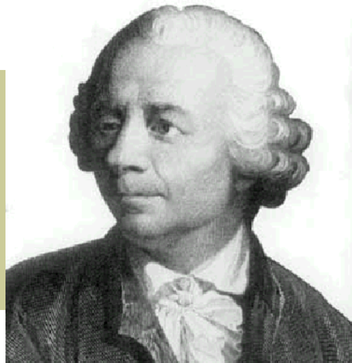
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第十七讲：布尔代数引论

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

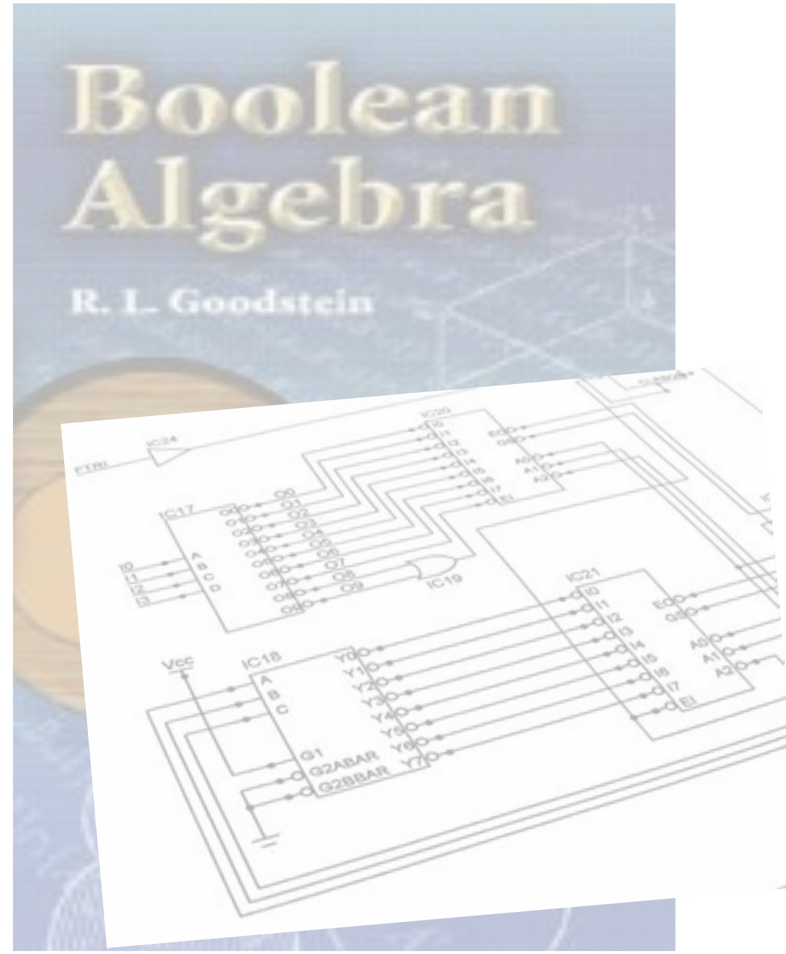
2020 年 12 月 14 日

前 情 提 要

- 偏序集与格
- 格的对偶原理
- 格的性质
- 代数格与偏序格的等价性
- 格同态与格同构
- 分配格与有补格
- 布尔格与布尔代数

本讲主要内容

- 布尔格
- 布尔代数
- 布尔代数的性质
- 布尔代数的同态
- 有限布尔代数
- 数字逻辑电路设计*
- 布尔代数与信息论*



布尔格

- 定义（**布尔格**）：如果一个格为有补分配格，则称其为布尔格或布尔代数（Boolean algebra），可记为$\langle B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
- 集合代数$\langle \mathcal{P}(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B \rangle$是布尔格
- 逻辑代数$\langle \{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$是布尔格

布尔格的性质

- 观察集合代数系统$\langle\mathcal{P}(B),\cap,\cup,\sim,\emptyset,B\rangle$：
  - 集合交运算满足交换、结合律
  - 集合并运算满足交换、结合律
  - 集合交与并运算相互满足吸收律（以上三点可判定为格）
  - 集合交与并运算相互满足分配律，因此是分配格
  - 定义$\mathcal{P}(B)$上的关系R，$x\boldsymbol{R}y \Leftrightarrow x\cap y = x$，则$\boldsymbol{R}$为集合包含关系，是偏序，$\emptyset$与$B$分别为全下界和全上界，为有界格
  - $\forall x\in\mathcal{P}(B)$，$\sim x = B - x$即为唯一的补元，故为布尔格

