Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

Suites

- Définitions et exemples
- Convergence des suites
- Opérations sur les limites
- Comparaison de suites
- Exemples importants
- Suites monotones
- Suites adjacentes
- Suites extraites
- Suites récurrentes
- Suites négligeables, notation $o()$
- Suites équivalentes
- Exemples de calculs d'équivalents

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$$

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n+1$$

$$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \dots \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sin(1)}{2},\ u_2 = \frac{\sin(2)}{5},\ u_3 = \frac{\sin(3)}{10},\ \dots \qquad u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$$

Définition. Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E.

Pour une suite $u : \mathbb{N} \to E$, on note u_n plutôt que $u(n)$ le terme de rang n, et la suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.
E peut être un ensemble quelconque : nombres, polynômes, fonctions, matrices, suites, etc.

Exemples :

$$u_n = n^2 + 1$$

$$u_n = e^{\frac{i\pi}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$P_n = X^2 - nX + n^2$$

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

On se limitera ici aux suites numériques ($E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exemples de suites

- Suite définie explicitement :

$$u_n = (-1)^n, \quad u_n = \frac{1+i}{1+2^n}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \ldots$$

- Suite définie par récurrence :
  - $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$.
  - suite de Collatz : $u_0 \in \mathbb{N}^*$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

  - suite de Fibonacci : $u_0 = 0, u_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{C}$) est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + \ldots u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

(le nombre de termes multiplié par la moyenne des extrêmes)

Suites géométriques

Une suite géométrique de raison r ($r \in \mathbb{C}$) est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r\, u_n.$$

Elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, r^n.$$

Par ailleurs, si $r \neq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + u_1 + \ldots u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

On dit qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
- monotone si (u_n) est soit croissante, soit décroissante
- strictement montone si (u_n) est soit strictement croissante, soit strictement décroissante
- constante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$
- majorée (par M) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- minorée (par m) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- bornée si (u_n) est à la fois majorée et minorée
- périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$

Exercice : Pour chaque suite ci-dessous, étudier la monotonie et le caractère majoré, minoré et périodique.

$$u_n = -3n + 2 \qquad u_n = \sqrt{n}$$

$$u_n = n(20 - n) \qquad u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$u_n = E\left(\frac{n}{2}\right) \qquad E(x) : \text{partie entière de } x$$

$$u_n = (-1)^n \qquad u_n = n(-1)^n$$

$$u_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) \qquad u_n = n + \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$$

Définition. On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété (P) à partir d'un certain rang s'il existe un entier N tel que la suite extraite $(u_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P).

Exemples :

- La suite des décimales de $1/6 = 0,1666666\ldots$ est constante à partir d'un certain rang
- La suite des décimales de $1/22 = 0,00454545\ldots$ est périodique à partir d'un certain rang
- La suite de terme général $u_n = 20n - n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang (exercice : le montrer !)

Définition d'une suite convergente

Définition intuitive : la suite (u_n) converge vers la limite L si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), la suite (u_n) prend ses valeurs dans l'intervalle $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ à partir d'un certain rang (qui dépend de ε bien sûr)

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pour limite $L \in \mathbb{R}$ (ou converge vers L) si

