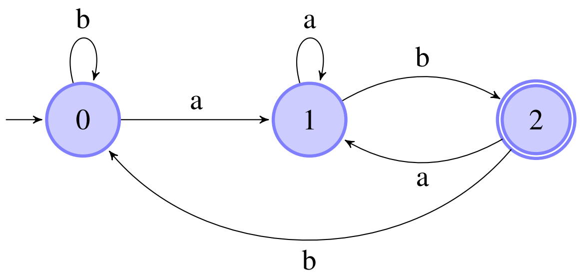
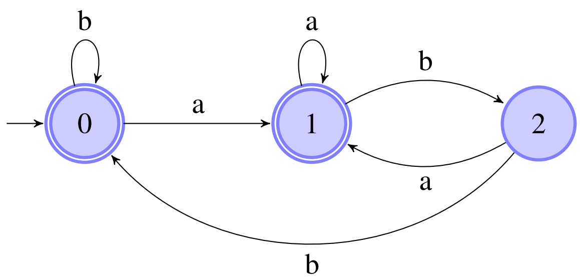
Théorie des Langages – Feuille nº 4
AUTOMATES FINIS : OPÉRATIONS
CORRECTION

Exercice 1 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Construire le complémentaire des automates suivants :

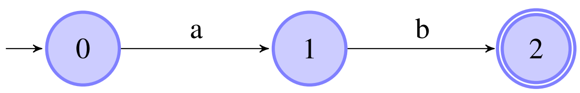
— Automate M_1



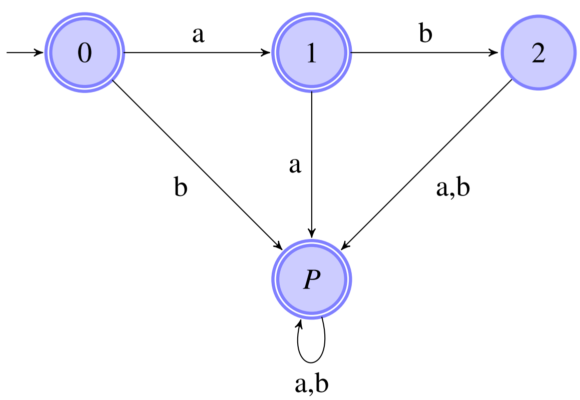
M_1 est déjà déterministe et complet donc on peut simplement inverser les états finaux et non-finaux.



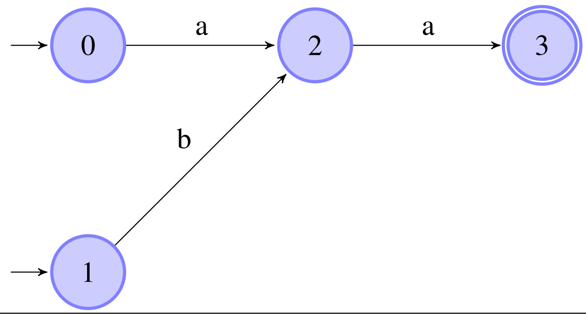
— Automate M_2



M_2 est déterministe mais n'est pas complet. On ajoute donc un état poubelle pour le compléter avec les transitions manquantes puis on inverse les états finaux et non-finaux.



— Automate M_3



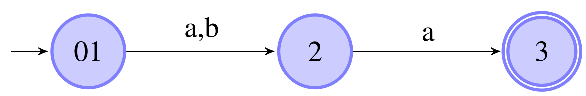
M_3 n'est pas détermiste (plusieurs états initiaux). Commençons par determiniser M_3

Système d'équations de l'automate :

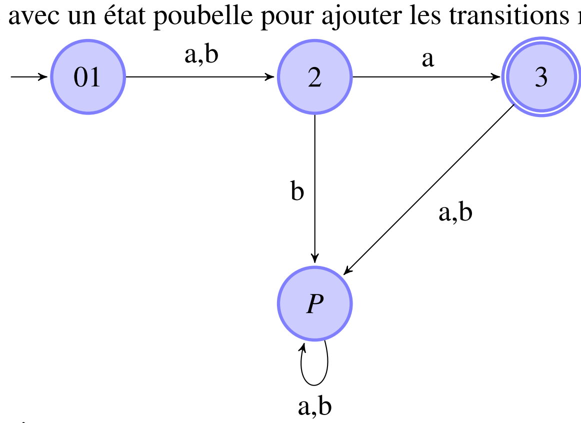
$$\begin{array}{rcl} L_0 & = & aL_2 \\ L_1 & = & bL_2 \\ L_2 & = & aL_3 \\ L_3 & = & \varepsilon \end{array}$$

