RIASSUNTONE

1) FORMULA DI LITTLE

DATO UN SISTEMA A CODA IL NUMERO DI RICHIESTE PRESENTI NEL SISTEMA AL TEMPO t È DATO DA:

USCITE DA 0 A t

$$\boxed{N(t) = \alpha(t) - \beta(t)}$$

INGRESSI DA 0 A t

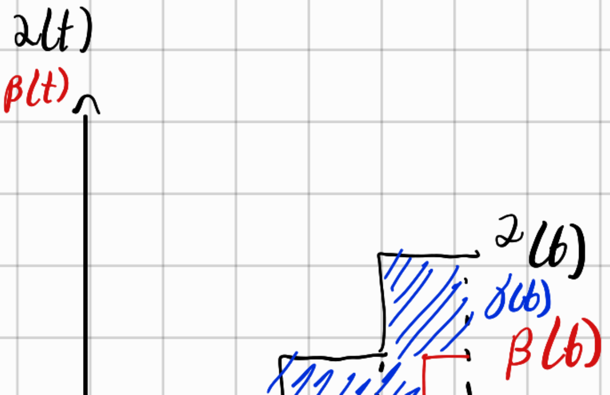
LA SOMMA TOTALE DEI TEMPI DI PERMANENZA È DATA DA

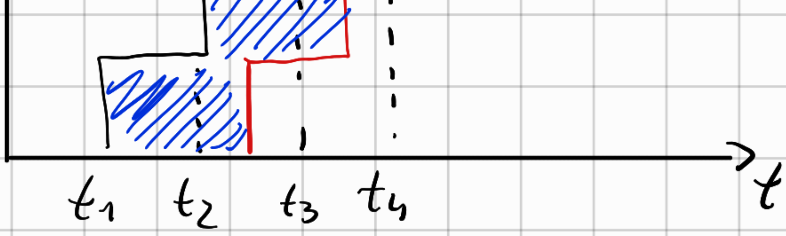
TEMPO NEL SISTEMA

||

$$\boxed{\gamma(t) = \int_0^t N(\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{\alpha(t)} T_i}$$

TEMPI TRASCORSI NEL SISTEMA PER OGNI RICHIESTA ARRIVATA





DEFINISCO LE QUANTITÀ:

- $\bar{\lambda}_t = \frac{a(t)}{t}$ → TASSO MEDIO DI ARRIVI NELL'INTERVALLO

- $\bar{T}_t = \frac{\gamma(t)}{a(t)}$ → TEMPO MEDIO DI PERMANENZA DELLE RICHIESTE NELL'INTERVALLO

- $\bar{N}_t = \frac{1}{t}\int_0^t N(\tau)\,d\tau$ → MEDIA TEMPORALE DEL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE NELL'INTERVALLO.

POSSO QUINDI SCRIVERE CHE $$\bar{T} = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{t}}{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{a(t)}{t}} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = \bar{T}\bar{\lambda}}$$

PASSA PER TUTTI I POSSIBILI PUNTI DI LAVORO

SE IL SISTEMA È STAZIONARIO ED ERGODICO ALLORA SI HA CHE

- $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{\lambda}_t = \lambda$
- $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{T}_t = T$
- $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{N}_t = N$

FORMULA DI LITTLE → $\boxed{N = \lambda T}$

E PUÒ ESSERE GENERALIZZATA AI SOTTOSISTEMI.

$$\overset{\text{TEMPO MEDIO}}{T} = \underbrace{\bar{x}}_{\text{TEMPO MEDIO DI SERVIZIO}} + \underbrace{\bar{W}}_{\text{TEMPO MEDIO DI CODA}}$$

$$\Rightarrow N = \lambda T = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{W} = \underbrace{S}_{\text{\# RICHIESTE NEL SERVENTE}} + \overbrace{Q}^{\text{\# RICHIESTE IN CODA}}$$

---

2) <u>STABILITÀ DI UN SISTEMA</u>

UN SISTEMA È STABILE SE IL NUMERO DI RICHIESTE IN ENTRATA NON ECCEDE IL NUMERO DI RICHIESTE IN USCITA OVVERO SE IL TASSO DI ARRIVI È MINORE DELLA CAPACITÀ DI SERVIZIO

$$\boxed{\lambda < \mu}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underbrace{\rho}_{\text{FATTORE DI CARICO } \rho = \lambda \bar{x}} < 1}$$

3)

PROCESSO STOCASTICO

È UNA FAMIGLIA DI VARIABILI ALEATORIE $\{X(t)\}$ E PUÒ ESSERE CONTINUO O DISCRETO. L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI VALORI CHE UN PROCESSO ALEATORIO PUÒ ASSUMERE È LO SPAZIO DEGLI STATI E SE QUESTO È DISCRETO ALLORA SI PARLA DI CATENA

ESEMPIO: PASSEGGIATA CASUALE => CATENA DI MARKOV

SE $P(Z_i=1)=p$ E $P(Z_i=-1)=1-p$ ALLORA IL PROCESSO OSSERVATO È $\boxed{X_n=\sum_{j=1}^{n} Z_j}$

QUINDI, DATO UN PROCESSO ALEATORIO, LA V.A. $X(t)$ HA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$\boxed{F_x(x_i,t_i)=P(X(t_i)\le t_i)}$$

ED È STAZIONARIO SE $\boxed{F_x(x,\tau)=F_x(x,\tau+t)=F_x(x)}$ E

STAZIONARIO IN SENSO LATO SE $\boxed{E[X(t)] \text{ COSTANTE}}$

---

4)

PROCESSO DI MARKOV

UN PROCESSO È DI MARKOV SE VALE L'ASSENZA DI MEMORIA E SE LO SPAZIO DEGLI STATI È DISCRETO SI PARLA DI CATENA DI MARKOV

$$\boxed{P\{X(t_{i+1}) \le x_{i+1} \mid X(t_1) = x_1, x_2, \dots, x_i\} = P\{X(t_{i+1}) \le x_{i+1} \mid X(t_i) = x_i\}}$$

↳ SI GUARDA SOLO L'ULTIMO VALORE DIMENTICANDOCI DI TUTTI GLI ALTRI

UNA CATENA DI MARKOV È OMOGENEA SE LE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE TRA GLI STATI NON DIPENDONO DAL TEMPO, OVVERO:

$$\boxed{p_{ij}^{(n+1)} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \sum_k p_{kj} p_{ik}^{(n)}}$$

---

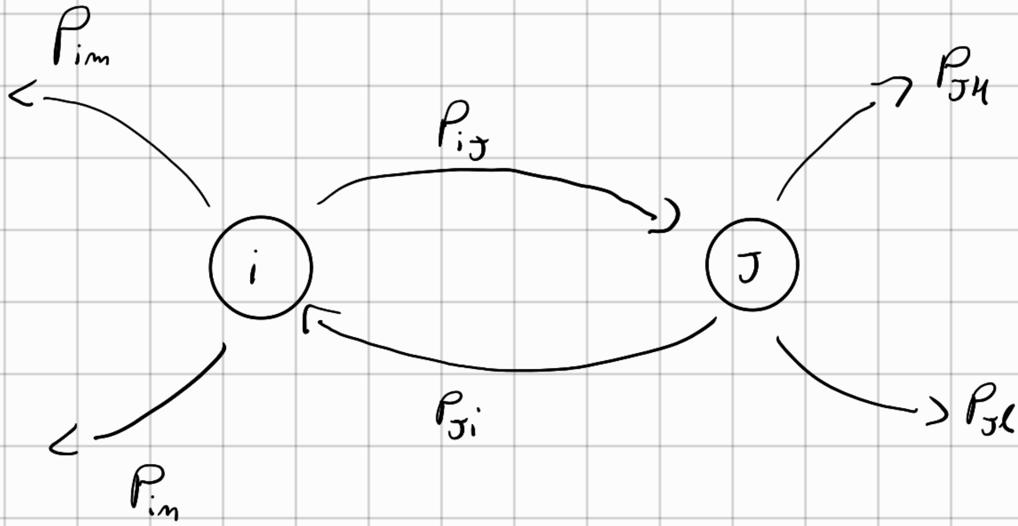
5)

PROCESSO SEMIMARKOVIANO E CARATTERIZZAZIONE

non sono processi di Markov, ma sotto opportune ipotesi, vanno comunque a rispettare la proprietà di assenza di memoria.

Per caratterizzare una catena di Markov omogenea si usano:

- Diagramma degli stati



- Matrice di transizione dello stato: è una matrice $N \times N$ dove ogni elemento p_{ij} è (la probabilità di transizione da i a j)

Uno stato di una catena di Markov è ricorrente se è possibile raggiungere di nuovo lo stato in un numero finito di transizioni:

$$\boxed{\exists n \text{ t.c. } p_{ii}^{(n)} > 0}$$

Uno stato ricorrente è periodico se il numero delle transizioni ammesse è una costante maggiore di 1.

SI DEFINISCE IL VETTORE DELLE PROBABILITÀ DI STATO AL PASSO m

$$A^{(m)} = \left\{ a_1^{(m)}, \dots, a_N^{(m)} \right\}$$

↳ PROBABILITÀ DI TROVARE IL PROCESSO NELLO STATO i-ESIMO AL PASSO m

E SI VUOLE QUINDI VALUTARE L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DEL PROCESSO ALL'AUMENTARE DEI PASSI E AVENDO NOTE LE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE AD UN CERTO PASSO.

$$\boxed{A^{(m)} = A^{(0)} \cdot P^{(m)}}$$

SERVE PER STUDIARE IL TRANSITORIO

LA CONFIGURAZIONE A REGIME DEL VETTORE DI STATO ESISTE SE LA CATENA DI MARKOV È OMOGENEA CON STATI RICORRENTI ED APERIODICI.

$$\Rightarrow \boxed{A = \lim_{m \to \infty} A^{(m)}}$$

E SI RISOLVE TROVANDO LA SOLUZIONE AL SISTEMA

$$\boxed{\begin{cases} A = AP \\ \sum a_i = 1 \end{cases}}$$

// ESEMPIO

INFINE UNA CATENA DI MARKOV È ASSORBENTE SE, UNA VOLTA RAGGIUNTO LO STATO ASSORBENTE, NON PUÒ PIÙ USCIRE

---

6) PROCESSI DI NASCITA E MORTE

→ PURA NASCITA: $\mu_i = 0 \ \forall i$

→ PURA MORTE: $\lambda_i = 0 \ \forall i$

SONO CATENE DI MARKOV DOVE È POSSIBILE SOLTANTO MUOVERSI NEGLI STATI SUBITO ADIACENTI, QUINDI LA TRANSIZIONE $i \to j$ SI HA SE:

$$\boxed{|i-j| > 1}\ !$$

E LE UNICHE TRANSIZIONI POSSIBILI SONO:

- $i \to i+1$
- $i \to i-1$
- $i \to i$

SIANO I TASSI DI NASCITA λ_i E MORTE μ_i E UN INTERVALLO TEMPORALE $\delta \ll 1$:

PROBABILITÀ DELLE VARIE TRANSIZIONI

- $P_{i,i+1}(\delta) = \lambda_i \delta + o(\delta)$
- $P_{i,i-1}(\delta) = \mu_i \delta + o(\delta)$
- $P_{i,i}(\delta) = 1 - \lambda_i \delta - \mu_i \delta + o(\delta)$

- $P_{i,i}(\delta) = 1 - \lambda_i \delta - \mu_i \delta + O(\delta)$

⇒ ORA SI STUDIA IL TRANSITORIO: DEFINIAMO LA PROBABILITÀ CON CUI IL PROCESSO SI TROVA ALLO STATO n AL TEMPO t E DEFINIAMO QUINDI $P_n(t+\delta)$:

PROBABILITÀ DEL PROCESSO DI TROVARSI IN UN CERTO STATO n

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(t+\delta) = {} & P_{n+1}(t)\left[\lambda_{n+1}\delta + O(\delta)\right] + \\ & P_{n-1}(t)\left[\mu_{n-1}\delta + O(\delta)\right] + \\ & P_n(t)\left[1 - \lambda_n \delta - \mu_n \delta + O(\delta)\right] \end{aligned}}$$

SI SOTTRAE PER $P_n(t)$ E SI DIVIDE PER δ CONSIDERANDO IL LIMITE:

$$\boxed{\frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{\delta \to 0} \frac{P_n(t+\delta) - P_n(t)}{\delta} = \mu_{n-1} P_{n-1}(t) + \lambda_{n+1} P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t)}$$

COMPORTAMENTO DEL TRANSITORIO!

