Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°1 — 21 octobre 2019
durée: 1h30

Correction

Exercice 1. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(1) Calculer z^2 sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \sqrt{2+\sqrt{2}}^2 + i^2\sqrt{2-\sqrt{2}}^2 - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
&= 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} \\
&= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On a donc $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 4$ et $z^2 = 4\frac{1-i}{\sqrt{2}} = 4e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

(2) En déduire le module et l'argument principal de z.

On a $z^2 = 4e^{-\frac{i\pi}{4}} = \left(2e^{-\frac{i\pi}{8}}\right)^2$, donc $z = 2e^{-\frac{i\pi}{8}}$ ou $z = -2e^{-\frac{i\pi}{8}}$.

Comme $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2+\sqrt{2}} > 0$ et $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ (car $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$), on en déduit que $z = 2e^{-\frac{i\pi}{8}}$, donc $|z| = 2$ et l'argument principal de z est $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z-(1-2i)}{1-(1+2i)z}$.

(1) Déterminer pour quel complexe z la fonction f n'est pas définie. On le mettra sous forme algébrique.

La fonction n'est pas définie quand $1-(1+2i)z = 0$, c'est-à-dire quand

$$z = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

(2) Montrer que si $|z| = 1$, alors $|f(z)| = 1$.

Si $|z| = 1$, alors

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= \frac{\big(z-(1-2i)\big)\overline{\big(z-(1-2i)\big)}}{\big(1-(1+2i)z\big)\overline{\big(1-(1+2i)z\big)}} \\
&= \frac{\big(z-(1-2i)\big)\big(\bar{z}-(1+2i)\big)z}{\big(1-(1+2i)z\big)\big(1-(1-2i)\bar{z}\big)z} \\
&= \frac{\big(z-(1-2i)\big)\big(z\bar{z}-(1+2i)z\big)}{\big(1-(1+2i)z\big)\big(z-(1-2i)z\bar{z}\big)} \\
&= \frac{\big(z-(1-2i)\big)\big(1-(1+2i)z\big)}{\big(1-(1+2i)z\big)\big(z-(1-2i)\big)} \quad (\text{car } z\bar{z}=1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

donc $|f(z)| = 1$.

Exercice 3. Calculer explicitement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\theta + 2k\varphi).$$

On écrit

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\theta + 2k\varphi) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta+2ik\varphi}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2i\varphi}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}.\frac{1-e^{2in\varphi}}{1-e^{2i\varphi}}\right) \quad (\text{le dénominateur ne s'annule pas car } \varphi \notin \pi\mathbb{Z}) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}.\frac{e^{in\varphi}(e^{-in\varphi}-e^{in\varphi})}{e^{i\varphi}(e^{-i\varphi}-e^{i\varphi})}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(\theta+(n-1)\varphi)}.\frac{-2i\sin(n\varphi)}{-2i\sin(\varphi)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(\theta+(n-1)\varphi)}.\frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}\right) \\
&= \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\theta+(n-1)\varphi)}\right) \\
&= \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}\cos(\theta+(n-1)\varphi).
\end{aligned}
$$

Exercice 4. On considère le polynôme $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 8$.

(1) Rappeler la définition d'une racine de multiplicité m d'un polynôme.

Un nombre complexe α est une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si on a $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

(2) Calculer P' et déterminer ses racines. En déduire la valeur de l'unique racine double de P (notée r dans la suite).

On a $P' = 4X^3 + 6X^2 - 4X$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Le trinôme $2X^2 + 3X - 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 5^2$ et pour racines $\frac{-3\pm5}{2}$, soit $\frac{1}{2}$ et -2. Les racines de P' sont donc -2, 0 et $\frac{1}{2}$.

On a $P(0) = 8 \neq 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 8 \neq 0$, et $P(-2) = 0$. Par ailleurs, $P'' = 12X^2 + 12X - 4$ et $P''(-2) = 20 \neq 0$, donc -2 est de multiplicité 2 (racine double).

Conclusion: l'unique racine double de P est -2.

(3) Déterminer le polynôme R tel que $P = (X-r)^2 R$, où r est la racine double de P trouvée à la question précédente. On peut écrire $P = (X+2)^2(X^2 + aX + b)$, où a et b sont des coefficients à déterminer. En développant, on obtient

$$\begin{aligned} P &= (X^2 + 4X + 4)(X^2 + aX + b) \\ &= X^4 + X^3(a+4) + X^2(4 + 4a + b) + X(4a + 4b) + 4b, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $a = -2$ (coefficient de X^3), $b = 2$ (coefficient constant), et on vérifie que les autres coefficients coïncident alors, c'est-à-dire que

$$P = (X+2)^2(X^2 - 2X + 2).$$

(4) En déduire toutes les racines de P (dans $\mathbb{C}$), puis écrire P sous forme complètement factorisée. Le trinôme $X^2 - 2X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = (2i)^2$, et pour racines $\frac{2\pm2i}{2}$, soit $1+i$ et $1-i$. Les 4 racines de P sont donc -2 (multiplicité 2), $1-i$ et $1+i$.

