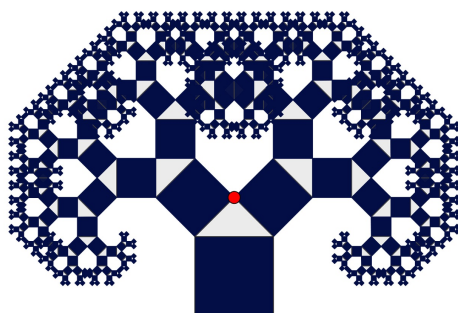


# Explorando la geometría fractal: Un análisis de sus métodos de formación, propiedades y utilidades

**Autores:** Alejandro Campo Herbés y Álvaro Vázquez Gómez-Reino

**Tutor:** Dr. Jerónimo Rodríguez García

**Coordinadora:** Dña. María Ermitas Pintos Testa  
IES Rosalía de Castro, Santiago de Compostela



**Instituto  
Rosalía  
de Castro**

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamento teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Sistemas Lindenmayer . . . . .	2
2.2. Sistemas de funciones iteradas . . . . .	3
2.3. Sistemas dinámicos discretos . . . . .	4
2.3.1. Puntos fijos . . . . .	4
2.3.2. Estabilidad de un punto fijo . . . . .	4
2.3.3. Ciclos . . . . .	5
2.3.4. Aplicándolo a los fractales: el conjunto de Mandelbrot . . . . .	5
<b>3. Aplicaciones prácticas</b>	<b>6</b>
3.1. Sistemas Lindenmayer: La isla de Koch . . . . .	6
3.1.1. Cálculo del perímetro . . . . .	6
3.1.2. Cálculo del área . . . . .	7
3.2. Sistemas de funciones iteradas: Texto fractal . . . . .	9
3.2.1. Contracción al tamaño del píxel . . . . .	9
3.2.2. Traslación del píxel . . . . .	9
3.2.3. Definiendo el IFS . . . . .	10
3.3. Sistemas dinámicos discretos: Modelo de población bacteriana . . . . .	11
3.3.1. Cambios de comportamiento del sistema: Diagrama de bifurcación . . . .	12
3.3.2. Aparición de la estructura fractal: Correspondencia con Mandelbrot . . .	13
<b>4. Conclusiones</b>	<b>15</b>
<b>5. Agradecimientos</b>	<b>15</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>16</b>

---

## Resumen

El presente documento tiene como propósito explorar tres métodos esenciales para la formación de estructuras fractales: los sistemas-L, los Sistemas de Funciones Iteradas (IFS, por sus siglas en inglés) y los sistemas dinámicos discretos. Para ello, se expondrán dos programas desarrollados por los autores, uno está diseñado para producir fractales mediante instrucciones simples, facilitando su construcción visual y la comprensión de su lógica iterativa, y otro para generar fractales en forma de cadenas textuales, junto con un caso biológico del que emerge una estructura fractal de manera poco aparente: el conjunto de Mandelbröt. Todo esto llevará a la exploración de las múltiples características matemáticas de los fractales, como la posibilidad de tener un perímetro infinito o ajustarse a un patrón arbitrario, lo que motivará una discusión conclusiva sobre las consecuencias de estas propiedades en las estructuras naturales y artificiales que nos rodean. De esta manera se pondrá de manifiesto que, incluso si aparentemente abstractos, los fractales muestran una gran variedad de utilidades en campos como la medicina, la ingeniería o la metereología.

---

## Abstract

The purpose of this paper is to explore three essential methods for the formation of fractal structures: L-systems, Iterated Function Systems (IFS) and discrete dynamical systems. To this end, two programs developed by the authors will be presented, one designed to produce fractals by means of simple instructions, facilitating their visual construction and the understanding of their iterative logic, and the other to generate fractals in the form of textual chains, together with a biological case from which a fractal structure emerges in a not very apparent way: the Mandelbröt set. All this will lead to the exploration of the multiple mathematical characteristics of fractals, such as the possibility of having an infinite perimeter or conforming to an arbitrary pattern, which will motivate a conclusive discussion on the consequences of these properties in the natural and artificial structures that surround us. In this way it will become clear that, even if seemingly abstract, fractals show a great variety of utilities in fields such as medicine, engineering or meteorology.

---

# 1. Introducción

Aunque no existe una definición formal para el concepto de fractal, Mandelbrot (1997) califica a este grupo de estructuras por su propiedad escalante o de autosimilitud, es decir, sus características estructurales son idénticas en todas las escalas. Muchas veces, los fractales son también descritos como “irregulares” o “fragmentados” (Figura 1), formas descartadas del foco de estudio de la geometría euclidiana a favor de otras más regulares. La naturaleza, aún así, no puede ser descrita por estas formas elementales: “Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo.” (Mandelbrot, 1997), de ahí que la geometría fractal sea un área de máxima utilidad para expresar las estructuras del mundo que nos rodea.

Ante esta relación tan estrecha entre los fractales y las muchas estructuras de nuestro mundo, el presente documento servirá como un estudio para explorar tres de sus métodos de formación: *sistemas Lindenmayer*, *sistemas de funciones iteradas* y *sistemas dinámicos discretos*. Se presentará un fundamento teórico para cada método y se ejemplificará su uso en un conjunto de demostraciones prácticas. El principal objetivo no será mostrar únicamente los detalles técnicos, sino también analizar las propiedades estudiadas en las tres prácticas para encontrar las consecuencias de estas características en la propia naturaleza, la ingeniería y, por extensión, la vida cotidiana, análisis que se llevará a cabo a forma de conclusión del proyecto.