Processus pour rendre l'automate déterministe :
$\mathcal{L}(M_3) = L_0 + L_1$

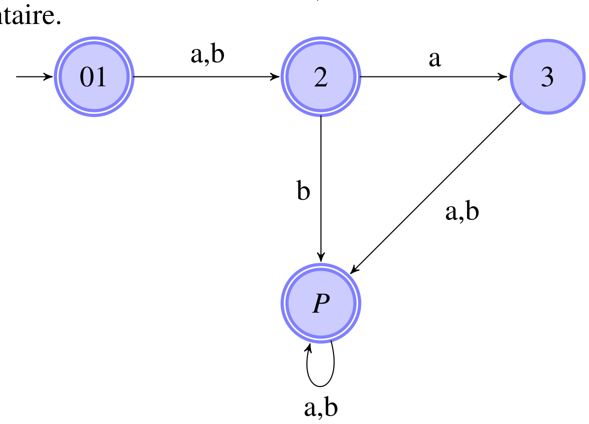
$$\begin{array}{lcl} L_0 + L_1 & = & aL_2 + bL_2 \\ L_2 & = & aL_3 \\ L_3 & = & \varepsilon \end{array}$$



On complète l'automate avec un état poubelle pour ajouter les transitions manquantes.



Et on fait le complémentaire.



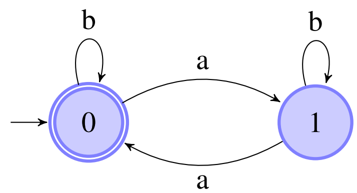
Exercice 2 - Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Soient $L_{M_1} = \{w \in \Sigma^* | \ |w|_a = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ et $L_{M_2} = \{w \in \Sigma^* | \ |w|_b = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$

1. Caractérisez en français les langages L_{M_1} et L_{M_2}

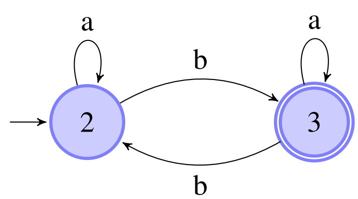
> L_{M_1} : mots qui contiennent un nombre pair de a
> L_{M_2} : mots qui contiennent un nombre impair de b

2. Construire les automates qui reconnaissent respectivement L_{M_1} et L_{M_2}

   — Automate M_1



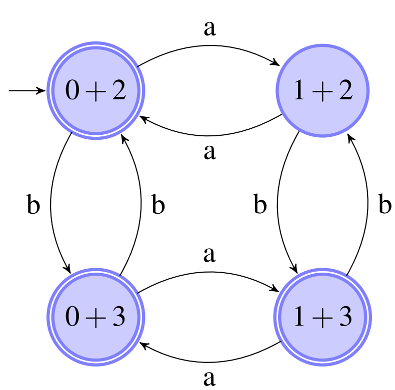
   — Automate M_2



3. Construire l'automate qui reconnaît $L_{M_1} + L_{M_2}$

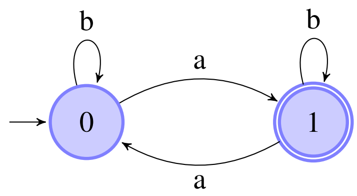
$$L_{M_1} \left\{ \begin{array}{lcl} L_0 & = & aL_1 + bL_0 + \varepsilon \\ L_1 & = & aL_0 + bL_1 \end{array} \right. \qquad L_{M_2} \left\{ \begin{array}{lcl} L_2 & = & aL_2 + bL_3 \\ L_3 & = & aL_3 + bL_2 + \varepsilon \end{array} \right.$$

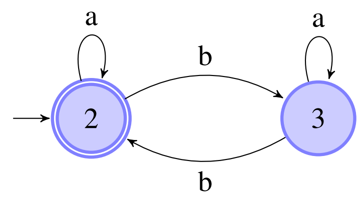
$$\begin{array}{lcl} L_{M_1} + L_{M_2} & = & L_0 + L_2 \\ L_0 + L_2 & = & a(L_1 + L_2) + b(L_0 + L_3) + \varepsilon \\ L_1 + L_2 & = & a(L_0 + L_2) + b(L_1 + L_3) \\ L_0 + L_3 & = & a(L_1 + L_3) + b(L_0 + L_2) + \varepsilon \\ L_1 + L_3 & = & a(L_0 + L_3) + b(L_1 + L_2) + \varepsilon \end{array}$$



