

# **Отчёт по лабораторной работе №5**

**Работа с линейным пространством**

Сырцов Александр Юрьевич

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>7</b>
3.1	Подгонка полиномиальной кривой . . . . .	7
3.2	Матричные преобразования . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Выводы</b>	<b>20</b>

## List of Tables

# List of Figures

3.1	Матрица $D$ и векторы $x$ $y$ . . . . .	8
3.2	График данных . . . . .	9
3.3	Матрица $A$ . . . . .	10
3.4	Действия для дальнейшего нахождения $a, b, c$ . . . . .	11
3.5	Решение МНК . . . . .	12
3.6	График получившейся параболы . . . . .	13
3.7	Подгонка значений через встроенные функции . . . . .	14
3.8	График результатов подгонки встроенными функциями . . . . .	14
3.9	Диаграмма домика . . . . .	15
3.10	получаем в радианах угол $theta1$ , подставляем в матрицу вращения $R1$ и в $RD1$ записываем произведение матрицы вращения на исходную . . . . .	16
3.11	Значения $x, y$ для дальнейшего построения диаграмм . . . . .	16
3.12	Поворачиваем вторую матрицу на 225 градусов . . . . .	17
3.13	Диаграмма с домиками . . . . .	17
3.14	Диаграмма с домиками с легендой сбоку по центру . . . . .	18
3.15	Диаграмма с отзеркаленным домиком . . . . .	19
3.16	Диаграмма с увеличенным домиком . . . . .	19

# 1 Цель работы

Научится работе с подгонкой значений оценкой методом наименьших квадратов (МНК), работе с матричными преобразованиями.

## 2 Задание

- Сделать отчёт по лабораторной работе в формате Markdown.
- В качестве ответа предоставить отчёты в 3 форматах: pdf, docx и md (в архиве, поскольку он должен содержать скриншоты, Makefile и т.д.)

## **3 Выполнение лабораторной работы**

### **3.1 Подгонка полиномиальной кривой**

1. Нужно найти параболу по методу наименьших квадратов для набора точек, заданных матрицей  $D$ , где первый столбец отвечает за вектор  $x$ , а второй за вектор  $y$ , поэтому первым шагом построил матрицу и извлёк векторы (рис. -fig. 3.1).

```
octave-gui
octave:1> D = [ 1 1 ; 2 2 ; 3 5 ; 4 4 ; 5 2 ; 6 -3]
D =

     1     1
     2     2
     3     5
     4     4
     5     2
     6    -3

octave:2> xdata = D(:,1)
xdata =

     1
     2
     3
     4
     5
     6

octave:3> ydata = D(:,2)
ydata =

     1
     2
     5
     4
     2
    -3
```

Figure 3.1: Матрица  $D$  и векторы  $x$   $y$

2. Построил точки на графике (рис. -fig. 3.2).



