T.D. 2 – Corrigé
Les circuits combinatoires

Exercice 1

Simplifiez les expressions ci-dessous par la méthode algébrique.

- $S1 = A.B + A.(B + C) + B.(B + C)$
  $S1 = A.B + A.B + A.C + B.B + B.C$
  $S1 = A.B + A.C + B + B.C$ → *B + B.C = B* *(Théorème 1)*
  $S1 = A.B + A.C + B$ → *B + A.B = B* *(Théorème 1)*
  $S1 = B + A.C$

- $S2 = A.B + \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B$
  $S2 = A.B + \overline{A}.(\overline{B} + B)$
  $S2 = A.B + \overline{A}.1$
  $S2 = \mathbf{A}.B + \overline{\mathbf{A}}$ → *Théorème 2*
  $S2 = \overline{A} + B$

- $S3 = (A + \overline{B}).(A + B) + C.(\overline{A} + B)$
  $S3 = A.A + A.B + \overline{B}.A + \overline{B}.B + C.\overline{A} + C.B$
  $S3 = \mathbf{A} + \mathbf{A}.B + \overline{B}.\mathbf{A} + C.\overline{A} + C.B$ → *Théorème 1*
  $S3 = \mathbf{A} + C.\overline{\mathbf{A}} + C.B$ → *Théorème 2*
  $S3 = A + \mathbf{C} + \mathbf{C}.B$ → *Théorème 1*
  $S3 = A + C$

- $S4 = (A + C + D).(B + C + D)$
  $S4 = A.B + A.C + A.D + C.B + C.C + C.D + D.B + D.C + D.D$
  $S4 = A.B + A.\mathbf{C} + A.D + \mathbf{C}.B + \mathbf{C} + \mathbf{C}.D + D.B + D.\mathbf{C} + D$ → *Théorème 1*
  $S4 = A.B + A.\mathbf{D} + C + \mathbf{D}.B + \mathbf{D}$ → *Théorème 1*
  $S4 = A.B + C + D$

- $S5 = (A.\overline{B} + A.B + A.C).(\overline{A}.\overline{B} + A.B + A.\overline{C})$
  $S5 = A.(\overline{B} + B + C).(\overline{A}.\overline{B} + A.B + A.\overline{C})$
  $S5 = A.1.(\overline{A}.\overline{B} + A.B + A.\overline{C})$
  $S5 = A.(\overline{A}.\overline{B} + A.B + A.\overline{C})$
  $S5 = A.\overline{A}.\overline{B} + A.A.B + A.A.\overline{C}$
  $S5 = 0.\overline{B} + A.B + A.\overline{C}$
  $S5 = A.B + A.\overline{C}$

- $S6 = (A + \overline{B} + C).(A + \overline{C}).(\overline{A} + \overline{B})$
  $S6 = (A.A + A.\overline{C} + \overline{B}.A + \overline{B}.\overline{C} + C.A + C.\overline{C}).(\overline{A} + \overline{B})$
  $S6 = (A + A.\overline{C} + \overline{B}.A + \overline{B}.\overline{C} + C.A + 0).(\overline{A} + \overline{B})$
  $S6 = (\mathbf{A} + \mathbf{A}.\overline{C} + \overline{B}.\mathbf{A} + \overline{B}.\overline{C} + C.\mathbf{A}).(\overline{A} + \overline{B})$ → *Théorème 1*
  $S6 = (A + \overline{B}.\overline{C}).(\overline{A} + \overline{B})$
  $S6 = A.\overline{A} + A.\overline{B} + \overline{B}.\overline{C}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C}.\overline{B}$
  $S6 = 0 + A.\overline{B} + \overline{B}.\overline{C}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C}$
  $S6 = A.\overline{B} + \mathbf{\overline{B}.\overline{C}}.\overline{A} + \mathbf{\overline{B}.\overline{C}}$ → *Théorème 1*
  $S6 = A.\overline{B} + \overline{B}.\overline{C}$

