les différentes puissances de la base.

Il n'y a que deux symboles, le clou  et le chevron .

Le clou  indique une unité et le chevron  une dizaine.

Sachant que le nombre représenté à gauche est 204, quel est celui représenté à droite ?

204	
$3 \times 60 + 24$	
  	   

### Exercice 2

La numération égyptienne utilisait les hiéroglyphes ci-contre. Leurs symboles évoquent chacun un ordre de grandeur.

- un bâton évoque l'unité
  - une anse de panier compte (environ) 10 objets
  - un rouleau de papyrus : on peut y écrire (environ) 100 hiéroglyphes
  - une fleur de lotus : on les trouve par milliers
  - un doigt montrant le ciel nocturne : on y voit près de 10 000 étoiles
  - un têtard : on en trouve de l'ordre de 100 000 au bord du Nil après la ponte
  - un dieu agenouillé supportant le ciel : le dieu est éternel
- et 1 million d'années est synonyme d'éternité

Hiéroglyphe	Valeur
	un
	dix
	cent
	mille
	dix mille
	cent mille
	un million

On additionne les valeurs de tous les symboles utilisés pour écrire le nombre et on écrit de droite à gauche en finissant par les unités.



1°/ Quel est le nombre écrit ci-dessus ?

2°/ Comment s'écrirait, avec ces symboles, notre nombre décimal 324 ?

### Exercice 3 – Numération romaine

La numération romaine permettait d'écrire les neuf premiers chiffres ainsi :

**I II III IIII V**  
**VI VII VIII VIII**

Remarquez l'écriture du chiffre quatre et celle du chiffre neuf.

Ce n'est qu'au Moyen-Âge qu'on a écrit les chiffres romains en utilisant des différences telles que IV (quatre), IX (neuf), XC (quatre-vingt dix), CD (quatre cents), ... Avec les chiffres romains, on peut écrire de façon purement additive.

<b>I</b> un	<b>C</b> cent	
<b>V</b> cinq	<b>D</b> cinq cents	
<b>X</b> dix	<b>M</b> mille	<b>X̄</b> dix mille
<b>L</b> cinquante	<b>V̄</b> cinq mille	<b>L̄</b> cinquante mille
		<b>—</b> = $\times 10^3$

Dans l'exercice on utilisera la notation du Moyen-Âge.

1°/ Traduire les nombres suivants : **DCCCCXXVIII** et **CXXXVMDLX**

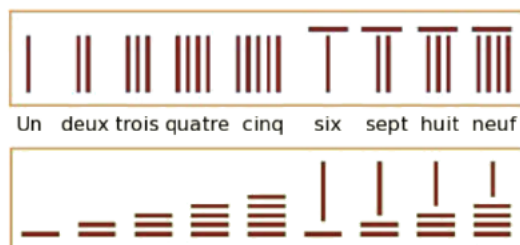
2°/ Écrire en chiffres romains les nombres 1953 et 3729.

3°/ Ajouter MCDIV + CCLXXI.

4°/ Quels sont les inconvénients de cette numération ?

### Exercice 4 – Numération chinoise

La numération chinoise à base dix était utilisée pour les mathématiques. Elle comportait neuf chiffres, le zéro étant indiqué par une case vide (espace). Il existe deux sortes de chiffres selon le rang :



Ligne du haut : chiffres de rangs impairs, utilisés pour les unités, les centaines, ...

Ligne du bas : chiffres de rangs pairs, utilisés pour les dizaines, les milliers, ...

1°/ Lire les nombres suivants : **T̄L̄IIĪ≡ L̄I** et **IĪL̄T̄ IIĪ**

2°/ Écrire en numération chinoise mathématique savante les nombres 1953 et 8729.

3°/ calculer leur somme sans passer par la base 10.

## Cours n°2

**Le but** est ici d'assimiler la notion de base et conversion.

Un entier  $n$  représenté dans une base  $b$  :  $n = (s_3 s_2 s_1 s_0)_b$

Les  $s_i$  sont les éléments de l'alphabet  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ , ce sont les digits

$s_0$  représente les unités,  $s_1$  les dizaines, ...

Sa valeur dans le système décimal  $n = (s_3 b^3 + s_2 b^2 + s_1 b^1 + s_0 b^0)_{10}$

Écriture unique avec  $k$  symboles  $n = \sum_{i=0}^{k-1} s_i b^i$  pour  $n$  vérifiant  $b^{k-1} \leq n < b^k$

Bases classiques : binaire , octale , décimale , hexadécimale

En base 2 : Bit de poids faible – bit de poids fort

Addition de 2 nombres, gestion des retenues

$$(725)_8 + (224)_8 = (1252)_8$$

Conversion entre un nombre  $n$  en base 10 et son écriture en base  $b$

Méthode par **soustraction**

Calcul du nombre de symboles  $n = (s_{k-1} \dots s_2 s_1 s_0)_b$

Itérativement, on calcule les digits de plus fort poids

$s_{k-1}$  est le nombre de fois que  $b^{k-1}$  est dans  $n_1 = n$

$s_{k-2}$  est le nombre de fois que  $b^{k-2}$  est dans  $n_2 = n_1 - s_{k-1}b^{k-1}$

...