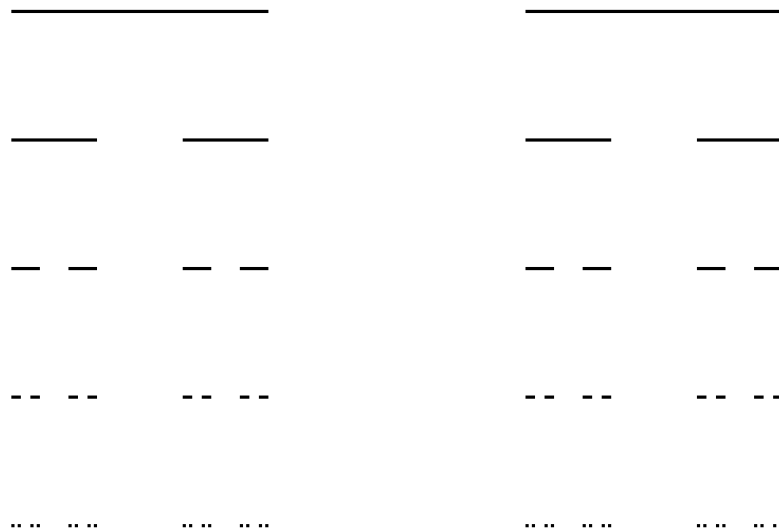


Figura 1: Cuatro iteraciones de la construcción que conduce al polvo de Cantor, un claro ejemplo del carácter inconexo de las estructuras fractales. Elaboración propia.

## 2. Fundamento teórico

### 2.1. Sistemas Lindenmayer

Los sistemas-L, propuestos por Lindenmayer (1975), nacen de la dificultad de modelizar la formación de estructuras orgánicas a nivel molecular. Gracias a la supercomputación, actualmente es posible simular la formación de estructuras, como la membrana celular, a partir de sus constituyentes básicos (Cabezón et al., 2023), pero en la década de los 70 esto no solo era visto como imposible, sino como impráctico: sin las técnicas de análisis actuales, el modelo sería tan intrincado que sería imposible llegar a conclusiones de carácter biológico con él.

Debido a esto, Lindenmayer decide inspirarse en la teoría genética para instaurar a la célula (y no a la molécula) como la unidad básica de crecimiento, lo que muestra claras ventajas, pues las células de un mismo organismo comparten sus instrucciones de reproducción, estando este “programa” codificado en su ADN. La cuestión, ahora, será encontrar las operaciones por las que se rigen estos autómatas biológicos.

Matemáticamente, Lindenmayer define la construcción de organismos pluricelulares a base de cadenas de símbolos, cada uno de ellos representando una célula, y un conjunto de reglas de sustitución que actúan sobre la cadena. Este conjunto de símbolos, normas y cadenas se puede formalizar en las denominadas gramáticas. Para el tipo de sistema-L más simple, este se define como («L-systems - Encyclopedia of Mathematics», 2023):

$$S = (\Sigma, P, \omega)$$

Donde:

- $\Sigma$  es un conjunto de símbolos, llamado alfabeto. El conjunto de cadenas que se pueden formar con este alfabeto es  $\Sigma^*$  (cadena vacía incluida).
- $P$  es un conjunto de normas de la forma  $a \rightarrow x, a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$ . Todas las cadenas bien formadas que procedan de efectuar estas normas pertenecerán al lenguaje de la gramática,  $L(S)$ , tal que  $L(S) \subset \Sigma^*$ .
- $\omega$  es una cadena inicial de elementos del alfabeto, llamado axioma.

Tomemos por ejemplo el siguiente sistema-L:

$$S = (\{F+, -\}, \{F \rightarrow F + F - -F + F\}, \{F\}) \quad (1)$$

Donde a cada elemento del alfabeto le podemos asignar una operación geométrica:

- $F$  es un desplazamiento rectilíneo de una unidad de distancia.

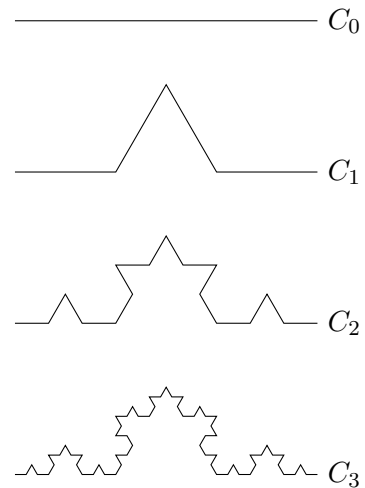


Figura 2: Axioma e iteraciones  $C_1 \dots C_3$  de la curva de Koch. Elaboración propia.

- + es un giro de  $\frac{\pi}{3}$  radianes.
- - es un giro de  $-\frac{\pi}{3}$  radianes.

Por lo tanto, al efectuar la norma sobre el axioma  $C_0$ :

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{F\} \\
C_1 &= \{F + F - -F + F\} \\
C_2 &= \{F + F - -F + F + F + F - -F + F - -F + F - -F + F + F + F - -F + F\} \\
&\dots
\end{aligned}$$

donde  $C_0, C_1, C_2 \dots C_n \in L(S)$ . Tras repetir infinitas veces las normas de sustitución, la cadena representará una estructura fractal llamada Curva de Koch. En la Figura 2 se puede apreciar como, al aplicar recursivamente una misma regla de sustitución, la cadena resultante mostrará también una estructura recursiva con patrones que se conservan a distintas escalas; esto es, se formará una estructura autosimilar, principal característica de los fractales.

## 2.2. Sistemas de funciones iteradas

Mientras que los sistemas-L tienen su origen en el estudio de estructuras biológicas, los sistemas de funciones iteradas (IFS por sus siglas en inglés), propuestos por Hutchinson (1981), proceden de sus incipientes intentos por crear un marco general sobre el que describir matemáticamente las estructuras fractales que había propuesto Mandelbrot. Su idea procede de observar la autosimilitud de los fractales, los cuales parecen estar compuestos por partes similares al todo. Cada iteración de la curva de Koch, por ejemplo, se forma a partir de cuatro copias de menor tamaño de la iteración anterior. Esto se puede expresar matemáticamente mediante las denominadas contracciones, transformaciones afines (rotaciones, escalados y traslaciones) que actúan sobre espacios métricos<sup>1</sup> y disminuyen la distancia entre todos sus elementos, haciéndolos más pequeños. Formalmente, la función  $S$  es una contracción si:

$$\exists \epsilon \in [0, 1) : d(S(x), S(y)) \leq \epsilon d(x, y)$$

siendo  $d(x, y)$  la distancia entre dos puntos. A un conjunto finito cuyos elementos son contracciones  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2 \dots S_n\}$  se le llama sistema de funciones iteradas, pues al aplicarlas de manera reiterada sobre un subconjunto arbitrario de un espacio métrico siempre se llegará a una estructura característica, a veces fractal. De esta forma, el fractal resultante se llama el *atractor* del sistema. Sea  $\Omega^*$  el fractal atractor del sistema  $\mathcal{S}$ , este cumple que es invariante ante las contracciones que lo formaron, pues es el resultado final al que tienden. Formalmente:

$$\Omega^* = \bigcup_{i=1}^n S_i(\Omega^*)$$

Se presenta un ejemplo en la siguiente figura, donde un sistema de 16 contracciones genera un fractal con forma de “A”. Las funciones fueron generadas mediante un software creado por los autores, que puede producir un sistema para una cadena de texto dada.

