Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MI

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 16 mars 2011

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les 4 parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (7 points)

a) Dans l'algorithme de Viterbi, lorsque plusieurs chemins convergent vers le même noeud du treillis, on ne conserve que celui de métrique cumulée la plus faible. Pourquoi ?

b) Si un codage de source est à longueur variable, comment peut-on différencier les symboles successifs dans le flux binaire ?

c) Quelles sont les deux étapes de la numérisation d'un son ? Laquelle peut être sans perte d'information et à quelle condition ?

d) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?

e) Soit un codeur par sous-bande (du type MPEG-1). Pour la séquence de signal audio dont le spectre et le seuil de masquage sont représentés sur la figure 1, expliquer pourquoi la bande 7 nécessite moins de bits de codage que la bande 6.

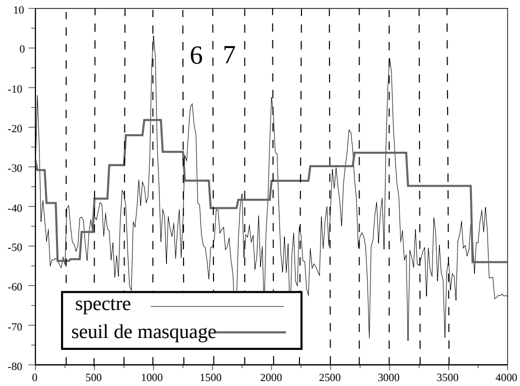

FIG. 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

2 Exercices

2.1 Détection de symboles (4 points)

Les symboles utilisés dans les transmissions par modulation de porteuse sinusoïdale peuvent être représentés dans un plan par une constellation caractéristique de la modulation. Les points de la figure 2 correspondent aux symboles d'une modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature. Les triangles en pointillés sont équilateraux.

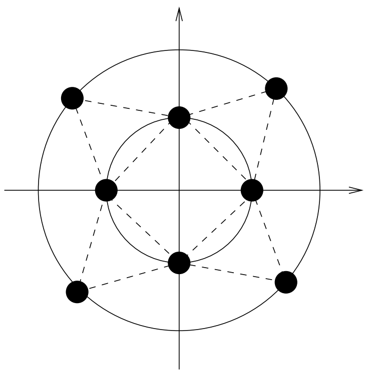

FIG. 2 – Constellation d'une MAQ-8.

Le bruit de la liaison provoque un déplacement aléatoire du point reçu par rapport à la position du symbole émis. La figure 3 représente les points reçus lors de l'émission de quelques centaines de symboles. Comme le symbole détecté est celui le plus proche du point reçu, une erreur survient dès que le déplacement est trop important.

On supppose que lors de l'émission d'un symbole, les seuls risques d'erreurs sont liés à une confusion avec un de ses plus proches voisins (des déplacements plus importants sont trop peu probables). Pour l'émission d'un symbole S_i, la probabilité de confusion avec un de ses plus proches voisins S_j est notée :

$$\mathrm{P}(R_j|S_i) = p$$

où R_j désigne l'événement "détection de S_j en réception".

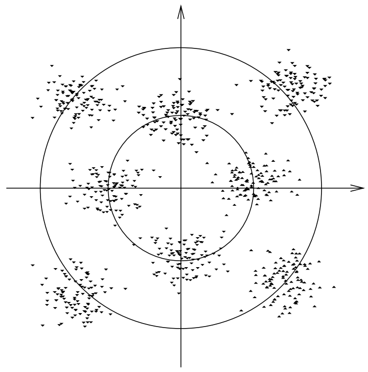

FIG. 3 – Constellation d'une MAQ-8 en réception d'une liaison bruitée.

a) Calculer $\mathrm{P}(\overline{R_i}|S_i)$ pour chaque symbole de la constellation, où $\overline{R_i}$ désigne l'événement "détection d'un symbole différent de S_i en réception".

b) Définir de manière ensembliste l'événement erreur. Calculer la probabilité d'erreur P_e, sous l'hypothèse que les 8 symboles sont équiprobables.

NB : dans ces deux questions, justifiez bien les étapes de vos calculs.

2.2 Codage de canal : codes en bloc (7 points)

Soit un code en bloc linéaire $\mathcal{C}(6,3)$ défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sa matrice de contrôle est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Combien y a-t-il de syndrômes possibles ?

b) Combien y a-t-il de vecteurs d'erreur ayant :
- au plus 1 bit à 1 ?
- au plus 2 bits à 1 ?

c) Le calcul du syndrôme permet non seulement de détecter les erreurs en trouvant un syndrôme non nul, mais aussi de localiser et donc corriger les erreurs, si l'on peut associer un syndrôme à chaque vecteur erreur corrigible. Le pouvoir de correction est donc étroitement lié au nombre de syndrômes. Dans le cas présent, quel est le pouvoir de correction du code ?

d) Construire l'ensemble des mots de code.

e) Calculer la distance minimale de ce code et vérifiez le résultat de la question c.

2.3 Codage de source (3 points)

Soit une source ternaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(x_1) = \mathrm{P}(x_2) = p$ et $\mathrm{P}(x_3) = 1 - 2p$, avec $p < 1/3$. Cette source a un débit **d'information** donné, indépendant du codage, D_I (en nombre de bits par seconde). Ce débit peut s'exprimer : $D_I = H(X)/\overline{T}$, où $H(X)$ désigne l'entropie de X et $\overline{T}$ la durée moyenne d'émission d'un symbole.

a) Construire un code de Huffman pour X.

b) Comparer le débit binaire **de transmission** D (en nombre d'éléments binaires par seconde) nécessaire avec ce codage au débit D' que nécessiterait un code de longueur fixe, notamment pour p faible.

3 Annexes

Codes correcteurs

Pour un code en bloc linéaire de distance minimale d_{min}, le pouvoir de détection vaut $d_{\text{min}} - 1$ et le pouvoir de correction $\lfloor \frac{d_{\text{min}}-1}{2} \rfloor$.

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Entropie

L'entropie d'une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$, est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

Quantification

Pour une qantification sur k éléments binaires,

$$RSB_{\text{dB}} = 6k + 4,76 - f_c$$

avec

$$f_c \simeq \begin{cases} 13 \text{ dB} & \text{pour la musique multi-instruments} \\ 18 \text{ dB} & \text{pour la parole} \end{cases}$$

Codage MPEG-1

Contraintes pour fixer n_i, le nombre de bit par échantillon de la bande de fréquences i :

1. $$\forall\, i, \quad n_i > \frac{P_{x_i}^{dB} - M_i^{dB}}{6 - K}$$

2. $$\sum_{i=1}^{32} n_i \leq N = \text{nombre max de bits par trame}$$

avec $P_{x_i}^{dB}$ la puissance de x dans la bande i et M_i^{dB} le minimum du seuil de masquage sur la bande i (en dB).