Licence 1ere année
Mathématiques et calcul
1er semestre

Lionel Moisan

Université Paris Descartes

7. Espaces vectoriels et applications linéaires

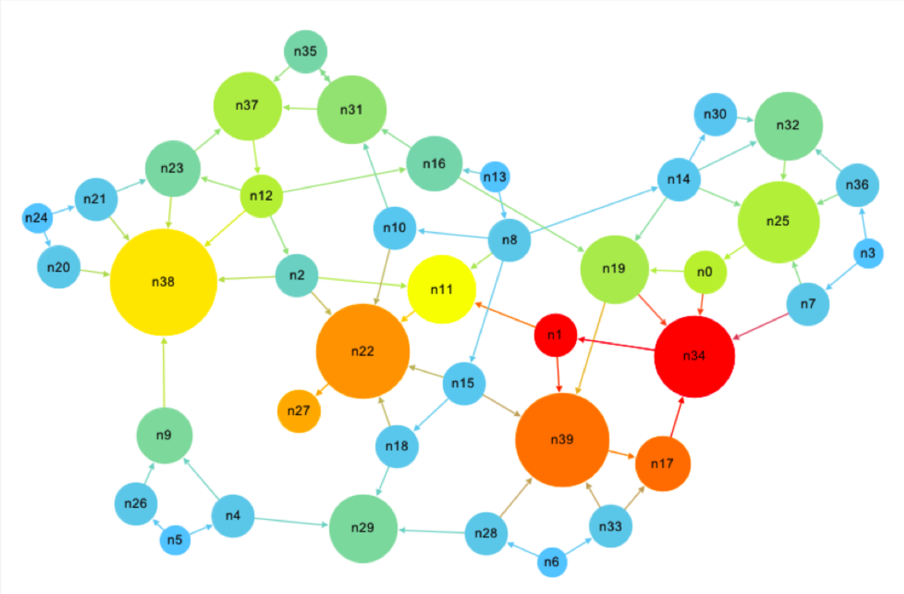
Espaces vectoriels et applications linéaires

Applications de l'algèbre linéaire

Indispensable, dans les domaines suivants :

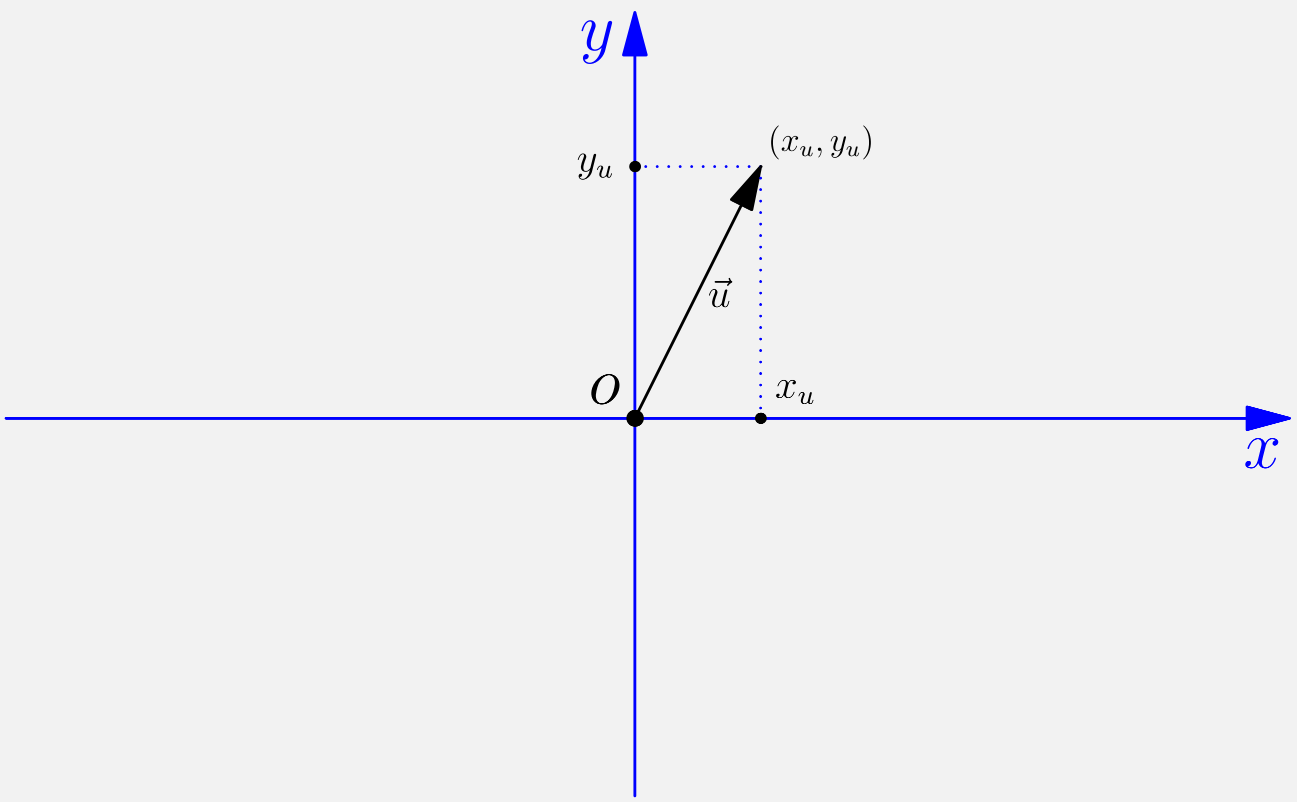
- analyse et simulation physique (systèmes de grande dimension, linéaires ou linéarisés)
- statistiques (analyse de données, réseaux)
- codage, cryptographie
- géométrie, animation 3D (images de synthèse)
- big data, deep leaning (réseaux de neurones profonds)
- etc.

