NUMÉRATION LOGIQUE

C8 : sous-formules

Nicole VINCENT

CC1 - 1

- Convertir $(101101)_2$ en base 10

$(101101)_2 = 1 + 4 + 8 + 32 = (45)_{10}$

- Convertir $(101101)_2$ en base 8

$(101101)_2 = 101\ 101 = (55)_8$

- Convertir $(101101)_2$ en base 16

$(101101)_2 = 0010\ 1101 = (2D)_{16}$
$(1101)_2 = (13)_{10}$

- Convertir $(A6)_{16}$ en base 10

$(A6)_{16} = 6 + 10 \times 16 = (166)_{10}$

CC1 - 1

- Convertir $(121201)_3$ en base 10

$(121201)_3 = 1 + 0 + 2 \times 32 + 27 + 2 \times 81 + 243 = (451)_{10}$

- Convertir $(161)_3$ en base 10. méthode de division

$161 = 3 \times 53 + \boxed{2}$; $53 = 3 \times 17 + \boxed{2}$; $17 = 3 \times 5 + \boxed{2}$; $5 = 3 \times 1 + \boxed{2}$; $\boxed{1} \times 3$

$(161)_3 = (12222)_{10}$

- Convertir $(161)_3$ en base 10. méthode de soustraction

$161 = \boxed{1} \times 81 + 80$
$80 = \boxed{2} \times 27 + 26$
$26 = \boxed{2} \times 9 + 8$
$8 = \boxed{2} \times 3 + 2$
$2 = \boxed{2} \times 1 + 0$

$(161)_3 = (12222)_{10}$

CC1 - 2

- Convertir $(11,01)_2$ en base 10

$(11)_2 = 1 + 2$; $(0,01) = 0 \times (1/2) + 1\ (1/2)^2$
$(11,01)_2 = 3,25$

- Convertir $(11001,11001)_2$ en base 16

$(11001)_2 = 0001\ 1001 = (19)_{16}$
$(1100\ 1000)_2 = C\ 8$

$(11001,11001)_2 = (19,C8)_{16}$

- Convertir $(11,71)_{10}$ en base 2 avec une précision d'au moins 2^{-3}

$(11)_2 = 8 + 2 + 1 = (1011)_2$
$0,71 \times 2 = \boxed{1},42$
$0,42 \times 2 = \boxed{0},84$
$0,84 \times 2 = \boxed{1},68$

$(11,71)_2 = (1011,101)_2$

CC1 - 3

- On considère des entiers relatifs codés en complément à 2 sur un octet. Indiquer la représentation binaire des opérations suivantes et interpréter le résultat pour en déduire le nombre en base 10
- 78 + 24

$(78)_{10} = 64 + 8 + 4 + 2 = (1001110)_2$
$(24)_{10} = 16 + 8 = (11000)_2$

$(78)_{10}$ -> [01001110]
$(24)_{10}$ -> [00011000]

$\boxed{0}$1100110]

1
2
4
8
16
32
64
128

Résultat positif $(1100110)_2 = 2 + 4 + 32 + 64 = (102)_{10}$

CC1 - 3

- On considère des entiers relatifs codés en complément à 2 sur un octet. Indiquer la représentation binaire des opérations suivantes et interpréter le résultat pour en déduire le nombre en base 10
- 78 - 24

$(78)_{10} = 64 + 8 + 4 + 2 = (1001110)_2$
$(24)_{10} = 16 + 8 = (11000)_2$

$(78)_{10}$ -> [01001110]
$(-24)_{10}$ -> [11101000]

24 : [00011000] -> [11100111] -> [11101000]

1$\boxed{0}$0110110]

1
2
4
8
16
32
64
128

Résultat positif $(0110110)_2 = 2 + 4 + 16 + 32 = (54)_{10}$

CC1 - 3

- On considère des entiers relatifs codés en complément à 2 sur un octet. Indiquer la représentation binaire des opérations suivantes et interpréter le résultat pour en déduire le nombre en base 10
- 78 + 78