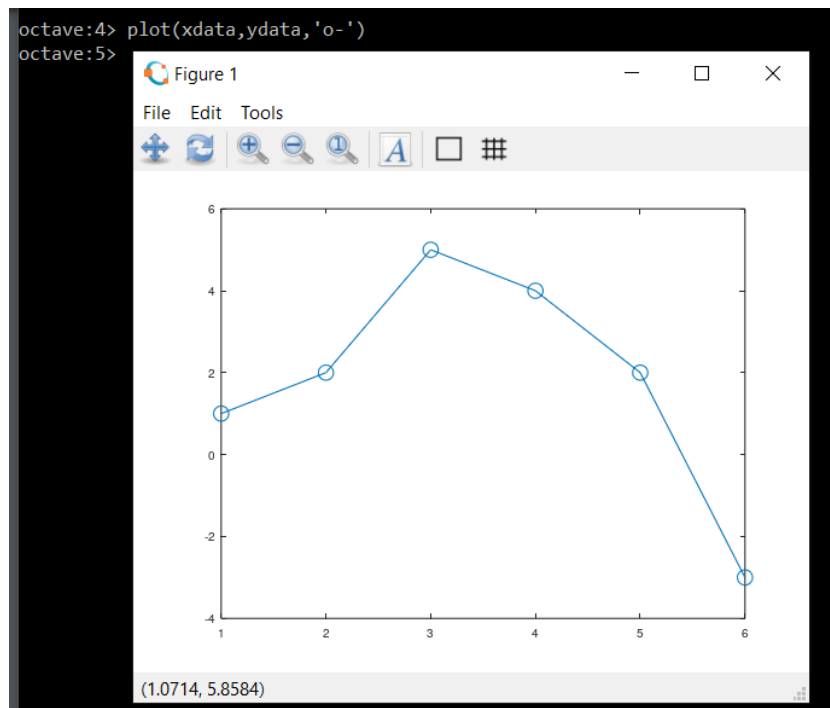


Figure 3.2: График данных

3. Далее работаю с матричным квадратным уравнением и строю матрицу системы, содержащей значения  $x$ , подставленные в квадратное уравнение как  $x^2$ ,  $x^1$  и  $x^0$  при коэффициентах  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Матрица системы называется  $A$ . Сначала я создал матрицу из единиц в 6 строк и 3 столбца функцией `ones()` и посто подставил нужные значения в первый и второй столбец (рис. -fig. 3.3).

```
octave:5> A = ones(6,3)
```

```
A =
```

1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

```
octave:6> A(:,1) = xdata .^ 2
```

```
A =
```

1	1	1
4	1	1
9	1	1
16	1	1
25	1	1
36	1	1

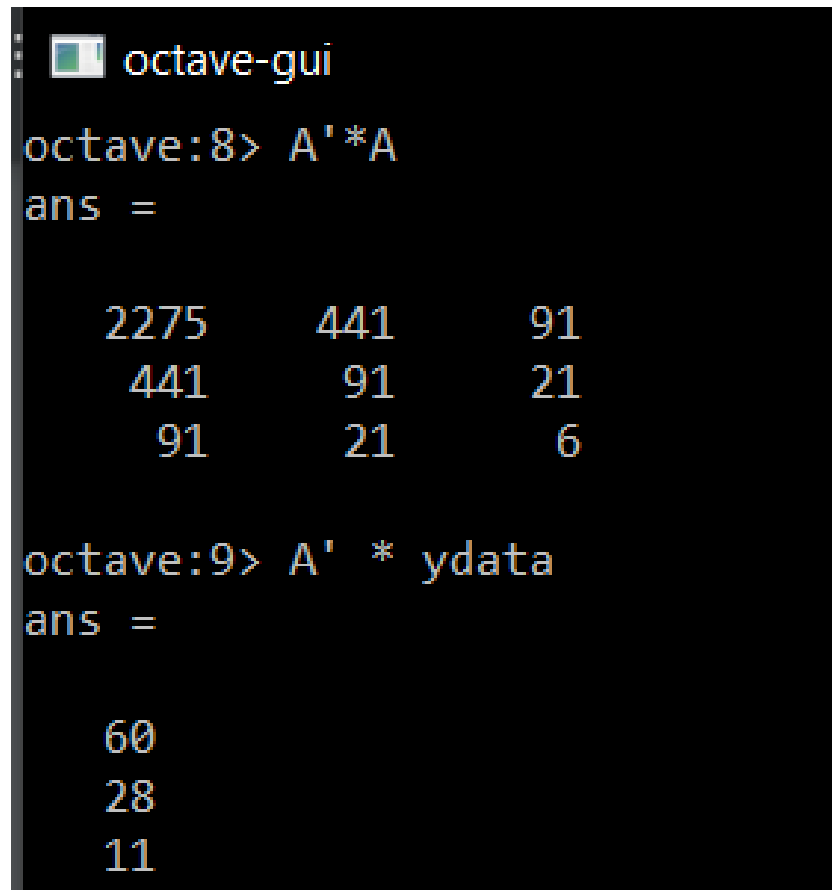
```
octave:7> A(:,2) = xdata_
```

```
A =
```

