Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°10 : Applications linéaires et matrices — correction —

Exercice 1. Parmi les applications ci-dessous, reconnaître les applications linéaires, les endomorphismes et les formes linéaires. Justifier votre réponse.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (0, -x, 1)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = -z$
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x, yz)$
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$
(5) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ f(P) = \max_{x\in[0,1]} P(x)$
(6) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)X^2$
(7) $f : E \to \mathbb{R},\ f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim(u_n)$, avec E e.v. des suites convergentes
(8) $f : A \to \mathbb{R}$, avec A e.v. des suites arithmétiques et $f((u_n)) =$ raison de (u_n)

1) pas linéaire ($f(0) \neq 0$)
2) forme linéaire
3) pas linéaire ($f(\lambda\vec{u}) \neq \lambda f(\vec{u})$)
4) pas linéaire ($f(0) \neq 0$)
5) pas linéaire ($f(X) = 1$ et $f(-X) = 1 \neq -f(X)$)
6) endomorphisme
7) forme linéaire
8) forme linéaire

Exercice 2. Soit $f : A \to B$ une application quelconque, et $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$. Montrer que :

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective
(3) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$ avec égalité si f est surjective
(4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(6) $A_1 \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective

1) Si $x \in A_1 \cup A_2$, $f(x) \in f(A_1)$ ou $f(x) \in f(A_2)$ donc $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$
Si $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, alors $y = f(x)$ avec $x \in A_1$ ou $x \in A_2$ donc $f(A_1 \cup A_2) \supset f(A_1) \cup f(A_2)$
2) Si $x \in A_1 \cap A_2$, alors $x \in A_1$ et $x \in A_2$ donc $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$ donc $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
Si $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $y = f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$, donc si f est injective on en déduit que $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, i.e. $f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$
3) Si $y \in f(f^{-1}(B_1))$ alors $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B_1)$, i.e. $f(x) \in B_1$ donc $y = f(x) \in B_1$: on a donc bien $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$
Si $y \in B_1$ et f est surjective, alors $y = f(x)$ pour un certain x, et $y = f(x) \in B_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1)$, soit $y \in f(f^{-1}(B_1))$: on a donc bien f surjective $\Rightarrow f(f^{-1}(B_1)) \supset B_1$.
Les cas 4) 5) 6) se démontrent de manière similaire.

Exercice 3. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$, puis vérifier la cohérence du résultat à l'aide du théorème du rang.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x + y, 0, x - y)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z$
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, x, y)$
(4) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = X^2P''$
(5) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = 2P - XP'$

1) $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1, 0, 0), (0, 0, 1)\big)$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 0 + 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$
2) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1, -1, 0), (0, 1, -1)\big)$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
3) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((0, 0, 1)\big)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
4) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big(1, X\big)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(X^2, X^3\big)$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$
5) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Vect}\big(1, X, X^2, X^3\big)$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 0 + 4 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$
6) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big(X^2\big)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(1, X, X^3\big)$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$

Exercice 4. Pour toutes les applications linéaires f ci-dessous, lesquelles sont des isomorphismes ? (on examinera uniquement la dimension de l'espace de départ et d'arrivée de f, puis en cas de besoin $\operatorname{Ker} f$).

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, y + z)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$
(3) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(P) = (P(0), P(1), P(2))$
(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X],\ f(a, b, c) = aX(X - 1) + bX + c(X - 1)$
(5) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = X^nP(\frac{1}{X})$

1) f est un endomorphisme, il faut donc calculer $\operatorname{Ker} f$. Si $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

et les deux dernières équations impliquent $y = z = 0$, ce qui avec la première équation donne $x = y = 0$. Conclusion : $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$ donc f est injective donc f est un isomorphisme.
2) $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc f ne peut pas être un isomorphisme

3) $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc f ne peut pas être un isomorphisme
4) $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc on calcule $\operatorname{Ker} f$. Si $P = f(a,b,c) \in \operatorname{Ker} f$, alors $P(0) = -c = 0$, $P(1) = b = 0$ et donc $P = aX(X-1) = 0 \Rightarrow a = 0$ donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective donc bijective (isomorphisme)
5) Les dimensions sont égales (endomorphisme) donc on calcule $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (cf. exo 3 question 5). On en déduit que f est injective donc bijective (isomorphisme et même automorphisme).
6) Pour vérifier que f est bien linéaire, on peut remarquer que

$$f(a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n) = a_n + a_{n-1}X + \ldots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n,$$

qui est clairement une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ (permutation des coefficients). On peut aussi voir que les dimensions sont égales (endomorphisme) et que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. comme pour la question précédente.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On pose $f(\mathcal{B}) = \big(f(\vec{e}_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que :

(1) f injective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ libre

(2) f surjective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ génératrice de F

