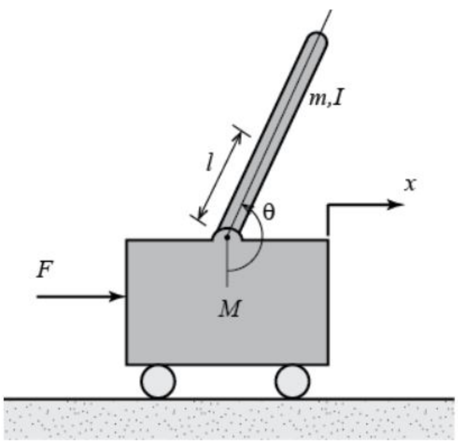
Optimizare
Laborator 6: Control optimal. Metoda bariera

Acest laborator incepe cu o scurta prezentare a sistemului CVX, acesta preocupandu-se cu rezolvarea problemelor convexe. Dupa aceasta sectiune formulam o problema de control optimal pentru pendulul invers, in care am sarit peste pasul de modelare, nefiind obiectul cursului. Rezolvam problema cu doua metode invatate la curs si anume metoda barierei si cea a gradientului proiectat, iar solutiile obtinute sunt comparate cu cele gasite cu CVX si functiile oferite de Matlab. In cea de a treia sectiune, prezentam problema lantului suspendad pentru care am implementat gradientul proiectat si cel conditionat. In aceeasi maniera ca si in sectiunea precedenta, comparam cu solutiile produse de CVX si functiile Matlab.

1 Control optimal

Sistemul din acest exemplu consta dintr-un pendul inversat montat pe un carucior motorizat. Popularitatea sistemului deriva in parte din faptul ca este instabila fara control, adica pendulul va cadea pur și simplu daca nu este mișcat caruciorul pentru a-l echilibra. In plus, dinamica sistemului este neliniară. Obiectivul sistemului de control este de a echilibra pendulul inversat prin aplicarea unei forțe pe caruciorul de care pendulul este atasat. Un exemplu din lumea reala care se refera direct la acest sistem de pendul inversat este controlul atitudinii unei rachete rapel la decolare.



Notam:

- M - masa carucirului-ului = 0,5 kg

- m - masa pendulului = 0,2 kg
- b - coeficientul de frecare pentru carucior =0,1 N/m/sec
- l - lungimea până la centrul de masă al pendulului = 0,3 m
- I - momentul masic de inertie a pendulului = 0,006 kg m^2
- F - forta aplicata caruciorului
- x - coordonata de pozitie a caruciorului
- ϕ - unghiul pendulului

Utilizand legile lui Newton si liniariand ecuatiile dinamicii gasite obtinem urmatoarea reprezentare pe stare a sistemului:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\left(I+ml^2\right)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+m\ell^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ ml \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \dot{z}_{t+1} = Az_t + Bu_t$$

Pentru acest sistem formulam in continuare prolema de control optimal pe orizont finit N pentru urmarirea unei referinte date.

Pentru aceasta consideram costuri de etapa: $\ell_t^z(z_t) = 1/2 \left\| z_t - z_t^{ref} \right\|_{Qt}^2$, $\ell_t^u(u_t) = 1/2 \left\| u_t - u_t^{ref} \right\|_{R_t}^2$, unde $Q_t \succeq 0$ si $R_t \succ 0$. (Notatie: $\left\| x - x^{ref} \right\|_Q^2 = \left(x - x^{ref}\right)^T Q \left(x - x^{ref}\right)$) De asemenea considerand dimensiunile caruciorului trebuie impusa o restictionata forta aplicate asupra acestuia. Astfel avem ca: $-3 \leq u \leq 3$

Deci avem urmatoare formulare a problemei de control:

$$\begin{aligned} &\min_{z_t, u_t} \sum_{t=1}^{N} \ell_t^z(z_t) + \sum_{t=0}^{N-1} \ell_t^u(u_t) \\ &\text{s.l.:} \quad z_{t+1} = A_t z_t + B_t u_t \quad \forall t = 0, \ldots, N-1, \quad z_0 \text{ dat.} \\ &\qquad -3 \leq u_t \leq 3 \end{aligned}$$

Observam ca variabila de decizie pentru problema de mai sus este:

$$x = \begin{bmatrix} u_0^T & z_1^T & \ldots & u_{N-1}^T & z_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N(n_z+n_u)}$$

Pentru simplitate vom considera in cele ce urmeaza ca orizontul de predictie N= 3.

