DEFINIZIONE MINIMO LOCALE

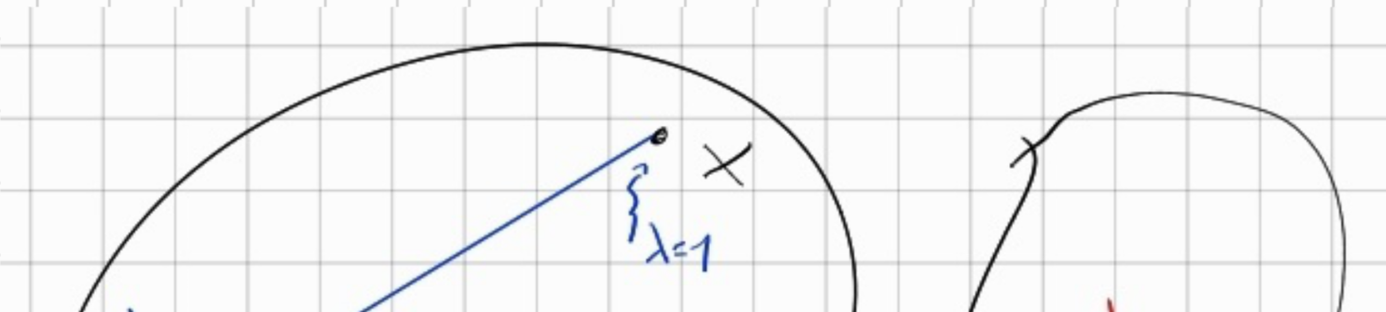
UN PUNTO $\bar{x}$ AMMISSIBILE ($\to \bar{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$) È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE SE:

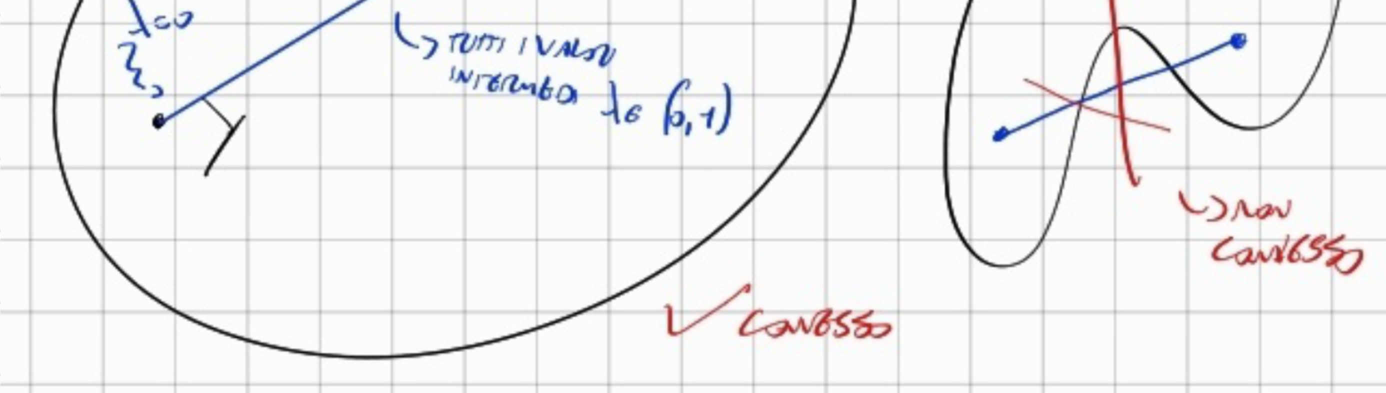
$$\boxed{f(\bar{x}) \le f(x) \quad \forall x \in S \cap B_\rho(\bar{x})} \quad \rho > 0$$

DEFINIZIONE INSIEME CONVESSO

UN INSIEME $S \subseteq \mathbb{R}^n$ È DEFINITO CONVESSO SE:

$$\boxed{\begin{gathered} \forall x, y \in S \ \text{ e } \ \forall \lambda \in [0,1] \ \text{ VALE:} \\ \lambda x + (1-\lambda) y \in S \end{gathered}}$$