PER QUANTO RIGUARDA IL COMPORTAMENTO A REGIME NON SI HA PIÙ LA DIPENDENZA DAL TEMPO:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{dP_n(t)}{dt} = 0 \quad \forall n} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\boxed{P_n(t) = P_n \quad \forall n}$$

SOSTITUENDO OTTENIAMO LA RELAZIONE DI EQUILIBRIO LOCALE:

$$\boxed{(\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n-1} P_{n-1} + \lambda_{n+1} P_{n+1}}$$

E LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO GLOBALE

$$\boxed{\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1}$$

SI RICAVA QUINDI LA SOLUZIONE A REGIME:

$$\boxed{P_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0}$$

ED INOLTRE, APPLICANDO LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE $\sum_n P_n = 1$, RICAVO LA PROBABILITÀ P_0:

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{1 + \sum_n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}}$$

E LA CONDIZIONE DI REGIME È AMMISSIBILE SOLO SE VALE LA CONDIZIONE DI ERGODICITÀ:

$$\exists k_0 : k > k_0 \quad \frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1$$

IL TASSO DI ARRIVI NON DEVE SUPERARE IL

TASSO DI PARTENZE

7) PROCESSO DI POISSON

SI DEFINISCE PRIMA UN PROCESSO DI CONTEGGIO, OVVERO UN PROCESSO $\{X(t), t \geq 0\}$ CHE CONTA IL NUMERO DI EVENTI IN $[0,t]$.

UN PROCESSO DI POISSON È QUINDI UN PARTICOLARE PROCESSO DI CONTEGGIO SE:

- $X(0)=0$
- $X(t)$ HA INCREMENTI INDIPENDENTI
- IL NUMERO DI EVENTI AVVENUTI IN $[0,t]$ SEGUE UNA DISTRIBUZIONE DI POISSON:

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{ n \text{ eventi in } [0,t] \right\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

E, NEL CASO INVERSO, UN PROCESSO DI CONTEGGIO È DI POISSON SE:

- $X(0)=0$
- $X(t)$ HA INCREMENTI INDIPENDENTI

- IL PROCESSO È DI NASCITA PURA

- LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI PIÙ DI UN EVENTO IN t È NULLA

---

8) FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI PER UNA V.A. DISCRETA È DEFINITA COME:

$$\boxed{X(z) = E[z^k] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \underbrace{p_k}}$$

↳ PROBABILITÀ CHE LA V.A. ASSUMA IL VALORE k

- MOMENTO I° ORDINE (VALOR MEDIO):

$$\boxed{X'(z)\Big|_{z=1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} p_k\right]_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \bar{x}}$$

- MOMENTO II° ORDINE (VALORE QUADRATICO MEDIO):

$$X''(z)\Big|_{z=1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} p_k\right]_{z=1} = \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k}^{X''(1)} - \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k p_k}^{X'(1)}$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{x}^2 = X''_{(1)} + X'_{(1)}}$

9) **DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE**

→ POSSIEDE ASSENZA DI MEMORIA

DEFINITA COME $\boxed{P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$ CON FUNZIONE DI PROBABILITÀ DATA DA

$\boxed{F_x(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$.

SI INTRODUCE LA TRASFORMATA DI LAPLACE DI UNA FUNZIONE DI PROBABILITÀ LA QUANTITÀ:

$$\boxed{\beta(s) = E\left[e^{-st}\right]}$$

DOVE, NEL CASO DELL'ESPONENZIALE: $\boxed{\beta(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} \, dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+s)t} \, dt = \frac{\lambda}{\lambda+s}}$

CONOSCENDO $\beta(s)$ SI POSSONO RICAVARE I MOMENTI. NEL CASO DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE SI OTTIENE:

$\boxed{\beta'(0) = \frac{1}{\lambda}}$ $\boxed{\beta''(0) = \frac{2}{\lambda^2}}$

INOLTRE, SE IL PROCESSO DI ARRIVO DELLE RICHIESTE AD UN SISTEMA È DI POISSON, ALLORA LA DISTRIBUZIONE DEI TEMPI DI INTERARRIVO È ESPONENZIALE

Dim:

SIA τ IL TEMPO CHE SEPARA DUE ARRIVI CONSECUTIVI (DI POISSON) CON TASSO λ. SI HA CHE:

$$\mathbb{P}\{\tau \leq t\} = 1 - \mathbb{P}\{0 \text{ ARRIVI IN } [0,t]\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

E QUINDI LA FDP DEL TEMPO CHE SEPARA EVENTI CONSECUTIVI È DATA DA

$$f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

CHE È PROPRIO LA FDP DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE $\square$

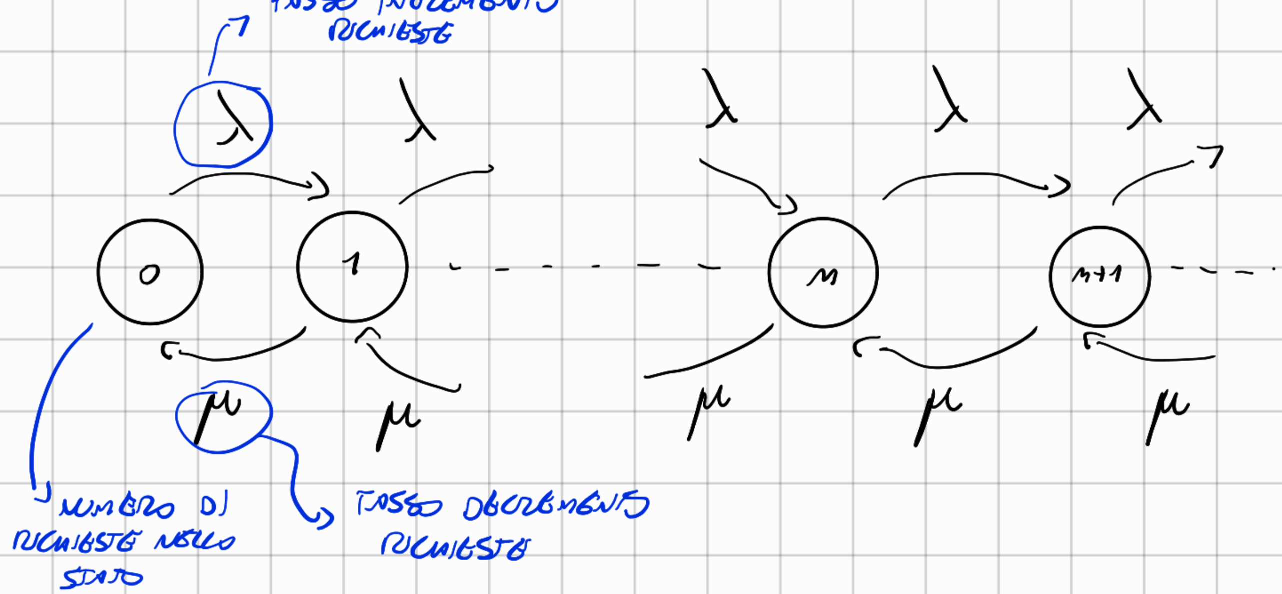
---

10) SISTEMA M/M/1

ARRIVI: POISSON λ (NASCITA)

SERVIZIO: ESPONENZIALE μ (MORTE)

SONO PROCESSI DI NASCITA E MORTE CON TASSI COSTANTI E INDIPENDENTI DALLO STATO. LO STATO È RAPPRESENTATO DAL NUMERO DI RICHIESTE NEL SISTEMA.



LA CONDIZIONE DI STABILITÀ È DATA DA $\boxed{\lambda < \mu}$.

A REGIME POSSIAMO APPLICARE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO GLOBALE:

$$\boxed{\lambda P_{n-1} = \mu P_n}$$

$$\longrightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{x}$$

$$\boxed{P_n = \rho^n P_0}$$

DOVE P_0 SI RICAVA APPLICANDO LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE $\boxed{\sum_n P_n = 1}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{P_0}{1-\rho} = 1 \longrightarrow \boxed{P_0 = 1-\rho}$$

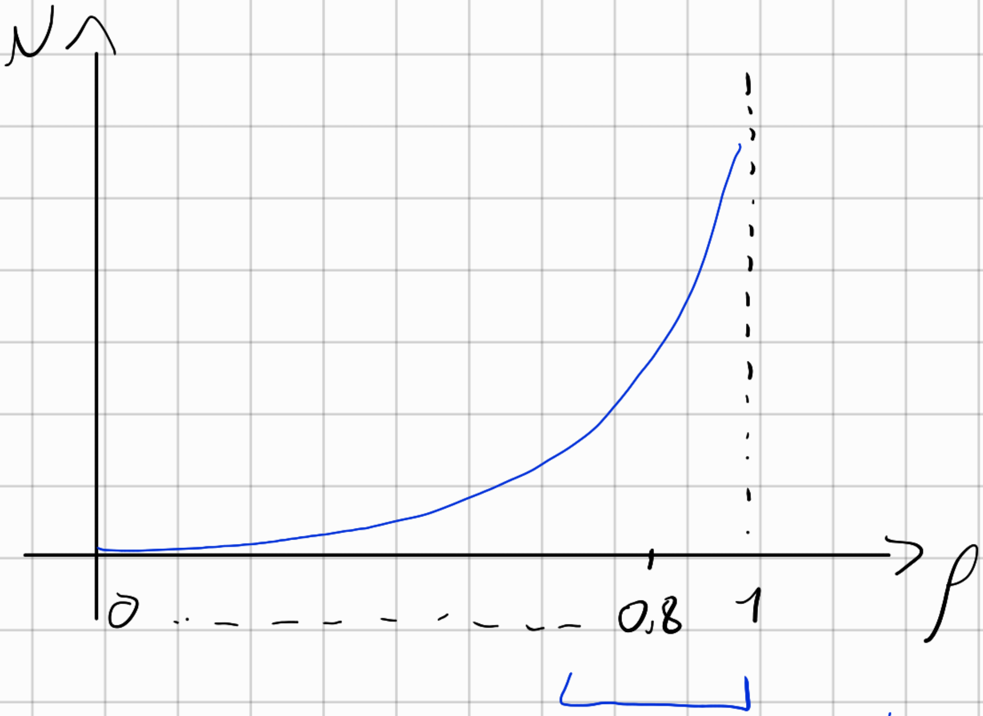
SI RICAVA IL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE NEL SISTEMA USANDO LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI:

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

$$P_{(z)} = E\left[z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho^n (1-\rho) = \boxed{\frac{1-\rho}{1-\rho \cdot z}}$$

MOMENTO DEL PRIMO ORDINE

$$\Rightarrow N = P'_{(1)} = \left.\frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho z)^2}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{\rho}{1-\rho}}$$



QUI IL SISTEMA È INSTABILE!