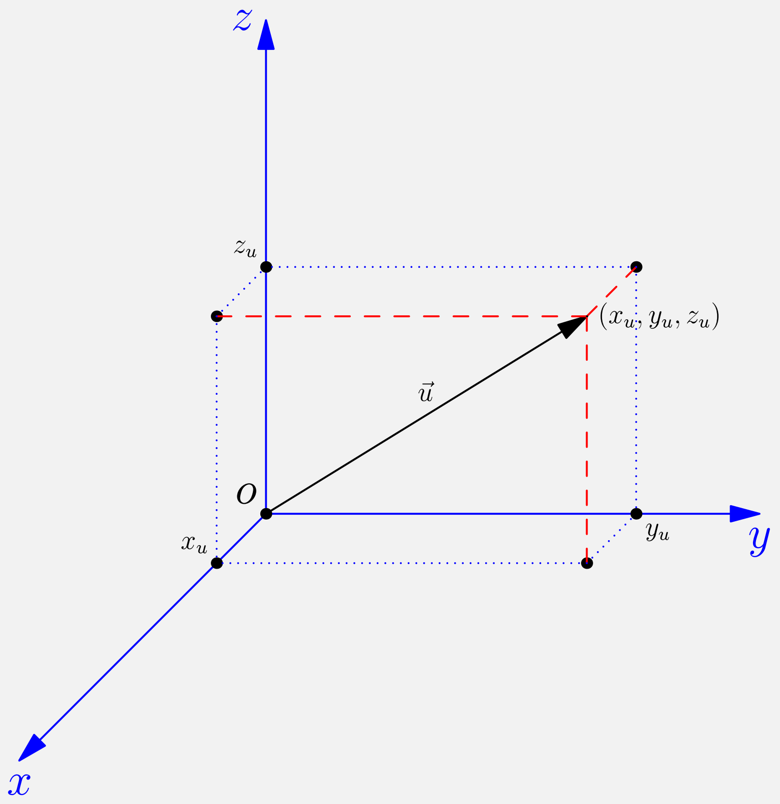
Un exemple : l'algorithme PageRank de Google

