Université de Paris

NUMÉRATION LOGIQUE

C9 : algèbre de Boole

Nicole VINCENT

Université de Paris

Algèbre de Boole

- Le nom d'algèbre de Boole ou calcul booléen est en l'honneur du mathématicien britannique George Boole (1815-1864), considéré comme créateur de la logique moderne
- Deux opérateurs arithmétiques binaires binaires "+" et "."   ; un opérateur unaire $\bar{a}$

$$(a + \bar{c}).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

- Le calcul booléen appliqué au calcul des propositions permet une approche **algébrique** pour traiter les formules **logiques**
- La structure d'algèbre de Boole s'applique à de nombreux domaines

Université de Paris

Algèbre de Boole

La structure d'algèbre de Boole s'applique à de nombreux domaines

- L'ensemble des parties d'un ensemble E : $\mathcal{P}$(E)
  - L'opération"+" est alors la réunion ∪,
  - l'opération "." est l'intersection ∩
  - $\bar{A}$ désigne le complément de A dans E

La phrase $(a + \bar{c}).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ correspond à $(A \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$

Les opérations ensemblistes obéissent aux mêmes lois que les opérations logiques

- calcul des propositions, formules logiques
  - "+" est associé à ∨
  - "." est associé à ∧
  - L'opérateur $\bar{a}$ représente l'opération unaire ¬a du calcul des propositions

La phrase $(a + \bar{c}).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ correspond à $(a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

Propriétés de base

L'ensemble {0 , 1} est muni des opérations “+” , “.” et “-” vérifiant

- associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a.b).c = a.(b.c)$
- commutativité : $a + b = b + a$ et $a.b = b.a$
- éléments neutre : $0 + a = a$ et $1.a = a$
- idempotence : $a + a = a$ et $a.a = a$
- involution : $\bar{\bar{a}} = a$
- complémentarité : $a.\bar{a} = 0$ et $a + \bar{a} = 1$
- éléments absorbants : $a + 1 = 1$ et $a.0 = 0$
- distributivité de . par rapport à + : $a.(b + c) = a.b + a.c$
- distributivité de + par rapport à . : $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$

En particulier ne pas confondre avec les lois sur le corps F_2

$1 + 1 = 1$ est faux dans F_2

Université de Paris

Propriétés de base

- Les lois de De Morgan s'écrivent : $\overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b}$ et $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$
- Les simplifications utiles

  a + $\bar{a}$ .b = a + b   et   (a + b).(a + c) = a + b.c
- Le calcul booléen est utilisé
  - en électronique pour simplifier des circuits logiques ou
  - en programmation pour simplifier des tests logiques
- Suivant le langage de programmation, le contexte, les opérations sont notées
  - le "." est aussi noté "∧", "&", "&&" ou "AND"
  - le "+" est aussi noté "V", "|", "||" ou "OR"
  - le "-" est aussi noté "¬", "!", "NOT"

Université de Paris

Fonction booléenne

- Les **formules** du calcul des propositions deviennent des **fonctions booléennes** c'est-à-dire des applications de $\{0 , 1\}^n \rightarrow \{0 , 1\}$ où n est le nombre de variables

  On parle aussi de **fonctions logiques**

- Pour une fonction booléenne de n variables $f (x_1, \dots , x_n)$
  - on appelle **minterme** un produit m qui contient chaque variable x_i $(1 \leq i \leq n)$, ou sa négation, une seule fois et tel que m = 1 entraîne que $f (x_1, \dots , x_n)$ est vraie
  - on appelle **maxterme** une somme M qui contient chaque variable x_i $(1 \leq i \leq n)$, ou sa négation, une seule fois et telle que M = 0 entraîne que $f (x_1, \dots , x_n)$ est fausse

- Pour une fonction logique f on peut dire que
  - la FND de f est la disjonction des mintermes de f
  - la FNC de f est la conjonction des maxtermes de f

Université de Paris

Fonction booléenne : exemple

On considère une fonction f : $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$(a + \bar{c}).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

a b c	f (a, b, c)
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

On obtient

FND de f = $(\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}) + (\bar{a}.b.\bar{c}) + (a.\bar{b}.\bar{c}) + (a.\bar{b}.c) + (a.b.\bar{c})$

= “somme des mintermes”

FNC de f = $(a + b + \bar{c}).(a + \bar{b} + \bar{c}).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

= “produit des maxtermes”

f est plus “grande” que chacun de ses mintermes, et plus “petite” que chacun de ses maxtermes

Table de Karnaugh

- La simplification d'une expression logique par la table de Karnaugh est une méthode développée en 1953 par Maurice Karnaugh, ingénieur en télécommunications aux Bell Labs