$(78)_{10} = 64 + 8 + 4 + 2 = (1001110)_2$

1
2
4
8
16
32
64
128

$(78)_{10}$ -> [01001110]
$(78)_{10}$ -> [01001110] De même signe positif

[10011100]

Résultat négatif Dépassement de capacité

Sous formules

- Une formule suit les règles syntaxiques du calcul propositionnel
  - simplifier une formule
  - l'écrire sous une forme normalisée (circuits logiques, démonstration automatique)

Définition de **sous-formule** :

- Si A est une formule, alors ¬A est une formule.
  "¬" est le connecteur principal de ¬A ; A est la sous-formule de ¬A
- Si A et B sont des formules, alors (A • B) est une formule
  "•" est le connecteur principal de (A • B) ; A et B sont les deux sous-formules de (A • B)
- Par induction les sous-formules des sous-formules d'une formule A sont des sous-formules

Sous-formules et équivalence

Pour simplifier les formules
Si B est une sous-formule de A,
et si B' eq B,
alors la formule A', obtenue en remplaçant B par B' dans A, est équivalente à A

Exemple : Soit A = ((¬a ∧ b) ∨ c) → (¬¬a ∨ ¬b)

(¬¬a) eq a

A' = [((¬a ∧ b) ∨ c) → (a ∨ ¬b)]

et A eq A'

Formes normales

- Un **littéral** ou **atome** est une formule qui est soit une variable propositionnelle, soit la négation d'un telle variable

  si p une variable propositionnelle, alors p et ¬p sont des atomes

- La **conjonction** de formules $p_1, p_2, \dots, p_n$ est la formule
  $p_1 \wedge p_2 \wedge \quad \wedge p_n$
- La **disjonction** de formules $p_1, p_2, \dots, p_n$ est la formule
  $p_1 \vee p_2 \vee \quad \vee p_n$

Formes normales

On considérera principalement 2 formes normales
- **forme normale disjonctive** (FND)
- **forme normale conjonctive** (FNC)

- **forme normale disjonctive** (FND) si elle est écrite comme une disjonction de conjonctions de littéraux
- **forme normale conjonctive** (FNC) si elle est écrite comme une conjonction de disjonctions de littéraux

Exemples : p , (p $\boxed{\vee}$ (¬q)) , (p $\boxed{\wedge}$ q) $\boxed{\vee}$ (¬q) sont des FND

q , (p $\boxed{\wedge}$ (¬q)) , (p $\boxed{\vee}$ q) $\boxed{\wedge}$ (¬q) sont des FNC

Mais pas : $\boxed{¬}$(p ∨ q) , p $\boxed{\vee}$ (q ∧ $\boxed{(r \vee s}$)) , p $\boxed{\wedge}$ (q ∨ $\boxed{(r \wedge s}$)) , $\boxed{¬}$(p ^ (¬q)),

Remarques

La normalisation consiste à
ne pas utiliser les "→ , ↔",
à mettre les "et" à "l'intérieur", les "ou" à l'extérieur, et les "non" devant les atomes
à mettre les "ou" à "l'intérieur", les "et" à "l'extérieur", et les "non" devant les atomes

Les formules a , ¬a, a ∨ b , a ∧ b sont considérées à la fois sous forme FND et sous forme FNC

Formes normales

- Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule
  - sous forme normale disjonctive
  - sous forme normale conjonctive
- Pour convertir une formule en forme normale, on utilise
  - les lois de De Morgan
  - la distributivité des opérations ∨ et ∧ l'une par rapport à l'autre
  - et les propriétés de¬
- L'écriture sous forme normale peut allonger la formule de manière exponentielle

13

Université de Paris

Formes normales

Exemple : $(p_1 \lor q_1) \land (p_2 \lor q_2)$ est une FNC et a 2 termes

Sa FND comporte 2^2 termes

par distributivité

$(p_1 \land (p_2 \lor q_2)) \lor (q_1 \land (p_2 \lor q_2))$

$(p_1 \land p_2) \lor (p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2)$

- Grâce aux tables de vérité, on peut facilement trouver les FND et FNC

14

Université de Paris

Construction des FND par table de vérité

- On cherche les distributions de vérité δ qui sont un modèle pour F

  les lignes où on obtient un "1"
- Pour **chaque** modèle de F, on écrit la **conjonction** des littéraux où on a "1"