$s_0 = n_k = n_{k-1} - s_1 b^1$

Méthode par **division**

Itérativement, on calcule les digits de plus faible poids

$n = d_1 \cdot b + r_1, \quad s_0 = r_1$

$d_1 = d_2 \cdot b + r_2, \quad s_1 = r_2$

...

$d_{k-2} = d_{k-1} \cdot b + r_{k-1}, \quad s_{k-2} = r_{k-1}$

arrêt quand  $d_{k-1} \in \{0, 1, \dots, b-1\}, s_{k-1} = d_{k-1}$

Cas de la conversion binaire - octal



**Travail à réaliser – TD2****Exercice 1**

1°/ Convertir en base 10, le nombre suivant écrit en base 2 :  $(100110)_2$

2°/ Convertir en base 2, le nombre suivant écrit en base 10 :  $(47)_{10}$

3°/ Convertir en base 16, les nombres suivants écrits en base 10 :  $(38)_{10}$ ,  $27_{10}$

**Exercice 2**

1°/ Écrire les nombres hexadécimaux qui suivent en décimal, puis en binaire :  
 $A6F$  ;  $128$  ;  $3AD$

2°/ Classer dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$(11111001)_2$  ;  $(1101)_{10}$  ;  $(1101)_{16}$  ;  $(1000)_{16}$  ;  $(1000)_2$  ;  $(10000)_{10}$

**Exercice 3**

Écrire les nombres suivants :  $0$  ;  $1$  ;  $10$  ;  $11$  ;  $100$  ;  $10000$  en base 10 sachant que :

1°/ ils sont écrits en base 2

2°/ ils sont écrits en base 16

**Exercice 4**

1°/ Écrire en base 2, en base 8, en base 16 les entiers suivants :  $(2061)_{10}$  et  $(8191)_{10}$

2°/ Donner la valeur en base 10 et en base 16 de la somme des éléments  $2^i$  depuis  $i = 0$  jusqu'à  $i = 10$

3°/ Combien de symboles, en base 16, sont nécessaires pour représenter tous les entiers compris entre  $0$  et  $(3600)_{10}$  ?

4°/ Exprimer, dans la base 8, le prédécesseur de  $(10000)_{16}$  et le successeur de  $(777)_8$

**Exercice 5**

1°/ Convertir en octal (base 8) les nombres  $(101110)_2$ ,  $(1111111)_2$ ,  $(64)_{10}$ ,  $(63)_{10}$

2°/ Convertir en hexadécimal (base 16) les nombres  $(101110)_2$ ,  $(255)_{10}$

**Cours n°3**

**Le but** est ici de maîtriser la représentation des rationnels.

Définition : rapport entre deux entiers relatifs

Une version décimale d'un rationnel, a une partie décimale

- finie
- périodique
- infinie sans périodicité

Il n'y a pas unicité de l'écriture décimale de tout rationnel.

Écriture sous forme de fraction irréductible

Écriture dans différentes bases

$$x = \sum_{i=0}^k s_i b^i + \sum_{i=1}^{+\infty} s_{-i} b^{-i}$$

En base  $b$ , le développement de  $\frac{a}{c}$  est limité si et seulement si  $c$  a un diviseur premier avec  $b$

Conversion des rationnels

On traite séparément les parties entière et fractionnaire

La partie fractionnaire est dans l'intervalle  $]0, 1[$   $(x)_{10} = (0, s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k})_b$

Méthode par **soustraction**

On détermine itérativement d'abord les digits de plus fort poids

$s_{-1}$  est le nombre de fois que  $b^{-1}$  se trouve dans  $x$

...

$s_{-i}$  est le nombre de fois que  $b^{-i}$  se trouve dans  $x - s_{-1}b^{-1} - \dots - s_{-(i-1)}b^{-(i-1)}$

le procédé peut ne pas s'arrêter.

Méthode par **multiplication**

On détermine itérativement d'abord les digits de plus faible poids

$x = d \cdot b^{-1} + r$  qui équivaut à  $x \cdot b = d + b \cdot r$   $d$  est le premier terme

on applique alors à  $x' = b \cdot r$

le procédé peut ne pas s'arrêter.

