

Réseaux de neurones (Partie 1b) Le perceptron illustré sur le OR

Bruno Bouzy

bruno.bouzy@parisdescartes.fr

Avril 2022

UE IA L3

Le problème du OR et un neurone

- Le problème du OR

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
z=OR(x, y)	0	1	1	1

- Perceptron = 1 neurone

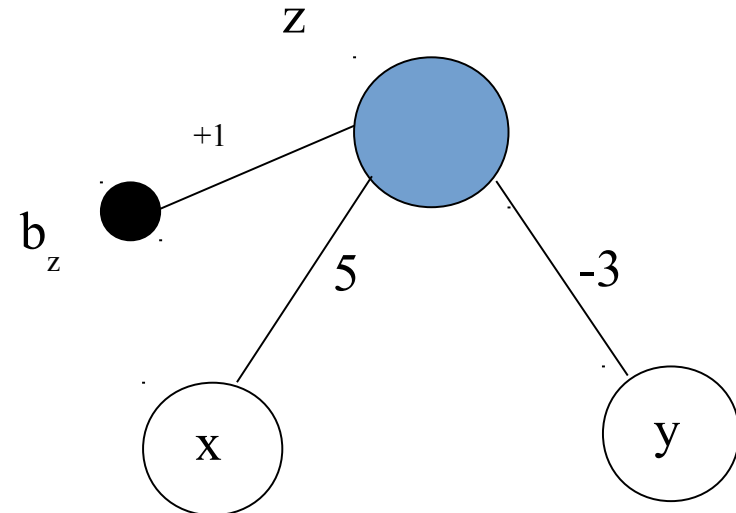
$$w_{xz}=5$$

$$- w_{yz}=-3$$

$$- w_{bz}=1$$

- Equation caractéristique :

$$5x - 3y + 1 = 0 \quad (\text{delta})$$



Un neurone = hyperplan séparateur

- 1 neurone

$$w_{xz}=5 \text{ et } w_{yz}=-3 \text{ et } w_{bz}=1$$

-

- Equation caractéristique :

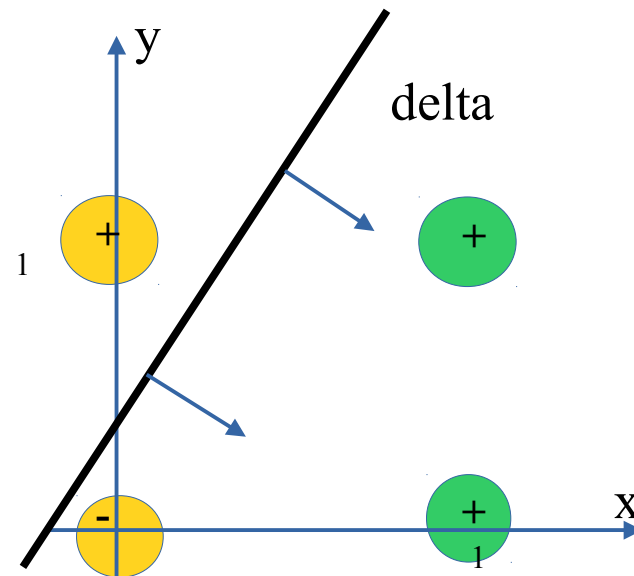
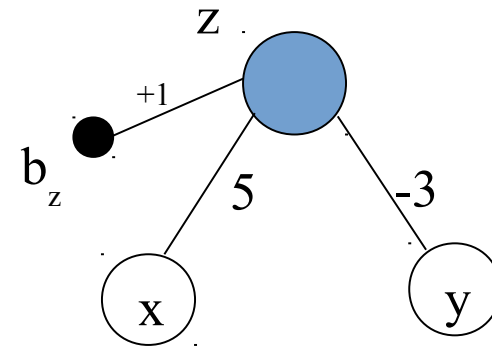
$$5x - 3y + 1 = 0 \quad (\text{delta})$$

- La droite delta sépare le plan en 2 demi-plans

- Demi-plan positif tel que $5x - 3y + 1 > 0$
- Demi-plan négatif tel que $5x - 3y + 1 < 0$

- Le neurone classe les exemples du:

- Demi-plan positif comme positif (+)
- Demi-plan négatif comme négatif (-)
- (1, 0) et (1, 1) positifs (+) sont **classés correctement**
- (0, 1) positif (+) est classé négatif par le neurone
- (0, 0) négatif (-) est classé positif par le neurone
- Le neurone fait **deux erreurs**



Présentation de l'exemple (0,0)

- Exemple négatif $tz=0$

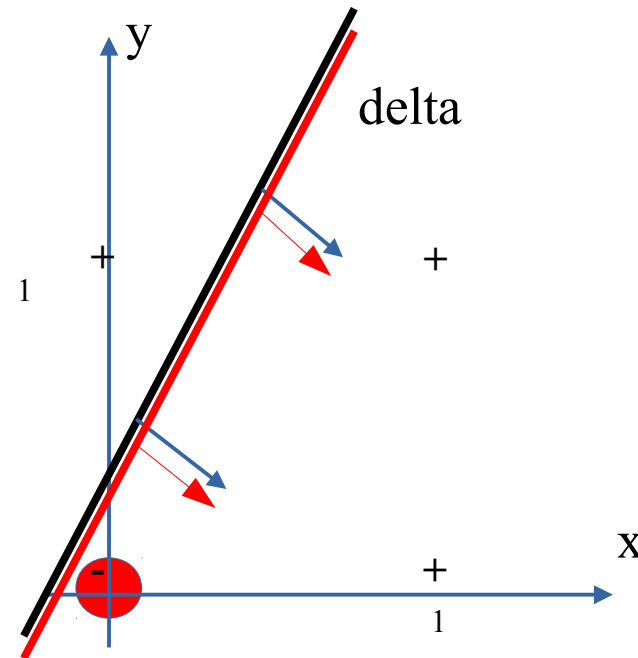
- $Netz = 1$ or 0.7
- l'exemple est **mal classé**

- Signal d'erreur :

- $Dz = (0-0.7) 0.7 (1-0.7) = -0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = -0.15$

- Mise à jour des poids :

- $W_{xz} = 5$
- $W_{hz} = 1 + 0.1(-0.15) \cdot 1 = 0.985$



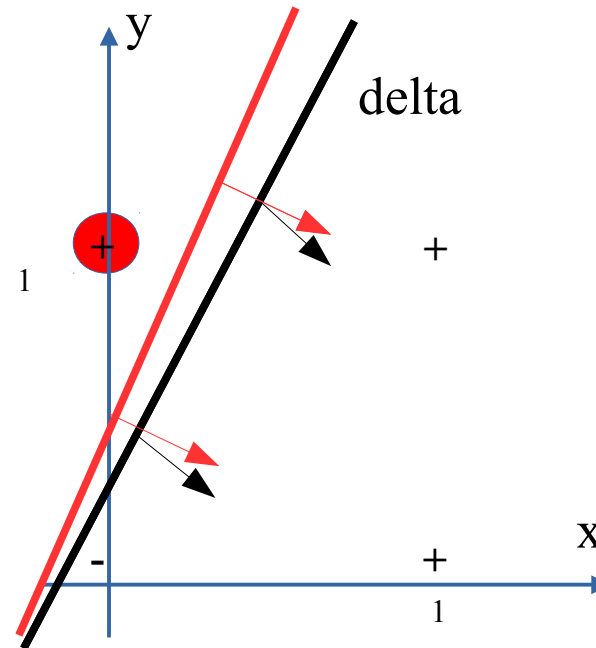
- La droite delta est légèrement descendue (comme si elle voulait passer sous l'exemple (0,0))
- La droite delta ne pivote pas
- Le changement est considéré comme **important** car (0,0) est mal classé

Présentation de l'exemple (0,1)

- Exemple positif $tz=1$
 - $Netz = -3 + 0.99 = -2.01$ $oz = 0.125$
 - l'exemple est **mal classé**

- Signal d'erreur :
 - $Dz = (1 - 0.125) \cdot 0.125 (1 - 0.125) = 0.08 = 0.1$

- Mise à jour des poids :
 - $W_{xz} = 5$
 - $W_{yz} = -3 + 0.01 = -2.99$
 - $W_{bz} = 0.985 + 0.01 = 0.995$