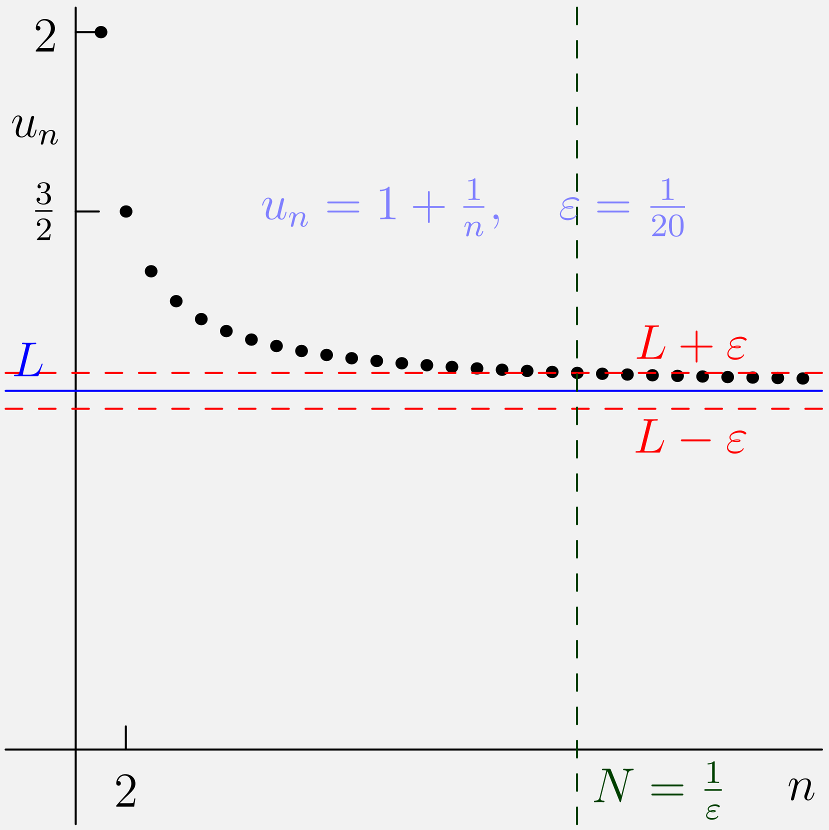
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon.$$

Remarque :

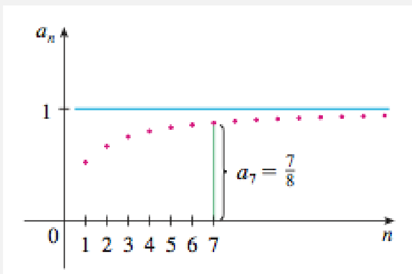
$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L-\varepsilon \leq u_n \leq L+\varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, ou $\lim(u_n) = L$

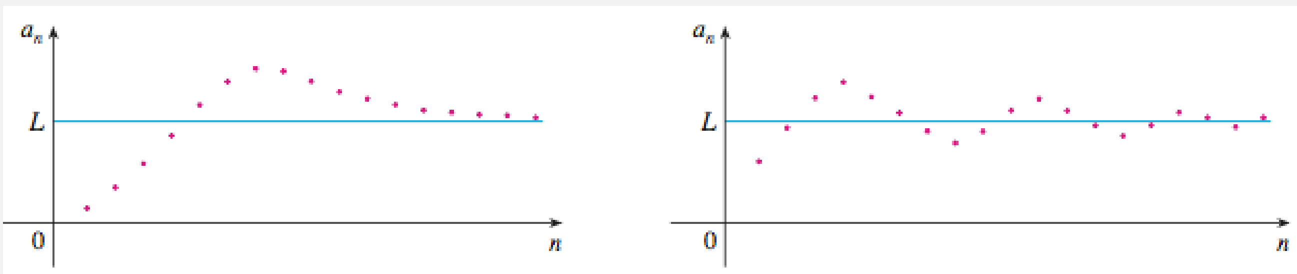
Limite



Exemples de suites convergentes



La suite $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$



Suites a_n convergentes non monotones

Unicité de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique.

- Soient L et L' deux limites de la suite (u_n)
- Pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$
$$\exists N' \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N', \quad |u_n - L'| \leq \varepsilon$$
- on a alors, pour $n \geq \max(N, N')$,
$$|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq 2\varepsilon$$
- cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $|L - L'| = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Exercice : Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a pour limite 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Pour $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + 1$, on a donc

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

donc (u_n) converge vers 0.

Propriété des suites convergentes

Proposition : Toute suite convergente est bornée

Soit (u_n) une suite convergente.

- Pour $\varepsilon = 1$, on a $\exists N, \forall n \geq N, \quad L - 1 \leq u_n \leq L + 1$
- On pose alors
$$m = \min\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, L-1\}$$
$$M = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, L+1\}$$
et l'on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leq u_n \leq M.$$

Une suite qui ne converge pas est appelée suite divergente.