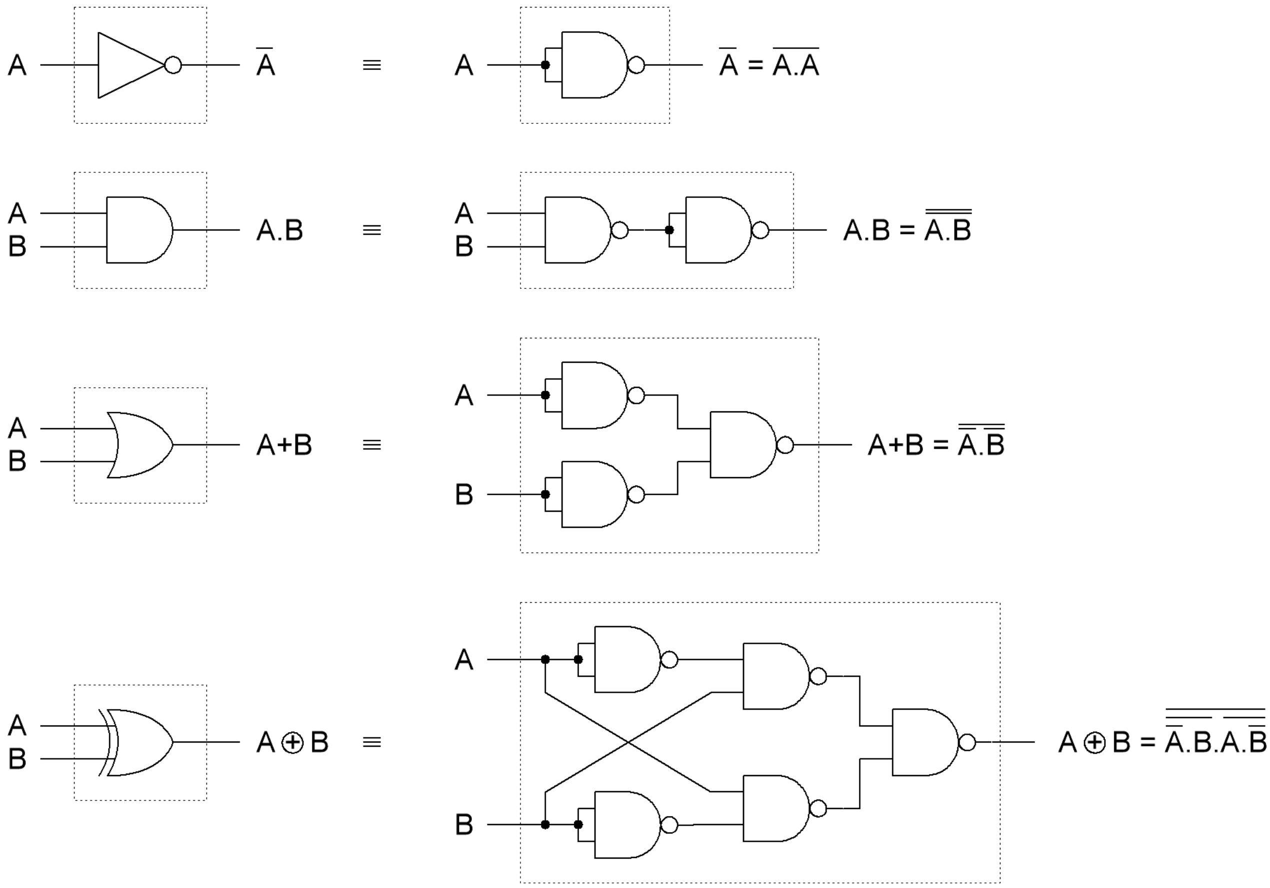
- $S7 = A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C$
  $S7 = B.C.(A + \overline{A}) + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$
  $S7 = B.C.1 + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$
  $S7 = B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$
  $S7 = B.(\mathbf{C} + \overline{A}.\overline{\mathbf{C}}) + A.\overline{B}.\overline{C}$ → *Théorème 2*
  $S7 = B.\mathbf{(C + \overline{A})} + A.\overline{B}.\overline{C}$ → *Théorème de De Morgan*
  $S7 = B.\overline{\overline{C}.A} + \overline{B}.\overline{C}.A$
  $S7 = B \oplus (\overline{C}.A)$

- $S8 = A.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}.D$
  $S8 = A.C.(B + \overline{B}) + A.B.\overline{C}.D$
  $S8 = A.C.1 + A.B.\overline{C}.D$
  $S8 = A.C + A.B.\overline{C}.D$
  $S8 = A.(\mathbf{C} + B.\overline{\mathbf{C}}.D)$ → *Théorème 2*
  $S8 = A.(C + B.D)$
  $S8 = A.C + A.B.D$

