



Απαντήσεις στα προβλήματα, δεκτές ηλεκτρονικά μέσω ηλεκτρονικής αλληλογραφίας:

email: compPhysicsEKPA@gmail.com

attachments: \*.ipynb .OR. \*.txt

Η αποστολή ασκήσεων είναι **προαιρετική** και δεν έχει κάποιο βαθμολογικό αντίκτυπο. Το αρχείο κειμένου (\*.txt) πρέπει να περιέχει σχολιασμένο κώδικα σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού **καθώς και το αποτέλεσμα της εκτέλεσής του (printout)**. (Μη στέλνετε αρχεία τύπου \*.doc, \*.docx.) Σε περίπτωση που θέλετε να συμπεριλάβετε κάποιο διάγραμμα, προτιμήστε αυτό να το επισυνάψετε ως ξεχωριστό αρχείο τύπου (\*.png, \*.jpg, \*.pdf) ή compiled latex (pdf). Εναλλακτικά (**προτιμητέο**) μπορείτε να στείλετε τα αποτελέσματα όλα μαζί (γραφικά, κώδικας και αποτελέσματα) σε μορφή jupyter notebook (\*.ipynb) – για πιο γρήγορη διόρθωση/σχολιασμό από τον διδάσκοντα.

## Πρόβλημα 1 (παραδοτέο έως 22.10.2021)

Τα παρακάτω δεδομένα συνοψίζουν τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων έξι διαφορετικών ζαριών. Εξετάστε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των έξι διαφορετικών δειγμάτων. Είναι όλα τα ζάρια τίμια; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

### dice1

```
5, 4, 1, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 4, 1, 2, 3, 6, 6, 1, 6, 5, 3, 6, 6, 2, 3, 6, 6,  
6, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 5, 5, 1, 2, 4, 6, 2, 4, 5, 6, 1, 4, 2, 3, 6, 3, 5, 3, 1,  
6, 4, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 4, 2, 1, 5, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 3, 4, 6, 3, 3,  
1, 4, 1, 4, 1, 1, 6, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 6, 6, 2, 6, 5, 5,  
6, 3, 5, 2, 3, 2, 1, 6, 4, 4, 4, 1, 5, 1, 6, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 5, 5, 2, 6, 4,  
4, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 4, 6, 2, 6, 6, 4, 5, 5, 1, 2, 3, 2, 2, 5, 5, 2, 6, 1,  
2, 2, 5, 3, 4, 2, 2, 6, 5, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 6, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 3,  
5, 3, 2, 6, 5, 3, 5, 4, 6, 4, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 5, 2, 6, 6, 2, 2, 3, 2, 4, 1,  
5, 2, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 4, 1, 5, 5, 2, 1, 1, 5, 1, 5, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 5, 3,  
4, 3, 6, 4, 4, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 6, 5, 2, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 5, 1, 2,  
2, 3, 2, 1, 5, 3, 5, 1, 6, 3, 5, 6, 2, 1, 2, 2, 5, 2, 3, 6, 4, 5, 5, 4, 4, 1,  
6, 5, 5, 3, 6, 2, 2, 5, 5, 2, 2, 4, 6, 3
```



### dice2

2, 1, 2, 4, 2, 2, 5, 5, 5, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 4, 6, 3, 6, 3, 4, 4, 6, 6,  
6, 3, 5, 1, 2, 2, 3, 5, 4, 5, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 4, 4, 2,  
5, 5, 6, 6, 1, 6, 1, 4, 5, 6, 3, 4, 1, 4, 2, 5, 2, 2, 5, 4, 2, 4, 3, 3, 5, 5,  
3, 3, 3, 6, 1, 4, 4, 6, 3, 4, 3, 2, 3, 6, 1, 6, 5, 4, 4, 5, 6, 3, 4, 5, 4, 3,  
1, 5, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 6, 3, 1, 3, 6, 1, 6, 6, 5, 4, 6, 1, 3, 4, 5, 4, 6,  
6, 5, 4, 2, 2, 4, 4, 1, 4, 5, 5, 4, 6, 1, 2, 6, 2, 3, 2, 6, 6, 1, 2, 4, 6, 2,  
5, 1, 4, 5, 3, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 5, 6, 3, 1, 5, 5, 2, 5,  
6, 4, 1, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 6, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 5, 6, 3, 2, 4, 6,  
1, 3, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 2, 4, 6, 1, 6, 6, 4, 5, 6, 6, 6, 5, 4, 6, 2,  
2, 2, 6, 2, 5, 3, 5, 5, 1, 3, 2, 4, 4, 1, 5, 6, 6, 2, 5, 1, 6, 2, 3, 6, 5, 5,  
3, 1, 5, 3, 5, 1, 1, 5, 6, 1, 6, 5, 3, 4, 4, 6, 3, 1, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 1, 1,  
2, 2, 1, 5, 6, 4, 3, 5, 3, 3, 5, 4, 4, 4