(3) f bijective $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ base de F

1) $\sum\limits_i \alpha_i f(\vec{e}_i) = \vec{0} \Rightarrow f\big(\sum\limits_i \alpha_i \vec{e}_i\big) = \vec{0} \Rightarrow \sum\limits_i \alpha_i \vec{e}_i \in \operatorname{Ker} f$ et si f est injective, alors $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ donc $\sum\limits_i \alpha_i \vec{e}_i = \vec{0}$ donc tous les α_i sont nuls ($(\vec{e}_i)$ base de E). Conclusion : f injective $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ libre.
Réciproquement, si $f(\mathcal{B})$ est libre, alors si $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$, on peut écrire $\vec{x} = \sum_i \alpha_i \vec{e}_i$ et on a $f(\vec{x}) = \vec{0} = \sum_i \alpha_i f(\vec{e}_i)$ ce qui n'est possible que si tous les α_i sont nuls ($(f(\vec{e}_i))$ libre) donc $\vec{x} = \vec{0}$, donc finalement $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Conclusion : $f(\mathcal{B})$ libre $\Rightarrow f$ injective.
2) Si f est surjective, alors tout vecteur $\vec{y} \in F$ s'écrit $\vec{y} = f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in E$, et comme $(\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E on peut écrire $\vec{x} = \sum_i \alpha_i \vec{e}_i$, donc $\vec{y} = \sum_i \alpha_i f(\vec{e}_i)$, ce qui prouve que $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F.
Réciproquement, si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F, alors tout $\vec{y} \in F$ s'écrit sous la forme $\vec{y} = \sum_i \alpha_i f(\vec{e}_i)$, c'est-à-dire $\vec{y} = f(\vec{x})$ (avec $\vec{x} = \sum_i \alpha_i \vec{e}_i$), donc f est surjective.
3) Conséquence directe du 1) et du 2)

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Supposons $f \circ f = 0$. Si $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$, alors $\vec{y} = f(\vec{x})$ pour un certain $\vec{x} \in E$, et donc $f(\vec{y}) = f(f(\vec{x})) = (f \circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$. Conclusion : $f \circ f = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Alors pour tout $\vec{x} \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$ ce qui signifie que $f(f(x)) = \vec{0}$. Conclusion : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Rightarrow f \circ f = 0$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$.

(1) Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} - f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} f$.

(2) En déduire que $\operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f = E$ (on pourra remarquer que $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x})$)

1) Si $\vec{x} \in E$, alors par linéarité de f on a $f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f(f(\vec{x})) = (f - f \circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $\vec{x} - f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} f$.
2) Tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x})$ avec $\vec{x} - f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker} f$ (question 1) et $f(\vec{x}) \in \operatorname{Im} f$ (définition de $\operatorname{Im} f$). Ceci prouve que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
Par ailleurs, si $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, alors on peut écrire $\vec{x} = f(\vec{y})$ ($\vec{x} \in \operatorname{Im} f$) et on a $f(\vec{x}) = 0$ ($\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$) donc $f \circ f(\vec{y}) = \vec{0}$ mais comme $f \circ f = f$, ceci implique que $f(\vec{y}) = \vec{0}$ c'est-à-dire $\vec{x} = \vec{0}$. Ceci prouve que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.
Conclusion : $\operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X^2 + 3X - 1); \quad \text{et} \quad B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\big(1, X-1, (X-1)^2\big).$$

On a $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Pour toutes les applications linéaires $f : E \to F$ ci-dessous, calculer la matrice de f dans les bases canoniques de E et F.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, y - z, y + z)$
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + y + z, x - y + z)$
(3) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$
(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(a,b,c) = aX(X-1) + bX + c(X-1)$
(5) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = P - P'$
(6) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = X^2 P(\frac{1}{X})$

On désigne à chaque fois par $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ les bases canoniques de E et F.

1) $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

4) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$, et l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + (1-X)P' \end{array}$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E

(2) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(1, 1-X, 1+X^2, 1-X^3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) Calculer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1) On a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$f(\alpha P + \beta Q) = \alpha P + \beta Q + (1-X)(\alpha P + \beta Q)' = \alpha(P + (1-X)P') + \beta(Q + (1-X)Q') = \alpha f(P) + \beta f(Q)$$

donc f est un endomorphisme de E.

2) Pour tous $\alpha, \beta; \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha.1 + \beta.(1-X) + \gamma.(1+X^2) + \delta.(1-X^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\delta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

donc la famille est libre. Comme elle est de cardinal 4 et que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) On a $f(1) = 1$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = 2X - X^2$ et $f(X^3) = 3X^2 - 2X^3$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, on a $f(1-X) = 0$, $f(1+X^2) = 1 + 2X - X^2 = -(1+X^2) + 2 + 2X = -(1+X^2) - 2(1-X) + 4$ et $f(1-X^3) = 1 - 3X^2 - 2X^3 = 2(1-X^3) - 3(1+X^2) + 2$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lorsqu'elles ont un sens, calculer les expressions $A + B$, AB, BA, $B + AB$, $A + AB$.

— $A + B$ n'a pas de sens car A (matrice 3×3) et B (matrice 3×5) n'ont pas les mêmes dimensions.