AD ESEMPIO, LA SFERA $\boxed{B_\rho(\bar{x}) \text{ È CONVESSA}}$

DEFINIZIONE FUNZIONE CONVESSA

SIA $S \in \mathbb{R}^n$ UN INSIEME CONVESSO E SIA UNA FUNZIONE

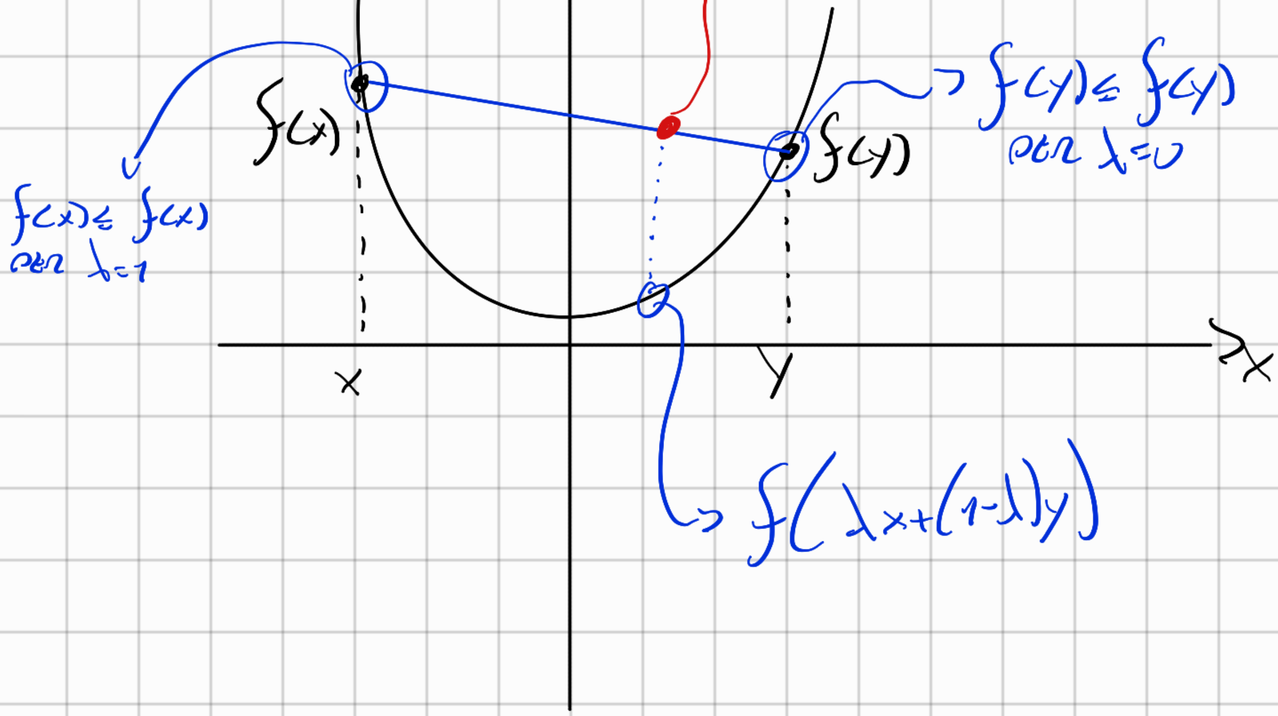
$$f: S \longmapsto \mathbb{R} \text{ CONTINUA.}$$

f È CONVESSA SE:

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x,y \in S \text{ E } \forall \lambda \in [0,1] \text{ SI HA CHE:} \\ f((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\end{gathered}}$$

GRAFICAMENTE:

$\lambda f(x)+(\lambda-1)f(y)$



TUTTE LE **NORME SONO FUNZIONI CONVESSE**

Dim:

SIANO $x, y \in \mathbb{R}^n$ E SIA $\lambda \in [0,1]$, DEFINISCO:

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y$$

E CALCOLO

$$\|z\| = \|\lambda x + (1-\lambda) y\|$$

$$\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\|$$

$$= \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\| \quad \checkmark$$

→ LA CONVESSITÀ FA COINCIDERE IL MINIMO LOCALE CON

MINIMO LOCALE = MINIMO GLOBALE

... QUELLO GLOBALE!!

SIA $S \subseteq \mathbb{R}^n$ CONVESSO E SIA $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ CONVESSA,

ALLORA I PUNTI DI MINIMO LOCALE PER $\min_{x \in S} f(x)$

SONO ANCHE PUNTI DI MINIMO GLOBALE!

Dim:

SIA $\boxed{\bar{x} \in S}$ UN PUNTO DI MINIMO LOCALE E SIA $\boxed{y \in S}$. DEFINIAMO:

$$\boxed{z = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda y} \quad \text{CON } \lambda \in [0,1]$$

DATO CHE S È CONVESSO PER IPOTESI SI HA CHE

$$\boxed{z \in S}$$

POICHÉ $\bar{x}, y \in S$ E QUINDI ANCHE LA LORO CONGIUNGENTE Z APPARTIENE AD S PER DEFINIZIONE DI CONVESSITÀ.

