ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. О. ГОНЧАРА
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ КАФЕДРА
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

Лабораторна робота №2
«Методи розв’язання задачі Коші»
з курсу «Методи обчислень (дод. розділи)»

Варіант №9

Виконав:
студент групи ПА-18-2
Лобань Г. М.

Дніпро, 2020

# Зміст

# Постановка задачі

Крайова задача — це задача відшукання єдиного розв’язку диференціального рівняння на проміжку *[a, b]*, і якій додаткові умови на значення шуканої функції формулюються більш ніж в одній точці. Найпростішою крайовою задачею для звичайних диференціальних рівнянь є двоточкова лінійна крайова задача для диференціального рівняння другого порядку.

***Крайова задача*** називається ***лінійною***, якщо і диференціальне рівняння і крайові умови лінійні. Найпростіше лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$Ly(x) \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a,b] \qquad (1)$$

Тут *p(x), q(x), f(x)* — задані на проміжку *[a,b]* неперервні функції. При таких коефіцієнтах будемо мати $y(x) \in C^{(2)}[a,b]$, тобто *y(x)* буде вдвічі неперервно диференційовною функцією.

Щоб знайти єдиний розв’язок рівняння (1) задають крайові умови.

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \qquad (2)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \qquad (3)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ — відомі сталі, причому такі, для яких виконуються умови

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \qquad (4)$$

Виконання умов (4) забезпечує існування крайових умов.

Диференціальне рівняння (1) будемо називати однорідним, якщо функція *f(x)* є тотожнім нулем на відрізку *[a, b]*. Крайові умови (2), (3) будемо називати однорідними, якщо *A*, *B* одночасно дорівнюють нулю. ***Крайова задача*** називається ***однорідною***, якщо і диференціальне рівняння і крайові умови однорідні.

Лінійними крайовими умовами є також умови періодичності, які у випадку диференціального рівняння другого порядку мають вигляд

$$y(a) = y(b),$$
$$y'(a) = y'(b)$$

Для наближеного розв’язування крайових задач застосовують як чисельні так і аналітичні методи.

# 1. Основні теоретичні частини

## Метод зведення крайової задачі до задач Коші

Враховуючи лінійність диференціального рівняння (1), його розв'язок шукаємо у вигляді лінійної комбінації

$$y(x) = C \cdot u(x) + v(x), \tag{5}$$

де *u(x)* — ненульовий розв'язок однорідного рівняння (1), тобто

$$Lu(x) = 0, \tag{6}$$

а *v(x)* — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), тобто

$$Lv(x) = f(x), \tag{7}$$

*C* — сталий коефіцієнт.

При виконанні умов (6), (7) функція *y(x)* у вигляді (5) буде задовольняти диференціальне рівняння (1) при будь-яких значеннях сталої *C*. Тепер підставимо (5) у крайову умову (2)

$$C(\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a)) + \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A$$

Вимагаємо, щоб ця крайова умова виконувалась при будь-якому значення коефіцієнта *C*. Це можливо, якщо будуть виконуватись такі рівності

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \tag{8}$$

$$\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \tag{9}$$

У точці *x=a* значення *u(a)* та *u'(x)* пов'язані залежністю (8). Одне з цих двох значень (або *u(a)* або *u'(a)*) можна вибрати довільно, а інше — знайти з умови (8). Аналогічно і для функції *v(x)*. Наприклад, якщо $\alpha_0 \neq 0$ , то маємо із залежностей (8), (9)

$$\begin{cases} u(a) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} u'(a), \\ u'(a) = 1 \end{cases} \begin{cases} v(a) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} v'(a) + \dfrac{A}{\alpha_0}, \\ v'(a) = 0 \end{cases}$$

Якщо $\alpha_1 \neq 0$ , то можна вибрати початкові умови в такому вигляді:

$$\begin{cases} u'(a) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} u'(a), \\ u(a) = 1 \end{cases} \begin{cases} v'(a) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} v'(a) + \dfrac{A}{\alpha_0}, \\ v(a) = 0 \end{cases}$$

Вибравши один із цих варіантів початкових умов, приходимо до двох задач Коші, наприклад, такий варіант:

$$\begin{cases} Lu(x)=0, & x\in[a,b], \\ u(a)=1, \\ u'(a)=-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} Lv(x)=f(x), & x\in[a,b], \\ v(a)=0, \\ v'(a)=\dfrac{A}{\alpha_1} \end{cases} \qquad (11)$$

Розглянемо детально схему розв'язування однієї із них, наприклад (10). Маємо задачу Коші в третій постановці

$$\begin{cases} u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=0, & x\in[a,b], \\ u(a)=1, \\ u'(a)=-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \end{cases}$$

Від диференціального рівняння другого порядку передймо до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} u'(x)=z(x), \\ z'(x)=-p(x)z(x)-q(x)u(x), \\ u(a)=1, \\ z(a)=-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \end{cases}$$

Використовуючи, наприклад, розрахункові формули методу Ейлера

$$\begin{cases} u_{i+1}=u_i+h_i z_i, \\ z_{i+1}=z_i+h_i(-p(x_i)z_i-q(x_i)u_i), \end{cases} \qquad i=\overline{0,n-1}$$