TRAMITE LITTLE SI RICAVA IL TEMPO DI PERMANENZA

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \boxed{\frac{\overline{x}}{1-\rho}}$$

QUINDI PER AUMENTARE LE PRESTAZIONI DEL SISTEMA BASTA DIMINUIRE $\overline{x}$ OVVERO IL TEMPO CHE LE RICHIESTE PASSANO IN SERVIZIO

INFINE SI APPLICA LITTLE PER RICAVARE IL NUMERO DI RICHIESTE IN

CODA

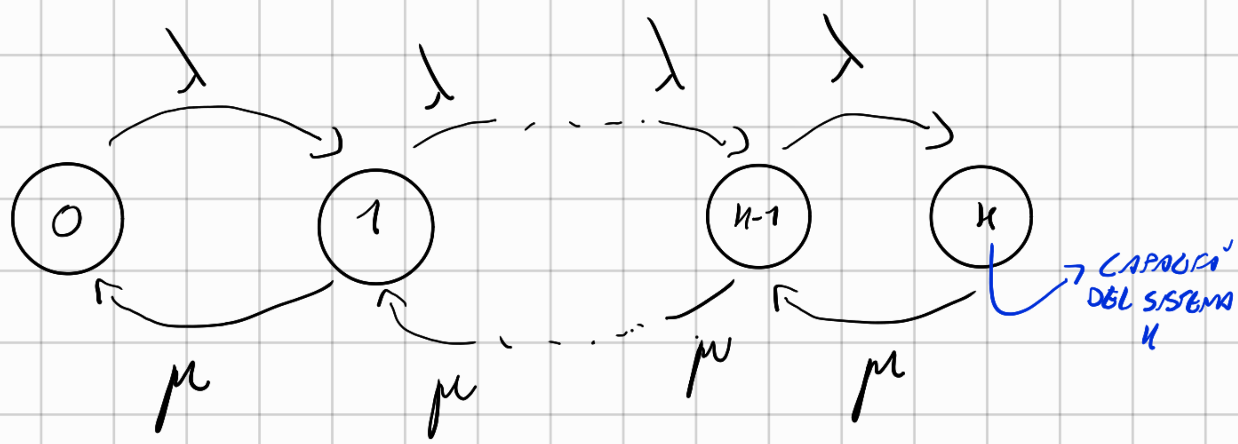
$$N = S + \varphi \Rightarrow \varphi = N - S = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \boxed{\frac{\rho^2}{1-\rho}}$$

E QUINDI IL TEMPO MEDIO DI ATTESA IN CODA: $W = \frac{\varphi}{\lambda} = \boxed{\frac{\bar{x}\rho}{1-\rho}}$

---

11) **SISTEMI M/M/1/K** → SISTEMI CON PERDITA MA SEMPRE STABILI!!

SONO SISTEMI CON CAPACITÀ DI CODA FINITA E SONO ANCHE CONSIDERATI DEI SISTEMI CON PERDITA, QUINDI SE UNA RICHIESTA ARRIVA NEL SISTEMA QUANDO QUESTO È PIENO ALLORA NON VIENE ACCETTATA!



L'ANALISI A REGIME:

$$\begin{cases} P_n = \rho^n P_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{P \quad 1-\rho}$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \right. \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}}$$

PER QUESTI SISTEMI SI PUÒ CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE UNA RICHIESTA IN ARRIVO VENGA RIFIUTATA:

$$\boxed{P_B = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = P_K}$$

→ LA PROBABILITÀ DI BLOCCO COINCIDE CON LA PROBABILITÀ DI TROVARSI ALLO STATO LIMITE K

⇓

MAGGIORE È IL VALORE DI K E MENO BLOCCHI SI AVRANNO POICHÉ LA CAPACITÀ È MAGGIORE!

---

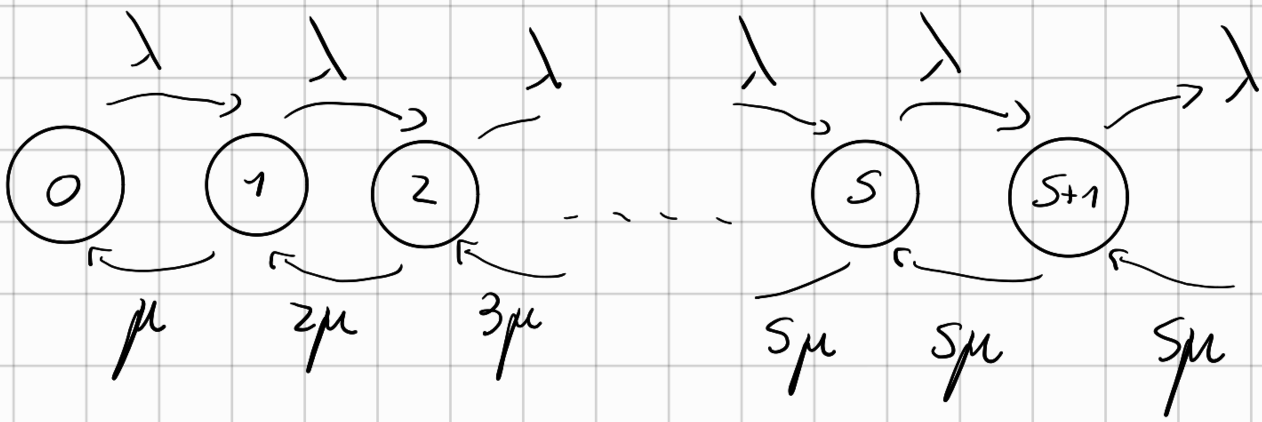
12) SISTEMI M/M/S

→ λ COSTANTE

→ μ VARIABILE

IL NUMERO DI SERVENTI È >1 CON TASSO DI ARRIVI COSTANTE E TASSO DI SERVIZIO VARIABILE:

$$\boxed{\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \le \mu \le S \\ S\mu & n \ge S \end{cases}}$$



RICORDANDO LA FORMULA DELLA <u>SOLUZIONE A REGIME</u> DI UN PROCESSO DI NASCITA E MORTE:

$$\boxed{P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

SI OTTIENE CHE P_n:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} = \boxed{P_0 \dfrac{\rho^n}{n!} \quad 0 \le n \le S} & \Delta \\[2ex] P_0 \dfrac{\lambda^n}{S!\,S^{n-S} \cdot \mu^n} = \boxed{P_0 \dfrac{\rho^n}{S!\,S^{n-S}} \quad n \ge S} & \circ \end{cases}$$

E SI USA LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE PER OTTENERE P_0:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \longrightarrow P_0 \left[1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!}}_{\Delta} + \underbrace{\sum_{n=S}^{\infty} \frac{\rho^n}{S!\,S^{n-S}}}_{\circ} \right] = 1$$

$$P_0 \left[\sum^{S-1} \rho^n \quad \rho^S \sum^{\infty} \rho^{n-S} \right.$$

$$\Rightarrow P_0\left[1+\sum_{n=1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\sum_{n=s} \frac{\rho^{n-s}}{s^{n-s}}\right]=1$$

$$\Rightarrow P_0\left[1+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s\cdot s}{s!(s-\rho)}\right]=1$$

$$\boxed{\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s\cdot s}{s!(s-\rho)}}}$$

LA CONDIZIONE DI STABILITÀ VALE $\boxed{\rho < S}$ E IMPLICA CHE IL FATTORE DI CARICO PUÒ ESSERE >1 E QUINDI SI HA UNA MAGGIORE CAPACITÀ DI SERVIZIO.

QUINDI POSSIAMO RICAVARE LA PROBABILITÀ DI INGRESSO IN CODA:

$$\boxed{P_c = \sum_{n=s}^{\infty}\frac{\rho^n}{s!\,s^{n-s}}\cdot P_0 = P_0\,\frac{s\rho^s}{s!(s-\rho)}}$$

→ UNA RICHIESTA ENTRA IN CODA SE IL NUMERO DI RICHIESTE GIÀ PRESENTI È $\geq S$. P_c DEVE ESSERE BASSA AFFINCHÉ CONVENGA AUMENTARE IL # DI SERVENTI.

---

13) SISTEMA M/M/∞

→ SEMPRE STABILE!

SONO SISTEMI IN CUI LA CAPACITÀ DI SERVIZIO SI ADATTA AL NUMERO DI RICHIESTE PRESENTI NEL SISTEMA => C'È SEMPRE UN SERVENTE LIBERO!

RICHIESTE PRESENTI NEL SISTEMA → C'È SEMPRE UN SERVENTE LIBERO:

- λ COSTANTE
- $\mu_{n+1} = (n+1)\mu$

APPLICANDO LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE SI RICAVANO LE PROBABILITÀ DI STATO:

$$\boxed{P_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}}$$

→ È UNA POISSON!

IL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE NEL SISTEMA È ρ ED APPLICANDO LITTLE RICAVO IL TEMPO MEDIO DI SERVIZIO

$$\boxed{T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \bar{x}}$$

---

14) SISTEMI M/M/S/S

→ CON PERDITA

→ $\frac{\rho^S}{S!}$

→ SEMPRE STABILE

IL NUMERO DI SERVENTI È UGUALE AL NUMERO DI RICHIESTE CHE IL SISTEMA PUÒ ACCETTARE ⟶ SISTEMA CON PERDITA, STABILE

- λ_n COSTANTE $\forall n \quad 0 \leq n \leq S$

$\cdot\ \mu_n = n\mu \quad \forall n \quad 1 \leq n \leq S$

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \quad \text{MA} \quad \sum_{n=0}^{S} P_n = 1 \; !$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S} \frac{\rho^n}{n!}}}$$

QUINDI LA PROBABILITÀ DI BLOCCO È DATA DA:

$$\boxed{P_B = \frac{\rho^S}{S!} P_0 = \frac{\rho^S}{S! \sum_{n=0}^{S} \frac{\rho^n}{n!}}}$$

$\rightarrow$ FORMULA B DI ERLANG

15) SISTEMI M/M/1 CON ARRIVI SCORAGGIATI

SI REGOLANO GLI INGRESSI IN MANIERA INVERSAMENTE PROPORZIONALE A QUANTI CE NE SONO GIÀ NEL SISTEMA!

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1} \quad \forall n}$$

$$\Rightarrow P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\mu} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow{P_0 = e^{-\rho}} \boxed{P_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}}$$

ANCHE QUI SI OTTIENE UNA POISSON COME PER LO M/M/∞

$$\Rightarrow N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \boxed{\rho}$$

⇒ PER RICAVARE IL TEMPO MEDIO DI PERMANENZA SI DEVE PRIMA RICAVARE IL TASSO MEDIO DEGLI ARRIVI. → POICHÉ È UN SISTEMA CON PERDITA

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \underset{\lambda = \rho \cdot \mu}{=} \mu e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \underset{\text{PROPRIETÀ ESPONENZIALE}}{=} \boxed{\mu e^{-\rho}\left[e^{\rho} - 1\right]} =$$

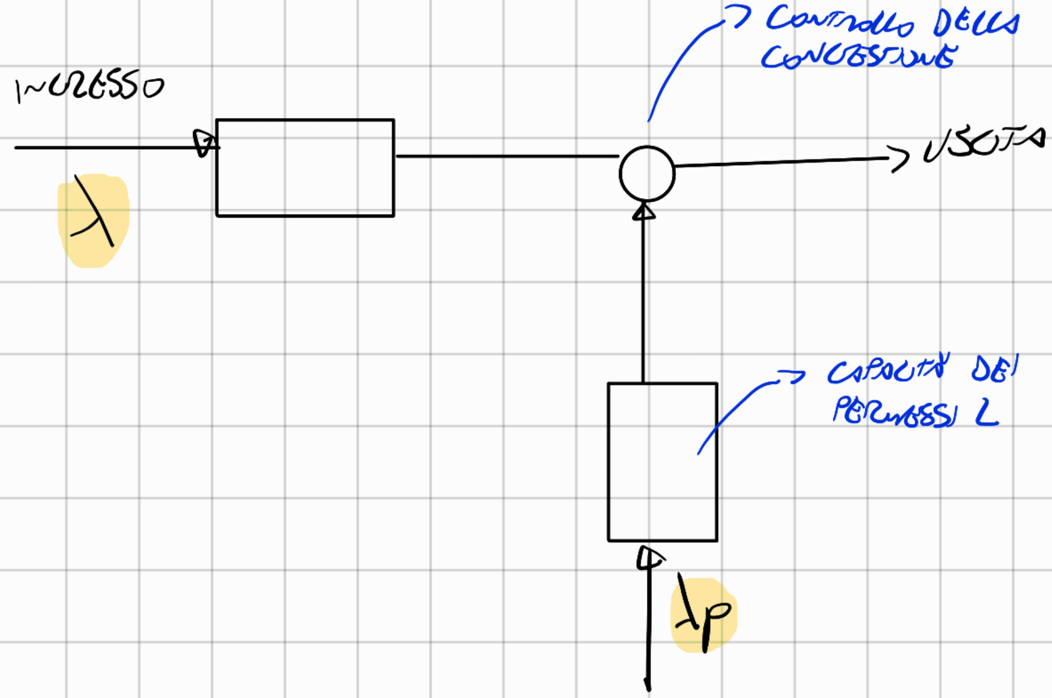
$$= \boxed{\mu\left[1 - e^{-\rho}\right]} \quad !$$

