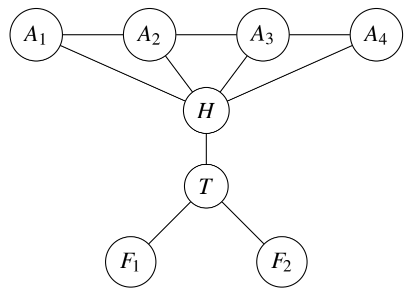
Intelligence Artificielle – TD 5

PROBLÈMES DE SATISFACTION DE CONTRAINTES

CORRECTION

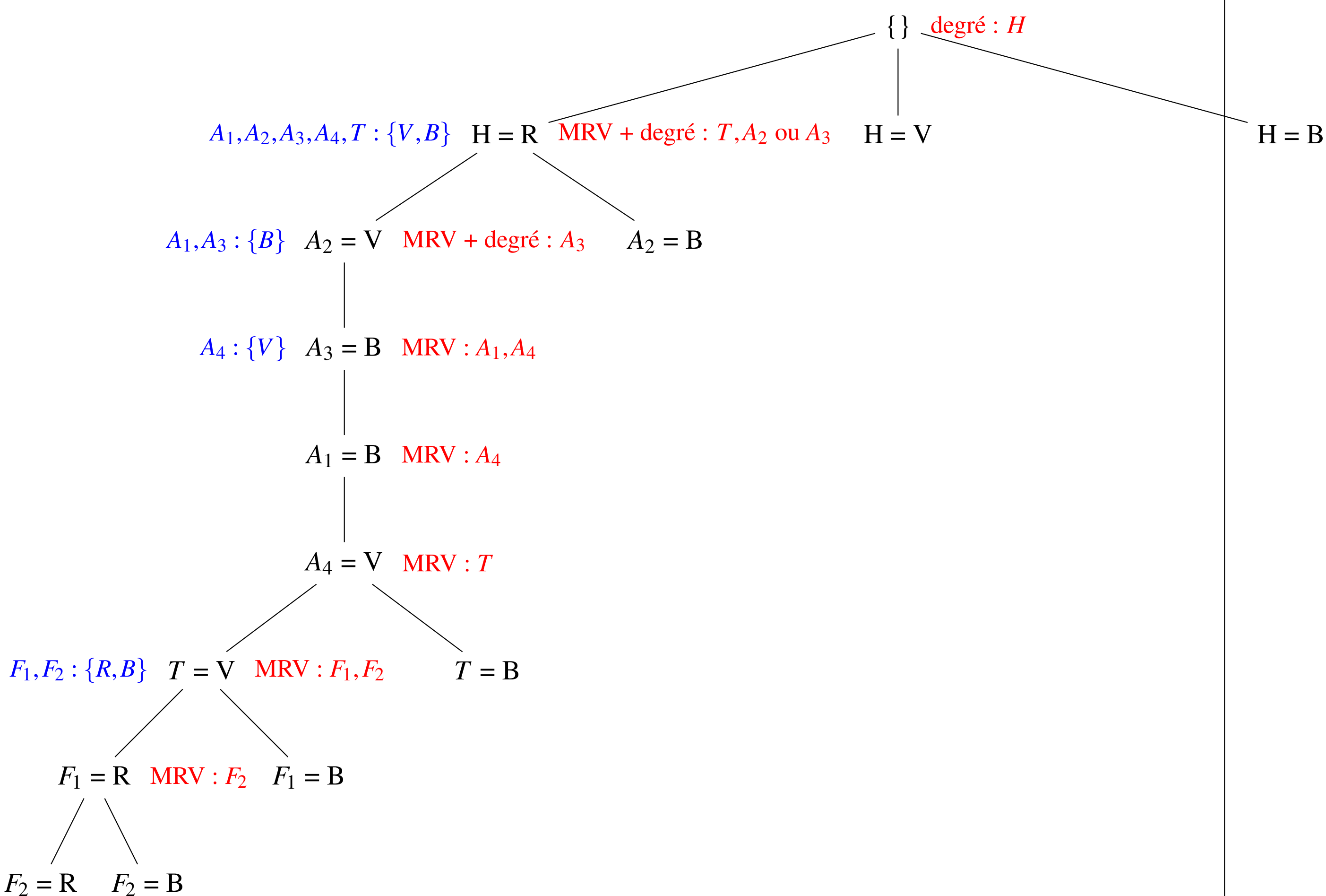
Exercice 1 - Considérez le graphe de contraintes suivant :