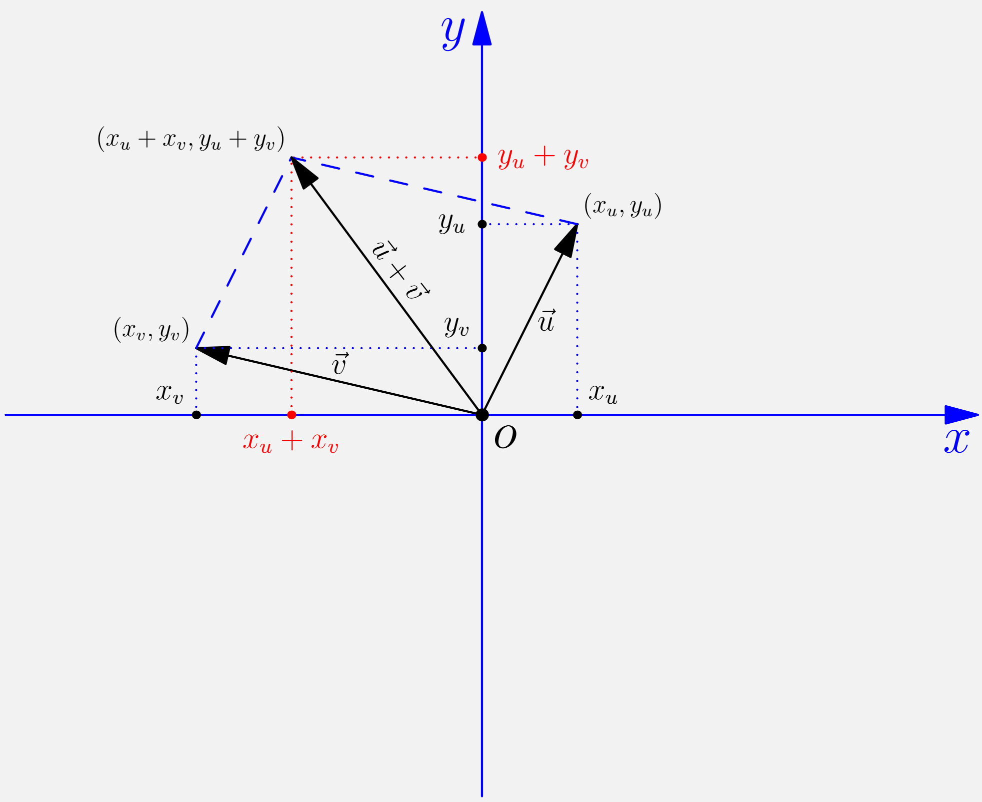


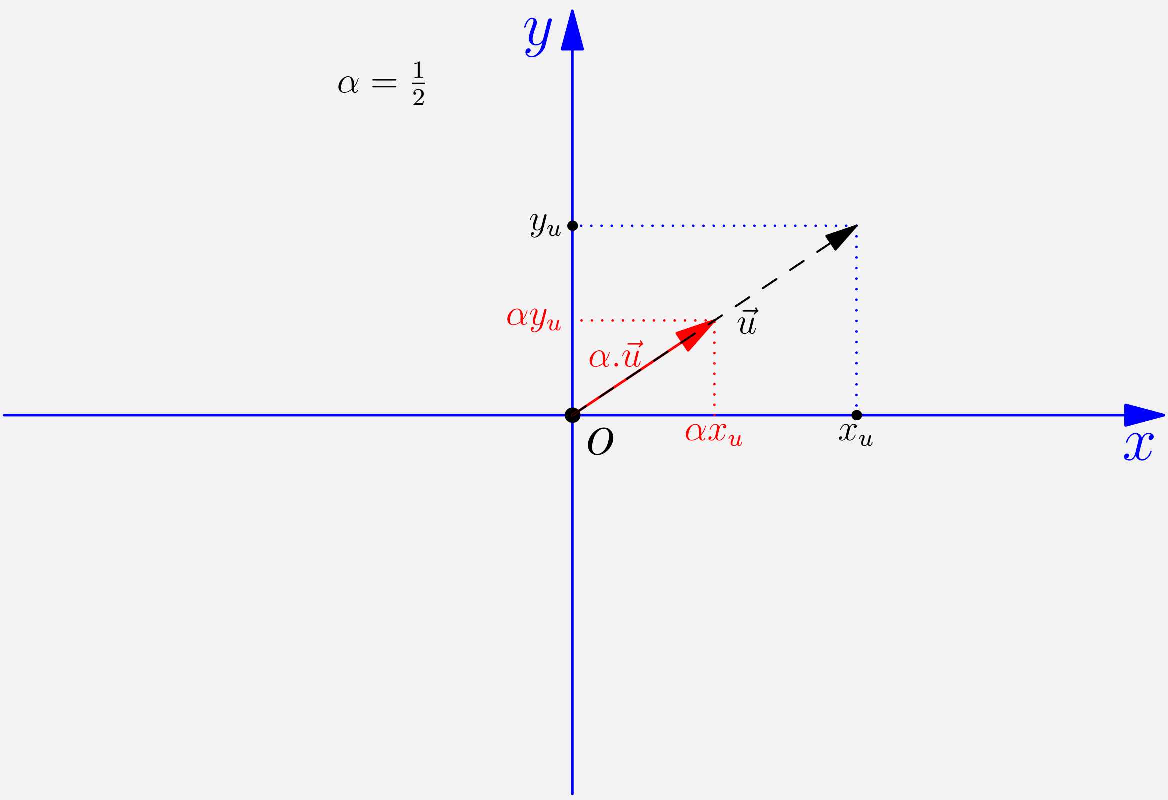
PageRank : 90% d'algèbre linéaire

Espaces vectoriels




z
z_u
(x_u, y_u, z_u)
$\vec{u}$
O
x_u
y_u
y
x


y
$(x_u + x_v, y_u + y_v)$
$y_u + y_v$
(x_u, y_u)
y_u
$\vec{u} + \vec{v}$
(x_v, y_v)
y_v
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x_v
x_u
$x_u + x_v$
O
x



Espace vectoriel, définition

Un ensemble E, muni :

- d'une addition (notée $+$: pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $\vec{u} + \vec{v}$ est un élément de E)
- d'une multiplication externe (notée avec un point : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in E$, $\alpha.\vec{u}$ est un élément de E)

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si les deux opérations vérifient :

Espace vectoriel, définition

Propriété de l'addition

L'addition de vecteurs (= éléments de E) a une structure de groupe commutatif :

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \ : \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité)
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \ : \quad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
- $\exists \vec{0} \in E \ : \quad \forall \vec{u} \in E \ : \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$ (élément neutre)
- $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E$ (noté : $-\vec{u}$) tel que : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} = \vec{0}$

Espace vectoriel, définition

Propriétés de la multiplication externe

La multiplication externe (= multiplication d'un scalaire par un vecteur) vérifie :

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \alpha.\big(\beta.\vec{u}\big) = (\alpha\beta).\vec{u}$ (associativité)
- $\forall \vec{u} \in E \ : 1.\vec{u} = \vec{u}$ (élément neutre)

Espace vectoriel, définition

Relation de l'addition et de la multiplication externe

La multiplication externe est distributive sur l'addition de vecteurs :

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : (\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \alpha.\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

Les espaces vectoriels de type $\mathbb{R}^n$

- $n = 1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
- $n = 2$: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ ; \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des couples de réels, muni de :
  - l'addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
- $n = 3$: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ ; \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des triplets de réels, muni de :
  - l'addition : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- n quelconque : $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des n-uplets de réels, muni de :
  - l'addition : $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \ ; \ n \in \mathbb{N}, a_0 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Exemples : $1 + 2X + 4X^2 \in \mathbb{R}[X]$, $2 - 3X \in \mathbb{R}[X]$, $5 \in \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel si on le munit de :

- l'addition :
  $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$
- la multiplication externe :
  $\alpha.(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1X + \cdots + \alpha a_nX^n$

Les fonctions définies sur un ensemble A

$$\mathbb{R}^A = \{f : A \to \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^A$ est un espace vectoriel si on le munit de :

- l'addition : $\forall f, g \in \mathbb{R}^A, \forall x \in A, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- la multiplication externe :
  $\forall f \in \mathbb{R}^A, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Exemples :

- Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ($A = \mathbb{R}$)
- Les fonctions définies sur $]0, 1[$ ($A =]0, 1[$)
- Les suites à valeurs réelles ($A = \mathbb{N}$)

Sous-espace vectoriel

Définition. Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si c'est un espace vectoriel lorsqu'on le munit des mêmes lois (addition de vecteurs et multiplication externe) que E.