LITTLE: $T = \frac{N}{\bar{\lambda}} = \frac{\rho}{\mu(1-e^{-\rho})} = \boxed{\frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}}$

---

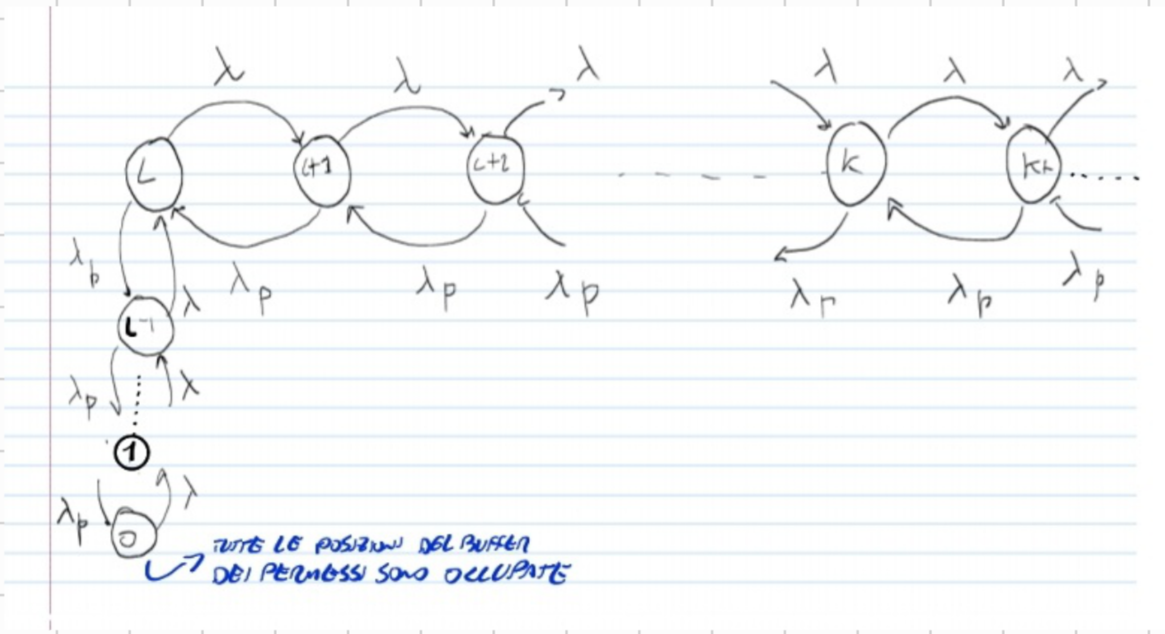
16) **TOKEN BUCKET** → EQUIVALE AD UN M/M/1

PERMETTE DI TRASMETTERE IN SEQUENZA TUTTI I PACCHETTI FINO AD ESAURIRE IL NUMERO DEI PERMESSI DISPONIBILI.



- PROCESSO DI ARRIVO DEI MESSAGGI È DI POISSON λ
- PROCESSO DI ARRIVO DEI PERMESSI È DI POISSON λ_p
- CODA DEI MESSAGGI NON LIMITATA, CODA DEI PERMESSI A CAPACITÀ LIMITATA L

LO STATO DEL SISTEMA È DATO DALLA SOMMA DEI POSTI LIBERI NELLA CODA DEI PERMESSI CON IL NUMERO DI PACCHETTI IN ATTESA DI SERVIZIO



ESSENDO CORRISPONDENTE AD UN SISTEMA M/M/1 SI HA CHE:

$$\begin{cases} P_n = \rho^n P_0 \\ \sum_n P_n = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_n = \rho^n(1-\rho)}$$

17) MODELLO M/G/1

PROCESSO NON-MARKOVIANO
⇓
SI DEVONO DEFINIRE GLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE DEL SISTEMA.
↳ SI PRENDONO QUELLI DOVE IL TEMPO DI SERVIZIO È COSTANTE

NON È PIÙ UN MODELLO MARKOVIANO POICHÉ LA DISTRIBUZIONE DELLE RICHIESTE IN SERVIZIO NON È ESPONENZIALE E QUINDI NON VALE L'ASSENZA DI MEMORIA ⇒ PROCESSO SEMI-MARKOVIANO.

LO STATO È COMPOSTO DA $\boxed{\{n(t), x(t)\}}$

$n(t)$: # RICHIESTE PRESENTI AL TEMPO t

$x(t)$: QUANTITÀ DI SERVIZIO GIÀ FORNITA AL TEMPO t

PER L'ANALISI SI UTILIZZA IL METODO DELLE CATENE DI MARKOV VINCOLATE TEMPORALMENTE. QUINDI SI VANNO A DEFINIRE GLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE DELLO STATO PER I QUALI IL TEMPO DI SERVIZIO UTILIZZATO È COSTANTE ED UGUALE A ZERO ⇒ SI VINCOLANO TEMPORALMENTE LE OSSERVAZIONI.

- n_i: # DI RICHIESTE NEL SISTEMA IN CORRISPONDENZA DEL COMPLETAMENTO DEL SERVIZIO i-ESIMO
- a_i: # DI ARRIVI AVUTI DURANTE IL TEMPO DI SERVIZIO i-ESIMO.

$$n_{i+1} = \begin{cases} n_i - 1 + a_{i+1} & n_i > 0 \end{cases}$$

LA PARTENZA LASCIA IL SISTEMA NON VUOTO

α_{i+1} $\quad n_i = 0$

$\begin{cases} 1 & n_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

ED UTILIZZANDO LA FUNZIONE GRADINO: $\boxed{n_{i+1} = n_i - u(n_i) + \alpha_{i+1}}$

DATA $b(t)$ LA fdp DEL TEMPO DI SERVIZIO E

$$\boxed{B(s) = \int_0^t b(t) e^{-st} dt}$$

LA SUA TRASFORMATA DI LAPLACE SI OTTENGONO I MOMENTI

valor medio

- $\boxed{\overline{x} = -B'(0)}$
- $\boxed{\overline{x^2} = B''(0)}$

valore quadratico medio

→ SE SI USA LA f.g.m SI AVRÀ $\int_0^t b(t) e^{st} dt$

A REGIME STAZIONARIO SI OTTIENE CHE:

- $\boxed{\lim_i n_i = n}$
- $\boxed{\lim_i \alpha_i = \alpha}$

$\Rightarrow \lim_i n_{i+1} = n = n - u(n) + \alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = u(n)$

$\Downarrow$

PROBABILITÀ DI AVERE IL SISTEMA LIBERO

$$\boxed{\bar{a} = \overline{U(n)} = 1 - p_0}$$

A REGIME IL VALORE MEDIO DI $\overline{U(n)}$ SARÀ UGUALE AL NUMERO MEDIO DI ARRIVI $\bar{a}$ IN UN INTERO MEDIO DI SERVIZIO

DEFINIAMO LA f.g.m.: !

$$P(z) = E[z^n] : \quad \boxed{z^{n_{i+1}} = z^{n_i - U(n_i) + a_{i+1}} \xrightarrow[\text{LIMITE}]{} z^n = z^{n - U(n) + a}}$$

quindi:

$$E[z^{n_{i+1}}] = E[z^{n_i - U(n_i) + a_{i+1}}] = \boxed{E[z^{a_{i+1}}]\,E[z^{n_i - U(n_i)}]} \;▲$$

A REGIME SI OTTIENE CHE:

- $\lim_i E[z^{n_{i+1}}] = E[z^n] = P(z)$
- $\lim_i E[z^{a_{i+1}}] = A(z)$

E SE CONSIDERIAMO IL LIMITE PER ▲ SI OTTIENE:

$$P(z) = A(z)\,E[z^{n-U(n)}] = A(z)\left[p_0 + \sum^{\infty} z^{n-1} p_n\right]$$

$$P(z) = A(z) c_{...} = A(z)\left[p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} p_n\right]$$

$$= A(z)\left[p_0 + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n\right]$$

$$= A(z)\left[p_0 + \frac{1}{z}\left(P(z) - p_0\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = A(z)\left[p_0 + \frac{1}{z}\left(P(z) - p_0\right)\right]}$$

OVVERO $P(z)\left(1 - z^{-1}A(z)\right) = A(z)\left(1 - z^{-1}\right)p_0$ DA CUI RICAVO CHE:

$$\boxed{P(z) = \frac{A(z)\left(1 - z^{-1}\right)p_0}{1 - z^{-1}A(z)} = \frac{A(z)(z-1)p_0}{z - A(z)}}$$

DEFINISCO $A(z)$. AMMETTO DI CONOSCERE IL TEMPO DI SERVIZIO t $\longrightarrow$ GLI ARRIVI IN t SONO DI POISSON.

$$\Rightarrow A(z|t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \boxed{e^{-\lambda t(1-z)}} \ !$$

SI TOGLIE IL CONDIZIONAMENTO DI t

$$\Rightarrow A(z) = \int_0^{\infty} A(z|t)\, b(t)\, dt = \int_0^{\infty} b(t)\, e^{-\lambda t(1-z)}\, dt = \beta(s)\Big|_{s=\lambda(1-z)}$$

$$\Rightarrow A'(z)\Big|_{z=1} = -\lambda B'(\lambda(1-z))\Big|_{z=1} = -\lambda B'(0) = \lambda \bar{x} = \rho$$

$$\Rightarrow A''(z)\Big|_{z=1} = \dots\dots = \lambda^2 B''(0) = \lambda^2 \overline{x^2}$$

RICAVO ORA IL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE NEL SISTEMA $N = P'(1)$:

$\rightarrow P(z) = \frac{p_0 A(z)[z-1]}{z-A(z)}$

$$\boxed{P(z)\left[z - A(z)\right] = p_0 A(z)\left[z-1\right]} \xrightarrow{\frac{d}{dz}} P'(z)\left[z-A(z)\right] + P(z)\cdot\left[1-A'(z)\right]$$

$$= p_0 A'(z)(z-1) + p_0 A(z) \longrightarrow \text{DERIVO E PONGO } z=1$$

$$\longrightarrow P'(1)\left[1-A'(1)\right]\cdot 2 - A''(1) = p_0 A'(1)\cdot 2 \rightarrow P'(1) = \frac{p_0 A'(1)}{1-A'(1)} + \frac{A''(1)}{2\left[1-A'(1)\right]}$$

MA $p_0 = 1 - A'(1) \Rightarrow N = P'(1) = A'(1) + \frac{A''(1)}{2\left[1-A'(1)\right]} = \lambda\bar{x} + \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{2\left[1-A'(1)\right]} =$

$$= \rho + \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{2(1-\rho)} \rightarrow N$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \bar{x} + \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\lambda\bar{x})}$$

FORMULA DI POLLACZEK-KHINCHINE

18) **MODELLO M/D/1**

TEMPO DI SERVIZIO ≡ TEMPO DI TRASMISSIONE PACCHETTO !

CASO PARTICOLARE DI M/G/1. IL TEMPO DI SERVIZIO COINCIDE CON IL TEMPO DI TRASMISSIONE DI UN PACCHETTO ED È COSTANTE E NOTO A PRIORI.

!