Putem sa restrangem variabila si sa o scriem doar in functie de intrari, utilizandu-ne de dinamica sistemului:

$$\begin{aligned} z_1 &= Az_0 + Bu_0 \\ z_2 &= Az_1 + Bu_1 = A^2 z_0 + ABu_0 + Bu_1 \\ z_3 &= Az_2 + Bu_2 = A^3 z_0 + A^2 Bu_0 + ABu_1 + Bu_2 \end{aligned}$$

Eliminand starile obtinem ca variabila de decizie:

$$x = \left[\begin{array}{ccc} u_0^T & u_1^T & u_2^T \end{array}\right]^T$$

De asemenea notand $\bar{z} = [z_1^T \; z_2^T \; z_3^T]^T$ putem scrie ecuatia de mai sus in urmatoarea forma compacta

$$\bar{z} = \overline{AB}x + A_p z_0$$

unde:

$$\overline{AB} = \left[\begin{array}{ccc} B & 0 & 0 \\ AB & B & 0 \\ A^2B & AB & B \end{array}\right], A_p = \left[\begin{array}{c} A \\ A^2 \\ A^3 \end{array}\right]$$

Prin prisma celor de mai sus, putem rescrie functia cost pentru stare:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left\|z_j - z_j^{\text{ref}}\right\|_{Q_j}^2 &= \frac{1}{2}\left\|\bar{z} - \bar{z}^{\text{ref}}\right\|_{\bar{Q}}^2 = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}x + A_p z_0 - \bar{z}^{\text{ref}}\right\|_{\bar{Q}}^2 \\ &= \frac{1}{2}x^T\overline{AB}^T\bar{Q}\overline{AB}x + \left(z_0^T A_p^T \bar{Q}\overline{AB} - \left(\bar{z}^{\text{ref}}\right)^T \bar{Q}\overline{AB}\right) z\end{aligned}$$

unde $\bar{Q} = \text{diag}\left(Q_1, \ldots, Q_3\right)$ si $\bar{z}^{\text{ref}} = \left[z_1^{\text{ref}} \ldots z_3^{\text{ref}}\right]^T$

Procedand in aceasi maniera si pentru intrare, gasim:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2}\left\|u(j) - u^{\text{ref}}(j)\right\|_{R_j}^2 &= \left\|x - \bar{x}^{\text{ref}}\right\|_{\bar{R}}^2 \\ &= \frac{1}{2}x^T\bar{R}x - \left(\bar{x}^{\text{ref}}\right)^T\bar{R}x + \frac{1}{2}\left(\bar{x}^{\text{ref}}\right)^T\bar{R}x^{\text{ref}}\end{aligned}$$

unde $\bar{R} = \text{diag}\left(R_0, \ldots, R_2\right)$ si $\bar{x}^{\text{ref}} = \left[x_0^{\text{ref}} \ldots u_2^{\text{ref}}\right]$

In cele de urma putem scrie functia obiectiv ca:$\frac{1}{2}x^THx + h^Tx$, unde $H = \bar{R} + \overline{AB}^T\bar{Q}\overline{AB}$ si $h = \overline{AB}^T\bar{Q}A_pz_0 - \overline{AB}^T\bar{Q}\bar{z}^{\text{ref}} - \bar{R}\bar{x}^{\text{ref}}$

Eliminand starile, am mai ramas doar cu constrangerea pe intrare: $-3\,ones(3,1) \leq x \leq 3\,ones(3,1)$

In concluzie avem de rezolvat urmatoarea problema QP:

$$\begin{aligned}&\min_x \frac{1}{2}x^THx + h^Tx \\ &\text{s.l.} : Cx \leq d\end{aligned}$$

A se observa ca reformularea problemei cu metoda eliminarea starilor obtinem o problema de optimizare care are doar constrangeri de inegalitate.

Amintim pentru rezolvarea acestei probleme doi algoritmi si vom compara rezultatele acestora cu ce ne va furniza cvx-ul si functia quadprog.

- **Metoda bariera**

  Fie: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) \quad \text{s.l.} \quad g(x) \leq 0, \; Ax = b.$

  unde f, g sunt functii convexe. Formulam problema bariera:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) - \tau\sum_{i=1}^{m}\log(-g_i(x)) \quad \text{s.l.} \quad Ax = b. \tag{1}$$

Alegem x_0 strict fezabil, $\tau_0 > 0, \sigma < 1$ si $\epsilon > 0$.