### dice3

5, 5, 6, 6, 3, 4, 3, 3, 1, 6, 3, 4, 5, 3, 2, 6, 1, 4, 5, 5, 6, 2, 4, 6, 4, 4,  
3, 3, 3, 1, 4, 4, 1, 5, 3, 6, 4, 3, 1, 4, 5, 5, 3, 5, 5, 6, 5, 1, 4, 1, 4, 1,  
3, 3, 5, 3, 3, 3, 2, 6, 3, 5, 6, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 2, 3, 3, 6, 6, 2, 3,  
3, 2, 3, 3, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 2, 3, 6, 1, 4,  
5, 3, 3, 5, 6, 3, 4, 5, 2, 3, 3, 3, 1, 4, 6, 3, 3, 3, 3, 5, 2, 3, 6, 3, 2, 4,  
5, 2, 6, 5, 4, 6, 3, 4, 5, 4, 3, 1, 1, 1, 3, 4, 2, 5, 3, 1, 3, 2, 3, 6, 4, 3,  
4, 4, 6, 1, 3, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 6, 6,  
3, 1, 6, 2, 6, 1, 1, 6, 3, 3, 3, 6, 5, 3, 5, 2, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 2, 3, 2, 3,  
2, 3, 6, 4, 4, 4, 6, 2, 3, 5, 3, 2, 4, 2, 2, 5, 5, 3, 5, 3, 3, 3, 2, 3, 6,  
1, 6, 3, 3, 3, 4, 3, 6, 2, 6, 1, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 6, 3, 6, 2, 4,  
2, 3, 6, 3, 4, 3, 3, 6, 3, 5, 6, 1, 3, 1, 3, 5, 3, 1, 3, 5, 5, 3, 3, 2, 4, 6,  
3, 6, 5, 5, 3, 6, 3, 1, 6, 5, 3, 5, 3, 3

### dice4

6, 2, 1, 2, 6, 6, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 6, 6, 2, 4, 1, 5, 4, 2, 6, 3, 4, 3,  
6, 4, 2, 3, 6, 3, 6, 1, 6, 1, 4, 2, 2, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 2, 1, 6, 3, 6, 4,  
1, 4, 6, 5, 4, 6, 2, 3, 6, 2, 5, 4, 1, 3, 4, 6, 4, 5, 5, 6, 3, 6, 6, 2, 5, 3,  
6, 5, 6, 6, 3, 3, 1, 4, 2, 4, 3, 6, 4, 3, 2, 4, 2, 3, 3, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 4,  
1, 6, 5, 3, 4, 1, 6, 5, 6, 6, 1, 2, 2, 6, 4, 5, 4, 1, 6, 1, 2, 2, 5, 1, 5, 6,  
1, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 2, 4, 1, 6, 1, 3, 3, 1, 5, 6, 6, 2, 2, 3, 1, 4, 5,  
3, 3, 6, 1, 6, 5, 3, 6, 6, 1, 5, 5, 6, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 2, 1, 3, 6, 5, 5,  
4, 6, 6, 6, 4, 6, 6, 1, 6, 3, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 4, 2, 4, 2, 5, 6, 6, 6, 4, 3,  
2, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 6, 1, 2, 5, 2, 1, 5, 5, 5, 6, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 5, 1, 4,  
2, 2, 6, 5, 3, 5, 2, 4, 6, 2, 5, 3, 5, 1, 3, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3, 2, 5, 5, 3,  
1, 3, 2, 4, 6, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 3, 6, 6, 6, 4, 2,  
1, 4, 4, 1, 2, 4, 3, 3, 6, 2, 4, 2, 6, 3



### dice5

4, 4, 6, 5, 1, 5, 5, 4, 6, 1, 1, 2, 1, 5, 6, 3, 1, 6, 6, 6, 5, 5, 4, 6, 2, 2,  
6, 3, 4, 5, 3, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 4, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2,  
2, 3, 3, 1, 2, 2, 6, 5, 4, 4, 6, 3, 6, 4, 6, 6, 5, 1, 3, 6, 2, 1, 3, 2, 1, 5,  
2, 2, 2, 2, 4, 6, 1, 1, 5, 5, 4, 1, 4, 5, 2, 5, 5, 6, 4, 2, 3, 6, 2, 2, 5, 1,  
4, 5, 2, 2, 4, 1, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 3, 2, 5, 5, 3, 4, 6, 2, 5, 5, 2, 3, 1, 1,  
3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 5, 2, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 6,  
2, 2, 5, 5, 5, 1, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 2, 1, 5, 1, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 2, 5, 4,  
4, 5, 1, 6, 3, 6, 6, 4, 6, 1, 3, 3, 6, 2, 1, 4, 5, 6, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 6, 4,  
4, 1, 3, 5, 3, 4, 2, 6, 5, 2, 5, 6, 3, 4, 2, 4, 4, 6, 5, 6, 3, 4, 2, 3, 2, 2,  
4, 6, 4, 5, 6, 2, 5, 4, 1, 3, 6, 2, 6, 2, 5, 4, 4, 4, 5, 6, 3, 5, 2, 3, 6, 1,  
1, 2, 2, 1, 5, 4, 6, 5, 5, 6, 1, 5, 6, 2, 4, 6, 1, 2, 1, 5, 6, 6, 4, 5, 4, 6,  
5, 3, 5, 6, 2, 2, 5, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 6

