NOIP2021 模拟赛

（2021.10.12　8:00～12:30）

解题报告

Problem A

一个观察是, 如果我们要让某个棋子最先挂掉, 那它前面的棋子为了不堵路, 一定是排在 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 这些位置. 同时, 将他们移动到这些位置之后, 可能的方案数不会变少.

维护一个栈. 加入一个棋子后分两种情况讨论:

- 设栈是 $1, 3, 5, \cdots, (2i-1)$, 加入的棋子位置在 $2i$. 此时这个棋子堵住了后面棋子的路, 因此前面 $i+1$ 个棋子必须有一个最先挂掉; 挂掉一个棋子之后, 栈的形态维持不变.
- 设栈是 $1, 3, 5, \cdots, (2i-1)$, 加入的棋子位置 $\geq 2i+1$. 此时这个棋子没有堵路, 在栈中加入 $2i+1$ 即可.

最后栈中的元素可以以任意顺序挂掉, 乘上阶乘即可.

Problem B

将原串差分, 记 t_i 表示 s_i 和 s_{i+1} 是否不同, 则 t 只有四个位置是 1.

一次区间取反操作在 t 上的效果是翻转两个位置的 t_i, 在这两个位置之间连一条边.

最优解对应在图上一定是两条连接四个 1 的路径. 求出四个 1 之间两两最短路之后选择最优的匹配方案即可.

Problem C

显然当 $n < k$ 或者 $m < k$ 时无解, 所以只用做 $k = 5$ 的情况. 如果 k 不足 5, 可以添加一些辅助点 (如 n 连向 $n+1$, $n+1$ 连向 $n+2$) 将 k 变成 5.

对于每个点, 预处理 1 和 n 到它经过 2 条边的前三短的路径. 之后枚举中间的那条边, 用预处理的信息更新答案即可.

为什么是前三短? 考虑路径 $1 \to a \to b \to c \to d \to n$. 不妨假设 b, c, d 已经固定了, 只有 $1 \to c \to b$ 和 $1 \to d \to b$ 会让路径产生重复点, 因此前三短的路径就足够.

Problem D

记 $f_{i,j}$ 表示 $i+1$ 次操作之后一个深度为 j 的节点是否会对根有影响, 因为一次操作实际上是求前缀和, 不难发现

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} \,\mathsf{XOR}\, f_{i,j-1}.$$

事实上这个值就是组合数 $\binom{i+j}{i}$ 的奇偶性. 根据 Lucas 定理, 这个组合数为奇数当且仅当 $i \,\mathsf{AND}\, j = 0$.

因此对于一个询问 t, 只需要深度为求出 t 补集的所有子集 (这里我们将二进制数看成一个集合) 的权值异或和即可. 用求子集和的方法预处理即可.