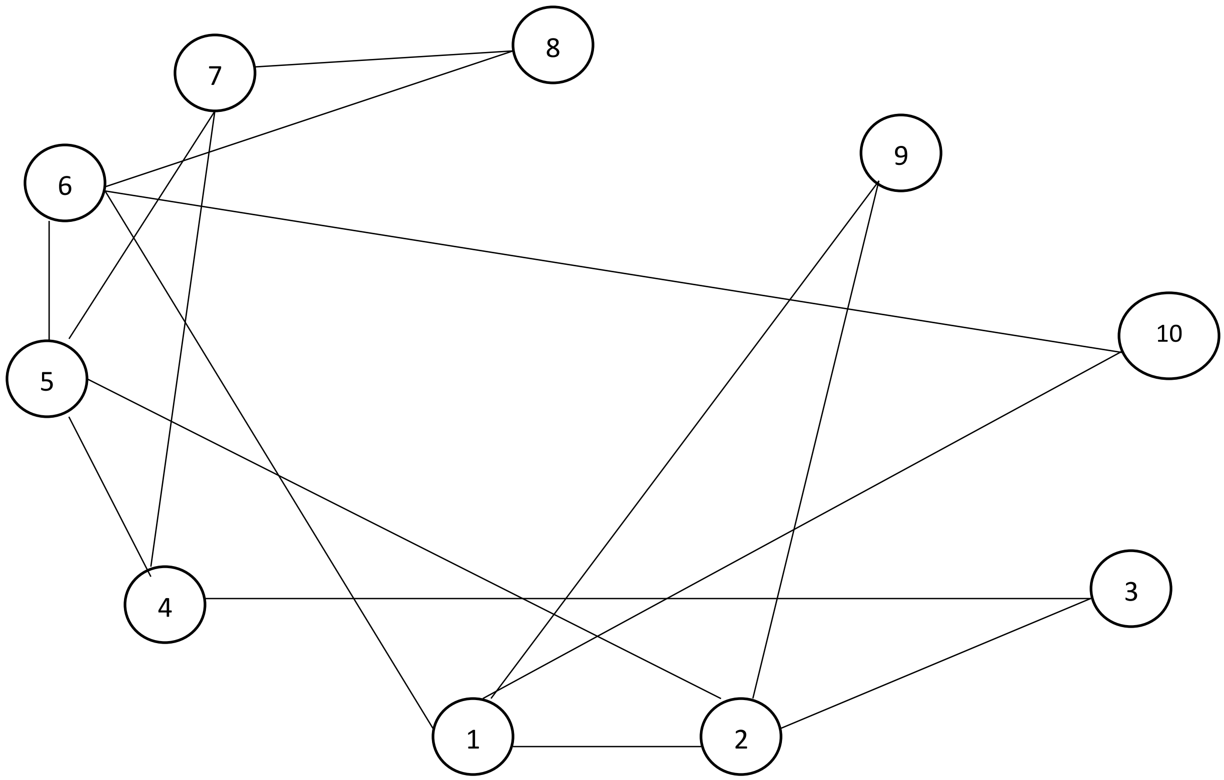
Ce graphe est-il 4-coloriables ? Justifiez.

- Etant donné un graphe simple $G = (S, A)$
  S ensemble des sommets, A ensemble des arêtes.