### dice6

2, 1, 1, 2, 1, 5, 5, 1, 3, 3, 5, 2, 3, 5, 5, 2, 6, 5, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 4,  
5, 3, 1, 6, 4, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 5, 1, 6, 1, 5, 4, 2, 2, 6, 1, 3, 2, 1, 5,  
5, 5, 1, 4, 5, 6, 1, 1, 1, 5, 3, 6, 3, 3, 1, 6, 6, 3, 5, 2, 4, 5, 4, 3, 1, 6,  
4, 6, 6, 4, 6, 6, 5, 4, 2, 3, 4, 4, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 3, 1, 5, 2, 5, 2, 4, 5,  
4, 3, 4, 6, 5, 5, 1, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 6, 4, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 6, 3,  
4, 6, 6, 1, 2, 4, 4, 6, 1, 6, 2, 4, 4, 5, 1, 2, 4, 4, 2, 1, 5, 1, 3, 2, 6, 6,  
1, 5, 5, 3, 1, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 6, 1, 6, 5, 1, 4, 5, 3, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 1,  
4, 2, 4, 3, 1, 4, 3, 5, 1, 6, 4, 6, 4, 5, 6, 3, 2, 6, 2, 1, 6, 6, 2, 1, 4, 6,  
4, 4, 2, 1, 4, 3, 1, 3, 2, 3, 6, 1, 3, 2, 2, 6, 5, 6, 4, 3, 3, 5, 2, 6, 2, 5,  
5, 5, 3, 2, 1, 5, 3, 6, 3, 4, 3, 1, 5, 5, 5, 3, 6, 2, 3, 2, 2, 6, 1, 4, 5, 1,  
6, 4, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 3, 5, 2, 2, 2, 4, 3, 5, 2, 5, 2, 4, 4, 5, 6, 1, 5, 5,  
4, 6, 5, 6, 1, 2, 6, 1, 5, 1, 4, 1, 2, 5

## Πρόβλημα 2 – (παραδοτέο έως 18.11.2021)

- A) Βρείτε το λάθος στο πρόγραμμα που γράψαμε στο τέλος τους μαθήματος της 09.11.2021, για τον υπολογισμό της μάζας μιας σφαίρας ακτίνας  $R = 3$  και πυκνότητας  $\frac{5}{648\pi}(x^2 + y^2)$ , η οποία έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Το αρχείο που γράψαμε στην τάξη βρίσκεται στο [GitHub](#)
- B) Τροποποιήστε την λογική του προγράμματος ώστε να εκτελεί τον υπολογισμό της μάζας της σφαίρας με MC απόρριψης (accept/reject) αντί της απλοϊκής μεθόδου MC (crude) ολοκλήρωσης. Συγκρίνεται τις δύο μεθόδους ως προς την αποτελεσματικότητά τους για τον ίδιο αριθμό τυχαίων αριθμών  $N$ .
- Γ) Πόσο θα άλλαζε η μάζα της σφαίρας αν στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  δημιουργούσαμε μια σφαιρική κοιλότητα μηδενικής πυκνότητας (δηλαδή μια τρύπα στο εσωτερικό του αντικειμένου) ακτίνας  $R_0 = 0.5$  ;



## Πρόβλημα 3 – (παραδοτέο έως 18.11.2021)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{10} e^x dx$  (και η αβεβαιότητά του) με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte–Carlo ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας  $N = 1000$  τυχαίους αριθμούς. Να δομήσετε το πρόγραμμά σας έχοντας ως αφετηρία γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο  $[0, 1]$ .