---

<sup>1</sup>Un espacio métrico es un conjunto de puntos a los que se les ha dado una noción de distancia. El plano euclídeo, por ejemplo, es un espacio métrico.

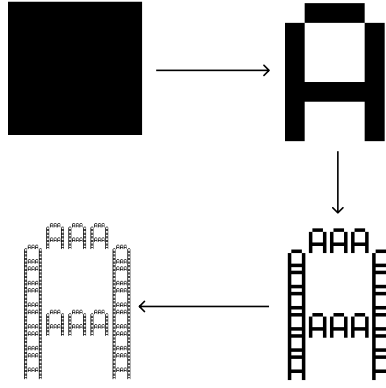


Figura 3: Conjunto inicial y tres primeras iteraciones de un sistema de 16 contracciones con un atractor en forma de “A”. Imagen creada mediante software propio, accesible en <https://github.com/AlexTatis/stembach>.

### 2.3. Sistemas dinámicos discretos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos por los cuales se puede modelizar el valor de una magnitud  $X$  a lo largo del tiempo  $t$ . Los sistemas dinámicos discretos, específicamente, tratan al tiempo no como continuo, sino como un conjunto de puntos separados (primer año, segundo año...). El cambio de  $X$  viene dado por una norma recursiva de la forma (Sayama, 2018):

$$X_n = F(X_{n-1}, t) \quad (2)$$

por lo que cada valor de  $X$  depende de su estado anterior y del tiempo transcurrido. El análisis de los sistemas dinámicos discretos se puede simplificar a la búsqueda de tres características principales: puntos fijos, ciclos y estabilidad.

#### 2.3.1. Puntos fijos

Comenzando por los puntos fijos,  $x^*$  es un punto fijo si:

$$F(x^*) = x^* \quad (3)$$

Es decir, son valores de  $X$  que se mantienen constantes ante las funciones recursivas del sistema.

#### 2.3.2. Estabilidad de un punto fijo

Un punto fijo será estable si los demás puntos de su entorno se ven atraídos por él. Cuando los puntos del entorno se vean repelidos, el punto fijo será inestable. De esta manera, sea  $x_n$  un valor arbitrariamente próximo a  $x^*$ , el punto fijo será atractor si:

$$|x_{k+1} - x^*| < |x_k - x^*| \quad (4)$$

Usando las definiciones (2) y (3):

$$|F(x_k) - F(x^*)| < |x_k - x^*| \quad (5)$$

Suponiendo a  $F$  como infinitamente derivable a lo largo de su dominio, se puede utilizar el *teorema del punto medio de Lagrange* para desarrollar la parte izquierda:

$$|F(x_k) - F(x^*)| = |F'(p)| |x_k - x^*| \quad (6)$$

Por tanto:

$$|F'(p)| |x_k - x^*| < |x_k - x^*| \Rightarrow |F'(p)| < 1 \quad (7)$$

Debido a que  $F$  es derivable y tiene un buen comportamiento, el hecho de que la condición (7) se deba cumplir para un  $p$  arbitrariamente próximo a  $x^*$  obliga a que también se cumpla en  $x^*$ , por lo que podemos concluir con la siguiente condición para un punto fijo estable:

$$|F'(x^*)| \leq 1 \quad (8)$$

Por tanto, para un punto fijo repulsor o inestable:

$$|F'(x^*)| \geq 1 \quad (9)$$

### 2.3.3. Ciclos

Los ciclos son conjuntos de valores de  $x$  que se repiten de manera periódica. Se dice que un ciclo es de período  $p$  cuando está compuesto por una sucesión de  $p$  valores recurrentes de  $x$ :

$$F^p(x_n) = x_{n+p} = x_n$$

### 2.3.4. Aplicándolo a los fractales: el conjunto de Mandelbrot

Un ejemplo de la estrecha relación entre los sistemas dinámicos y los fractales es el conjunto de Mandelbrot (de ahora en adelante  $M$ ), el cual se define como el conjunto de puntos  $c \in \mathbb{C}$  tal que la órbita del punto  $z = 0$  esté acotada para la siguiente función iterativa:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

El resultado gráfico de realizar tal operación se puede ver en la Figura 4. Para  $c = -1$ , por ejemplo, la secuencia sería  $0, -1, 0, -1, \dots$  por lo que pertenecería a  $M$ .  $c = 2$ , por otro lado, no pertenecería al conjunto, pues su cuadrado se dispararía y no estaría . Lo mismo sucede, trivialmente, para todos los  $c$  reales puros mayores que 1.

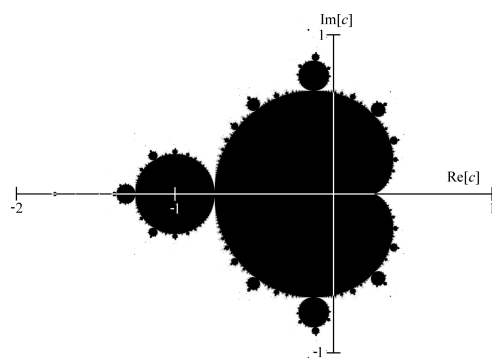


Figura 4: Conjunto de Mandelbrot. Imagen tomada de [https://www.wikiwand.com/es/Conjunto\\_de\\_Mandelbrot#Media/Archivo:Mandelset\\_hires.png](https://www.wikiwand.com/es/Conjunto_de_Mandelbrot#Media/Archivo:Mandelset_hires.png)



## 3. Aplicaciones prácticas

### 3.1. Sistemas Lindenmayer: La isla de Koch

El principal objetivo de esta demostración será presentar un fractal obtenido mediante un software propio (programado en Python) con el que se pueden representar sistemas-L básicos usando las siguientes operaciones:

- Una operación de desplazamiento **F**.
- Dos operaciones de giro  $+$  y  $-$ .

