Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

6. Développements limités

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Développements limités

Introduction

Comment décrire précisément le comportement de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $x = 0$?

f est continue en 0 donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0) = 1$

ce qui peut encore s'écrire $f(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$

f est dérivable en 0 ($f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$) donc $\dfrac{f(x)-1}{x} \to f'(0) = 1$

ce qui peut encore s'écrire $f(x) = 1 + x + o(x)$

Peut-on aller plus loin ?

Introduction

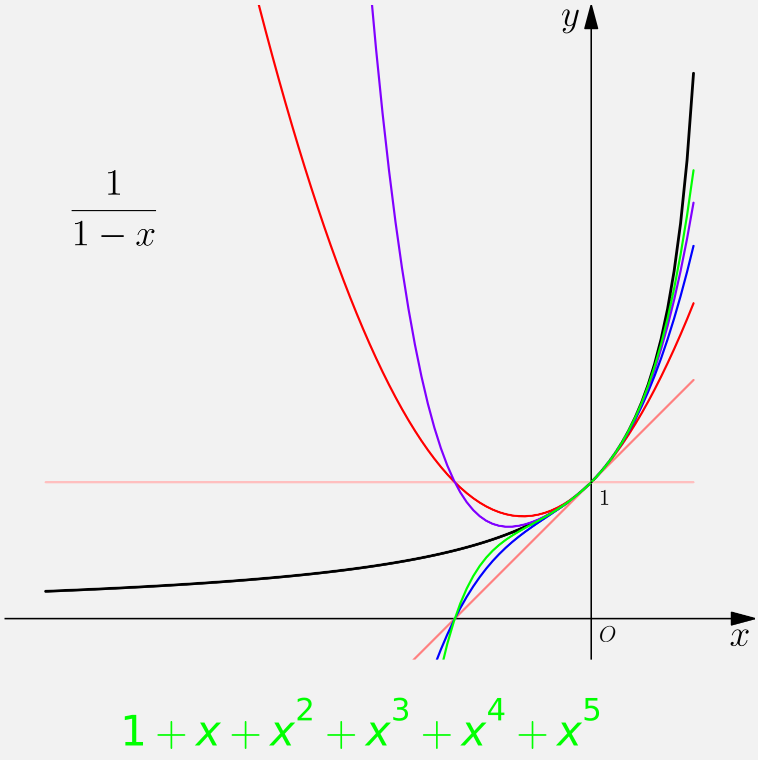
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Comme $x^{n+1} = o(x^n)$, on a donc

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} o(x^n)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-x} = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{avec} \qquad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$



Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un polynôme P_n tel que

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

P_n est une approximation (polynomiale) de f près de 0

Exemple : si $x = \frac{1}{10}$ et $n = 6$, $\left|f\left(\frac{1}{10}\right) - P_6\left(\frac{1}{10}\right)\right| \leq 10^{-6}$

Pour une fonction quelconque définie au voisinage de 0 :

- Existence de P_n ?
- Unicité de P_n ?
- Comment obtient-on P_n ?

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 (noté DL_n) s'il existe un polynôme P_n, de degré au plus n, tel que

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Si $a \in \mathbb{R}$, on définit de même un développement limité d'ordre n de f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = Q_n(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

En posant $x = a+h$, on se ramène à un DL_n en 0 :

$$f(a+h) = Q_n(h) + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Remarque : si $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est un DL_n de f au voisinage de 0, alors on obtient un développement limité d'ordre $k \leq n$ par troncature de P_n (on supprime les termes de degré $> k$).

Autrement dit,

$$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$$

est un DL_k de f au voisinage de 0.

Cette propriété est une simple conséquence de l'implication

$$p > k \quad \Rightarrow \quad x^p = \underset{x\to 0}{o}(x^k).$$

Proposition : Si une fonction f, définie sur un voisinage de 0, admet un développement limité d'ordre n en 0, ce développement est unique.

Supposons $f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$

Notons $P_n(x) - Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

On a $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = o(x^n)$, donc en particulier $a_0 + o(1) = o(1)$ donc $a_0 = 0$.

