Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle Continu 3
11 janvier 2016

L1 : Licence sciences et technologies
Mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

INDIQUEZ VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE !

Il est conseillé de lire chaque exercice en entier avant de le traiter, et de ne pas hésiter à admettre des questions en le mentionnant sur la copie afin de pouvoir poursuivre.

On rappelle les développements limités suivants. Ils pourront être utilisés au cours de ce contrôle continu. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers positifs quelconques).

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right) \\
\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

Exercice 1 Soient (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

pour tout n, et dont les termes initiaux sont $x_0 = 2$ et $y_0 = 0$.

On définit la suite à valeurs complexes de terme général $z_n = x_n + iy_n$.

(1) Calculer z_0 et z_1.
(2) Pour tout n, calculer z_{n+1} en fonction de z_n.
(3) En déduire la nature de la suite (z_n) et donner sa raison sous forme trigonométrique.
(4) Calculer le terme général de la suite (z_n) et en déduire les termes généraux de (x_n) et (y_n).
(5) Calculer les limites de (x_n) et (y_n).

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\exp(-\frac{1}{x^2}) - 1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(2x) - 2\ln(1+x)}{x^2}$

Exercice 3 Le but de cet exercice est de calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) - 2x\right)$
Les parties I et II sont indépendantes.
On rappelle les dérivées suivantes : $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Partie I. Étude de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) \end{array} \right.$

(1) Montrer que $\forall x \in]-1,1[\ ,\ -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$. *On pourra étudier* $x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$ *sur* $[-1,1]$.

(2) En déduire que la fonction f est bien définie sur $]-1,1[$ et calculer $f(0)$.

(3) Montrer que f est dérivable et calculer f'.

(4) On pose la fonction $g(x) = f(x) - 2\arctan(x)$, définie sur $]-1,1[$.
Montrer que g est constante. Déterminer cette constante.

(5) En déduire que $\forall x \in]-1,1[\ ,\ \arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) = 2\arctan(x)$.

Partie II. Développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

(1) Donner le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ à partir de celui de $\frac{1}{1-x}$.
(2) En déduire le développement d'ordre 5 en 0 de la fonction $\arctan(x)$.

Partie III. Grâce aux résultats des parties I et II, calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) - 2x\right).$$

Exercice 4 Algèbre linéaire

Les parties I, II et III de cet exercice sont indépendantes, mais il est conseillé de les traiter dans l'ordre pour en faciliter la résolution.

Partie I. Résolution d'un système

Soit le système $(S)\ \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & & & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array} \right.$

(1) Mettre le système (S) sous forme matricielle $AX = B$ en explicitant A, X et B.
(2) Inverser la matrice A. (*On admettra que la matrice A est inversible.*)
(3) Résoudre le système (S).

Partie II. Espace vectoriel

Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre.
(2) Donner sans justifier la dimension de $\mathbb{R}^3$.
(3) En déduire que la famille $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Partie III. Sous-espace vectoriel

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que $v \in F$ et $w \in F$, où v et w sont les vecteurs définis en partie II.
(3) Donner une base de F et déterminer la dimension de F.