SIA X IL TEMPO DI SERVIZIO DI UNA RICHIESTA, ALLORA:

$$\bar{x} = X \qquad \overline{x^2} = X^2$$

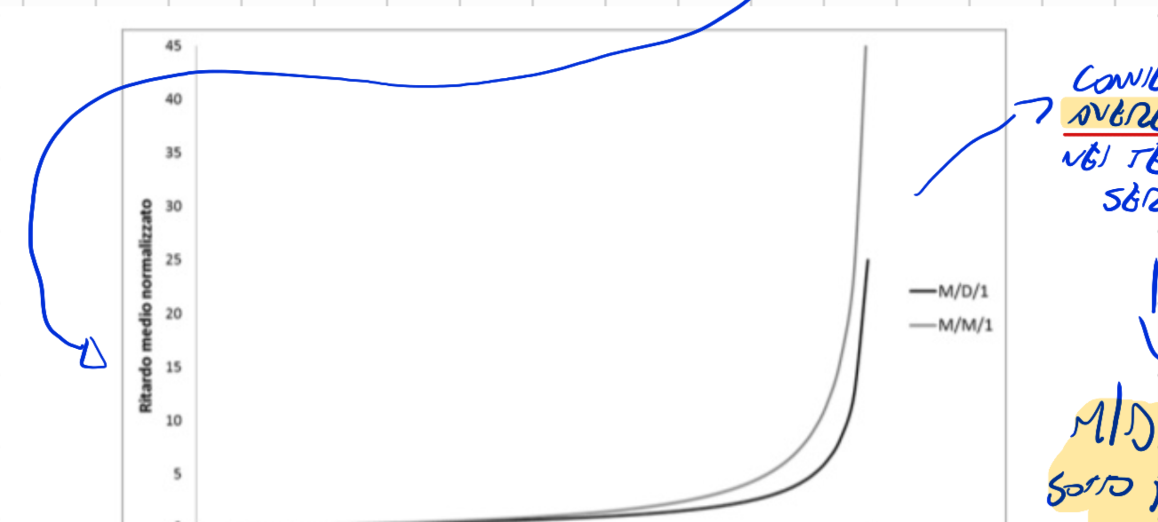
$$T = \bar{x} + \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\lambda\bar{x})}$$

E APPLICANDO POLLACZEK-KHINCHINE SI HA:

$$T = X + \frac{\lambda X^2}{2(1-\lambda X)} \longrightarrow \boxed{T = \frac{X(2-\rho)}{2(1-\rho)}} \; !$$

$$\boxed{N = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}} \; !$$

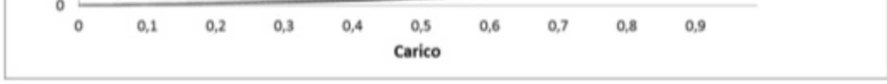
SI PUÒ CONFRONTARE IL TEMPO MEDIO T TRASCORSO DA UNA RICHIESTA IN UN M/D/1 CON UN M/M/1 A PARITÀ DI λ E $\bar{x}$:



CONVIENE NON AVERE ALEATORIETÀ NEI TEMPI DI SERVIZIO!

⇓

M/D/1 MEGLIO SOTTO QUESTE ...



IPOTESI

E generalizzando il confronto con un M/G/1 si può introdurre il coefficiente quadratico di variazione del tempo di servizio:

$\nearrow C_x^2 \geq 0$

$$\boxed{C_x^2 = \frac{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}{(\bar{x})^2}}$$

Da cui $\boxed{\overline{x^2} = (C_x^2+1)((\bar{x})^2)}$ e sostituendolo nella formula di P.K otteniamo:

moltiplico e divido per λ in modo da ricavare ρ (?)

$$\boxed{T = \bar{x} + \frac{\lambda (C_x^2+1)(\bar{x})^2}{2(1-\rho)} = \bar{x} + \frac{\rho^2 (C_x^2+1)}{2\lambda(1-\rho)}}$$

Da cui il valore minimo di T si ottiene quando $\boxed{C_x^2 \text{ è nullo}}$ e questa condizione è garantita solo se:

$$\boxed{\overline{x^2} = (\bar{x})^2}$$

ovvero quando il tempo di servizio è deterministico $\to$ M/D/1!

---

19) Proprietà PASTA (Poisson Arrivals See Time Average)

DATO UN PROCESSO DI ARRIVO DI POISSON SI HA CHE IL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE TROVATE AGLI ISTANTI DI ARRIVO È UGUALE AL NUMERO MEDIO DI RICHIESTE TROVATE AD UN ISTANTE DI OSSERVAZIONE QUALSIASI.

Dim formale:

SIA $a_i(t)$ LA PROBABILITÀ CHE UN ARRIVO DI POISSON AL TEMPO t TROVI IL SISTEMA NELLO STATO i.

SIA $P_i(t)$ LA PROBABILITÀ CHE LO STATO DEL SISTEMA AL TEMPO t SIA i.

SI DOVRÀ AVERE CHE $\boxed{a_i(t) = P_i(t)}$!

INDICO CON $N(t)$ IL NUMERO DI RICHIESTE NEL SISTEMA AL TEMPO t. SI HA CHE:

$$\boxed{P_i(t) = \mathbb{P}\{N(t) = i\}}$$

QUINDI $\boxed{a_i(t) = \mathbb{P}\{N(t) = i \mid \text{un arrivo a } t\}} \overset{\text{Bayes}}{=}$

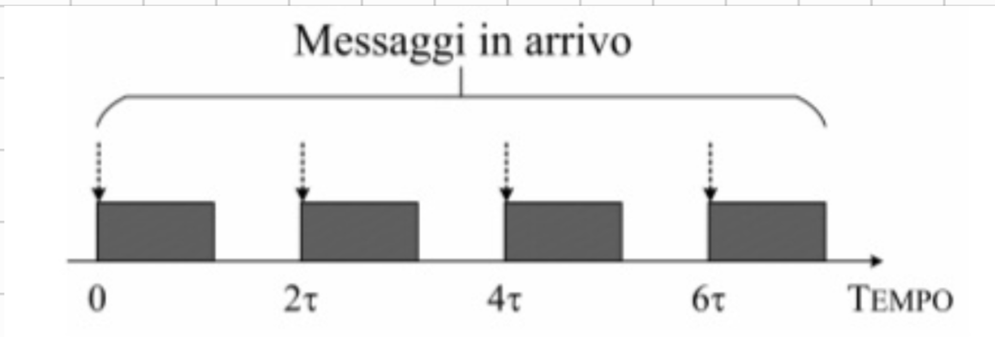
$$= \boxed{\frac{\mathbb{P}\{\text{un arrivo a } t \mid N(t) = i\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = i\}}{\mathbb{P}\{\text{un arrivo a } t\}}}$$

MA GLI ARRIVI SONO INDIPENDENTI DALLO STATO! $\Rightarrow$ $\boxed{a_i(t) = \mathbb{P}\{N(t) = i\} = P_i(t)}$

Dim EURISTICA:

→ SISTEMA NON POISSONIANO!

SUPPONIAMO DI AVERE CHE LE RICHIESTE, CHE RIMANGONO NEL SISTEMA PER UN TEMPO COSTANTE $\tau/2$, ARRIVANO CON UNA CADENZA REGOLARE DI UNA RICHIESTA OGNI TEMPO τ.
SUPPONENDO INIZIALMENTE IL SISTEMA VUOTO, SI NOTA FACILMENTE CHE ALL'ISTANTE DI ARRIVO DI OGNI RICHIESTA SARÀ SEMPRE NELLA CONDIZIONE DI VUOTO. IN REALTÀ QUESTO NON È VERO SE SI OSSERVA IL SISTEMA AD UN QUALSIASI ISTANTE.
IN PARTICOLARE ESSO RISULTA OCCUPATO PER METÀ DEL TEMPO CHE SEPARA DUE ARRIVI CONSECUTIVI!



IL SERVIZIO DIPENDE DAL SISTEMA CHE PUÒ ESSERE VUOTO O NON VUOTO!

20) SISTEMI CON TEMPI DI SERVIZIO DIFFERENZIATI

IL SISTEMA OFFRE UN SERVIZIO DIPENDENTE DALLE CONDIZIONI ATTUALI DEL SISTEMA STESSO.
CONSIDERIAMO IL CASO DI SERVIZIO DIVERSO IN RELAZIONE ALLO STATO DEL SISTEMA (VUOTO/NON VUOTO) AL MOMENTO DI ARRIVO DELLA RICHIESTA
V NV

ARRIVI!
TEMPO DI SERVIZIO CON SISTEMA NON VUOTO

$$m_{i+1} = \begin{cases} m_i - 1 + \bar{a}_{i+1} & m_i > 0 \\ \dots \end{cases}$$

ARRIVI!

$$\left\{ \tilde{\alpha}_{i+1} \qquad m_i = 0 \right.$$

TEMPO DI SERVIZIO CON SISTEMA VUOTO

$$\Rightarrow \boxed{m_{i+1} = m_i - u(m_i) + \alpha_{i+1}\, u(m_i) + \tilde{\alpha}_{i+1}\left[1 - u(m_i)\right]}$$

RICHIESTE LASCIATE ALLA PARTENZA SUCCESSIVA
ARRIVI AVVENUTI DURANTE ESPLETAMENTO RICHIESTA CONSIDERATA

QUINDI IL NUMERO DI RICHIESTE LASCIATE NEL SISTEMA ALLA PARTENZA SUCCESSIVA COINCIDE CON IL NUMERO DI ARRIVI AVVENUTI DURANTE L'ESPLETAMENTO DEL SERVIZIO DELLA RICHIESTA CHE ABBIAMO CONSIDERATO.

SI RIPETE L'ANALISI DI M/G/1. SUPPONENDO IL SISTEMA STABILE SI AVRÀ:

$$\boxed{\overline{u(m)} = \bar{\alpha}\,\overline{u(m)} + \bar{\tilde{\alpha}}\left[1 - \overline{u(m)}\right] = 1 - P_0}$$

OVVERO $\boxed{P_0 = \dfrac{1 - \tilde{\alpha}}{1 - \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}}}$!

E SUPPONENDO NOTE LE STATISTICHE DEI TEMPI DI SERVIZIO POSSO SCRIVERE:

$$\boxed{z^{m_{i+1}} = z^{m_i - u(m_i) + \alpha_{i+1} u(m_i) + \tilde{\alpha}_{i+1}\left[1 - u(m_i)\right]}}$$

$$\Rightarrow P(z) = \lim_{i \to \infty} E\left[z^{m_{i+1}}\right] = \boxed{P_0 \tilde{A}(z) + \left(P(z) - P_0\right) A(z) z^{-1}} \quad !$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = \frac{P_0\left[A(z) - z\tilde{A}(z)\right]}{A(z) - z}}$$

DOVE $A(z) = \underbrace{B}_{\text{f.g.m}}\left[\lambda(z-1)\right]$ INDICA NON VUOTO

$\tilde{A}(z) = \tilde{B}\left[\lambda(z-1)\right]$ INDICA VUOTO

$$\boxed{N = P'(1) \cdot P_0 \, \frac{\lambda^2 \bar{\tilde{x}}^2 + 2\lambda \bar{\tilde{x}} - \lambda^2 \bar{x}^2}{2(1-\lambda \bar{x})} + \frac{\lambda^2 \bar{x}^2}{2(1-\lambda \bar{x})}}$$

$$\boxed{T = N/\lambda}$$

E ANCHE LA STABILITÀ È ANALOGA AL CLASSICO M/G/1: $\boxed{\lambda \bar{x} < 1}$

---

21) PROCESSO DI POISSON COMPOSTO

SI USA QUANDO UN ARRIVO COMPORTA UNA RICHIESTA MULTIPLA DI SERVIZIO.

IPOTIZZIAMO DI CONOSCERE IL NUMERO DI ARRIVI K NEL TEMPO DI PACCHETTO. SIANO:

- Y: TEMPO DI SERVIZIO PER RICHIESTA. LA STATISTICA DEL NUMERO DI UNITÀ PER RICHIESTA È NOTA ED HA UNA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI $M(z)$

fgm LEGATA AL NUMERO DI UNITÀ PER RICHIESTA

IN UN TEMPO Y ARRIVANO K RICHIESTE E CON m_i SI INDICA IL NUMERO DI RICHIESTE CON TEMPO DI SERVIZIO COSTANTE APPARTENENTI AL FLUSSO i.

