04. Dezember, AD: de Bruyn Kops (6591853), Voroshylov (6590822), Eggert (5690653)

Aufgabe 2

a)

(i)

$\underline{\Rightarrow}|$

Ein Graph G = (V,E) ist 1-färbbar.

Dann haben alle Knoten die gleiche Farbe, d.h. $c_1(i) = c_1(j) \forall i, j \in V$.

$\Rightarrow i \nsim j, \forall i, j$ in V, von der Definition von k-färbbar.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Kanten zwischen i und j, $\forall i, j \in V$.

$\Rightarrow$ G enthält keine Kanten.

$\underline{\Leftarrow}|$

G enthält keine Kanten.

$\Rightarrow \forall i, j \in V, i \nsim j$.

$\Rightarrow i, j$ müssen nicht verschiedene Farben haben.

$\Rightarrow i, j$ könnten dieselbe Farbe haben.

$\Rightarrow$ G ist 1-färbbar.

$\square$

(ii)

Ein Graph G = (V,E) ist k-färbbar.

Dann $\forall i, j \in V, i \sim j$

$\Rightarrow c_k(i) \neq c_k(j)$.

Wir wählen einer Knoten aus. Dann können wir die Farbe dieses Knotens ändern nach eine Farbe, die es noch nicht in der k-Färbung gibt. Danach haben wir immer noch $i \sim j \Rightarrow c_k(i) \neq c_k(j), \forall i, j \in V$ und unserer Graph ist mit $k + 1$ Farben gefärbt.

Somit ist G auch $(k + 1)$-färbbar.

$\square$

(iii)

Sei n die Zahl der Knoten in Graph G (V,E)

Dann könnten wir jeden Knoten eine eindeutige Farbe geben, sodass für alle $i, j \in V, c_n(i) \neq c_n(j)$. Da wir n Knoten haben, haben wir auch n Farben.

Daher ist G n-färbbar.

$\square$

b)

(i)

$\Rightarrow|$

Sei G bipartit.

Dann $V = V_1 \bigcup V_2$ wobei V_1 und V_2 disjunkt sind, d.h. $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$

sodass $\forall e \in E, e = (i, j)$ wobei $i \in V_1$ und $j \in V_2$.

$\Rightarrow \forall i \in V_1, j \in V_2, i \sim j \Rightarrow c_k(i) \neq c_k(j)$.

Aber da $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$, alle $i \in V_1$ können dieselbe Farbe c_{k1} haben und alle $j \in V_2$ können dieselbe Farbe c_{k2} haben.

$\Rightarrow$ G hat insgesamt zwei Farben, c_{k1} und c_{k2}.

$\Rightarrow$ G ist 2-färbbar.

$\Leftarrow|$

Sei G 2-färbbar.

Dann alle Knoten, die Farbe 1 haben können wir als Teilsatz V_1 nehmen und alle Knoten, die Farbe 2 haben können wir als Teilsatz V_2 nehmen. Da V_1 und V_2 zusammen alle Knoten berücksichtigen, gilt $V = V_1 \bigcup V_2$.

Dann für $i, j \in V_1$ gibt es keine Kante zwischen i und j, und so ähnlich für V_2.

$\Rightarrow V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$.

$\Rightarrow$ G ist bipartit.

$\square$

(ii)

Algorithmus der eine 2-Färbung von G findet, wobei G bipartit ist.

FIND2COLORING(G)

```
color(0) = blue                    /* color vertex 0 blue */
for i=0 to |V|-1                   /* V is the set of vertices of G */
    for j in adj(i)                /* for all vertices adjacent to vertex i */
        if color(i) = blue         /* color vertex j a different color than vertex i */
            color(j) = red
        else
            color(j) = blue
```

(iii)

Wenn es eindeutige Teilsätze V_1, V_2 gibt, sodass $V = V_1 \bigcup V_2$ und $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$, dann gibt es 2 verschiedene 2-Färbungen für G. In disem Fall sind die 2-Färbungen:

- V_1 hat Farbe 1 und V_2 hat Farbe 2
- V_1 hat Farbe 2 und V_2 hat Farbe 1

Sonst würde es zweimal soviele verschiedene 2-Färbungen als Verknüpfungen von V_1 und V_2 geben.