### Travail à réaliser – TD3

#### Exercice 1

Écrire en base 10 l'équivalent de chaque nombre (sous la forme d'une fraction)

base 10	base 2	base 10	base 16	base 10	base 8
	0,1		0,1		0,1
	0,01		0,01		0,01
	0,001		0,001		0,001
	0,0001		0,0001		0,0001

#### Exercice 2

1°/ Effectuer les conversions en base 10 de  $(111,101)_2$  et  $(35C,38)_{16}$

2°/ Convertir en base 2, 3, 4 et 5 :  $(121,25)_{10}$

3°/ Convertir en hexadécimal :  $(33,242)_{10}$ .

4°/ Convertir en hexadécimal :  $(0,1011)_2$  ;  $(0,110)_2$  ;  $(101, 1011 1100 110)_2$ .

#### Exercice 3

1°/ Exprimer le nombre  $(54,0645)_{10}$  en base 16 puis en base 2, avec une précision d'au moins  $16^{-2}$ .

2°/ Convertir les deux nombres suivants en base 10 :  $(11 1101,1010)_2$  et  $(3D,A)_{16}$ .

3°/ Exprimer le nombre  $(47,0925)_{10}$  en base 16 avec une précision d'au moins  $16^{-3}$

**Cours n°4**

**Le but** est ici d'approfondir la notion de représentation des entiers – complément à 2.

Codage binaire naturel signé

Signe codé sur le bit de poids fort

Décimal codé binaire

Chaque chiffre est codé de gauche à droite sur 4 bits

Codage « complément à deux »

Taille de la représentation fixée en octets :  $k$

Le bit de plus fort poids indique le signe (bit de signe)

$-n$  est codé par le codage binaire de  $2^k - n$

Pratiquement :

Si  $m$  est positif son code s'obtient par conversion en codage binaire complété à gauche par des 0

Si  $m$  est négatif  $m = -n$  ; on code  $n$ , on inverse bit à bit , on ajoute 1 en binaire

Décodage

Si le bit le plus fort est 1 le code  $c$  en base  $b$  a pour valeur :  $(c)_{10} - 2^4$

pratiquement

Si le code commence par 0, conversion binaire en décimal

Si le code commence par 1, on supprime le bit de signe, on retranche 1 et on inverse bit à bit avant conversion du binaire en décimal

Addition

Problème de dépassement de capacité

Si les nombres sont de signes opposés, pas de dépassement de capacité, on additionne les codes en oubliant la dernière retenue

Si les nombres sont de même signe,

si la retenue est différente du bit de signe alors dépassement de capacité, sinon somme des codes en oubliant la dernière retenue

Codage « complément à un »

Taille de la représentation fixée en octets :  $k$

Le bit de plus fort poids indique le signe (bit de signe)

$-n$  est représenté par inversion des bits du code de  $n$

**Travail à réaliser – TD4****Exercice 1**

1°/ Pour des entiers relatifs codés en complément à deux sur un octet ( $k = 8$ ), fournir la représentation binaire des opérations suivantes et interpréter le résultat, en déduire le nombre affiché en base 10 :

$127 - 5$  ;  $-126 + 65$  ;  $102 + 24$  ;  $124 + 4$  ;  $-124 - 4$  ;  $-124 - 5$

2°/ Si le codage en CA2 des entiers relatifs est fait sur 5 bits, quels sont (en base 10) les nombres représentables ?

3°/ pour des entiers relatifs codés sur deux octets, fournir la représentation binaire des opérations suivantes et interpréter le résultat, en déduire le nombre affiché en base 10 :

$30000 + 5000$  ;  $-30000 - 5000$  ;  $5000 - 260$

**Exercice 2**

1°/ La longueur  $k$  étant fixée à 8, donner (si possible) les représentations en code CA2 des entiers suivants :

$+7$  ;  $-7$  ;  $+127$  ;  $-127$  ;  $+128$  ;  $-128$ .

2°/ La longueur  $k$  étant toujours fixée à 8, quels sont les nombres dont le code CA2 est :  
 $00001111$  ;  $11110000$  ;  $01111111$  ;  $10000000$  ;  $11001100$  ;  $10101010$  .

3°/ Les nombres entiers  $a = 0101\ 0101$  et  $b = 1010\ 1010$  sont codés sur 8 bits. Donner les valeurs de  $a$  et  $b$ , puis de la somme  $a+b$  en base 10.

**Exercice 3**

1°/ Écrire tous les nombres représentables sur 3 bits en complément à 1.

2°/ Sur  $n$  bits, combien de nombres sont représentables en complément à 1 ?

3°/ Trouver le codage du nombre  $-37$  sur 8 bits et vérifier que  $37+(-37)=0$ .