1	1	1
4	2	1
9	3	1
16	4	1
25	5	1
36	6	1

Figure 3.3: Матрица  $A$

4. Решение МНК получается из уравнения, где в левой части действие на строке 8, а справа действие строке 9 (рис. -fig. 3.4). По сути просто домножаем матричное квадратное уравнение на транспонированную матрицу системы A. Здесь мы просто смотрим на результат действий.



```
octave-gui
octave:8> A'*A
ans =

    2275    441    91
    441     91    21
     91     21     6

octave:9> A' * ydata
ans =

    60
    28
    11
```

Figure 3.4: Действия для дальнейшего нахождения  $a, b, c$

5. Теперь я создаю дополненную матрицу B, записывая туда результаты предыдущих действий, чтобы, применив метод Гаусса через функцию `rref()`, найти окончательное решение. Полученную матрицу с решением я записываю в новую матрицу B\_res, а уже из её четвёртого столбца с решениями беру все 3 значения в отдельные переменные a1, a2, a3 (они отвечают за коэффициенты a,b,c) (рис. -fig. 3.5).

```

octave:10> B = A' * A;
octave:11> B(:,4) = A' * ydata;
octave:12> B_res = rref (B)
B_res =

    1.0000    0    0 -0.8929
         0    1.0000    0  5.6500
         0    0    1.0000 -4.4000

octave:13> a1=B_res(1,4)
a1 = -0.8929
octave:14> a2=B_res(2,4)
a2 = 5.6500
octave:15> a3=B_res(3,4)
a3 = -4.4000
octave:16>

```

Figure 3.5: Решение МНК

6. Строю соответствующий график для демонстрации подгонки значений через нашу оценку значений МНК (рис. -fig. 3.6).

