Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°9 : Espaces vectoriels

Exercice 1. Lesquels des ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? (donner une preuve lorque)

$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - y = 0\}$
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 1\}$
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$
$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0 \text{ ou } 2x + y - z = 0\}$
$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |x + z| = |y|\}$
$F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivables et de dérivée continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $F = \{f \in E,\ f' + 2f = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

$F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) = n\}$
$F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) \leqslant n\}$
$F_3 = \{(X - 1)(X - 2)P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$
$F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = P(2) = 0\}$
$F_5 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 1\}$
$F_6 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' + XP + P(0)X^2 = 0\}$
$F_7 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(X^2) = P(X)\}$
$F_8 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P \text{ a au moins 3 racines réelles}\}$

Exercice 5. Les familles suivantes (de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}_2[X]$ selon les cas) sont elles libres ? génératrices ? forment elles une base ? Donner le rang de la famille. Dans le cas où la famille est libre, la compléter en une base en ajoutant des vecteurs de la base canonique. Dans le cas où la famille est génératrice, en extraire une base. Dans le cas où la famille est liée, donner une relation de dépendance linéaire, extraire une famille libre maximale puis la compléter en une base.

$\mathcal{F}_1 = \big((1, 2), (-2, 4)\big)$
$\mathcal{F}_2 = \big((1, 2), (-\pi, -2\pi)\big)$
$\mathcal{F}_3 = \big((1, 2), (1, 1), (2, 1)\big)$
$\mathcal{F}_4 = \big((1, 0, 2), (0, 1, 2)\big)$
$\mathcal{F}_5 = \big((1, 2, 3), (3, 1, 2), (4, 3, 5)\big)$
$\mathcal{F}_6 = \big((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$
$\mathcal{F}_7 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, X^2 - 2X\big)$
$\mathcal{F}_8 = \big(X^2 + 1, X^2 + X, 1 - X\big)$
$\mathcal{F}_9 = \big(X(X + 1), (X - 1)(X - 2)\big)$

Exercice 6. A tout réel λ, on associe la famille $\mathcal{F}_\lambda = \big((1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\big)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\lambda$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z, t) \in E,\ x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E,\ x + z = y + t\}.$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Donner une base de F, une base de G, et une base de $F \cap G$.

(3) Montrer que $E = F + G$. A-t-on $E = F \oplus G$?

(4) Donner un supplémentaire de F dans E.

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Rappeler l'expression de $\sin(x + \alpha)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, pour $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

(2) En déduire la dimension de $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}\big)$, où $\vec{u}_\alpha = (x \mapsto \sin(x + \alpha))$.

(3) Quel est le rang de la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp)$?

Exercice 9. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ lesquelles des affirmations ci-dessous sont exactes ? (justifier)

(1) $\mathrm{Vect}\big((X + 1, X - 1)\big) \oplus \mathrm{Vect}(X^2 + X + 1) = \mathbb{R}_2[X]$

(2) $\mathrm{Vect}\big(((X - 1)^3, (X - 2)^3)\big) \oplus \{\lambda X^3,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_3[X]$

(3) $\{aX^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\} \oplus \mathrm{Vect}\big((1, X)\big) = \mathbb{R}_2[X]$

(4) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}[X]$

(5) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{R}[X]$

(6) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{R}[X]$

(7) $\{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P'(0) = 0\} \oplus \mathrm{Vect}\big(1, X\big) = \mathbb{R}[X]$

(8) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = -P(X)\} = \mathbb{R}[X]$

Exercice 10. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$F = \{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$. Quels sont les dimensions respectives de F et G ?

Exercice 11. On considère une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *échelonnée en degré*, c'est-à-dire telle que $d^o(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, puis que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12. Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\left(x \mapsto e^{ax}\right)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre (on pourra s'intéresser au comportement à l'infini d'une combinaison linéaire de ces fonctions).

Exercice 13 (DM 9).
Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant la récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que E est un espace vectoriel

(2) Soit $v = (v_n)$ l'élément de E vérifiant $v_0 = 1, v_1 = 0$, et $w = (w_n)$ l'élément de E vérifiant $w_0 = 0, w_1 = 1$. Montrer que la famille (v, w) est libre.

(3) Exprimer tout élément $u = (u_n)$ de E en fonction de v, w, u_0 et u_1. En déduire que (v, w) est une base de E, et la dimension de E.

(4) Montrer que les deux suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans E, et qu'elles forment une famille libre. En déduire qu'elles forment une base de E.

(5) En déduire, pour tout élément (u_n) de E, l'écriture explicite de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 14 (DM 9).
Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère, les fonctions $f_a : x \mapsto |x - a|$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont tous distincts et $\alpha_1 \neq 0$, alors la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x - a_i|$$

n'est pas dérivable en $x = a_1$.

(2) En déduire que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre. On rappelle qu'une famille (finie ou infinie) est libre ssi la seule combinaison linéaire (finie par définition) des éléments de la famille qui produit le vecteur nul est celle qui n'a que des coefficients nuls.

(3) Comment s'appellent les éléments de Vect $\left((f_a)_{a\in\mathbb{R}}\right)$? Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?