Exemples :
$$u_n = n, \qquad v_n = (-1)^n, \qquad w_n = n(-1)^n$$

$\longrightarrow$ une suite bornée n'est pas nécessairement convergente !

Remarque : (u_n) est divergente mais admet une limite infinie

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ($\lim(u_n) = +\infty$) si
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_n \geq A.$$

Définition. On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ ($\lim(u_n) = -\infty$) si
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_n \leq A.$$

Limites et opérations (1)

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L'$, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda L$
- $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L + L'$
- $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} LL'$
- Si $L \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{L}$

Limites et opérations (2)

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Preuve :

- (v_n) est bornée donc $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$

Soit $\varepsilon > 0$

- Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\exists N, \forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$
- On a donc $\forall n \geq N, |u_n v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n v_n| \leq \varepsilon.$$

Limites et opérations (3)

Théorème. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ et f est une fonction continue en L,

$$\text{alors} \quad f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(L)$$

Exercice : Trouver la limite de la suite $u_n = \cos(n)\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- donc la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge aussi vers 0 puisque $\sin 0 = 0$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$
- La suite $\cos(n)$ est bornée et la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0, donc la suite (u_n) converge vers 0

Exercice : Trouver la limite de la suite

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Exercice : Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_n = \frac{\cos(n^2)+n}{n\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\sqrt{n^2+1}}$$

Exercice : Soit une suite (u_n) qui converge vers $L \neq 0$.

Montrer que (u_n) est non nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \neq 0$

- Si $L > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| \leq \frac{L}{2}$.

  En particulier $L - \dfrac{L}{2} \leq u_n$, donc $u_n \geq \frac{L}{2} > 0$.

- Si $L < 0$: on applique le résultat précédent à la suite de terme général $v_n = -u_n$, qui converge vers $-L > 0$

Limites infinies et opérations (1)

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

  (rappel :

  $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad u_n \to 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang)

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \qquad ; \qquad v_n = \frac{1}{\sin(1/n)}.$$

Limites infinies et opérations (2)

- $(u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow L$ fini ou $+\infty) \Rightarrow u_n + v_n \longrightarrow +\infty$
- $(u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow L$ fini > 0 ou $+\infty) \Rightarrow u_n v_n = +\infty$
- (résultats analogues pour les limites $-\infty$).

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

$$u_n = \ln(n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad v_n = n^2 + \sin(n).$$

Formes indéterminées (on ne peut pas conclure directement) :

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad (-\infty) - (-\infty) \qquad (+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Limites et inégalités

Soient 2 suites (u_n) et (v_n).

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$ et si u_n et v_n convergent, alors
$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$
En particulier, si (u_n) converge et si $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \geq a$
$$\text{alors } \lim_{n\to\infty} u_n \geq a$$

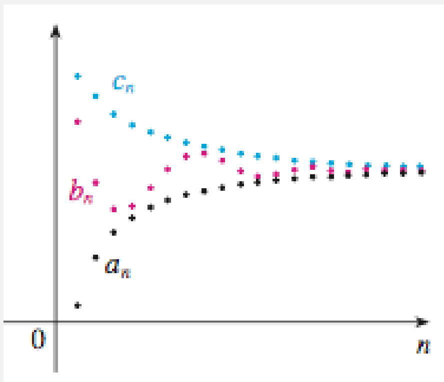
Attention : même si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a$, la conclusion est seulement $\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} > 0, \quad$ mais $\quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Théorème des gendarmes

Soient 3 suites, (a_n), (b_n) et (c_n) vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- (a_n) et (c_n) convergent
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$



alors (b_n) converge et $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Soient $u_n = \dfrac{-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$$

donc d'après le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3n+6+(-1)^n}{5n+5}$
2. $v_n = \dfrac{\sin(n\pi/6)}{n^2}$
3. $w_n = \dfrac{n^3+2n^2((-1)^n+4)+5n-1}{3n^3+n^2+4n+1}$

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim u_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = +\infty$$

et

$$\lim v_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = -\infty.$$

Exercice : Prouver ce théorème.