- La droite delta est légèrement remontée (comme si elle voulait passer au dessus l'exemple (0,1))
- La droite delta a légèrement pivotée dans le sens trigonométrique
- Le changement est considéré comme important car (0,1) est mal classé

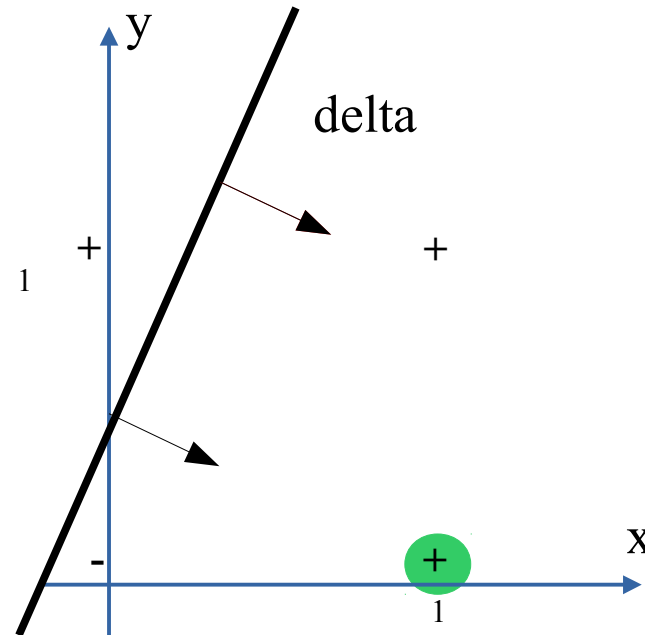
Présentation de l'exemple (1,0)

- Exemple positif $tz=1$
 - $Netz = 5 + 1 = 6$ et $oz = 0.99$
 - l'exemple est déjà **bien classé**

- Signal d'erreur :
 - $Dz = 0.0001$

- Mise à jour des poids :
 - $Wxz = 5.0001$
 - $Wyz = -2.99$
 - $Wbz = 0.995 + 0.00001 = 0.995$

- La droite delta n'a quasiment pas bougé.
- Le **changement est considéré comme minuscule** car (1,0) est déjà bien classé



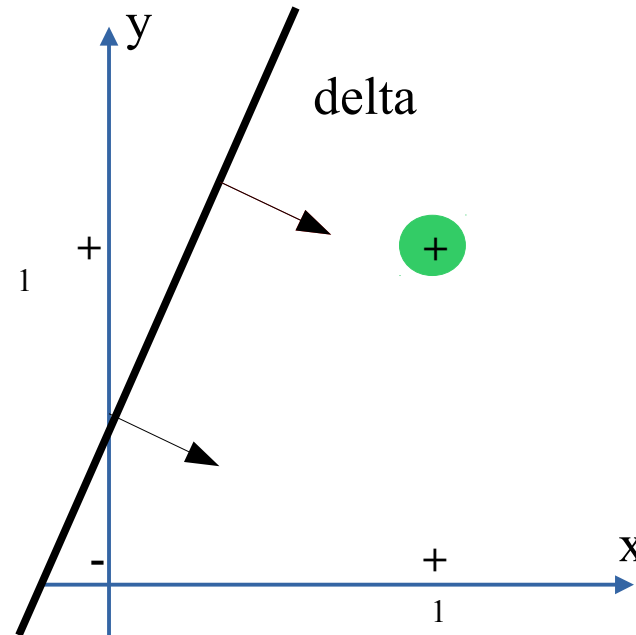
Présentation de l'exemple (1,1)

- Exemple positif $tz=1$
 - $Netz = 5 - 3 + 1 = 3$ et $oz = 0.97$
 - l'exemple est déjà **bien classé**

- Signal d'erreur :
 - $Dz = (1 - 0.97) \cdot 0.97 \cdot (1 - 0.97) = 0.001$

- Mise à jour des poids :
 - $W_{xz} = 5.0001$
 - $W_{yz} = -2.99 + 0.0001 = -2.99$
 - $W_{bz} = 0.995 + 0.00001 = 0.995$