- $S9 = \mathbf{A} + B.C + \overline{\mathbf{A}}.(\overline{B} + \overline{C}).(A.D + C)$ → *Théorème 2*
  $S9 = A + B.C + \mathbf{(\overline{B} + \overline{C})}.(A.D + C)$ → *Théorème de De Morgan*
  $S9 = A + \mathbf{B.C} + \overline{\mathbf{B.C}}.(A.D + C)$ → *Théorème 2*
  $S9 = \mathbf{A} + B.C + \mathbf{A}.D + C$ → *Théorème 1*
  $S9 = A + B.\mathbf{C} + \mathbf{C}$ → *Théorème 1*
  $S9 = A + C$

Exercice 2

1. Donnez le schéma de câblage des portes NON, ET, OU, et OU EXCLUSIF, en utilisant uniquement des portes NON-ET.



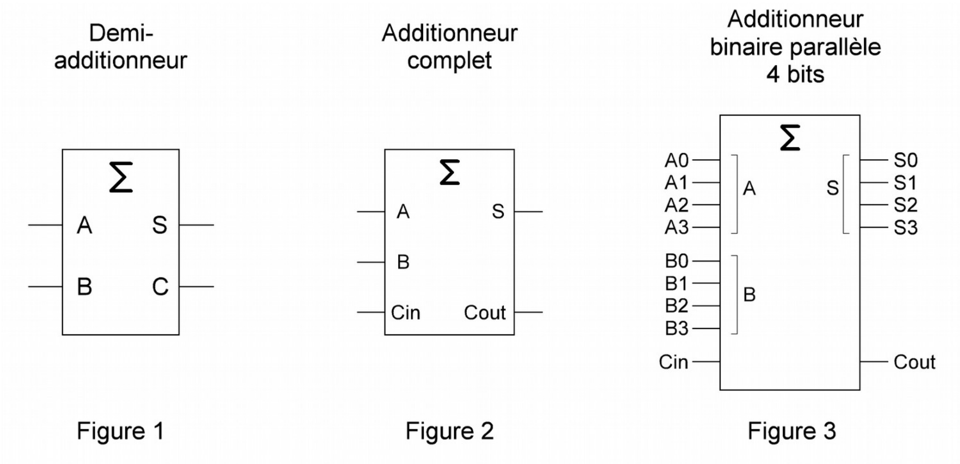
Pour le OU EXCLUSIF, on sait que : $A \oplus B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$
Il suffit d'appliquer le théorème de De Morgan afin de n'obtenir que des portes NON-ET.

2. À votre avis, quel peut être l'intérêt de ce type de transformation ?

Il faut savoir que les portes NON-ET et NON-OU sont des portes universelles. Cela signifie que l'on peut fabriquer toutes les autres portes uniquement à partir de portes NON-ET ou de portes NON-OU.

Ce type de transformation peut servir à réduire le nombre de circuits intégrés sur une carte électronique. Par exemple, un circuit intégré possédant quatre portes NON-ET peut être utilisé comme une porte NON-ET et une porte OU. Cela permet d'éviter d'acheter deux circuits intégrés différents, l'un contenant une porte NON-ET, l'autre une porte OU.

Exercice 3



Dans un premier temps, on souhaite réaliser un demi-additionneur (*cf.* figure 1). Il s'agit d'un circuit qui additionne deux bits : *A* et *B*. Ce circuit doit générer la somme *S* et une éventuelle retenue *C*.

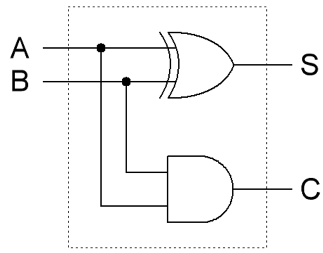
1. Donnez les tables de vérité de *S* et de *C* puis en déduire leurs équations respectives.

