Problem Set 7

Problem 1

a) 自反, 传递

b) 对称

c) 对称

d) 对称

Problem 2

取元素$b \in A$使得$(a, b) \in R$错误, 并不一定能找出这样的(a, b)

Problem 3

$\because$ 集合A上的R是自反的

$\therefore \forall x \in A(xRx)$

$\because aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

$\therefore \forall x \in A(xR^{-1}x)$

$\therefore R^{-1}$是自反的

Problem 4

$\because$ 集合A上的R是自反的

$\therefore \forall x \in A(xRx)$

$\therefore \forall x \in A(xRx \wedge xRx)$

$\therefore \forall x \in A(xRxRx)$

$\therefore \forall x \in A(xR^2x)$

同理$\forall x \in A(xRx \wedge \cdots \wedge xRx)$

$\therefore \forall x \in A(xR^nx)$

$\therefore R^n$是自反的

Problem 5

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \circ R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e)

$$M_{R_1 \oplus R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 6

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Problem 7

论域为正整数.

$\therefore R=\{((a,b),(c,d))|a+d=b+c\}$

对于自反性：

$\because \forall a\forall b(a+b=b+a)$

$\therefore \forall a\forall b((a,b),(a,b))\in R$

$\therefore$ 自反性成立.

对于对称性：

假设$((a,b),(c,d))\in R$

$\therefore a+d=b+c$

$\therefore c+b=d+a$

$\therefore ((c,d),(a,b))\in R$

$\therefore (\forall a,b,c,d)((a,b)R(c,d)\rightarrow (c,d)R(a,b))$

$\therefore$ 自反性成立

对于传递性：

$(\forall x,y,z\in A)(xRyRz\rightarrow xRz)$

假设$((a,b),(e,f)),((e,f),(c,d))\in R$

$\therefore a+f=b+e,e+d=f+c$

$\therefore a+d=b+c$

$\therefore ((a,b),(c,d))\in R$

$\therefore (\forall a,b,c,d,e,f)((a,b)R(e,f)R(c,d)\rightarrow (a,b)R(c,d))$

$\therefore$ 传递性性成立

$\because R$满足自反,对称和传递性

$\therefore R$是等价关系

Problem 8

$\because R$和S是A上的对称关系

$\therefore (\forall x, y \in A)(xRy \to yRx), (\forall x, y \in A)(xSy \to ySx)$

$\therefore (\forall x, y \in A)(xRy \leftrightarrow yRx), (\forall x, y \in A)(xSy \leftrightarrow ySx)$

$\because R \circ S = S \circ R$

$\therefore (\forall x, y \in A)(\exists t(xStRy) \leftrightarrow \exists t(xRtSy))$

$\therefore (\forall x, y \in A)(\exists t(xStRy) \leftrightarrow \exists t(xRt \land tSy))$

$\therefore (\forall x, y \in A)(\exists t(xStRy) \leftrightarrow \exists t(ySt \land tRx))$

$\therefore (\forall x, y \in A)(\exists t(xStRy) \leftrightarrow \exists t(yStRx))$

$\therefore (\forall x, y \in A)(\exists t(xStRy) \to \exists t(yStRx))$

$\therefore R \circ S$是对称关系

Problem 9

$\because R$是A上的等价关系

$\therefore R$具有自反性

$\therefore (\forall x, y \in A)(xRy \to xRx \land xRy)$

$\therefore (\forall x, y \in A)(xRy \to \exists t(xRt \land tRy))$

$\therefore (\forall x, y \in A)(xRy \to \exists t(xRtRy))$

$\therefore R \subseteq R^2$

$\because R$具有传递性

$\therefore R^2 \subseteq R$

$\therefore R^2 = R$

Problem 10

设R是A上的关系

即证$r(s(R)) = s(r(R))$

$r(s(R)) = r(R \cup R^{-1}) = R \cup R^{-1} \cup I_A = R \cup I_A \cup R^{-1}$

$$
\begin{aligned}
s(r(R)) &= s(R \cup I_A) \\
&= R \cup I_A \cup (R \cup I_A)^{-1} \\
&= R \cup I_A \cup I_A^{-1} \cup R^{-1} \\
&= R \cup I_A \cup I_A \cup R^{-1} \\
&= R \cup I_A \cup R^{-1}
\end{aligned}
$$

$\therefore r(s(R)) = s(r(R))$

$\therefore$ 原命题得证.