Tanto la distancia recorrida por **F** como los ángulos de  $+$  y  $-$  son configurables por el usuario junto con las reglas de sustitución, la posición del fractal, el axioma y el número de iteraciones. El código fuente del software, además, es accesible desde <https://github.com/AlexTatis/stembach/tree/master/l-systems>. En la misma dirección se encuentran las instrucciones de instalación.

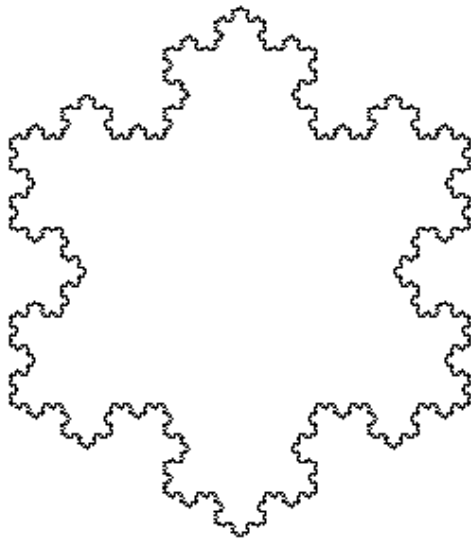


Figura 5: Isla de Koch resultante tras configurar el software con los parámetros necesarios.

Para presentar las capacidades de este software, y al mismo tiempo explorar propiedades únicas de los fractales, se realizará una pequeña modificación al sistema-L presentado en la sección 2.1 (definición 1). Si se cambia su axioma por:

$$C_0 = \{F - -F - -F\}$$

Se obtiene la isla de Koch, una estructura fractal cerrada y que, por tanto, nos puede servir para ejemplificar una característica paradójica de los fractales: incluso si el perímetro que conforma a un fractal puede llegar a ser infinito, el área que contiene puede ser finita.

#### 3.1.1. Cálculo del perímetro

Empezando por un breve análisis de la estructura de la isla, se puede observar un patrón en el número de lados y sus longitudes, ambos aumentan siguiendo una progresión geométrica (Tabla 1).

Número de lados ( $s$ )	Longitud de los lados ( $l$ )
3	1
12	1/3
48	1/9
...	...

Tabla 1: Número de lados y sus respectivas longitudes para las primeras iteraciones de la isla de Koch.

Siendo los términos generales de estas progresiones:

$$s_n = 3 \cdot 4^n \quad (10)$$

$$l_n = \frac{1}{3^n} \quad (11)$$

Con ello, se puede llegar a una expresión para el perímetro:

$$P_n = s_n l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (12)$$

Mientras el número de iteraciones tiende al infinito, nos iremos aproximando a la estructura fractal. Debido a que la progresión geométrica aumenta de valor con una razón de  $\frac{4}{3}$ , la cual es mayor que 1, el perímetro no convergerá a un valor finito, sino que la estructura fractal tendrá un perímetro infinito. En forma de límite:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (13)$$

### 3.1.2. Cálculo del área

Para el área, el procedimiento es similar, comenzando con una cuantificación de, esta vez, el número de triángulos añadidos y sus áreas (Tabla 2).

Número de triángulos añadidos ( $t$ )	Área de los triángulos añadidos ( $a$ )
1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{36}$
12	$\frac{\sqrt{3}}{324}$
24	$\frac{\sqrt{3}}{2916}$
...	...

Tabla 2: Número de triángulos añadidos y sus respectivas áreas para las primeras iteraciones de la isla de Koch.

El número de triángulos es un simple ejercicio visual, añadiendo uno nuevo en cada lado. Si en cada iteración se crean 4 lados por arista del triángulo, se obtiene la siguiente expresión:

$$t_n = 3 \cdot 4^{n-1} \quad (14)$$

El área de los triángulos se puede derivar a partir de la progresión geométrica de la longitud (ecuación 11) y el teorema de Pitágoras:

$$a_n = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{1}{3^n} \sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 3^n}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{1}{3^n} \sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)}}{2} = \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{1}{9^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} \quad (15)$$

Sea  $a_0$  el área del triángulo original, el área total en cada iteración  $n$  será:

$$A_n = a_0 + \sum_{k=1}^n t_k a_k = \quad (16)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \frac{1}{9^k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \quad (17)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \quad (18)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)} \quad (19)$$

Sabiendo que la suma de los  $n$  primeros término de una progresión geométrica tiene la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (20)$$

Podemos desarrollar el sumatorio para simplificar radicalmente la expresión:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1}\right) = \quad (21)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right) = \quad (22)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right) \Rightarrow \quad (23)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{\sqrt{3}}{20} \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)} \quad (24)$$

Se puede apreciar como  $\frac{4}{9} < 1$ , por lo que la serie deberá converger a un valor finito. Efectivamente:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{20} \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{5}} \quad (25)$$

Por tanto, y aunque sea paradójico, sí que pueden existir estructuras que rodean un espacio finito, aunque usen un recorrido infinito para lograrlo. En el apartado de Conclusiones se mostrarán las consecuencias que esto tiene para la aplicabilidad de los fractales en estructuras de carácter natural.

### 3.2. Sistemas de funciones iteradas: Texto fractal

En esta segunda demostración práctica también se presentará un software propio, el cual genera un sistema de funciones iteradas para una cadena de caracteres dada por el usuario. El programa tiene como conjunto inicial a un cuadrado de lado equivalente a la longitud de la cadena de texto a renderizar, sobre el que después ejecuta las siguientes transformaciones:

#### 3.2.1. Contracción al tamaño del píxel

El primer paso será reducir el tamaño del cuadrado  $C_0$  para convertirlo en un píxel de la letra. Sea  $n$  el número total de letras, la matriz de la contracción se puede escribir como:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{6n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6n} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Como se puede ver en la Figura 6, cada letra tiene un ancho efectivo de 6 píxeles (contando el píxel extra de separación entre ellas), de ahí que el factor de contracción sea  $6n$ . Ejecutar la transformación sobre el conjunto de puntos del cuadrado hará que disminuya de tamaño para convertirse en un píxel singular.