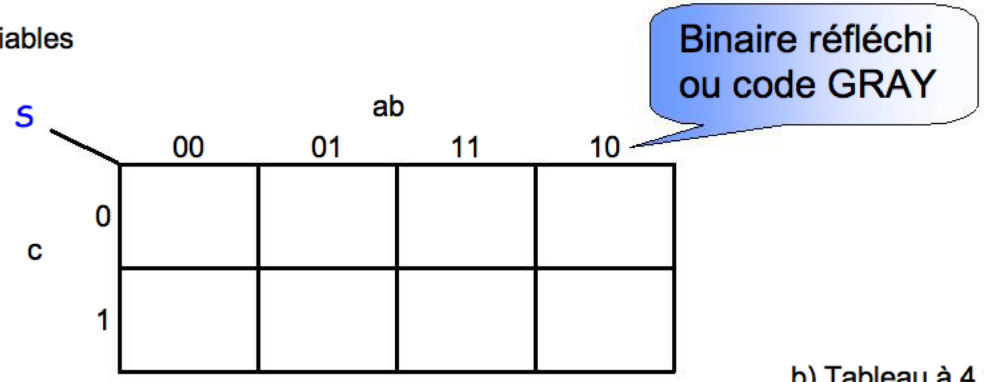
- Présentation des états d'une fonction logique, non pas sous la forme d'une table de vérité, mais en utilisant un tableau à double entrée

- Chaque case du tableau correspond à une **combinaison** des variables d'entrée, donc à une ligne de la table de vérité
  - Le tableau de Karnaugh aura autant de cases que la table de vérité possède de lignes

- Les lignes et les colonnes du tableau sont numérotées selon le code binaire réfléchi (code de Gray) :
  à chaque passage d'une case à l'autre, une seule variable change d'état

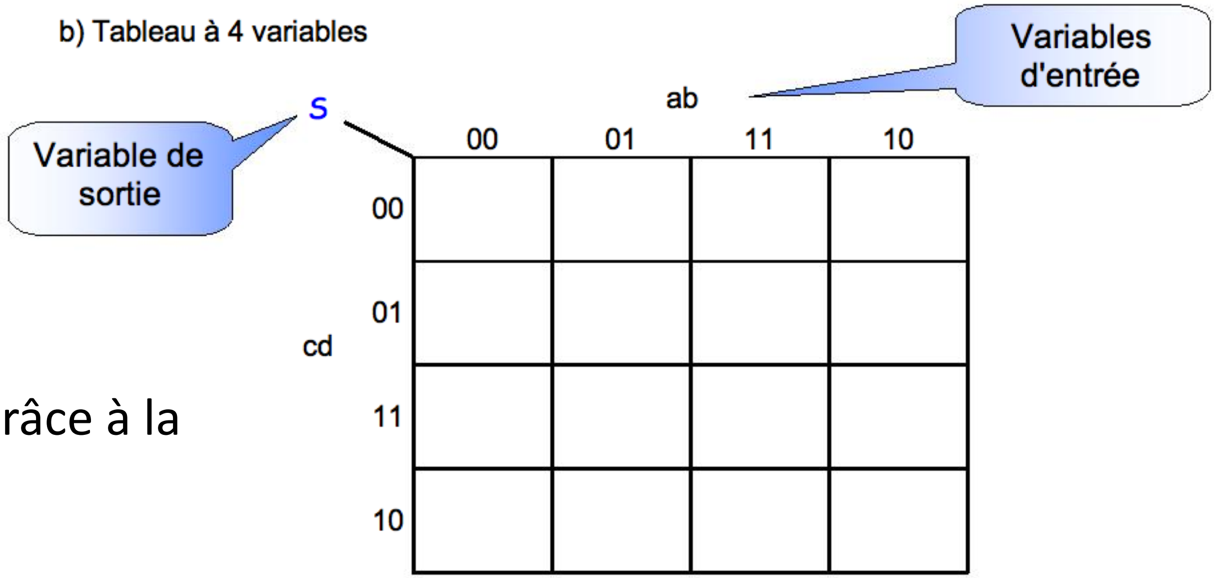
Table de Karnaugh : exemple

a) Tableau à 3 variables



On remplit la table grâce à la fonction booléenne
F(a,b,c)

b) Tableau à 4 variables



On remplit la table grâce à la fonction booléenne
F(a,b,c,d)

Université de Paris

Table de Karnaugh : Somme

Pour obtenir une **somme** associée à une formule F

- Constitution des blocs
  - Regrouper les cases adjacentes de “1” par paquets de taille des puissances de 2

    Pour minimiser le nombre de paquets, prendre les rectangles les plus grands possibles : 2^n, . . . , 16, 8, 4, 2,1
  - Une même case peut faire partie de plusieurs regroupements
  - Les regroupements peuvent se faire au delà des bords : les côtés/coins ont des codes Gray voisins.
  - Toute case contenant “1” doit faire partie d’au moins un regroupement, mais aucun “0” ne doit y être
- Pour chaque bloc, on élimine les variables qui changent d’état, on ne conserve que celles qui restent fixes