Proposition. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ssi

- $\vec{0} \in F$
- $\vec{u}, \vec{v} \in F \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité par addition)
- $\vec{u} \in F,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha.\vec{u} \in F$ (stabilité par multiplication externe)

Proposition (autre caractérisation). $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ssi

$$\forall \alpha, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F.$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- $F = \{(x, y, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
  - $\vec{0} = (0, 0, 0) \in F$
  - $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0 + 0) = (x + x', y + y', 0)$
  - $\alpha.(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, \alpha 0) = (\alpha x, \alpha y, 0)$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + 2y - z = 0\}$: sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
  - $\vec{0} = (0, 0, 0) \in G$
  - $\vec{u} = (x, y, z) \in G$, $\vec{v} = (x', y', z') \in G \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$ avec $(x + x') + 2(y + y') - (z + z') = x + 2y - z + x' + 2y' - z' = 0 + 0 = 0$ $\Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in G$
  - $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x, y, z) \in G \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ avec $\alpha x + 2\alpha y - \alpha z = \alpha(x + 2y - z) = \alpha \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \in G$

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = y\}$ OUI
  • $\vec{0} \in F$, • $\vec{u} = (x,y) \in F$, $\vec{v} = (x',y') \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u}+\vec{v} = (x+x', y+y')$ avec $x+x' = y+y' \Rightarrow \quad \vec{u}+\vec{v} \in F$
  • $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x,y) \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y)$ avec $x = y \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} \in F$
- $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x + y = 1\}$ NON car $(0,0) \notin G$
- $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x - 5y = 0\}$ OUI
  • $\vec{0} \in H$, • $\vec{u} = (x,y) \in H$, $\vec{v} = (x',y') \in H \quad \Rightarrow \quad \vec{u}+\vec{v} = (x+x', y+y')$ avec $2(x+x') - 5(y+y') = 2x - 5y + 2x' - 5y' = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}+\vec{v} \in H$
  • $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x,y) \in H \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y)$ avec $2\alpha x - 5\alpha y = \alpha(2x - 5y) = \alpha \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \in H$
- $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 - y = 0\}$ NON car $(1,1) \in I$ mais $2.(1,1) \notin I$

Exercice : Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x - 3y = 0\}$
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 - 2y + z^3 = 0\}$
- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2x + 4y - 7z = 0\}$
- $K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x + 3y - 5z + 2t = 4\}$

Exemples de sous-espaces vectoriels

- Fonctions continues de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$
- Fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$
- Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en $x = \pi$
- Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques
- Fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$
- Suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle
- Suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang
- Polynômes de degré au plus n (noté $\mathbb{R}_n[X]$)
- Polynômes pairs ($P(-X) = -P(X)$)

Exemple de preuve (suites de limites nulle)

On pose $c_0 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$.

Montrons que c_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (espace vectoriel des suites à valeurs réelles).

- la suite nulle est dans c_0
- Si (u_n) et (v_n) sont de limite nulle, alors $(u_n + v_n)$ aussi
- Si (u_n) est de limite nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors (αu_n) est de limite nulle

Remarque : Les suites de limite 1 (par exemple) ne forment pas un espace vectoriel !

Exercice : Ces ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?

- fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et nulles sur $\mathbb{Q}$ OUI
- fonctions positives sur $\mathbb{R}$ NON
- fonctions qui admettent un DL_5 en 0 OUI
- suites croissantes NON
- suites arithmétiques OUI
- suites géométriques NON
- suites qui vérifient $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ OUI
- suites négligeables devant $\ln(n)$ OUI
- polynômes de degré 3 NON
- polynômes divisibles par $X-1$ ($P = (X-1)Q$) OUI
- polynômes non divisibles par $X-1$ NON
- polynômes sans terme en X^7 OUI

Intermède : ensembles, familles, suites

Définition. Soit A et I deux ensembles quelconques. On appelle famille d'éléments de A, indexée par I, toute fonction de I dans A, que l'on choisit de noter sous la forme $(x_i)_{i\in I}$ (pour tout $i \in I$, $x_i \in A$ est la valeur de la fonction en i).

Cas particuliers :

- $I = \{1, 2, \dots n\}$, $A = \mathbb{R}$: $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ = élément de $\mathbb{R}^n$
- $I = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{R}$: $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ = suite à valeurs réelles

On peut toujours décrire un ensemble A comme une famille (indexée par A lui-même) : $(x_a)_{a\in A}$ avec $x_a = a$

Remarque importante : dans une famille, un même élément peut être répété, pas dans un ensemble

Stabilité par intersection

Théorème. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Posons $F = \cap_{i\in I} E_i$.

- $\forall i,\ \vec{0} \in E_i$ donc $\vec{0} \in F$
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in F$ alors $\forall i, \vec{u}, \vec{v} \in E_i$ donc comme E_i est un sous-espace vectoriel de E, $\vec{u} + \vec{v} \in E_i$, donc $\vec{u} + \vec{v} \in F$
- Si $\vec{u} \in F$ et $\alpha \in R$, alors $\forall i, \alpha.\vec{u} \in E_i$ donc $\alpha.\vec{u} \in F$

Exemples :

- Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et nulles en 0 forment un espace vectoriel
- les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ forment un espace vectoriel

Combinaisons linéaires

Définition. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = (\vec{u}_i)_{1\leq i\leq n}$, une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ (ou combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$) tout vecteur $\vec{v}$ de la forme :

$$\vec{v} = \alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\vec{u}_i \quad \left(\alpha_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\right)$$

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est de cardinal infini, alors on appelle combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ toute combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Famille génératrice

Proposition. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

On dit que F est engendré par $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice (ou partie génératrice) de F.

Exemples :

- soit $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ et $\vec{u}_2 = (0,1,0)$
  $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = \{x.\vec{u}_1 + y\vec{u}_2\,;\, x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}.$
- $\mathrm{Vect}\big((1, X, X^2)\big) = \mathbb{R}_2[X]$
- $\mathrm{Vect}\Big((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\Big) = \mathbb{R}[X]$

Exercice :

- Montrer que $(\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,3))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathrm{Vect}\big(((2,0),(1,1))\big) = \mathbb{R}^2$
- La famille $(\vec{u}_1 = (1,1,0), \vec{u}_2 = (-1,1,0))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
- Montrer que $\mathrm{Vect}\big((X^3+1, X^3+X, X^3+X^2, X^3)\big) = \mathbb{R}_3[X]$
- Reconnaître $\mathrm{Vect}\big((X, X+X^2, X-X^3, X^2)\big)$
- Décrire $\mathrm{Vect}\big(((X-1)X^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$

Familles libres

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, si :

$$\alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

On dit aussi : les vecteurs $\vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants.