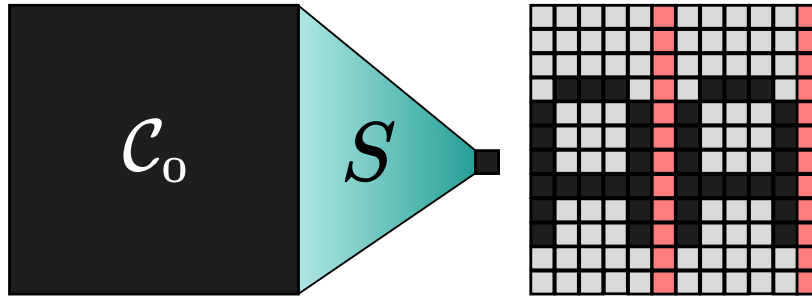


Figura 6: Representación gráfica de la contracción realizada sobre el conjunto inicial. Nótese como se debe tener en cuenta el píxel de separación entre las dos letras.

#### 3.2.2. Traslación del píxel

Actualmente, el píxel contraído se encuentra en el origen de coordenadas. Para moverlo a su posición, el programa contrasta con una fuente de texto de estilo *pixel art*<sup>2</sup> dónde debe

<sup>2</sup>Descargable desde <https://datagoblin.itch.io/monogram>.

colocar un cuadrado y dónde debe dejar un espacio. El programa recorrerá una malla  $5 \times 12$ , y si encuentra que en una celda con coordenadas  $(i, j)$  se debe colocar un píxel, se le sumará un vector de traslación al cuadrado (Figura 7):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} iL \\ L(12 - j) \end{pmatrix} \quad (27)$$

Donde  $L$  es el tamaño del píxel. Efectuar la traslación sobre el píxel supondrá sumar este vector a todos sus puntos.

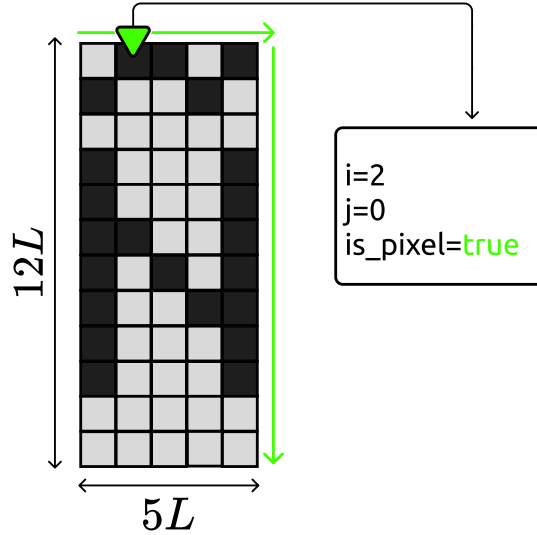


Figura 7: Representación gráfica del algoritmo de traslación. El software comprobará de izquierda a derecha y de arriba a abajo (flechas verdes) si la celda es un píxel.

### 3.2.3. Definiendo el IFS

Finalmente, podemos definir nuestro IFS uniendo las transformaciones de los apartados anteriores. Por un lado, la contracción siempre será la misma, disminuyendo el tamaño de nuestro conjunto; por el otro, la traslación depende de cada píxel, pues cada uno se encuentra en una posición distinta. De esta manera, tendremos una función  $\mathcal{T}_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  que actúa sobre el conjunto de puntos  $\mathcal{C}$  para cada píxel  $n$ . Nuestro IFS será el conjunto de todas estas funciones  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n\}$ , las cuales tienen la forma:

$$\mathcal{T}_n(\mathcal{C}) = \bigcup_{\vec{a} \in \mathcal{C}} S(\vec{a} + \vec{v}_n) \quad (28)$$

Nótese como la contracción también actúa sobre el vector de traslación. Esto permite que la distancia de la traslación siempre sea relativa al tamaño del píxel, el cual se hará haciendo más pequeño en cada iteración.

Al efectuar recursivamente estas transformaciones sobre los píxeles se creará un fractal con la forma del texto deseado. Se presenta un ejemplo en la Figura 8. Al igual que con la práctica anterior, el código se encuentra disponible en: <https://github.com/AlexTatis/stembach/tree/master/ifs-attractor>.

STEMSTEMSTEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM		STEM		STEM	
STEM		STEM		STEM		STEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM	
STEM				STEM		STEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM	
STEMSTEMSTEM				STEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM	
		STEM		STEM		STEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM	
STEM		STEM		STEM		STEM		STEMSTEMSTEMSTEMSTEM	
STEMSTEMSTEM				STEM		STEM			

Figura 8: Ejemplo de las capacidades del software desarrollado en esta práctica: la segunda iteración de un fractal que tiene como atractor la palabra STEM.

Mediante esta práctica se ha conseguido mostrar, por tanto, el gran potencial que tienen los IFS para adaptar un atractor fractal a una estructura deseada, sea texto, rutas o cualquier otra clase de imagen. En el apartado de conclusiones se analizará las consecuencias de esto en el ámbito de la ingeniería.

### 3.3. Sistemas dinámicos discretos: Modelo de población bacteriana

Finalmente, para esta demostración práctica se explicará un ejemplo que representa la proliferación de una familia de células en función de un tiempo discreto, un caso en el que la existencia de características fractales es menos aparente que en los anteriores. De esta manera, determinamos  $k$  como el día en el que se encuentra la muestra y  $X_k$  como la proporción de espacio ocupado por células frente al espacio total en su respectivo momento.

En este modelo, utilizamos la fórmula de crecimiento poblacional dada por:

$$X_{k+1} = CX_k(1 - X_k) \quad (29)$$

donde  $X_k$  representa la fracción de la capacidad máxima de la población en el día  $k$  y  $C$  es un parámetro que regula la velocidad de crecimiento. Esta ecuación es una versión discreta del modelo logístico, utilizada para describir el crecimiento de poblaciones en ambientes limitados (Weisstein, 2001).