будуємо таблицю значень

| $x_i$ | $x_0=a$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | $u_0=1$ | $u_1$ | ... | $u_n$ |
| $z_i$ | $z_0=-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}$ | $z_1$ | ... | $z_n$ |

Зауважимо, що в задачах (10), (11) точки $x_i$, $i=\overline{0,n}$ повинні бути однаковими. Розв'язавши задачі (10), (11) будемо мати значення $u_i$, $u'_i$, $v_i$, $v'_i$ у точках $x_i$, $i=\overline{0,n}$. За формулою (5) знаходимо в точці $x_n=b$ значення

$$y_n=C\cdot u_n+v_n, \qquad y'_n=C\cdot u'_n+v'_n$$

і підставимо їх у другу крайову умову (3)

$$\beta_0(v_n+Cu_n)+\beta_1(v'_n+Cu'_n)=B.$$

У лівій частині останньої рівності перегрупуємо доданки

$$C(\beta_0 u_n+\beta_1 u'_n)+(\beta_0 v_n+\beta_1 v'_n)=B$$

За умови, що

$$(\beta_0 u_n+\beta_1 u'_n)\neq 0, \qquad (12)$$

знаходимо

$$C=\frac{B-(\beta_0 v_n+\beta_1 v'_n)}{(\beta_0 u_n+\beta_1 u'_n)} \qquad (13)$$

Якщо умова (12) виконується, то це означає, що метод дозволяє знайти єдиний розв'язок крайової задачі, який обраховується за формулами:

$$y_1=C\cdot u_i+v_i\,,\quad i=\overline{0,n}$$

Якщо умова (12) не виконується, то рекомендується до розв'язування задач Коші (10), (11) застосувати більш точні методи, ніж метод Ейлера. Якщо це теж не допоможе, то невиконання умови (12) може означати, що крайова задача або зовсім не має розв'язків, або має їх безліч.

Метод зведення крайової задачі до задач Коші можна використовувати і дещо інакше, а сам, розв'язок лінійного диференціального рівняння (1) шукати у вигляді лінійної комбінації

$$y(x)=C_1\cdot u_1(x)+C_2\cdot u_2(x)+v(x),$$

де $u_1(x),u_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (1), а *v(x)* — частинний розв'язок неоднорідного рівняння, $C_1,C_2$ — сталі коефіцієнти.

Крайову задачу (1), (2), (3) зводимо до розв'язування трьох задач Коші:

$$\begin{cases} Lv(x)=f(x), \\ v(a)=0, \\ v'(a)=0. \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_1(x)=0, \\ u_1(a)=0, \\ u'_1(a)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2(x)=0, \\ u_2(a)=1, \\ u'_2(a)=0 \end{cases}$$

Початкові умови всіх трьох задач Коші вибираємо самі. Однак, для функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$ початкові умови повинні бути лінійно незалежними, а оскільки функція *v(x)* визначається неоднорідним диференціальним рівнянням, то початкові умови для неї можна брати однорідними.

Після розв'язування задач Коші загальний розв'язок крайової задачі обчислюємо за формулами:

$$y(x_k)=C_1\cdot u_1(x_k)+C_2\cdot u_2(x_k)+v(x_k),\quad k=\overline{0,n}$$
$$y'(x_k)=C_1\cdot u'_1(x_k)+C_2\cdot u'_2(x_k)+v'(x_k),\quad k=\overline{0,n}$$

Сталі $C_1$, $C_2$ вибираємо такими, що виконувалися крайові умови (2), (3).

У випадку лінійного диференціального рівняння *n*-го порядку загальний розв'язок шукаємо у вигляду

$$y(x)=\sum_{k-1}^{n} C_k \cdot u_k(x)+v(x),$$

де $u_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ — лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння, а $v(x)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Коефіцієнти $C_k$ визначаються із крайових умов.

У розглянутому методі розв'язування крайових задач суттєво використано те, що диференціальне рівняння є лінійним і крайові умови є лінійними. Але цей метод можна застосувати і до нелінійних крайових задач, тоді його називають ***методом стрільби.***

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\begin{cases} y''(x)=f(x, y(x), y'(x)), \quad x\in[a,b], \\ y(a)=y_0, \\ y(b)=y_{1.} \end{cases} \tag{14}$$

Тут $f(x, y(x), y'(x))$ - деяка відома нелінійна функція своїх аргументів. Метод стрільби пропонує замість крайової задачі (14) розв'язувати таку задачу Коші:

$$\begin{cases} y''(x)=f(x, y(x), y'(x)), \quad x\in[a,b], \\ y(a)=y_0, \\ y'(a)=k=tg\,\alpha\,. \end{cases} \tag{15}$$

У задачі (15) $\alpha$ — це кут між дотичною до інтегральної кривої $y=y(x,\alpha)$ в точці $A(a,y_0)$ та віссю абсцис (рис. 1)