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 + (-1)^n$
2. $v_n = -n^4 + 5n^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

car la fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Attention : $(|u_n|)$ peut être convergente sans que (u_n) le soit !

exemple : $u_n = (-1)^n$

Théorème : Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $|v_n|$ converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

- Soient $u_n = -|v_n|$ et $w_n = |v_n|$
- on a $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

donc d'après le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Suite arithmétique

Proposition. Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r ($u_n = u_0 + nr$).

- Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
- Si $r = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, $\quad a^n$ n'est pas convergente

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h$$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, $\quad a^n$ n'est pas convergente

Si $|a| < 1$ et $a \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{|a|} > 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$

Si $a = 0$, $\quad a^n = 0$: $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, $\quad a^n$ n'est pas convergente

Si $a < -1$, $\quad |a| > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \quad a^n$ n'est pas bornée

Si $a = -1$, $\quad a^n = (-1)^n$

Exercice : Montrer que

$$0.99999999\cdots\cdots = 1.$$

Qu'en déduisez-vous ?

Exercice : Donner la limite de $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^n$.

Exercice : Soit

$$u_n = 2^n \qquad v_n = 6^n.$$

Donner les limites de (u_n), de (v_n), de $(u_n v_n)$ et de $(u_n + v_n)$. Donner ensuite la limite de (u_n/v_n) pour en déduire la limite de $(u_n - v_n)$.

Suites (u_n) telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| \leq \alpha^n$
- $|u_n| \leq \alpha^n |u_0|$
- $\alpha < 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Soit $N = E(2|a|)$ (N entier, et $N+1 \geq 2|a|$)
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N$
- $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N.|u_N|$ or $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$u_n = \frac{n^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e > 2$

  donc $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$
- $\forall n \geq N, \quad u_n = u_N . \frac{u_{N+1}}{u_N} . \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \ldots \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq u_N . 2^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Ou, plus simplement : $n! = 1.2.3 \ldots n \leq 1.n^{n-1}$

donc $u_n = \frac{n^n}{n!} \geq \frac{n^n}{n^{n-1}} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exercice : Donner les limites des suites définies par les formules suivantes :

1. $u_n = 3^n$
2. $v_n = (0,5)^n$
3. $w_n = 2^n + 5^n$
4. $x_n = 2^n - 5^n$
5. $y_n = 2^n - \frac{5^n}{n!}$
6. $z_n = (-0,2)^n - 5^n$
7. $t_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2^n + 1}$

Étude de la monotonie

Deux méthodes classiques pour étudier la croissance (ou la décroissance) d'une suite (u_n) :

méthode 1 : étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

méthode 2 (si $u_n > 0$) : calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- si $\forall n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite (u_n) est croissante
- si $\forall n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite (u_n) est décroissante

Exemple 1 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n).$$

On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$

donc la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 2 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}} = \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1$$

donc la suite (u_n) est croissante

Exercice : Donner la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3}{n+5}$
2. $v_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
3. (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + w_n^2$
4. (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$.