布尔代数系统

- 布尔代数$\langle B,*,\circ,\Delta,a,b\rangle$是代数系统，其中$*$和$\circ$是两个二元运算，$\Delta$是一元运算，$a,b\in B$是零元运算（*i.e.* 代数常量），且满足下列系统公理：
  - $*$和$\circ$满足交换律：$\forall x,y\in B, x*y=y*x, x\circ y=y\circ x$
  - $*$对$\circ$，$\circ$对$*$均满足分配律：
    $\forall x,y,z\in B, x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z), x\circ(y*z)$
    $=(x\circ y)*(x\circ z)$
  - a,b分别是$\circ$和$*$的单位元：$\forall x\in B, x\circ a=x, x*b=x$
  - $*$和$\circ$满足补元律：$\forall x\in B, x*(\Delta\, x)=a, x\circ(\Delta\, x)=b$

布尔代数系统（续）

- 事实：布尔代数系统$\langle B,*,\circ,\Delta,a,b\rangle$即有补分配格$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$
- 证明（布尔代数与布尔格等价）：
- 引理1：a,b分别为$*$和$\circ$的零元
    - 证明：$\forall x\in B, x\circ b=b*(x\circ b)=(x\circ\Delta x)*(x\circ b)=x\circ(\Delta x*b)=x\circ\Delta x=b$

      $\forall x\in B, x*a=a\circ(x*a)=(x*\Delta x)\circ(x*a)=x*(\Delta x\circ a)=x*\Delta x=a$

布尔代数系统（续）

- **事实**：布尔代数系统$\langle B,*,\circ,\Delta,a,b\rangle$即有补分配格$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$

- 引理2：含补同一性，即：

$$\forall x,y,z\in B,(x\circ y=x\circ z)\text{且}(\Delta x\circ y=\Delta x\circ z)\to y=z$$

  - **证明**：由前提可得$(x\circ y)*(\Delta x\circ y)=(x\circ z)*(\Delta x\circ z)$

    $\Rightarrow(x*\Delta x)\circ y=(x*\Delta x)\circ z\Rightarrow a\circ y=a\circ z\Rightarrow y=z$

布尔代数系统（续）

- 事实：布尔代数系统$\langle B, *, \circ, \Delta, a, b\rangle$即有补分配格$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$

- 证明布尔代数系统满足吸收律：
  - $x \circ (x * y) = (x * b) \circ (x * y) = x * (b \circ y) = x * b = x$
  - $x * (x \circ y) = (x \circ a) * (x \circ y) = x \circ (a * y) = x \circ a = x$

  （由引理1：$b \circ y = b, a * y = a$）

布尔代数系统（续）

- 事实：布尔代数系统$\langle B,*,\circ,\Delta,a,b\rangle$即有补分配格$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$
- 证明布尔代数系统满足结合律：
  - 注意：$x\circ(x*(y*z))=x\circ((x*y)*z)=x$
  - 且$\Delta x\circ(x*(y*z))=\Delta x\circ((x*y)*z)=\Delta x\circ(y*z)$
  - 由引理2得$x*(y*z)=(x*y)*z$；同理可证。满足结合律

布尔代数系统（续）

- 事实：布尔代数系统$\langle B,*,\circ,\Delta,a,b\rangle$即有补分配格$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$
- 以上证明了布尔代数系统$\langle B,*,\circ\rangle$是格
- 格B导出的代数系统为$\langle B,\wedge,\vee\rangle$，故二元运算“$*$”即为$\wedge$，“$\circ$”即为$\vee$
- 由布尔代数系统公理中的单位元公理及引理1可知，a与b即为全下界$\mathbf{0}$和全上界$\mathbf{1}$，故Δ即为求补运算$'$

布尔代数的性质

定理 13.10 设<$B, \wedge, \vee, ', 0, 1$>是布尔代数，则

（1） $\forall a \in B, (a')' = a$.