Autrement dit, P se factorise sous la forme

$$P = (X+2)^2(X-1-i)(X-1+i).$$

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et strictement positifs.

Soit (H_n) la propriété: “u_n et v_n sont bien définis, et $u_n > 0$, $v_n > 0$”.

- (H_0) est vraie car $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$.
- Si (H_n) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n v_n > 0$ donc $\sqrt{u_n v_n}$ est bien définie, et par conséquent u_{n+1} aussi (et évidemment, v_{n+1} aussi). Par ailleurs, $u_{n+1} > 0$ (car $u_n v_n \neq 0$) et $v_{n+1} > 0$, donc (H_{n+1}) est vraie.

  Conclusion: par récurrence la propriété (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Exprimer $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2$ en fonction de u_n et v_n, et en déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 &= \sqrt{u_n v_n}^2 - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \\
&= u_n v_n - \frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n) \\
&= \frac{1}{4}\left(4u_n v_n - u_n^2 - v_n^2 - 2u_n v_n\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n\right) \\
&= -\frac{1}{4}(u_n - v_n)^2.
\end{aligned}$$

On a donc $u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $(u_{n+1} - v_{n+1})(u_{n+1} + v_{n+1}) \leqslant 0$. Comme $u_{n+1} + v_{n+1} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant 0$.

On a donc $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et la propriété est encore vraie pour $n = 0$ car $a < b$.

(3) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (u_n) est croissante.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geqslant 1$ puisque $v_n \geqslant u_n$. Par conséquent, $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n, ce qui prouve que (u_n) est croissante.

(4) Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (v_n) est décroissante.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant 0$ puisque $u_n \leqslant v_n$. Par conséquent, $v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout n, ce qui prouve que (v_n) est décroissante.

(5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, et qu'elles ont la même limite.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une certaine limite $L \geqslant 0$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2v_{n+1} = u_n + v_n$, c'est-à-dire $u_n = 2v_{n+1} - v_n$. Comme $v_n \to L$, on a également $v_{n+1} \to L$ donc $u_n \to 2L - L = L$.

Exercice 6. Pour chaque suite (u_n) définie ci-dessous, calculer un équivalent (le plus simple possible) de u_n, puis déterminer la limite (ou justifier l'absence de limite) de (u_n).

(1) $u_n = n^2\left(\ln n - n^{1/10}\right)$

Par croissance comparée, $\ln n = o(n^{1/10})$ donc $\ln n - n^{1/10} \sim -n^{1/10}$.

Par multiplication des équivalents, on a donc $u_n \sim -n^2.n^{1/10} = -n^{21/10}$

et $u_n \to -\infty$

(2) $u_n = \dfrac{\ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$

$$\text{On a} \quad \ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) = \ln\left(n.\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right)$$
$$= \ln n + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$
$$= \ln n + \ln(2+o(1))$$
$$= \ln n + \ln 2 + o(1)$$
$$= \ln n + o(\ln n) \sim \ln n.$$

D'autre part, $n^4+n^2-1 \sim n^4$ (polynôme) donc $\sqrt{n^4+n^2-1} \sim n^2$.

Par conséquent, on a $u_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$

et $u_n \to 0$ par croissance comparée.

(3) $u_n = \dfrac{n!+n^n}{n^{n-1}+e^{2n}}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$

Par croissance comparée, on a $n! = o(n^n)$, donc $n! + n^n \sim n^n$.

Également par croissance comparée, on a

$$e^{2n} = e^2.e^{2(n-1)} = e^2.o((n-1)^{n-1}) = o(n^{n-1})$$

donc $n^{n-1} + e^{2n} \sim n^{n-1}$.

Enfin, $\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1} = \dfrac{(n^2+3)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{2}{n+o(n)+n+o(n)} \sim \dfrac{1}{n}$.

Par conséquent, $u_n \sim \frac{n^n}{n^{n-1}}.\frac{1}{n} \sim 1$ et donc $u_n \to 1$.

(4) $u_n = \dfrac{n}{1+\frac{1}{n}} - \ln(e^n + (-1)^n)$

On a $u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(n - (1+\dfrac{1}{n}).\ln(e^n+(-1)^n)\right)$ avec $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \sim 1$

et $\ln(e^n+(-1)^n) = \ln\left(e^n(1+(-1)^n e^{-n})\right) = n + \ln(1+o(1)) = n + o(1)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} n-(1+\frac{1}{n}).\ln(e^n+(-1)^n) &= n-(1+\frac{1}{n})(n+o(1)) \\ &= = n-(n+1+o(1)) = -1+o(1) \end{aligned}$$

et donc $u_n \sim -1 \to -1$.