Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université de Paris

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2

TD n°3 : Équations Différentielles

2019-2020

Fiche guidée n°3

Équations différentielles linéaires du premier ordre, méthode de variation de la constante

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x,\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^{x}, \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{x^2}, \ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x, \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{x^2}, \ C \in \mathbb{R}$.

2m̀e étape : On cherche une solution particulière de (1) de la forme $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ (on dit qu'on fait *varier la constante* C).

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^{x},\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{x^2},\ C \in \mathbb{R}$.

2m̀e étape : On cherche une solution particulière de (1) de la forme $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ (on dit qu'on fait *varier la constante* C).

En injectant $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ et $y_p'(x) = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$ dans l'équation (1) on obtient

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = -(2x-1)e^{x}$$

et donc

$$C'(x) = -(2x-1)e^{x}e^{-x^2} = -(2x-1)e^{-(x^2-x)}.$$

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^x, \; x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{x^2}, \; C \in \mathbb{R}$.

2m̀e étape : On cherche une solution particulière de (1) de la forme $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ (on dit qu'on fait *varier la constante* C).

En injectant $y_p(x) = C(x)e^{x^2}$ et $y_p'(x) = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$ dans l'équation (1) on obtient

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = -(2x-1)e^x$$

et donc

$$C'(x) = -(2x-1)e^x e^{-x^2} = -(2x-1)e^{-(x^2-x)}.$$

Une primitive est $C(x) = e^{-(x^2-x)}$.

Elle conduit à la solution particulière $y_p(x) = e^{-(x^2-x)}e^{x^2} = e^x$.

Exercice 1

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x-1)e^{x},\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (1) sont de la forme

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto Ce^{x^2} + e^{x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=0.$$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=0.$$

Le coefficient devant y' n'est plus une constante. On s'assure donc qu'il ne s'annule pas : on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc en particulier $x^2+1\neq 0$. On peut maintenant normaliser l'équation :

$$y'(x)+\frac{2x}{(x^2+1)}y(x)=0$$

Une primitive de $f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)}$ est

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=0.$$

Le coefficient devant y' n'est plus une constante. On s'assure donc qu'il ne s'annule pas : on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc en particulier $x^2+1\neq 0$. On peut maintenant normaliser l'équation :

$$y'(x)+\frac{2x}{(x^2+1)}y(x)=0$$

Une primitive de $f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)}$ est $x\mapsto \ln(|x^2+1|)=\ln(x^2+1), x\in\mathbb{R}$ $\left(f \text{ est de la forme } \frac{u'}{u}\right)$.

Les solutions sont donc de la forme $y(x)=Ce^{-\ln(x^2+1)}=\frac{C}{e^{\ln(x^2+1)}}=\frac{C}{x^2+1},\ C\in\mathbb{R}$.

Elles sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

2m̀e étape : Pour chercher une solution particulière de (2) on fait varier la constante de la solution de l'équation homogène $y(x)=\frac{C}{x^2+1}$. On considère ainsi une fonction de la forme $y_p(x)=\frac{C(x)}{x^2+1}$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

2m̀e étape : Pour chercher une solution particulière de (2) on fait varier la constante de la solution de l'équation homogène $y(x)=\frac{C}{x^2+1}$. On considère ainsi une fonction de la forme $y_p(x)=\frac{C(x)}{x^2+1}$.

En injectant $y_p'(x)$ et $y_p(x)$ dans (2) on a :

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

2me étape : Pour chercher une solution particulière de (2) on fait varier la constante de la solution de l'équation homogène $y(x)=\frac{C}{x^2+1}$. On considère ainsi une fonction de la forme $y_p(x)=\frac{C(x)}{x^2+1}$.

En injectant $y_p'(x)$ et $y_p(x)$ dans (2) on a :

$$(x^2+1)\frac{C'(x)(x^2+1)-2xC(x)}{(x^2+1)^2}+2x\frac{C(x)}{x^2+1}=2x^2+x-1$$
$$C'(x)-2x\frac{C(x)}{x^2+1}+2x\frac{C(x)}{x^2+1}=2x^2+x-1$$

En simplifiant, on a donc

$$C'(x)=2x^2+x-1$$

Une primitive est

$$C(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x$$

pour laquelle on obtient la solution particulière $y_p(x)=$

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

2m̀e étape : Pour chercher une solution particulière de (2) on fait varier la constante de la solution de l'équation homogène $y(x)=\frac{C}{x^2+1}$. On considère ainsi une fonction de la forme $y_p(x)=\frac{C(x)}{x^2+1}$.

En injectant $y_p'(x)$ et $y_p(x)$ dans (2) on a :

$$\begin{aligned}(x^2+1)\frac{C'(x)(x^2+1)-2xC(x)}{(x^2+1)^2}+2x\frac{C(x)}{x^2+1}&=2x^2+x-1\\ C'(x)-2x\frac{C(x)}{x^2+1}+2x\frac{C(x)}{x^2+1}&=2x^2+x-1\end{aligned}$$

En simplifiant, on a donc

$$C'(x)=2x^2+x-1$$

Une primitive est

$$C(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x$$

pour laquelle on obtient la solution particulière $y_p(x)=\frac{\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x}{x^2+1}$.