4. Construire l'automate qui reconnaît $L_{M_1} \cap L_{M_2}$

M_1 et M_2 sont déjà complets et déterministes, on peut les complétementer (inverser états finaux) :

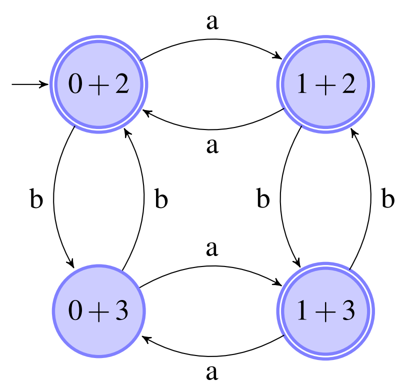




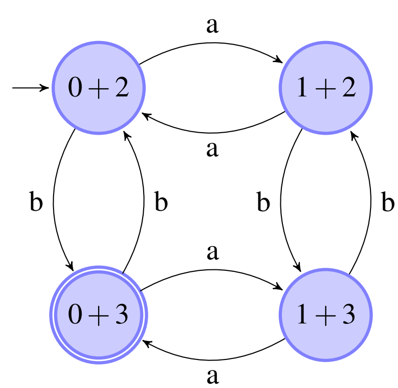
$$\overline{L_{M_1}} \begin{cases} L_0 & = & aL_1 + bL_0 \\ L_1 & = & aL_0 + bL_1 + \varepsilon \end{cases} \qquad \overline{L_{M_2}} \begin{cases} L_2 & = & aL_2 + bL_3 + \varepsilon \\ L_3 & = & aL_3 + bL_2 \end{cases}$$

On fait maintenant l'union de $\overline{M_1}$ et $\overline{M_2}$

$$\begin{array}{lcl} \overline{L_{M_1}} + \overline{L_{M_2}} & = & L_0 + L_2 \\ L_0 + L_2 & = & a(L_1 + L_2) + b(L_0 + L_3) + \varepsilon \\ L_1 + L_2 & = & a(L_0 + L_2) + b(L_1 + L_3) + \varepsilon \\ L_0 + L_3 & = & a(L_1 + L_3) + b(L_0 + L_2) \\ L_1 + L_3 & = & a(L_0 + L_3) + b(L_1 + L_2) + \varepsilon \end{array}$$

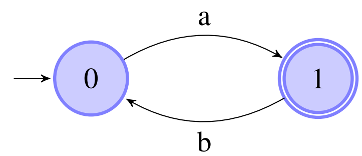


On complémente cet automate :

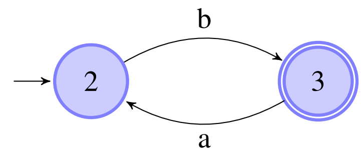


Exercice 3 - Soient les deux automates M_1 et M_2. Construire le l'automate qui reconnaît le langage $\mathcal{L}(M_1).\mathcal{L}(M_2)$.

— Automate M_1

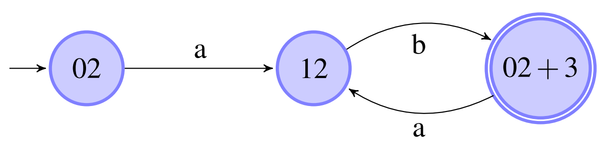


— Automate M_2



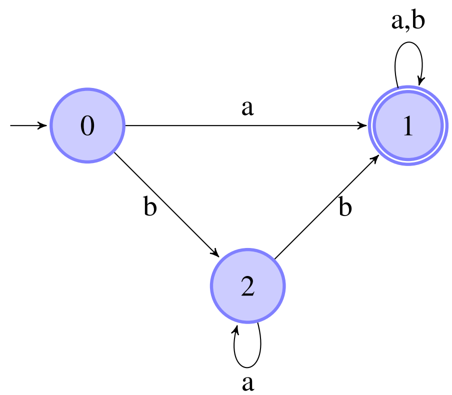
$$L_{M_1} \left\{ \begin{array}{lcl} L_0 & = & aL_1 \\ L_1 & = & bL_0 + \varepsilon \end{array} \right. \qquad L_{M_2} \left\{ \begin{array}{lcl} L_2 & = & bL_3 \\ L_3 & = & aL_2 + \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} L_{M_1}.L_{M_2} & = & L_0.L_2 \\ L_0.L_2 & = & aL_1.L_2 \\ L_1.L_2 & = & bL_0.L_2 + L_2 \\ & = & b(L_0.L_2 + L_3) \\ L_0.L_2 + L_3 & = & aL_1.L_2 + aL_2 + \varepsilon \\ & = & a(L_1.L_2 + L_2) + \varepsilon \\ L_1.L_2 + L_2 & = & b(L_0.L_2 + L_3) + bL_3 = L_1.L_2 \end{array}$$