Вважаючи розв'язок задачі Коші (15) залежним від параметра $\alpha$ , будемо шукати таку інтегральну криву $y=y(x,\alpha*)$ , яка виходить із точки $A(a, y_0)$ і попадає до точки $B(b, y_1)$. Отже, якщо $\alpha=\alpha*$ , то розв'язок задачі Коші збігається із розв'язком крайової задачі. Для визначення потрібного параметра $\alpha$ маємо умову

$$F(\alpha)\equiv y(b,a)-y_1=0. \tag{16}$$

На умову (16) можна дивитись як на рівняння відносно $\alpha$ . Воно відрізняється від звичного запису тим, що функцію $F(\alpha)$ не можна записати у вигляді деякого аналітичного виразу, оскільки вона знаходиться як розв'язок задачі Коші (15). Але до розв'язування нелінійних рівнянь, наприклад, метод ділення навпіл. Для цього, спочатку знаходимо відрізок $[\alpha_0, \alpha_1]$, такий, що містить значення $\alpha*$ і для якого виконується умова $F(\alpha_9)\cdot F(\alpha_1)<0$. Далі вибираємо $\alpha_2=\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}$ і, знову розв’язуючи задачу Коші, знаходимо $y(b, \alpha_2)$, а значить і $F(\alpha_2)$. У відповідності із алгоритмом методу ділення навпіл із двох відрізків $[\alpha_0, \alpha_2],[\alpha_2, \alpha_1]$ залишаємо той, на кінцях якого $F(\alpha)$ змінює знак. Ітераційний процес зупиняємо, коли модуль різниці двох послідовно знайдених значень $\alpha$ менший за деяке наперед задане число $\varepsilon$. У цьому випадку останній розв’язок задачі Коші буде шуканим розв’язком крайової задачі.

Описаний алгоритм отримав назву “методу стрільби” тому, що в ньому ніби проводиться “пристрілка” по куту нахилу дотичної до інтегральної кривої у початковій точці *x=a*. Цей алгоритм добре працює, коли розв’язок $y(x, \alpha)$ є не дуже чутливим до змін $\alpha$, інакше алгоритм стає нестійким. У цьому випадку можна поставити початкові умови на іншому кінці *x=b*, тобто інтегрувати диференціальне рівняння, починаючи з правого кінця. Інколи при цьому стійкість покращується. Якщо зміна напрямку інтегрування не допомагає, то рекомендується поміняти метод. Можна вибрати різницевий метод або інший спеціальний метод, що враховує особливості задачі.

## Метод сіток (метод скінченних різниць)

Це один із найбільш універсальних методів розв'язування крайових задач як для ЗДР, так і для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Від дозволяє звести крайову задачу до розв'язування деякої системи алгебраїчних рівнянь.

Викладемо схему методу сіток на прикладі лінійної двоточкової крайової задачі для ЗДР другого порядку.

### Ідея методу. Система сіткових рівнянь

Розглянемо крайову задачу (1), (2), (3), (4) припускаючи, що шукана функція *y(x)* має стільки неперервних похідних, скільки їх потрібно для застосування методу сіток.

Розберемо ***ідемо методу*** по кроках.

1. На відрізку *[a, b]* фіксуємо точки $x_i, i=\overline{0,n}$ з деяким кроком $h_i=x_{i+1}-x_i$. Сукупність цих точок називається ***сіткою***, а кожна окрема

точка — ***вузлом сітки***. Точки $x_i, i=\overline{1,n-1}$ будемо називати ***внутрішніми вузлами***, а дві точки $x_0=a$, $x_n=b$ — ***крайовим (межовими) вузлами***. Якщо вузли рівновіддалені, тобто $x_i=a+ih$, $i=\overline{0,n}$; $h=(b-a)/n$, то сітка називається ***рівномірною*** (регулярною). У протилежному випадку сітка називається нерівномірною. Сітку будемо позначати $\omega_n=\{x_i, i=\overline{0,n}\}$ . Якщо сітка рівномірна, то

$$\omega_n=\left\{x_i | x_i+a+ih, h=\frac{b-a}{n}, i=\overline{0,n}\right\}$$

У вузлах сітки будемо визначати ***сіткові функції***, тобто такі таблиці:

$y^{(h)}=\{y(x_i), x_i\in\omega_h\}$ — таблиця точних значень шуканої функції у вузлах сітки;

$y_h=\{y_i, i=\overline{0,n}\}$ — таблиця наближених значень шуканої функції у вузлах сітки.

Метод сіток дозволяє обчислювати сіткову функцію $y_h$, тобто наближені значення функції $y(x)$ у вузлах сітки.

2. Крайову задачу (1), (2), (3) на множині вузлів сітки замінимо деякою ***сітковою задачею***. Під сітковою задачею будемо розуміти деякі співвідношення між наближеними значеннями шуканої функції $y(x)$ у вузлах сітки. Для крайової задачі (1), (2), (3) сітковою задачею буде СЛАР. На цьому кроці методу визначається порядок апроксимації крайової задачі сітковою.

3. Добута сіткова задача досліджується на однозначну розв’язніть, на стійкість, пропонується метод розв’язування сіткової задачі.

Зупинимось детально на останніх двох кроках. Для ***заміни диференціального рівняння сітковим*** виберемо рівномірну сітку. Диференціальне рівняння (1) будемо записувати тільки у внутрішніх вузлах сітки.

$$L(y(x_i))\equiv y''(x_i)+p(x_i)y'(x_i)+q(x_i)y(x_i)=f(x_i), i=\overline{1,n-1} \qquad (17)$$

Щоб виразити значення похідних у точці  через значення шуканої функції у вузлах сітки, звернемося до триточкового шаблону, показаного на рис, та скористаємось формулами.

