Université de Bretagne-Sud UFR Sciences et Sciences de l'Ingénieur
Master d'informatique – M1

Contrôle continu
Traitement numérique des données – 1

8 novembre 2021

2 pages – Durée : 1h00 (1h30 pour ceux bénéficiant du 1/3 temps)

Avertissement :
La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la justesse des arguments utilisés.
Les appareils électroniques et les documents sont non-autorisés.

1 Théorie de l'échantillonnage, série et transformée de Fourier

1. Donnez le théorème de Shannon/Nyquist.
2. Soit le signal $x(t)$ donné par :

$$x(t) = -1 + 1/2 * cos(2 * pi * 100 * t) - 1/5 * sin(2 * pi * 350 * t) + 1/7 * cos(2 * pi * 500 * t) \quad (1)$$

   où t est un vecteur temporel permettant de synthétiser N échantillons (N étant fixé).

   (a) Quelle fréquence d'échantillonnage peut-on choisir pour numériser le signal $x(t)$? Pourquoi ?
   (b) Donnez la ligne de code qui permet de générer le vecteur t
   (c) Le signal $x(t)$ admet-il une décomposition en série de Fourier ? Pourquoi ?
   (d) Si oui, quels sont les coefficients de cette série de Fourier ?

3. Transformée de Fourier

   (a) On prend une fréquence d'échantillonnage F_e de 2000 Hz. Tracez l'amplitude du spectre en fréquence du signal x de la question 2, en prenant une échelle allant de 0 à $F_e/2$ (1 cm pour 100 Hz). Vous prendrez soin de bien indiquer les échelles sur les axes.
   (b) On prend une fréquence d'échantillonnage F_e de 750 Hz. Tracez l'amplitude du spectre en fréquence du signal x, en prenant une échelle allant de 0 à $F_e/2$ (1 cm pour 100 Hz). Vous prendrez soin de bien indiquer les échelles sur les axes.
   (c) Donnez une interprétation de ce que vous observez dans les 2 questions précédentes.
   (d) Expliquez en quelques lignes (maximum 5) ce que renvoie la fonction *fft* : `X = fft(x)`, et en particulier ce que sont le module et la phase du spectre de Fourier.

2 Convolution

1. On considère les suites d'échantillons $x[n]$ et $h[n]$ suivantes :

   `x[n] = [-1, 1, 3, 2, -1] et h[n] = [4, 3, 2, 1]`

   avec, pour tout $n < 0$, $x[n] = 0$, et pour tout $n \geq 5$, $x[n] = 0$

   (a) Définissez le produit de convolution entre $h[n]$ et $x[n]$, soit la suite $y[n] = h * x$.

   (b) Calculez la suite d'échantillons pour les valeurs données ci-dessus, soit $y[n]$ à partir de $n = 0$.

   (c) Quelle est la taille du vecteur y en fonction de la taille de x ?

   Attention Dans les questions qui suivent, vous considèrerez que les images sont en niveaux de gris (en 2 dimensions).

2. Soit le filtre h appliqué à une image *im*. L'image filtrée est appelée *imf*. Le filtre h est donné par la matrice de taille 3×3

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (a) Donnez l'algorithme qui permet de calculer $imf[i][j]$ de l'image filtrée imf par h pour le pixel (i, j), en considérant que les pixels voisins de (i, j) ne sont pas en dehors de l'image. Vous pourrez écrire cet algorithme sous forme de fonction en Python.

   (b) Si l'on considère que l'image im est de taille $m \times n$ et le filtre h est de taille $k \times k$, donnez le nombre exact d'opérations (additions et multiplications) à effectuer par le filtre h sur toute l'image (dans le cas où on ne fait rien sur les bords de l'image).

   (c) En déduire la complexité (ordre de grandeur) du calcul du produit de convolution $im * h$.

   (d) Quelle est la taille de l'image filtrée ?

3. Filtrage par transformée de Fourier sur une image en 2D

   (a) Expliquez le principe du filtrage par transformée de Fourier (*fft2*) pour une image en 2D. Vous pourrez faire un schéma.

   (b) On veut filtrer une image 2D de taille 256×256. On a le choix entre un filtre de convolution de taille 3×3 et un filtre par transformée de Fourier, sachant que la complexité algorithmique de la transformée de Fourier *fft2* sur une image de taille $n \times n$ est de $n^2.log_2(n)$. Quel filtre vaut-il mieux choisir dans ce cas particulier ?