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$S = A \oplus B$

$C = A.B$

2. Dessinez le schéma interne du demi-additionneur.



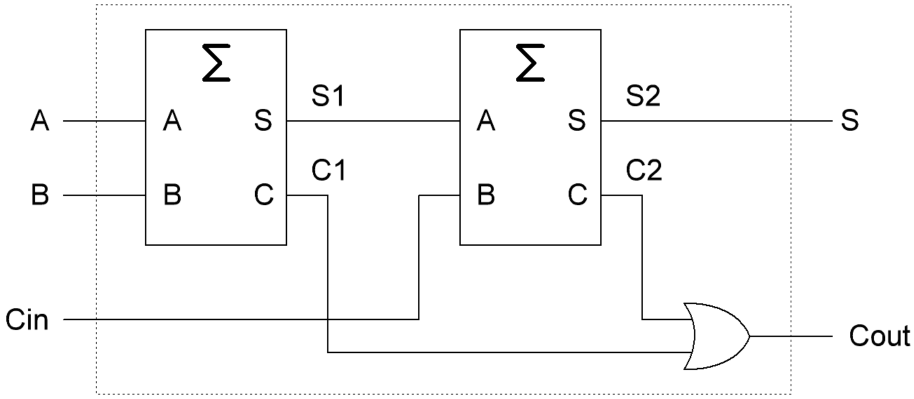
On souhaite maintenant réaliser un additionneur complet (*cf.* figure 2). Il s'agit d'un circuit qui additionne trois bits : *A*, *B* et une retenue d'entrée *Cin*. Ce circuit doit générer la somme *S* et une éventuelle retenue de sortie *Cout*.

3. Donnez le schéma interne d'un additionneur complet à partir de deux demi-additionneurs.

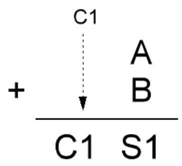
   On note respectivement *S1* et *C1* la somme et la retenue du premier additionneur.
   On note respectivement *S2* et *C2* la somme et la retenue du second additionneur.

   Au final, on souhaite obtenir une somme *S* = *A* + *B* + *Cin* et une retenue *Cout*.

Le schéma interne d'un additionneur complet est le suivant :

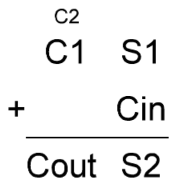


La première addition sera la suivante :



On additionne *A* et *B* avec le premier demi-additionneur.
On obtient une somme *S1* = *A* + *B* et une retenue *C1*.

Voyons maintenant la seconde addition :



On additionne *S1* et *Cin* à l'aide du second demi-additionneur.
On obtient une somme *S2* = *S1* + *Cin* = *A* + *B* + *Cin* = *S* et une retenue *C2*.
Il nous manque la retenue *Cout* (qui est la somme de *C1* et de *C2*).

Il est certain que l'addition de *C1* avec *C2* ne produira aucune retenue, car la plus grande somme possible pour l'additionneur complet est de 11_2. Cette somme est obtenue lorsque toutes ses entrées sont à 1 (*A* = *B* = *Cin* = 1) : ce qui donne $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$ (*S* = 1 et *Cout* = 1). Une retenue *C3* n'apparaîtra donc jamais.

Or, si la somme de *C1* et de *C2* ne génère aucune retenue, c'est que *C1* et *C2* ne sont jamais à 1 en même temps. Par conséquent, une simple porte OU suffira à obtenir leur somme (c'est-à-dire *Cout*).

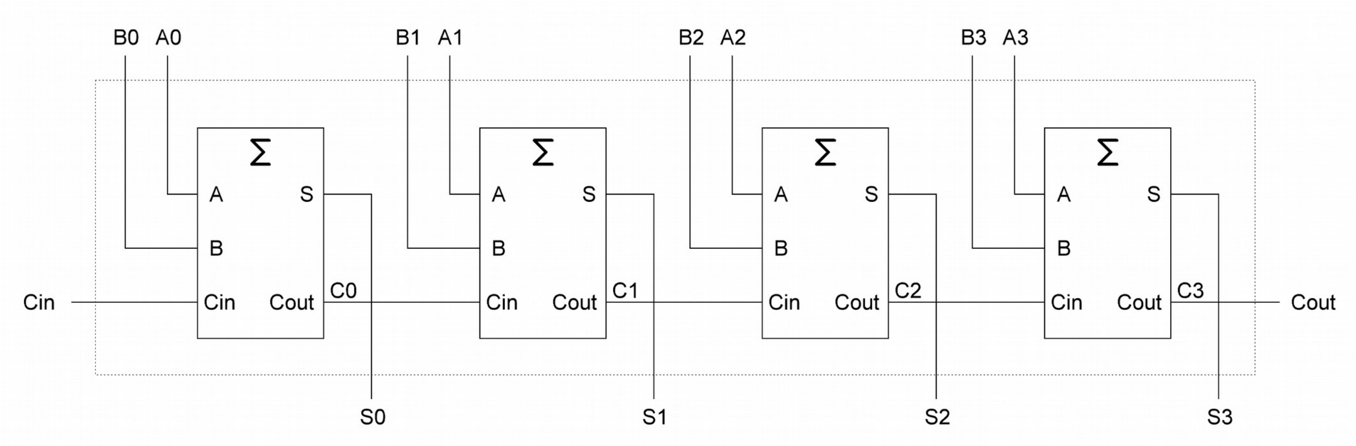
Pour finir, on souhaite réaliser un additionneur binaire parallèle sur quatre bits (*cf.* figure 3). Il s'agit d'un circuit qui additionne deux nombres binaires de quatre bits, *A* et *B*, ainsi qu'une retenue d'entrée *Cin*. Il génère une somme *S* sur quatre bits et une retenue de sortie *Cout*.