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}-\frac{h}{2}y''(\xi), \quad \xi\in(x_i, x_{i+1}) \qquad (18)$$

$$y'(x_i)=\frac{y(x_i)-y(x_{i-1})}{h}+\frac{h}{2}y''(\eta), \quad \eta\in(x_{i-1},x_i) \tag{19}$$

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}-\frac{h^2}{6}y'''(\mu), \quad \mu\in(x_{i-1},x_{i+1}) \tag{20}$$

$$y''(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\tau), \quad \tau\in(x_i) \tag{21}$$

Підставимо скінченно-різницеві співвідношення (20), (21) до рівняння (17), будемо мати

$$L(y(x_i))=L_h(y(x_i))+R_h(x_i)=f(x_i)=f(x_i), i=\overline{1,n-1} \tag{22}$$

де

$$L_h(y(x_i))\equiv\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}+p(x_i)\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}+q(x_i)y(x_i) \tag{23}$$

$$R_h(x_i)\equiv-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\tau)-p(x_i)\frac{h^2}{6}y'''(\mu)=O(h^2) \tag{24}$$

Вираз (23) будемо називати ***різницевим оператором*** другого порядку, а (24) ***похибкою апроксимації*** диференціального оператора $L(y(x_i))$ різницевим $L_h(y(x_i))$. Похибка апроксимації є величиною того ж порядку мализни, що й $h^2$, тобто ***порядок апроксимації*** диференціального рівняння різницевим дорівнює двом відносно кроку $h$.

Нехай крок сітки $h$ є малим настільки, щоб у (22) величиною (24) можна будо знехтувати порівняно із (23). Тоді, відкинувши у (22) величину $R_h(x_i)$ і скориставшись іншими позначеннями добудемо наближені рівняннями

$$L_h(y_i)=f(x_i), i=\overline{1,n-1} \tag{25}$$

Систему алгебраїчних рівнянь (25) називають ***різницевою схемою***. Зауважимо, що СЛАР (25) містить $(n-1)$ рівнянь та $(n+1)$ невідомих. Матриця СЛАР (25) є тридіагональною, невідомими є значення $y_0, y_1, ..., y_n$.

Звернемось до крайових умов (2) та (3). Використовуючи (18) при $i=0$, із (2) будемо мати

$$\alpha_0 y(x_0)+\alpha_1\frac{y(x_i)-y(x_0)}{h}-\alpha_1\frac{h}{2}y''(\xi)=L_n(y(x_0))+R_n(x_0)=A, \tag{26}$$

де

$$L_h(y(x_0))\equiv\alpha_0 y(x_0)+\alpha_1\frac{y(x_1)-y(x_0)}{h},$$

$$R_h(x_0)\equiv-\alpha_1\frac{h}{2}h''(\xi)$$

Аналогічно, використовуючи (19) при $i=n$, із (3) маємо

$$\beta_0 y(x_n)+\beta_1\frac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{h}+\beta_1\frac{h}{2}y''(\eta)=L_n(y(x_n))+R_h(x_n)=B, \tag{27}$$

де

$$L_h(y(x_n)) \equiv \beta_0 y(x_n) + \beta_1 \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h},$$

$$R_h(x_n) \equiv \beta_1 \frac{h}{2} y''(\eta)$$

При достатньо малому  величинами , що мають ***перший порядок мализни відносно h***, можна знехтувати. Тоді добудемо із (26), (27) ще два рівняння

$$L_h(y_0) = A, \qquad L_h(y_h) = B \tag{28}$$

Рівняння (25), (28) утворюють у сукупності СЛАР, причому рівнянь стільки, скільки невідомих.

Звернемо увагу на те, що крайові умови (2), (3) при необхідності апроксимувати різницевими умовами з похибкою другого порядку мализни відносно $h$. Як це зробити, покажемо на крайовій умові (2), для чого скористаємося розкладаннями:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) = h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + O(h^3),$$

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_0) + 2h \cdot y'(x_0) + \frac{4h^2}{2} y''(x_0) + O(h^3)$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} y(x_2) - 4y(x_1) &= -3y(x_0) - 2h \cdot y'(x_0) + O(h^3), \\ y'(x_0) &= \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2) \end{aligned} \tag{29}$$

Якщо підставити (29) до крайової умови (2), то добудемо сіткове рівняння

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A, \tag{30}$$

в якому три невідомих $y_0$, $y_1$, $y_2$. Невідоме $y_2$ можна виключити з (30), якщо розглянути апроксимацію диференціального рівняння в точці $x_1$

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + p(x_1) \frac{y_2 - y_0}{2h} + q(x_1) y_1 = f(x_1)$$

Звідси можна знайти $y_2$ і підставити до (30). Добудемо рівняння з двомі невідомими, але це рівняння буде значно складнішим за (26). На практиці віддають перевагу рівнянням з невисоким порядком апроксимації, але простого вигляду, а для отримання бажаної точності берусь крок $h$ більш дрібним.