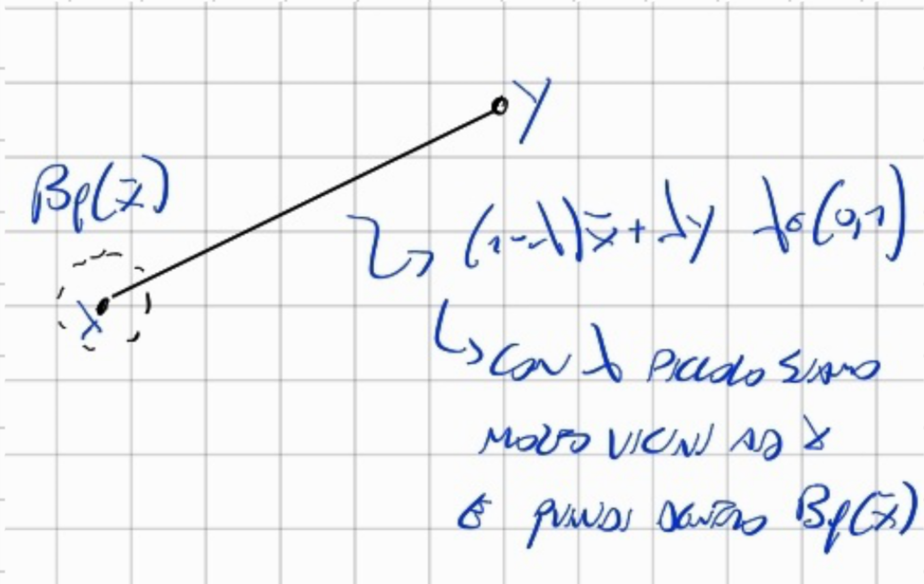
$\bar{x}$ È DI MINIMO LOCALE, QUINDI $\exists \rho > 0$ TALE CHE:

$$\boxed{f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap B_\rho(\bar{x})}$$

PER DEFINIZIONE DI MINIMO LOCALE.

PER UN λ ABBASTANZA PICCOLO, INOLTRE, SI HA CHE:

$$\boxed{z \in B_\rho(\bar{x})}$$



ALLORA $f(\bar{x}) \le f(z) = f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda y)$ MA $\bar{x}, y \in S$ CONVESSO E f È CONVESSA

APPLICO PROPRIETÀ DI CONVESSITÀ

$$\Rightarrow f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda y) \le (1-\lambda) f(\bar{x}) + \lambda f(y)$$

$$\Rightarrow \cancel{f(\bar{x})} \le \cancel{f(\bar{x})} - \lambda f(\bar{x}) + \lambda f(y)$$

$$\Rightarrow \cancel{\lambda} f(\bar{x}) \le \cancel{\lambda} f(y) \Rightarrow \boxed{f(\bar{x}) \le f(y)} \quad \square$$

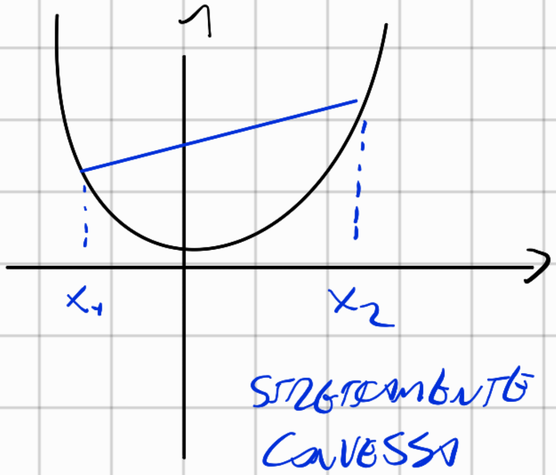
FUNZIONE STRETTAMENTE CONVESSA

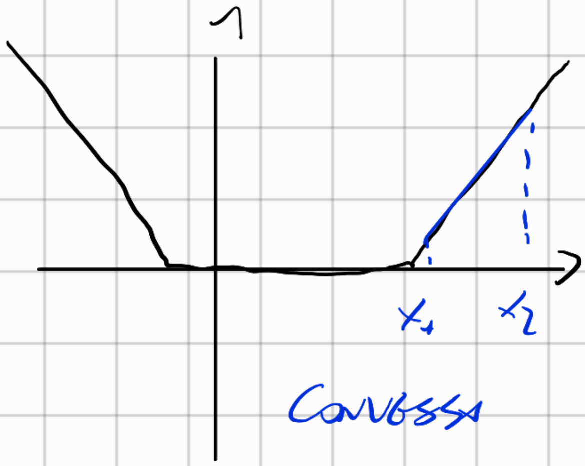
SIA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S INSIEME CONVESSO. f SI DICE **STRETTAMENTE CONVESSA** SE:

$\forall x, y \in S$ CON $x \neq y$ E $\forall \lambda \in (0,1)$ VALE CHE:

$$\boxed{f((1-\lambda)x+\lambda y) < (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)}$$