- α) Να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα  $\delta\hat{I}/\hat{I}$  της MC ολοκλήρωσης
- β) Να υπολογιστεί (αναλυτικά) το θεωρητικώς αναμενόμενο σχετικό σφάλμα  $\delta I/I$  της μεθόδου, για το ίδιο πλήθος τυχαίων δειγμάτων ( $N = 1000$ ).
- γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση  $\sqrt{s^2}$  ενός δείγματος<sup>1</sup> αποτελούμενο από  $4 \times 10^4$  MC ολοκληρώσεις (με  $N = 1000$  η κάθε μία) και να την συγκρίνετε με το  $\delta I$  και το  $\delta\hat{I}$  που υπολογίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Να φτιάξετε ένα ιστόγραμμα που να δείχνει την κατανομή των  $\hat{I}$  και να σχολιάσετε την μορφή της.
- δ) Εάν χωρίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στα δύο, έτσι ώστε

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^5 e^x dx + \int_5^{10} e^x dx$$

και ‘επενδύσουμε’ στις επιμέρους δύο ολοκληρώσεις τους διαθέσιμους τυχαίους αριθμούς χωρισμένους σε δύο ίσα δείγματα  $N = N_1 + N_2 = 500 + 500$ , περιμένουμε το σχετικό σφάλμα της απλοϊκής MC ολοκλήρωσης να μεγαλώσει, να μικρύνει ή να μείνει το ίδιο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας επαναλαμβάνοντας το ερώτημα (β) για τα επιμέρους ολοκληρώματα  $I_1$ ,  $I_2$  και υπολογίζοντας την συνολική αβεβαιότητα του αθροίσματός τους.

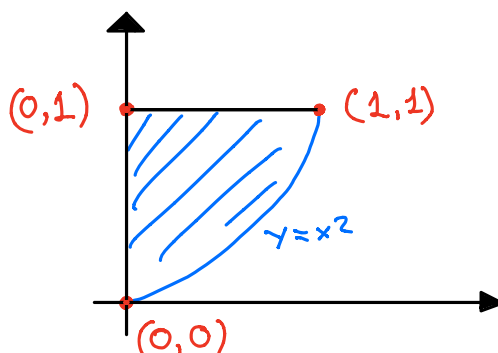
- ε) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α), (β) και (γ) για την ολοκλήρωση με την μέθοδο απόρριψης MC (hit-or-miss) θεωρώντας  $N = 1000$  ζευγάρια τυχαίων αριθμών  $(x, y)$  που έχουν παραχθεί ομοιόμορφα στο  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

<sup>1</sup>Το  $s^2$  ορίστηκε στο πρόβλημα 1 ως η τετραγωνική διασπορά ενός δείγματος παρατηρήσεων (μετρήσεων).

## Πρόβλημα 4 (μη παραδοτέο – λύσεις στο web)

Να υπολογιστεί με την απλοϊκή (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωση, η μάζα των παρακάτω αντικειμένων και η αβεβαιότητά τους, για  $N = 1000$  γεγονότα.

- α) Δισδιάστατη πλάκα που οριοθετείται στην περιοχή  $\{x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$  (διαστάσεις μήκους σε μέτρα) με πυκνότητα  $\rho(x, y) = \frac{20}{13}(x + y)$  [kg/m<sup>3</sup>].



- β) Κύβος πυκνότητας  $\rho(x, y) = \frac{12}{31}(x^2 + yz)$  [kg/m<sup>3</sup>] που οριοθετείται στην περιοχή  $\{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$  με διαστάσεις μήκους μετρημένες σε μέτρα.

Δίνεται, προς σύγκριση, ο ακριβής υπολογισμός της μάζας των δυο σωμάτων είναι  $M = 1$  kg.

Η άσκηση αυτή είναι λυμένη στο web.

[https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/problems/2019\\_2020](https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/problems/2019_2020)

Η διδακτική της αξία ωστόσο παραμένει, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος θα προσπαθήσει να την λύσει δίχως να συμβουλευτεί (εξ αρχής) τις δοσμένες λύσεις.

## Πρόβλημα 5 – (άνευ ημερομηνίας παράδοσης)

Χίλια σωματίδια Brown διαχέονται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων. Βρείτε ποσό μακριά θα βρισκείται κατά μέσο όρο το κάθε σωματίδιο μετά από  $t = 100$  βήματα του ενός δευτερολέπτου, υπολογίζοντας το

$$\bar{d} = \frac{1}{1000} \sum_{w=1}^{1000} \sqrt{x_w^2 + y_w^2}$$

όπου  $(x_w, y_w)$  η θέση του κάθε σωματιδίου  $w = 1, 2, 3 \dots 1000$  για  $t = 100s$ . Στην συνέχεια βρείτε τον μέσο όρο του τετραγώνου της απόστασης του καθενός σωματιδίου (για  $t = 100s$ )

$$\bar{d}^2 = \frac{1}{1000} \sum_{w=1}^{1000} x_w^2 + y_w^2$$

και συγκρίνεται τις απαντήσεις σας με το μονοδιάστατο πρόβλημα διάχυσης.