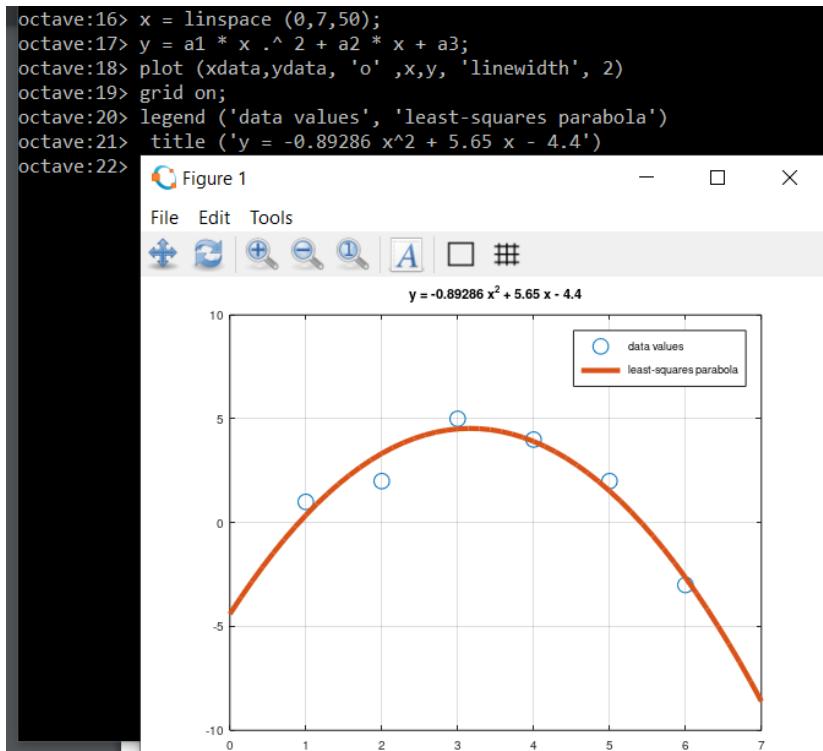


Figure 3.6: График получившейся параболы

- После всех шагов с поиском значений реализуем эквивалентный способ через встроенную функцию для подгонки значений полинома `polyfit()` и функцию `polyval()` для получения значения полинома  $P$  в точках, задаваемых вектором-строкой  $x$  (рис. -fig. 3.7).

```

octave-gui

octave:22> P = polyfit (xdata, ydata, 2)
P =

    -0.8929    5.6500   -4.4000

octave:23> y = polyval (P,xdata)
y =

    0.3571
    3.3286
    4.5143
    3.9143
    1.5286
   -2.6429

```

Figure 3.7: Подгонка значений через встроенные функции

8. Построил график, аналогичный прошлому (рис. -fig. 3.8).

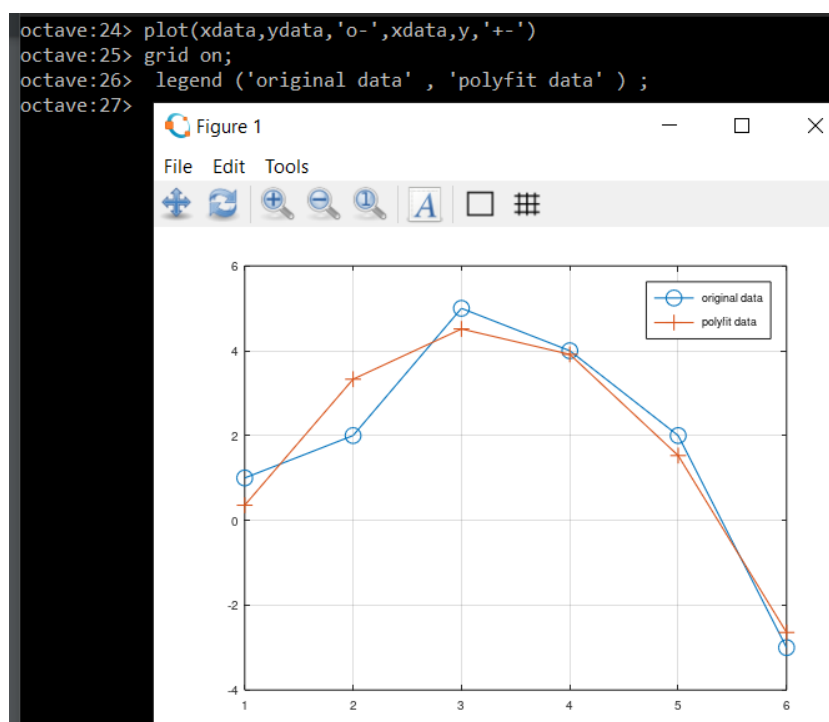


Figure 3.8: График результатов подгонки встроенными функциями

## 3.2 Матричные преобразования

9. Для работы с примитивным изображением домика задал матрицу всех его вершин D. Домик представляет из себя конечный граф. Из матрицы вынул значения x,y и изобразил граф (рис. -fig. 3.9).

