Απαντήσεις στα προβλήματα, δεκτές ηλεκτρονικά μέσω ηλεκτρονικής αλληλογραφίας:

```
email: compPhysicsEKPA@gmail.com
attachments: *.ipynb .OR. *.txt
```

Στην περίπτωση που κάποια άσκηση έχει ζητηθεί να αναρτηθεί ως εργασία (με ή χωρίς bonus) στο e-class, μετά την ανάρτηση της απάντησής σας στο e-class, μη παραλείψετε να στείλετε αντίγραφό της και στο compPhysicsEKPA@gmail.com και να γράψετε το **όνομα και τον αριθμό μητρώου σας!** Το αρχείο (∗.txt) πρέπει να περιέχει σχολιασμένο κώδικα σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού, **καθώς και το αποτέλεσμα της εκτέλεσής του (printout)**. Μη στέλνετε αρχεία τύπου *.doc, *.docx και απαντήσεις για προβλήματα που έχουν μαρκαριστεί ως μη-παραδοτέα.

Πρόβλημα 1 (παραδοτέο έως 24.10.2022)

Λαμβάνοντας υπόψη το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού, που δίνεται στο τέλος της εκφώνησης, να υπολογίσετε:

α) τον αριθμητικό μέσο όρο του δείγματος $\hat{\mu} = N^{-1}\sum x_i$,

β) την τετραγωνική διασπορά του δείγματος $s^2 = (N-1)^{-1}\sum(x_i - \hat{\mu})^2$,

γ) την (προκατειλημμένη) τετραγωνική διασπορά του δείγματος $s_{\mathrm{N}}^2 = N^{-1}\sum(x_i - \hat{\mu})^2$,

θεωρώντας ως ισοπίθανα $p_{\mathrm{i}} = 1/6$ τα αποτελέσματα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Σχολιάστε αν βρείτε κάτι παράξενο.

```
4, 2, 3, 6, 1, 5, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 5, 5, 3, 1, 2, 3, 4,
3, 6, 3, 6, 4, 2, 3, 3, 6, 4, 1, 1, 6, 4, 6, 3, 4, 6, 6, 4, 2, 2,
6, 3, 6, 5, 4, 6, 3, 3, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 6,
3, 6, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 2, 6, 1, 3, 3,
3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 6, 4, 4,
3, 6, 2, 4, 3, 6, 5, 3, 6, 2, 3, 3, 5, 3, 4, 5, 4, 3, 1, 3, 2, 6,
4, 3, 5, 4, 3, 3, 1, 6, 4, 4, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 6,
2, 3, 6, 1, 3, 6, 1, 4, 1, 2, 1, 6, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 6, 1, 3, 4,
6, 6, 4, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 3, 4, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 6, 4, 5, 3, 5,
5, 6, 3, 1, 3, 3, 6, 1, 6, 5, 2, 5, 4, 1, 3, 6, 5, 3, 2, 3, 1, 3,
6, 4, 1, 6, 3, 1, 2, 6, 4, 6, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 1, 5, 6, 3, 5, 3,
4, 5, 4, 1, 2, 6, 6, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 1, 2, 6,
2, 1, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 6, 3, 1, 2, 6, 3, 1, 6, 1, 4, 6, 5, 3, 1,
2, 6, 2, 1, 1, 3, 5, 6, 1, 5, 5, 3, 5, 3
```

Μπορείτε να βρείτε το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού ως απλό αρχείο κειμένου (μορφή *txt) σε αυτόν τον φάκελο.

Πρόβλημα 2 (παραδοτέο έως 31.10.2022)

Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας, γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να παράγει τυχαίους αριθμούς $X \sim 1/x$ στο διάστημα $0.5 < x < 10.5$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο:

α) αντίστροφου μετασχηματισμού.

β) δειγματοληψίας απόρριψης (hit-or-miss).

Συγκρίνετε την απόδοση των δύο μεθόδων υπολογίζοντας πόσους τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1)$ χρειαστήκατε σε κάθε περίπτωση.

Πρόβλημα 3 (μη παραδοτέο)

α) Δημιουργήστε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών βασισμένη στον γραμμικό μετασχηματισμό ισοδυναμίας υπολοίπου $x_{\mathrm{n}+1} = (2147483629 x_{\mathrm{n}} + 2147483587) \mathrm{mod}(2^{31} - 1)$ που να παράγει τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας στο $[0, 1)$

β) Μελετήστε το διάγραμμα συχνοτήτων (ιστόγραμμα) της γεννήτριάς σας.

