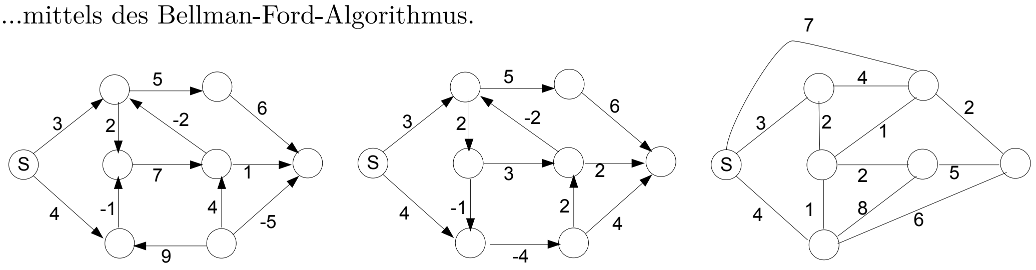
Übungsblatt 5

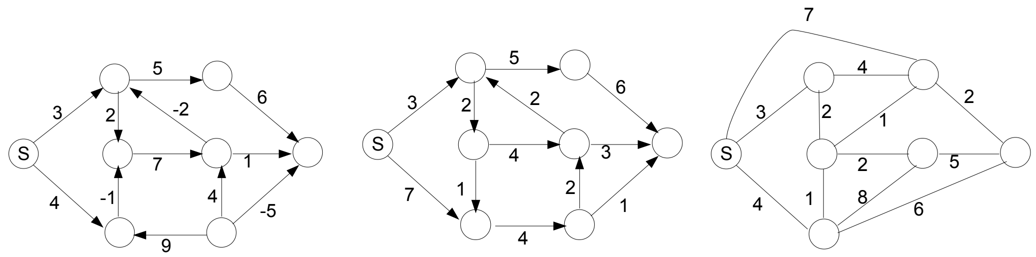
Algorithmen und Datenstrukturen (WS 2013, Ulrike von Luxburg)

Präsenzaufgabe 1 (Single Source Shortest Paths) Bestimmen Sie die kürzesten Wege von S zu allen anderen Knoten...

(a) ...mittels des Bellman-Ford-Algorithmus.



(b) ...mittels des Dijkstra-Algorithmus.



Präsenzaufgabe 2 (Kürzeste Pfade) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit nicht-negativen Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $p := (v_0, \ldots, v_k)$ ein kürzester Pfad von $a := v_0$ nach $b := v_k$.

(a) Beweisen Sie, dass alle Teilpfade von p ebenfalls kürzeste Pfade sind.

(b) Angenommen q sei zudem ein kürzester Pfad von b nach c. Ist dann die Hintereinanderausführung von p und q ein kürzester Pfad von a nach c?

Präsenzaufgabe 3 (Dijkstra versus BFS) Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \{1, ..., W\}$ für eine positive ganze Zahl W. Modifizieren Sie den Graphen so zu $G' = (V', E')$, dass darin Dijkstra's Algorithmus mit BFS übereinstimmt, und dessen Ausgabe zur Lösung des Single-Source-Shortest-Path-Problems in G genutzt werden kann. Bestimmen Sie zudem die Laufzeit.

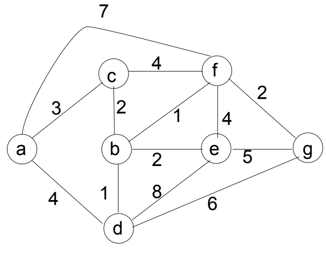
Präsenzaufgabe 4 (Vorgänger-Matrix)

(a) Bestimmen Sie die Vorgänger-Matrix von G.

(b) Der "essentielle Subgraph" H eines gewichteten Graphen ist ein minimaler (in seiner Anzahl Kanten) Subgraph, der alle paarweisen Distanzen erhält. Finden Sie einen essentiellen Subgraph von G anhand seiner Vorgänger-Matrix. Welche Schwierigkeiten ergeben sich dabei?

(c) Zeigen Sie, dass der essentielle Subgraph eines ungewichteten schleifenfreien Graphen stets der Graph selbst ist.

$G :=$



Hausaufgaben zum 18. Dezember, 9:00 (Vorlesungsbeginn).

Aufgabe 1 (Bellman-Ford (3)) Gegeben sei ein gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne negative Zyklen, und ein Startknoten $s \in V$. Sei m das Maximum (über alle Knoten $v \in V$) der minimalen Anzahl Kanten in einem kürzesten (gewichteten) Pfad von s nach v. Beschreiben Sie eine leichte Abänderung des Bellman-Ford-Algorithmus, welche diesem erlaubt nach $m + 1$ Durchläufen der äußeren Schleife (Zeile 2) abzubrechen, sogar falls m nicht bekannt ist.

Aufgabe 2 (SSSP in DAGs (4)) Sei $G = (V, E)$ ein DAG mit nichtnegativen Kantengewichten. Lösen Sie das Single-Source-Shortest-Path-Problem in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Aufgabe 3 (Dijkstra mit negativen Kantengewichten (4)) Gegeben sei ein gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$, in dem die aus dem Startknoten s austretenden Kanten negative Gewichte haben können. Alle anderen Kanten haben jedoch nichtnegative Gewichte. Setzen Sie zudem voraus, dass es keine Zyklen mit negativem Gewicht gibt. Zeigen Sie, dass Dijkstra's Algorithmus in diesem Graphen die kürzesten Pfade vom Startknoten s aus korrekt bestimmt.

Aufgabe 4 (Durchmesser (3+2)) Der Durchmesser eines Graphen G ist die maximale Länge irgendeines kürzesten Pfades in G.

(a) Wie lässt sich der Durchmesser eines Baumes mit nicht-negativen Kantengewichten in Zeit $\mathcal{O}(|V|)$ bestimmen?

(b) Geben Sie einen Algorithmus und dessen Laufzeit an, der den Durchmesser eines beliebigen nicht-negativ gewichteten ungerichteten Graphen bestimmt.

Aufgabe 5 (Währungswechsel (3+2)) Sei C eine Menge verschiedener Währungen und r_{ij} der Wechselkurs zwischen Währung i und j (d.h., Sie erhalten r_{ij} Geldeinheiten der Währung j für eine Einheit der Währung i). Eine *Währungsarbitrage* ist möglich, wenn eine Sequenz elementarer Währungswechsel existiert, die mit einer Einheit einer Währung startet, und mit mehr als einer Einheit derselben Währung endet.

(a) Zeigen Sie, wie für eine gegebene Matrix von Wechselkursen ermittelt werden kann, ob diese eine Währungsarbitrage ermöglichen. (Tipp: Nutzen Sie den Logarithmus der Wechselkurse).

(b) Kann Ihre Lösung zu negativen Zyklen führen? Wenn ja, was bedeuten diese?

Aufgabe 6 (Scheduling mittels kürzester Pfade (4)) Die folgende Tabelle zeigt die möglichen Einsatzzeiträume sieben freiberuflicher Taxifahrer, welche für den jeweiligen Zeitraum ganz oder gar nicht zum angegebenen Gesamtpreis gebucht werden können. Wir möchten mit minimalen Kosten sicherstellen, dass jederzeit von 9-17 Uhr zumindest ein Taxifahrer im Einsatz ist. Lösen Sie dieses Scheduling-Problem als ein Kürzeste-Pfade-Problem in einem geeigneten Graphen.

Mitarbeiter	A	B	C	D	E	F	G
Zeitraum	9-13	9-11	12-15	12-17	14-17	13-16	16-17
Kosten	30	18	21	38	20	22	9