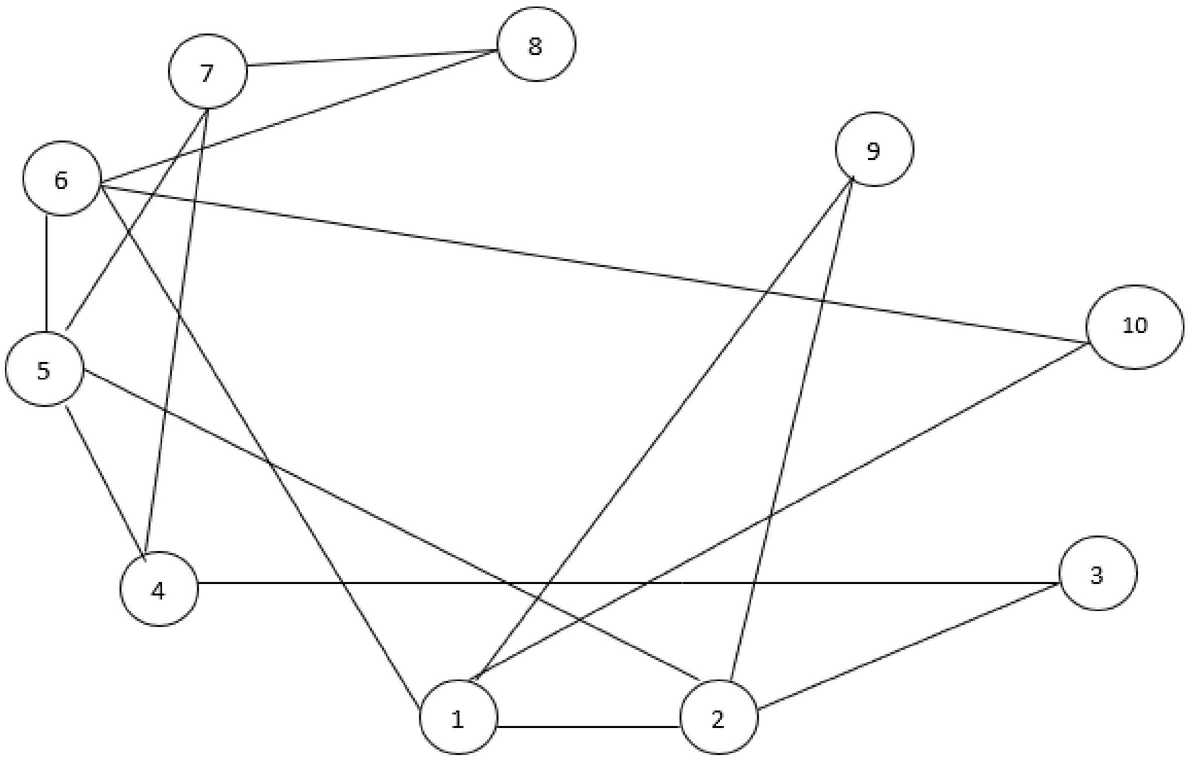
- Une coloration propre des sommets est une fonction f qui attribue une couleur (valeur) à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes :

$$\forall\ (x, y) \in A, \qquad f(x) \neq f(y)$$

- Un graphe est k-colorable s'il existe une coloration propre avec k couleurs.
  - Donc, ce graphe est 4 coloriables s'il existe une coloration propre avec 4 couleurs

- # Algorithme de Welsh et Powell

  1. Trier la liste des sommets par ordre décroissant de degrés
     - Le degré d'un sommet v, noté d(v), désigne son nombre de voisins.



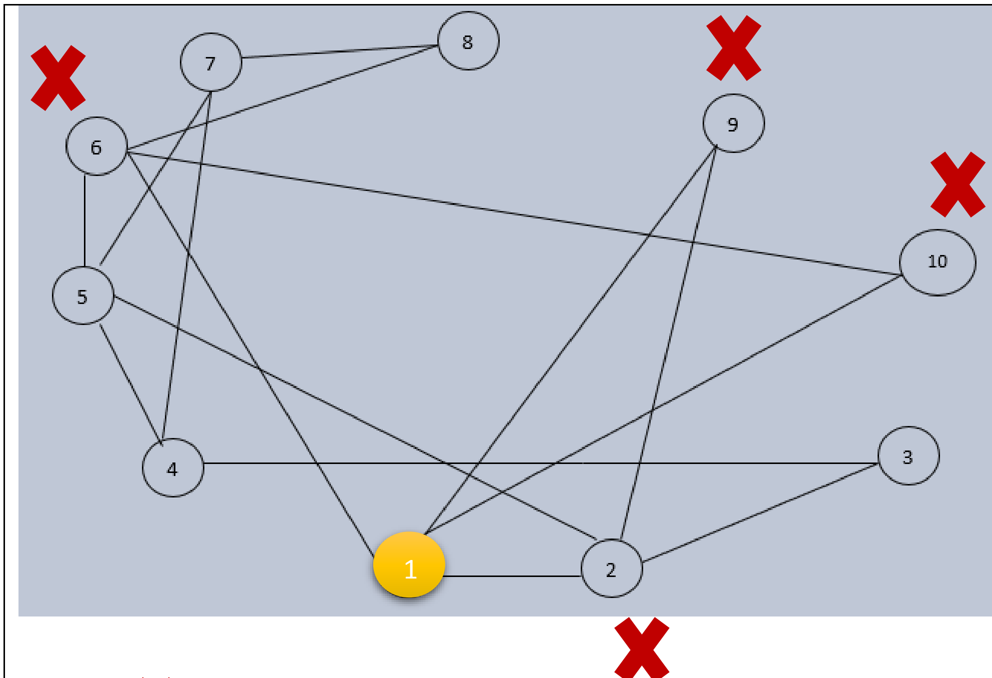
Sommet	**degré**
1	4
2	4
3	2
4	3
5	4
6	4
7	3
8	2
9	2
10	2

Sommets par ordre décroissant de degrés	
Sommet	**degré**
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2

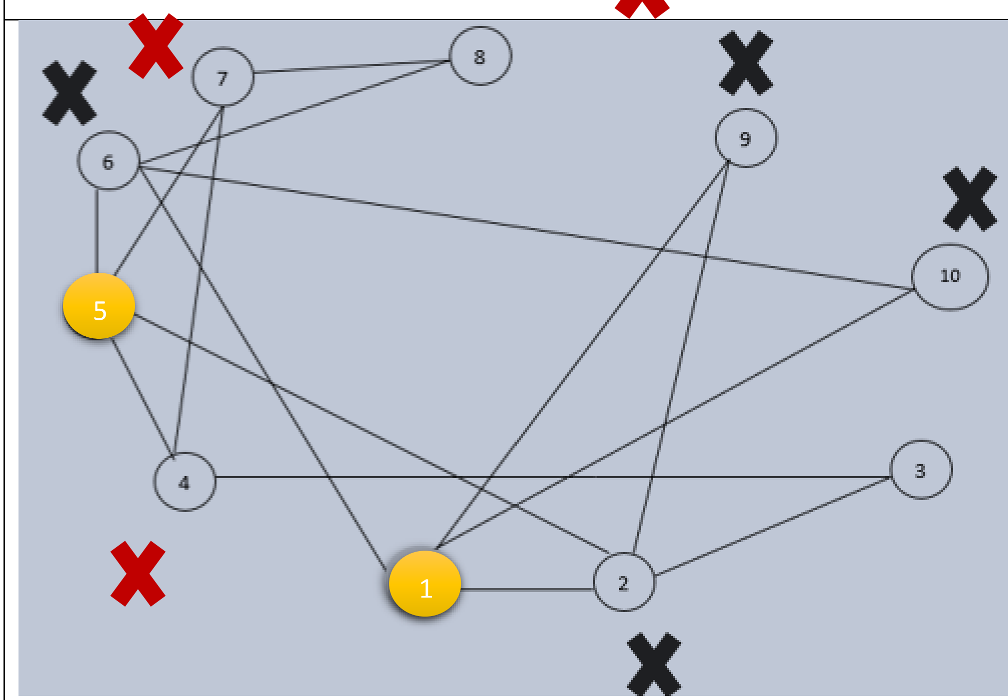
2. Parcourir la liste triée :

- Trouver le premier sommet non déjà coloré et lui attribuer la « plus petite » couleur c non déjà utilisée.
- Parcourir la suite de la liste en attribuant cette couleur c aux sommets non colorés et non adjacents aux sommets déjà colorés avec c

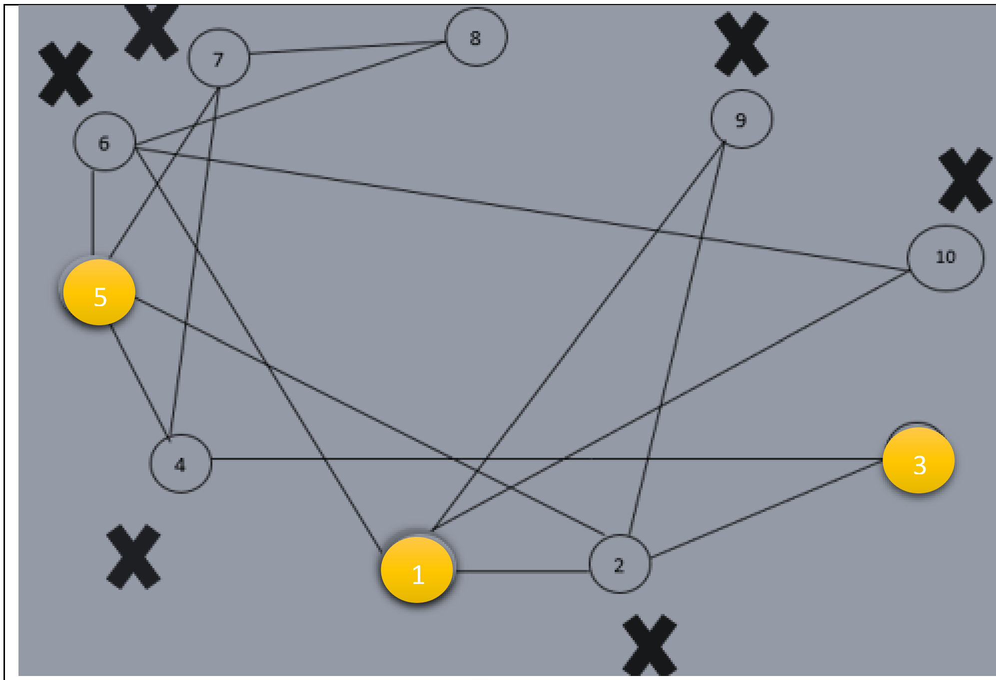
L'idée de base : si je commence par coloriait les sommets les plus connectés : je commence avec ceux qui sont le plus dur à colorier et ensuite je colorie ceux qui sont plus simple à colorier.



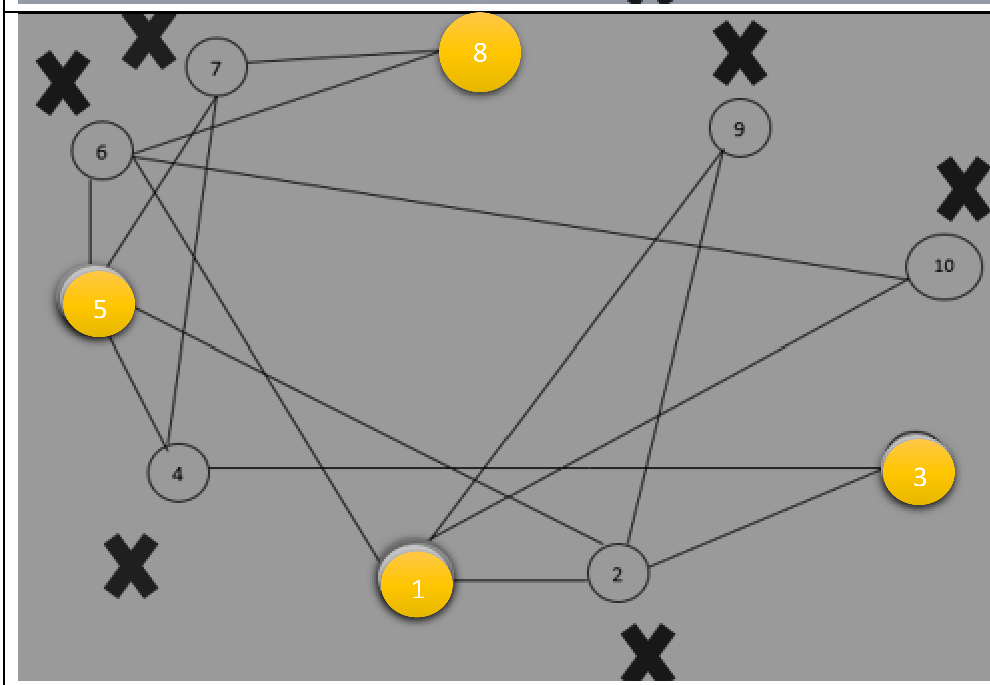
Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2



Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2

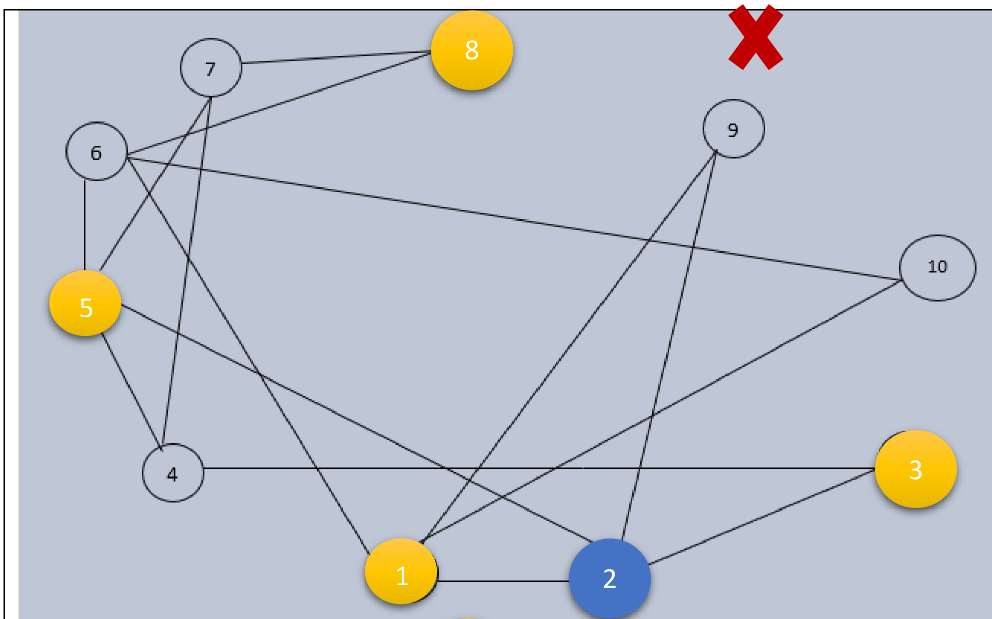


Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2

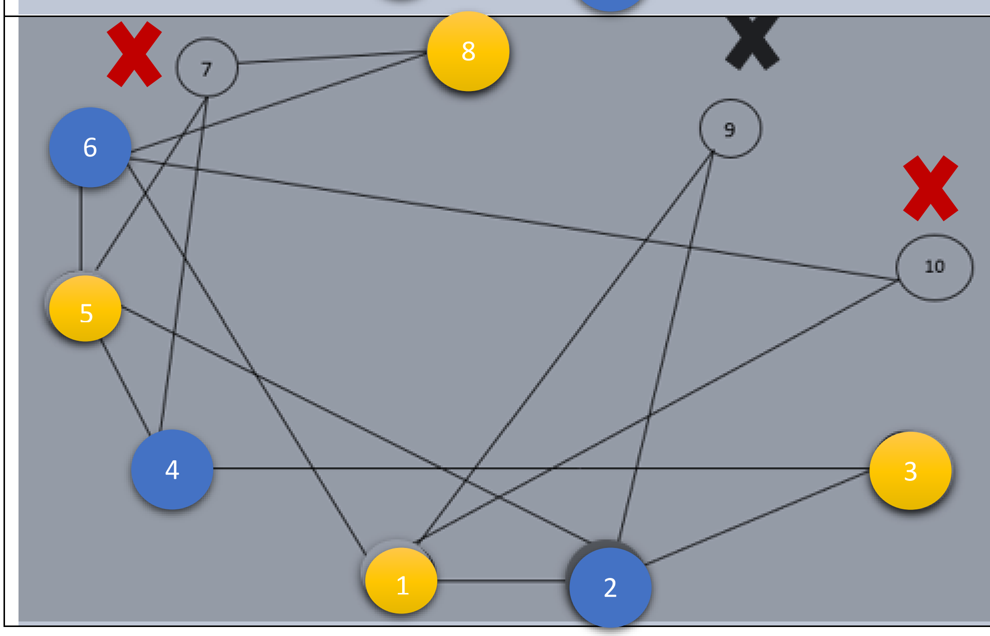


Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2

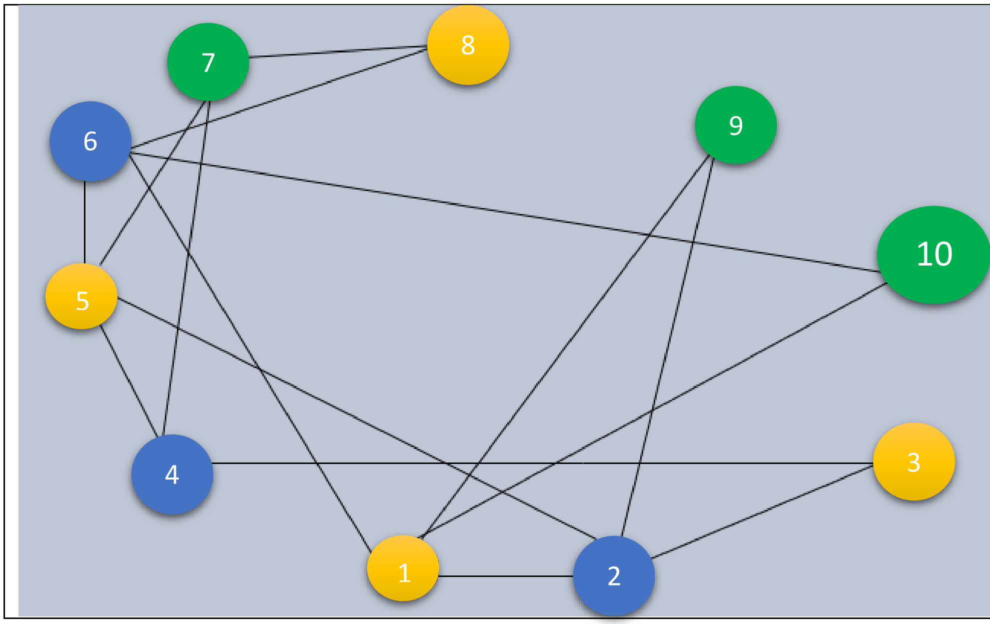
3. Recommencer 2 s'il reste des sommets non colorés.



Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2



Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2



Sommet	degré
1	4
2	4
5	4
6	4
4	3
7	3
3	2
8	2
9	2
10	2

Le graphe est 3-coloriables
donc -> 4-coloriables

Parce que tu peux le colorier avec 3 couleurs minimum avec Welsh et Powell, tu peux par extension colorier avec 4

Quel est la taille du graphe de coloriage correspondant au problème du Sudoku ? Justifiez

> voir aussi le 2em document

taille d'un graphe Nombre d'arêtes ou d'arcs dans un graphe.

1 sommet a 20 sommets qui lui sont adjacents. 20 degree par sommet

en total : 81 sommets. 81 sommets car 9*9

Taille = 810 = 20*81 / 2 **(/ 2 car une arête relie 2 sommets)**

Montrez qu'un arbre possède au moins deux sommets de degré 1

Définition (sommet pendant)
Sommet *pendant* = sommet de degré 1

Proposition.
Soit un arbre dont le nombre de sommets $n \geq 2$.
Cet arbre possède au moins 2 sommets pendants.

- **Theorem 3:** Prove that a tree with n vertices has (n-1) edges.

  Proof: Let n be the number of vertices in a tree (T).

  If n=1, then the number of edges=0.

  If n=2 then the number of edges=1.

  If n=3 then the number of edges=2.

  Hence, the statement (or result) is true for n=1, 2, 3.

  Let the statement be true for n=m. Now we want to prove that it is true for n=m+1.

  Let e be the edge connecting vertices say Vi and Vj. Since G is a tree, then there exists only one path between vertices Vi and Vj. Hence if we delete edge e it will be disconnected graph into two components G1 and G2 say. These components have less than m+1 vertices and there is no circuit and hence each component G1 and G2 have m1 and m2 vertices.

```
Now, the total no. of edges = (m1-1) + (m2-1) +1
                            = (m1+m2)-1
                            = m+1-1
                            = m.
```

  Hence for **n=m+1** vertices there are m edges in a tree (T). By the mathematical induction the graph exactly has n-1 edges.

- **Theorem 7:** Every tree with at-least two vertices has at-least two pendant vertices.
Proof: Let the number of vertices in a given tree T is n and n>=2. Therefore the number of edges in a tree T=n-1 using above theorems.

```
summation of (deg(Vi)) = 2*e
                       = 2*(n-1)
                       =2n-2
```

The degree sum is to be divided among n vertices. Since a tree T is a connected graph, it cannot have a vertex of degree zero. Each vertex contributes at-least one to the above sum. Thus there must be at least two vertices of degree 1. Hence every tree with at-least two vertices have at-least two pendant vertices.

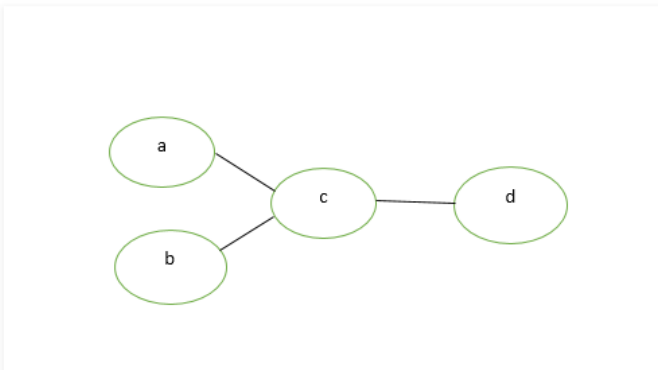
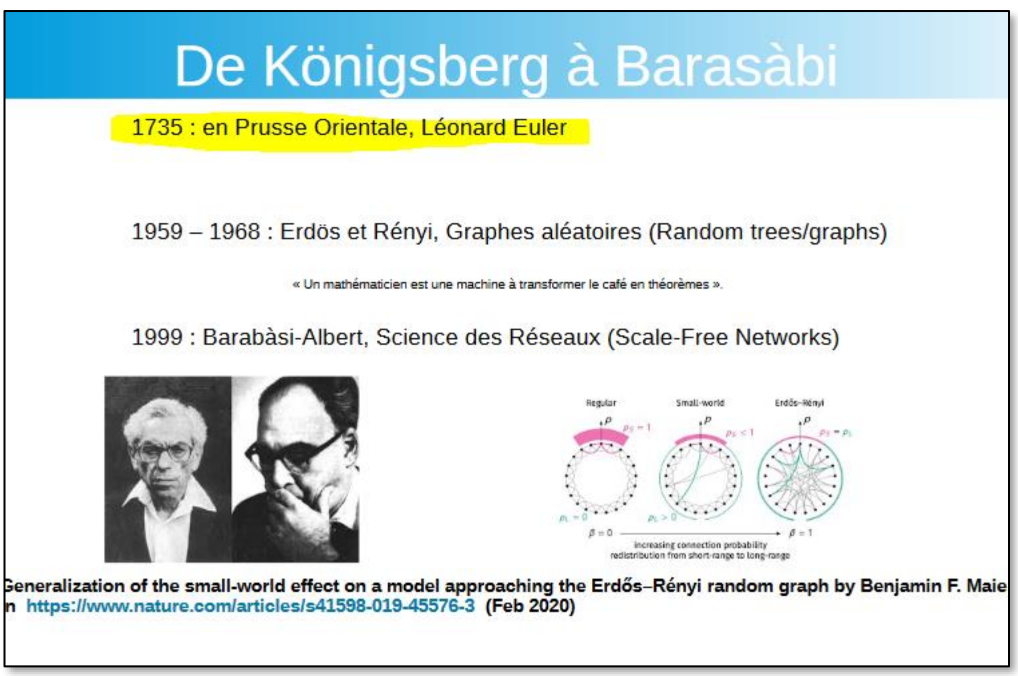


Figure 10: Here a, b and d are pendent vertices of the given graph

Source : https://www.geeksforgeeks.org/some-theorems-on-trees/

Parlez-moi d'Euler



- **En 1736, Euler résout le problème des sept ponts de Königsberg.**
- La ville de Königsberg, en Prusse, est traversée par la rivière Pregolia, qui entoure deux grandes îles reliées entre elles et aux deux rives par sept ponts.
- Le problème était de savoir s'il est possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ.
- **Euler établit que, pour que ce soit possible, il aurait fallu que chacune des quatre zones géographiques (les deux îles et les deux rives) soit atteinte par un nombre pair de ponts — en termes modernes : que chacun des quatre « sommets » du « graphe » soit adjacent à un nombre pair d'« arêtes » (un graphe ayant cette propriété est dit « eulérien »).**
- La résolution de ce problème est considérée comme le premier théorème de la théorie des graphes.
- Euler a également établi la formule $S - A + F = 2$ liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe, et donc d'un graphe planaire. La constante de cette formule est maintenant connue comme la caractéristique d'Euler pour un graphe (ou pour un autre objet mathématique), et est liée au genre de l'objet.