Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Licence 1ère année, 2019-2020, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n° 5 : Limites - Continuité

Exercice 1. 1) Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes :

$$a)\ f(x)=\sqrt{\frac{1+2x}{4-3x}},\quad b)\ g(x)=\sqrt{x^2+3x-4},\quad c)\ h(x)=\ln(2x+5),\quad d)\ k(x)=\ln(\ln x),\quad e)\ l(x)=\ln(-\ln x).$$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, décrire le domaine D de définition naturel, puis détailler les opérations algébriques et les compositions en jeu pour justifier la continuité de la fonction sur D.

$$a)\ f(x)=\sqrt{x^3-2},\quad b)\ g(x)=\ln\left((x-1)^2(x+2)^4\right),\quad c)\ h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-3}.$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes, quand elles existent (ou prouver que la limite n'existe pas).

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1},\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\qquad c)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4},\qquad e)\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2},\qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}\sin x,$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty}x\sin x,\qquad h)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\cos x}\ \text{(on pourra utiliser la quantité conjuguée } 1+\cos x).$$

Exercice 3. Étudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\lambda x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad b)\ \lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-\lambda}-\frac{1}{(x-2)^2}\right),\quad c)\ \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}.$$

Exercice 4. 1) Pour $x>0$, réécrire $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ à l'aide de la quantité conjuguée, et en déduire que

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) En réutilisant les calculs de la question 1), réduire au même dénominateur la quantité $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et en déduire que

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 5.

(1) Montrer que pour tout $x>0$, la fonction définie par $f(y)=y^3+2xy-x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout $x>0$, il existe un unique réel y, que l'on notera $y(x)$, vérifiant

$$y^3+2xy-x=0. \tag{1}$$

(3) Montrer que $\forall x>0,\ y(x)\in[0,1]$ et déduire de l'équation (1) que

$$\forall x>0,\quad |x(2y(x)-1)|\leqslant 1.$$

(4) En déduire que $\lim_{x\to+\infty}y(x)=\frac{1}{2}$, puis grâce à l'équation (1) que $y(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{16x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6. Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I.

1) $x^7-x^2+1=0,\quad I=[-2,\ 0]$

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x=2,\quad I=\mathbb{R}$

3) $\tan x=\frac{3}{2}x,\quad I=]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}[$

4) $e^x-3\sqrt{x}=0,\quad I=[0,1]$

5) $x+\sin x=\frac{1}{x^2+4},\quad I=[0,\pi]$

Exercice 7. Vrai ou faux ? Donner une preuve ou un contre-exemple.

(1) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, positive et $f(a)=0$, alors il existe $c\in[a,b]$ tel que f soit croissante sur $[a,c]$.

(2) Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

(3) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, alors f atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}$.

(4) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et bornée, alors $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

(5) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.

(6) Si $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.

Exercice 8. Vrai ou faux ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple.

(1) Si $f(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(x)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(\sqrt{x})$

(2) Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

(3) Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

(4) Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $g(x) = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$, alors $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$

(5) Si $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(6) Si $f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

(7) Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, alors f et g ont une limite en 0 et les deux limites sont les mêmes.

(8) Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$ et f a une limite (finie ou infinie) en 0, alors g a une limite en 0, égale à celle de f.

Exercice 9. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Est-ce encore vrai si l'on enlève l'hypothèse "différent de 0" ?

Exercice 10. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue.

(1) En étudiant l'application g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet au moins un point fixe (*i.e.* un réel c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = c$).

(2) On suppose de plus que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$ dans $[a,b]$ (on dit que f est *contractante*). Montrer que f admet un seul point fixe.

Exercice 11. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).\sin x; \qquad b)\ g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ ; \qquad c)\ h(x) = x\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 12. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^{1/x}$.

(1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.

(2) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Exercice 13. On considère la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $]0, +\infty[$.

(1) Soient les suites $u_n = \dfrac{1}{2\pi(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{1}{2\pi(n+1/4)}$. Que valent $f(u_n)$ et $f(v_n)$?

(2) Que peut-on en déduire pour la limite de f en 0^+ ?

Exercice 14 (DM 5). Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = \frac{E(nx)}{n},$$

où $E(t)$ est la partie entière de t, c'est-à-dire l'unique $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant t < p+1$.

(1) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad x - \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant x$.

(2) En déduire que $x_n \to x$. On a donc montré que tout nombre réel est limite d'une suite de nombre rationnels.

Exercice 15 (DM 5). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) \neq 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x).f(y). \qquad (1)$$

Le but de cet exercice est de montrer que f est nécessairement de la forme $f(x) = e^{ax}$, pour un certain réel a fixé.

(1) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $f(nt) = f(t)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) En déduire que si $f(x) = 0$, alors $f(\frac{x}{n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que $f(0) = 1$, puis par l'absurde que $f(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et aboutir à une contradiction avec la conclusion de la question 2).

(4) On pose $g(t) = \ln f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Calculer, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y)$ en fonction de $g(x)$ et $g(y)$, puis $g(nt)$ en fonction de $g(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Montrer que g est impaire.

(6) On pose $a = g(1)$. Montrer que $g(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $g(x) = ax$ pour tout x rationnel.

(7) Soit $x \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite de rationnels tels que $x_n \to x$ (cf. exercice précédent). Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$, et en déduire que $g(x) = ax$. Conclure.