Atata timp cat $m\tau_k \geq \epsilon$ repeta:

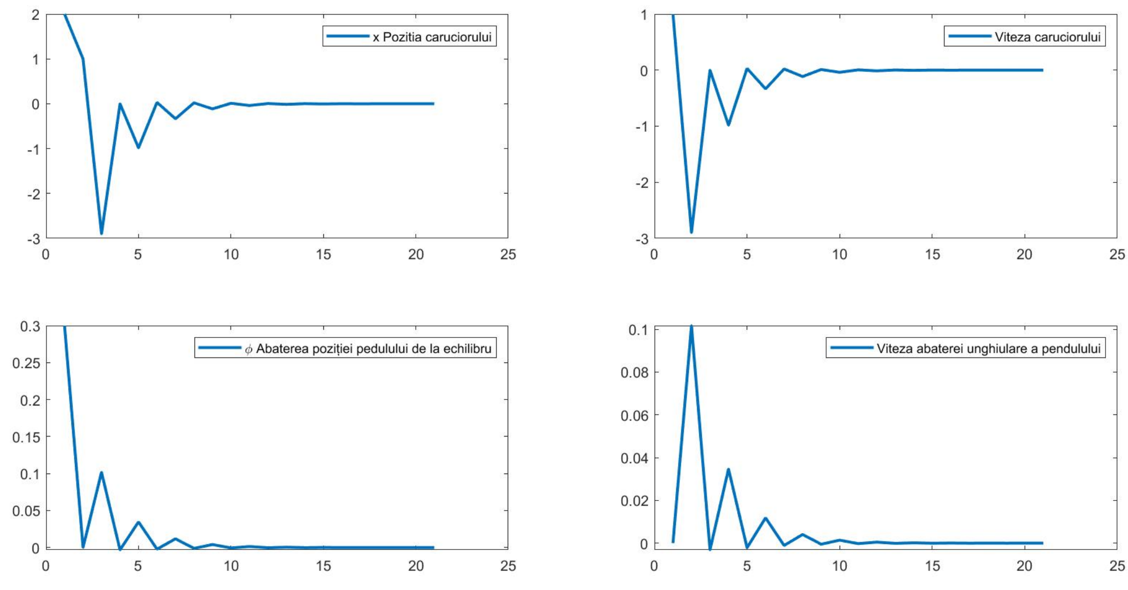
1. Calculeaza
$$x_{k+1} = x(\tau_k) \tag{2}$$
pornind din punctul initial x_k ("warm start");
2. Descreste parametrul $\tau_{k+1} = \sigma\tau_k$.

$\Rightarrow$ Pentru a determina x_{k+1} din expresia 2 rezolvam (e.g. Metoda gradient, Metoda Newton) reformularea cu bariera logaritmica cu parametrul τ_k 1, pornind din punctul initial x_k;

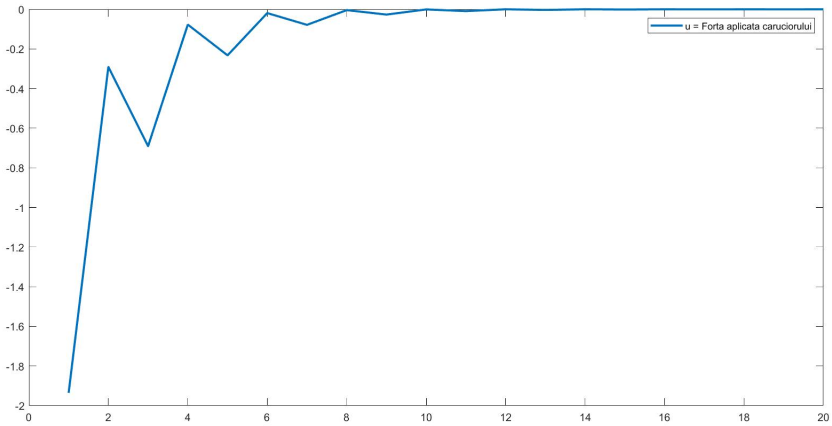
$\Rightarrow$ Dupa k iteratii avem $f(x_k) - f^* \leq m\tau_0\sigma^k$.

Rezultate numerice

Luam pentru costul functiei: $Q = I_4$, dar 10 pe pozitiile (1,1) si (3,3) si $R = 1$. Alegem starea intiala: $z_0 = [2; 1; 0.3; 0]$, $\tau = 1$, $\sigma = 0.6$, si $\epsilon = 0.0001$.
Graficul variabilei de stare a sistemului



Graficul intrarii



2 Cerinta

Inlocuiti in template-ul atasat laboratorului, functia quadprog din matlab cu:

- (2p)Metoda bariera
- (1p)Versiunea cvx

References

[1] R.H. Tütüncü, K.C. Toh, and M.J. Todd. Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3

[2] Modelarea pundulului invers pe un carucior