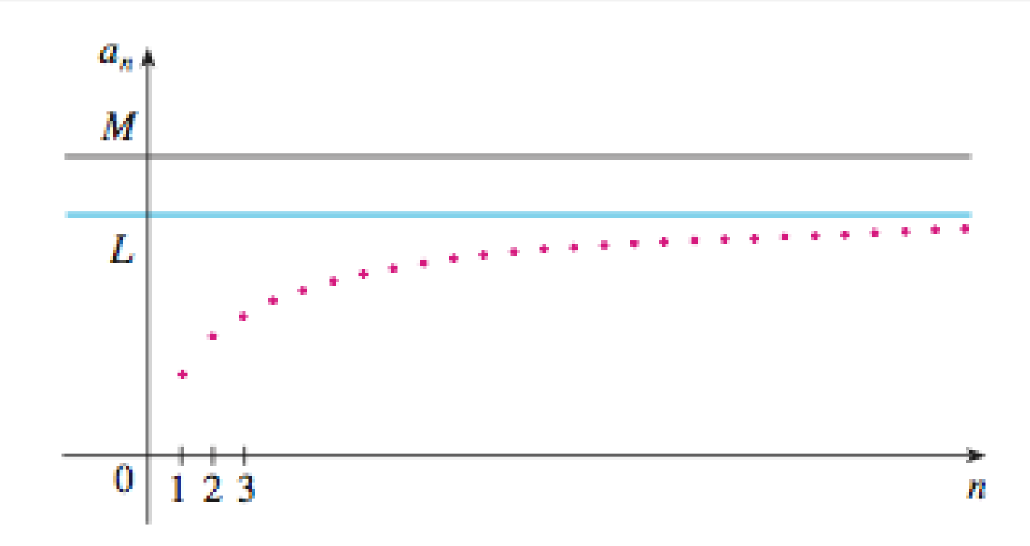
Exercice : Soit u_n définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de u_n.
2. Montrer que pour tout n, $u_n \geq n^2$.
3. Donner la limite de u_n.

Limites et monotonie

Théorème :

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.



Suite a_n croissante et majorée

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est une partie majorée de $\mathbb{R}$

  $\longrightarrow$ A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad L - \varepsilon \leq u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc
  $\forall n \geq N, \qquad L - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

  $$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

donc la suite (u_n) a pour limite L

Exemple

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

- Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$:
  - propriété vraie pour $n = 0$.
  - si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $\frac{0^2+1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} \leq \frac{1^2+1}{2}$, i.e. $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

  la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
  $\hookrightarrow$ (u_n) est majorée
- (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$
- (u_n) est croissante et majorée, donc converge vers une limite L
- $u_{n+1} \longrightarrow L$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \longrightarrow \dfrac{L^2 + 1}{2}$, donc $L = \dfrac{L^2 + 1}{2}$
- $L = \dfrac{L^2 + 1}{2} \Rightarrow 2L = L^2 + 1 \Rightarrow (L - 1)^2 = 0 \Rightarrow L = 1$

conclusion : (u_n) converge vers 1

Exemple

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

- (u_n) est croissante : pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

- Montrons que pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$:

  $1! = 1 = 2^{1-1}$ et pour $n \geq 2$, $n! = 2 \times 3 \times \cdots \times n \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$

- Donc pour tout n,

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\ell}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3$$

  donc (u_n) est majorée

conclusion : (u_n) converge

(*vous verrez plus tard que* $\lim u_n = e$)

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

- $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

  donc (u_n) est croissante
- Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. propriété vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
     - $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
     - $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
     - $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc (u_n) est majorée

conclusion : (u_n) est convergente

(*vous verrez plus tard que* $\lim u_n = \frac{\pi^2}{6}$)

Exercice : Soit (v_n) définie par $v_0 = 1/2$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

1. Quelle est la monotonie de (v_n) ?
2. Montrer que pour tout n, $0 \leq v_n \leq 1$.
3. Montrer que (v_n) converge et donner sa limite.

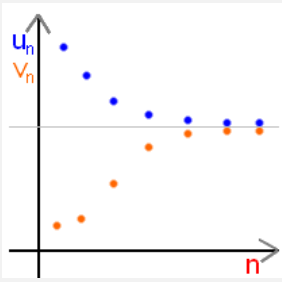
Exercice : Soit (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{1+v_n^2}$.

1. Montrer que pour tout n, $0 < v_n \leq 1$.
2. Quelle est la monotonie de (v_n) ?
3. Montrer que (v_n) converge et donner sa limite.

Suites adjacentes

Définition. Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

1. (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$



Théorème. Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

Suites adjacentes

Démonstration

- On a $(u_n - v_n)$ décroissante et tendant vers 0, donc positive, donc on a le classement :
$$v_0 \le v_1 \le v_2 \le \cdots \le v_n \le \ldots \le u_n \le \cdots \le u_2 \le u_1 \le u_0$$
- (v_n) est majorée par u_0, comme elle est croissante, elle converge vers L
- (u_n) est minorée par v_0, comme elle est décroissante, elle converge vers L'

Comme $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0, \quad L = L'$

Exercice : Dans chaque cas suivant, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Dans l'affirmative, donner leur limite commune.