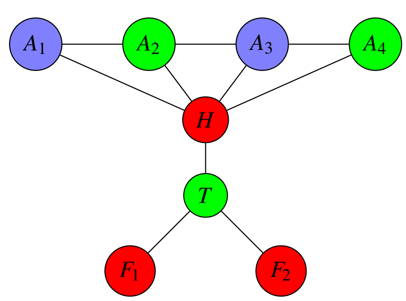
Trouvez un coloriage à 3 couleurs de ce graphe en appliquant la recherche par backtrack avec recherche en avant, heuristique MRV et heuristique du degré. Si vous avez le choix entre plusieurs variables, vous choisirez en suivant l'ordre alphanumérique. Vous appliquerez les couleurs en respectant l'ordre {R, V, B}.

Domaines et degré des variables :

- $A_1 : \{R, V, B\}$; 2
- $A_2 : \{R, V, B\}$; 3
- $A_3 : \{R, V, B\}$; 3
- $A_4 : \{R, V, B\}$; 2
- $H : \{R, V, B\}$; 5
- $T : \{R, V, B\}$; 3
- $F_1 : \{R, V, B\}$; 1
- $F_2 : \{R, V, B\}$; 1

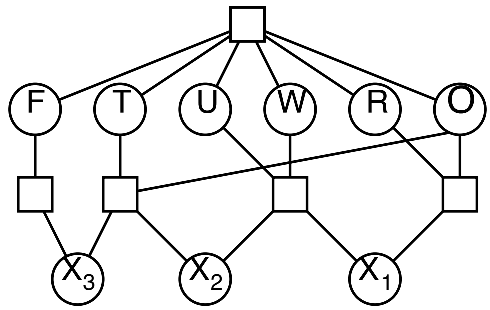


On obtient :



Exercice 2 - Résolvez le puzzle cryptarithmétique suivant en utilisant la recherche par backtrack avec recherche en avant, propagation des contraintes, heuristique MRV et heuristique du degré. Si vous avez le choix entre plusieurs variables, vous choisirez en suivant l'ordre alphanumérique. Si vous avez le choix entre plusieurs valeurs, vous choisirez la plus petite.

$$
\begin{array}{cccc}
 & T & W & O \\
+ & T & W & O \\
\hline
F & O & U & R
\end{array}
$$