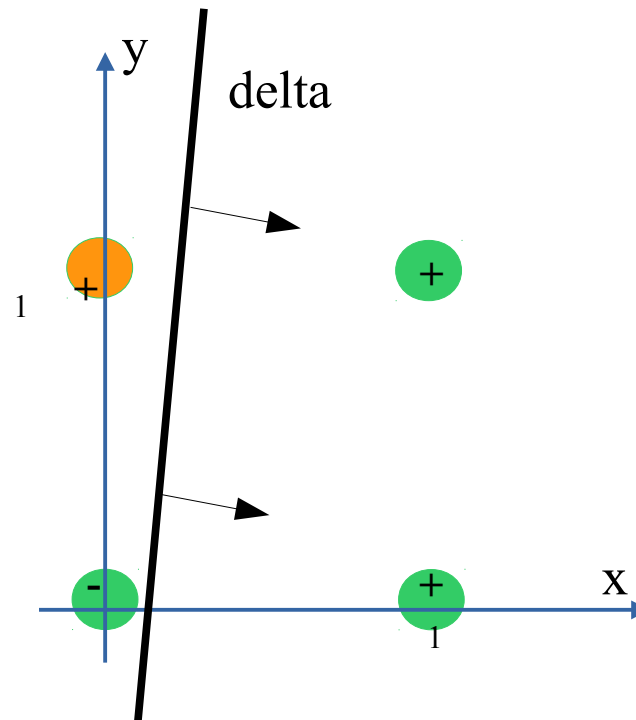
- La droite delta n'a quasiment pas bougé.
- Le **changement est considéré comme minuscule** car (1,1) est déjà bien classé



Plusieurs itérations...

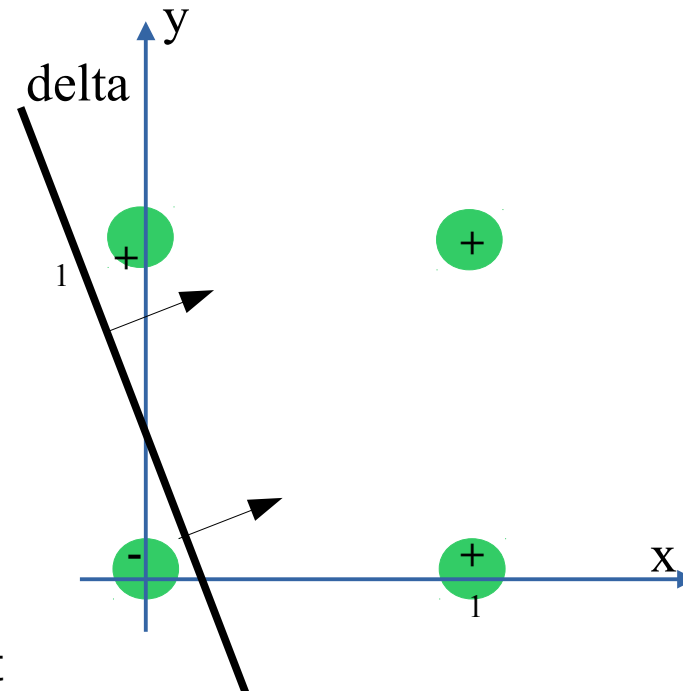
- Après une itération = présentation des 4 exemples, on a vu que :
 - La droite delta est un peu descendue
 - Elle a légèrement pivoté dans le sens trigonométrique
 - Les exemples déjà bien classés n'ont pas fait bouger delta sensiblement
 - Les exemples mal classés oui

- Après plusieurs itérations...
 - (0, 0) devient bien classé
 - (0, 1) reste mal classé



Encore plus d'itérations...

- Après encore plus d'itérations
 - La droite delta a pivoté dans le sens trigonométrique
 - $(0, 1)$ devient bien classé



-
- C'est presque fini...
 - Les 4 exemples sont classés correctement

Toujours plus d'itérations...

- Après encore plus d'itérations
 - La droite delta a continué de pivoter dans le sens trigonométrique jusqu'à venir être à égale distance de :
 - l'exemple négatif (0,0)
 - des exemples positifs (1, 0) et (0, 1)
 - Les exemples sont tous bien classés
- C'est fini
 - À la limite l'équation de delta est :
$$x + y - 0.5 = 0$$

