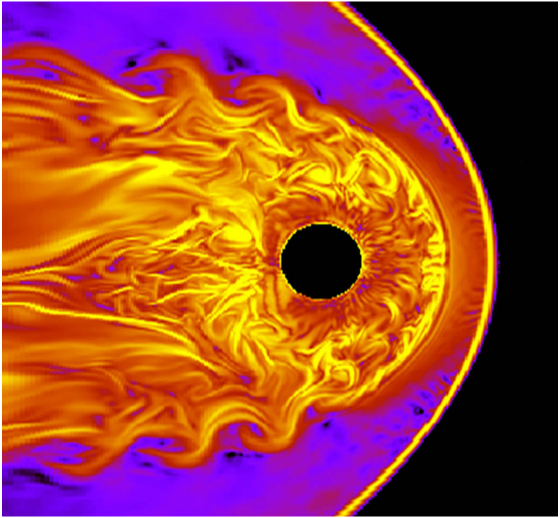
Equations différentielles



Simulation numérique, via une équation différentielle, du flux d'ions et d'électrons éjectés par la haute atmosphère du soleil et arrivant sur la terre (au centre), qui est protégée par sa magnétosphère. La plupart des phénomènes physiques (mais aussi, pour beaucoup, économiques) se modélisent par des équations différentielles (ou leur généralisation en équations aux dérivées partielles).

Equation différentielle : définition

Equations du premier ou second degré : $3x + 1 = 0$ ou $x^2 + 4x - 1 = 0$: équations dont l'inconnue est un *nombre*.

Equation différentielle : équation dont *l'inconnue* est une *fonction*, posée sous la forme d'une relation entre la fonction et sa (ou ses) dérivée(s).

Exemples: • $y' + 3y = 0$: y est l'inconnue. *Solution* : Toute fonction $y(x)$ telle que pour tout x,

$$y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Exemple : $y(x) = e^{-3x}$.

• $y'' + xy' - y = 0$: toute fonction $y(x)$ telle que pour tout x,

$$y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$$

est *solution*. Exemple : $y(x) = 0$.

• $\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$: toute fonction $y(x)$ telle que pour tout x,

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 4$$

est *solution*. Exemple : $y(x) = 4e^{2x}$.

Equation différentielle : forme générale

Une *équation différentielle du premier ordre* s'écrit :

$$y'(x) = f(x, y(x)), \; x \in I, \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Autrement dit : **on cherche** y fonction dérivable verifiant (1), *i.e.*

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

Rôle de la *condition initiale* : préciser la valeur de la solution recherchée y en un point x_0 de I, autrement dit : **imposer**

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Equation différentielle : questions

1. **Questions théoriques :** à quelle(s) condition(s) portant sur la fonction f le problème (1)–(2) admet-elle des solutions ? Sur quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ ces solutions sont-elles définies ? Existe-t-il une solution unique vérifiant des conditions données ?

2. **Résolution formelle :** est-il possible d'exprimer les solutions du problème (1)–(2) comme combinaisons des fonctions classiques ?

3. **Résolution numérique :** est-il possible de calculer par ordinateur des approximations numériques des solutions du problème (1)–(2) ? Quelle précision par rapport aux solutions théoriques une méthode donnée permet-elle d'atteindre ?

Equation différentielle du premier ordre homogène

Une *équation différentielle du premier ordre homogène* est une équation différentielle du type

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0,$$

avec α fonction continue sur un intervalle I.

Théorème: *Soit A une primitive de α sur I. Alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$y(x) = Ce^{-A(x)},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Corollaire: *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions de $y' = \lambda y$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{\lambda x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.*

Exercice: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' + xy = 0$
3. $y' + \sin(x)y = 0$
4. $y' + \sqrt{x}y = 0$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$
5. $xy' + y = 0$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$
6. $(1 + x^2)y' + y = 0$
7. $\begin{cases} y' + xy = 0 \\ y(1) = 5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} (1 + x^2)y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} (1 + x^2)y' + xy = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Equation différentielle du premier ordre avec second membre

Une *équation différentielle du premier ordre avec second membre* est une équation différentielle du type

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = h(x), \qquad (E_h)$$

avec α et h fonctions continues sur un intervalle I.

Théorème: *Soit y_* une solution de (E_h) et A une primitive de α sur I. Alors l'ensemble des solutions de (E_h) est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$y(x) = y_*(x) + Ce^{-A(x)},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque: Ainsi, la forme générale des solutions de (E_h) est :

solution de (E_h) = solution particulière y_* de (E_h) + solution générale de (E_0),

avec (E_0) l'*équation différentielle du premier ordre homogène* associée :

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0. \qquad (E_0)$$

Exercice: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 7$
2. $y' + xy = x$
3. $(1 + x^2)y' + y = \arctan(x) + 1$
4. $\begin{cases} y' + 3y = 7 \\ y(1) = 5 \end{cases}$

Comment trouver des solutions particulières ?

Considérons une *équation différentielle du premier ordre avec second membre*

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = h(x), \qquad (E_h)$$

avec α et h fonctions continues sur un intervalle I.