Πρόβλημα 4 (μη παραδοτέο)

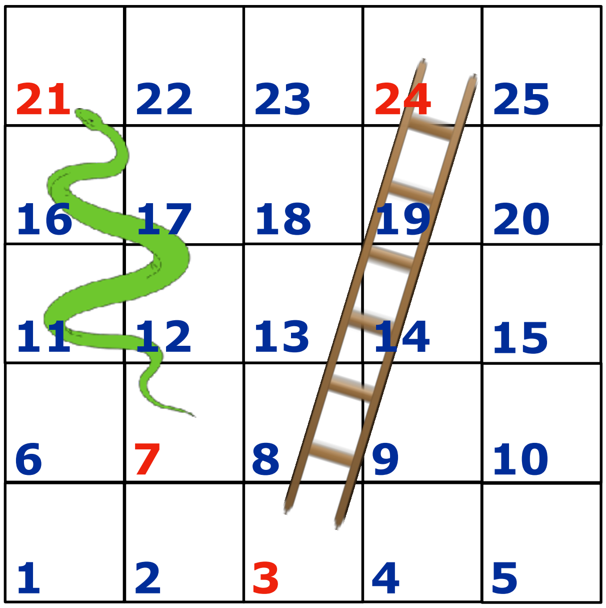
α) Εξομοιώστε ένα ζάρι.

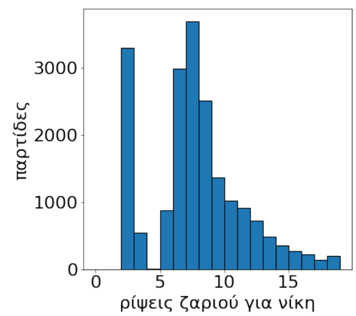
β) Εξομοιώστε ένα ζάρι που έχει 30% πιθανότητα να φέρει 6 και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα ισοπίθανα.

Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ *που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας και 'τεμαχίστε' κατάλληλα το διάστημα [0,1) σε 6 'τεμάχια', ελέγχοντας σε ποιο από αυτά ανήκει ο αριθμός που παράχθηκε.*

Πρόβλημα 5 (μη παραδοτέο)

Βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X που χαρακτηρίζει τον αριθμό ρίψεων ενός ζαριού, προκειμένου να κερδίσει (φτάσει στο τετράγωνο 25) κάποιος στο παρακάτω 'φιδάκι'.





1. Υπολογίστε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος των τιμών x που έλαβε η μεταβλητή X στα παιχνίδια που παίξατε.

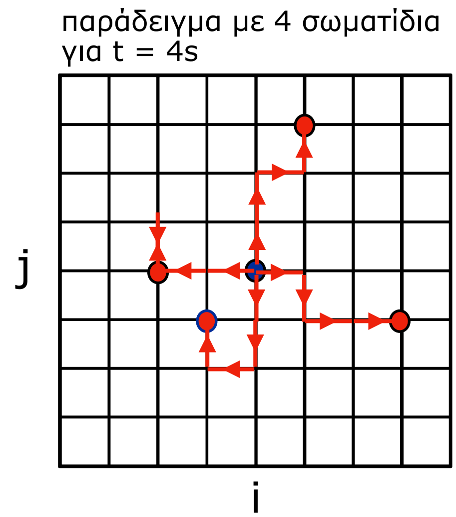
2. Προσθέστε ή αφαιρέστε σκάλες και φίδια και αυξομειώστε το μέγεθος του παιχνιδιού παρατηρώντας την μετάβαση σε μία 'κανονικότητα' $X \sim e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$ όταν το 'παρακάνετε'. Γιατί συμβαίνει αυτό;

3. Σε ένα παιχνίδι μεταξύ δύο ατόμων, ποια η πιθανότητα να κερδίσει αυτός που ξεκινά δεύτερος; (*Στείλτε μου αν θέλετε την πιθανότητα που υπολογίσατε.*)

4. Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $\bar{x} \approx 7.4$ και $\hat{\sigma} \approx 4.1$, θα ήταν σωστό να πούμε ότι χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $x = 7.4 \pm 4.1$ ζαριές για να κερδίσουμε ένα παιχνίδι;

Πρόβλημα 6 (με bonus παραδοτέο έως 07.11.2022)

Χίλια σωματίδια Brown διαχέονται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων. Τα σωματίδια εκτελούν τυχαίο βηματισμό σε ένα δισδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα ακμής ενός εκατοστού με ταχύτητα 1 cm/s.



