Intelligence artificielle

Satisfaction de contraintes

Elise Bonzon
elise.bonzon@u-paris.fr

LIPADE - Université de Paris
http://www.math-info.univ-paris5.fr/∽bonzon/

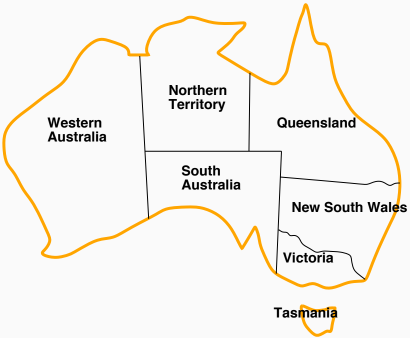
Problèmes de satisfaction de contraintes

Exemples de CSP

Problèmes de satisfaction de contraintes (CSP)

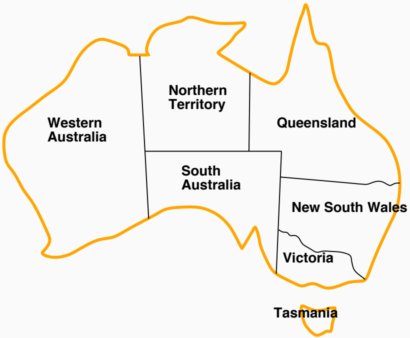
- Problèmes de recherche “classiques” :
  - Un état est une “boite noire”
  - N’importe quelle structure de données qui contient un test pour le but, une fonction d’évaluation, une fonction successeur
- **CSP** :
  - Un état est défini par un ensemble de **variables** X_i, dont les **valeurs** appartiennent au **domaine** D_i
  - Le test pour le but est un ensemble de **contraintes** qui spécifient les combinaisons autorisées pour les valeurs sur des sous-ensembles de variables
- Exemple simple d’un langage formel de représentation
- Permet d’utiliser des algorithmes généraux plus efficaces que les algorithmes de recherche standards

Exemple : coloriage de carte



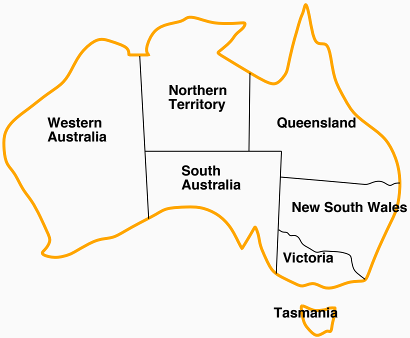
- **Variables** : WA, NT, SA, Q, NSW, V, T
- **Domaines** : $D_i = \{rouge, vert, bleu\}$
- **Contraintes** : régions adjacentes de couleurs différentes

Exemple : coloriage de carte



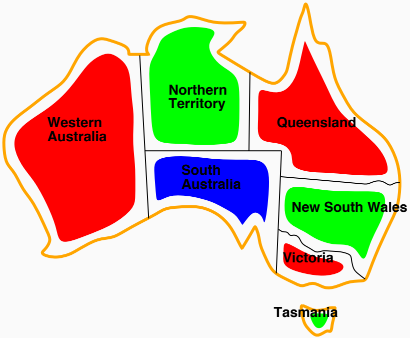
- **Variables** : WA, NT, SA, Q, NSW, V, T
- **Domaines** : $D_i = \{rouge, vert, bleu\}$
- **Contraintes** : régions adjacentes de couleurs différentes
  - Par exemple, $WA \neq NT$ (si le langage le permet)

Exemple : coloriage de carte



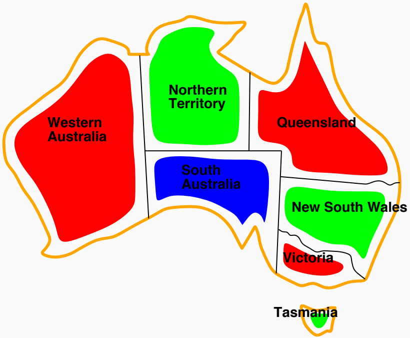
- **Variables** : WA, NT, SA, Q, NSW, V, T
- **Domaines** : $D_i = \{rouge, vert, bleu\}$
- **Contraintes** : régions adjacentes de couleurs différentes
  - Par exemple, $WA \neq NT$ (si le langage le permet)
  - Ou $(WA, NT) \in \{(rouge, vert), (rouge, bleu), (vert, rouge), \ldots\}$