4°/ Trouver les codages de  $+63$  et  $-28$  sur 8 bits et en faire l'addition.

5°/ Trouver les codages de  $-63$  et  $+28$  sur 8 bits et en faire l'addition.

6°/ Trouver les codages de  $+65$  et  $+100$  sur 8 bits et en faire l'addition. Que se passe-t-il ?

7°/ Trouver les codages de  $-65$  et  $-35$  sur 8 bits et en faire l'addition.

## Cours n°5

**Le but** est ici d'assimiler la représentation machine des nombres réels.

Représentation d'un réel  $x$  :  $x = s \ m \ b^e$

$b$  est la base

$s \in \{-1; +1\}$  est le signe

la mantisse  $m$ , ou significande, précise les chiffres significatifs

l'exposant  $e$  donne l'ordre de grandeur

+	+	4	2	3	7	5
---	---	---	---	---	---	---

La mantisse est **normalisée** : son symbole de plus fort poids est non nul

Les valeurs atteintes sur un intervalle borné sont en nombre fini et non équiréparties

Très souvent il y a donc une approximation      erreurs d'arrondi

Représentation en virgule flottante en base 2

- Exposant biaisé      objectif : faciliter la comparaison de deux nombres

L'exposant  $n$  étant codé sur  $k$  bits,  $-2^{k-1} \leq n \leq 2^{k-1} - 1$ . On lui ajoute  $2^{k-1}$

- Procédé du bit caché      objectif : représenter plus de nombres dans le même espace

Valable uniquement en base 2. La mantisse étant normalisée, son bit de poids le plus fort est nécessairement 1 et peut être omis.

Propagation d'erreur

$x = x_0 \pm \Delta$  et  $y = y_0 \pm \Delta'$  alors

$$x + y = x_0 + y_0 \pm (\Delta + \Delta')$$

$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\Delta + \Delta')$$

$$xy = x_0 y_0 \pm (|x_0| \Delta' + |y_0| \Delta)$$

## Travail à réaliser – TD5

### Exercice 1

On se place dans la base décimale (base dix), en virgule flottante normalisée. On représente les nombres réels dans un registre de 7 cases : l'exposant signé est placé le plus à gauche et comporte 2 cases (le signe et 1 chiffre décimal) et la mantisse signée comporte 5 cases (le signe et 4 chiffres décimaux).

1°/ Quel réel est représenté par

-	+	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---

2°/ Donner le plus petit (puis le plus grand) nombre strictement positif exprimable. Le plus petit (puis le plus grand) nombre strictement négatif exprimable.

3°/ Combien de nombres réels différents sont représentables ? Expliquer le résultat.

4°/ Quel est le successeur de  $+0,9999 \times 10^{-8}$  ? Quelle est la différence entre ces 2 nombres ?

5°/ Donner un exemple de deux autres nombres, l'un étant successeur de l'autre et tels que leur différence n'ait pas la même valeur que la différence de la question précédente.

6°/ Donner la précision machine  $\varepsilon$ , définie par le fait que  $1+\varepsilon$  est le successeur de 1. Comparer aux distances relatives des nombres des deux questions précédentes.

### Exercice2

1°/ On considère des flottants de la forme  $\pm(0,d_1d_2d_3)_2 \cdot (2^e)_{10}$ . La mantisse est normalisée donc  $d_1 = 1$  et  $d_2, d_3$  appartiennent à  $\{0, 1\}$  tandis que  $e_{10} \in \{-1, 0, 1, 2\}$ .

- Comment représenter 0 ?
- Combien de nombres peut-on représenter ?
- Illustrer des cas de overflow, underflow et erreurs d'arrondi dans ce système.
- Que se passe-t-il si l'on ajoute un bit caché ?

2°/ Quelles sont les valeurs des exposants dont les représentations biaisées sur 4 bits sont : 0000 ; 0100 ; 1010 ?

3°/ Quelles sont les représentations (en notation biaisée sur 8 bits) des exposants suivants : -4, -125, 120 ?

4°/ Soit un ordinateur fictif à mots de 8 bits où les réels sont représentés de façon normalisée, en utilisant la technique du bit caché.

Les 8 bits B1 | B2 B3 B4 | B5 B6 B7 B8 ont la signification suivante :

- B1 représente le signe de la mantisse, codé sur 1 bit ;
- B2 B3 B4 sont 3 bits qui codent l'exposant, en notation biaisée ;
- B5 B6 B7 B8 sont 4 bits qui codent la mantisse.

Combien de nombres réels peut-on représenter ?

Donner les plus petits et plus grands réels positifs et négatifs ainsi que leur représentation.

5°/ Quel est le réel x ayant 01001111 pour représentation ?

Donner la représentation du réel immédiatement supérieur à x ainsi que sa valeur.