Βρείτε πόσο μακριά θα βρίσκεται κατά μέσο όρο το κάθε σωματίδιο μετά από $t = 100$ βήματα του ενός δευτερολέπτου, υπολογίζοντας το

$$\bar{d} = \frac{1}{1000} \sum_{\mathrm{w}=1}^{1000} \sqrt{x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2}$$

όπου $(x_{\mathrm{w}}, y_{\mathrm{w}})$ η θέση του κάθε σωματιδίου $w = 1, 2, 3 \ldots 1000$ για $t = 100s$. Στην συνέχεια βρείτε τον μέσο όρο του τετραγώνου της απόστασης του καθενός σωματιδίου (για $t = 100s$)

$$\bar{d^2} = \frac{1}{1000} \sum_{\mathrm{w}=1}^{1000} x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2$$

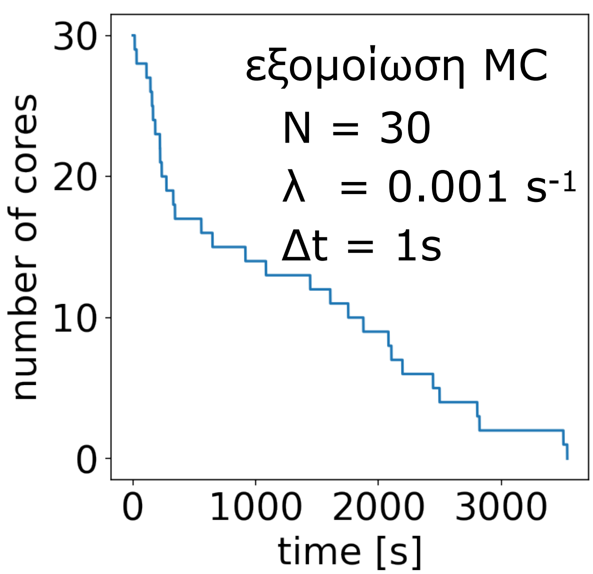
και συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με το μονοδιάστατο πρόβλημα.

Υποδείξεις: Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστείτε να φτιάξετε ένα ζάρι τεσσάρων όψεων (πάνω - κάτω - δεξιά - αριστερά) το οποίο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί κάθε σωματίδιο σε κάθε 'γύρο".

Πρόβλημα 7 (μη παραδοτέο)

Να γραφεί πρόγραμμα που θα εξομοιώνει την ραδιενεργό διάσπαση $N = 1000$ πυρήνων συναρτήσει του χρόνου, σε διακριτά χρονικά βήματα $\Delta t = 1s$. Θεωρήστε ότι κάθε αδιάσπαστος πυρήνας έχει σταθερή πιθανότητα διάσπασης $p = \lambda\Delta t = 10^{-3}$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει στην 'έξοδό' του το πλήθος των αδιάσπαστων πυρήνων ύστερα από συνολικό χρόνο εξομοίωσης ίσο με $1000s$.

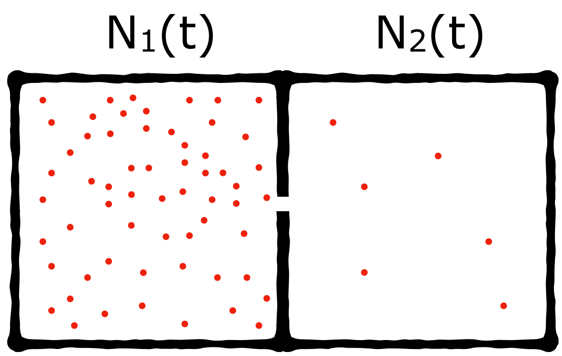
Υποδείξεις: Ανά μονάδα χρόνου, κάθε πυρήνας περνάει από δοκιμή Bernoulli (ανεξαρτησία διασπάσεων, άνευ μνήμης). Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστεί να φτιάξετε ένα κέρμα δύο όψεων με πιθανότητα $p = \lambda\Delta t = 10^{-3}$ να φέρει κορώνα, το όποιο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε αν κάποιος πυρήνας θα υποστεί διάσπαση ρίχνοντας το κέρμα $N(t)$ φορές, όπου $N(t)$ ο πληθυσμός των εναπομεινάντων πυρήνων την χρονική στιγμή t.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο YouTube

Πρόβλημα 8 (μη παραδοτέο)

Θεωρείστε ότι έχουμε ένα αέριο σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία, με $N_1(t)$ και $N_2(t)$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκεται σε κάθε δοχείο.



Να βρεθεί η χρονική εξέλιξη των δύο πληθυσμών $N_1(t)$ και $N_2(t)$ αν:

$$N1(0) = 100$$
$$N2(0) = 0$$

και $p = \lambda \Delta t = 1\%$ πιθανότητα για κάθε μόριο του αερίου να διασχίσει την τρύπα και να περάσει από το ένα δοχείο στο άλλο στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$.

Πρόβλημα 9 (μη παραδοτέο)

Υπολογίστε το

$$I = \int_{0.5}^{10.5} \frac{1}{x} dx$$

με την μέθοδο απλοϊκού Monte–Carlo καθώς και την αβεβαιότητα της εκτίμησης που κάνατε. Ποιο είναι το αναμενόμενο (θεωρητικά) σχετικό σφάλμα αν έχετε στην διάθεσή σας $N = 10^{10}$ δείγματα τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής;