Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°1
13 Octobre 2014

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

*Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.*

**NB** : *Ce sujet contient 5 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
**VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE.**

---

**Exercice 1** Soit $x$ un réel non multiple de $2\pi$. Pour un entier naturel $n$, on considère la somme $T_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

(1) Calculer la somme $K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.
(2) Exprimer $T_n(x)$ à l'aide de $\mathrm{Re}(K_n(x))$.
(3) En déduire la valeur de $T_n(x)$

**Exercice 2** Considérons le nombre complexe $m = \sqrt{3} + i$.

(1) Calculer le module et l'argument de $m$.
(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = m$ (où l'inconnue est $z$). On écrira le résultat sous la forme exponentielle.

**Exercice 3** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$(E_1)$ $z^6 = e^{i2k\pi}$ (On donnera les solutions sous forme trigonométrique)

$(E_2)$ $z^4 = \dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}$ (On donnera les solutions sous forme trigonométrique)

$(E_3)$ $z^2 - 3 + 4i = 0$ (On donnera les solutions sous forme algébrique)

**Exercice 4**
Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$ b) $v_n = \sqrt{n^2+1} - n$ c) $w_n = \dfrac{1}{3 + (-1)^n 2^{-n} \log(n)}$

**Exercice 5** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2}, \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

(1) Montrer que $u_n > 0$, pour tout $n \geqslant 0$.
(2) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est égale à

$$\alpha = -1 + \sqrt{2}.$$

(3) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = \frac{|u_n - \alpha|}{(u_n+2)(\alpha+2)},$$

et en déduire que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

(4) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|.$$

(5) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.