Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°2 — 25 novembre 2019
durée: 1h30

Question de cours: Énoncer le théorème des accroissements finis.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists x \in]a, b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exercice 1.

(1) Rappeler l'expression des dérivées des fonctions ch, sh, th et Arccos (on précisera l'intervalle de définition dans chaque cas).

Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

La fonction Arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}\, x).$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $] - 1, 1[$;

la fonction Arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$;

par conséquent, en tant que composée f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{th}'(x).\, \mathrm{Arccos}'(\mathrm{th}\, x) = (1 - \mathrm{th}^2\, x).\frac{-1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\, x}} = -\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\, x}.$$

(3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

$\lim\limits_{+\infty} \mathrm{th} = 1$ et $\lim\limits_{1} \mathrm{Arccos} = \mathrm{Arccos}(1) = 0$;
$\lim\limits_{-\infty} \mathrm{th} = -1$ et $\lim\limits_{-1} \mathrm{Arccos} = \mathrm{Arccos}(-1) = \pi$;
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I =]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[=]0, \pi[$.

(4) Montrer que la bijection réciproque de f, notée g, est dérivable sur I, puis que

$$\forall y \in I, \quad g'(y) = -\frac{1}{\sin y}.$$

La fonction f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur I et

$$\forall y \in I, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2(g(y))}}.$$

Or, pour tout $y \in I$ on a

$$\begin{aligned} y = f(g(y)) = \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}(g(y))) \quad &\Rightarrow \quad \cos y = \mathrm{th}(g(y)) \\ &\Rightarrow \quad 1 - \cos^2 y = 1 - \mathrm{th}^2(g(y)) \\ &\Rightarrow \quad 1 - \mathrm{th}^2(g(y)) = \sin^2 y \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{1 - \mathrm{th}^2(g(y))} = \sin y \quad \text{car } \sin y > 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in I,\ g'(y) = -\dfrac{1}{\sin y}$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes quand elles existent, ou prouver que la limite n'existe pas.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^7 - 1}$;

$f(x) = x^6 - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$
$g(x) = x^7 - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$
$g'(1) = 7 \neq 1$ donc d'après la règle de l'Hôpital, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(1)}{g'(1)} = \dfrac{6}{7}$.

(autre rédaction: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^7 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{x^6-1}{x-1}}{\frac{x^7-1}{x-1}} = \dfrac{\lim_{x \to 1} \frac{x^6-1}{x-1}}{\lim_{x \to 1} \frac{x^7-1}{x-1}} \dfrac{f'(1)}{g'(1)} = \dfrac{6}{7}$)

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x).\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

On a $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{x^2}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{|x|}$ donc $(\sin x).\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{\sin x}{|x|} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{|x|}$.
Il n'y a pas de limite quand $x \to 0$ car $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$.

Exercice 3. Donner un équivalent (le plus simple possible) des quantités suivantes :

(1) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}$ quand $x \to 0$;

En multipliant et en divisant par la quantité conjuguée $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}.\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+x}^2-\sqrt{1+x^2}^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Or, $x-x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2} \to 2$, donc $\dfrac{x-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

Conclusion: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

(2) $\dfrac{x^3-3x^2+4\ln(x^4)}{\ln \operatorname{ch} x+\sqrt{x}}$ quand $x \to +\infty$.

Par croissance comparée, on a, quand $x \to +\infty$,

$$x^3-3x^2+4\ln(x^4) = x^3+o(x^3)+o(x^3) \sim x^3.$$

Par ailleurs, $\ln \operatorname{ch} x = \ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x)-\ln 2+\ln(1+e^{-2x}) = x+o(x)+o(1) \sim x$,

donc $\ln \operatorname{ch} x+\sqrt{x} \sim x$ (par croissance comparée) et finalement

$$\frac{x^3-3x^2+4\ln(x^4)}{\ln \operatorname{ch} x+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2.$$

Exercice 4.

(1) Retrouver, à partir du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $-\ln(1-x)$.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2).$$

En intégrant le développement limité précédent, comme la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est nulle en 0 et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, on obtient

$$-\ln(1-x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos(x)-\ln(1-x)$.

On a $\cos(x) = 1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$ (le terme suivant est en x^4 donc un $o(x^3)$).

En ajoutant ce DL au précédent, on obtient donc

$$\cos(x)-\ln(1-x) = 1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

(2) Retrouver, à partir du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\begin{aligned}(1+y)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\left(-\frac{1}{2}\right)y+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{y^2}{2}+o(y^2)\\ &= 1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2+o(y^2).\end{aligned}$$

En posant $y=x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

(3) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\cos(x)-\ln(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-\ln(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} &= \left(1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\ &= 1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{6}+o(x^5)\\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}\right)+o(x^3)\\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3).\end{aligned}$$

Exercice 5. On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x\geqslant 0,\quad f(x)=x\,e^x.$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, et bijective.

Les fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f (produit) est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x\geqslant 0,\quad f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x.$$

Comme $(1+x)e^x>0$ pour tout $x\geqslant 0$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable), et que $\lim_0 f=f(0)=0$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty$, on en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite, on note g la fonction réciproque de f. Que peut-on dire de la monotonie de g ?

