

# Problem Set 16

## Problem 1

- (a) 是格
- (b) 不是格,  $\{d, e\}$ 的上界为 $c$ 和 $f$ , 而 $c$ 和 $f$ 不可比,  $\{d, e\}$ 没有上确界
- (c) 是格
- (d) 不是格,  $\{b, c\}$ 的上界有 $d$ 和 $e$ , 而 $d$ 和 $e$ 不可比,  $\{d, e\}$ 没有上确界
- (e) 不是格,  $a, b$ 不可比, 没有下界, 也没有下确界
- (f) 是格

## Problem 2

- (1) 不是格
- (2) 是格
- (3) 是格
- (4) 是格

## Problem 3

- (1)  $a \vee (a \wedge b) \succeq a$
- (2)  $a \wedge (b \vee c) \succeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- (3)  $b \wedge (c \vee a) \succeq (b \wedge c) \vee a$

## Problem 4

$$\because a \preceq b \preceq c$$

$$\therefore a \vee b = b, b \wedge c = b$$

$$\therefore a \vee b = b \wedge c$$

## Problem 5

对于 $\forall a \in L$ , 假设 $b, c$ 都是 $a$ 的补元

$$\therefore a \vee c = 1, a \wedge c = 0, a \vee b = 1, a \wedge b = 0$$

$\therefore$  全上界和全下界唯一

$$\therefore a \vee c = a \vee b, a \wedge c = a \wedge b$$

$\therefore L$ 是分配格

$$\therefore b = b \vee (a \wedge b)$$

$$= b \vee (a \wedge c)$$

$$= (b \vee a) \wedge (b \vee c)$$

$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$= (a \wedge b) \vee c$$

$$= (a \wedge c) \vee c$$

$$= c$$

$\therefore$  有补分配格中任何元素都是唯一的

## Problem 6

对于 $\forall x, y \in S$ , 即有 $x, y \in L, x \preceq a$ 且 $y \preceq a$

设 $z$ 为 $\{x, y\}$ 的上确界, 即 $z = x \vee y, z \in L$

$$\therefore x \preceq a \text{ 且 } y \preceq a$$

$\therefore a$ 是 $x$ 和 $y$ 的一个上界

$$\therefore z \preceq a$$

$$\therefore z \in S$$

$\therefore S$ 对于 $\vee$ 是封闭的

设 $r$ 为 $\{x, y\}$ 的下确界, 即 $r = x \wedge y, r \in L$

$$\therefore r \preceq x$$

$$\therefore x \preceq a$$

$$\therefore r \preceq x \preceq a, \text{ 即 } r \in S$$

$\therefore S$  对于  $\wedge$  也是封闭的

$\therefore \langle S, \preceq, \vee, \wedge \rangle$  是一个代数系统

$\therefore$  易知  $S \subseteq L$

$\therefore S$  依然满足  $L$  所拥有的交换律, 结合律, 吸收律

$\therefore \langle S, \preceq, \vee, \wedge \rangle$  是  $L$  的子格

## Problem 7

(a)  $a$  的补元是  $d$

(c)  $a$  的补元是  $f$ ,  $b$  的补元是  $d$ ,  $c$  的补元是  $e$

(f)  $a$  的补元是  $f$ ,  $b$  的补元是  $e$

## Problem 8

**(a)**

是分配格, 不是有补格, 不是布尔格

线构型, 无与  $M_3$  或  $N_5$  重构的子格, 因此是分配格

$b$  和  $c$  无补元, 不是有补格, 因而也不是布尔格

**(c)**

不是分配格, 是有补格, 不是布尔格

$\{a, b, c, d, f\}$  是与  $N_5$  重构的子格, 因此不是分配格, 也不是布尔格

每个元素都有补元, 因而是有补格

**(f)**

不是分配格, 不是有补格, 不是布尔格

$\{a, b, c, e, f\}$ 是与 $N_5$ 重构的子格, 因此不是分配格

$c$ 和 $d$ 无补元, 不是有补格, 因而也不是布尔格

## Problem 9

$$\because \forall a \in L, 0 \preceq a$$

$$\therefore a \wedge 0 = 0 \wedge a = 0, a \vee 0 = 0 \vee a = a$$

$$\because \forall a \in L, a \preceq 1$$

$$\therefore a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$