  On multiplie les variables fixes (“.”) afin d’obtenir des mintermes de F
- Les produits obtenus sont ensuite sommés (“+”) pour obtenir une **FND** de F

Table de Karnaugh : exemple

Simplifier la fonction F = $\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.d + a.\bar{b}.c.d + a.b.\bar{c}.\bar{d}$

La table de Karnaugh associée est

- 1er regroupement : a change d'état et est éliminé, b vaut 1, c et d valent 0, d'où le minterme b.$\bar{c}.\bar{d}$
- 2eme regroupement : b change d'état et est éliminé, a, c et d valent 1, d'où le minterme : a.c.d

a b

c d

F	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

- On fait la somme des mintermes et F = (a.c.d) + (b.$\bar{c}.\bar{d}$)

Université de Paris

Table de Karnaugh : exemple

W = $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$

table de Karnaugh :

a b

c d

W	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

W = $\bar{a}\,.\,\bar{b}$

Table de Karnaugh : exemple

$$X = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.d + a.\bar{b}.c.\bar{d}$$

table de Karnaugh :

a b

c d

X	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$X = \bar{b}$

Université de Paris

Table de Karnaugh

Y = $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d}$

table de Karnaugh :

a b

c d

Y	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Y= $\bar{b}\ .\ \bar{d}$

Logique appliquée à la criminologie

Résolution de problèmes par le calcul des propositions, simplification par table de Karnaugh

Lors d'une enquête de l'inspecteur, les personnes A, B, C et D sont suspectées. Il est établi que :

1. Si A et B sont coupables, il en est de même de C.
2. Si A est coupable, l'un au moins de B et C est aussi coupable.
3. Si C est coupable, D l'est aussi.
4. Si A est innocent, D est coupable.

Peut-on établir la culpabilité de l'un ou plusieurs des suspects?

On définit les propositions :

a = ' A est coupable ', b = ' B est coupable ' ,

c = ' C est coupable ' et d = ' D est coupable '

On écrit les connaissances :

1 : $(a \land b) \rightarrow c$

2 : $a \rightarrow (b \lor c)$

3 : $c \rightarrow d$

4 : $\neg a \rightarrow d$

Université de Paris

1 : (a∧b)→c

2 : a→(b∨c)

3 : c→d

4 : ¬a→d

Criminologie solution

On traduit les connaissances en langage des propositions

on écrit leur conjonction F = [(a ∧ b) → c] ∧ [a → (b ∨ c)] ∧ [c → d] ∧ [¬a → d]

Table de vérité

a	b	c	d	(a∧b)→c	a→(b∨c)	c→d	¬a→d	F
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

tableau de Karnaugh de F

a b

F	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

c d

F = $\bar{a}$ .d + c.d

F = (¬a ∧ d) ∨ (c ∧ d) = (¬a ∨ c) ∧ d

D'où D est certainement coupable

Université de Paris

Table de Karnaugh : Produit

- Obtenir la FNC d’une expression revient à obtenir la FND de sa négation (i.e. obtenir sa négation sous forme de somme)
- Pour obtenir la FND de F, il faut déterminer les cases qui rendent F vraies, c’est donc les cases qui contiennent 0 qui sont concernées ici
- On regroupe les 0
- On obtient ainsi une somme pour F, qui se transforme en produit quand on applique la négation pour obtenir F

Table de Karnaugh : Produit

Pour obtenir un **produit** associée à une formule F

- Constitution des blocs
  - Regrouper les cases adjacentes de “0” par paquets de taille des puissance de 2.
    Pour minimiser le nombre de paquets, prendre les rectangles le plus grand possible : 2^n, . . . , 16, 8, 4, 2,1
  - Une même case peut faire partie de plusieurs regroupements
  - Les regroupements peuvent se faire au delà les bords : les côtés/coins ont des codes Gray voisins
  - Toute case contenant “0” doit faire partie d’au moins un regroupement, aucun “1” ne doit y être
- Pour chaque bloc, on élimine les variables qui changent d’état,
  on ne conserve que celles qui restent fixes

  On somme les variables fixes avec “+” afin d’obtenir des maxtermes de F
- Les sommes obtenues sont ensuite multipliées avec “.” pour obtenir une FNC de F

Université de Paris

Table de Karnaugh

On reprend la formule X et sa table de Karnaugh

X = $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.d + a.\bar{b}.c.\bar{d}$

1. Soit on regroupe les “0” et on fait le produit des maxtermes de variables qui ne changent pas et qui rendent faux X.
2. Soit on regroupe les “1”et on fait la somme des mintermes de variables qui ne changent pas et qui rendent vrai X.

a b (columns), c d (rows)

X	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\bar{X} = b$ X $= b$

Université de Paris