Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

# Feuille de TD n°4 : Suites (2e partie)

**Exercice 1.**

1) Rappeler les limites des suites suivantes :

$$a)\ \frac{2^n}{n^3} \qquad b)\ \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}} \qquad c)\ \frac{2^{\log(n)}}{n^{\log(3)}} \qquad d)\ \frac{2^n}{n!}$$

2) Ces suites convergent-elles ? Si c'est la cas, donner leur limite.

$$a)\ u_n = n + \cos(n) \qquad b)\ u_n = \frac{4n+\sin(n)}{n^3} \qquad c)\ u_n = \frac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$d)\ u_n = \frac{(n+1)(2+(-1)^n)}{n+3} \qquad f)\ u_n = \frac{n-\log n}{n+\log n} \qquad g)\ u_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$$

$$h)\ u_n = \sqrt{n-2} - \frac{n}{2} \qquad i)\ u_n = \frac{2^n}{n\log n} \qquad j)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$$

**Exercice 2.**

1) Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)$ qui vérifie $\lim nu_n = 0$ ?

2) Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)$ qui vérifie $\lim nu_n = 1$ ?

3) Que peut-on dire de la convergence d'une suite $(u_n)$ qui vérifie $\lim nu_n = +\infty$ ?

**Exercice 3.**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ que l'on suppose continue et monotone, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a,b]$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1) On suppose que $f$ est croissante. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Que dire de sa convergence ?

2) Etudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}.$$

3) On suppose que $f$ est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4) Etudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = 0.5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

5) Les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles ?

**Exercice 4.**

Soit $(u_n)$ la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

1) Montrer que $(u_n)$ est croissante.

2) Observer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Peut-on en déduire quelque chose sur la convergence de la suite $(u_n)$ ?

3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

4) En déduire que $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

5) On pose $v_n = u_n - \ln n$ et $w_n = v_n - \frac{1}{n}$. Montrer que $(v_n)$ est décroissante, que $(w_n)$ est croissante, et en déduire que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont adjacentes. *(Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x$ réel)*

6) En déduire qu'il existe un réel $\gamma$ (appelé constante d'Euler-Mascheroni, $\gamma \simeq 0,577215...$) tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

7) Donner un équivalent (le plus simple possible) de $u_n$.

**Exercice 5.** Donner les limites des suites suivantes :

(1) $a_n = n^4(1/3)^n$

(2) $b_n = \dfrac{3^n - 6^n}{n^5}$

(3) $c_n = \dfrac{6^n + n^2}{n!}$

(4) $d_n = \dfrac{2^n - n^2}{\sqrt{n}}$

(5) $e_n = \dfrac{3^n + \sqrt{n}}{4^n}$

(6) $u_n = (4n^3 + 2n + 5)e^{-2n}$

(7) $v_n = \dfrac{5^n}{n! + 3n}$

(8) $w_n = \dfrac{4n^2 5^n + 6n - 2}{-n^3 5^n + n - 6\sqrt{n} + 2}$

(9) $t_n = \dfrac{n^3 4^n - n^3 6^n + 1}{n^3 2^n + n^2 - 5}$

**Exercice 6.** Donner, pour chaque suite ci-dessous, un équivalent le plus simple possible :

(1) $a_n = \dfrac{e^{-n} + \sqrt{n^5} - n^2}{\ln n + n - \cos n}$

(2) $b_n = 2^n \ln n + \dfrac{3^n}{n+1} + \dfrac{4^n}{1+2^n}$

(3) $c_n = \dfrac{\ln(1+n^2)}{n+n^2}$

(4) $d_n = \dfrac{\ln(1+n^2)}{\ln(2+n^2)}$

(5) $e_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$

(6) $f_n = \sqrt{1+\sqrt{n+1}} - \sqrt{1+\sqrt{n}}$

(7) $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$
*(indication : montrer d'abord que $g_{n-1} = o(n!)$)*

**Exercice 7.** On considère la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\sqrt{\ldots\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}.$$

(1) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Quelle est la valeur de $u_0$ ?
(2) Montrer que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
(3) Montrer par récurrence que $u_n \leqslant n$ pour tout $n$.
(4) En déduire que $u_n = o(n)$.
(5) Déterminer un équivalent simple de $u_n$.
(6) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

**Exercice 8 (DM 4).** On considère un réel $a > 1$ fixé, et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n$.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2.$
(3) En déduire que $u_n > \sqrt{a}$ pour tout $n$.
(4) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
(5) Déduire de ce qui précède que $(u_n)$ converge vers $\sqrt{a}$.
(6) À l'aide du résultat de la question 2, montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{2^n}.$$

(7) En déduire qu'il existe un réel $\lambda \in ]0,1[$ tel que

$$u_n - \sqrt{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{a}\lambda^{2^n}.$$

Peut-on en déduire que $(u_n)$ converge vers $\sqrt{a}$ plutôt lentement ou plutôt rapidement ?

(8) À l'aide d'une console Python (ou d'une calculatrice), calculer $u_4$ lorsque $a = 2$, et commenter le résultat.

**Exercice 9 (DM 4).** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $u_n = n^2\left(\ln n - n^{1/10}\right)$.

(1) À l'aide d'une calculatrice (ou d'une console Python), calculer numériquement une valeur approchée de $u_n$ pour $n = 10$, $n = 10^2$, $n = 10^4$, et $n = 10^6$. Que constate-t-on ?
(2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.