## Про розв'язність системи різницевих рівнянь

Запишемо разом систему різниуевих рівнянь (25), (28)

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\mathrm{h}}+q(x_1)y_i=f(x_i),\ i=\overline{1,n-1}$$

$$a_0y_0+a_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,$$

$$\beta_0y_n+\beta y_n-\frac{y_{n-1}}{h}=B$$

Перш ніж аналізувати її на розв'язність, виконаємо звеження подібних членів і запишемо рівняння у вигляді

$$\Lambda_h(y_i)\equiv A_iy_{i+1}+B_iy_i+C_iy_{i-1}=F_i,\ i=1,2,3,4...,n-1. \qquad (31)$$

Тут

$$A_i=1+\frac{h}{2}p(x_i), \qquad B_i=-2+h^2q(x_i),$$

$$C_i=1-\frac{h}{2}p(x_i), \qquad F_i=h^2f(x_i).$$

$$\Lambda_h\equiv-y_0+k_1y_1=F_0 \qquad k_1=\frac{a_1}{a_1-ha_0} \qquad F_0=\frac{hA}{a_1-ha_0} \qquad (32)$$

$$\Lambda_h(y_n)\equiv-y_n+k_2y_{n-1}=F_n, \qquad k_2=\frac{\beta_1}{\beta_1+h\beta_0}, \qquad F_n=\frac{-hB}{\beta_1+h\beta_0} \qquad (33)$$

Для доведення однозначної розв'язності системи (31), (32), (33) покажемо, що відповідна однорідна система

$$\begin{cases}\Lambda_h(y_0)=0,\\ \Lambda_h(y_i)=0,\ \ i=1,2,...,n-1\\ \Lambda_h(y_n)=0\end{cases} \qquad (34)$$

Мае лише тривіальний розв'язок. Для цього доведемо теорему.

**Теорема** (принцип максимуму). Нехай виконуетьс умови:

1) $q(x)\le0, a\le x\le b;$

2) крок *h* малий настільки, що $\frac{h}{2}\max_{x\in[a,b]}|p(x)|<1$ ;

3) $a_0\cdot a_1\le0,\quad \beta_0\cdot\beta_1\ge0.$

Тоді, якщо $\Lambda_h(y_i)\ge0$ $(\Lambda_h(y_i)\le0)$ при всіх $i=\overline{0,n}$ то

$y_i\le0$ $(y_i\ge0)$ при всіх $i=\overline{0,n}$

**Доведення**. Якщо $y_i\le0$ $(y_i\ge0)$ при всіх $i=\overline{0,n}$

**Доведення**. Якщо $y_i \equiv Const$ , тобто сіткова функція у всіх вузлах сітки приймае однакові значеня, то тверджeня теореми очевидні. Дійсно, маємо при $i=\overline{1,n-1}$ :

$$\Lambda_h(y_i) \equiv A_i y_{i+1} + B_i y_i + C_i y_{i-1} = y_i(A_i + B_i + C_i) = y_i(h^2 q(x_i)) \geq 0 \rightarrow y_i \leq 0.$$

При $i=1$:

$$\Lambda_h(y_0) = -y_0 + k_1 y_1 = y_0(k_1 - 1) \geq 0 \rightarrow y_0 \leq 0 \text{ оскільки } k_1 \in [0,1]$$

При $i=n$

$$\Lambda_h(y_n) = -y_n + k_2 y_{n-1} = y_n(k_2 - 1) \geq 0 \rightarrow y_n \leq 0 \text{ оскільки } k_2 \in [0,1]$$

Теорема доведена для сталої сіткової функції.

Тепер розглянемо випадок, коли сіткова функція $\{y_i\}_{i=0}^n$ хоча б у двох вузлах приймає різні значення. Теорему доводимо методом від супротивного. Нехай виконується умова $\Lambda_h(y_i) \geq 0$ при всіх $i=\overline{0,n}$ , а серед значень сіткової функції $\{y_i\}_{i=0}^n$ знайшлись додатні. Нехай $\max\limits_{0 \leq i \leq n} y_i = y_s > 0$ , тут *s* — номер вузла, в якому сіткова функція приймає найбільше значення. Вузол $x_s$ може бути внутрішнім, або межовим. Розглянемо окремо кожен із цих варіантів.

Нехай $x_s$ — внутрішній вузол. Оскільки сіткова функція не є тотожною сталою, то можна припустити, що хоча б одне з двох сусідніх значень, а самеу $y_{s-1}$ або $y_{s+1}$ , буде строго меншим за значення $y_s$ . Тоді

$$\begin{aligned}\Lambda_h(y_s) &= A_s y_{s+1} + B_s y_s + C_s y_{s-1} = \\ &= A_s(y_{s+1} - y_s) + C_s(y_{s-1} - y_s) + y_s(B_s + A_s + C_s) < 0\end{aligned}$$

Ми прийшли до протиріччя. Отже, вузол $x_s$ не може бути внутрішнім вузлом.

Розглянемо випадок, коли $x_s$ є межовим вузлом. Нехай $\max\limits_{0 \leq i \leq n} y_i = y_0 > 0$ , крім того $y_1 < y_0$ . Розглянемо у вузлі $x_0$ сітковий оператор

$$\Lambda_h(y_0) = -y_0 + k_1 y_1 = k_1(y_1 - y_0) + y_0(k_1 - 1) < 0$$

а це неможливо через умови теореми.