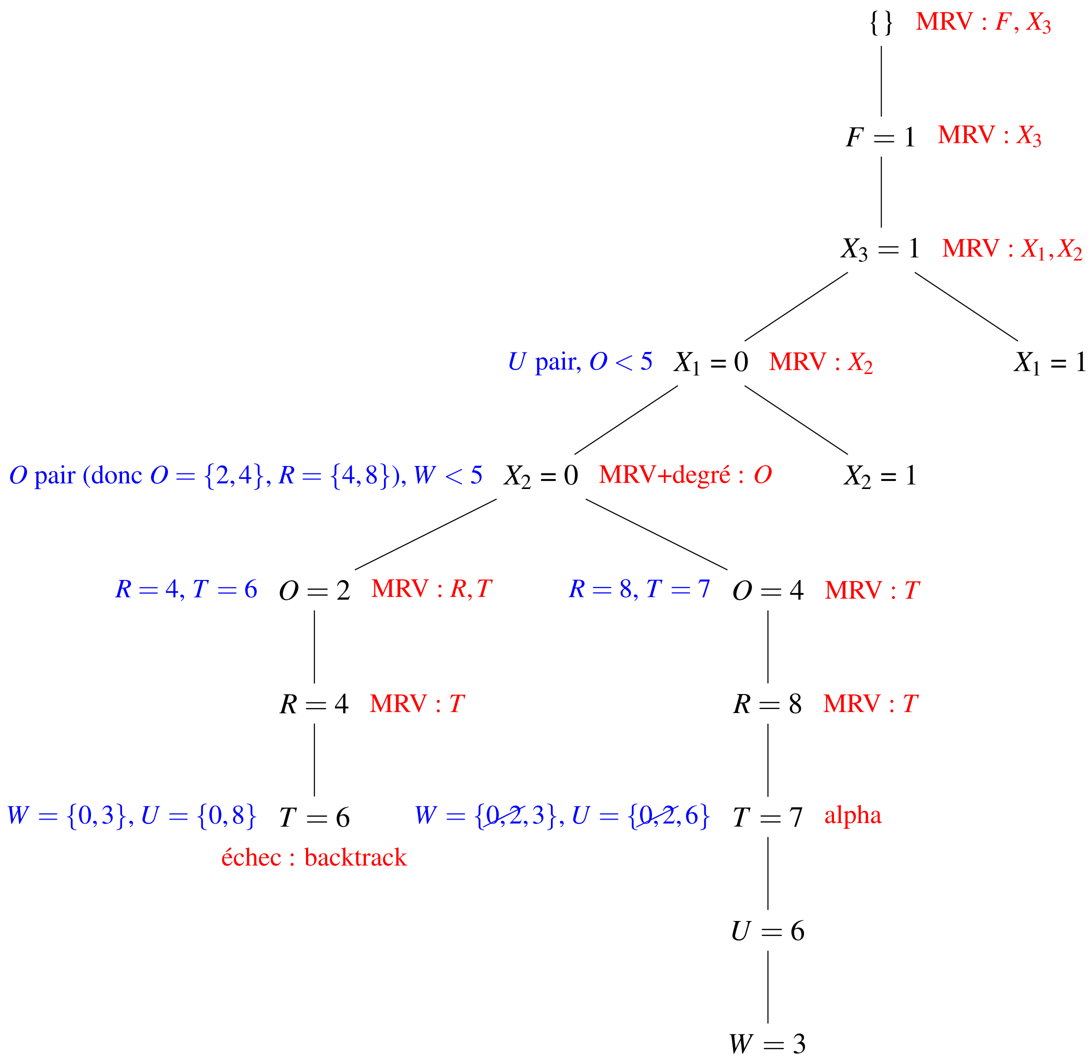


Formalisation du problème :

- Variables : T, W, O, F, U, R, X_1, X_2, X_3
- Domaines :
  - T, F : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *(un nombre ne commence pas par 0 (ou il ne s'écrirait pas))*
  - W, O, F, U, R : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - X_1, X_2, X_3 : $\{0,1\}$
- Contraintes :
  1. AllDiff(T, W, O, F, U, R)
  2. $O+O=R+10X_1$
  3. $W+W+X_1=U+10X_2$
  4. $T+T+X_2=O+10X_3$
  5. $F=X_3$
- Degrés :
  - 2 : T, W, F, U, R, X_1, X_2, X_3
  - 3 : O

Pré-processing : propagation des contraintes

- Contrainte 2 : R est pair
  - R : $\{0,2,4,6,8\}$
- Contraintes 1 et 2 : $O \neq 0$ (autrement R serait aussi égal à 0)
  - O : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Contrainte 5 : $X_3 \neq 0$, donc $F=1$
  - X_3, F : $\{1\}$
- Contrainte 1 : T, W, O, U, R différent de 1
- Contrainte 4 : $X_3=1$, et $O \neq 0$
  - $T>5$



On obtient : $734 + 734 = 1468$

Exercice 3 - Un carré magique est une matrice 3×3 dont chaque case contient un nombre différent compris entre 1 et 9, de façon à ce que la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale ait la même valeur (soit 15).

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un CSP : établissez la liste des variables nécessaires, ainsi que les contraintes existant entre ces variables

Formalisation du problème :

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

- Variables : $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$
- Domaines : pour les 9 variables, $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Contraintes :
  (a) AllDiff($A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$)
  (b) $A_1 + A_2 + A_3 = 15$
  (c) $B_1 + B_2 + B_3 = 15$
  (d) $C_1 + C_2 + C_3 = 15$
  (e) $A_1 + B_1 + C_1 = 15$
  (f) $A_2 + B_2 + C_2 = 15$
  (g) $A_3 + B_3 + C_3 = 15$
  (h) $A_1 + B_2 + C_3 = 15$
  (i) $A_3 + B_2 + C_1 = 15$
- Degrés :
  - 3 : A_2, B_1, B_3, C_2
  - 4 : A_1, A_3, C_1, C_3
  - 5 : B_2

2. Déterminez quelle variable est la plus contrainte. Etudiez ce qui se passe si la valeur donnée à cette variable est 1, puis 2. Déduisez en sa valeur.