On a alors $a_1 x + \ldots + a_n x^n = o(x^n)$, donc en particulier $a_1 x + o(x) = o(x)$ donc $a_1 + o(1) = o(1)$, ce qui implique $a_1 = 0$.

On montre de même par récurrence que tous les a_k sont nuls, c'est-à-dire que $P_n = Q_n$.

Si f est dérivable en 0, alors $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ avec $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(1)$.

Comment obtient-on les coefficients suivants ?

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$\begin{array}{lcllcl}
f(x) & = & (1-x)^{-1} & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & (1-x)^{-2} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & 2(1-x)^{-3} & f''(0) & = & 2 \\
f^{(3)}(x) & = & 2\times 3(1-x)^{-4} & f^{(3)}(0) & = & 2\times 3 \\
f^{(4)}(x) & = & 2\times 3\times 4(1-x)^{-5} & f^{(4)}(0) & = & 2\times 3\times 4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^{(n)}(x) & = & 2\times\cdots\times n(1-x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) & = & n!
\end{array}$$

$$P_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$.

On appelle polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0 le polynôme

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n de f la fonction R_n définie par

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Formule de Taylor-Young : Soit $n \geq 1$, et f une fonction $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de 0 et dont la dérivée n-ième existe en 0.

Alors f admet un DL_n en 0, et celui-ci est donné par le polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0. Autrement dit,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Preuve : Notons P_n le polynôme de Taylor de f en 0, et $R_n = f - P_n$ le reste. Montrons que $R_n = o(x^n)$ par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + o(1),$$
donc
$$f(x) - f(0) = xf'(0) + o(x)$$
et
$$R_1(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) = o(x^1).$$

2. Supposons que le résultat soit vrai à l'ordre $n-1$
La fonction f' vérifie les hypothèses à l'ordre $n-1$ et le polynôme de Taylor de f' est la dérivée du polynôme de Taylor de f, car
$$\left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n\right)'$$
$$= \quad f'(0) + \frac{(f')'(0)}{1!}X + \frac{(f')''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}X^{n-1}$$
Par hypothèse de récurrence (appliquée à f') on a donc
$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = o(x^{n-1})$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{R_n'(x)}{x^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$

Soit $x \in]0, \alpha]$, d'après le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$ appliqué à $R_n(x)$ on a

$$\exists c \in]0, x[\quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c)$$

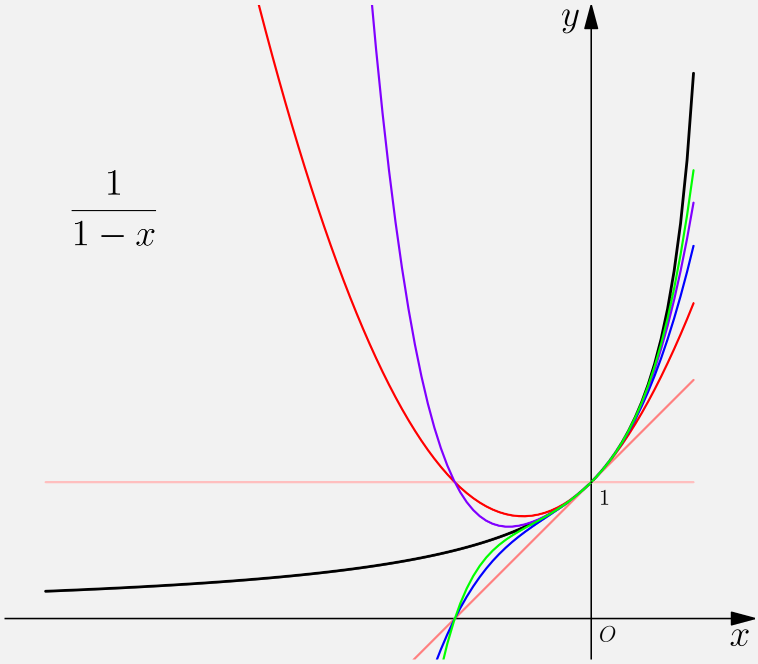
$$\text{donc} \quad \left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{R_n'(c)}{x^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{R_n'(c)}{c^{n-1}}\right| \leq \varepsilon$$

Le raisonnement est le même si $x \in [-\alpha, 0[$.