Нехай $\max\limits_{0 \leq i \leq n} y_i = y_n > 0$ , крім того $y_{n-1} < y_n$ . Маємо у вузлі $x_n$

$$\Lambda_h(y_n) = -y_n + k_2 y_{n-1} = k_2(y_{n-1} - y_n) + y_n(k_2 - 1) < 0$$

Знову прийшли до протиріччя. Отже, теорема доведена.

Другий варіант теореми доводиться аналогічно.

Тепер звертаємося до системи рівнянь (34). На підставі (34) можна вважати, що виконуються обидва варіанти теореми принцип максимуму, а саме

$$\begin{cases} \Lambda_h(y_i) \ge 0 \\ \Lambda_h(y_i) \le 0 \end{cases} \quad \text{при всіх} \quad i=\overline{0,n}$$

Це означає, що сіткова функція $\{y_i\}_{i=0}^n$ задовольняє умови

$$\begin{cases} y_i \le 0 \\ y_i \ge 0 \end{cases} \quad \text{при всіх} \quad i=\overline{0,n}$$

А таке можливе тільки тоді, коли сіткова функція $\{y_i\}_{i=0}^n$ є тотожним нулем.

Отже, однорідна система (34) має лише тривіальний розв’язок, тому неоднорідна система (31), (32), (33) має єдиний розв'язок.

## Метод прогонки

Запишемо систему (31), (32), (33)

$$\begin{cases}
-y_0 + k_1 y_1 = F_{0,} \\
C_1 y_0 + B_1 y_1 + A_1 y_2 = F_{1,} \\
C_2 y_1 + B_2 y_2 + A_2 y_3 = F_{2,} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
C_{n-1} y_{n-2} + B_{n-1} y_{n-1} + A_{n-1} y_n = F_{n-1}, \\
k_2 y_{n-1} + -y_n = F_n
\end{cases}$$

Цю тридіагональну СЛАР будемо розв’язувати методом прогон¬ки. Для цього перепишемо перше рівняння у вигляді

$$y_0 + m_1 y_1 = g_1 \text{ де } m_1 = -k_{1,}\, g_1 = -F_0 \tag{35}$$

Використовуючи (35), виключимо $y_0$ з другого рівняння системи

$$C_1(g_1 - m_1 y_1) + B_1 y_1 + A_1 y_2 = F_1$$

Зберемо подібні члени

$$(B_1 - C_1 m_1) y_1 + A_1 y_2 = F_1 - C_1 g_1$$

За умови, що ділення можливе, перепишемо останню рівність у вигляді

$$y_1+m_2 y_2=g_2,\ \text{де}\ m_2=\frac{A_1}{B_1-C_1 m_1},\ g_2=\frac{F_1-C_1 g_1}{B_1-C_1 m_1}. \qquad (36)$$

Використовуючи (7.36), виключимо $y_1$, з третього рівняння системи

$$C_2(g_2-m_2 y_2)+B_2 y_2+A_2 y_3=F_2$$

Зберемо подібні

$$(B_2-C_2 m_2)y_2+A_2 y_3=F_2-C_2 g_2$$

За умови, що ділення можливе, перепишемо цю рівність у вигляді

$$y_2+m_3 y_3=g_3,\ \text{де}\ m_3=\frac{A_2}{B_2-C_2 m_2},\ g_3=\frac{F_2-C_2 g_2}{B_2-C_2 m_2}.$$

Продовжуючи цей алгоритм, запишемо передостаннє рівняння системи у вигляді

$$y_{n-1}+m_n y_n=g_n$$

$$\text{де}\ m_n=\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}-C_{n_1} m_{n-1}},\ g_n=\frac{F_n-1-C_{n-1} g_{n-1}}{B_{n-1}-C_{n-1} m_{n-1}} \qquad (37)$$

З рівняння (37) знайдемо $y_{n-1}$ і підставимо в останнє р вняння системи

$$k_2(g_n-m_n y_n)-y_n=F_n$$

Приводимо подібні та знаходимо (за умови, що ділення можливе)

$$y_n=\frac{k_2 g_n-F_n}{1+k_2 m_n} \qquad (38)$$

На цьому закінчується прямий хід методу прогонки і починаєть¬ся зворотний. Знаючи $y_n$ знаходимо послідовно всі інші невідомі за такими формулами:

$$\begin{cases} y_{n-1}=g_n-m_n y_n \\ y_{n-2}=g_{n-1}-m_{n-1} y_{n-1} \\ \ldots \\ y_0=g_1-m_1 x_1 \end{cases} \qquad (39)$$

Незважаючи на те, що метод прогонки є точним методом, добутий цим методом розв’язок, буде наближеним через обчислювальну похибку. Метод прогонки будемо називати ***стійким***, якщо похибки округлень не будуть накопичуватись. Дослідимо метод на стійкість до обчислювальної похибки. Для цього припустимо, що починаючи зворотний хід методу, знайдено $y_n$ за формулою (38) з деякою обчислювальною похибкою $\varepsilon_n$ тобто

$$y_n=\overline{y_n}+\varepsilon_n$$

Тут $\overline{y_n}$ — наближене значення невідомого $y_n$ через обчислювальну похибку.

