Algorithmique Avancée - Examen

Etienne Birmelé

janvier 2019

Instructions

- Les calculatrices sont interdites;
- La clarté de la rédaction est primordiale. Vous pouvez utiliser des dessins pour éclairer vos propos mais ce n'est pas suffisant. Evitez les formulations de type *On voit bien que* ainsi que les phrases interminables mélangeant plusieurs arguments.
- Quand l'application d'un algorithme est demandé, il faut convaincre le correcteur que vous savez utiliser l'algorithme et donc développer son exécution, au moins sur plusieurs étapes. La réponse finale ne saurait suffire.
- Ne passez pas trop de temps sur une question, vous pouvez utiliser les résultats des questions non résolues par la suite.
- Les exercices peuvent être traités dans le désordre. Merci cependant de laisser les questions dans l'ordre au sein de l'exercice (laissez de la place si vous en sautez une).

Exercice 1

On considère un graphe orienté G et un sommet u de G.

1. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u?

Il s'agit de l'ensemble des sommets v tels qu'il existe un chemin orienté de u à v, appelé aussi ensemble des descendants de u.

2. Quel est l'ensemble des sommets parcourus par un parcours en profondeur enraciné en u sur le graphe obtenu en inversant le sens de toutes les arêtes?

Il s'agit de l'ensemble des sommets v tels qu'il existe un chemin orienté de v à u, appelé aussi ensemble des ascendants de u.

3. En déduire un algorithme permettant de déterminer les composantes fortement connexes de G.

Soit G' le graphe obtenu en inversant toutes les arêtes. D'après les questions précédentes, les sommets dans la composante fortement connexe de u sont ceux qui sont atteints à la fois par un DFS enraciné en u dans G et par un DFS enraciné en u dans G'. On peut donc déterminer une composante fortement connexe en choisissant un sommet initial u au hasard, en lançant les deux DFS des questions précédentes, puis en déterminant l'intersection des deux ensembles de sommets trouvés. En répétant cette opération tant qu'il reste des sommets non sélectionnés, on obtient alors toutes les composantes fortement connexes de G.

4. On admet que déterminer l'intersection de deux ensembles A et B est de complexité $\mathcal{O}(n \log n)$, où $n = |A| + |B|$. En déduire la complexité de l'algorithme précédent.

Le DFS étant de complexité $\mathcal{O}(m)$, en lancer deux et déterminer la composante fortement connexe de la racine est de complexité $\mathcal{O}(m + n \log n)$, où n désigne le nombre de sommets de G. Comme il y a au plus n composantes fortement connexe, on obtient une complexité de $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$.

Exercice 2

La figure 1 montre un graphe de communication avec les capacités de chacune des liaisons.

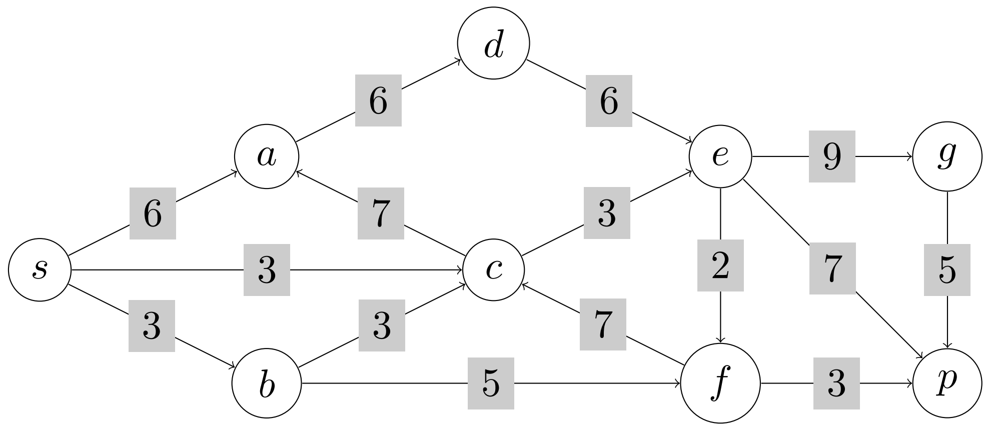

Figure 1:

1. Quelle est la valeur du flux maximal qui peut être transmis de l'émetteur au récepteur? Vous direz quels chemins vous considérez et comment vous le déterminez.

On applique l'algorithme max-flow min-cut en cherchant des chemins non-saturés entre s et p jusqu'à ne plus en trouver. Par exemple

(s, a, d, e, p) **de saturation** 6.

(s, c, e, g, p) **de saturation** 3.