（2） $\forall a, b \in B$,

$(a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$ （德摩根律）

布尔代数的性质

证　(1) $(a')'$是 a'的补元. a 也是 a'的补元. 由补元惟一性得$(a')' = a$.

(2) 对任意 $a, b \in B$ 有

$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b')$$

$$= (1 \vee b') \wedge (a' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1,$$

$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b')$$

$$= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$$

所以 $a' \vee b'$是 $a \wedge b$ 的补元, 根据补元的惟一性有

$$(a \wedge b)' = a' \vee b'$$

同理可证 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

注意：德摩根律对有限个元素也是正确的.

布尔代数的同态

定义 13.15 设<B_1, $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1>和<B_2, $\cap$, $\cup$, $-$, θ, E>是两个布尔代数.

这里的$\cap$, $\cup$, $-$泛指布尔代数 B_2 中的求最大下界，最小上界和补元的运算. θ 和 E 分别是 B_2 的全下界和全上界.

$f: B_1 \to B_2$. 如果对于任意的 $a, b \in B_1$ 有

$$f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$$

$$f(a') = -f(a)$$

则称 f 是布尔代数 B_1 到 B_2 的同态映射.

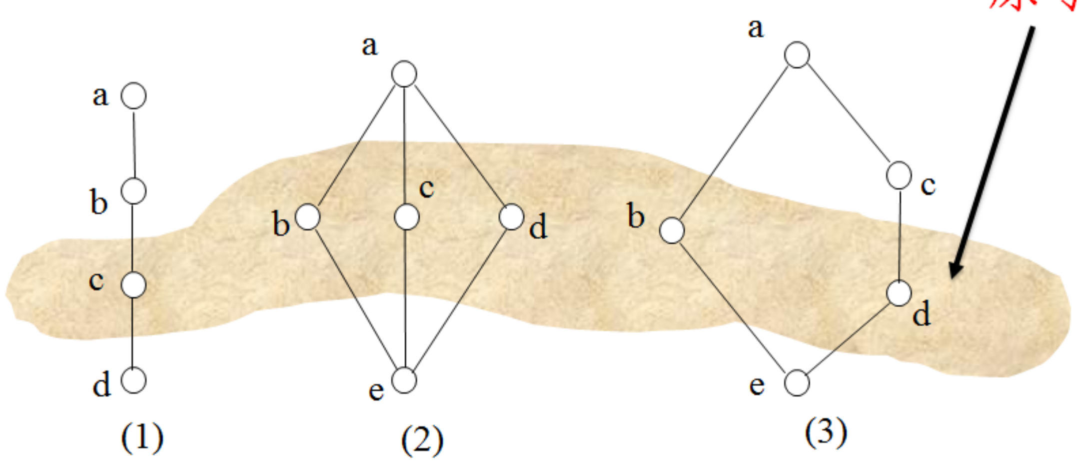
有限布尔代数

- 定义（**格中的原子**）：设L是格，L中有最小元（全下界）$\mathbf{0}$，给定元素$a \neq \mathbf{0}$，若$\forall b \in L$有：

$$0 \prec b \preccurlyeq a \rightarrow b = a$$

则称a是L中的原子(即覆盖最小元的那些元素)

原子



有限布尔代数（续）

- 定理：设a,b是格L中的原子，若$a \neq b$则$a \wedge b = \mathbf{0}$
  - **证明：** 假设$a \wedge b \neq \mathbf{0}$，注意：$a \wedge b \preccurlyeq a$且$a \wedge b \preccurlyeq b$，
    由原子的定义：$a \wedge b = a$，$a \wedge b = b$，$\therefore a = b$，矛盾！

实例：

L 是正整数 n 的全体正因子关于整除关系构成的格，则 L 的原子恰为 n 的全体素因子.

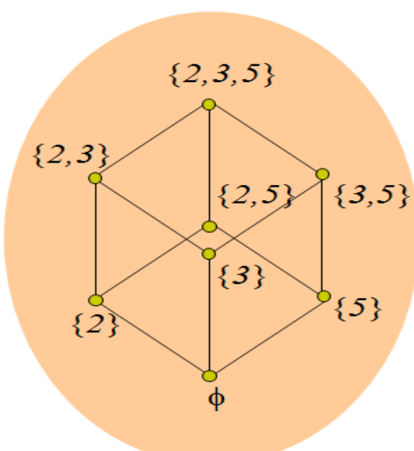
若 L 是集合 B 的幂集合，则 L 的原子就是由 B 中元素构成的单元集.