Exercice 2

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$(x^2+1)y'(x)+2xy(x)=2x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différetielle (2) sont de la forme

$$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{C+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x}{x^2+1},\ C\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[\tag{3}$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2, \ x \in]0, +\infty[\tag{3}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0.$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[\tag{3}$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto -2\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -2\ln x, x \in]0, +\infty[$ donc les solutions sont de la forme $y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}, x \in]0, +\infty[$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[\qquad (3)$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto -2\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -2\ln x, x \in]0, +\infty[$ donc les solutions sont de la forme $y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}, x \in]0, +\infty[$.

2ème étape : On cherche une solution particulière de (3) de la forme $y_p(x) = C(x)x^2$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[\qquad (3)$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto -2\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -2\ln x, x \in]0, +\infty[$ donc les solutions sont de la forme $y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}, x \in]0, +\infty[$.

2ème étape : On cherche une solution particulière de (3) de la forme $y_p(x) = C(x)x^2$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. Injectons $y_p(x) = C(x)x^2$ et $y_p'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$ dans l'équation (3). On obtient

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - 2C(x)\frac{x^2}{x} = C'(x)x^2 + 2xC(x) - 2xC(x) = x^2$$

et donc

$$C'(x) = 1.$$

Exercice 3

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2,\ x \in]0, +\infty[\qquad (3)$$

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto -2\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -2\ln x, x \in]0, +\infty[$ donc les solutions sont de la forme $y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}, x \in]0, +\infty[$.

2ème étape : On cherche une solution particulière de (3) de la forme $y_p(x) = C(x)x^2$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. Injectons $y_p(x) = C(x)x^2$ et $y_p'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$ dans l'équation (3). On obtient

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - 2C(x)\frac{x^2}{x} = C'(x)x^2 + 2xC(x) - 2xC(x) = x^2$$

et donc

$$C'(x) = 1.$$

Ainsi une solution particulière de (3) est $y_p(x) = x^3$, pour $x \in]0, +\infty[$.

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (3) correspondent à la somme d'une solution de l'équation homogène y et d'une solution particulière y_p. Elles sont donc de la forme :

$$y :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + Cx^2,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

Notons que la fonction tangente est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

Notons que la fonction tangente est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = 0.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

Notons que la fonction tangente est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = 0.$$

On doit trouver une primitive de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Utilisons le fait que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et que $\cos' x = -\sin x$.

On a ainsi que tan est de la forme $-u'/u$ et une de ses primitives est

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

Notons que la fonction tangente est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = 0.$$

On doit trouver une primitive de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Utilisons le fait que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et que $\cos' x = -\sin x$.

On a ainsi que tan est de la forme $-u'/u$ et une de ses primitives est

$$x \mapsto -\ln(|\cos x|) = -\ln(\cos x), x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

Notons que la fonction tangente est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1ère étape : On cherche les solutions de l'équation homogène associée :

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = 0.$$

On doit trouver une primitive de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Utilisons le fait que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et que $\cos' x = -\sin x$.

On a ainsi que tan est de la forme $-u'/u$ et une de ses primitives est

$$x \mapsto -\ln(|\cos x|) = -\ln(\cos x), x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Finalement, les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto C\cos x,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

2ème étape : On cherche une solution particulière de (4) de la forme $y_p(x) = C(x)\cos x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

2ème étape : On cherche une solution particulière de (4) de la forme $y_p(x) = C(x)\cos x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Injectons y_p dans l'équation différentielle dans l'équation (4). Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, nous obtenons

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\sin x = 2\cos x \sin x$$

Ainsi,

$$C'(x) = 2\sin x$$

et une primitive possible sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est

$$C(x) = -2\cos x.$$

La solution particulière associée est :

$$y_p : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto -2\cos^2 x\,.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

3ème étape : On déduit en sommant que les solutions de l'équation différentielle définie en (4) sont de la forme :

$$y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto C\cos x - 2\cos^2 x,\, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

3ème étape : On déduit en sommant que les solutions de l'équation différentielle définie en (4) sont de la forme :

$$y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto C\cos x - 2\cos^2 x, C \in \mathbb{R}.$$

4ème étape : Trouvons la solution y qui en plus de vérifier l'égalité définie à l'équation (4), est telle que $y(0) = 1$.

Remarque : D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette solution y est unique.

Exercice 4

Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin 2x, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4}$$

telle $y(0) = 1$.

3ème étape : On déduit en sommant que les solutions de l'équation différentielle définie en (4) sont de la forme :

$$y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto C\cos x - 2\cos^2 x, C \in \mathbb{R}.$$

4ème étape : Trouvons la solution y qui en plus de vérifier l'égalité définie à l'équation (4), est telle que $y(0) = 1$.

Remarque : D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette solution y est unique.

Pour cela on doit terminer la valeur de C. Pour $x = 0$, nous avons :

$$C - 2 = 1 \iff C = 3$$

Finalement, nous obtenons une unique solution :

$$y : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto 3\cos x - 2\cos^2 x.$$