Exemple : coloriage de carte



- Les solutions sont des affectations qui satisfont toutes les contraintes

Exemple : coloriage de carte



- Les solutions sont des affectations qui satisfont toutes les contraintes
- Par exemple, $\{WA = rouge, NT = vert, Q = rouge, NSW = vert, V = rouge, SA = bleu, T = vert\}$

Variétés de CSPs

- Variables discrètes
  - Domaines finis : si de taille d, il y a $O(d^n)$ affectations complètes
    - Par exemple, CSPs booléens, $d = 2$
  - Domaines infinis (entiers, caractères...)
    - Par exemple, mise en place d'un planning, avec date de début/de fin pour chaque tâche
    - Nécessite un langage de contraintes. Eg $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_5$
    - Si les contraintes sont linéaires, le problème est soluble
    - Si les contraintes sont non linéaires, problème indécidable
- Variable continues
  - Par exemple, temps de début/fin pour les observations du télescope de Hubble
  - Contraintes linéaires solubles en temps polynomial en utilisant des méthodes de programmation linéaire

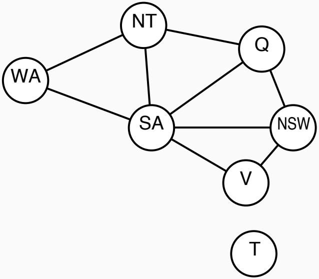
Variétés de contraintes

- Contraintes unaires, ne concernent qu'une seule variable
  - Par exemple, $SA \neq vert$
- Contraintes binaires, concernent une paire de variables
  - Par exemple, $SA \neq WA$
- Contraintes d'ordre plus élevé, concernent 3 variables ou plus
  - Par exemple, contraintes sur les puzzles cryptarithmétiques
- Préférences (ou contraintes souples)
  - Par exemple, *rouge* est mieux que *vert*
  - Souvent représentable par un coût associé à chaque affectation de variable

  $\Rightarrow$ Problèmes d'optimisation de variables

Graphe de contraintes

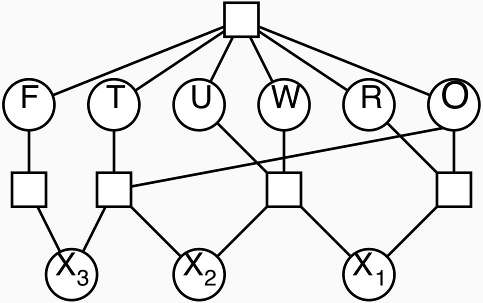
- CSP binaires : chaque contrainte lie au maximum deux variables
- Graphe de contraintes : les nœuds sont des variables, les arcs représentent les contraintes



- Les algorithmes CSP utilisent les graphes de contraintes
- Permet d'accélerer la recherche : par exemple, colorier la Tasmanie est un sous-problème indépendant

Exemple : puzzle cryptarithmétique

```
   T W O
+  T W O
--------
 F O U R
```



- **Variables** : F, T, U, W, R, O, X_1, X_2, X_3
- **Domaines** : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- **Contraintes** :
  - $\mathit{Alldiff}(F, T, U, W, R, O)$
  - $O + O = R + 10X_1$
  - $X_1 + W + W = U + 10X_2$
  - ...

Problèmes CSPs du monde réel

- Problèmes d'affectation (eg. *qui enseigne quel cours ?*)
- Problèmes d'emploi du temps
- Configuration de matériels
- Planification pour les transports
- Planification dans les usines
- Allocation de salles
- ...
- Note : beaucoup de problèmes du mondé réel impliquent des variables à valeurs réelles

Formulation de la recherche standard (recherche incrémentale)

- Les états sont définis par les valeurs des variables déjà affectées
- Etat initial : un ensemble d'affectations vides $\{\}$
- Fonction successeur : attribuer une valeur à une variable non encore affectée, de façon cohérente (vis à vis des contraintes) à l'affectation actuelle
- Test du but : toutes les variables sont affectées

Formulation de la recherche standard (recherche incrémentale)

- Cet algorithme de recherche marche pour tous les CSPs
- Chaque solution apparait à une profondeur de n s'il y a n variables
  - $\rightarrow$ Utiliser la recherche en profondeur d'abord
- n : nombre de variables ; d : taille du domaine des variables ; b : facteur de branchement
- $b = (n - p)d$ à profondeur p
  - $\rightarrow$ $n!d^n$ feuilles
  - $\rightarrow$ alors qu'il n'y a que d^n affectations possible ! !