1. $u_n = -\dfrac{1}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{1}{n+3}$
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \qquad v_n = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2n+2}\right)$
3. $u_n = \dfrac{n-1}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{n}{n+1}$
4. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{2n}{n+3}$

Suites extraites

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $(v_n) = (u_{2n})$
- La suite des termes de rang impair : $(w_n) = (u_{2n+1})$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $(a_n) = (u_{3n})$
- ...

La construction repose sur deux moyens :

1. on choisit certains termes de la suite
2. on ne revient pas en arrière

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemples :

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair ($v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$)
- $\varphi(n) = 2n+1$: suite des termes de rang impair ($w_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1}$)
- $\varphi(n) = 3n$: suite des termes de rang multiple de 3 ($a_n = u_{\varphi(n)} = u_{3n}$)

Proposition : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers L.

Toute suite $(u_{\varphi(n)})$ extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite L.

Cette proposition est utile pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Si (u_n) converge vers L, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers L

- La suite extraite (v_n) vérifie $v_n = u_{2n} = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$
- La suite extraite (w_n) vérifie $w_n = u_{2n+1} = -1$, donc $\lim_{n\to\infty} w_n = -1$

Conclusion : (u_n) diverge

Proposition : Soit (u_n) une suite ; on pose $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$$

Démonstration.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

1. Les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont extraites de la suite (u_n) qui converge vers L, elles convergent donc aussi vers L
2. - (v_n) et (w_n) convergent vers L, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1$ et $\exists N_2$,

   $$\forall n \geq N_1,\ |v_n - L| \leq \varepsilon, \text{ et } \forall n \geq N_2,\ |w_n - L| \leq \varepsilon$$

   donc pour $N = \max\{N_1, N_2\}$,

   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N,\ |v_n - L| \leq \varepsilon, \text{ et } |w_n - L| \leq \varepsilon$$

   - Soit $n > 2N$ (donc $n \geq 2N+1$) :
     - Si n est pair, $n = 2p$ et $p > N$ donc $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$
     - Si n est impair, $n = 2p+1$ et $p \geq N$ donc $|u_n - L| = |u_{2p+1} - L| = |w_p - L| \leq \varepsilon$

Exercices (difficiles) :

1. Soit (u_n) une suite et $(x_n) = (u_{2n})$, $(y_n) = (u_{2n+1})$, $(z_n) = (u_{3n})$ 3 suites extraites de (u_n). Montrer que si ces 3 suites sont convergentes, alors (u_n) est convergente.

2. Soit (u_n) une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, la suites extraite (u_{kn}) est convergente. Peut-on en conclure que (u_n) est convergente ? (penser à la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est premier et 0 sinon)

Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par

1. son terme initial : u_0
2. la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Remarque importante : si $\lim(u_n) = L$ et f est continue, alors nécessairement $L = f(L)$ (L est un point fixe de f)

Exercice : Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$. Donner la seule limite possible de (u_n).

Exemples

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Exercice : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \qquad u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que la suite $(s_n) = (u_n + v_n)$ est constante.
2. Montrer que la suite $(d_n) = (u_n - v_n)$ est géométrique et donner sa formule en fonction de n.
3. En déduire des formules explicites pour (u_n) et (v_n), donner leurs limites et dire si elles sont adjacentes.

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

(autrement dit, f préserve le sens des inégalités)

Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante.

1. Si $u_1 \geq u_0$, alors la suite (u_n) est croissante
2. Si $u_1 \leq u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante
3. Si $u_1 = u_0$, alors la suite (u_n) est constante

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

Montrons par récurrence la propriété $(P_n) : \quad u_n \leq u_{n+1}$

- (P_0) est vraie
- Si (P_n) est vraie (hypothèse de récurrence)
  la fonction f est croissante, donc :

  $u_n \leq u_{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$
  donc (P_{n+1}) est vraie
- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$

(u_n) est croissante

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4/10$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

1. Montrer que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. (u_n) converge-t-elle ? Si oui, donner la limite.

Notations de Landau

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), ce que l'on note $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ (ou plus simplement $u_n = o(v_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

(i.e.$\forall \varepsilon > 0$, on a $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$ à partir d'un certain rang).