ALLORA IL NUMERO COMPLESSIVO DI PACCHETTI ARRIVATI SARÀ $\boxed{\sum_{i=1}^{K} m_i}$

QUINDI LA FUNZIONE GENERATRICE DEGLI ARRIVI CONDIZIONATA A K ARRIVI IN TEMPO Y È DEFINITA COME:

$$\boxed{A(z|k) = \underbrace{M^k(z)}}$$

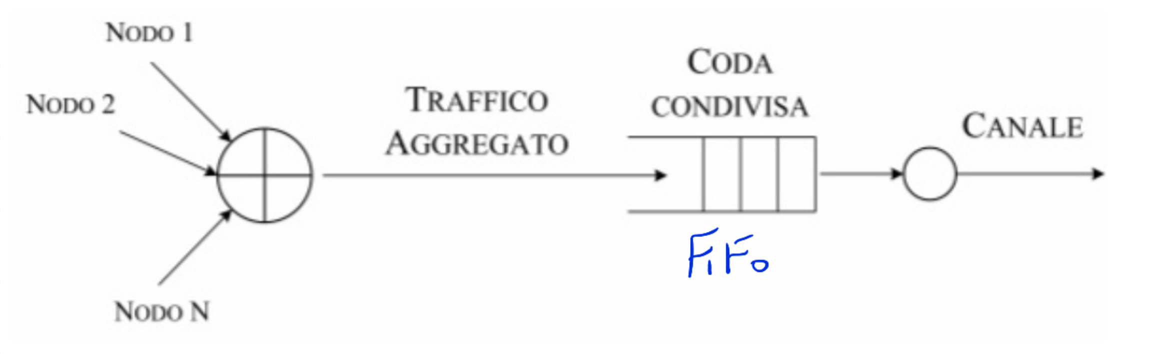
$$\Rightarrow \boxed{A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A(z|k) \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau[1-M(z)]}}$$

---

22) TECNICA ATDM (MULTIPLEXER STATISTICO)

→ AUMENTA IL FATTORE DI CARICO.

CON QUESTA TECNICA NON È PREVISTA ASSEGNAZIONE FISSA DI SLOT TEMPORALI E NODI E QUINDI CIASCUN NODO PUÒ USARE TUTTI GLI SLOT DI CUI NECESSITA SENZA VINCOLI.



IL TRAFFICO AGGREGATO SARÀ UN PROCESSO DI POISSON CON TASSO MEDIO $\lambda_t = N\lambda$ E QUINDI, CON UN SERVIZIO SINCRONO, UNA RICHIESTA CHE TROVA IL SISTEMA OCCUPATO ANDRÀ IN CODA, MA UNA CHE LO TROVA LIBERO NON POTRÀ ACCEDERE SUBITO POICHÉ DOVRÀ ASPETTARE IL SUCCESSIVO ISTANTE DI SINCRONIZZAZIONE.

→ IL MODELLO DI ANALISI È UN M/G/1 CON TEMPI DI SERVIZIO DIFFERENZIATI.

ATDM CON BUFFER FINITO:

SI HA CAPACITÀ FINITA B.

- TEMPO DI TRASMISSIONE = TEMPO DI SLOT

- TEMPO DI SERVIZIO COSTANTE

IL MODELLO È UN M/D/1/B ED ESSENDO CHE È UN SISTEMA A CAPACITÀ FINITA (CON PERDITA) NON SI PUÒ APPLICARE LO STUDIO DEGLI M/D/1 MA SI FA ANALISI TRAMITE LA MATRICE DELLE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DEGLI STATI.

$$R = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \sum_{j=B}^{\infty} a_j \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \sum_{j=B}^{\infty} a_j \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \sum_{j=B-1}^{\infty} a_j \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \; a_0 & \sum_{j=1}^{\infty} a_j \end{bmatrix}$$

INDICA CON a_i LA PROBABILITÀ DI AVERE i ARRIVI NEL TEMPO DI SERVIZIO

SI DEFINISCE IL VETTORE DI STATO $\boxed{P = [p_0, p_1, \dots, p_B]}$

INDICA LA PROBABILITÀ DI AVERE NELLA CODA i PACCHETTI AL TEMPO DI INIZIO DEGLI SLOT

SI RISOLVE IL SISTEMA $P_{i+1} = P_i \cdot R$ E SI OTTIENE:

$$\boxed{P_{i+1} = \frac{P_i - \sum_{k=1}^{i} a_{i-k+1} - P_0 a_i}{a_0} \qquad 0 \le i < B}$$

23) M/G/1 CON PRIORITÀ DI SERVIZIO

→ FLUSSI CONCORRENTI HANNO DIFFERENTI REQUISITI DI ACCESSO

UTILE PER L'ANALISI DI CASI DOVE FLUSSI INFORMATIVI CONCORRENTI HANNO DIFFERENTI REQUISITI DI ACCESSO.
SI SUPPONE CHE IL SISTEMA PREVEDA LA SUDDIVISIONE IN M CLASSI DI PRIORITÀ E CHE LA PRIORITÀ DI UNA CLASSE SIA INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL NUMERO CHE LA CARATTERIZZA (CLASSE 1 AVRÀ PRIORITÀ MAGGIORE). SI DISTINGUONO DUE MODALITÀ:

- PREEMPTIVE ②
- NON PREEMPTIVE ①

1) NON-PREEMPTIVE

SI CONSIDERA LA GENERICA CLASSE K ED IL SUO TASSO DI ARRIVI λ_K ED IL SUO TASSO DI SERVIZIO μ_K. IL PROCESSO DI ARRIVO DELLE RICHIESTE È DI POISSON ED È INDIPENDENTE DALLE ALTRE CLASSI.

IL TEMPO MEDIO TRASCORSO DA CIASCUN MESSAGGIO NELLA CLASSE DI PRIORITÀ K:

TEMPO DI SERVIZIO / TEMPO DI CODA

$$\boxed{T_K = \overline{X}_K + \overline{W}_K}$$

→ TEMPO MEDIO TRASCORSO DA CIASCUN MESSAGGIO NELLA SUA RISPETTIVA CLASSE DI PRIORITÀ.

E VOGLIAMO RICAVARE $\overline{W}_K$. SI CONSIDERA IL SISTEMA A PRIORITÀ MAGGIORE: → CLASSE 1

$$\boxed{W_1 = N_1 \bar{X}_1 + \bar{R}}$$

RESIDUO DEL TEMPO DI SERVIZIO

SI APPLICA LITTLE: $N_1 = \lambda_1 \bar{W}_1 \Rightarrow \boxed{\bar{W}_1 = \frac{\bar{R}}{1-\rho_1}}$

NON DIPENDE DA QUANTI MESSAGGI CI SONO IN ATTESA NELLE CLASSI A PRIORITÀ INFERIORE

⇓

DIPENDE SOLO DAL FATTORE DI CARICO ρ

!

STABILITÀ GARANTITA DA $\boxed{\rho < 1}$ ED INOLTRE NOTIAMO CHE IL TEMPO MEDIO DI ATTESA NON DIPENDE DA QUANTI MESSAGGI CI SONO IN ATTESA NEI SOTTOSISTEMI A PRIORITÀ INFERIORE ⇒ STABILITÀ DIPENDE SOLO DAL FATTORE DI CARICO.

PER IL SISTEMA A PRIORITÀ 2 VALE:

$$\bar{W}_2 = N_2 \bar{X}_2 + \bar{R} + \underbrace{\overset{\lambda W X}{\lambda_1 W_2 \bar{X}_1}}_{} + \overbrace{N_1 \bar{X}_1}^{}$$

PROCESSI A PRIORITÀ MAGGIORE

EVENTUALI NUOVE RICHIESTE A PRIORITÀ MAGGIORE

$$\Rightarrow \boxed{\bar{W}_2 = \frac{\bar{R}}{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)}}$$

E GENERALIZZANDO PER LA K-ESIMA CLASSE:

$$\boxed{W_k = \frac{\bar{R}}{\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i\right)}}$$

!

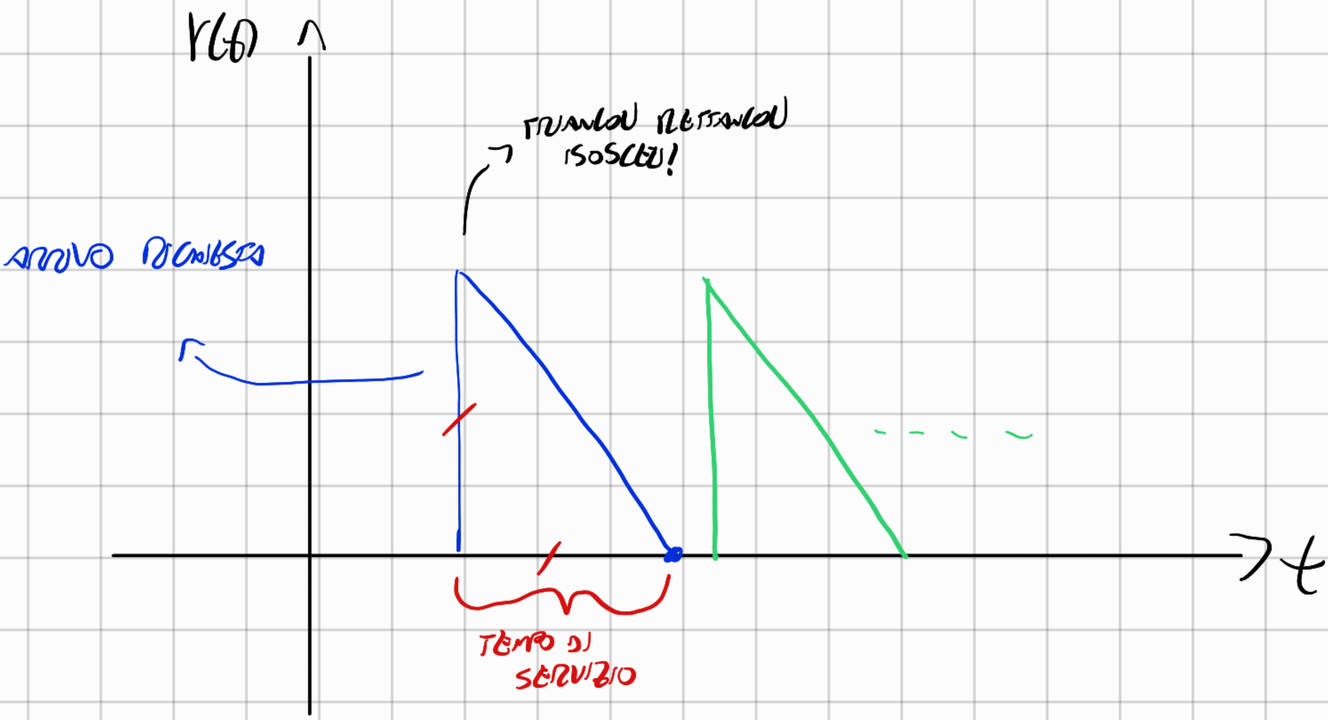
CLASSE K È STABILE SE LA SOMMA DEI FATTORI DI CARICO DELLE PRIME K CLASSI

< 1

$\Rightarrow$ LA STABILITÀ DEL SOTTOSISTEMA DI PRIORITÀ K È GARANTITA SE LA SOMMA DEI FATTORI DI CARICO RELATIVI AI PRIMI K SOTTOSISTEMI È < 1

$\hookrightarrow$ QUINDI LA STABILITÀ DI UN SOTTOSISTEMA NON È INFLUENZATA DALLE CONDIZIONI DI CARICO DEI SOTTOSISTEMI A PRIORITÀ INFERIORE

SI VALUTA ANCHE IL VALOR MEDIO DEL RESIDUO $\overline{R}$. SIA $r(t)$ IL PROCESSO STOCASTICO CHE LO DESCRIVE:



SE $D(T)$ È IL NUMERO DI RICHIESTE CHE LASCIANO IL SISTEMA IN $[0,T]$ ALLORA:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{D(T)} \frac{1}{2} x_i^2}$$

$\rightarrow$ TEMPO DI SERVIZIO GENERICO

TASSO MEDIO PARTENZE

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{D(T)}{T}}$ RAPPRESENTA IL TASSO MEDIO DELLE PARTENZE E DOVRÀ ESSERE UGUALE AL TASSO MEDIO TOTALE DEGLI ARRIVI

AL SISTEMA STESSO, OVVERO:

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{D(T)}{T} = \lambda_t}$$

TASSO MEDIO PARTENZE = TASSO MEDIO ARRIVI !

VALORE QUADRATICO MEDIO DELLA GENERICA RICHIESTA IN SERVIZIO.