Recherche en arrière pour les CSPs (backtracking search)

Backtracking search

- L'affectation des variables est commutative
  - L'ordre dans lequel on affecte les variables n'a pas d'importance
  - $WA = rouge$ puis $NT = vert$ est la même chose que $NT = vert$ puis $WA = rouge$
- Il n'y a donc besoin de ne considérer qu'une seule variable par profondeur de l'arbre de recherche

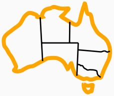
  $\rightarrow$ $b = d$, et donc d^n feuilles
- Recherche en profondeur d'abord avec l'affectation d'une variable à la fois est appelée recherche par retour arrière (backtracking search)
- Algorithme de recherche basique pour les CSPs
- Permet de résoudre le problème des n reines pour $n \sim 25$

Algorithme de recherche par retour arrière

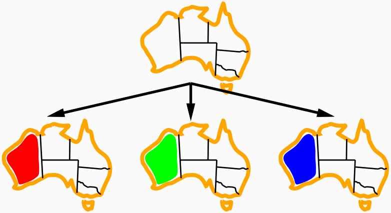
function BACKTRACKING-SEARCH(*csp*) **returns** solution/failure
  return RECURSIVE-BACKTRACKING({ }, *csp*)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment*, *csp*) **returns** soln/failure
  if *assignment* is complete **then return** *assignment*
  var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[*csp*], *assignment*, *csp*)
  for each *value* **in** ORDER-DOMAIN-VALUES(*var*, *assignment*, *csp*) **do**
    if *value* is consistent with *assignment* given CONSTRAINTS[*csp*] **then**
      add $\{var = value\}$ to *assignment*
      result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(*assignment*, *csp*)
      if $result \neq failure$ **then return** *result*
      remove $\{var = value\}$ from *assignment*
  return *failure*

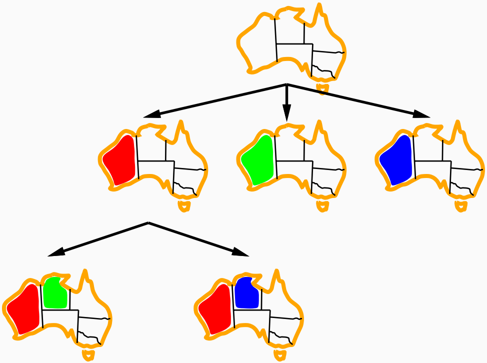
Exemple



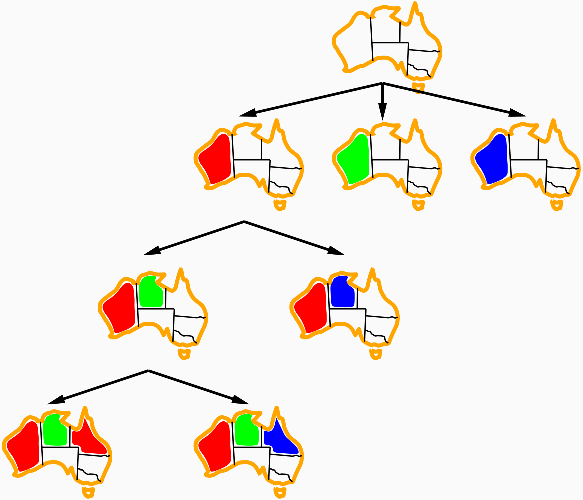
Exemple



Exemple



Exemple



Améliorer l'efficacité de la recherche par backtrack

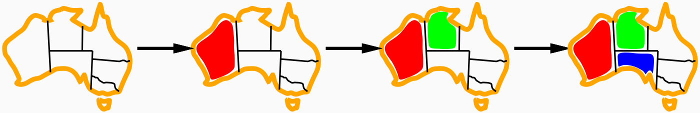
1. Comment choisir la variable à affecter ensuite ?
   (`Select-Unassigned-Variable`)
2. Comment ordonner les valeurs des variables ?
   (`Order-Domain-Values`)
3. Est-il possible de détecter un échec inévitable plus tôt ?
4. Comment tirer avantage de la structure du problème ?

Améliorer l'efficacité du la recherche par backtrack

1. Comment choisir la variable à affecter ensuite ?
   (`Select-Unassigned-Variable`)
2. Comment ordonner les valeurs des variables ?
   (`Order-Domain-Values`)
3. Est-il possible de détecter un échec inévitable plus tôt ?
4. Comment tirer avantage de la structure du problème ?