On cherche une *solution particulière y_**.

a) Si $\alpha =$ Constante et

$$h(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$$

polynôme de degré n, alors on peut trouver une solution particulière sous la forme

$$y_*(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

d'un polynôme de degré n.

b) Si $\alpha =$ Constante et $h(x) = e^{\beta x}$, alors

$$y_*(x) = \begin{cases} \frac{e^{\beta x}}{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \neq 0, \\ x e^{\beta x} & \text{si } \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

est une solution particulière.

c) Si $\alpha =$ Constante et $h(x) = d\cos(\omega x) + c\sin(\omega x)$, alors on peut trouver une solution particulière sous la forme

$$y_*(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x).$$

Comment trouver des solutions particulières ?

d) **Variation de la constante :** on cherche une solution particulière sous la forme $C(x)e^{-A(x)}$ avec A primitive de α. On a

$$y_*(x) = C(x)e^{-A(x)} \text{ solution de } (E_h) \iff C'(x) = h(x)e^{A(x)}.$$

Exemples: • $(1+x^2)y' + xy = -x$ sur $\mathbb{R} \hookrightarrow C(x) = -\sqrt{1+x^2}$

• $y' + \tan x\ y = \sin x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\hookrightarrow C(x) = -\ln(\cos(x))$

Exercice: Résoudre sur les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 5y = e^{4x}$
2. $y' + 5y = e^{-5x}$
3. $y' - 2y = x$
4. $y' + 5y = 6$
5. $y' + 2y = x^2 + x - 1$
6. $y' + 4y = x^2$
7. $y' + y = 2\sin(x)$
8. $y' - y = (x+1)e^x$
9. $y' + y = x - e^x + \cos(x)$
10. $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$
11. $\begin{cases} y'\sin(x) - y\cos(x) = -1 \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$
    sur l'intervalle $I =]0, \pi[$

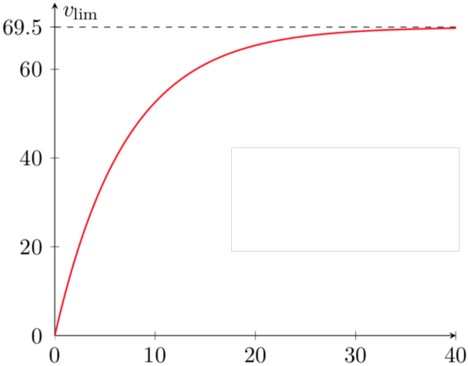
Mobile en chute libre avec frottements :

Loi de Newton : $mg + kv = -ma$,

$$
\begin{aligned}
\text{avec } v &= \text{vitesse verticale}\\
a &= \text{accélération verticale}\\
m &= \text{masse parachutiste} = 80\\
k &= \text{constante de frottements} = 11.3\\
g &= \text{constante de pensanteur} = 9.8
\end{aligned}
$$

$\hookrightarrow \quad v'(t) + \dfrac{v(t)}{\tau} = g \qquad \text{pour } \tau = \dfrac{m}{k}$

$\hookrightarrow \quad \text{si } v(0) = 0, \qquad v(t) = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



$\longleftarrow$ Vitesse du parachutiste en mètres/seconde en fonction du temps en secondes

Equations différentielles du second ordre

Une *équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants* est une équation différentielle du type

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (E_0^s)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$.

Cherchons d'abord les solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$. On a

$$y(x) = e^{rx} \text{ solution } \iff r^2 + pr + q = 0.$$

L'éq. $r^2 + pr + q = 0$ (de discrim. Δ) est appelée *éq. caractéristique* de (E_0^s).

Théorème: *Les solutions de (E_0^s) sont les fonctions de la forme*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et les fonctions y_1 et y_2 définies comme suit :

1. *si $\Delta > 0$, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique,*
2. *si $\Delta = 0$, $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique,*
3. *si $\Delta < 0$, $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ et $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ où $a + ib$ et $a - ib$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.*

Exercice: a) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$. b) Résoudre $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \; y'(0) = 2 \end{cases}$

Méthode de variation de la constante : si l'équation a un second membre :

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \qquad (E_h^s)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$, alors on cherche une solution particulière y_* sous la forme

$$C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

avec y_1 et y_2 les fonctions définies précédemment.

Théorème: *Soit y_* solution (particulière) de (E_h^s). Alors l'ensemble des solutions de (E_h^s) est l'ensemble des fonctions de la forme*

$$y(x) = y_*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Remarque: Ainsi, la forme générale des solutions de (E_h^s) est

solution de (E_h) = solution particulière y_* de (E_h^s) + solution générale de (E_0^s).