GRAFICAMENTE UNA FUNZIONE STRETTAMENTE CONVESSA SI HA QUANDO LA CONGIUNGENTE DEI DUE PUNTI È SEMPRE $>$:





SIA $f: S \to \mathbb{R}$ STRETTAMENTE CONVESSA; ALLORA IL **PUNTO DI MINIMO GLOBALE È UNICO!**

Dim:

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\bar{x}$, $\bar{y}$ SIANO DUE PUNTI

SUPPONIAMO, PER ASSURDO, CHE $\exists$ DUE PUNTI DISTINTI DI MINIMO GLOBALE, OVVERO $\bar{x} \neq \bar{y}$ E QUINDI

$$\boxed{f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})}$$

SIA $z = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y}$. APPLICO LA PROPRIETÀ DI STRETTA CONVESSITÀ:

$$
\begin{aligned}
f(z) &< (1-\lambda) f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{y}) \quad \text{ma } f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \\
&= (1-\lambda) f(\bar{x}) + \lambda f(\bar{x}) \\
&= f(\bar{x})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(z) < f(\bar{x})$ MA ASSURDO POICHÉ PER IPOTESI $\bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO GLOBALE! $\square$

RICHIAMO STRUMENTI DI ANALISI

1) DERIVATA DIREZIONALE

SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. LA DERIVATA DIREZIONALE DI f IN $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ LUNGO UNA DIREZIONE $d \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{D_f(\bar{x}, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + t\vec{d}) - f(\bar{x})}{t}}$$

La quale fornisce una stima della pendenza della retta che approssima la funzione f nel punto $\bar{x}$

2) DERIVATA PARZIALE

Sia $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, la derivata parziale di f in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ rispetto ad una variabile x_i:

$$\boxed{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = D_f(\bar{x}, \underbrace{e_i}_{})}$$

vettore di tutti zeri tranne un uno nella i-esima posizione

3) GRADIENTE

Data $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ il gradiente di f in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

SE LA FUNZIONE GRADIENTE $\vec{\nabla} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA SU $\mathbb{R}^n$ ALLORA f È CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE:

$$\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}^n)}$$

SE f È CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE, ALLORA $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $\forall \bar{d} \in \mathbb{R}^n$ VALE:

→ TEOREMA DEL GRADIENTE

$$\boxed{D_f(\bar{x}, \bar{d}) = \nabla f(\bar{x})^T \cdot \bar{d}}$$

SI HA CHE IL GRADIENTE RAPPRESENTA LA DIREZIONE DI MASSIMA SALITA DELLA FUNZIONE:

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA DI CALCOLARE LA MASSIMA PENDENZA DI UNA FUNZIONE ANDANDO A MASSIMIZZARE LA SUA DERIVATA DIREZIONALE:

→ COSTANTE → $=1$

$$\max_{\|\bar{d}\|=1} \overbrace{\vec{\nabla} f(\bar{x})^T \cdot \bar{d}}^{D_f(\bar{x}, \bar{d})} = \|\vec{\nabla} f(\bar{x})\| \cdot \|\bar{d}\| \cdot \cos(\theta)$$

↳ DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE FRA DUE VETTORI

⇒ IL MASSIMO SI HA MASSIMIZZANDO $\cos\theta$ OVVERO QUANDO

$\bar{d} = \vec{\nabla} f($

$$\boxed{d \parallel \nabla f(\bar{x})}$$

E QUINDI LA SOLUZIONE OTTIMA $d^* = \dfrac{\vec{\nabla} f(\bar{x})}{\| \vec{\nabla} f(\bar{x}) \|}$

4) **HESSIANA**

$$\boxed{\nabla^2 f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}}$$

SE LA FUNZIONE HESSIANA $\nabla^2 f(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ È CONTINUA SU $\mathbb{R}^n$, ALLORA LA FUNZIONE f È DUE VOLTE CONTINUAMENTE DIFFERENZIABILE

$$\boxed{f \in C^2(\mathbb{R}^n)}$$

5) JACOBIANO

SIA $F: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ VETTORIALE CON

$$F(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})\right)^T$$

ALLORA LO JACOBIANO $J_F(\bar{x})$ È UNA MATRICE

→ È LA MATRICE COMPOSTA DAI VETTORI GRADIENTE DISPOSTI PER RIGHE

$$\boxed{J_F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x})^T \\ \nabla f_2(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x})^T \end{pmatrix}}$$

E SI PUÒ INTERPRETARE L'HESSIANA $\nabla^2 f$ COME LO

JACOBIANO DEL GRADIENTE

ESEMPI

→ I CALCOLI SONO IN FONDO ALLA LEZIONE DEL 29/09

$f \qquad \vec{\nabla} f \qquad \nabla^2 f$

$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla f(x)$
$c^T x$	$c \in \mathbb{R}^n$	MATRICE NULLA
$\frac{1}{2} x^T Q x$ Q simmetrica	Qx	Q
$\frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2} x^T x = \frac{1}{2} x^T I x$	$Ix = x$	I
$\frac{1}{2}\|Ax+b\|^2$	$A^T A x - b^T A$	$A^T A$