Valeurs minimum restantes (MRV)

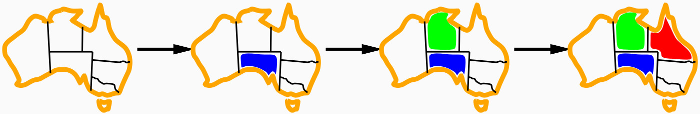
- Heuristique des valeurs minimum restantes (MRV)
  - ⇒ choisir une des variables ayant le moins de valeur “légale” possible



Heuristique du degré

- Si plusieurs variables ne peuvent pas être départagées par l'heuristique MRV
- Heuristique du degré

  $\Rightarrow$ choisir la variable qui a le plus de contraintes à respecter parmi les variables restantes

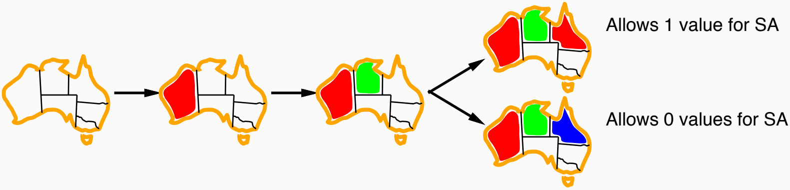


Améliorer l'efficacité du la recherche par backtrack

1. Comment choisir la variable à affecter ensuite ?
   (`Select-Unassigned-Variable`)
2. Comment ordonner les valeurs des variables ?
   (`Order-Domain-Values`)
3. Est-il possible de détecter un échec inévitable plus tôt ?
4. Comment tirer avantage de la structure du problème ?

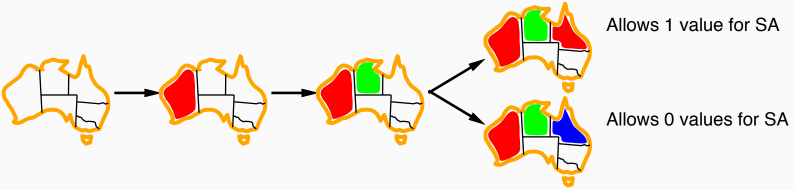
Valeur la moins contraignante

- Etant donné une variable, choisir celle qui a la valeur la moins contraignante
  - ⇒ la variable qui empêche le moins d'affectations possibles sur les variables restantes



Valeur la moins contraignante

- Etant donné une variable, choisir celle qui a la valeur la moins contraignante
  - ⇒ la variable qui empêche le moins d'affectations possibles sur les variables restantes



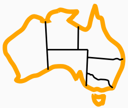
- Combiner ces heuristiques permet de résoudre le problème des n reines, avec $n = 1000$

Améliorer l'efficacité du la recherche par backtrack

1. Comment choisir la variable à affecter ensuite ?
   (`Select-Unassigned-Variable`)
2. Comment ordonner les valeurs des variables ?
   (`Order-Domain-Values`)
3. Est-il possible de détecter un échec inévitable plus tôt ?
4. Comment tirer avantage de la structure du problème ?

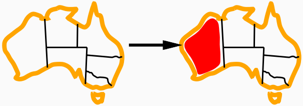
Vérification en avant

- Idée : garder en mémoire les valeurs autorisée pour les variables qu'il reste à affecter
- Arrête la recherche lorsqu'une variable n'a plus de valeur "légale" possible



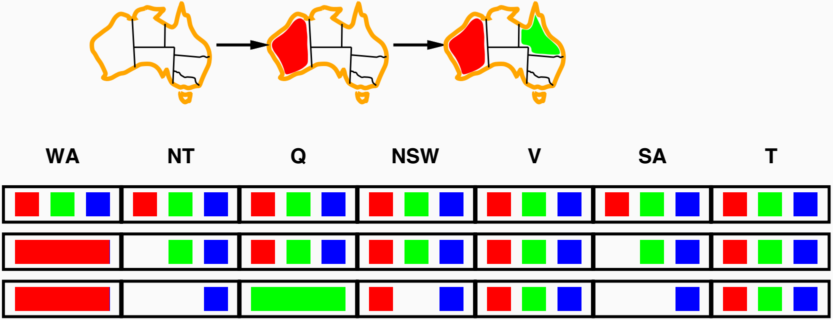
Vérification en avant

- Idée : garder en mémoire les valeurs autorisée pour les variables qu'il reste à affecter
- Arrête la recherche lorsqu'une variable n'a plus de valeur "légale" possible