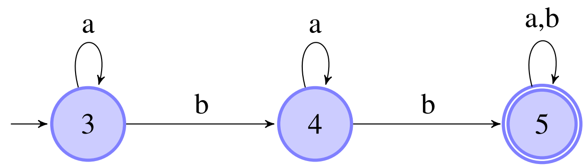


Exercice 4 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soient les deux automates M_1 et M_2 suivant

— Automate M_1



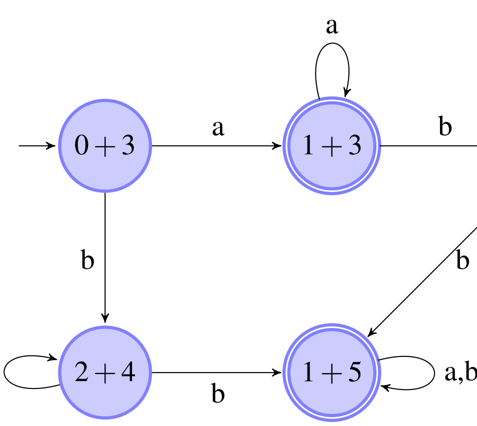
— Automate M_2



1. Construire l'automate **déterministe** qui reconnaît le langage $\mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$

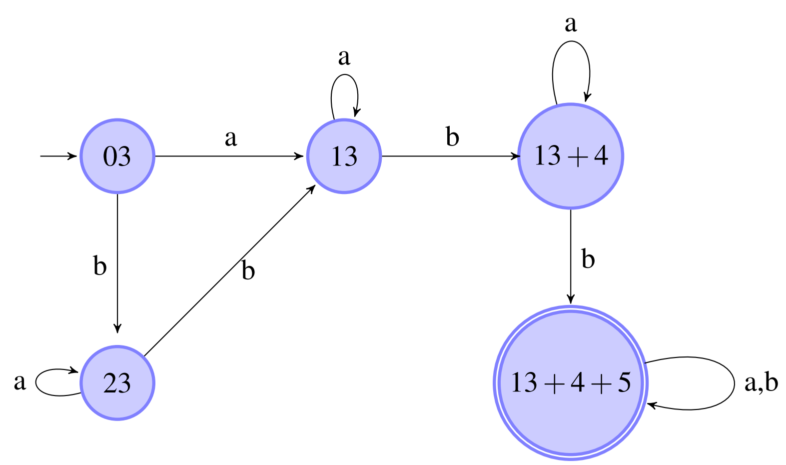
$$L_{M_1}\begin{cases} L_0 &= aL_1 + bL_2 \\ L_1 &= aL_1 + bL_1 + \varepsilon \\ L_2 &= aL_2 + bL_1 \end{cases} \qquad L_{M_2}\begin{cases} L_3 &= aL_3 + bL_4 \\ L_4 &= aL_4 + bL_5 \\ L_5 &= aL_5 + bL_5 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_{M_1} + L_{M_2} &= L_0 + L_3 \\ L_0 + L_3 &= a(L_1 + L_3) + b(L_2 + L_4) \\ L_1 + L_3 &= a(L_1 + L_3) + b(L_1 + L_4) + \varepsilon \\ L_2 + L_4 &= a(L_2 + L_4) + b(L_1 + L_5) \\ L_1 + L_4 &= a(L_1 + L_4) + b(L_1 + L_5) + \varepsilon \\ L_1 + L_5 &= a(L_1 + L_5) + b(L_1 + L_5) + \varepsilon \end{aligned}$$