— AB a bien un sens car le nombre de colonnes de A (3) est égal au nombre de lignes de B. AB est donc une matrice 3×5 et on trouve $AB = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 17 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 12 & 23 & 6 \\ 3 & -8 & 19 & 18 & 8 \end{pmatrix}$

— BA n'a pas de sens car le nombre de colonnes de B (5) n'est pas égal au nombre de lignes de A (3).

— Pour calculer $B + AB$, on ajoute B au produit AB déjà calculé (qui est une matrice de même taille que B). On trouve $B + AB = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 16 & 8 & 6 \\ 6 & -1 & 14 & 27 & 7 \\ 3 & -10 & 22 & 18 & 9 \end{pmatrix}$

— $A + AB$ n'a pas de sens car A (matrice 3×3) et AB (matrice 3×5) n'ont pas les mêmes dimensions.

Exercice 12. Vrai ou faux ?

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1) Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.

Vrai car $A^{-1} = B \Rightarrow AB = I \Rightarrow (B$ inversible et $B^{-1} = A)$.

2) Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Faux en général, on peut bien en conclure que C est inversible mais $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet

$$(B^{-1}A^{-1})C = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

donc C est inversible et $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Un contre-exemple possible est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors que $C^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq A^{-1}B^{-1}$.

3) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.
Faux en général. Contre-exemple : si $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = A^2 = 0$.

4) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
Faux en général (sauf si $AB = BA$). Contre-exemple : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors que $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $AB + BA = 0$ ssi $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.
Vrai car $(A+B)^2 - (A^2 + B^2) = AB + BA$.

6) Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible.
Vrai car si $A + B = AB$, alors $(I - A)(I - B) = I^2 - A - B + AB = I - A - B + A + B = I$, donc $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = I - B$.

Exercice 13.

Soient les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les puissances successives de J.
On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $J^k = 0$ pour tout $k \geqslant 4$.

2) Que peut-on dire de $I - J^4$? En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
$I - J^4 = I$, or $I - J^4 = (I - J)(I + J + J^2 + J^3)$ (on vérifie en développant), donc $A = I - J$ est inversible et $A^{-1} = I + J + J^2 + J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.

1) Montrer que le produit de deux matrices diagonales de dimension $n \times n$ est une matrice diagonale.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices diagonales, alors $C = AB$ est une matrice $n \times n$ de terme général $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij}$ car A est diagonale. Si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$ donc $c_{ij} = 0$, ce qui prouve que C est diagonale, avec $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

2) Soit D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'expression de D^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question 1, D^2 est diagonale, et le i-ème terme de la diagonale vaut a_i^2. Par récurrence immédiate, on établit sans difficulté que que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad D^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss vue en cours :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow 2L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 + 5L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 - 4L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 - 2L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow 4L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 3L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 6 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow \frac{1}{4}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ -3 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, répondre aux questions ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcrl} -4x & - & 4y & - & z & = -15 \\ -2x & - & y & - & z & = -14 \\ 3x & + & 2y & + & z & = 15 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{ll} -2x - 2y - 3z & = 2 \\ 4y + 3z & = 5 \\ -1 - y - x & = 1 \end{array}\right.$$

(1) Mettre le système sous forme matricielle.

$(\mathcal{S}_1)$: $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -15 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$(\mathcal{S}_2)$: $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss vue en cours.

Pour $(\mathcal{S}_1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ -2 & -1 & -1 & -14 \\ 3 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 + \frac{3}{4}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1\frac{11}{4} \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow -4L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + 4L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow -\frac{1}{4}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

donc l'unique solution de $(\mathcal{S}_1)$ est $(x, y, z) = (2, -1, 11)$.

Pour $(\mathcal{S}_2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow \frac{2}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 3L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{4}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + 3L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow -\frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

donc l'unique solution de $(\mathcal{S}_2)$ est $(x, y, z) = (-\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3})$.

Exercice 17. Pour $n \geqslant 2$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on pose $A = J_n - I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

(1) Calculer J_n^2 en fonction de J_n.

(2) En déduire une expression de $(A + I_n)^2$ en donction de A et de I_n.

(3) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}A + \dfrac{2-n}{n-1}I_n$.

1) Chaque coefficient de J_n^2 est obtenu en sommant n fois le produit 1×1, donc vaut n. On a donc $J_n^2 = nJ_n$.
Autre rédaction possible : en notant $c_{ij} = 1$ le coefficient d'indice (i,j) de J_n, on peut écrire que le coefficient (i,j) de J_n^2 est donné par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

2) On obtient, d'après la question 1, $(A + I_n)^2 = J_n^2 = nJ_n = n(A + I_n)$.

3) Comme $(A + I_n)^2 = A^2 + AI_n + I_nA + I_n^2 = A^2 + 2A + I_n$, d'après la question 2, on peut écrire

$$\begin{aligned}
A^2 + 2A + I_n = nA + nI_n \quad &\Rightarrow \quad A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n \\
&\Rightarrow \quad A(A - (n-2)I_n) = (n-1)I_n \\
&\Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n\right) = I_n,
\end{aligned}$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I_n$.