Un famille qui n'est pas libre est dite liée.

Familles libres

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre :

en effet, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors on a :

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\gamma & = & 0 & \text{(1ère coordonnée de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}\text{)} \\ -\beta - 2\gamma & = & 0 & \text{(2ème coordonnée de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}\text{)} \\ 3\alpha & = & 0 & \text{(3ème coordonnée de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}\text{)} \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Familles libres

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = (\vec{u} = X^2, \vec{v} = X(X-1), \vec{w} = (X-1)^2)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$, c'est-à-dire
$P := \alpha X^2 + \beta X(X-1) + \gamma.(X-1)^2 = 0$

$$\text{Alors} \quad \begin{cases} \gamma & = \quad 0 \qquad \textit{(car } P(0) = 0\textit{)} \\ \alpha & = \quad 0 \qquad \textit{(car } P(1) = 0\textit{)} \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma & = \quad 0 \qquad \textit{(car } P(2) = 0\textit{)} \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
$\hookrightarrow$ ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est **libre**.

Familles libres

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

Montrons que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.

Cherchons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
En prennent la première puis la deuxième composante, cela équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma & = \quad 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = \quad 0 \end{cases}$$

Le triplet $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{7}{4}, \gamma = 1$ est solution
$\hookrightarrow$ donc la famille est **liée**.

Notons que $\vec{w} = \frac{1}{4}.\vec{u} + \frac{7}{4}\vec{v}$: quand une famille est liée, on peut exprimer des vecteurs de la famille comme combinaison linéaire des autres.

Familles libres

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (X^2 + 1, X^2 - 1, X^2)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est-elle **libre** ou **liée** ?

On remarque que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 = \vec{0}$.

$\hookrightarrow$ donc la famille $\mathcal{F}$ est **liée**.

Espaces vectoriels et applications linéaires Familles libres

Familles libres

Remarques

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre dans un espace vectoriel E. Alors :

- $\forall i, \quad \vec{u}_i \neq \vec{0}$ *(sinon on aurait $1.\vec{u}_i = \vec{0}$)*
- $\forall i, j, \ i \neq j \Rightarrow \vec{u}_i \neq \vec{u}_j$ *(sinon on aurait $1.\vec{u}_i - 1.\vec{u}_j = \vec{0}$)*

Exercice :

- La famille $(\vec{u}_1 = (4,0,0), \vec{u}_2 = (0,2,0), \vec{u}_3 = (0,0,3))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? OUI
- La famille $(\vec{u}_1 = (2,0), \vec{u}_2 = (1,1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$? OUI
- La famille $(\vec{u}_1 = (1,1,0), \vec{u}_2 = (-1,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? NON
- La famille $\left(1+X, X+X^2, X^2+X^3, 1+X+X^2+X^3\right)$ est elle-libre dans $\mathbb{R}[X]$? OUI
- La famille $\left(1, 1+X, 1+X^2, X-X^2\right)$ est elle-libre dans $\mathbb{R}[X]$? NON
- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, la famille $(\cos, \sin)$ est-elle libre ? OUI
- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, la famille $(\exp, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ est-elle libre ? NON

Base d'un espace vectoriel : définition

Définition. On appelle base d'un espace vectoriel, une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Base d'un espace vectoriel
Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, avec :

$$\vec{e}_1 = (1,0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0,1),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{e}_1 + \beta.\vec{e}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{u} = (x_u, y_u), \quad x_u, y_u \in \mathbb{R}$

  et : $\vec{u} = x_u.\vec{e}_1 + y_u.\vec{e}_2$

Espaces vectoriels et applications linéaires — Bases d'un espace vectoriel

Base d'un espace vectoriel
Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, avec :

$$\vec{u}_1 = (1,2) \text{ et } \vec{u}_2 = (-2,3),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{u}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 3\beta & = & 0 \end{cases}$$

  Donc : $\alpha = \beta = 0$

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{v} = (x_v, y_v)$, alors :

$$\vec{v} = \frac{3x_v + 2y_v}{7} \cdot \vec{u}_1 + \frac{-2x_v + y_v}{7} \cdot \vec{u}_2$$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = (\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ avec

$$\vec{f}_0 = 1,\ \vec{f}_1 = X,\ \vec{f}_2 = X^2,\ \vec{f}_3 = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0 + \alpha_1.\vec{f}_1 + \alpha_2.\vec{f}_2 + \alpha_3.\vec{f}_3 = \vec{0}$, alors
$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$$
donc $\quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
- $\mathcal{B}$ est génératrice puisque tout polynôme de degré au plus 3, s'écrit
$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

Exercice :

- Montrer que $(\vec{u}_1 = (-1, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 4, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $(\vec{u}_1 = (2, 0), \vec{u}_2 = (1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $(\vec{u}_1 = (1, 0), \vec{u}_2 = (-2, 1), \vec{u}_3 = (1, 1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\big(1, X, X(X+1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, où

$$\vec{e}_i = \begin{array}{c}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\\ \uparrow \\ i\text{-ème position}\end{array}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$

On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$

La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: démonstration

Montrons que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$, où :

$$\vec{e}_i = \begin{array}{c}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\\ \uparrow \\ i\text{-ème position}\end{array}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$

- Libre : Si $\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$, alors pour tout i, en considérant la $i$ème composante de $\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$, on a $\alpha_i \times 1 = 0$, donc $\alpha_i = 0$
- Génératrice : soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \cdots + x_n.\vec{e}_n$.