SIA $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ con $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}^n)}$, allora f È CONVESSA

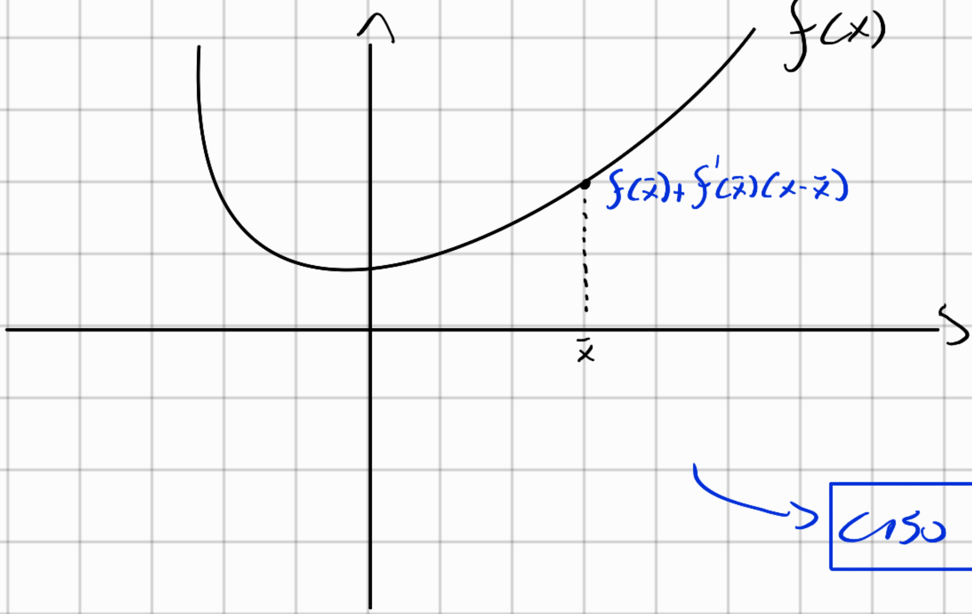
SE E SOLO SE VALE:

$$\boxed{f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})} \quad \forall x, \bar{x}$$

OPPURE:

$$\boxed{f(x+d) \geq f(x) + \nabla f(x)^T d}$$

↳ SIGNIFICA CHE UNA FUNZIONE CONVESSA È SEMPRE MAGGIORE DELLA TANGENTE ALLA FUNZIONE IN x



CASO $n=1$

SIA INVECE $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ALLORA VALE CHE:

$$\boxed{f \text{ È CONVESSA } \iff \nabla^2 f(x) \text{ È SEMIDEFINITA POSITIVA } \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

INOLTRE, SE $\nabla^2 f(x)$ È DEFINITA POSITIVA $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ALLORA

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ È STRETTAMENTE CONVESSA}}$$

ESEMPI:

- $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$: IN QUESTO CASO f È CONVESSA SE E SOLO SE Q È SEMIDEFINITA POSITIVA, E SE Q È INVECE DEFINITA POSITIVA, ALLORA f È STRETTAMENTE CONVESSA.

- $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$: SAPPIAMO CHE $\nabla^2 f(x) = A^T A$ CHE È UNA MATRICE SEMIDEFINITA POSITIVA POICHÉ:

SEMIDEFINITA POSITIVA POICHÉ:

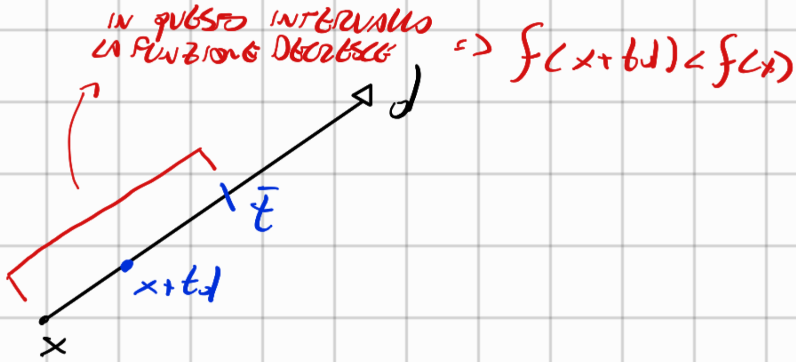
$$x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|^2 \geq 0 \quad ✓$$

INOLTRE, SE A PRESENTA RANGO MASSIMO, ALLORA ALLORA A È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow f(x)$ È STRETTAMENTE CONVESSA