Los puntos fijos del sistema, por la definición (3), se encuentran al resolver la ecuación:

$$X^* = CX^*(1 - X^*) \quad (30)$$

Lo que resulta en dos puntos fijos:

- $X^* = 0$
- $X^* = 1 - \frac{1}{C}$

La estabilidad de los puntos fijos depende del valor de  $C$ . Para el punto fijo  $X = 0$ , siempre será inestable si  $0 < C < 1$ . Por lo contrario, el punto fijo  $X = 1 - \frac{1}{C}$  será estable si  $1 < C \leq 3$ . Estos valores se pueden derivar de la condición (8). Calculando la derivada de la ecuación (29):

$$f'(X) = C - 2CX = C(1 - 2X) \quad (31)$$

Y evaluándola en  $X = 1 - \frac{1}{C}$ :

$$f'\left(1 - \frac{1}{C}\right) = C\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{C}\right)\right) = C\left(1 - 2 + \frac{2}{C}\right) = 2 - C \quad (32)$$

Para  $1 < C \leq 3$ , la derivada  $|2 - C| < 1$  indicando que el punto fijo es estable en ese intervalo.

En cuanto  $C \gtrapprox 3$ , el sistema empieza a oscilar entre dos valores (ciclo de orden 2) y el punto fijo se desestabiliza al verificarse que  $|2 - C| \geq 1$ .

### 3.3.1. Cambios de comportamiento del sistema: Diagrama de bifurcación

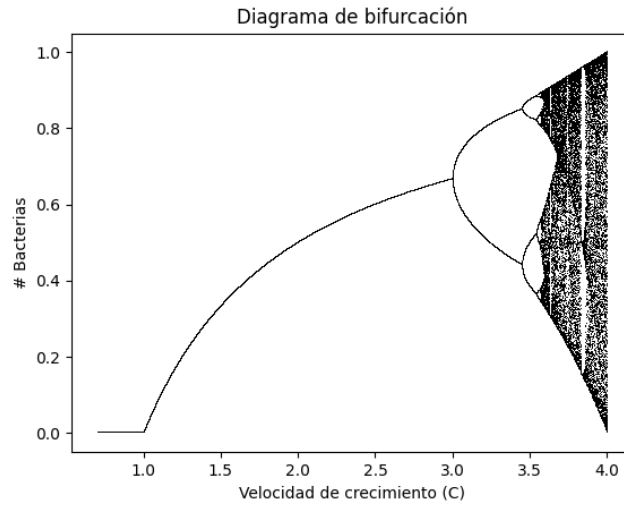


Figura 9: Diagrama de bifurcación del mapa logístico. Elaboración propia mediante el código disponible en: <https://github.com/AlexTatis/stembach/tree/master/bifurcation>.

Una vez  $C$  obtiene valores mayores que 3, ¿qué sucede con el comportamiento del sistema? El diagrama de bifurcación es una herramienta visual que permite observar como cambia este comportamiento a medida que el parámetro  $C$  varía. En el eje horizontal, se representa el parámetro  $C$ , y en el eje vertical, los valores de  $X$  en el estado estacionario del sistema. Este diagrama se construye de la siguiente manera:

- Para cada valor de  $C$  en un rango específico, se itera la ecuación (29) por un número significativo de veces, desechando las primeras para permitir que el sistema alcance su comportamiento asintótico (sea este llegar a un punto fijo, un ciclo o una secuencia aleatoria de valores).
- Tras alcanzar el comportamiento estacionario, se trazan los valores resultantes de  $X_k$  en el diagrama.

Como se puede ver en la Figura 9, a partir  $C > 3$  el sistema empieza a oscilar entre dos valores (ciclo de orden 2) y el punto fijo se desestabiliza al verificarse que  $|2 - C| \geq 1$ . A medida que  $C$  aumenta, se observa una cascada de bifurcaciones, cada vez más cercanas entre

sí, indicando un acercamiento a un comportamiento caótico. Para el intervalo  $3,45 < C < 3,55$ , el sistema oscila entre cuatro valores diferentes en un ciclo de orden 4.

### 3.3.2. Aparición de la estructura fractal: Correspondencia con Mandelbrot

El diagrama de bifurcaciones, al ser ampliado en regiones específicas, muestra estructuras auto-similares, lo cual le da características de fractal. Además de esto, tal y como expone Lynch (2023), al trazar el diagrama de bifurcación, también estamos visualizando una “sección” de  $M$  (conjunto de Mandelbrot), donde el comportamiento de la sucesión  $X_k$  se puede categorizar en términos de estabilidad, bifurcaciones y caos, similar a como se categorizan los puntos dentro y fuera del conjunto.

La intersección de  $M$  con el eje real se comprende en el intervalo  $[-2, \frac{1}{4}]$ , es decir, los parámetros en este intervalo pertenecen a los del modelo logístico:

$$X_{n+1} = CX_n(1 - X_n) : C \in [0, 4] \quad (33)$$

Para entender la correspondencia, primero es necesario definir una transformación que conecta el parámetro  $C$  del mapa logístico con el parámetro  $c$  de  $M$ . Para ello, definimos  $z$  como una función lineal de  $X$ :

$$z = C \left( \frac{1}{2} - X \right) \quad (34)$$

Esta transformación lineal mapea el intervalo  $[0, 1]$  del mapa logístico al intervalo  $[-\frac{C}{2}, \frac{C}{2}]$  de  $M$ . Luego, definimos  $c$  en función de  $C$  de tal manera que la iteración logística se relacione directamente con la iteración de Mandelbrot.

$$c = \frac{C}{2} \left( 1 - \frac{C}{2} \right) \quad (35)$$

Sustituyendo esta relación en la iteración de  $M$ , tenemos:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \Rightarrow \quad (36)$$

$$\Rightarrow C \left( \frac{1}{2} - X_{n+1} \right) = \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_n \right) \right]^2 + \frac{C}{2} \left( 1 - \frac{C}{2} \right) \Rightarrow \quad (37)$$

$$\Rightarrow C \left( \frac{1}{2} - X_{n+1} \right) = C^2 \left( X_n^2 - X_n + \frac{1}{4} \right) + \frac{C}{2} - \frac{C^2}{4} \quad (38)$$