$\rightarrow$ $\boxed{\overline{R} = \frac{1}{2}\lambda\, \mathbb{E}[X_i^2]}$ E $\boxed{\mathbb{E}[X_i^2] = \lim_{T\to\infty} \sum_{i=1}^{D(T)} \frac{X_i^2}{D(T)}}$

IN PARTICOLARE SI HA CHE $\mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{i=1}^{N} \overline{X_i^2} \cdot \mathbb{P}\{$RICHIESTA IN SERVIZIO DELLA CLASSE $i\}$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{M} \overline{X_i^2} \frac{\lambda_i}{\lambda}}$$

E QUINDI $\overline{R} = \frac{1}{2}\lambda\, \mathbb{E}[X_i] = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \overline{X_i^2}\lambda_i}$ $\overline{R}$

OVVERO $$\boxed{\overline{T_u} = \overline{X_u} + \overline{W_u} = \overline{X_u} + \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{X_i^2}\lambda_i}{\left(1-\sum_{i=1}^{u-1}\rho_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{u}\rho_i\right)}}$$

DOVE LA STABILITÀ LOCALE $\sum_{i=1}^{u}$ (PER UNA CLASSE): $\boxed{\sum_{i=1}^{u} \rho_i < 1}$ E QUELLA GLOBALE $\sum_{i=1}^{N}$ (PER TUTTE LE CLASSI): $\boxed{\sum_{i=1}^{N} \rho_i < 1}$

2)

PREEMPTIVE

L'APPROCCIO È LO STESSO DEL CASO PRECEDENTE MA STAVOLTA IL SERVIZIO PUÒ ESSERE SOSPESO DALL'ARRIVO DI UNA RICHIESTA A PRIORITÀ MAGGIORE

QUESTO FA SI CHE IL TEMPO DI SERVIZIO AUMENTI IN BASE AL NUMERO DI RICHIESTE A PRIORITÀ MAGGIORE CHE ARRIVANO

$$\Rightarrow \boxed{T_k = \frac{\bar{X}_k\left(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i\right)+\bar{R}_k}{\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i\right)\left(1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i\right)}}$$

→ T AUMENTA IN BASE A QUANTE RICHIESTE A PRIORITÀ MAGGIORE ARRIVANO!!

→ TEMPO IN ATTESA DOVUTO ALLE RICHIESTE A PRIORITÀ MAGGIORE $\bar{W}_k$

↳ VANTAGGIOSO PER LE RICHIESTE A PIÙ ALTA PRIORITÀ

QUESTO SISTEMA È INDIPENDENTE DAL COMPORTAMENTO DELLE CLASSI A PRIORITÀ MINORE E QUINDI HA PRESTAZIONI MAGGIORI PER LE RICHIESTE A PIÙ ALTA PRIORITÀ MA MINORE PER QUELLE A PRIORITÀ MINORE.

---

24)

SISTEMI G/M/1

→ SISTEMA SENZA PERDITE

↳ SISTEMA NON-MARKOVIANO

OCCORRE DEFINIRE GLI ISTANTI DI OSSERVAZIONE DEL SISTEMA COME GLI ISTANTI DI ARRIVO DELLE RICHIESTE. SIANO:

- n_i = # RICHIESTE PRESENTI NEL SISTEMA QUANDO ARRIVA LA RICHIESTA i
- d_i = # RICHIESTE CHE HANNO COMPLETATO IL LORO SERVIZIO NEL TEMPO DI ATTESA DELL'ARRIVO i-ESIMO

$\Rightarrow \boxed{n_{i+1} = n_i + 1 - \alpha_{i+1}}$

$$\to P(n_{i+1} = n+1-j \mid n_i = n, t_a = t) = \boxed{\frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!}}$$

SI RIMUOVE IL CONDIZIONAMENTO RISPETTO A t:

$$P(n_{i+1} = n+1-j \mid n_i = n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!} \overbrace{\delta(t)}^{\text{fdp del tempo tra arrivi consecutivi}} dt = \boxed{P_{n,n+1-j}}$$

// NULLA ROBA

---

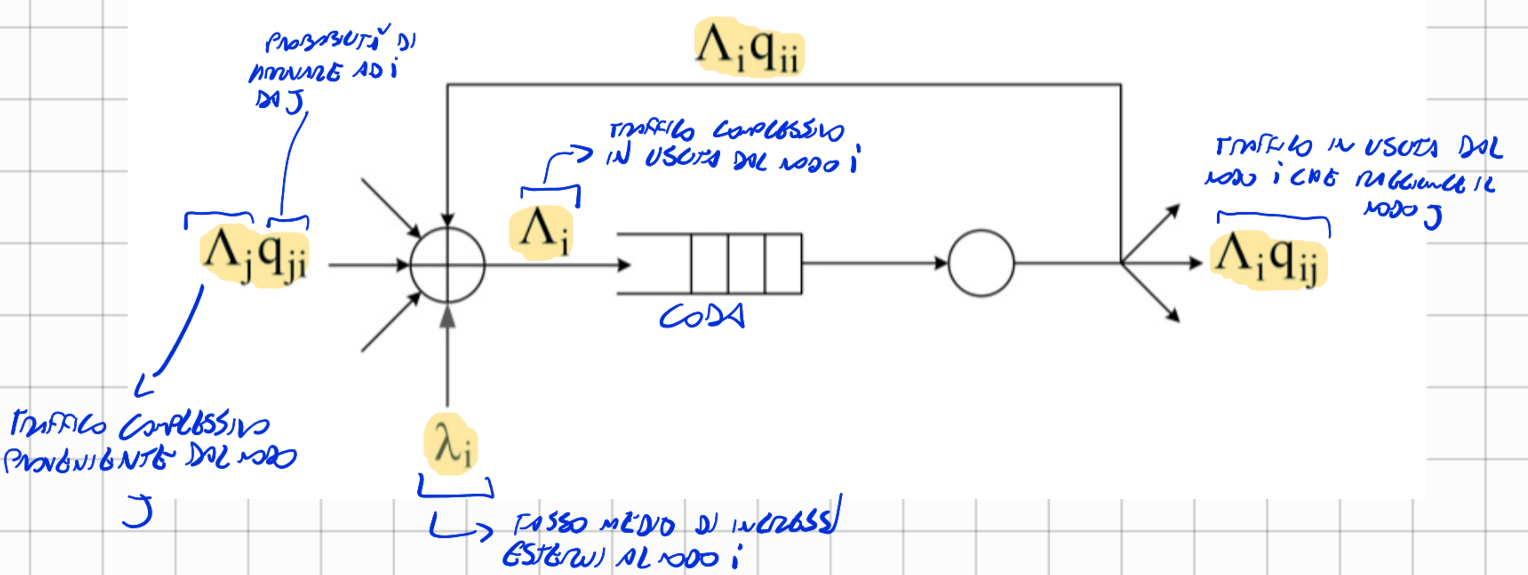
25) INTRO RETI DI CODE

SI POSSONO COMBINARE I SISTEMI A CODA PER FORMARE LE RETI DI CODE:

- RETI CODE APERTE: AMMETTONO TRAFFICO INTERNO/ESTERNO

- RETI DI CODE CHIUSE: NON AMMETTONO SCAMBI DI TRAFFICO.

MODELLO STORE AND FORWARD



DOVE:

- N = NUMERO DI NODI DELLA RETE
- q_{ij} = PROBABILITÀ CON CUI UN PACCHETTO VA DAL NODO i AL NODO J
- Λ = TASSO MEDIO DEL TRAFFICO IN CODA
- λ = TASSO MEDIO DEL TRAFFICO ESTERNO ENTRANTE

$$\rightarrow \boxed{\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j q_{ji}}$$

TUTTO IL TRAFFICO CHE ARRIVA AL NODO i DA TUTTI GLI ALTRI J NODI.

!

SI VUOLE QUINDI CALCOLARE L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DEL TRAFFICO A TUTTI GLI N NODI DELLA RETE. SI CONSIDERANO LE MATRICI:

- P = MATRICE DI INSTRADAMENTO DI ELEMENTI q_{ij}

- $\underline{P}$: MATRICE DI INSTRADAMENTO O ROUTING P_{ij}

- $\underline{\Lambda}$: VETTORE DEL TRAFFICO IN INGRESSO COMPLESSIVO

- $\underline{\lambda}$: VETTORE DEL TRAFFICO ESTERNO

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\Lambda} = \underline{\lambda} + \underline{\Lambda}\,\underline{P}} \longrightarrow \boxed{\underline{\lambda} = (\underline{I} - \underline{P}^T)\,\underline{\Lambda}}$$

---

76) $\boxed{\text{TEOREMA DI BURKE}}$

→ OGNI NODO È UN SISTEMA A CODA INDIPENDENTE DAGLI ALTRI

→ TANDEM NETWORKS: RETI DI CODE DOVE LE PARTENZE DEL PRIMO NODO SONO GLI INGRESSI DEL NODO SUCCESSIVO

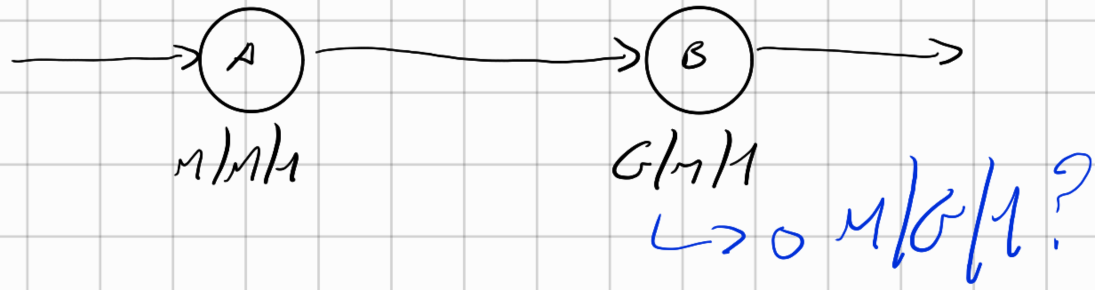
$\left\{ \begin{array}{l} \text{ARRIVO: POISSON} \\ \text{SERVIZIO: ESPONENZIALE} \end{array} \right]$ I° NODO

DATA UNA TANDEM NETWORK IL PROCESSO DI ARRIVO AL PRIMO NODO È DI POISSON CON TEMPI DI SERVIZIO ESPONENZIALI E INDIPENDENTI E QUINDI IL PROCESSO DI INGRESSO A TUTTI GLI ALTRI NODI È DI POISSON CON TASSO MEDIO UGUALE AL TASSO DEL PROCESSO DI INGRESSO DEL PRIMO NODO E QUINDI OGNI NODO COSTITUISCE UN SISTEMA A CODA INDIPENDENTE DAGLI ALTRI!

Dim:

SI DEVE DIMOSTRARE CHE IL PROCESSO IN INGRESSO AL SECONDO NODO È DI POISSON INDIPENDENTE DA QUELLO IN INGRESSO AL PRIMO NODO DELLA RETE.