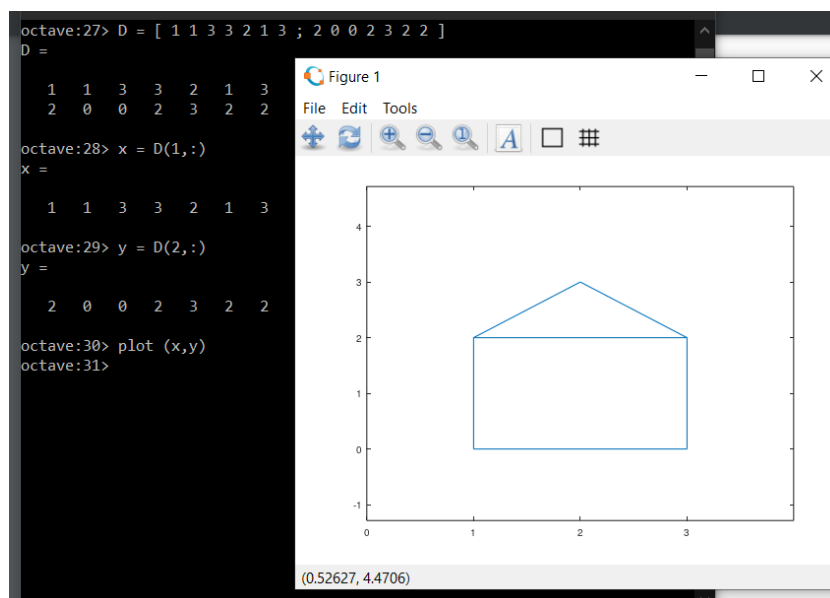


Figure 3.9: Диаграмма домика

10. Для вращения объекта, заданного матрицей, необходимо домножить исходную на матрицу вращения. Алгоритм простой: переводим нужный нам угол в радианы, подставляем в матрицу вращения и домножаем слева на исходную матрицу. Сначала поворачиваю матрицу на 90 градусов (рис. -fig. 3.10).

```

octave:31> theta1 = 90*pi/180
theta1 = 1.5708
octave:32> R1 = [cos(theta1) -sin(theta1); sin(theta1) cos(theta1)]
R1 =

    6.1230e-17   -1.0000e+00
    1.0000e+00    6.1230e-17

octave:33> RD1 = R1*D
RD1 =

Columns 1 through 5:

   -2.0000e+00    6.1230e-17    1.8369e-16   -2.0000e+00   -3.0000e+00
    1.0000e+00    1.0000e+00    3.0000e+00    3.0000e+00    2.0000e+00

Columns 6 and 7:

   -2.0000e+00   -2.0000e+00
    1.0000e+00    3.0000e+00

```

Figure 3.10: получаем в радианах угол  $\theta_1$ , подставляем в матрицу вращения  $R1$  и в  $RD1$  записываем произведение матрицы вращения на исходную

11. Из первой и второй строчки выделяем значения  $x$ ,  $y$  и записываем в переменные  $x1$ ,  $y1$  (рис. -fig. 3.11).

```

octave:34> x1 = RD1(1,:)
x1 =

   -2.0000e+00    6.1230e-17    1.8369e-16   -2.0000e+00   -3.0000e+00   -2.0000e+00   -2.0000e+00

octave:35> y1 = RD1(2,:)
y1 =

    1.0000    1.0000    3.0000    3.0000    2.0000    1.0000    3.0000

octave:36>

```

Figure 3.11: Значения  $x$ ,  $y$  для дальнейшего построения диаграмм

12. Повторяю шаги 10, 11 для поворота на 225 градусов. Значения  $x$ ,  $y$  и записываю в переменные  $x2$ ,  $y2$  (рис. -fig. 3.12).



```

octave:36> theta2 = 225*pi/180
theta2 = 3.9270
octave:37> R2 = [cos(theta2) -sin(theta2); sin(theta2) cos(theta2)]
R2 =

    -0.7071    0.7071
    -0.7071   -0.7071

octave:38> RD2 = R2*D
RD2 =

    0.7071   -0.7071   -2.1213   -0.7071    0.7071    0.7071   -0.7071
   -2.1213   -0.7071   -2.1213   -3.5355   -3.5355   -2.1213   -3.5355

octave:39> x2 = RD2(1,:)
x2 =

    0.7071   -0.7071   -2.1213   -0.7071    0.7071    0.7071   -0.7071

octave:40> y2 = RD2(2,:)
y2 =

   -2.1213   -0.7071   -2.1213   -3.5355   -3.5355   -2.1213   -3.5355

```

Figure 3.12: Поворачиваем вторую матрицу на 225 градусов

13. Изображаем все домики в трёх цветах (рис. -fig. 3.13).

