Вариант 2

1. Найти эйлерову или полуэйлерову цепь, гамильтонову цепь или цикл в графе, заданном в виде матрицы смежности. Если чего-то нет, то обосновать причину.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти оптимальный план работ, критические работы, для каждой работы определить наиболее ранний возможный срок ее начала и наиболее ранний возможный срок ее выполнения. При заданном плане $T' = 40$ определить для каждой работы наиболее поздний допустимый срок ее начала и ее выполнения, а также полный резерв времени.

Номер работы	Время выполнения	Предшествующие работы
1	1	-
2	3	1, 3
3	5	1
4	8	2, 3
5	10	3, 4
6	7	1, 4

3. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин для сети, заданной матрицей весов.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Известно, что связный обыкновенный граф G содержит 9 вершин и минимально возможное число рёбер при условии, что в нём есть вершина степени 5 и вершина степени 4. Найдите этот граф, а также его диаметр, радиус, центр и периферийные вершины.

Вариант 3

1. Решить задачу «о назначениях», двудольный граф задан матрицей весов.

X\Y	1	2	3	4	5	6	7
1	0	*	2	*	4	*	*
2	*	3	*	0	*	2	*
3	*	0	*	*	0	*	0
4	0	*	*	3	*	*	5
5	*	*	0	*	2	3	*
6	1	*	0	*	*	*	4
7	*	0	*	5	*	0	*

2. Граф G_1 задан матрицей смежности. Найти матрицу смежности графа $G_2 = \overline{(G_1 \uparrow \{4\})}$.
$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Верно ли, что $G_2 = \overline{G_1} \uparrow \{4\}$? Коммутируют ли эти операции в общем случае?

3. Найти остов минимального веса в графе, заданном матрицей весов, с помощью алгоритма Прима. Начать с вершины 4.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & 4 & 5 \\ \infty & 5 & 3 & 5 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & \infty & \infty & 5 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Обыкновенный граф G содержит 2 компоненты связности и является лесом. Известно, что в нём 7 рёбер. Кроме того, в нём содержится вершина степени 5 и вершина степени 2, причём эти две вершины не смежные. Постройте этот граф. Найдите его блоки и точки сочленения.

Вариант 5

1. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7 с помощью алгоритма для бесконтурной сети, предварительно отсортировав вершины топологически. Кратчайший путь в ответе указать в соответствии со старыми номерами вершин. Сеть задана матрицей весов:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & 4 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 2 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

2. Граф G_1 задан матрицей смежности. Найти матрицу смежности графа G_2:

$$G_2 = ((G_1 + \bar{G}_1) \uparrow \{1{,}5\})/\{9{,}2{,}7\}, A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что в каждом связном графе любые две длиннейшие простые цепи имеют общую вершину.

4. По алгоритму Диница найти максимальный поток в сети, заданной матрицей пропускных способностей и начальным потоком: в числителе указан поток по дуге, в знаменателе – пропускная способность.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0/7 & 3/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 & 0/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

1. Найти остов минимального веса в графе, заданном матрицей весов, с помощью алгоритма Краскала.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 0 & 2 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 2 & 1 \\ \infty & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу смежности графа $G_2 = \left(\left(K_2 \cup K_2\right) + e\right) \times \left(W_5 / \{2,3,4\}\right)$, где $e = (1,1)$ — петля в вершине 1 соответствующего графа, а центр графа W_5 — вершина 1.

3. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин для сети, заданной матрицей весов.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что гамильтонова цепь между диаметральными вершинами гиперкуба Q_n существует только при нечётном n.

Вариант 9

1. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7 с помощью а
Сеть задана матрицей весов.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & -2 & 0 & -2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 3 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & -1 & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти эйлерову или полуэйлерову цепь, гамильтонову цепь или цик
виде матрицы смежности. Если чего-то нет, то обосновать причину.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. По алгоритму Эдмондса-Карпа найти максимальный поток в сети,
пропускных способностей и начальным потоком: в числителе указа
знаменателе – пропускная способность.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0/7 & 3/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 & 0/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Построить связный граф на 8 вершинах, в котором: 4 петли, общее число ребер 14, степенная последовательность: 1, 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7. Найти его матрицу инцидентности. Определить диаметр графа, радиус графа, обхват графа (длина минимального цикла), найти его центры и периферийные вершины.