Variable la plus contrainte : B_2

- Si $B_2 = 1$,
  - $B_1 + B_3 = 14$
  - $A_2 + C_2 = 14$
  - $A_1 + C_3 = 14$
  - $A_3 + C_1 = 14$

  $\longrightarrow$ Les domaines de $B_1, B_3, A_2, C_2, A_1, C_3, A_3, C_1$ sont alors $\{8,6,9,5\}$ $\Rightarrow$ impossible (4 valeurs pour 8 variables)

- Si $B_2 = 2$,
  - $B_1 + B_3 = 13$
  - $A_2 + C_2 = 13$
  - $A_1 + C_3 = 13$
  - $A_3 + C_1 = 13$

  $\longrightarrow$ Les domaines de $B_1, B_3, A_2, C_2, A_1, C_3, A_3, C_1$ sont alors $\{9,4,8,5,7,6\}$ $\Rightarrow$ impossible (6 valeurs pour 8 variables)

$\longrightarrow$ On a 9 valeurs pour 9 variables, donc chaque valeur (entre 1 et 9) doit être instanciée 1 et 1 seule fois.

  - Si B_2 est différent de 1, il faut que l'une des 8 autres variables soit égale à 1.
  - Si $B_2 < 5$, les 4 contraintes (c, f, h, i) donnent des sommes qui sont ≥ 11 pour les 8 autres variables. Dans ce cas là, on ne pourra pas utiliser la valeur 1 pour une variable.

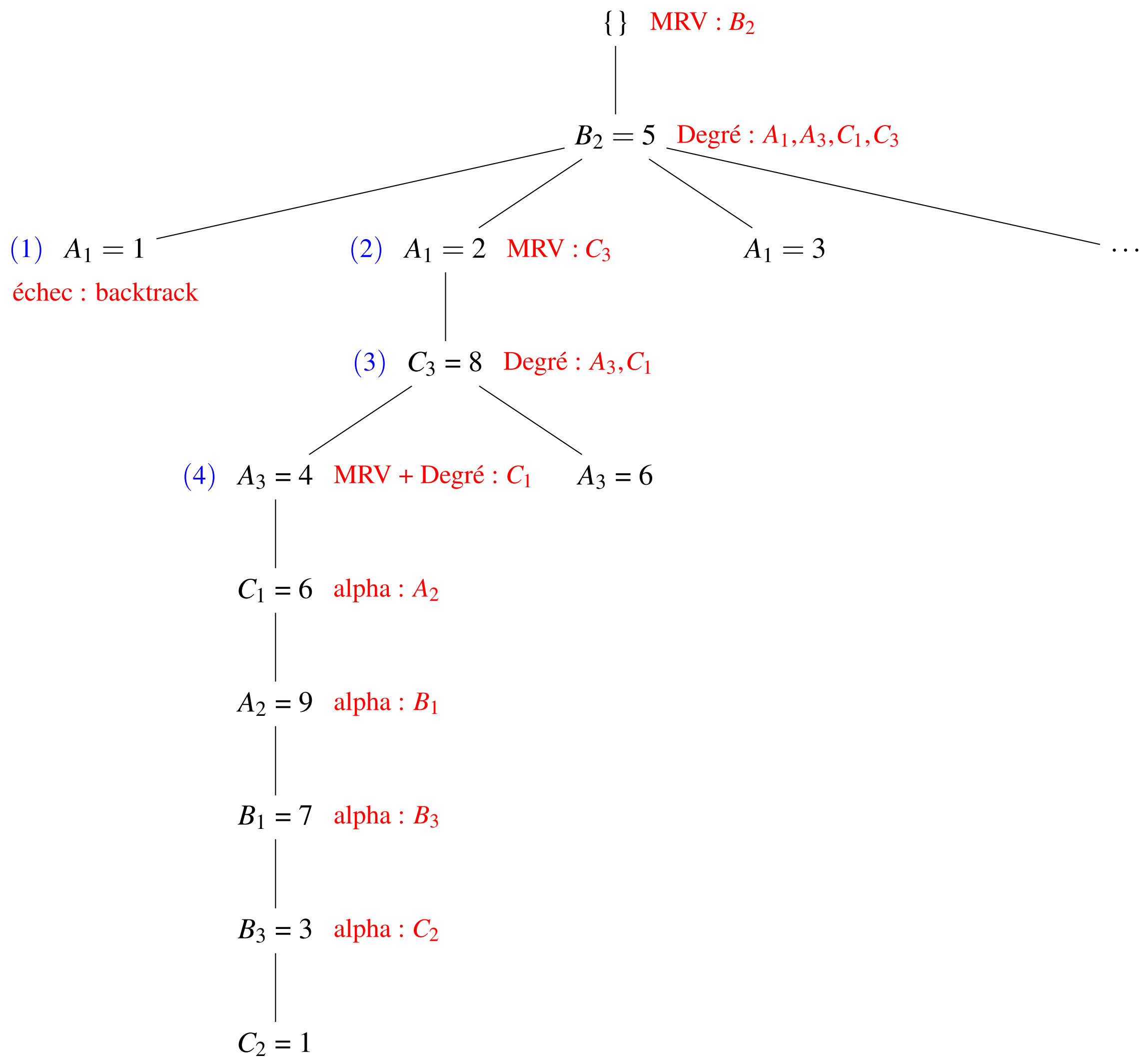
  $\Rightarrow$ On en déduit donc que $B_2 \geq 5$.