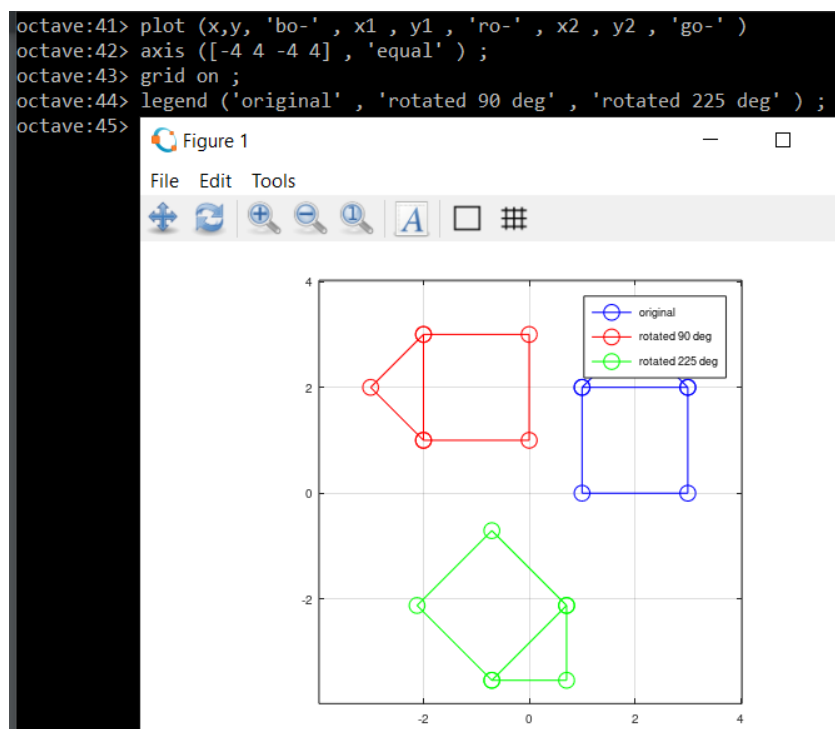


Figure 3.13: Диаграмма с домиками

14. Немного отходя от методчки изменяю отображение легенды так, чтобы она не перекрывала диаграмму (рис. -fig. 3.14).

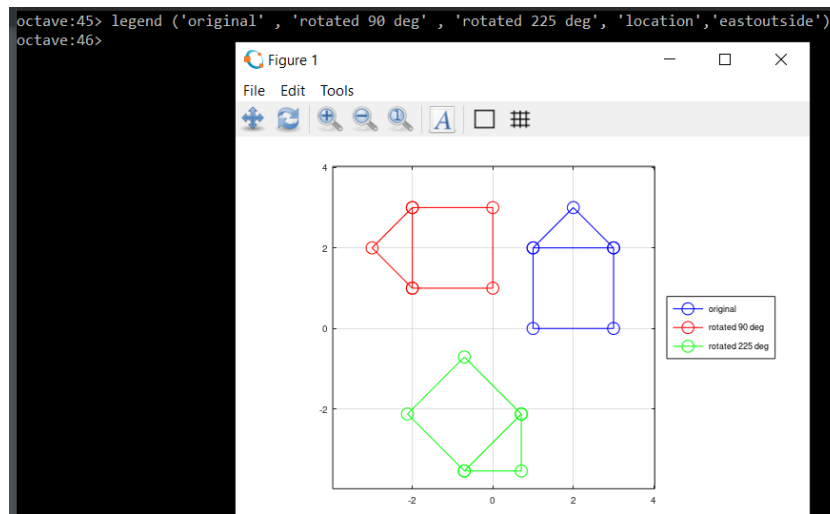


Figure 3.14: Диаграмма с домиками с легендой сбоку по центру

15. Аналогично вращению можно задать отражение относительно некоторой прямой. В методичке сразу задана матрица отражения  $R$  без пояснений по её получению – по отражению видно, что прямая идёт под углом 45 градусов, следовательно синус от удвоенного аргумента (то есть угла 90 градусов) в матрице отражения дал ответ 1, а косинус – 0. Зная это, провожу домножение исходной матрицы на матрицу отражения и строю диаграмму (диаграмма одна, так как изменение масштаба командой `axis` не требует особого внимания) (рис. -fig. 3.15).