Dividiendo todo entre  $C$ :

$$\frac{1}{2} - X_{n+1} = CX_n^2 - CX_n + \frac{C}{4} + \frac{1}{2} - \frac{C}{4} \quad (39)$$

Tras reordenar los términos:



$$X_{n+1} = -CX_n^2 + CX_n \Rightarrow \quad (40)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{n+1} = CX_n(1 - X_n)} \quad (41)$$

Esto asegura que los valores de  $C \in [0, 4]$  del se correspondan con los valores de  $c \in [-2, \frac{1}{4}]$  en  $M$  al ser el mapa logístico un caso particular del conjunto de Mandelbröt restringido al eje real. La estructura fractal del diagrama de bifurcación del mapa logístico coincide con las “secciones” de  $M$ , relacionándolos intrínsecamente.

Por lo tanto:

- Para  $1 < c \leq 3$ , el mapa logístico tenderá a un punto fijo estable, lo cual se corresponde con los puntos dentro de  $M$  que generan órbitas acotadas.
- Para  $c > 3$ , el mapa logístico experimenta bifurcaciones sucesivas y caos, reflejando la estructura fractal de  $M$ .

El comportamiento caótico del mapa logístico, por otro lado, surge de pequeños cambios en el valor de  $C$ , no de la propia función. Esto se puede mostrar si se representa en una gráfica el mapa logístico para un valor concreto del parámetro.

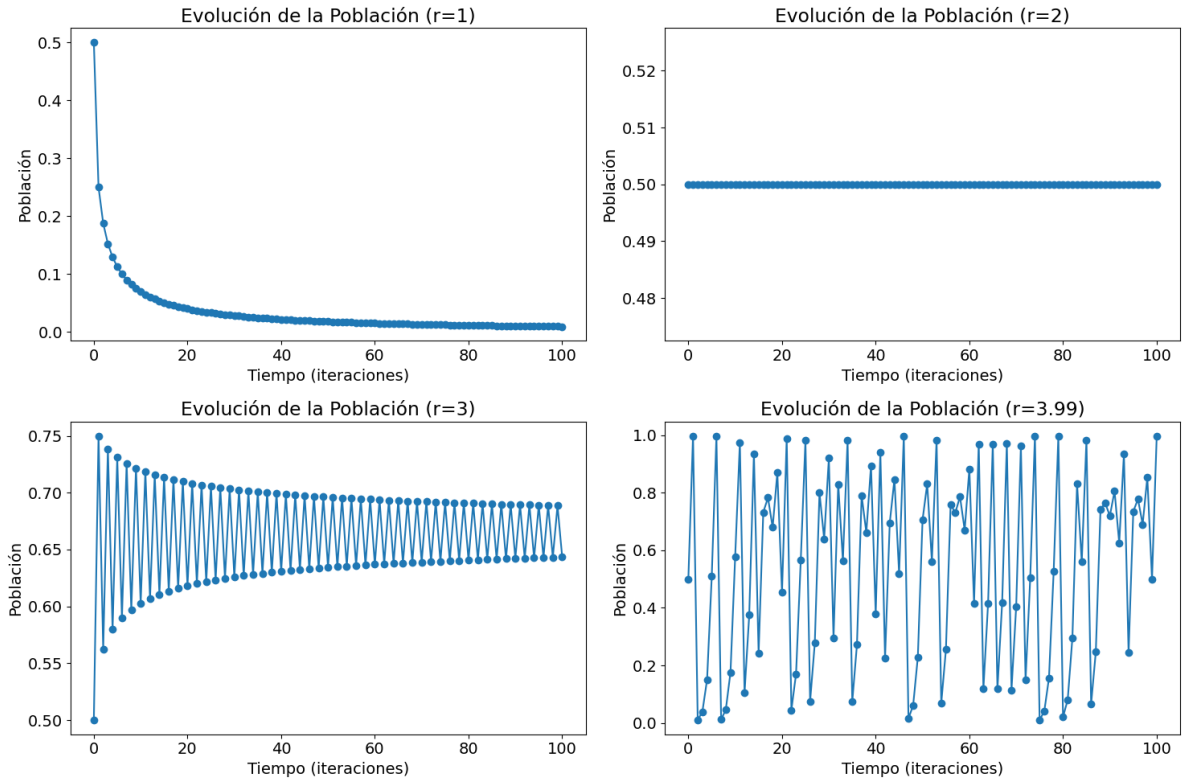


Figura 10: Representación gráfica del mapa logístico para valores fijos de  $C$  (donde  $r = C$ ). Nótese que para  $r = 1$  y  $r = 2$  se tiende hacia un punto fijo. En  $r = 3$  hay un ciclo. En  $r = 3.99$  se aprecia comportamiento caótico. Elaboración propia con el código disponible en <https://github.com/AlexTatis/stembach/tree/master/bifurcation>.

## 4. Conclusiones

A partir de las demostraciones prácticas presentadas, se ha explorado satisfactoriamente varias propiedades matemáticas de los fractales: su auto-similitud, las características del perímetro y el área, su capacidad para adaptarse a estructuras específicas (como un texto) y su aparición en sistemas con propiedades cíclicas. Tal y como se dijo en la introducción, esta gran variedad de propiedades invita a reflexionar sobre la aplicabilidad de los fractales a otras áreas del conocimiento. Por lo tanto, a continuación, se analizarán estas características, viéndose que no se limitan al ámbito abstracto, sino que tienen repercusiones en nuestro entorno.

En las ciencias naturales, la utilidad de los fractales es indiscutible. Tal y como se introdujo en la sección 2.1, los sistemas-L proceden directamente de estudiar el crecimiento de estructuras naturales, y es que el principio de la *“parte por el todo”*, que se ve en los seres vivos, vuelve inevitable esta relación entre los fractales y la biología. El proceso evolutivo es una causa directa de esto, pues las estructuras y mecanismos en los que se basa la vida son, en esencia, soluciones a problemas de optimización.