Unicité de l'écriture dans une base

Proposition : Soit une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E.

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{a}_i$$

Les scalaires α_i s'appellent les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Écriture dans une base : exemples

- Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Quelles sont les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$?

  On remarque que $\vec{v} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3$, donc, par unicité, les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont x, y, z.
- Soit $\mathcal{C} = (\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (1,1,0), \vec{f}_3 = (1,1,1))$ (base de $\mathbb{R}^3$). Soit $\vec{w} = (4,5,2) \in \mathbb{R}^3$. Quelles sont les **coordonnées** de $\vec{w}$ dans $\mathcal{C}$?

  Posons $\vec{w} = \alpha.\vec{f}_1 + \beta.\vec{f}_2 + \gamma.\vec{f}_3$. On a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 4 \\ \beta + \gamma & = & 5 \\ \gamma & = & 2 \end{cases}$$

  $\hookrightarrow$ coordonnées de $\vec{w}$ dans $\mathcal{C}$: $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$

Exercice :

- On a vu que $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 = (-1, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 4, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ dans $\mathcal{F}$.
- On a vu que $\mathcal{G} = (\vec{u}_1 = (2, 0), \vec{u}_2 = (1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (3, 1)$ dans $\mathcal{G}$.
- On a vu que $\mathcal{H} = \big(1, X, X(X+1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées du vecteur $2X^2 - 1$ dans $\mathcal{H}$.

Dimension d'un espace vectoriel

Lemme de Steinitz : Si un espace vectoriel possède une famille génératrice à n éléments, toute famille libre a au plus n éléments.

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E.

Notation : $\dim E$ ou $\dim(E)$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ a n éléments, (donc toutes les autres bases de $\mathbb{R}^n$ aussi), donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Démonstration du corollaire

Vocabulaire : cardinal d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ = cardinal de I

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

$\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ génératrice, donc : $n_2 \leq n_1$

conclusion : $n_1 = n_2$

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Autre expression :

- Une base est une famille libre de cardinal maximal
- Une base est une famille génératrice de cardinal minimal

Dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

conséquence

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (1,1,0), \vec{e}_3 = (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Libre : Si $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0}$, alors en travaillant composante par composante,

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

- Génératrice : INUTILE !

$\mathcal{B}$ est libre et de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice :

- Montrer que $(\vec{u}_1 = (-1,1), \vec{u}_2 = (1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $(\vec{u}_1 = (2,2,0), \vec{u}_2 = (0,-3,0), \vec{u}_3 = (0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $(\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (-2,4), \vec{u}_3 = (-1,1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille de cardinal maximal libre, $\mathcal{B}$, de F :
  1. $\mathcal{B}$ est une base de F
  2. $p \leq n$
  3. Si $p = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et $F = E$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, de dimension n :

1. $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E \quad \Rightarrow \quad F = E$

Dimension d'un sous-espace vectoriel : exemple

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = 0\} = \{(x, y, 0) \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$
Alors $\dim F = 2$

En effet, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0))$, alors

1. $\mathcal{B}$ est libre
2. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F :

$$(x, y, 0) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Espaces vectoriels et applications linéaires Bases d'un espace vectoriel

Exercice :

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y,\, z = 0\} = \{(2y, y, 0) \,;\, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{G} = (\vec{u} = (2, 1, 0))$ est une famille libre d'élément(s) de F.
- Montrer que $\mathcal{G}$ est une base de F.
- Donner la dimension de F.

Exercice :

- Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y + 3z\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 = (2, 1, 0), \vec{u}_2 = (3, 0, 1))$ est une famille libre d'élément(s) de G.
- Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de G.
- Donner la dimension de G.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Parmi toutes les familles libres contenant $\mathcal{L}$ et incluses dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$, soit $\mathcal{B}$ une famille maximale.

On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

- Si $F \neq E$, $\quad \exists \vec{g} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{g} \notin F$.

  Alors, $(\mathcal{B}, \vec{g})$ est libre, contient $\mathcal{B}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

  donc $\mathcal{B}$ n'est pas maximale
- conclusion : $F = E$ et $\mathcal{B}$ est donc la base cherchée.

Théorème de la base incomplète : exercice

Soit $\mathcal{L}$ la famille libre de $E = \mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{L} = (\vec{f}_1 = (2,0,0), \vec{f}_2 = (2,-1,0)).$$

Compléter $\mathcal{L}$ en une base de E.

Pour $\vec{f}_3 = (0,0,1)$, la famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de E.

Exercice :

- Soit $\mathcal{L}$ la famille de $E = \mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{L} = (\vec{f}_1 = (2,1,0), \vec{f}_2 = (2,2,0)).$$

  Montrer que $\mathcal{L}$ est libre.
- Compléter $\mathcal{L}$ en une base de E.

Rang d'une famille de vecteurs

Soit une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.

On appelle, rang de la famille $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par $\mathcal{F}$.

Proposition : Le rang d'une famille libre est son cardinal.

Proposition : Si une famille a pour rang son cardinal, alors elle est libre.

Rang et bases

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors on a équivalence entre :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E,

(ii) $\mathcal{F}$ est libre,

(iii) $\mathcal{F}$ est génératrice dans E,

(iv) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = n$.

Rang d'une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs si :

- On permute les vecteurs
- On multiplie l'un d'entre eux par un réel non-nul.
- On ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des autres.
- On supprime un vecteur nul.