4. Donnez le schéma interne de cet additionneur binaire à partir de plusieurs additionneurs complets.

   L'addition sera la suivante :

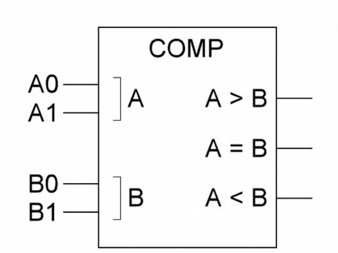
	C3	C2	C1	C0	Cin
		A3	A2	A1	A0
+		B3	B2	B1	B0
	Cout	S3	S2	S1	S0

   Il faut additionner successivement les différents bits en propageant la retenue. Cela s'obtient assez facilement à l'aide de quatre étages d'additionneurs complets.



Exercice 4

On souhaite réaliser le comparateur suivant :



Les entrées *A* et *B* représentent deux nombres binaires sur deux bits (*A0* et *B0* sont les bits de poids faible) :

- Si A > B alors la sortie *'A > B'* est au niveau logique 1 et les autres sorties sont au niveau logique 0 ;
- Si A = B alors la sortie *'A = B'* est au niveau logique 1 et les autres sorties sont au niveau logique 0 ;
- Si A < B alors la sortie *'A < B'* est au niveau logique 1 et les autres sorties sont au niveau logique 0.

1. Donnez la table de vérité du circuit.

A	**B**	**A1**	**A0**	**B1**	**B0**	**A > B**	**A = B**	**A < B**
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	2	0	0	1	0	0	0	1
0	3	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	2	0	1	1	0	0	0	1
1	3	0	1	1	1	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0
2	2	1	0	1	0	0	1	0
2	3	1	0	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	0	1	1	0	0
3	2	1	1	1	0	1	0	0
3	3	1	1	1	1	0	1	0

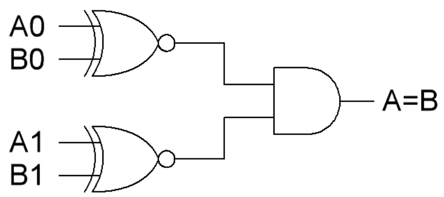
2. Sans l'aide des tableaux de Karnaugh, exprimez l'équation simplifiée de la sortie *'A = B'* et dessinez son schéma de câblage.

Les nombres *A* et *B* sont égaux si ***A0 = B0*** et si ***A1 = B1***. Or, si l'on observe la table de vérité du NON-OU EXCLUSIF, on constate que sa sortie est à 1 si ses deux entrées sont égales.

On peut donc en déduire que : *'A = B'* = $\overline{A0 \oplus B0} \,.\, \overline{A1 \oplus B1}$

$X = \overline{A \oplus B}$

A	**B**	**X**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



3. Avec l'aide des tableaux de Karnaugh, exprimez les équations simplifiées des sorties *'A > B'* et *'A < B'*.

B1 B0

A1 A0

'A > B'	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

'A > B' $= \mathbf{A1.\overline{B1} + A0.\overline{B0}.\overline{B1} + A0.A1.\overline{B0}}$

B1 B0

A1 A0

'A < B'	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

'A < B' $= \mathbf{\overline{A1}.B1 + \overline{A0}.B0.B1 + \overline{A0}.\overline{A1}.B0}$

Exercice 5

Donnez les équations logiques simplifiées pour tous les diagrammes de Karnaugh ci-dessous :

bc

a

W	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1

$\mathbf{W = a.b + b.c + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}}$

c

ab

X	**0**	**1**
00	1	1
01	1	0
11	0	1
10	1	1

$\mathbf{X = \overline{b} + a.c + \overline{a}.\overline{c}}$

cd

ab

Y	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

$\mathbf{Y = \overline{a}.b + \overline{a}.\overline{c} + a.\overline{b}.d}$

cd

ab

Z	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	0	1	1

$\mathbf{Z = \overline{d} + b.\overline{c} + a.\overline{b}.c}$