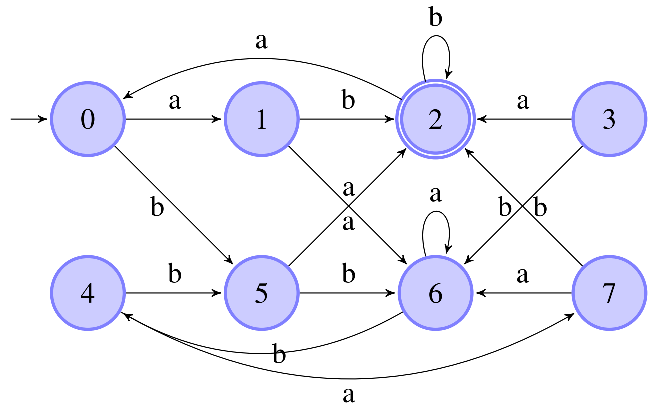


2. Construire l'automate **déterministe** qui reconnaît le langage $\mathcal{L}(M_1).\mathcal{L}(M_2)$

$$
\begin{aligned}
L_{M_1}.L_{M_2} &= L_0.L_3 \\
L_0.L_3 &= aL_1.L_3 + bL_2.L_3 \\
L_1.L_3 &= aL_1.L_3 + bL_1.L_3 + L_3 \\
&= a(L_1.L_3 + L_3) + b(L_1.L_3 + L_4) \\
L_2.L_3 &= aL_2.L_3 + b(L_1.L_3) \\
L_1.L_3 + L_3 &= aL_1.L_3 + bL_1.L_3 + L_3 + L_3 \\
&= L_1.L_3 \\
L_1.L_3 + L_4 &= aL_1.L_3 + bL_1.L_3 + L_3 + L_4 \\
&= a(L_1.L_3 + L_3 + L_4) + b(L_1.L_3 + L_4 + L_5) \\
&= a(L_1.L_3 + L_4) + b(L_1.L_3 + L_4 + L_5) \\
L_1.L_3 + L_4 + L_5 &= a(L_1.L_3 + L_4) + b(L_1.L_3 + L_4 + L_5) + L_5 \\
&= a(L_1.L_3 + L_4 + L_5) + b(L_1.L_3 + L_4 + L_5) + \varepsilon
\end{aligned}
$$



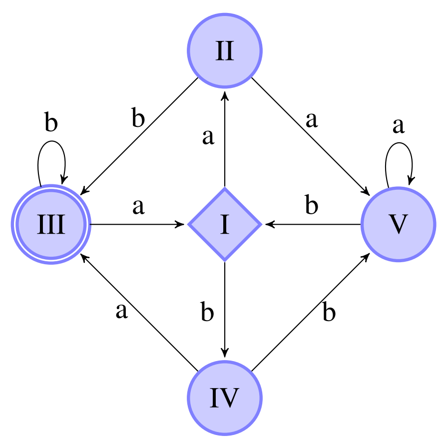
Exercice 5 - Minimiser les automates suivants en utilisant l'algorithme de Moore.

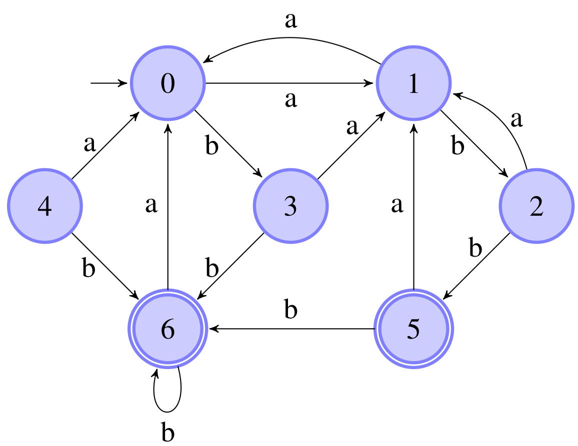


L'état 3 est inaccessible : on le supprime.

	0	1	2	4	5	6	7
ε	I	I	II	I	I	I	I
a	I	I	I	I	II	I	I
b	I	II	II	I	I	I	II
Bilan	I	II	III	I	IV	I	II
a	II	I	I	II	III	I	I
b	IV	III	III	IV	I	I	III
Bilan	I	II	III	I	IV	V	II
a	II	V	I	II	III	V	V
b	IV	III	III	IV	V	I	III
Bilan	I	II	III	I	IV	V	II

Etat initial : I (diamond)





L'état 4 est inaccessible : on le supprime.

	0	1	2	3	5	6
ε	I	I	I	I	II	II
a	I	I	I	I	I	I
b	I	I	II	II	II	II
Bilan	I	I	II	II	III	III
a	I	I	I	I	I	I
b	II	II	III	III	III	III
Bilan	I	I	II	II	III	III