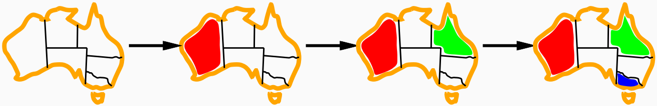
Vérification en avant

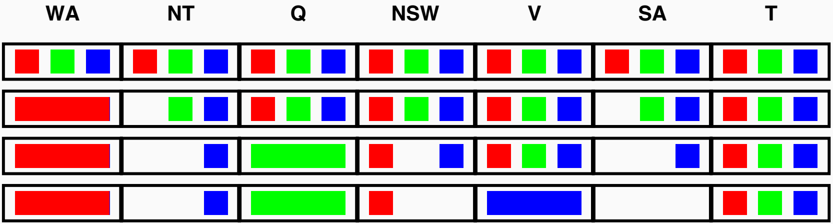
- Idée : garder en mémoire les valeurs autorisée pour les variables qu'il reste à affecter
- Arrête la recherche lorsqu'une variable n'a plus de valeur "légale" possible



Vérification en avant

- Idée : garder en mémoire les valeurs autorisée pour les variables qu'il reste à affecter
- Arrête la recherche lorsqu'une variable n'a plus de valeur "légale" possible



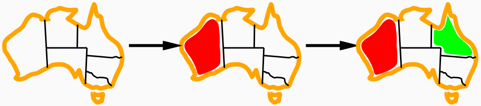


Propagation de contraintes

- La vérification en avant permet de propager l'information des variables affectées aux variables non affectées, mais ne permet pas de détecter tous les échecs

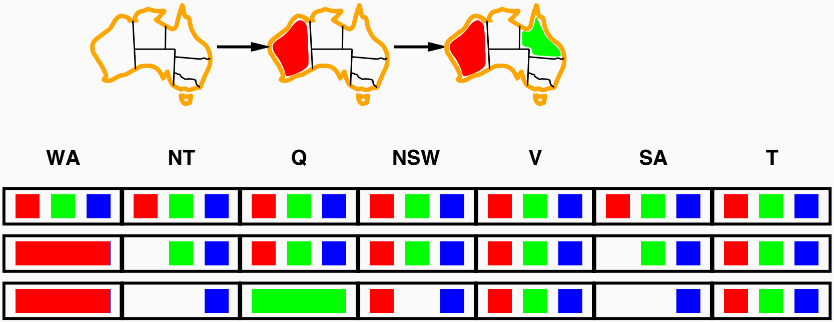
Propagation de contraintes

- La vérification en avant permet de propager l'information des variables affectées aux variables non affectées, mais ne permet pas de détecter tous les échecs



Propagation de contraintes

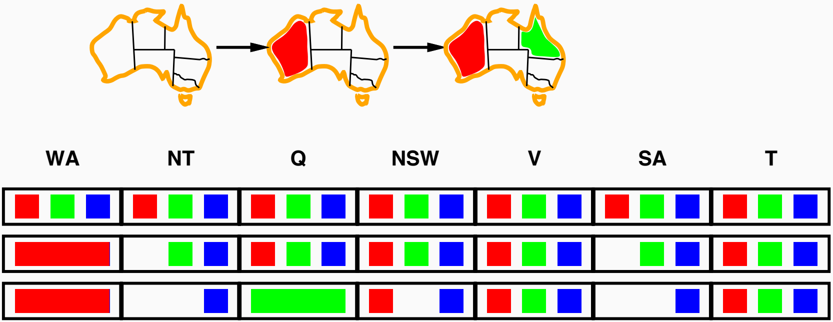
- La vérification en avant permet de propager l'information des variables affectées aux variables non affectées, mais ne permet pas de détecter tous les échecs



- *NT* et *SA* ne peuvent pas être tous les deux bleus !
- La propagation de contraintes permet de vérifier les contraintes localement

