Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°2

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Partie II

Méthode de travail

- Cette fiche se travaille comme en TD avec une feuille et un stylo !
Ne vous contentez pas de la lire.
- Votre objectif : faire les exercices avec le plus d'autonomie possible. Ne passer à la diapo suivante que si vous bloquez.
- Quelques rappels de cours très succincts sont donnés. Une fois les premiers exercices d'applications compris, relisez le poly pour consolider et approfondir vos connaissances.
- Dernière remarque : la maîtrise des exercices ne se limite pas aux méthodes de calcul, entraînez vous également à rédiger correctement vos réponses.

Bon travail à tous

Exercice 3 : équations différentielles de second membre produit polynôme-exponentielle

Rappel (proposition 5.2.3 du polycopié de cours) :

Soit (E) l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = h(x), \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

pour $\alpha, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

L'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\left\{ y_p + y \,|\, y \text{ solution de } (E_0) \right\}$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y parcourt les solutions de l'équation homogène

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme également de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un tel produit.

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1**ère** **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\textbf{ère}}$ **étape :** on cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

Les solutions de (E_0) sont de la forme $y(x) = Ce^{-x}, \; C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p.

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :
Rappel : $(uv)' = u'v + uv'$ donc $\left(P(x)e^{-x}\right)' = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$.

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ étape : on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x} \\ \iff \quad & P(x)'e^{-x} = xe^{-x} \\ \iff \quad & P(x)' = x\,. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x} \\ \Longleftrightarrow \quad & P(x)'e^{-x} = xe^{-x} \\ \Longleftrightarrow \quad & P(x)' = x\,. \end{aligned}$$

Commentaires : 2 cas peuvent se présenter

- on sait résoudre immédiatement car les termes en $P(x)$ ont disparu : il suffit de calculer une primitive de P'
- sinon on reconnaît une équation différentielle à second terme polynomial : on introduit comme à l'Exercice 2 des coefficients à déterminer.

Ici, une primitive évidente de P' est $P(x) = \frac{x^2}{2}$, d'où $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$.

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y_p + y_C$:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie :

Exercice 3

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Résumé : Une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions de la forme

$$y_C(x) = Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y_p + y_C$:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

On vérifie :

- $y'(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} - C\right) e^{-x}$
- $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x}$
- donc $y'(x) + y(x) = xe^{-x}$ ce qui correspond bien à (E).

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1**ère** **étape :** les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(x) + 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (E_0)$$

sont de la forme $y(x) = Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x}, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\textbf{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p.

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-3x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-3x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-3x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-3x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{-3x} - 3P(x)e^{-3x} + 2P(x)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \Longleftrightarrow \quad & \Big(P'(x) - P(x)\Big)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \Longleftrightarrow \quad & P'(x) - P(x) = x + 1\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

Commentaires : on reconnaît une équation différentielle à second membre polynomial de degré 1 donc on introduit des coefficients à déterminer.

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x}, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-3x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-3x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{-3x} - 3P(x)e^{-3x} + 2P(x)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \iff \quad & \big(P'(x) - P(x)\big)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \iff \quad & P'(x) - P(x) = x + 1\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

On pose

$$P(x) = ax + b, \ \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte P dans l'équation (1) et on obtient :

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière y_p. Le second membre est de la forme $Q(x)e^{-3x}$ avec Q un polynôme, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{-3x}$ avec P un polynôme.
On injecte y_p dans l'équation (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & P'(x)e^{-3x} - 3P(x)e^{-3x} + 2P(x)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \iff & \Big(P'(x) - P(x)\Big)e^{-3x} = (x+1)e^{-3x} \\ \iff & P'(x) - P(x) = x + 1\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

On pose

$$P(x) = ax + b, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte P dans l'équation (1) et on obtient :

$$\begin{aligned} & a - 3(ab + b) + 2(ax + b) = x + 1 \\ \iff & -ax + (a - b) = x + 1 \end{aligned}$$

On identifie terme à terme : $a = -1$, d'où $-1 - b = 1$ et $b = -2$.
Ainsi, $P(x) = -x - 2$ et $y_p(x) = (-x-2)e^{-3x}$.

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion :

Exercice 3

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-2x} - (x+2)e^{-3x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 : équations différentielles de second membre sinus-cosinus

Rappel (proposition 5.2.3 du polycopié de cours) :

Soit (E) l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = h(x), \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

pour $\alpha, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

L'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\left\{ y_p + y \,|\, y \text{ solution de } (E_0) \right\}$$

où y_p est une solution particulière de (E) et y parcourt les solutions de l'équation homogène

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (E_0)$$

- Si h est un polynôme de degré n, on peut chercher y_p sous la forme d'un polynôme également de degré n.
- Si h est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, on peut chercher y_p sous la forme d'un tel produit.
- Si h est une combinaison linéaire de fonctions sinus et cosinus, on peut chercher y_p sous la même forme.