(s, b, f, p) **de saturation** 3.

On obtient un flot de valeur 12. **Ce flot est maximum car la coupe définie par** $A = \{s\}$ **est de capacité** 12.

2. Comment déterminer l'ensemble des sommets tels qu'on pourrait augmenter le flux de s à chacun de ces sommets?

Cela se fait en lançant un DFS (ou un BFS) enraciné en s, qui emprunte dans le bon sens les arêtes où le flux est inférieur à la capacité et dans le mauvais sens les arêtes avec un flus non nul.

Ici, avec le flot de la question 1, seul s est découvert.

3. Comment déterminer l'ensemble des sommets tels qu'on pourrait augmenter le flux entre ses sommets et p?

Cela se fait en lançant un DFS (ou un BFS) enraciné en p, qui emprunte dans le mauvais sens les arêtes où le flux est inférieur à la capacité et dans le bon sens les arêtes avec un flus non nul.

Ici, avec le flot de la question 1., seuls e, g et p sont découverts.

4. En déduire comment déterminer l'ensemble des arêtes dont une augmentation de la capacité entrainerait une augmentation du flux de s à p.

Une telle arête (u, v) doit forcément vérifier qu'on peut envoyer plus d'infirmation de s à u et plus d'information de v à p. Il faut donc que u soit découvert par le DFS de la question 2. et v par le DFS de la question 3.

Dans l'exemple, aucune arête de ce genre n'existe.

Exercice 3

On considère un graphe biparti, formé de deux ensembles de sommets A et B de taille n. On rappelle que, comme le graphe est biparti, toute arête relie un sommet de A à un sommet de B.

Un *matching* est un ensemble de couples de sommets liés par une arête. La Figure 2 montre un exemple de graphe avec $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{e, f, g, h\}$. Les arêtes en rouge forment un matching de cardinal 3.

Le but de cet exercice est de déterminer un algorithme permettant de trouver un matching de cardinal maximum.

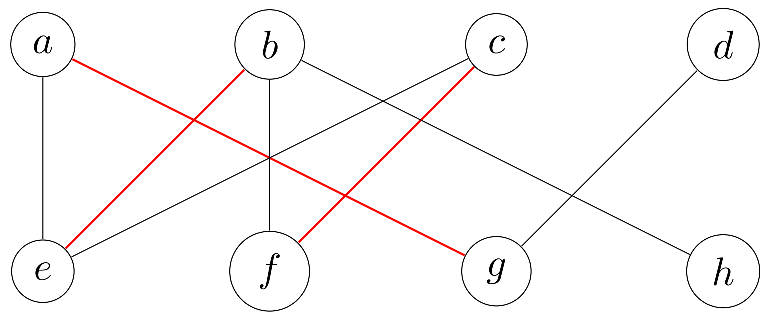

Figure 2:

On oriente les arêtes de A vers B, on ajoute une source s avec une arête de s vers chacun des sommets de A et un puits p avec une arête chaque sommet de B vers p.

1. Pour des valeurs de capacités bien choisies, un matching correspond à un flot entre s et p, de valeur égale à la cardinalité du matching. Proposer un choix de capacités qui vérifie cette proposition, et la démontrer.

On propose de mettre une capacité de 1 à toutes les arêtes du graphe.

Soit f un flot. Tout sommet de $a \in A$ doit vérifier $f^-(a) = f^+(a)$. Par conséquent, soit $f^-(a) = 0$ et aucune arête de a vers B ne porte un flot non nul, soit $f^-(a) = 1$, et exactement une arête porte un flot de 1. Les arêtes entre A et B portant un flot de 1 définissent alors un matching dont le nombre d'arêtes est la aleur du flot.

Inversement, tout matching peut être étendu en un flot dont la valeur est la taille du matching.

Faire une figure pour illustrer peut aider à la compréhension.

2. En déduire un algorithme qui permet de déterminer un matching maximal à partir d'un matching initial quelconque (éventuellement vide).

D'après la question 1., un matching maximal correspond à un flot maximal dans le graphe modifié.

Il suffit donc d'appliquer l'algorithme max-flow min-cut sur le nouveau graphe, en partant du flot correspondant au matching de départ. On sélectionne les arêtes entre A et B portant un flux non nul.

3. L'appliquer au graphe et au matching de la figure 2.

Dessiner l'instance de max-flow min-cut avec le flot correspondant au matching dessiné en rouge.

Le chemin (s, d, g, a, e, b, h, s) augmente le flot de 1. Il n'y alors plus d'autre chemin non saturé.