**Cours n° 6**

**Le but** est ici d'assimiler la notion de Calcul modulaire.

$a$  et  $b$  sont **congruents** modulo  $p$  si et seulement si il existe un entier  $k$  tel que  $a = b + pk$   
on note  $a \equiv b \pmod{p}$

Si  $a \equiv b \pmod{p}$  et si  $b \equiv c \pmod{p}$ , alors  $a \equiv c \pmod{p}$

Si  $a_1 \equiv b_1 \pmod{p}$  et  $a_2 \equiv b_2 \pmod{p}$ , alors  $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{p}$

En calcul modulo  $p$ , tout entier  $m \in \mathbb{Z}$  a un représentant dans  $F_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

Opérations dans  $F_p$ , opposé, inverse

Petit théorème de Fermat : Soit  $p$  un nombre premier, dans  $F_p$ , tout nombre  $x$  vérifie  $x^{p-1} = 1$ ,  
c'est-à-dire  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Clés de sécurité

Codes asymétriques, algorithme RSA



**Travail à réaliser – TD6****Exercice 1.** Calcul modulo 4

On considère l'ensemble  $F_4 = \{0,1,2,3\}$  que l'on munit de l'addition et de la multiplication modulo 4.

- 1°/ Donner la table d'addition et la table de multiplication dans  $F_4$ .
- 2°/ Pour  $x \in F_4$ , donner l'opposé de  $x$ . S'il existe, donner l'inverse de  $x \in F_4$  dans  $F_4$ .
- 3°/ Résoudre dans  $F_4$  l'équation  $2x = 2$ .
- 4°/ Pour  $x \in F_4$ , calculer  $x^4 - x^2$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $5n^4 + 3n^2$  est divisible par 4.

**Exercice 2.** Calcul modulo 7

On considère l'ensemble  $F_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$  et l'on définit l'addition et la multiplication modulo 7 sur  $F_7$ .

- 1°/ Donner la table d'addition et la table de multiplication dans  $F_7$ .
- 2°/ Donner les éléments inversibles de  $F_7$ .
- 3°/ Déterminer  $x^6 - 1$  pour tout  $x \in F_7$ . Que peut-on en déduire ?

**Exercice 3.** Des phares

Deux phares illuminent un point P à l'instant  $t_0 + 1s$ , resp. à l'instant  $t_0 + 3s$ .

Le premier phare fait un tour en 3s, le second en 5s.

Quel est le prochain instant où P sera illuminé par les deux phares en même temps ?

**Exercice 4.** Clés de sécurité

On considère un code étudiant formé de 6 chiffres  $s = s_5s_4s_3s_2s_1s_0 = aammjj$  où aa sont les derniers chiffres de l'année, mm le mois et jj le jour de naissance.

Un étudiant né le 15 mai 1995 aura comme code 950515.

On associe à chaque code une clé de sécurité  $c(s) = 11 - (s \bmod 11)$

$s = 11q + r$  avec  $r \in \{0,1, \dots, 10\}$ .

1°/ Robustesse aux erreurs.

(a) Quand est-ce que  $c(s) = c(s')$  ?

(b) Soit  $s'$  obtenu à partir de  $s$  en faisant une erreur sur le  $i$ -ème chiffre.

Montrer que  $c(s) \neq c(s')$ .

(c) Soit  $s'$  obtenu à partir de  $s$  en échangeant les chiffres  $s_i$  et  $s_j$ . Que peut-on dire de  $c(s')$  ?

2°/ Calcul pratique de la clé.

(a) On pose  $s = A \cdot 10^4 + M \cdot 10^2 + J$  où  $A = aa$  ;  $M = mm$  et  $J = jj$ . Pour chacun des 3 facteurs effectuer la division euclidienne par 11, par exemple  $J = 11q_J + r_J$ .

En déduire une expression plus simple pour calculer  $c(s)$ .

(b) Calculer  $c(950515)$ ,  $c(950615)$ ,  $c(950165)$  et  $c(950516)$ . Commentez.

(c) On a le code incomplet 9x0125 mais sa clé 7 est correcte. Compléter le code.

## Cours n° 7

**Le but** est de maîtriser la logique des propositions.

La logique des propositions

Alphabet

Variables

Opérateurs  $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$

Parenthèses

Propositions

$\neg$	
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Formules propositionnelles définies itérativement par les variables, la négation d'une formule ou construite à partir de deux formules à l'aide des opérateurs  $\neg \wedge \vee \rightarrow$  ou  $\leftrightarrow$

Distribution de vérité

Valeur d'une formule

Tautologie

Syllogisme

Lois de Morgan

$$\neg(A \wedge B) \text{ eq } (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \text{ eq } (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \rightarrow B) \text{ eq } (\neg A \vee B)$$

Systèmes complets de connecteurs

**Travail à réaliser – TD7****Exercice 1**

1°/ On considère les propositions :

$p$  = «Paris est un mot de 5 lettres» ;  $q$  = «Paris est la capitale du Japon» ;

$r$  = «Tokyo est un mot de 5 lettres» et  $s$  = «Londres est la capitale du Japon» .