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :**

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1**ère** **étape :** les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(x) - 2y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (E_0)$$

sont de la forme $y(x) = Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :**

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x), \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)) - 2(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) = \cos(x) + 2\sin(x) \\ \iff \quad & (\mu - 2\lambda)\cos(x) + (-\lambda - 2\mu)\sin(x) = \cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)) - 2(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) = \cos(x) + 2\sin(x) \\ \iff \quad & (\mu - 2\lambda)\cos(x) + (-\lambda - 2\mu)\sin(x) = \cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit avec $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$ que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\lambda + \mu & = & 1 \\ -\lambda - 2\mu & = & 2 \end{array} \right. .$$

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2$^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E) et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)) - 2(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) = \cos(x) + 2\sin(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & (\mu - 2\lambda)\cos(x) + (-\lambda - 2\mu)\sin(x) = \cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit avec $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$ que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\lambda + \mu & = & 1 \\ -\lambda - 2\mu & = & 2 \end{array} \right. .$$

On élimine μ en sommant 2 fois la première équation avec la deuxième. On obtient $-5\lambda = 4$ d'où $\lambda = -\frac{4}{5}$ puis on déduit que $\mu = 1 + 2\lambda = -\frac{3}{5}$.

Une solution particulière est donc $y_p(x) = -\frac{4}{5}\cos(x) - \frac{3}{5}\sin(x)$.

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion :

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{2x} - \frac{4}{5}\cos(x) - \frac{3}{5}\sin(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier :

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{2x} - \frac{4}{5}\cos(x) - \frac{3}{5}\sin(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier :

- $y'(x) = 2Ce^{2x} + \frac{4}{5}\sin(x) - \frac{3}{5}\cos(x)$
- $-2y(x) = -2Ce^{2x} + \frac{8}{5}\cos(x) + \frac{6}{5}\sin(x)$
- donc

$$\begin{aligned} y'(x) - 2y(x) &= \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right)\cos(x) + \left(\frac{6}{5} + \frac{4}{5}\right)\sin(x) \\ &= \cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à (E).

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

1**ère** **étape :** on normalise l'équation :

$$y'(x) + y(x) = 2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E')$$

Les solutions de l'équation homogène associée

$$y'(x) + y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (E_0)$$

sont de la forme $y(x) = Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

2**ème** **étape :**

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E') et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)) + (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) = 2\cos(x) \\ \iff \quad & (\mu + \lambda)\cos(x) + (-\lambda + \mu)\sin(x) = 2\cos(x) \end{aligned}$$

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x), \; x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

$2^{\text{ème}}$ **étape :** on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \;\; \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

On injecte y_p dans (E') et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)) + (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) = 2\cos(x) \\ \iff \quad & (\mu + \lambda)\cos(x) + (-\lambda + \mu)\sin(x) = 2\cos(x) \end{aligned}$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit avec $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$ que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda + \mu & = & 2 \\ -\lambda + \mu & = & 0 \end{array} \right. .$$

En sommant les deux équations, on trouve $\mu = 1$ d'où $\lambda = 1$.

Une solution particulière est donc $y_p(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion :

Exercice 4

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$2y'(x) + 2y(x) = 4\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

Conclusion : les solutions de l'équation complète (E) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-x} + \cos(x) + \sin(x),\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5

1. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

a) $y'(x) + 7y(x) = e^{3x},\ x \in \mathbb{R}.$ *b*) $y'(x) - 3y(x) = (x^2 + 1)e^{3x},\ x \in \mathbb{R}.$

2. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

a) $y'(x) - y(x) = 2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$ *b*) $y'(x) + 5y(x) = \cos(x) + 5\sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 5

1. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

$$a)\quad y'(x)+7y(x)=e^{3x},\ x\in\mathbb{R}.\qquad b)\quad y'(x)-3y(x)=(x^2+1)e^{3x},\ x\in\mathbb{R}.$$

2. Donner les solutions des équations différentielles suivantes

$$a)\quad y'(x)-y(x)=2\sin(x),\ x\in\mathbb{R}.\qquad b)\quad y'(x)+5y(x)=\cos(x)+5\sin(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Solutions numériques :

$$1.a)\quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-7x}+\frac{1}{10}e^{3x},\ C\in\mathbb{R}.$$

$$1.b)\quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \left(\frac{x^3}{3}+x+C\right)e^{3x},\ C\in\mathbb{R}.$$

$$2.a)\quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{x}-\cos(x)-\sin(x),\ C\in\mathbb{R}.$$

$$2.b)\quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-5x}+\sin(x),\ C\in\mathbb{R}.$$