Exercice: Résoudre les équations différentielles suivantes :

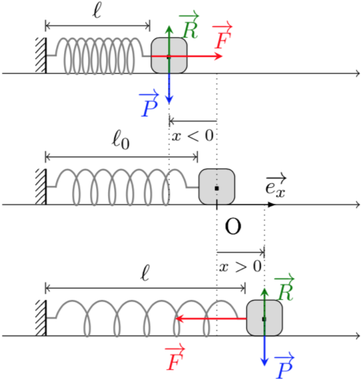
1. $y'' + 2y' + y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 2x^2 + 3x + 1$
3. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$
3. $y'' - 3y' - 4y = 0$
4. $y'' - 3y' - 4y = 8$
5. $y'' - 3y' = 8$
6. $y'' = 8$
7. $y'' - 3y' + 2y = x^3 - x$
8. $y'' - 3y' = 2x + 1$
9. $y'' = 2x^2 + 2x + 1$
10. $y'' - y' - 2y = 0$
11. $y'' - y' - 2y = 3e^x$
12. $y'' - 2y' + 10y = 0$
13. $y'' + 2y' = 2e^{-2x}$
14. $y'' - 3y' + y = 0$
15. $y'' - 2y' + y = e^x$

Equations différentielles du second ordre et oscillateurs

a) Oscillateur harmonique. Un point M de masse m, accroché à un ressort horizontal, se déplace sans frottement à l'horizontale. La variable $x(t)$ mesure les écarts à la position d'équilibre. À $t = 0$, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x_0 puis on le lâche sans vitesse initiale.



Loi de Newton : $-kx(t) = ma(t)$,

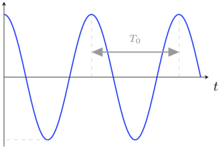
avec :

$$\begin{aligned} a(t) &= \text{accélération horizontale} = x''(t) \\ k &= \text{constante de raideur du ressort} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ pour $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

$\hookrightarrow$ si $x'(0) = 0$, $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$\hookrightarrow$ Oscillations régulières *éternelles* de fréquence ω_0 :



Oscillations harmoniques de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$

Vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=SHvBjJY5Tu4`

b) Oscillateur amorti. Même protocole, mais cette fois, des frottements fluides viennent freiner le point M dans son mouvement.

Loi de Newton : $-kx(t) - \alpha v(t) = ma(t)$,

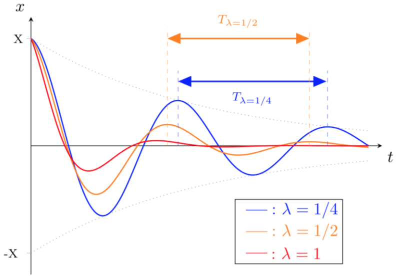
avec :

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{vitesse horizontale} = x'(t) \\ \alpha &= \text{coefficient de frottement} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ pour $\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$

$\hookrightarrow$ Equation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0 = 0 \implies \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

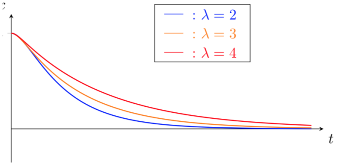
- Si $\Delta < 0$ (càd si $\lambda < \omega_0$), alors les racines de l'eq. car. sont $-\lambda \pm i\omega_\lambda$ pour $\omega_\lambda = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et la solution est $x(t) = Xe^{-\lambda t}\cos(\omega_\lambda t + \phi)$ avec $X, \phi \in \mathbb{R}$



Vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=u13rckeBXt0`

Oscillations pseudo-périodiques de période $T_\lambda = 2\pi/\omega_\lambda$

- Si $\Delta > 0$ (càd si $\lambda > \omega_0$), alors les racines de l'eq. car. sont $r_\pm = -\lambda \pm \omega$ pour $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ et la solution est $x(t) = Ae^{r_- t} + Be^{r_+ t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$



Trop de frottements : pas d'oscillations ! !

c) Oscillateur amorti en régime forcé. Même protocole, mais cette fois, en plus des frottements, une force extérieure périodique sinusoïdale est appliquée à M.

Loi de Newton : $\quad -kx(t) - \alpha v(t) + F(t) = ma(t),$

avec $F(t) = F_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$ la force extérieure

$$\hookrightarrow \qquad x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 A \cos(\omega_{\text{ext}} t) \qquad \text{pour } A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

Solution particulière y_* sinusoïdale. Comme la solution générale de l'équation homogène tend vers 0 quand $t \to \infty$, pour $t \gg 1$ (*régime permanent*), seule y_* reste. Si $\omega_0 > \lambda$, on remarque que cette amplitude des oscillations de y_*, qui est fonction de ω_{ext}, est maximale pour $\omega_{\text{ext}} = \omega_\lambda$: *fréquence de résonance*.
`https://www.youtube.com/watch?v=pplmsONrOXs`

Exercice: *Pour comprendre la notion de fréquence de résonance.* Soit $F_0 > 0$, $\omega_0 > 0$ et $\omega_{\text{ext}} \neq \omega_0$. Donner la solution du type $y(t) = C\cos(\omega_{\text{ext}} t)$ de l'équation différentielle

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = F_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t).$$

Quelle est la limite de l'amplitude C de la solution lorsque ω_{ext} tend vers ω_0 ?

Un système oscillant naturel : l'océan