(a) Quelles sont les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et  $s$  ?

(b) Donnez les valeurs des formules :  $(p \vee q)$  ;  $(p \wedge q)$  ;  $(p \wedge r)$  ;  $(q \vee s)$  ;  $(s \rightarrow q)$  ;  $(q \rightarrow r)$  .

**Exercice 2**

1°/ Transcrire les propositions suivantes dans la notation symbolique du calcul des propositions :

(a) Le nombre  $a$  est strictement positif seulement s'il n'est pas nul.

(b) Le nombre  $a$  n'est pas strictement positif ou pas nul.

(c) Le nombre  $a$  n'est pas à la fois strictement positif et nul.

(d) Le nombre  $a$  est strictement positif si et seulement si, il n'est ni négatif ni nul.

(e) Si le nombre  $a$  est négatif ou nul, alors il n'est pas strictement positif ; et réciproquement.

2°/ Les propositions (a), (b) et (c) sont-elles équivalentes entre elles ?

3°/ Les propositions (d) et (e) sont-elles équivalentes ?

**Exercice 3**

1°/ Simplifiez les formules suivantes :

$F1 = p \wedge \neg p$  ;  $F2 = p \vee \neg p$  ;  $F3 = p \wedge (q \wedge \neg q)$  ;  $F4 = p \vee (q \wedge \neg q)$  .

2°/ Donner la table de vérité des formules suivantes :

$F5 = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$  ;  $F6 = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$  ;  $F7 = p \vee (p \wedge q)$  ;  $F8 = p \wedge (p \vee q)$  .

**Exercice 4**

1°/ Soit  $F = ((x \rightarrow (\neg y \vee z)) \wedge \neg((y \wedge z) \rightarrow ((x \wedge y) \vee \neg z)))$

Donner la table de vérité de la formule  $F$ .

Et en déduire une écriture équivalente et plus courte de  $F$ .

2°/ Démontrez que les formules suivantes sont des tautologies :

$F1 = (b \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow c))$

$F2 = (\neg b \rightarrow (b \rightarrow c))$

$F3 = (b \rightarrow (\neg c \rightarrow \neg(b \rightarrow c)))$

$F4 = ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)))$

$F5 = ((b \rightarrow a) \rightarrow ((\neg b \rightarrow a) \rightarrow a))$

**Cours n°8**

**Le but** est de maîtriser les formes normales.

**Exemple :**

**Travail à réaliser – TD8****Exercice 1**

Mettre les formules suivantes sous FND puis sous FNC :

$$F1 = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

$$F2 = (p \rightarrow q) \wedge [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$F3 = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$$

## Cours n°9

**Le but** est de maîtriser la notion d'algèbre de Boole

Structure sur un ensemble E

Opérateurs arithmétiques binaires : + .

Opérateur unaire :  $\bar{a}$

Modélise le calcul des propositions

$E = \{0, 1\}$  Vrai  $\rightarrow 1$  Faux  $\rightarrow 0$   $\vee \rightarrow +$   $\wedge \rightarrow .$   $\neg a \rightarrow \bar{a}$

propriétés

- associativité :  $(a + b) + c = a + (b + c)$  et  $(a.b).c = a.(b.c)$
- commutativité :  $a + b = b + a$  et  $a.b = b.a$
- élément neutre :  $0 + a = a$  et  $1.a = a$
- idempotence :  $a + a = a$  et  $a.a = a$
- involution :  $\bar{\bar{a}} = a$
- complémentarité :  $a.\bar{a} = 0$  et  $a + \bar{a} = 1$
- éléments absorbants :  $a + 1 = 1$  et  $a.0 = 0$
- distributivité de . par rapport à + :  $a.(b + c) = a.b + a.c$
- distributivité de + par rapport à . :  $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
- Les lois de De Morgan s'écrivent :  $\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$  et  $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

Une fonction booléenne à n variables  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Un **minterme** un produit m qui contient chaque variable  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ou sa négation, une seule fois et vérifiant :  $m = 1 \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$  est vraie

Un **maxterme** une somme M qui contient chaque variable  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ou sa négation, une seule fois et vérifiant  $M = 0 \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$  est fausse.