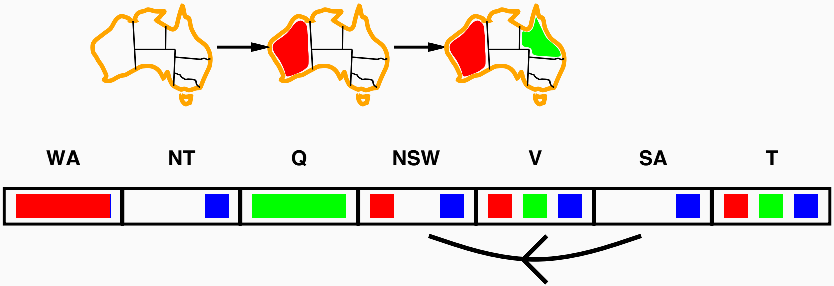
Consistance des arcs

- La forme la plus simple de propagation est de rendre les arcs consistants
- $X \to Y$ est consistant ssi pour **toute** valeur x de X, il y a **au moins un** y autorisé



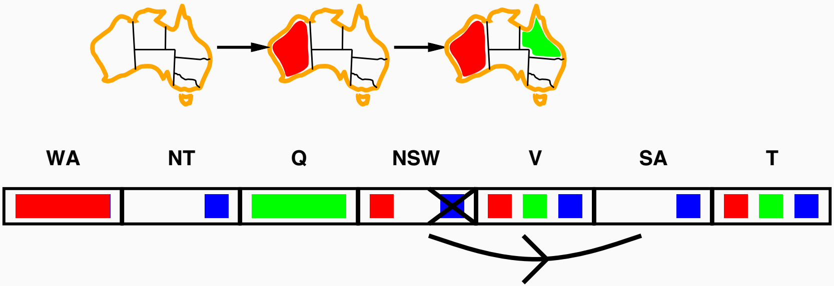
Consistance des arcs

- La forme la plus simple de propagation est de rendre les arcs consistants
- $X \rightarrow Y$ est consistant ssi pour **toute** valeur x de X, il y a **au moins un** y autorisé



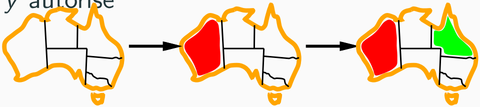
Consistance des arcs

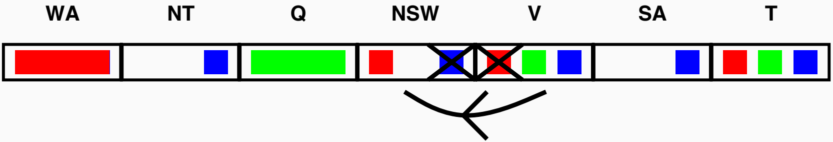
- La forme la plus simple de propagation est de rendre les arcs consistants
- $X \to Y$ est consistant ssi pour **toute** valeur x de X, il y a **au moins un** y autorisé



Consistance des arcs

- La forme la plus simple de propagation est de rendre les arcs consistants
- $X \rightarrow Y$ est consistant ssi pour **toute** valeur x de X, il y a **au moins un** y autorisé

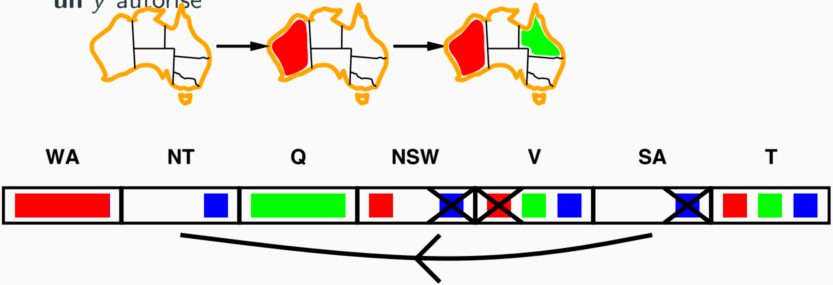




- Si X perd une valeur, les voisins de X doivent être revérifiés

Consistance des arcs

- La forme la plus simple de propagation est de rendre les arcs consistants
- $X \rightarrow Y$ est consistant ssi pour **toute** valeur x de X, il y a **au moins un** y autorisé



- Si X perd une valeur, les voisins de X doivent être revérifiés
- Repère un échec avant la vérification en avant
- Peut être lancé comme un pré-processeur ou après chaque affectation

Algorithme de vérification de consistance d'arcs

```
function AC-3( csp) returns the CSP, possibly with reduced domains
   inputs: csp, a binary CSP with variables {X1, X2, ..., Xn}
   local variables: queue, a queue of arcs, initially all the arcs in csp

   while queue is not empty do
      (Xi, Xj) ← REMOVE-FIRST(queue)
      if REMOVE-INCONSISTENT-VALUES(Xi, Xj) then
         for each Xk in NEIGHBORS[Xi] do
            add (Xk, Xi) to queue
```

