18. Dezember, AD: de Bruyn Kops (6591853), Voroshylov (6590822), Eggert (5690653)

Aufgabe 1

Damit der Bellman-Ford-Algorithmus nach $m+1$ Durchläufen der äußeren Schleife abbricht, müsste geprüft werden, ob es noch zu Veränderungen von $v.dist$ (Distanz von s nach v) kommt. Sobald es keine Veränderungen mehr gibt, ist $v.dist$ für alle v minimal, und der Algorithmus hat $m+1$ Iterationen durchlaufen. Um festzuhalten, dass $v.dist$ verändert wurde, müsste man zuerst an die Funktion Relax folgende Zeile anhängen:

active = true

Danach würde man den Bellman-Ford-Algorithmus wie folgt erweitern:

```
InitializeSingleSource(G, s)
active = true
while active == true do                ▷ Prüfung ob v.dist noch verändert wurde
    active = false
    for all edges (u, v) ∈ E do
        RELAX(u,v)
    end for
end while
```

Durch die Änderung bricht der Algorithmus nun ab, sobald m+1 Iterationen durchlaufen sind, da die Variable active dann nicht mehr auf true gestzt wird.

Aufgabe 2

SSS-Problem im DAG in O(|V| + |E|) Zeit kann man mit der Hilfe der topologischen Sortierung lösen.
Sei ein Graph G unser DAG mit nichtnegativen Kantengewichten.

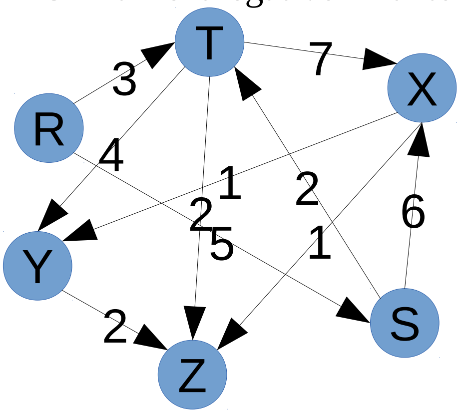


Abb 1.1: DAG

Jetzet machen wir eine topologische Sortierung:

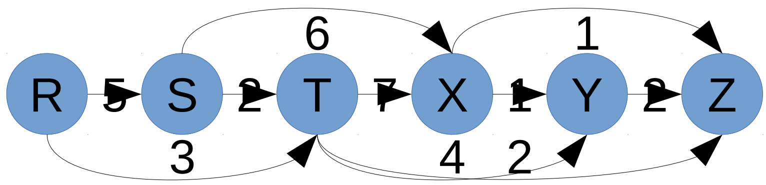


Abb 1.2: DAG nachdem topologische Sortierung

Hier ist offensichtlich, dass wir jetzt alle Knoten und Kanten nur einmal durchlaufen müssen. Deshalb können wir auch einen Algorithmus entwickeln:

$DAGShortestPath(G, s)$

$\quad G_{topsort} = Topsort(G)$ *// machen topologische Sortierung, die Laufzeit ist O(|V| + |E|)*

$\quad for\ u \in V\ do:$ *// die Laufzeit ist O(|V|)*

$\quad\quad d[u] := \infty$ *// initialisieren Knoten, die Laufzeit ist O(1)*

$\quad for\ u \in G_{topsort}\ do:$ *// fuer jeden Knote, die Laufzeit ist O(|V|)*

$\quad\quad for\ v \in Adj[u]\ do:$ *// folgen Kanten, die Laufzeit ist O(|Adj[u]|)*

$\quad\quad\quad relax(u, v)$ *// und machen Relaxation, die Laufzeit ist O(1)*

Komplete Laufzeit ist O(|V| + |E|)

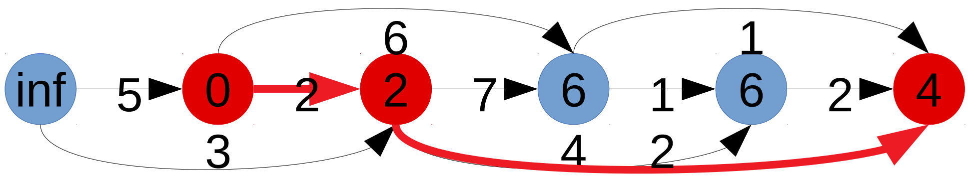


Abb 1.3: ein kürzester Pfad

Aufgabe 3

Sei G ein gewichteter gerichteter Graph G=(V,E).