Comme f est strictement croissante, g aussi (cf. théorème vu en cours).

(2) (a) Simplifier, pour tout $x \geqslant 1$, l'expression $\ln(x^x) - f(\ln x)$.

$$\ln(x^x) - f(\ln x) = \ln(e^{x\ln x}) - \ln x e^{\ln x} = x\ln x - \ln x . x = 0.$$

(b) En déduire que l'équation $x^x = 2$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$, et exprimer cette solution à l'aide de la fonction g.

On a
$$\begin{aligned} x^x = 2 &\Leftrightarrow \ln(x^x) = \ln 2 \quad (\ln \text{ bijective}) \\ &\Leftrightarrow f(\ln x) = \ln 2 \quad (\text{question précédente}) \\ &\Leftrightarrow \ln x = g(\ln 2). \end{aligned}$$

La dernière équivalence s'obtient en composant par la fonction bijective g (ce qui est possible car $\ln x \geqslant 0$ et $\ln 2 \geqslant 0$) et en remarquant que $g(f(\ln x)) = \ln x$ puisque g est la réciproque de f).
L'unique solution $x \in [1, +\infty[$ de l'équation $x^x = 2$ est donc $x = e^{g(\ln 2)}$.

(3) Dans cette question, on considère un réel $x \geqslant 0$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = x\, e^{-u_n}.$$

(a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant x$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ ($0 \leqslant 0 = u_0 \leqslant x$).
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant x$, alors $0 \leqslant e^{-u_n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant xe^{-u_n} \leqslant x$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant x$.

(b) Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, que vaut $f(\ell)$? En déduire l'expression de ℓ à l'aide de la fonction g.

Si $u_n \to l$, alors $l \geqslant 0$ donc $f(l)$ est bien définie. On a alors, par continuité de la fonction $t \mapsto xe^{-t}$, $l = xe^{-l}$, donc $le^l = x$, soit $f(l) = x$.
D'où l'on déduit $l = g(x)$.

(c) Montrer que si ℓ est le réel considéré à la question précédente, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \ell = x\big(e^{-u_n} - e^{-\ell}\big).$$

On a $u_{n+1} - l = xe^{-u_n} - l = xe^{-u_n} - xe^{-l} = x\big(e^{-u_n} - e^{-\ell}\big)$.

(d) En déduire, grâce au théorème des accroissements finis, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant x|u_n - \ell|.$$

La fonction $h(t) = e^{-t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème des accroissement finis entre u_n et l, on obtient l'existence d'un réel

c entre u_n et l (donc $c \geqslant 0$) tel que

$$h(u_n) - h(l) = h'(c).(u_n - l),$$

soit, puisque $|h'(c)| = |-e^{-c}| \leqslant 1$, $|e^{-u_n} - e^{-l}| \leqslant |u_n - l|$. En combinant avec la question précédente, on obtient donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant x|u_n - \ell|.$$

(e) En déduire que si $0 \leqslant x < 1$, la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - l| \leqslant x|u_{n-1} - l| \leqslant x^2|u_{n-2} - l| \leqslant \ldots \leqslant x^n|u_0 - l|.$$

Si $0 \leqslant x < 1$, $x^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc le terme de droite de l'inégalité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $u_n \to l$.

(4) Dans cette question, on cherche un équivalent de g en $+\infty$.

(a) Montrer que $\quad \forall y \geqslant e, \quad f(\ln y - \ln\ln y) \leqslant y \leqslant f(\ln y)$.

- On a $\forall y \geqslant e,\ f(\ln y) = \ln y.e^{\ln y} = y \ln y \geqslant y$ car $\ln y \geqslant 1$ ($y \geqslant e$).
- Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\forall y \geqslant e, \quad f(\ln y - \ln\ln y) &= (\ln y - \ln\ln y)e^{\ln y - \ln\ln y} \\
&\leqslant \ln y.e^{\ln y - \ln\ln y} \text{ car } \ln\ln y \geqslant 0 \\
&\leqslant \ln y.\frac{e^{\ln y}}{e^{\ln\ln y}} = \ln y.\frac{y}{\ln y} = y.
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $g(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln y$.

La fonction g étant croissante, elle préserve les inégalités donc de l'inégalité de la question (a) on déduit, en utilisant le fait que $g \circ f$ est l'identité, que

$$\forall y \geqslant e, \quad \ln y - \ln\ln y \leqslant g(y) \leqslant \ln y.$$

$$\text{donc} \quad \forall y \geqslant e, \qquad 1 - \frac{\ln\ln y}{\ln y} \leqslant \frac{g(y)}{\ln y} \leqslant 1.$$

Le terme de gauche tend vers 1 quand $y \to +\infty$ car

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\ln y}{\ln y} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\ln\ z}{z} = 0$$

par croissance comparée avec $z = \ln y$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{g(y)}{\ln y} = 1$, c'est-à-dire

$$g(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln y.$$