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1,2,3),\ \vec{v} = (0,2,1),\ \vec{w} = (2,6,7)$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} & = & (2,6,7) \end{array}$$

On remplace $\vec{w}$ par $\vec{w} - 2\vec{u} - \vec{v}$:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} - 2\vec{u} - \vec{v} & = & (0,0,0) \end{array}$$

$(\vec{u},\vec{v})$ libre, donc $\mathrm{rg}\big(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\big) = 2$

Exercice : Calculer le rang de la famille de vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 3, 2),\ \vec{v} = (1, 1, 1),\ \vec{w} = (2, 4, 3)$$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2; \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

- $\exists \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\exists \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$
- $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in F_2$
- $\alpha.\vec{u} = \alpha.(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha.\vec{u}_1 + \alpha.\vec{u}_2$
- $\alpha.\vec{u}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \alpha.\vec{u}_2 \in F_2$

Somme de sous-ev : exemple 1

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 0, 0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, y, 0)\,;\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$F_1 + F_2 = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Somme de sous-ev : exemple 2

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$G_1 = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G_2 = \{(0, y, 0)\,;\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$G_1 + G_2 = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 2x, 0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, y, z)\,;\, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que

$$F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$$

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Dans ce cas, on dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ou que E est somme directe de F_1 et F_2.

Notation : $E = F_1 \bigoplus F_2$

Démonstration

• Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$, avec décomposition unique pour tout $\vec{u} \in E$.

Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$: $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0} \quad \vec{u} \in F_1 \quad \vec{0} \in F_2$

$\vec{u} = \vec{0} + \vec{u} \quad \vec{0} \in F_1 \quad \vec{u} \in F_2$

donc : $\vec{u} = \vec{0}$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

• Si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, supposons :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1,\ \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$$

Alors $\vec{u}_1 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{u}_2 \in F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Somme de sous-ev : exemple de condition d'unicité

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$G_1 = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G_2 = \{(0, z, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$G_1 \cap G_2 = \{(0, 0, 0)\}$$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^4$,

$$F_1 = \{(x, y, 0, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0, 0, z, t)\,;\, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^4$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 2x, x)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0, y, z)\,;\, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^3$

Existence d'un supplémentaire

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n.

Alors F admet au moins un supplémentaire G dans E, et

$$E = F \bigoplus G \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Soit $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p)$ une base de F $\quad p < n$.

Par le théorème de la base incomplète :
$\exists\, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$ tels que : $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$ soit une base de E.

$G = \text{Vect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{n-p})$, tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i \in F$ $\quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j \in G$, donc : $E = F + G$

Si $\vec{u} \in F \cap G \quad \vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j$:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j \vec{e}_j = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \forall i, j, \quad \alpha_i = \beta_j = 0 \quad \Rightarrow \quad F \cap G = \{\vec{0}\}$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration :

- Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G :
  $H \cap F = H \cap (F \cap G) = \{\vec{0}\}$ donc : $F + G = F \bigoplus H$
- $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$ $\quad$ donc :

  $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap H)$$

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle application linéaire de E dans F toute fonction $f : E \to F$ qui vérifie

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad f(\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v})$$

Notation : $f \in \mathcal{L}(E, F)$
Si $F = E$, on dit que f est un endomorphisme de E
Si $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme linéaire sur E

Remarque : Si f est une application linéaire, alors :

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$ (plus précisément : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$)
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad f(\alpha.\vec{u}) = \alpha.f(\vec{u})$

Exemples

- L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -y, y-x) \end{array} \right.$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

  En effet si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rl} & f\big(\alpha.(x,y)+\alpha'.(x',y')\big) \\ = & f\big((\alpha x+\alpha' x', \alpha y+\alpha' y')\big) \\ = & \big(2(\alpha x+\alpha' x')+3(\alpha y+\alpha' y'), -(\alpha y+\alpha' y'), (\alpha y+\alpha' y')-(\alpha x+\alpha' x')\big) \\ = & \alpha.(2x+3y, -y, y-x)+\alpha'.(2x'+3y', -y', y'-x') \\ = & \alpha.f(x,y)+\alpha'.f(x',y'). \end{array}$$

Exemples

- L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

  En effet si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} f\big(\alpha.P+\beta.Q\big) & = & \big(\alpha P+\beta Q\big)' \\ & = & \alpha.P'+\beta.Q' \\ & = & \alpha.f(P)+\beta.f(Q). \end{array}$$

- Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.
  L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} u_n \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur E.

Exercice : Parmi les applications ci-dessous, reconnaître les applications linéaires, les endomorphismes et les formes linéaires.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (3x, -x)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x - y + 1$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], f(P) = XP$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, f(P) = P(0)$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, f(P) = P'(1)$
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], f(P) = P(0).P(X)$
- $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$
- $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = u_3$

Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition. Soient E et F deux espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. Autrement dit, pour $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha.f + \beta.g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Preuve : Posons $h = \alpha.f + \beta.g$ et montrons que $h \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
h(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \alpha.f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) + \beta.g(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \\
&= \alpha\big(\lambda.f(\vec{u}) + \mu.f(\vec{v})\big) + \beta\big(\lambda.g(\vec{u}) + \mu.g(\vec{v})\big) \\
&= \alpha\lambda.f(\vec{u}) + \alpha\mu.f(\vec{v}) + \beta\lambda.g(\vec{u}) + \beta\mu.g(\vec{v}) \\
&= \lambda\big(\alpha.f(\vec{u}) + \beta.g(\vec{u})\big) + \mu\big(\alpha.f(\vec{v}) + \beta.g(\vec{v})\big) \\
&= \lambda.h(\vec{u}) + \mu.h(\vec{v}).
\end{aligned}$$

Composition des applications linéaires

Proposition. Soient E, F, G 3 espaces vectoriels.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Terminologie : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on dit aussi qu'elle est inversible et on appelle inverse de f. l'application réciproque f^{-1} (c'est l'inverse au sens de la loi de composition). Dans ce cas, on dit que f est un isomorphisme de E dans F, ou un automorphisme de E si $F = E$.