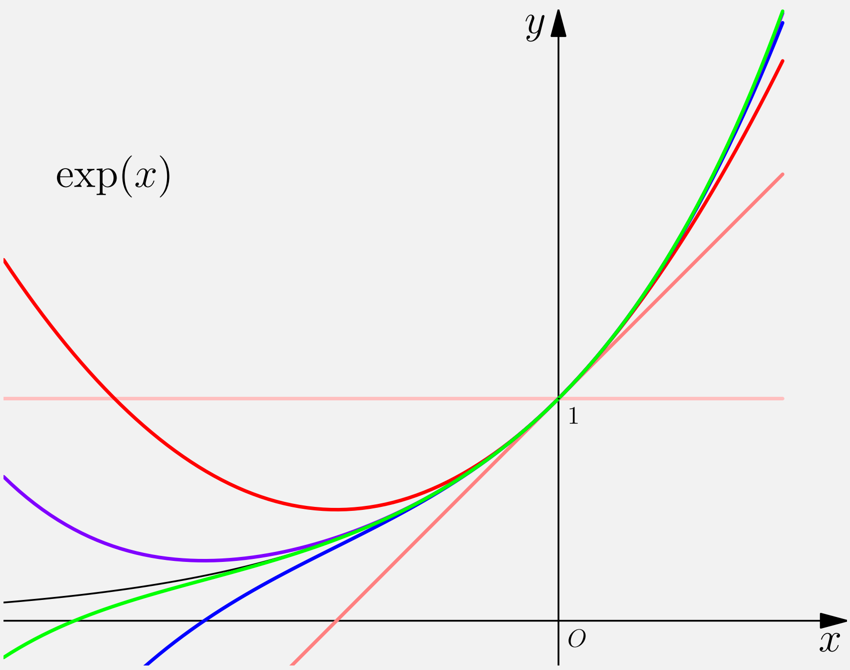
On a montré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \quad |x| \leq \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{R_n(x)}{x^n}\right| \leq \varepsilon$

c'est-à-dire $R_n(x) = o(x^n)$.

- $f(x) = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $f(x) = (1+x)^{\alpha}$
  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