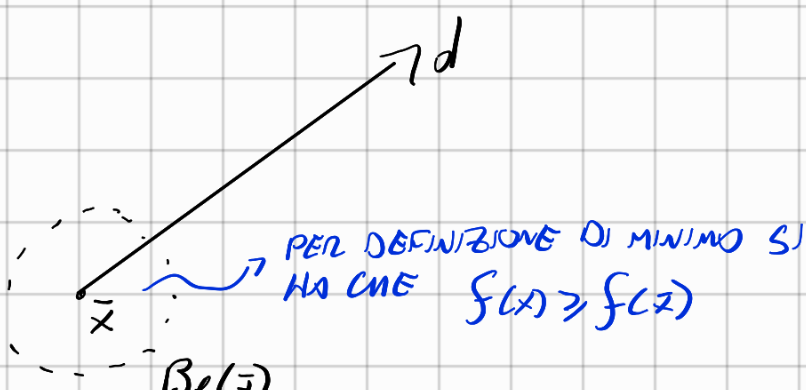
DEFINIZIONE DIREZIONE DI DISCESA

UNA DIREZIONE $d \in \mathbb{R}^n$ È DETTA DIREZIONE DI DISCESA PER f IN x SE $\exists \bar{t} > 0$ t.c.:

$$\boxed{f(x+td) < f(x) \quad \forall t \in (0, \bar{t}]}$$



SE $\bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE ALLORA NON ESISTONO DIREZIONI DI DISCESA IN $\bar{x}$!



È una condizione **NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE**

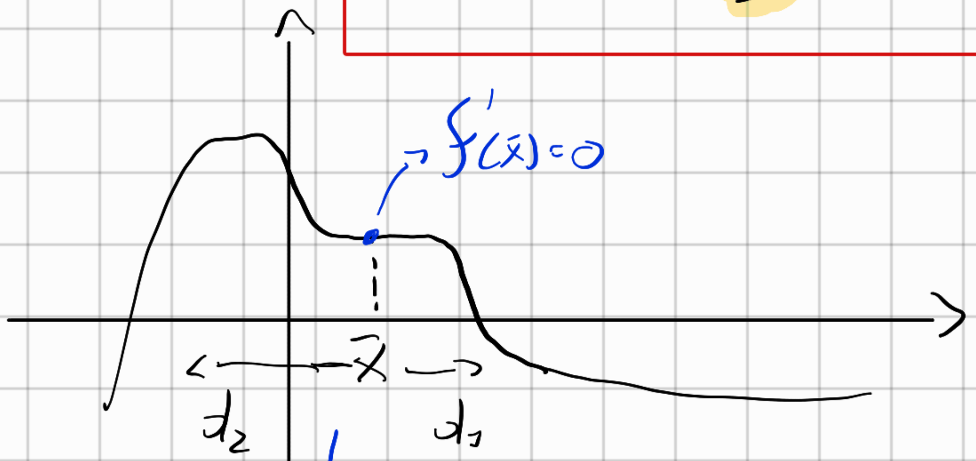
Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $d \in \mathbb{R}^n$ con $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}^n)}$ (per far valere il teorema del gradiente!). Se si ha:

$$\boxed{D_f(x,d) = \nabla f(x)^T d < 0}$$

Allora d è una DIREZIONE DI DISCESA.

Se considero

$$\boxed{\nabla f(x)^T d = \begin{cases} < 0 & d \text{ DISCESA} \\ = 0 & \text{NON SI PUÒ SAPERE} \\ > 0 & d \text{ SALITA} \end{cases}}$$



$$\begin{cases} f'(\bar{x})\, d_1 = 0 \\ f'(\bar{x})\, d_2 = 0 \end{cases}$$

ma d_1 è di discesa e d_2 è di salita $\Rightarrow$ NON POSSO DIRE NULLA!

ANTIGRADIENTE

DEFINISCO L'ANTIGRADIENTE COME LA QUANTITÀ $\boxed{d = -\nabla f(x)}$

E, SE $\boxed{\nabla f(x) \neq 0}$, ALLORA $d = -\nabla f(x)$ È UNA DIREZIONE DI DISCESA.

Dim:

$$d^T \nabla f(x) = -\nabla f(x)^T \nabla f(x) = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0 \quad \text{SE } \nabla f(x) \neq 0$$

□

PUNTI STAZIONARI

SIA $\bar{x}$ UN MINIMO LOCALE, ALLORA $\nabla f(\bar{x}) = 0$. I PUNTI TALI CHE $\nabla f(\bar{x}) = 0$ SONO DETTI PUNTI STAZIONARI.

LE DIREZIONI DI DISCESA FORMANO UN ANGOLO $< 90°$ CON IL GRADIENTE!