Tableau de Karnaugh

Objectif : simplification d'une expression logique

Chaque cellule du tableau correspond à un n-uplet des variables d'entrée

Les lignes et les colonnes du tableau sont numérotées selon le code de Gray : à chaque passage d'une ligne à la suivante, une seule variable change d'état

**Travail à réaliser – TD9****Exercice 1**

Simplifier les quantités booléennes suivantes :

$$P_1 = a + \overline{b.a} \quad ; \quad P_2 = \overline{a.b + \overline{a} + \overline{b}} \quad ; \quad P_3 = a . b . c + a . b . \overline{c} + a . \overline{b}.c + a . \overline{b}. \overline{c} ;$$
$$P_4 = \overline{(a + b). (b + c) + (c + d). (d + a)} \quad ; \quad P_5 = (a+b).(b+c).(c+d).(d+a) .$$

**Exercice 2**

Soient  $a, b, c$  des éléments d'une algèbre de Boole. On pose  $e = a.b.c + \overline{b}. \overline{c} + \overline{a}. \overline{b}$

1°/ Écrire  $a.b$  en n'utilisant que les opérations addition et complémentation.

2°/ Écrire  $a+b$  en n'utilisant que les opérations produit et complémentation.

3°/ Écrire  $e$  en n'utilisant que les opérations addition et complémentation.

4°/ Écrire  $e$  en n'utilisant que les opérations produit et complémentation.

**Exercice 3**

On considère  $f(a, b, c) = \overline{a}. \overline{b}. \overline{c} + a. \overline{b}. \overline{c} + a. \overline{b}. c$

et  $g(a, b, c, d) = a. b. c. d + a. \overline{d} + a. \overline{b}. \overline{c} + a. b. \overline{d}$

1°/ Utiliser les tableaux de Karnaugh pour simplifier la forme normale disjonctive de ces fonctions

2°/ Trouver leur forme normale conjonctive

**Exercice 4**

La dernière part de gâteaux a disparu et il n'y a que quatre suspects : Anne, Bertrand, Charlotte et Didier.

On sait que

1. si Anne et Bertrand ont mangé du gâteau, alors Charlotte aussi ;

2. si Bertrand ou Charlotte ont pris du gâteau, alors Didier aussi ;

3. si Didier a pris du gâteau, et pas Anne, alors Bertrand n'en a pas pris ou Charlotte s'est servie.

Qui a pris du gâteau ? Qui n'en a pas pris ?

## Cours n°10

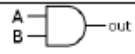
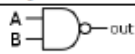

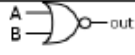
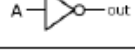

**Le but** est de maîtriser les circuits logiques.

Un circuit modélise une fonction de  $\{0, 1\}^n$  dans  $\{0, 1\}^m$

Entrée donnée sur n bits, sortie sur m bits

0 absence de tension électrique, 1 présence de tension électrique

Lien entre circuit logique et algèbre de Boole

Nom	Symbole	Opération	Nom	Symbole	Opération
ET		$A.B$	NON-ET		$\overline{A.B}$
OU		$A + B$	NON-OU		$\overline{A + B}$
NON		$\overline{A}$	OU exclusif		$A \oplus B$

Voir [http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction\\_logique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_logique)

A partir de l'écriture simplifiée de la fonction grâce au tableau de Karnaugh, on peut construire un circuit logique



### Travail à réaliser- TD10

#### Exercice 1

Soit la formule  $F_x$  spécifiée par la table de vérité suivante :

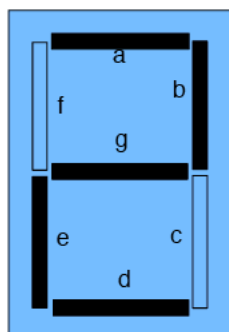
A	B	C	D	$F_x$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

1°/ Trouver l'expression disjonctive simplifiée de  $F_x$  au moyen de sa représentation sous forme de tableau de Karnaugh.

2°/ Dessiner le circuit correspondant.

#### Exercice 2

Un afficheur numérique est composé de 7 barres : a, b, c, d, e, f et g qui peuvent être allumées ou éteintes.



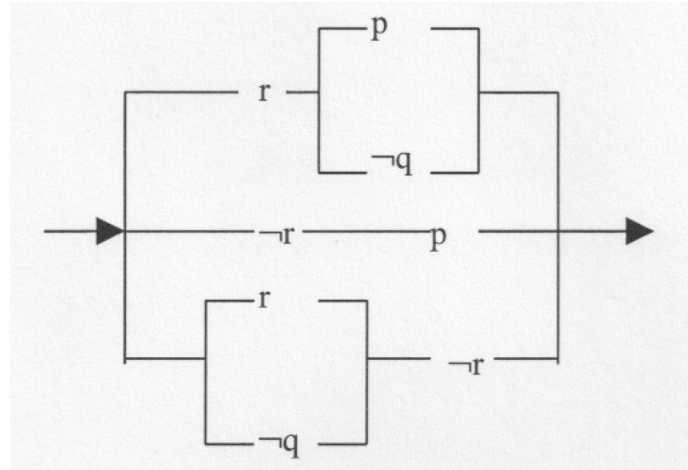
On veut afficher les chiffres 0, 1, 2, 3 et ces quatre chiffres seulement :

L'entrée du circuit est le code binaire du chiffre à afficher, la sortie est le signal qui allume ou éteint chaque barre.