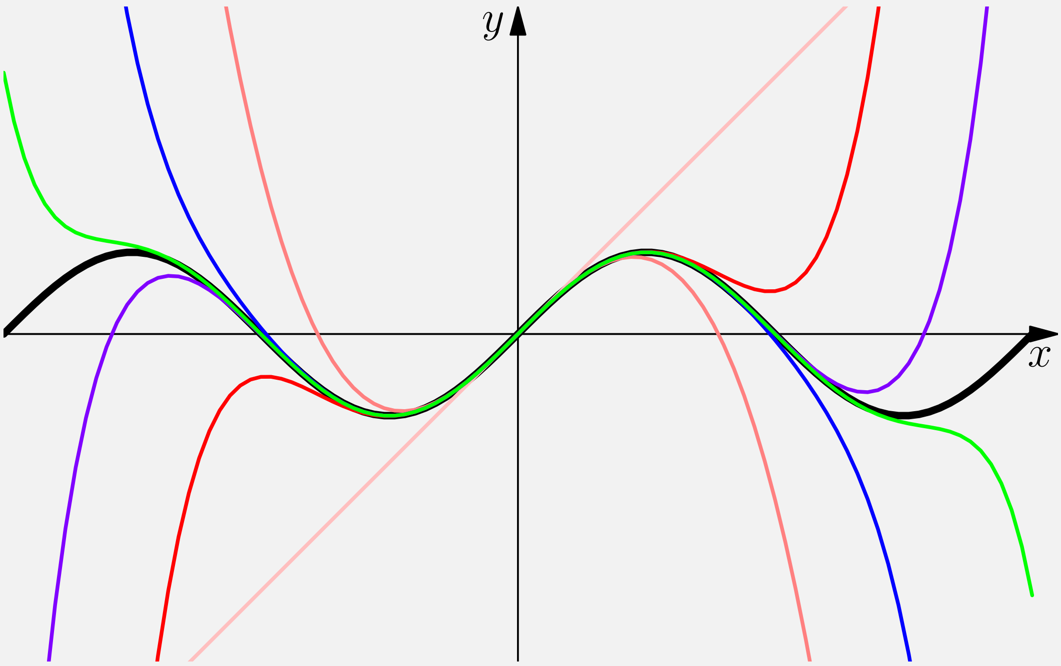


$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

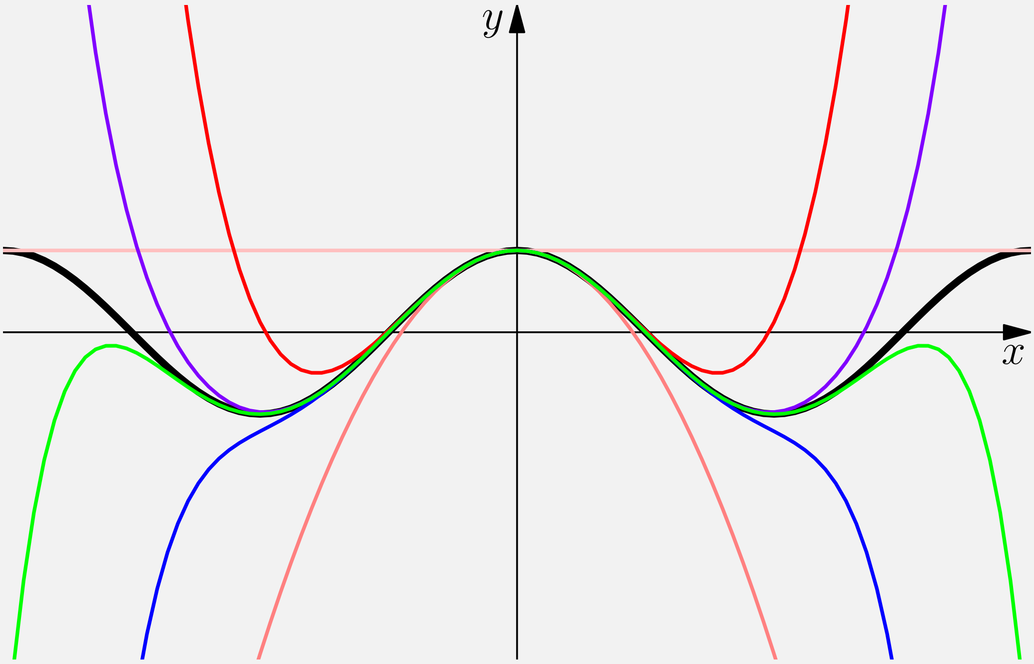


$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

- $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
- $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + o(x^{11})$$



$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + o(x^{10})$$

Exercice : Pour $x = \frac{3}{10}$, comparer :

1. $\exp(x)$ et $\dfrac{x^0}{0!} + \dfrac{x}{1!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$
2. $\sin(x)$ et $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ pour $p = 0, 1, 2$
3. $\cos(x)$ et $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$ pour $p = 0, 1, 2$

Exercice : les DL pour calculer des limites

1. Donner un DL_2 de la fonction $\cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2. En déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

Proposition :

• Si f admet un DL_n ($n \geq 0$), alors f est continue en 0

• Si f admet un DL_n ($n \geq 1$), alors f est dérivable en 0 et $f'(0)$ est le coefficient de x dans son développement limité

• Pour les dérivées d'ordre supérieur, on ne peut rien dire.

Opérations sur les développements limités

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0. Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Somme : $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.

Produit : fg admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.

Composition : si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $Q_n \circ P_n$.

Lemme : Si φ est une fonction bornée au voisinage de 0 et $\psi(x) = o(x^n)$, alors $\varphi(x).\psi(x) = o(x^n)$.