  Si δ(a) = 0 et δ(b) = 1 est un modèle, alors la conjonction qui est vraie pour cette distribution s'écrit (¬a) ^ b
- On écrit ensuite la **disjonction** de toutes les conjonctions
- Cette méthode garantit la construction d'une formule, sous forme normale disjonctive, équivalente à F

15

Université de Paris

FND par table de vérité : exemple

formule A = ((¬a ∨ b) ∧ c) → (a ∧ (¬b))

On pose F = ((¬a ∨ b) ∧ c) et G = (a ∧ (¬b))

a	b	c	¬a∨b	F	G	A=F→G	
0	0	0	1	0	0	1	¬a ∧ ¬b ∧ ¬c
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	0	1	¬a ∧ b ∧ ¬c
0	1	1	1	1	0	0	
1	0	0	0	0	1	1	a ∧ ¬b ∧ ¬c
1	0	1	0	0	1	1	a ∧ ¬b ∧ c
1	1	0	1	0	0	1	a ∧ b ∧ ¬c
1	1	1	1	1	0	0	

D'où la FND

(¬a∧¬b∧¬c) ∨ (¬a∧b∧¬c) ∨ (a∧¬b∧¬c) ∨ (a∧¬b∧c) ∨ (a∧b∧¬c)

16

Université de Paris

Simplification des FND

- la FND de la formule A est assez longue

  simplification de l'expression
- La FND de A est

(¬a∧¬b∧$\boxed{\text{¬c}}$)∨(¬a∧b∧$\boxed{\text{¬c}}$)∨(a∧¬b∧$\boxed{\text{¬c}}$)∨$\boxed{\text{(a∧¬b∧c)}}$∨(a∧b∧$\boxed{\text{¬c}}$)

les termes 1, 2, 3 et 5 contiennent tous ¬c, factorisation

¬c ∧ [(¬a ∧ ¬b) ∨ (¬a ∧ b) ∨ (a ∧ ¬b) ∨ (a ∧ b)]

ce qui est équivalent à ¬c

A est équivalente à ¬c ∨ (a ∧ ¬b ∧ c)

A eq (¬c ∨ (a ∧ ¬b))

17

Université de Paris

Construction des FNC par table de vérité

- On cherche les distributions de vérité δ qui ne sont pas un modèle pour F

  les lignes où l'on trouve un "0"
- Pour chaque modèle de F, on écrit la **disjonction** des littéraux où on a "0"

Si δ(a) = 0 et δ(b) = 1 est un modèle, alors la disjonction qui est fausse pour cette distribution s'écrit a ∨ (¬ b)

- On écrit ensuite la **conjonction** de toutes les disjonctions
- Cette méthode garantit la construction d'une formule, sous forme normale conjonctive, équivalente à F

18

Université de Paris

FNC par table de vérité : exemple

$A = ((\neg a \vee b) \wedge c) \rightarrow (a \wedge (\neg b))$

On pose $F = ((\neg a \vee b) \wedge c)$ et $G = (a \wedge (\neg b))$

a	b	c	¬a∨b	F	G	A=F→G	
0	0	0	1	0	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	$a \vee b \vee \neg c$
0	1	0	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	0	0	$a \vee \neg b \vee \neg c$
1	0	0	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	1	
1	1	0	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	0	0	$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$

D'où la FNC

$$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

19

Université de Paris

Simplification des FNC

La FNC de A est

$$(a \vee \boxed{b} \vee \neg c) \wedge (a \vee \boxed{\neg b} \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Les termes 1 et 2 sont équivalents à $(a \vee \neg c)$

A est équivalente à $(a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

A est équivalente à $(a \vee \boxed{\neg c}) \wedge (\neg b \vee \boxed{\neg c})$

Factorisation de $\neg c$ $(\neg c \vee (a \wedge \neg b))$

D'autres méthodes spécifiques existent les tables de Karnaugh

20

Université de Paris