SI CONSIDERANO PRIMO NODO M/M/1 E SECONDO G/M/1.
SI CARATTERIZZA IL PROCESSO DI ARRIVO AL SECONDO NODO MEDIANTE GLI INTERTEMPI DI ARRIVO. SI DISTINGUONO DUE CASI:



1. ARRIVI SU B QUANDO A NON È VUOTO

2. ARRIVI SU B QUANDO A È VUOTO

→ NON VUOTO

① I TEMPI DI INTERARRIVO COINCIDONO CON I TEMPI DI COMPLETAMENTO DEL SERVIZIO NEL NODO A:

$$\boxed{\underbrace{\beta_P(s)}_{\text{f.g.m. sistema "pieno"}} = \frac{\mu_A}{\mu_A - s}} \quad \Delta$$

→ VUOTO

② IL TEMPO DI INTERARRIVO IN B È LA SOMMA DEL TEMPO DI ATTESA PER UN ARRIVO IN A + TEMPO DI SERVIZIO RICHIESTO. I DUE CONTRIBUTI SONO INDIPENDENTI:

$$\boxed{\underbrace{\beta_V(s)}_{\text{f.g.m. sistema "vuoto"}} = \frac{\lambda}{\lambda - s} \cdot \frac{\mu_A}{\mu_A - s}}$$

=> QUINDI LA fdp DEL TEMPO DI INTERARRIVO A B SENZA CONDIZIONAMENTO DI A:

PROBABILITÀ CHE IL SISTEMA SIA NON VUOTO = PIENO

$$\boxed{\beta(s) = \beta_P(s)\overbrace{(1 - p_0)}^{} + \beta_V(s)\, p_0} \rightarrow \boxed{p_0 = 1 - \rho_A}$$

PROBABILITÀ CHE IL SISTEMA SIA VUOTO

E SOSTITUENDO p_0 SI OTTIENE

$$\boxed{\beta(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}} \quad \Delta$$

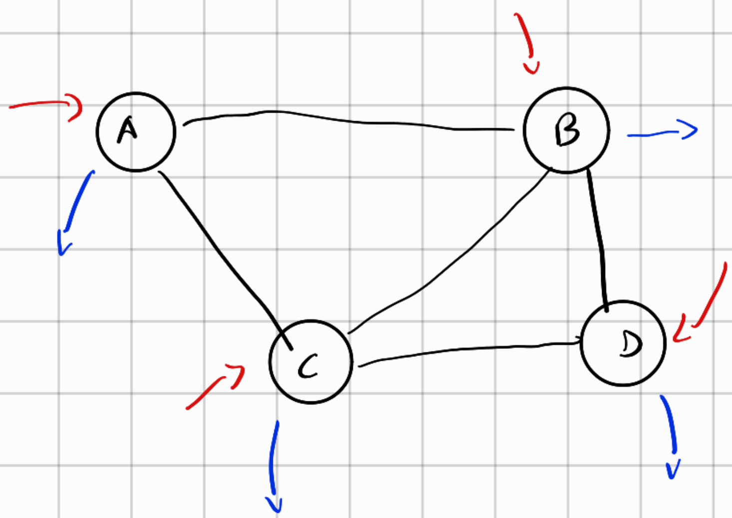
OVVERO CHE IL PROCESSO DI ARRIVO DELLE RICHIESTE AL NODO B È ANCORA UN PROCESSO DI POISSON CON TASSO UGUALE A QUELLO IN INGRESSO AL NODO A ED INDIPENDENTE DA ESSO! ☐

---

27) **RETI DI JACKSON** (APERTE) → INTERAZIONE CON L'AMBIENTE ESTERNO!

UNA RETE È DI JACKSON SE:

- I PROCESSI DI INGRESSO ALLA RETE SONO DI POISSON INDIPENDENTI
- I TEMPI DI SERVIZIO SONO INDIPENDENTI E DI TIPO ESPONENZIALE
- LA RETE NON AMMETTE PERDITE, OVVERO NON POSSONO ESSERE RIFIUTATE RICHIESTE IN INGRESSO



INDICA, PER OGNI ELEMENTO, QUANTE RICHIESTE SONO ASSOCIATE

LO STATO DELLA RETE È DEFINITO DAL VETTORE $\bar{n}$ DOVE OGNI ELEMENTO È ASSOCIATO AL NUMERO DI RICHIESTE DEL NODO CORRISPONDENTE.

→ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DEL TRAFFICO

SAPPIAMO CHE $\boxed{\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j q_{ji}}$ E POSSIAMO SCRIVERE LA

RELAZIONE DI EQUILIBRIO GLOBALE IN RIFERIMENTO ALLO STATO $\bar{n}$:

$$P(\bar{n})\Big[\underbrace{\lambda_t}_{\text{FLUSSO TOTALE DI ENTRATA NELLA RETE DALL'ESTERNO}} + \sum_{i=1}^{N}\mu_i\Big] \overset{\text{EQUILIBRIO}}{=} \sum_{i=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i)\mu_i q_{i0} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\bar{n}+\bar{I}_i-\bar{I}_j)\mu_i q_{ij}$$

MA $\boxed{\lambda_i = \Lambda_i - \sum_{j=1}^{N}\Lambda_j q_{ji}}$ E SOSTITUENDO:

$$P(\bar{n})\Big[\lambda_t + \sum_{i=1}^{N}\mu_i\Big] = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i)\Lambda_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i)\Lambda_j q_{ji} + \sum_{i=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i)\mu_i q_{i0}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\bar{n}+\bar{I}_i-\bar{I}_j)\mu_i q_{ij}$$

ED ASSUMENDO CHE:

- $\boxed{\Lambda_i P(\bar{n}-\bar{I}_i) = \mu_i P(\bar{n})}$

- $\boxed{\Lambda_j P(\bar{n}-\bar{I}_i) = \mu_j P(\bar{n}-\bar{I}_i+\bar{I}_j)}$

$$\Rightarrow \lambda_t P(\bar{n}) + \cancel{\sum_{i=1}^{N} P(\bar{n})\mu_i} = \cancel{\sum_{i=1}^{N}\mu_i P(\bar{n})} - \cancel{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i+\bar{I}_j)\mu_j q_{ji}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} P(\bar{n}+\bar{I}_i)\mu_i q_{i0} + \cancel{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(\bar{n}-\bar{I}_i+\bar{I}_j)\mu_j q_{ji}}$$

SI OTTIENE $$\boxed{\lambda_t P(\bar{n}) = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{P(\bar{n}+\bar{I}_i)\mu_i}q_{i0}}$$

ED ASSUMENDO CHE VALGA $\boxed{\mu_i P(\bar{n}+\bar{I}_i) = \Lambda_i P(\bar{n})}$ SI OTTIENE:

$$\lambda_t P(\bar{n}) = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P(\bar{n}) q_{i0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\lambda_t = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i q_{i0}}$$

$\hookrightarrow$ STABILISCE RAPPORTO TRA IL TRAFFICO CHE ENTRA DALL'ESTERNO CON QUELLO CHE LASCIA LA RETE

$\Downarrow$

$\boxed{\text{STABILITÀ}}$

INVERTI!

COME CONSEGUENZA DOVRÀ ANCHE VALERE CHE:

$$\boxed{\mu_i P(\bar{n}) = \Lambda_i P(\bar{n}-\bar{I}_i)}$$

DA CUI SEGUE CHE:

$$\boxed{P(\bar{n}) = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} P(\bar{n}-\bar{I}_i)} = \boxed{\rho_i P(\bar{n}-\bar{I}_i)}$$ MA VALE ANCHE

$$\boxed{\mu_i P(\bar{n}-\bar{I}_i) = \Lambda_i P(\bar{n}-\bar{I}_i-\bar{I}_j)} \Rightarrow \boxed{P(\bar{n}) = \rho_i^2 P(\bar{n}-\bar{I}_i-\bar{I}_j)}$$

ED IN GENERALE, SE n_i È IL NUMERO DI RICHIESTE PRESENTI NEL NODO i SI HA CHE:

ITERANDO

$$\boxed{P(\bar{n}) = \rho_i^{n_i} \cdot P(n_1, n_2, \ldots, 0, n_{i+1}, \ldots, n_N)}$$

IL RISULTATO FINALE È CHE $$\boxed{P(\bar{n}) = \prod_{i=1}^{N} \rho^{n_i} \, \underbrace{P(\underline{0})}}$$! DIPENDE DA STATO INIZIALE INCOGNITO

CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE PER RICAVARE $P(\underline{0})$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n P(\bar{n}) = \sum_n \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \rho^{n_i}}_{\hookrightarrow \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-\rho_i}} P(\underline{0}) = 1}$$

SOSTITUENDO

$$\Rightarrow \boxed{P(\underline{0}) = \underbrace{\prod_{i=1}^{N} (1-\rho_i)}} \longrightarrow P(\bar{n}) = \prod_{i=1}^{N} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i} = \boxed{\prod_{i=1}^{N} P(n_i)}$$

I NODI SONO INDIPENDENTI TRA DI LORO E QUINDI L'ANALISI COMPLETA DELLA RETE SI PUÒ FARE ANALIZZANDO OGNI NODO SINGOLARMENTE!

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\lambda_t} \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i}}$$!

FORNIRE A CIASCUN LINK IL VALORE OTTIMO DELLA CAPACITÀ!

28) ASSEGNAZIONE CAPACITÀ DI LINK DI UNA RETE DI JACKSON

L'OBIETTIVO È FORNIRE A CIASCUN LINK DELLA RETE IL VALORE OTTIMO DELLA CAPACITÀ IN BASE A CERTI VINCOLI

. N: IL NUMERO DI NODI

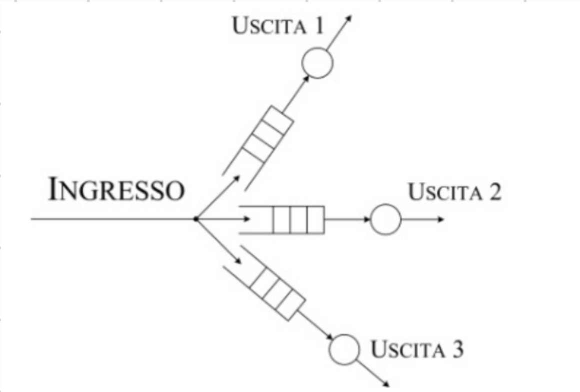
λ $\sum^{N}$

- $\lambda_t = \sum_{i=1} \lambda_i$ il tasso complessivo del traffico in ingresso alla rete.

- Λ_i = tasso totale del traffico in ingresso al nodo i

- μ_i = capacità di servizio del nodo i

- L il numero di link della rete in una situazione del tipo:



!

Dato che i sistemi link sono senza perdita allora il numero totale di richieste in un nodo è uguale alla somma delle richieste nei sistemi link che costituiscono il nodo.

$$\boxed{T = \frac{1}{\lambda_t} \sum_{i=1}^{L} \frac{\alpha_i}{\mu_i - \alpha_i}}$$

numero totale di richieste in un nodo

→ senza perdite
⇓
numero totale di richieste è la somma dei link che costituiscono il nodo

↳ tasso del traffico in uscita dal link

Sia $\bar{b}_i$ numero medio di bit che compongono le richieste per il link i

allora:

$$\boxed{\underbrace{I_i}_{\text{tasso di ingresso al buffer}} = \bar{b}_i \cdot \alpha_i} \quad \text{e} \quad \boxed{\underbrace{C_i}_{\text{capacità del link}} = \bar{b}_i \underbrace{\mu_i}_{\text{tasso di servizio}}}$$

!

voglio trovare C_i in modo da minimizzare

$$\boxed{T = \frac{1}{\lambda_t} \sum_{i=1}^{L} \frac{I_i}{C_i - I_i}}$$

con $C_i > I_i \ \forall i$

↳ funzione obiettivo da minimizzare!

Se z_i è il costo del link i-esimo → $\boxed{z_i = \underbrace{d_i}_{\text{fattore di costo}} C_i}$

CONSIDERO $\boxed{Z = \sum_{i=1}^{L} z_i}$ COSTO TOTALE = SOMMA DI TUTTI I COSTI E PER MINIMIZZARE T SI USA LA LAGRANGIANA:

$$\boxed{\Gamma = \underbrace{\frac{1}{\lambda t} \sum_{i=1}^{L} \frac{I_i}{C_i - I_i}}_{T} + \gamma \sum_{i=1}^{L} d_i C_i}$$

γ → MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Gamma}{\partial C_i} = -\frac{1}{\lambda t} \frac{I_i}{(C_i - I_i)^2} + \gamma d_i = 0 \quad \forall i}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_i = I_i + \sqrt{\frac{I_i}{\gamma \lambda_t d_i}}} \longrightarrow \boxed{T = \frac{1}{\lambda t} \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \sqrt{d_i I_i} \right)^2}{Z - \sum_{i=1}^{L} d_i I_i} \quad !!}$$

→ NUMERO OTTIMO DI RICHIESTE NEL NODO!

PROBABILITÀ DI SERVENTE LIBERO

SI VUOLE TROVARE LA PROBABILITÀ P_0 CHE IL SERVENTE SIA LIBERO.
SIA t L'INTERVALLO DI OSSERVAZIONE DEL SISTEMA

$\boxed{(1-P_0)t}$ È IL SOTTOINTERVALLO DI TEMPO NEL QUALE IL SISTEMA È OCCUPATO

SE SI IMPONE LA STABILITÀ DEL SISTEMA SI OTTIENE:

$$\boxed{(1-p_0)t = \lambda t \bar{x}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{p_0 = 1 - \lambda \bar{x} = 1 - \rho}$$