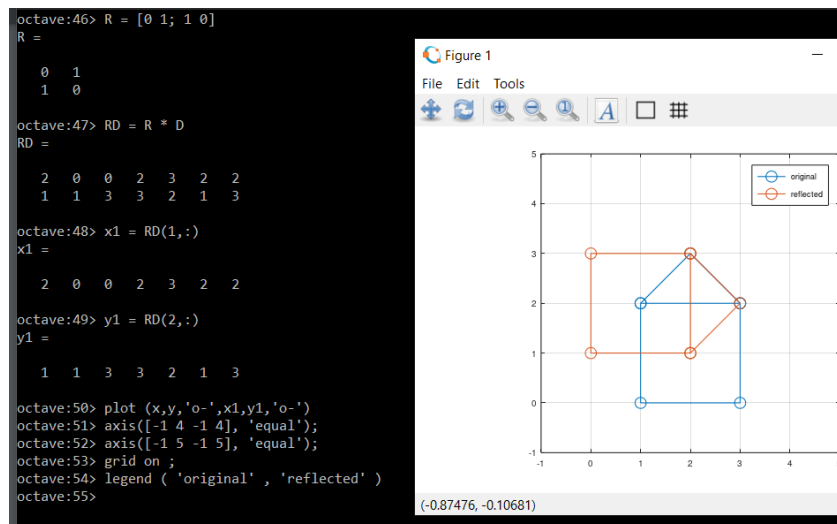


Figure 3.15: Диаграмма с отзеркаленным домиком

16. Самым последним шагом проводим дилатацию: увеличим домик в 2 раза с помощью домножения на матрицу  $T$ , состоящую из двух базисных векторов, растягивающих линейное пространство. А далее выводим результат на экран в виде диаграммы (рис. -fig. 3.16).

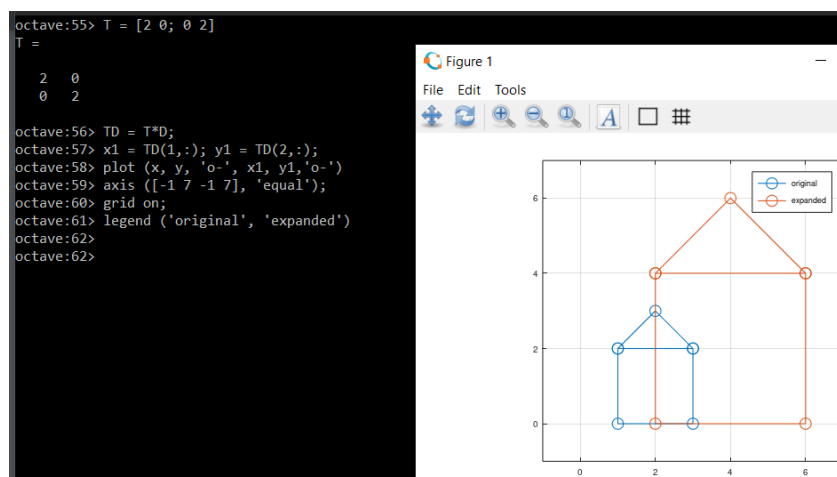


Figure 3.16: Диаграмма с увеличенным домиком

## 4 Выводы

Я освоил матричные преобразования и способы подгонки значений методом наименьших квадратов в языке Octave.