Déterminer le circuit dont  $e_1$  et  $e_0$  sont les deux bits d'entrée et dont les bits de sortie sont a, b, c, d, e, f et g.

### Exercice 3

On considère le circuit suivant :



1°/ Écrire la fonction propositionnelle associée

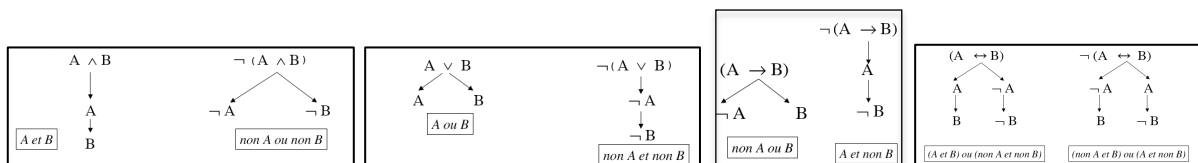
2°/ Trouver un circuit équivalent mais plus simple

## Cours n°11

**Le but** est de maîtriser les Arbres de Beth et les déductions.

Construction de l'arbre

- La racine est une formule
- de façon inductive, on décompose chaque formule grâce aux arbres associés aux opérations de base du calcul des propositions
- on a terminé lorsque seuls les atomes ou leur négation restent



Déduction des formes FND et FNC

Pour **satisfaire** une formule qui est à l'origine de l'arbre, il suffit de satisfaire tous les atomes d'une des branches de l'arbre

Si une branche comporte une variable propositionnelle et sa négation, on dit que l'on a une **branche fermée**

Si toutes les branches d'un arbre sont fermées, on dit que l'on a un **arbre fermé**, la formule d'origine n'est pas **satisfaisable**

Une expression  $F$  est une tautologie si l'arbre associé à  $\neg F$  est fermé

Conséquence logique

$E$  un ensemble de formules est **satisfiable** ou **consistant** s'il existe une distribution qui satisfait toutes les formules

une formule  $C$  est une conséquence de  $E$  si tout distribution satisfaisant toutes les formules de  $E$ , satisfait aussi  $C$  ; alors  $E \models C$  ;  $E$  est un ensemble d'hypothèse,  $C$  est une conclusion

On le vérifie en étudiant l'arbre associé à  $E \cup \{\neg C\}$ .

**Travail à réaliser – TD11****Exercice 1**

Utiliser les arbres de Beth pour :

1°/ donner les distributions de vérité de :  $(a \vee ((\neg a \vee (b \rightarrow c)) \wedge (c \rightarrow b)))$

2°/ donner les distributions de vérité donnant à  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$  la valeur faux

3°/ donner les distributions de vérité de la formule suivante puis de sa négation  
 $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$

**Exercice 2**

1°/ Rappeler les arbres de Beth de

$F1 = (a \rightarrow b)$ ;  $F2 = \neg(a \rightarrow b)$ ;  $F3 = a \wedge b$ ;  $F4 = a \vee b$

2°/ Montrer que

$F = (\neg s \rightarrow \neg p) \rightarrow [(p \rightarrow (r \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow s))]$   
est une formule tautologique

3°/ L'ensemble  $\Sigma = \{(a \wedge b) \rightarrow c ; a \rightarrow (b \vee c) ; c \rightarrow d. ; \neg a \rightarrow d\}$  est-il consistant ?

**Exercice 3 : Enquête et déduction**

On considère la déclaration suivante :

"L'accusé ne peut être coupable du crime que s'il était à Paris le 9 mai à 17h. Or il était à Marseille à ce moment-là. Par conséquent, il ne peut pas être coupable du crime".

1°/ Transcrire cette déclaration en langage formel. On utilisera C pour "l'accusé est coupable", P pour "l'accusé était à Paris à l'heure du crime" et M pour "l'accusé était à Marseille à l'heure du crime".

2°/ Montrer que cette déclaration n'est pas formellement légitime.

3°/ Quelle prémisse faut-il ajouter pour que la déduction soit légitime ?

## **Cours n°12**

### **Révisions**

## **Travail à réaliser – TD12**