11 Вариант

1. Пусть D – простой ориентированный граф с n вершинами и m дугами. Показать, что если D связен, но не сильно связен, то $n-1 \le m \le (n-1)^2$, а если D сильно связен, то $n \le m \le n(n-1)$.
2. Найти maxmin-путь из вершины 1 в вершину 7. Сеть задана матрицей весов:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & -1 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

3. Построить граф на 9 вершинах, в котором:
   - Нет петель.
   - 2 компоненты связности, причем в одной из них есть 2 вершины с 2 кратными ребрами.
   - Общее число ребер равно 13.
   - Степени вершин заданы последовательностью: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4.

     Требуется:
   - Найти матрицу смежности полученного графа.
   - Для каждой компоненты связности определить диаметр, радиус, обхват (длину минимального цикла).
   - Найти центры и периферийные вершины.
4. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин для сети, заданной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

1. Докажите, что если G — блок, в котором $\deg u \geq 3\ \forall\ u \in V$, то в нем найдется такая вершина v, что граф $G - v$ также является блоком. Привести пример блока, в котором не все вершины удовлетворяют этому условию, а также блока, в котором для каждой вершины v граф $G - v$ не является блоком.

2. С помощью алгоритма Куна выяснить, существует ли в заданном двудольном графе полное паросочетание

X\Y	1	2	3	4	5
1	1	1	*	1	*
2	*	1	1	*	*
3	*	1	*	*	*
4	1	*	*	1	1
5	*	*	*	1	*

3. Пусть G_1 и G_2 – регулярные графы. Выяснить, являются ли регулярными графы $G_1 + G_2$ и $G_1 \times G_2$.

4. По алгоритму Эдмондса-Карпа найти максимальный поток в сети, заданной матрицей пропускных способностей и начальным потоком: в числителе указан поток по дуге, в знаменателе – пропускная способность.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0/30 & 3/15 & 0 \\ 0 & 0 & 3/3 & 0 & 0 & 0 & 0/20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/15 \\ 0 & 0/5 & 0/5 & 0 & 0 & 0/15 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 0/25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13

1. Пусть S и T – остовы графа G. Докажите, что для любого ребра $e \in ES$ найдется ребро $f \in ET$ такое, что подграф $S - e + f$ будет остовом графа G.

2. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7 с помощью алгоритма Дейкстры. Сеть задана матрицей весов.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 5 & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 2 & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть G_1 и G_2 – двудольные графы. Выяснить, являются ли двудольными графы $G_1 + G_2$ и $G_1 \times G_2$.

4. С помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа найти наибольшее паросочетание в двудольном графе, заданном матрицей смежности.

X\Y	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	0	0	0
4	1	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1
7	1	0	0	1	0	0	0

Вариант 15

1. Докажите, что любые два различных блока графа G имеют не более 1 общей вершины.

2. Найти кратчайший путь из вершины 5 в вершину 7 с помощью алгоритма для бесконтурной сети, предварительно отсортировав вершины топологически. Кратчайший путь в ответе указать в соответствии со старыми номерами вершин. Сеть задана матрицей весов.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & \infty & \infty & \infty \\ -1 & \infty & \infty & 0 & \infty & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти эйлерову или полуэйлерову цепь, гамильтонову цепь или цикл в графе, заданном в виде матрицы смежности. Если чего-то нет, то обосновать причину.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. С помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа найти наибольшее паросочетание в двудольном графе, заданном матрицей смежности.

X\Y	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0

Вариант 17

1. Докажите, что любой ациклический подграф графа G содержится в некотором его остове.

2. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7 с помощью алгоритма Форда-Беллмана. Сеть задана матрицей весов.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & -2 & 0 & -3 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть G_1 и G_2 – различные простые графы. Верно ли равенство $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$?

4. С помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа найти наибольшее паросочетание в двудольном графе, заданном матрицей смежности.

X\Y	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	1	1	0
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0

Вариант 21

1. Найти наибольшее число рёбер в простом графе порядка n, не имеющем чётных циклов.

2. Найти maxmin-путь из вершины 1 в вершину 7. Сеть задана матрицей весов.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty & 4 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 0 & 5 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 0 & 5 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти эйлерову или полуэйлерову цепь, гамильтонову цепь или цикл в графе, заданном в виде матрицы смежности. Если чего-то нет, то обосновать причину.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин для сети, заданной матрицей весов.

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \infty & -1 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty & -2 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$