Il est souvent plus commode d'utiliser la caractérisation suivante :

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que v_n ne s'annule pas. Alors

$$u_n = o(v_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exemples

- $n = o(n^2)$ car $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\ln(n) = o(n)$ car $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\dfrac{1}{n} = o(1)$ et plus généralement, $u_n = o(1) \iff u_n \to 0$
- $u_n = o(0) \iff (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang (rarement utile)

Manipulation algébrique des $o()$

Dans la notation $u_n = o(v_n)$, le terme de droite représente n'importe quelle suite négligeable devant la suite (v_n).

$\to$ règles spéciales pour manipuler algébriquement les $o()$:

- $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$
- $\forall \lambda \neq 0, \quad \lambda o(u_n) = o(u_n) = o(\lambda u_n)$
- $o(u_n) - o(u_n) = o(u_n)$
  $\to$ en pratique on ne met donc jamais un coefficient ou un signe $-$ devant un $o()$
- $o(o(u_n)) = o(u_n)$
- si $u_n = o(v_n)$, alors $o(u_n) + o(v_n) = o(v_n)$
- $x_n.o(v_n) = o(x_n.v_n)$
- $o(u_n).o(v_n) = o(u_n.v_n)$
- en cas de doute on revient à la définition ou à la caractérisation $u_n/v_n \to 0$

Preuve de $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$

Soit (x_n) et (y_n) deux suites telles que $x_n = o(u_n)$ et $y_n = o(u_n)$. Montrons que $x_n + y_n = o(u_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1, N_2 tels que

$$\forall n \geq N_1, \quad |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|$$

$$\forall n \geq N_2, \quad |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|$$

donc en posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\forall n \geq N, \quad |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \varepsilon|u_n|$$

ce qui montre que $x_n + y_n = o(u_n)$.

Preuve de $x_n.o(v_n) = o(x_n.v_n)$

Soit (u_n) une suite telle que $u_n = o(v_n)$.
Montrons que $x_n.u_n = o(x_n.v_n)$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad |x_n.u_n| \leq \varepsilon|x_n.v_n|.$$

c'est-à-dire exactement $x_n.u_n = o(x_n.v_n)$.

Comparaisons classiques

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu > \lambda > 1$, alors

$$(\ln n)^{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad n^{\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad \lambda^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

$$n! \to +\infty, \quad n^{n} \to +\infty,$$

et

$$(\ln n)^{\alpha} = o(n^{\beta}), \quad n^{\beta} = o(\lambda^{n}), \quad \lambda^{n} = o(\mu^{n}),$$

$$\mu^{n} = o(n!), \quad n! = o(n^{n})$$

Exercice : Donner les limites des suites définies ci-dessous :

$$u_n = 2^{n} - n^{100}; \quad v_n = \frac{1}{\ln n - n^{-n}}; \quad w_n = e^{n^{3} - 3^{n}}; \quad x_n = n^{n} - 100n!.$$

Suites équivalentes

Définition. On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes, ce que l'on note $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Remarque : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que v_n ne s'annule pas. Alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \quad \iff \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Preuve :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Exemples

- $\sqrt{n} = o(n)$ donc $n + \sqrt{n} = n + o(n)$ donc $n + \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} n$
- $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ et $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\sqrt{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n$.
- $\forall L \neq 0, \quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} L \Leftrightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$
- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0 \Leftrightarrow (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang (rarement utile)

Règles de calcul avec les équivalents

- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} c_n$, alors $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} c_n$
- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$, alors $a_n.b_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n.y_n$
- si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} x_n$ et $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$ et b_n et y_n ne s'annulent pas, alors
$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x_n}{y_n}$$
- si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $\alpha > 0$, alors $u_n^\alpha = v_n^\alpha$
- si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n = o(w_n)$
- en cas de doute on revient à la définition ou à la caractérisation $u_n/v_n \to 1$

Pièges à éviter

- On n'additionne jamais les équivalents !