  - Si $B_2 > 5$, les 4 contraintes (c, f, h, i) donnent des sommes qui sont ≤ 9 pour les 8 autres variables. Dans ce cas là, on ne pourra pas utiliser la valeur 9 pour une variable.

  $\Rightarrow$ On en déduit donc que $B_2 = 5$.

- On a alors :
  - Domaines : $B_2 = 5$; pour les 8 autres variables, $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$
  - Contraintes :
    (a) AllDiff($A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$)
    (b) $A_1 + A_2 + A_3 = 15$
    (c) $B_1 + B_3 = 10$
    (d) $C_1 + C_2 + C_3 = 15$
    (e) $A_1 + B_1 + C_1 = 15$
    (f) $A_2 + C_2 = 10$
    (g) $A_3 + B_3 + C_3 = 15$
    (h) $A_1 + C_3 = 10$
    (i) $A_3 + C_1 = 10$

3. Résolvez ce CSP en utilisant la recherche par backtrack avec recherche en avant, heuristique MRV et heuristique du degré. Si vous avez le choix entre plusieurs variables, vous choisirez en suivant l'ordre alphanumérique. Si vous avez le choix entre plusieurs valeurs, vous choisirez la plus petite.



(1) On a :

- (b) $A_2 + A_3 = 14$
- (e) $B_1 + C_1 = 14$
- (h) $C_3 = 9$
- $\Rightarrow$ Domaines A_2, A_3, B_1, C_1 : $\{8, 6\}$, échec

(2) On a :

- (b) $A_2 + A_3 = 13$
- (e) $B_1 + C_1 = 13$
- (h) $C_3 = 8$
- $\Rightarrow$ Domaines A_2, A_3, B_1, C_1 : $\{9, 4, 7, 6\}$

(3) On a :

- (d) $C_1 + C_2 = 7$
- (g) $A_3 + B_3 = 7$
- $\Rightarrow$ Domaines C_1, C_2, A_3, B_3 : $\{6, 1, 4, 3\}$
- $\Rightarrow$ Domaines C_1, A_3 : $\{6, 4\}$; B_1, A_2 : $\{9, 7\}$; C_2, B_3 : $\{1, 3\}$

(4) On a :

- (a) AllDiff : $C_1 = 6$
- (b) $A_2 = 9$
- (g) $B_3 = 3$
- (d) $C_2 = 1$
- (e) $B_1 = 7$

On obtient :

2	9	4
7	5	3
6	1	8