Problem Set 8

Problem 1

a) 不是

b) 是

c) 不是

Problem 2

a) 是

b) 不是

c) 是

d) 不是

Problem 3

a) $\{-1, 1\}$

b) $\{x| -1 < x < 1 \wedge x \neq 0\}$

c) $\{x|x < -2 \wedge x > 2\}$

Problem 4

a)

不是单射, 不是满射, 也不是双射.

$\because f((1,2)) = f((2,1)) = 4$

$\therefore$ 不是单射

$\because$ 不存在(x, y)使得$f((x, y)) = x + y + 1 = 0$

$\therefore$ 不是满射

$\therefore$ 也不是双射

b)

$A = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

c)

$B = \{3, 5, 7\}$

Problem 5

a)

是单射, 但是不是满射.

$\because$ 任取$x, y \in \mathbb{N}$

若$f(x) = f(y)$即$(x, x + 1) = (y, y + 1)$

则有$x = y$

$\therefore$ f是单射的

不存在x使得$f(x) = (1, 1)$

$\therefore$ 不是满射

b)

存在.

$f^{-1} : \{(x, x + 1) | x \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}, f((x, x + 1)) = x$

c)

$\mathrm{Ran}(f)=\{(x,x+1)|x\in\mathbb{N}\}$

Problem 6

若对于b_1,b_2有$g(b_1)=g(b_2)$

即$\{x|x\in A\land f(x)=b_1\}=\{x|x\in A\land f(x)=b_2\}$

$\because f$为满射

$\therefore \forall b\in B\exists x\in A(f(x)=b)$

$\therefore g(b_1),g(b_2)$不是空集

$\therefore \{x|x\in A\land f(x)=b_1\land f(x)=b_2\}$也不是空集

$\therefore f(x)=b_1$和$f(x)=b_2$可对同一个x成立

$\therefore$ 根据函数的定义可知$b_1=b_2$

$\therefore g$为单射

Problem 7

对于关系f,g,我们有：

$$\begin{aligned}&(x,y)\in(f\circ g)^{-1}\\ \Leftrightarrow&(y,x)\in f\circ g\\ \Leftrightarrow&\exists t(t\in Y\land(y,t)\in g\land(t,x)\in f)\\ \Leftrightarrow&\exists t(t\in Y\land(t,y)\in g^{-1}\land(x,t)\in f^{-1})\\ \Leftrightarrow&(x,y)\in g^{-1}\circ f^{-1}\end{aligned}$$

只需证明$(f\circ g)^{-1}$是函数

即要证$(\forall x,y,z)(x(f\circ g)^{-1}y\land x(f\circ g)^{-1}z\to y=z)$

当有$\exists t_1(t_1\in Y\land(t_1,y)\in g^{-1}\land(x,t_1)\in f^{-1})$
且有$\exists t_2(t_2\in Y\land(t_2,z)\in g^{-1}\land(x,t_2)\in f^{-1})$时

$\because f$是Y到Z的双射函数,g是X到Y的双射函数

$\therefore f^{-1},g^{-1}$也是函数

$\because (x,t_1)\in f^{-1},(x,t_2)\in f^{-1}$

$\therefore t_1=t_2$

$\because (t_1,y)\in g^{-1},(t_2,z)\in g^{-1}$

$\therefore y=z$

$\therefore$ 可知$(f\circ g)^{-1}$也是函数

$\therefore f\circ g$的反函数可以用$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$表示

Problem 8

a)

$\because S$是m元集,m为正整数

$\therefore$ 采取一定的排序方式,可以对S里的元素命名为$a_1,a_2,\cdots,a_m$
并且$a_i(i=1,2,\cdots,m)$是确定的且两两相异的

令$f=\{(a_i,i)|i\in\{1,2,\cdots,m\}\}$

若$f(a_x)=f(a_y)$即$x=y$

则有$a_x=a_y$

$\therefore f$是单射的

$\because \mathrm{Ran}(f)=\{y|\exists x\in S(f(x)=y)\}=\{1,2,\cdots,m\}$

$\therefore f$是满射的

$\therefore$ 该f是双射函数,说明存在一个双射函数成立

b)

$\therefore$ 同(a)可知存在$a_i\in S,b_i\in T,i=1,2,\cdots,m$

令$f=\{(a_i,b_i)|i\in\{1,2,\cdots,m\}\}$

若$f(a_x)=f(a_y)$即$b_x=b_y$

则有$a_x=a_y$

$\therefore f$是单射的

$\because \mathrm{Ran}(f) = \{y | \exists x \in S(f(x) = y)\} = T$

$\therefore f$是满射的

$\therefore$ 该f是双射函数,说明存在一个双射函数成立

Problem 9

$\because f$和g是函数

$\therefore \forall x, y, z((x, y) \in f \land (x, z) \in f \to y = z)$
且$\forall x, y, z((x, y) \in g \land (x, z) \in g \to y = z)$

对任意的x, y, z,当有$(x, y) \in f \cap g \land (x, z) \in f \cap g$时

即有$(x, y) \in f \land (x, y) \in g \land (x, z) \in f \land (x, z) \in g$

$\therefore (x, y) \in f \land (x, z) \in f$

$\therefore y = z$

$\therefore f \cap g$也是函数