SIA $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ CONVESSA, ALLORA d È DIREZIONE DI DISCESA IN $\bar{x}$ SE E SOLO SE:

$$\boxed{\nabla f(\bar{x})^T d < 0}$$

Dim:

(⇐) Già vista poiché $\nabla f(x) < 0 \Rightarrow d$ discesa.

Allora $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} < 0$

$\Rightarrow f(x+td) < f(x)$ per t piccolo

(⇒) d è di discesa, quindi per un t abbastanza piccolo $t > 0$ si ha che:

$$f(\bar{x}+td) < f(\bar{x})$$

Ma f è convessa e differenziabile per ipotesi

$\Rightarrow f(\bar{x}+td) \geq f(\bar{x}) + t\nabla f(x)^T d$

$\Rightarrow f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})^T d \leq f(\bar{x}) + td < f(\bar{x})$

Allora $\cancel{f(\bar{x})} + t\nabla f(\bar{x})^T d < \cancel{f(\bar{x})} \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T d < 0$

poiché $t > 0$ □

MINIMO GLOBALE $\Leftrightarrow$ PUNTO STAZIONARIO

SIA $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ CONVESSA, ALLORA $\bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO GLOBALE SE E SOLO SE È STAZIONARIO, OVVERO SE

$$\boxed{\nabla f(\bar{x}) = 0}$$

Dim:

PER IP $= 0$

DALLA CONVESSITÀ $\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) + \cancel{\nabla f(\bar{x})^T}(x-\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$ CHE È LA DEFINIZIONE DI MINIMO GLOBALE

$\square$

RICHIAMO

1 SIA $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ALLORA VALE:

TEOREMA DELLA MEDIA

- $\boxed{f(y) = f(x) + \nabla f(\xi)^T (y-x)}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ CON $\xi = (1-\lambda)x + \lambda y$

- $\boxed{f(x+d) = f(x) + \nabla f(\xi)^T d}$ CON $\xi = x + \theta d$, $\theta \in (0,1)$

- $f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \alpha(x,d)$ con $\frac{\alpha(x,d)}{\|d\|} \to 0$

• SE $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ALLORA VALE:

$\boxed{\text{FORMULA DI TAYLOR}}$

- $f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\xi) d$!

con $\xi = x + \theta d \quad \theta \in (0,1)$

↳ FATTORE DI ERRORE/APPROSSIMAZIONE

- $f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \beta(x,d)$

con $\lim_{\|d\| \to 0} \frac{\beta(x,d)}{\|d\|} = 0$

$\boxed{\text{DIREZIONE A CURVATURA NEGATIVA}}$

SIA $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ALLORA UNA DIREZIONE d È DETTA

A CURVATURA NEGATIVA IN X SE:

$$\boxed{d^T \nabla^2 f(x)\, d < 0}$$

SIA $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $d \in \mathbb{R}^n$ TALI CHE:

- $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$
- $d^T \nabla^2 f(\bar{x})\, d < 0$

→ SE $\bar{x}$ È UN PUNTO STAZIONARIO E $d \in \mathbb{R}^n$ È UNA DIREZIONE A CURVATURA NEGATIVA, ALLORA d È UNA DIREZIONE DI DISCESA

ALLORA d È DI DISCESA

Dim:

$$f(x+td) = f(x) + \underbrace{t \nabla f(x)^T d}_{=0 \text{ PER Hp}} + \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x) d + \beta(x, td)$$

$$\Rightarrow f(x+td) - f(x) = \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x) d + \beta(x, td)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+td) - f(x)}{t^2} = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \frac{\beta(x, td)}{t^2}$$

PER $t^2 \to 0$ VALE CHE $\dfrac{\beta(x, td)}{t^2} \to 0$ E DATO CHE

$d^T \nabla^2 f(x) d < 0$ PER Hp $\Rightarrow$ PER t PICCOLO SI HA CHE:

$$\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \frac{\beta(x, td)}{t^2} < 0$$

$$\frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \frac{\ldots}{t^2} < 0$$

E PER t PICCOLO $\frac{f(x+td)-f(x)}{t^2} < 0$

$\Rightarrow f(x+td) < f(x) \Rightarrow d$ È DI DISCESA PER DEFINIZIONE

$\square$

CONDIZIONI NECESSARIE DI OTTIMALITÀ II° ORDINE

SIA $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ UN PUNTO DI MINIMO LOCALE. VALGONO ALLORA:

1. $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2. $\nabla^2 f(\bar{x})$ È UNA MATRICE SEMIDEFINITA POSITIVA

Dim:

1. L'ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATA ✓
2. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE LA MATRICE $\nabla^2 f(\bar{x})$ NON SIA SEMIDEFINITA POSITIVA:

ALLORA $\exists y \in \mathbb{R}^n$ TALE CHE $\boxed{y^T \nabla^2 f(\bar{x}) y < 0}$

MA $y^T \nabla f(\bar{x}) = 0$ E $y^T \nabla^2 f(\bar{x}) y < 0$

$= 0$ PER Hp

SE QUESTE DUE CONDIZIONI FOSSERO EFFETTIVAMENTE VERIFICATE, ALLORA SI AVREBBE CHE y È UNA DIREZIONE DI DISCESA PER DEFINIZIONE MA QUESTO È UN ASSURDO POICHÉ PER Hp SI HA $\bar{x}$ PUNTO DI MINIMO LOCALE! □

CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ DEL SECONDO ORDINE

$\bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE SE E SOLO SE:

- $\nabla f(\bar{x}) = 0$
- $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA POSITIVA

  OPPURE

- $\nabla^2 f(\bar{x})$ È SEMIDEFINITA POSITIVA IN UN INTORNO DI $\bar{x}$ $B_\rho(\bar{x})$

CASO QUADRATICO

SIA UNA FUNZIONE QUADRATICA $\boxed{f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - c^T x}$

... LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

VALGONO ALLORA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) IL PROBLEMA $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ AMMETTE SOLUZIONE SE E SOLO SE $\exists\, \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ TALE CHE

$\nabla f(x)=0$

$$\boxed{Q\bar{x}-c=0 \ \text{ E } \ Q \text{ È S.D.P}}$$

2) SE Q È S.D.P, ALLORA OGNI PUNTO $\bar{x}$ TALE CHE $\boxed{Q\bar{x}-c=0}$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

OGNI PUNTO STAZIONARIO

3) ESISTE UNICO IL PUNTO DI MINIMO GLOBALE $\Leftrightarrow$ Q È DEFINITA POSITIVA

Dim:

RICORDANDO CHE:
- $\nabla f(x) = Qx - c$
- $\nabla^2 f(\bar{x}) = Q$

1) $\Leftarrow$ SAPPIAMO CHE $\exists\, \bar{x}$ t.c.: $\nabla f(\bar{x})=0$ PER IPOTESI E CHE

$\nabla^2 f(x) = \varphi$ È S.D.P $\forall x$ (E QUINDI A MAGGIOR RAGIONE LO SARÀ ANCHE IN UN INTORNO $B_\rho(\bar{x})$)

DALLE CONDIZIONI SUFFICIENTI DI OTTIMALITÀ E CONSIDERANDO CHE f È CONVESSA POICHÉ $\nabla^2 f(x) = \varphi$ È S.D.P ALLORA LA TESI È DIMOSTRATA $\square$

$\Rightarrow$ SUPPONIAMO $\exists \bar{x}$ PUNTO DI MINIMO GLOBALE. PER LE CONDIZIONI NECESSARIE DI OTTIMALITÀ DEL II° ORDINE:

- $\nabla f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi \bar{x} = c \checkmark$
- $\nabla^2 f(\bar{x}) = \varphi$ È SDP ✓

2) SEGUE DALLA CONVESSITÀ DI f GARANTITA DAL FATTO CHE φ È S.D.P

3) $\Leftarrow$ SE φ È DEFINITA POSITIVA, ALLORA:

- f È COERCIVA $\Rightarrow$ AMMETTE MINIMO GLOBALE
- $\nabla^2 f(x) = \varphi$ È D.P QUINDI f È STRETTAMENTE CONVESSA E QUINDI IL MINIMO GLOBALE È UNICO!

$\Rightarrow$

SUPPONIAMO CHE x^* SIA L'UNICO PUNTO DI MINIMO GLOBALE. SUPPONIAMO, PER ASSURDO, CHE Q NON SIA DEFINITA POSITIVA.
DAL PUNTO (1) SI SA CHE Q È S.D.P

$\Rightarrow$ ALLORA Q DEVE ESSERE SINGOLARE, OVVERO NON INVERTIBILE
POSSIAMO QUINDI CONSIDERARE IL SISTEMA

$$Qx = c$$

MA ESSENDO Q SINGOLARE (QUINDI DETERMINANTE $= 0$) SE ESISTE UNA SOLUZIONE PER IL SISTEMA, ALLORA NE ESISTONO INFINITE!

QUINDI x^* È SOLUZIONE, OVVERO x^* È PUNTO DI MINIMO

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = Qx^* - c = 0$$

SE ESISTONO ∞ SOLUZIONI DI $Qx = c$ ALLORA TUTTE LE SOLUZIONI SONO PUNTI DI MINIMO GLOBALE PER (2) MA QUESTO È ASSURDO POICHÉ ABBIAMO DETTO CHE IL PUNTO DI MINIMO ERA UNICO!

$\square$