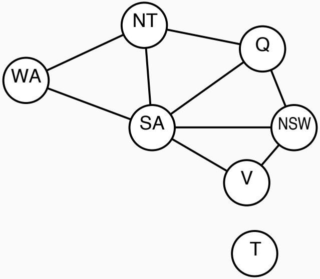
```
function REMOVE-INCONSISTENT-VALUES( Xi, Xj) returns true iff succeeds
   removed ← false
   for each x in DOMAIN[Xi] do
      if no value y in DOMAIN[Xj] allows (x,y) to satisfy the constraint Xi ↔ Xj
         then delete x from DOMAIN[Xi];  removed ← true
   return removed
```

Améliorer l'efficacité du la recherche par backtrack

1. Comment choisir la variable à affecter ensuite ?
   (`Select-Unassigned-Variable`)
2. Comment ordonner les valeurs des variables ?
   (`Order-Domain-Values`)
3. Est-il possible de détecter un échec inévitable plus tôt ?
4. Comment tirer avantage de la structure du problème ?

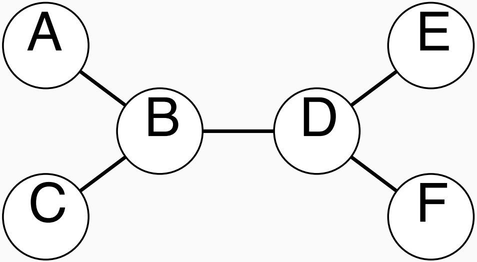
Structure des problèmes

Structure des problèmes



- La Tasmanie est un sous-problème indépendant
- Identifiables comme étant des composants connexes du graphe de contraintes

CSPs structurés sous forme d'arbre



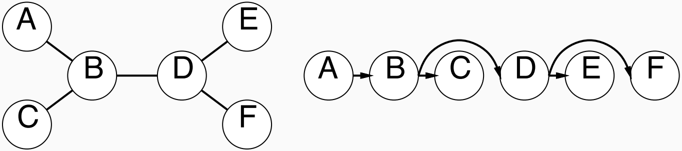
Théorème

Si le graphe de contraintes ne contient pas de cycles, le CSP a une complexité en temps de $O(nd^2)$

Cas général : complexité en temps de $O(d^n)$

Algorithme pour les CSPs structurés sous forme d'arbre

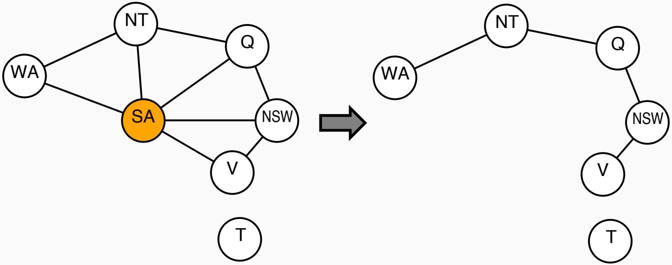
1. Choisir une variable comme étant la racine, et ordonner les variables de la racine aux feuilles, de façon à ce que le parent de chaque nœud le précède



2. Pour j de n à 2, appliquer RemoveInconsistent($Parent(X_j), X_j$)
3. Pour j de 1 à n, affecter X_j de façon à ce qu'il soit consistent avec $Parent(X_j)$

CSPs *quasiment* structurés sous forme d'arbre

- Conditionnement : instancier une variable, restreindre les domaines de ses voisins



- Conditionnement du coupe-cycle : instancier (de toutes les façons possibles) un ensemble de variables de façon à ce que le graphe de contraintes restant soit un arbre
- Cycle coupé de taille $c \Rightarrow$ complexité en $O(d^c \times (n-c)d^2)$
- Très rapide pour c petit

Conclusion

Conclusion

- Formulation particulière d'un état avec un ensemble de couples valeurs/attributs
- Les conditions d'une solution sont représentées par un ensemble de contraintes sur les variables
- La recherche avec backtrack est une technique efficace
- Des heuristiques générales (indépendantes du domaine) permettent de résoudre plus rapidement un CSP
- D'autres techniques utilisant la décomposition peuvent aussi être efficaces.