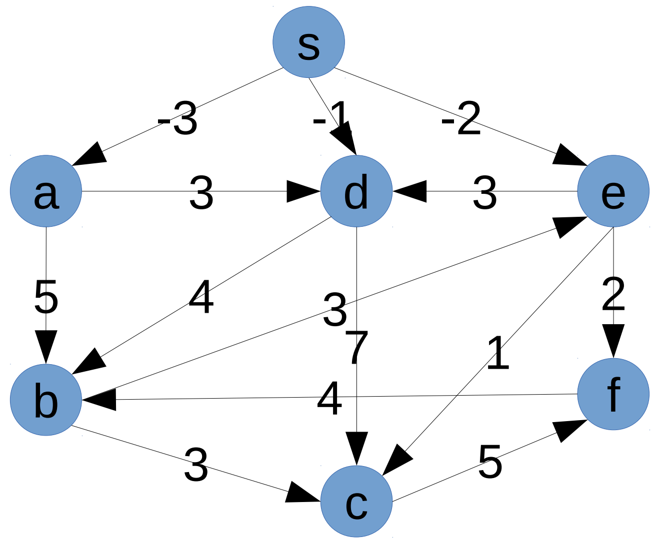


Abb. 1.4: ein gewichteter gerichteter Graph G=(V,E).

Jetzt verwenden wir Dijkstra-Algorithmus um einen kürzesten Pfad von *s* nach *c* bestimmen.

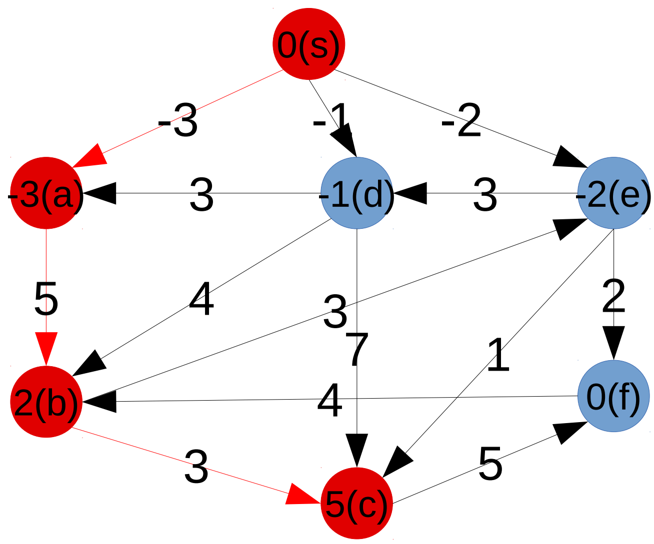


Abb: 1.5: ein kürzester Pfad von s nach c

Einen kürzesten Pfad von *s* nach *c* ist $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c$.

Jetzt nehmen wir noch einen Graph, aber ohne negativen Gewichten und verwenden weiter Dijkstra-Algorithmus um einen kürzesten Pfad von *s* nach *c* zu bestimmen. Dann vergleichen wir auch die Pfade.

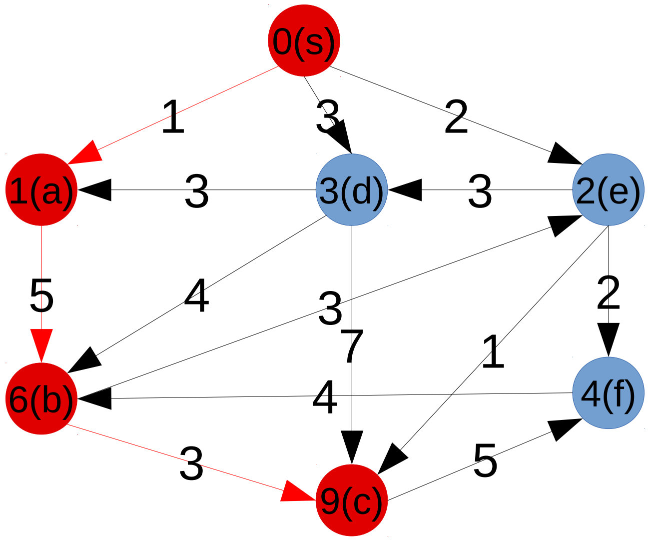


Abb: 1.5: noch ein kürzester Pfad von *s* nach *c*

Ein kürzesten Pfad von *s* nach *c* ist $s \to a \to b \to c$.
Wenn wir jetzt diese zwei Pfade vergleichen, dann sehen wir dass die identisch sind. Das bedeutet, dass Dijkstra-Algorithmus auch mit negativen Kanten einen kürzesten Pfad korrekt bestimmt hat.