За першою формулою з (39) знаходимо $y_{n-1}$ ,

$$y_n=g_n-m_n(\overline{y_n}+\xi_n)=(g_n-m_n\overline{y_n})-m_n\xi_n=\overline{y_{n-1}}+\xi_{n-1}$$

Тут $\overline{y_{n-1}}=g_n-m_n\overline{y_n}$ — наближене значення невідомого $y_{n-1}$ , $\varepsilon_{n-1}=-m_n\varepsilon_n$ Це похибка, з якою буде знайдено $y_{n-1}$ .

З другої формули (39) знаходимо наближене значення $\overline{y_{n-2}}$ та похибку, з якою воно буде обчислене

$$y_{n-2}=\overline{y_{n-2}}+\xi_{n-2}$$

де

$$\overline{y_{n-2}}=g_{n-1}-m_{n-1}\overline{y_{n-1}}$$

$$\varepsilon_{n-2}=-m_{n-1}\varepsilon_{n-1}=m_{n-1}m_n\varepsilon_n$$

Продовжуючи цей алгоритм, знаходимо, що

$$y_{n-k}=\overline{y_{n-k}}+\varepsilon_{n-k}$$

$$\xi_{n-k}=(-1)^k m_n m_{n-1}\dots m_{n-k+1}\xi_n \qquad (40)$$

З формули (40) випливає, що якщо

$$|m_i|\le 1\,,\, i=1,2\,,\,\dots.\,,\, n\,, \qquad (41)$$

то метод прогонки буде стійким до обчислювальної похибки. При цьому у формулах (36), (37) для прогонних коефіцієнтів $m_i$ $g_i$ , *i = 2,3,...,n* та у формулі (38) ніде не виникне нуля в знаменнику.

Сформулюємо достатні умови стійкості методу прогонки.

**Теорема** (стійкості). Нехай виконуються умови:

1) $q(x)\le 0\,,\, a\le x\le b\,;$

2) крок *h* малий настільки, що $\frac{h}{2}\max_{x\in[a,b]}|p(x)|<1$ ;

3) $a_0\cdot a_1\le 0,\quad \beta_0\cdot\beta_1\ge 0\,,\quad k_1+k_2<2$

Тоді $|m_i|\le 1, i=1,2,\dots,n$

**Доведення**. Теорему доводимо методом математичної індукції. Зформули (35) видно, що $|m_i|<1$, причому якщо, $k<1$, то $|m_1|<1$.

Нехай $|m_i|<1$, доведемо, що з цього випливає нерівність, $|m_{i+1}|\le 1$. Для коефіцієнта $m_{i+1}$ маємо формулу

$$m_{i+1}=\frac{A}{B_i-C_i m_i}$$

Розглянемо ланцюжок нерівностей

$$|B_i-C_i m_i|-|A_i|\ge|B_i|-|C_i|\cdot|m_i|-|A_i|\ge A_i+C_i-C_i\cdot|m_i|-A_i=C_i(1-|m_i|)\ge 0 \qquad (42)$$

Доведена нерівність означає, що $|B_i-C_i m_i|\ge|A_i|$, тобто $|m_{i+1}|<1$. З (42) видно, що якщо $|m_i|<1$, то $|m_{i+1}|\le 1$. Теорема доведена.

Зауважимо, що у всіх формулах, за якими обчислюються коефіцієнти $m_i$, $g_i$, $i = 2,3,...,n$ (наприклад, (36), (37)) ніде в знаменнику не виникне нуля.

Подивимось на знаменник формули (38). Якщо $|k_1|<1$, то для всіх $i=\overline{1,n}$ буде виконуватися строга нерівність $|m_i|<1$, а звідси буде випливати така нерівність $1+k_2 m_n>0$. Якщо $k_1=1$, то $k_2<1$, а це означає, що також виконується нерівність $1+k_2m_n>0$.

## Аналітичні методи розв’язування крайових задач

У багатьох випадках виникає необхідність знати розв’язок крайової задачі не в чисельному, а в аналітичному вигляді. До аналітичних методів належать такі: колокації, найменших квадратів, Гальоркіна.

$$Ly(x)\equiv y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x), \quad x\in[a,b] \qquad (43)$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — задані на проміжку $[a,b]$ неперервні функції.

Крайові умови

$$\alpha_0 y(a)=\alpha_1 y'(a)=A, \qquad (44)$$

$$\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B, \qquad (45)$$

Де $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1,A,B$ — відомі сталі, причому такі, для яких виконуються умови

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|\ne 0, \qquad |\beta_0|+|\beta_1|\ne 0 \qquad (46)$$

Як вже відмічалось, якщо в рівнянні (43) виконуються умови $p(x)\in C[a,b], f(x)\in C[a,b]$, то $y(x)\in C^2[a,b]$, тобто $y(x)$ буде вдвічі неперервно диференційовною функцією на проміжку *[a,b]*. Вважаємо, що розв’язок крайової задачі (43)-(46) існує і є єдиним.

Аналітичні методи побудови наближеного розв’язку задачі (43), (44), (45) вимагають побудови базисних (координатних) функцій.