Exemples :

- $f(x,y) = (x-y, x+y)$ définit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, d'inverse $f^{-1}(x',y') = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{y'-x'}{2}\right)$.
- l'application définie par $f(P) = (P(0), P(1))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.

Image et image réciproque

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors l'image de A par f, définie par
$$f(A) = \{f(\vec{u})\}_{\vec{u} \in A}$$
est un sous-espace vectoriel de F
- Si B est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque de B par f, définie par
$$f^{-1}(B) = \{\vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) \in B\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Attention ! Ne pas confondre $f^{-1}(B)$ où B est un ensemble avec $f^{-1}(y)$ où y est un élement de l'ensemble d'arrivée de f. En particulier, $f^{-1}(B)$ est toujours définie, même si f n'est pas bijective.

Image et image réciproque

Preuve :

- Soit $\vec{u}', \vec{v}' \in f(A)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  Comme $\vec{u}' \in f(A)$, $\exists \vec{u} \in A, \vec{u}' = f(\vec{u})$.
  De même, $\exists \vec{v} \in A, \vec{v}' = f(\vec{v})$.
  On a donc $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \in A$ et
  $f(\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v}) = \alpha.\vec{u}' + \beta.\vec{v}'$
  donc $\alpha.\vec{u}' + \beta.\vec{v}' \in f(A)$.
- Soit $\vec{u}, \vec{v} \in f^{-1}(B)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  $\vec{u} \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(\vec{u}) \in B$.
  De même, $\vec{v} \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(\vec{v}) \in B$.
  On a alors $f(\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v}) \in B$ car B est un espace vectoriel
  donc $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \in f^{-1}(B)$.

Image et noyau d'une application linéaire

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle :

- image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{u})\}_{\vec{u} \in E}$
- noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

Proposition. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, et $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve : On applique la proposition précédente à $A = E$ et $B = \{\vec{0}\}$.

Exercice : Calculer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ pour chaque application linéaire définie ci-dessous :

- $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z,x,y) \end{cases}$
- $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, 2x-y) \end{cases}$
- $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$
- $f_4 : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \left(x \mapsto \frac{u(x)+u(-x)}{2}\right) \end{cases}$

  où E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Rappel : Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

Définition. Une application (quelconque) $f : A \to B$ est :

- injective si deux éléments distincts de A n'ont jamais la même image par f, c'est-à-dire

$$\forall a, a' \in A,\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

  autre caractérisation : tout élément de B a **au plus** un antécédent par f
- surjective si tout élément de B a au moins un antécédent par f, c'est-à-dire

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b$$

- bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de B a **exactement** un antécédent par f (la fonction qui à un élément de B fait correspondre son antécédent est f^{-1})

Exercice : Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z,x,y) \end{array} \right.$
- $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, 2x-y) \end{array} \right.$
- $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$
- $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \left(x \longmapsto \frac{u(x)+u(-x)}{2}\right) \end{array} \right.$
  où E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cas particulier d'une application linéaire

Proposition. Une application linéaire $f : E \to F$ est :

- injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$
- surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$

Preuve :

- Si f est injective, alors $\vec{0}$ au au plus un antécédent par f, or comme $f(\vec{0}) = \vec{0}$, on a $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$.
- Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, alors

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) = f(\vec{u}') &\Rightarrow f(\vec{u} - \vec{u}') = \vec{0} \quad \textit{(linéarité de f)} \\ &\Rightarrow \vec{u} - \vec{u}' \in \operatorname{Ker} f \quad \textit{(définition de } \operatorname{Ker} f\textit{)} \\ &\Rightarrow \vec{u} = \vec{u}' \quad \textit{(hypothèse } \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}\textit{)} \end{aligned}$$

  donc f est injective.
- Pour la surjectivité, cela résulte directement de la définition $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Image d'une famille de vecteurs

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de vecteurs de E. On note $f(\mathcal{F}) = \big(f(\vec{e}_i)\big)_{1\leq i\leq n}$. Alors :

- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$;
- Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée ;
- Si $\mathcal{F}$ est libre et f est injective, alors $f(\mathcal{F})$ est libre ;

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

- f est injective ssi $f(\mathcal{B})$ est libre ;
- f est surjective ssi $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F ;
- f est bijective ssi $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Théorème du rang

Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f la quantité

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Théorème du rang (preuve)

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$, que l'on complète par $\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n$ en une base de E.

• Pour tout $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $\vec{v} = f(\vec{u})$ avec $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$,

donc $\vec{v} = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i f(\vec{e}_i)$ donc la famille $\mathcal{F} = \Big(f(\vec{e}_i)\Big)_{p+1 \le i \le n}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.

• La famille $\mathcal{F}$ est aussi libre, car si $\sum_{i=p+1}^{n} \beta_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, alors $\sum_{i=p+1}^{n} \beta_i \vec{e}_i \in \operatorname{Ker} f$ et on peut donc écrire $\sum_{i=p+1}^{n} \beta_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{e}_j$, ce qui implique que tous les β_i sont nuls.

Théorème du rang (fin de la preuve)

On a montré :

- que $\big(\vec{e}_i\big)_{1 \le i \le p}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = p$;
- que $\big(f(\vec{e}_i)\big)_{p+1 \le i \le n}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) = n - p$

Conclusion : $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = n = \dim(E)$.

Exercice : Montrer que l'application définie par $f(a,b,c) = aX^2 + b(X-1)^2 + cX(X-1)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Espaces vectoriels et applications linéaires Théorème du rang