  $a_n \sim x_n$ et $b_n \sim y_n$ n'implique pas $a_n + b_n \sim x_n + y_n$

  contre-exemple à retenir : $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$
  (en additionnant, on obtiendrait l'absurdité $1 \sim 0$)

- Si $u_n \sim v_n$, on n'a pas $f(u_n) \sim f(g_n)$ pour toute fonction f !

  contre-exemple : $u_n = n$, $v_n = n + \sqrt{n}$, $f(x) = e^x$

  en effet $\dfrac{f(u_n)}{f(v_n)} = \dfrac{e^{n+\sqrt{n}}}{e^n} = e^{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 1

Exercice : Soient deux suites (u_n) et (v_n) strictement positives telles que $v_n \to +\infty$ et et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.
Montrer que $\ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n$.

$$
\begin{aligned}
u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \quad &\Rightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 && \text{(caractérisation)}\\
&\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 && \text{(ln est continue)}\\
&\Rightarrow \quad \ln u_n - \ln v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 &&\\
&\Rightarrow \quad \ln u_n - \ln v_n = o(1) &&\\
&\Rightarrow \quad \ln u_n - \ln v_n = o(\ln v_n) && (\text{car } 1 = o(\ln v_n))\\
&\Rightarrow \quad \ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n && \text{(définition)}
\end{aligned}
$$

Exercice : Soient deux suites (u_n) et (v_n) strictement positives telles que $v_n \to 0$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Montrer que $\ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n$.

Équivalents de suites polynomiales

Proposition. Une expression polynomiale est équivalente à son terme dominant (terme de plus haut degré). Si $a_d \neq 0$, alors

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 + a_0 \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad a_d n^d$$

Preuve : Pour tout $k < d$, $n^k = o(n^d)$ donc $a_k n^k = o(n^d)$ et donc

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 + a_0 = a_d n^d + o(n^d) \underset{n\to\infty}{\sim} a_d n^d.$$

Corollaire. Un quotient d'expressions polynomiales (fraction rationelle) est équivalente au quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur. Si $a_d \neq 0$ et $b'_d \neq 0$, alors

$$\frac{a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 + a_0}{b_{d'} n^{d'} + b_{d'-1} n^{d'-1} + \ldots + b_1 + b_0} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_d n^d}{b_{d'} n^{d'}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_d}{b_{d'}} n^{d-d'}$$

Exercice : Pour chaque suite définie ci-dessous, donner un équivalent (le plus simple possible) et en déduire sa limite éventuelle.

- $u_n = \dfrac{4n^2 + 3n + 5}{e^n + e^{-n}}$
- $v_n = \dfrac{5^n + n^2 2^n + n^n}{-2n^3 + n^2 - 4n + 1}$
- $w_n = \dfrac{4n^2 + 3e^n - 5^n}{-2n^3 + 5^n + e^{-n}}$

Exercice : En utilisant la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

calculer un équivalent de $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ (coefficient binomial)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} && \text{(définition)} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} && \text{(formule de Stirling)} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.
\end{aligned}$$

Exercice : Trouver un équivalent de $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Pour "simplifier" l'expression $\sqrt{a} - b$, on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + b$:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \qquad \text{car } \sqrt{n^2+1} = n + o(n). \end{aligned}$$

Exercice : Pour chaque suite définie ci-dessous, donner un équivalent (le plus simple possible) et en déduire sa limite éventuelle.

- $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}\left((\sin n)\sqrt{n} - \ln(n^2)\right)}{\ln(1+e^{n^2})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$
- $v_n = \dfrac{n^{2n} - (2n)^n}{\sqrt{e^n} - e^{\sqrt{n}}}$
- $w_n = \ln(n+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} - 2^{-n}\cos(n^{-2})$