Le matching correspondant au flot maximal est alors $\{(a, e), (b, h), (c, f), (d, g)\}$.

Exercice 4

On considère la chaîne de Markov représentée à la figure 3.

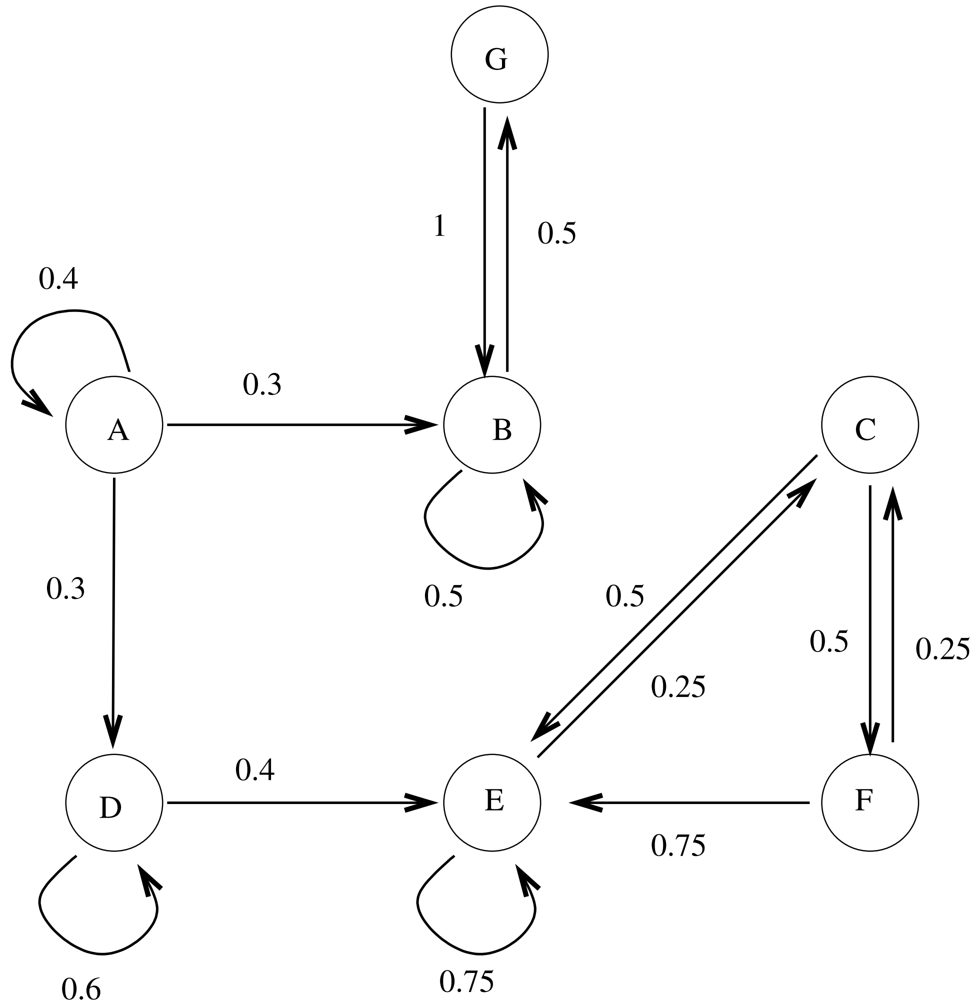

Figure 3:

1. Déterminer les composantes fortement connexes du graphe. En déduire l'ensemble des états récurrents et transients.

{A} est une composante fortement connexe dont des arêtes sortent. A **et donc un état transient.**

{D} est une composante fortement connexe dont des arêtes sortent. D **et donc un état transient.**

{B,G} est une composante fortement connexe dont aucune arête ne sort. B **et** G **sont donc récurrents.**

{C,D,F} est une composante fortement connexe dont aucune arête ne sort. C**,** E **et** F **sont donc récurrents.**

2. On considère la chaîne réduite aux états C, E et F. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre ${}^tX = {}^t XP$.

Le système à résoudre est

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}z$$
$$z = \frac{1}{2}x$$

Ses solutions sont de la forme $(2z, 7z, z)$.

4. Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de la chaîne restreinte aux états C, E et F? Justifier votre réponse.

La chaîne étant irréductible (C, E et F forment une composante fortement connexe) et apériodique (il y a une boucle sur C), la distribution de la chaîne tend vers l'unique distribution invariante.

D'après la question précédente, cette distribution est de la forme $(2z, 7z, z)$. Comme la somme doit valoir 1, la distribution limite est $(\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10})$.