Los bronquios, por ejemplo, deben maximizar la superficie de contacto para optimizar el intercambio de gases; las venas deben facilitar eficientemente el intercambio de sustancias; los árboles buscan maximizar la captación de luz para la fotosíntesis; las neuronas necesitan maximizar sus conexiones con un gasto metabólico mínimo (Smith et al., 2021)... Existe una cantidad ilimitada de ejemplos en los que se precisa maximizar un valor (superficie de contacto, por ejemplo) mientras se minimiza otro (como el área para reducir el coste en materia orgánica de la estructura). Recordando el caso de la isla de Koch, en la que una superficie infinita rodea un área finita, se puede ver como los fractales ofrecen una solución muy acertada al proceso evolutivo.

Otros campos en el que los problemas de optimización abundan son las muchas ramas de la ingeniería, por lo que inevitablemente los fractales también aparecen en ellas. Las antenas, por ejemplo, también son un caso de estructura en la que se debe maximizar el perímetro y minimizar el área (Cohen, 1995). Otro caso de uso es en compresión de imágenes: en vez de guardar los píxeles de la imagen, se pueden guardar las funciones de un IFS que tenga como atractor a la propia imagen, de una manera similar al generador de texto fractal presentado (Saupe & Hamzaoui, 1994).

Por último, su aplicación a dinámicas poblacionales no se limita a bacterias en una placa, sino también a factores que afectan a la demografía humana, como la propagación del Covid-19 (Farman et al., 2022).

En definitiva, vivimos rodeados de fractales, y es por ello que resulta primordial estudiarlos y entenderlos. Como una propuesta de continuidad para este estudio, se presenta la posibilidad de analizar métodos de formación de fractales alternativos, como son los multi-fractales o los sistemas dinámicos continuos. Estos, a su vez, permitirán presentar utilidades más complejas de los fractales, como diagnosticar cánceres (Lennon et al., 2015) o modelizar el tiempo atmosférico (Ludwig, 1989).

## 5. Agradecimientos

Queremos mostrar nuestra gratitud a María Ermitas Pintos Testa por permitirnos llevar a cabo esta maravillosa investigación y a Jerónimo Rodríguez García por introducirnos al fantástico mundo de la geometría fractal y mostrar interés por este trabajo.

## 6. Referencias

- Cabezón, A., Calvelo, M., Granja, J. R., Ángel Piñeiro & Garcia-Fandino, R. (2023). Uncovering the mechanisms of cyclic peptide self-assembly in membranes with the chirality-aware MA(R/S)TINI forcefield [Editorial: Elsevier BV]. *Journal of colloid and interface science*, 642, 84-99. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2023.03.101>
- Cohen, N. (1995). *Fractal antennas and fractal resonators*. Consultado el 1 de enero de 2024, desde <https://patents.google.com/patent/US6452553>
- Farman, M., Amin, M., Akgül, A., Ahmad, A., Muhammad Bilal Riaz & Ahmad, S. (2022). Fractal-fractional operator for COVID-19 (Omicron) variant outbreak with analysis and modeling [Editorial: Elsevier BV]. *Results in physics*, 39, 105630-105630. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105630>
- Hutchinson, J. (1981). Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5), 713. <https://doi.org/10.1512/iumj.1981.30.30055>
- L-systems - Encyclopedia of Mathematics. (2023). Consultado el 1 de enero de 2024, desde <https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=L-systems>
- Lennon, F. E., Cianci, G. C., Cipriani, N. A., Hensing, T. A., Zhang, H. J., Chen, C.-T., Murgu, S. D., Vokes, E. E., Vannier, M. W., & Ravi Salgia. (2015). Lung cancer—a fractal viewpoint [Editorial: Nature Portfolio]. *Nature reviews. Clinical oncology*, 12(11), 664-675. <https://doi.org/10.1038/nrclinonc.2015.108>
- Lindenmayer, A. (1975). Developmental algorithms for multicellular organisms: A survey of L-systems. *Journal of Theoretical Biology*, 54(1), 3-22. [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(75\)80051-8](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(75)80051-8)
- Ludwig, F. (1989). Atmospheric fractals — A review [Editorial: Elsevier BV]. *Environmental software*, 4(1), 9-16. [https://doi.org/10.1016/0266-9838\(89\)90016-6](https://doi.org/10.1016/0266-9838(89)90016-6)
- Lynch, P. (2023). The Logistic Map is hiding in the Mandelbrot Set. Consultado el 5 de octubre de 2024, desde <https://thatsmaths.com/2023/12/07/the-logistic-map-is-hiding-in-the-mandelbrot-set/>
- Mandelbrot, B. B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Tusquets Editores.
- Saupe, D., & Hamzaoui, R. (1994). A review of the fractal image compression literature. *SIG-GRAPH Comput. Graph.*, 28(4), 268-276. <https://doi.org/10.1145/193234.193246>
- Sayama, H. (2018). 3.1: What are Dynamical Systems? Consultado el 1 de enero de 2024, desde [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Scientific\\_Computing\\_Simulations\\_and\\_Modeling/Introduction\\_to\\_the\\_Modeling\\_and\\_Analysis\\_of\\_Complex\\_Systems\\_\(Sayama\)/03%3ABasics\\_of\\_Dynamical\\_Systems/3.01%3A\\_What\\_are\\_Dynamical\\_Systems%3F](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Scientific_Computing_Simulations_and_Modeling/Introduction_to_the_Modeling_and_Analysis_of_Complex_Systems_(Sayama)/03%3ABasics_of_Dynamical_Systems/3.01%3A_What_are_Dynamical_Systems%3F)
- Smith, J. H., Rowland, C., Harland, B., S. Moslehi, Montgomery, R. D., Schobert, K., Watterson, W. J., J. Dalrymple-Alford & Taylor, R. P. (2021). How neurons exploit fractal geometry to optimize their network connectivity [Editorial: Nature Portfolio]. *Scientific reports*, 11(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-021-81421-2>
- Weisstein, E. W. (2001). Logistic Map [Editorial: Wolfram Research, Inc.]. Consultado el 1 de enero de 2024, desde <https://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>