***Базисними*** для задачі (43), (44), (45) будемо називати функції

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

які задовольняють такі умови:

1. Кожна фукнція визначена на *[a,b]*, та $u_k(x) \in C^{(2)}[a,b], \quad k=0,1,\dots;$

2. Функції — лінійно незалежні при будь-якому натуральному *n=2,3,...;*

3. Функція $u_0(x)$ задовольняє неоднорідні умови (44), (45), тобто

$$\alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u'_0(a) = A,$$
$$\beta_0 u_k(b) + \beta_1 u'_0(b) = B.$$

Усі інші функції $u_k(x)$, $k=1,2,...$ задовольняють однорідні крайові умови (44), (45), тобто

$$\begin{cases} \alpha_0 u_k(a) + \alpha_1 u'_k(a) = 0, \\ \beta_0 u_k(b) + \beta_1 u'_k(b) = 0. \end{cases} \quad k=1,2,\dots$$

При такій властивості базисних фукнцій їхня лінійна комбінація (узагальнений многочлен)

$$P_n(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x) \tag{47}$$

задовольняє умови (44), (45) при будь-яких значеннях сталих коефіцієнтів $C_k$, $k=1,2,...,n;$

4. Система функцій $u_k(x)$, $k=0,1,2,...$ є повною в класі *C[a,b]*, тобто для будь-якої функції $g(x) \in C[a,b]$ та $\forall \varepsilon > 0$ існують таке натуральне число *n* та такі сталі $C_1, C_2, ..., C_n$, що виконується нерівність $\|g(x) - P_n(x)\| < \varepsilon$ . Тут $P_n(x)$ — узагальнений многочлен (47).

Коли базисні функції побудовані, то наближений розв’язок задачі (43), (44), (45) шукаємо у вигляді узагальненого многочлена *n*-го степеня.

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x) \tag{48}$$

Оскільки функція (48) точно задовольняє крайові умови (44), (45) при будь-яких значеннях сталих $C_k$, $k=1,2,...,n$, то залишається тільки наближено задовольнити диференціальне рівняння (43). Для цього підставимо (48) до рівняння (43), добудемо ***відхил***

$$R_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L(y_n(x)) - f(x) = L(u_0(x)) - f(x) + \sum_{k-1}^{n} C_k L(u_k(x)), \qquad (49)$$

який характеризує похибку, з якою задовольняється диференціальне рівняння. Аналітичні методи відрізняються один від одного засобами мінімізації відхилу (49).

***Метод колокації*** вимагає, щоб відхил дорівнював нулеві хоча б у скінченній системі точок $x_n \in [a, b]$, $k=\overline{1,n}$. Для цього виберемо на $[a,b]$ $n$ різних між собою точок $a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < b$, які називаються ***точками колокації*** і будемо вимагати, щоб

$$R_n(x_k, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad k = 1,2, \dots, n \qquad (50)$$

Умови (50) приводять до СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів $C_1, C_2, \dots, C_n$. Запишемо ці рівняння детальніше, підставивши (49) до (50).

$$L(u_0(x_k)) - f(x_k) + \sum_{i=1}^{n} C_i L(u_i(x_k)) = 0 \qquad (51)$$

Перепишемо ці рівняння інакше

$$\sum_{i=1}^{n} C_i L(u_i(x_k)) = f(x_k) - L(u_0(x_k)), \quad k = \overline{1,n} \qquad (52)$$

Розглянемо визначник СЛАР (52)

$$\Delta = \begin{vmatrix} L(u_1(x_1)) & L(u_2(x_1)) & \dots & L(u_n(x_1)) \\ L(u_1(x_2)) & L(u_2(x_2)) & \dots & L(u_n(x_2)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(u_1(x_n)) & L(u_2(x_n)) & \dots & L(u_n(x_n)) \end{vmatrix} \qquad (53)$$

Якщо точки колокації всі різні, то функції $\{L(u_k(x))\}_{k=1}^{n}$ лінійно незалежні, то визначник (53) відрізняється від нуля. Доведемо лінійну незалежність функцій $\{L(u_k(x))\}_{k=1}^{n}$ .

***Теорема.*** Нехай для системи функцій $\{u_k(x)\}_{k=1}^{n}$ виконуються такі умови:

1. Функції  лінійно незалежні при будь-якому натуральному ;

2. Однорідна задача (43), (44), (45) має лише тривіальний розв’язок.

Тоді система $\{L(u_k(x))\}_{k=1}^{n}$ буде лінійно незалежною.

***Доведення***. Для доведення використаємо метод від супротивного, а саме: нехай умови теореми виконуються, а функції $\{L(u_k(x))\}_{k=1}^{n}$ лінійно залежні, тобто існують такі сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ серед яких є ненульові, і такі, що

$$C_1(L(u_1(x)))+C_2(L(u_n(x)))+...+C_n(L(u_n(x)))=L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x)\right)=0$$

Звідси випливає, що — о лінійно залежні функції, а це суперечить умові 1) теореми. Теорема доведена.

Отже, із системи (52) можна визначити параметри $C_1, C_2, ..., C_n$, а потім шуканий розв'язок крайової задачі знайти за формулою (48).

Найчастіше точки колокації беруть рівновіддаленими, але можуть бути і інші варіанти.

### Метод скінченних елементів ????

## 2. Чисельний експеримент та аналіз результатів

## Висновки

## Перелік використаних джерел

1. Бойко Л.Т. "Основи чисельних методів" Навчальний посібник, 2009.

## Додаток. Код програми.