Aufgabe 4

a)

Der Durchmesser eines Baumes mit nicht-negativen Kantengewichten könnte in Zeit O(|V|) bestimmt werden wenn jeder Knoten des Baumes maximal ein Kind hat, zB:

```
O
|
O
|
O
|
O
```

Dann um den Durchmesser herauszufinden würde ein Algorithmus nur von der Wurzel nach dem Blatt einmal durch das Baum laufen. Damit würde die Laufzeit O(|V|) werden.

b)

Algorithmus: alle kürzeste Pfade finden (zB mit Dijkstra Algorithm) und davon der längste ausgeben. Laufzeit: $O(|V|^2|E|)$

Pseudocode:

```
maxpath = 0                          /* maximal length of shortest path */
for vertex = 1, ..., |V|             /* Find shortest path starting at each vertex */
S = {s}                              /* S set of explored vertices */
    d(s) = 0
    while S ≠ V
        U := {u ∉ S | u neighbor of a vertex ∈ S }              /*candidates */
        for all u ∈ U
            for all pre(u) ∈ S that are predecessors of u
                d′(u, pre(u)) := d(pre(u)) + w (pre(u), u)          /* candidate distances */
                u′ := argmin {d′ (u,pre(u)), u ∈ U }            /* choose best candidate */
                d(u′) = d′(u′)
                S = S ⋃ u′
            if d(u′) > maxpath
                maxpath = d(u′)
return maxpath                       /* maxpath = diameter of the graph */
```

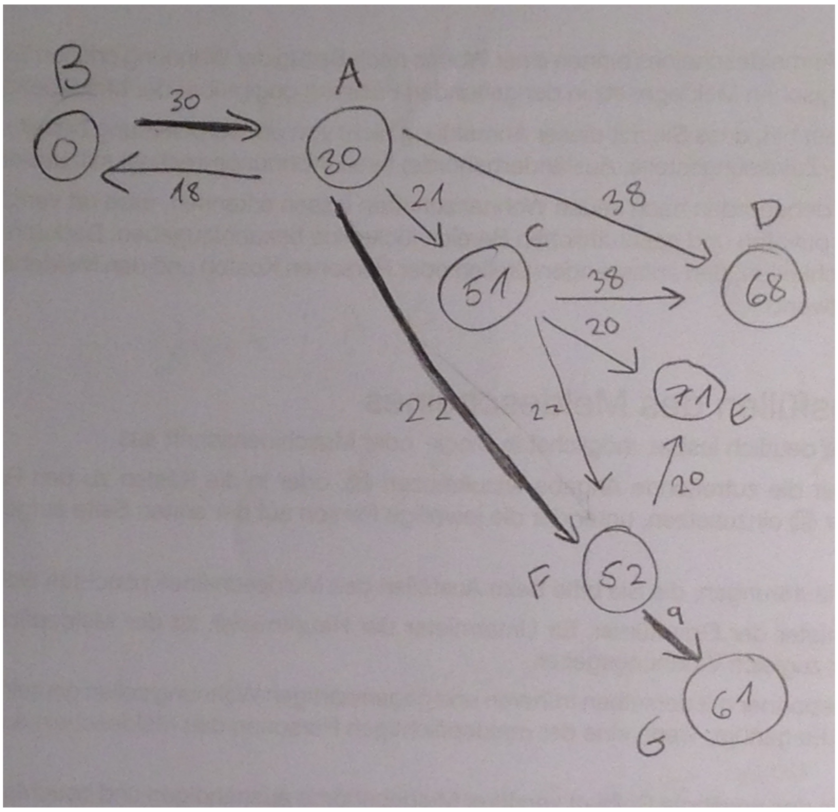
Aufgabe 5

(a) Um die Möglichkeit einer Währungsarbitrage aus der gegebenen Matrix zu ermitteln, wäre es sinnvoll einen gerichteten und gewichteten Graphen G zu erstellen. Hierbei würden die Währungen die Knoten v darstellen, die gerichteten Kanten E hätten als Gewicht w die Logarithmen der Umtauschkurse r_{ij}. Eine Währungsarbitrage besteht dann wenn ein Zyklus existiert, welcher vom Startpunkt s zurück zu s führt, und die Summe von w dabei positiv ausfällt. Die letztere Bedingung entsteht, da die Logarithmen der Wechselkurse nur dann positiv sind, falls $r_{ij} > 1$ ist.

(b) Ja, es können negative Zyklen auftreten. Negative Zyklen stehen für ein Verlustgeschäft, da die Summe von w entlang der Pfade des Zyklus negativ ist, und somit auch die Wechselkurse zu einer Abnahme gegenüber der Startposition führen.

Aufgabe 6

Da jeder Taxifahrer für den jeweiligen Zeitraum entweder ganz oder gar nicht gebuchen werden kann, können wir den folgenden Graphen herstellen:



Durch Beobachtung der Zeiträume sehen wir, dass wir ein kürzeste Pfad finden müssen, der mit entweder A oder B anfängt (und dass B für minimalen Kosten nicht in einem kürzestem Pfad eingeschlossen werden könnte) und mit entweder D, E, oder G endet. Das Bellman-Ford Algorithm ergibt die obrigen Nummerierung von Kanten. Dadurch sehen wir, dass der Pfad, der mit G endet, der kürzeste Pfad ist. Also der kürzeste Pfad ist AFG. Das heißt, dass für die jeweilige Zeiträume, A, F, und G ganz im Einsatz sind und alle anderen Taxifahrer gar nicht im Einsatz sind.