Preuve :

- φ bornée sur un voisinage I de 0 $\Rightarrow$ $\exists M, \forall x \in I, \quad |\varphi(x)| \leq M$
- $\psi(x) = o(x^n) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\psi(x)}{x^n} = 0$
- $\dfrac{|\varphi(x)\psi(x)|}{|x^n|} \leq M \dfrac{|\psi(x)|}{|x^n|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Il suffit de montrer que les restes de Taylor de la somme, du produit et de la composition des fonctions sont négligeables devant x^n.

Produit :

$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(P_n(x) + o(x^n)\big)\big(Q_n(x) + o(x^n)\big) \\ &= P_n(x)Q_n(x) + P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \end{aligned}$$

P_n et Q_n sont bornées au voisinage de 0
$\Rightarrow \quad P_n(x)o(x^n) = o(x^n), \ Q_n(x)o(x^n) = o(x^n)$

$o(x^n)o(x^n) = o(x^{2n})$ est négligeable devant x^n

On a donc $f(x).g(x) = P_n(x).Q_n(x) + o(x^n)$,
et le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f.g$ est donc obtenu par troncature de $P_n.Q_n$, c'est-à-dire en conservant uniquement les termes de degré au plus n du polynôme $P_n.Q_n$.

Extension : $DL_n \times DL_p$

Soit f, g telles que $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$. Donnons un DL d'ordre 3 de $f.g$.

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= x(1+2x+4x^2+o(x^2)) + x^2(1+2x+4x^2+o(x^2)) + \\ &\quad x^3(1+2x+4x^2+o(x^2)) + o(x^3)\times(1+2x+4x^2+o(x^2)) \\ &= x+2x^2+4x^3+o(x^3)+x^2+2x^3+\underbrace{4x^4+o(x^4)}_{=o(x^3)} + \\ &\quad x^3+\underbrace{2x^4+4x^5+o(x^5))}_{=o(x^3)}+\underbrace{o(x^3)+2o(x^4)+4o(x^5)+o(x^5))}_{=o(x^3)} \\ &= x+3x^2+7x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

Extension : $DL_n \circ DL_p$

Soit f, g telles que $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + x^3 + o(x^3)$.
Donnons un DL d'ordre 3 de $g \circ f$.

$$\begin{aligned}g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= 1+(x+2x^2+o(x^2))^3+o((x+2x^2+o(x^2))^3) \\ &= 1+x^3+3\times 2x^4+\cdots+o(x^3+3\times 2x^4+\cdots) \\ &= 1+x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

- $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
- $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2!} & + & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{x^n}{n!} & +o(x^n) \\ e^{-x} & = & 1 & - & x & + & \frac{x^2}{2!} & - & \frac{x^3}{3!} & + & \cdots & + & \frac{(-1)^n x^n}{n!} & +o(x^n) \end{array}$$

Définition : Pour toute fonction $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ ($a > 0$ ou $a = \infty$), on appelle partie paire et partie impaire de f les fonctions $f_p :]-a, a[\to \mathbb{R}$ et $f_i :]-a, a[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Propriétés :

- f_p est paire, f_i est impaire, et $f = f_p + f_i$.
- si f est une fonction polynomiale, f_p est obtenue en conservant uniquement les termes de degré pair dans f (et f_i avec les termes de degré impair)

Proposition : Si $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ admet P pour $\mathrm{DL}_n(0)$, alors f_p admet P_p pour $\mathrm{DL}_n(0)$ et f_i admet P_i pour $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple : ch est la partie paire de exp, sh sa partie impaire, d'où les développements limités obtenus précédemment.

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle contenant 0.

Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I et dont la dérivée n-ième existe en 0, et P_n son polynôme de Taylor en 0.

Toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, donné par la primitive de P_n qui prend la même valeur en 0.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{1-x} = P_n(x) + o(x^n)$ avec $P(x) = 1 + x + \ldots + x^n$
$F(x) = -\ln(1-x)$ est une primitive de f, et $F(0) = 0$.
$Q(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de P telle que $Q(0) = 0$.
donc $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \ldots - \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

- $\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $\operatorname{Arctan} x = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$
- $\operatorname{Arcsin} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

Quelques exemples

$\tan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

On écrit $\tan x = \sin(x).\dfrac{1}{\cos(x)}$ et on fait un DL_5 des 2 termes :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

On pose $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3), \quad u^2 = \frac{x^4}{4}\Big(1 + o(1)\Big), \quad u^3 = o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

$\tan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin(x).\frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right).\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{x^5}{120}\left(1 + o(x)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)
\end{aligned}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$\ln\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) &= \ln\left(2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{2^6}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= \ln\left(2(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4))\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4 + o(x^4)\right) \\
&=
\end{aligned}$$

$$\ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^3}{3} + \frac{(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2^7}x^4)^4}{4} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(2) + (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{2^7}x^4) - \tfrac{1}{2^7}x^4 + o(x^4) \\
&= \ln(2) - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{3}{2^6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ ordre 4 au voisinage de 0

On vient de montrer

$$\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=\ln(2)-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2^6}x^4+o(x^4)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 0$, de

$$f(x)=\frac{8\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}\right)+x^2}{1-\cos(x^2)}.$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}&=\left(x-\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\&=\left(x-\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\tfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\&=x+\tfrac{x^3}{2}-\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)=x+\tfrac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}}\tan x&=\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)\left(x+\tfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\&=x+\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{8}x^3+o(x^3)\\&=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{5}{24}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$\sqrt{1+x}\tan x$ ordre 3 au voisinage de 0

On vient de montrer :

$$\sqrt{1+x}\tan x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 0$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\tan x - \ln(1+x)}{(\sin(x))^2}.$$

$(1+x)^\alpha$ ordre n au voisinage de 1

Changement de variable : $x = 1+u$ u est au voisinage de 0.

$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha$

$\left(1+\frac{u}{2}\right)^\alpha = 1+\alpha\frac{u}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^n + o(u^n)$

$u = x-1$

$(1+x)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\alpha\frac{x-1}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + o(x-1)^n\right)$

$=$

$2^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4.2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2^n.n!}(x-1)^n + o(x-1)^n\right)$

$(1+x)^{\alpha}$ ordre n au voisinage de 1

On vient de montrer :

$$(1+x)^{\alpha} = 2^{\alpha}\Big(1 + \frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4.2!}(x-1)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2^n.n!}(x-1)^n + o(x-1)^n\Big)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to 1$, de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)}{(\ln(x))^2}.$$

$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

Changement de variable : $u = \frac{1}{x}$ $\quad u > 0$ est au voisinage de 0.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} = \sqrt{1-u^2}$$

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{2^7}u^8 + o(u^8)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ordre 8 au voisinage de $+\infty$

On vient de montrer :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \frac{5}{2^7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)$$

Application : Donner la limite, quand $x \to +\infty$, de

$$f(x) = x^2\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 1\right).$$

Exercice : $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ à l'ordre 5 en 0

- Soit $f(x) = 7 + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Calculer f'.
- Rappeler le DL d'ordre 2 de $(1+y)^{-1/2}$ en 0.
- En déduire le DL d'ordre 4 de f' en 0.
- En déduire le DL d'ordre 5 de f en 0.
- En déduire que $f(x) - 7 - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} e^x - 1 - x$.

Applications

Calcul de limites

Exercice : Donner les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x}$

2. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x\ln(1-x^2)}$

4. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \tan(x)}{\mathrm{th}(x) - \tan(x)}$

Exercice : Donner un développement asymptotique à 3 termes en $+\infty$ de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice : Montrer que le graphe de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \exp\left(\sin \frac{1}{x}\right) - 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

admet une asymptote en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice : On pose $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution (notée x_n) dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Donner un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice : Déterminer les réels a et b pour que

$$\cos(x) = \frac{1+ax^2}{1+bx^2} + o(x^n)$$

avec n entier maximal.