有限布尔代数的表示定理

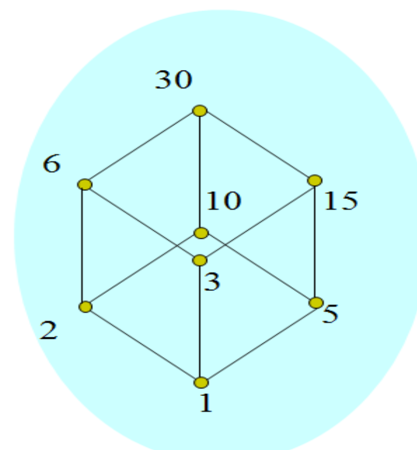
- 定理（**有限布尔代数表示定理**）：设任意有限布尔代数B中全体原子构成的集合为A，则：

$$B \cong \mathcal{P}(A)$$

即 $\langle B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \cong \langle \mathcal{P}(A), \cap, \cup, \sim, \emptyset, A \rangle$



$\cong$



有限布尔代数的表示定理（续）

- 定理（**有限布尔代数表示定理**）：设任意有限布尔代数B中全体原子构成的集合为A，则：

$$\langle B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \cong \langle \mathcal{P}(A), \cap, \cup, \sim, \emptyset, A \rangle$$

- 推论1（**有限布尔代数的基数**）：任何有限布尔代数的基数为2^n，$n \in \mathbb{N}$

证 设 B 是有限布尔代数，A 是 B 的所有原子构成的集合，

且 $|A| = n, n \in N$.

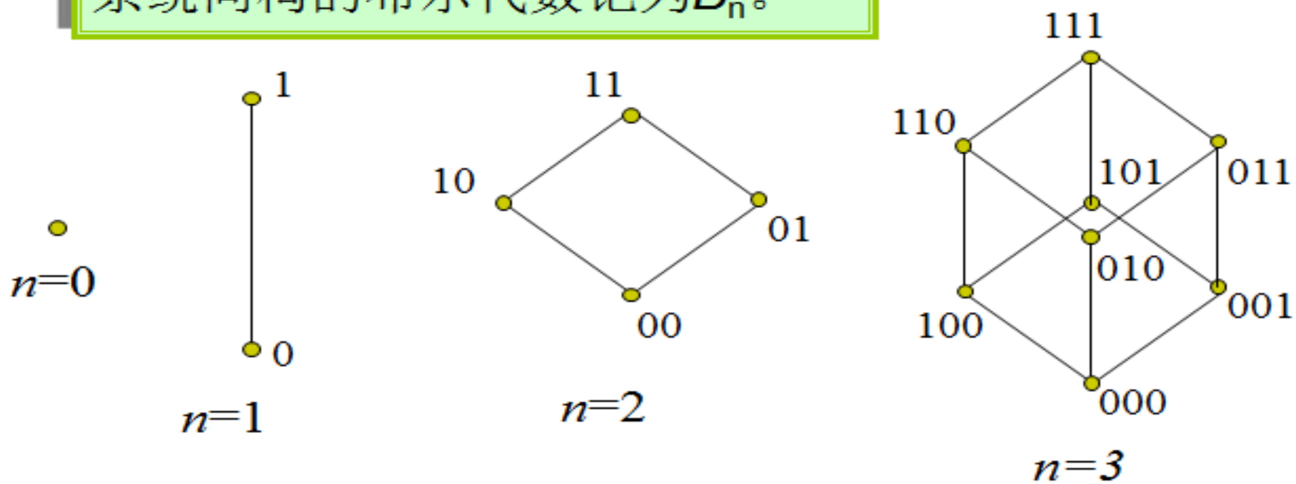
由定理得

$B \cong P(A)$，而 $|P(A)| = 2^n$，所以 $|B| = 2^n$.

有限布尔代数的表示定理（续）

- 推论2（**有限布尔代数的同构性**）：任何等势的有限布尔代数皆同构
- 最小的几个有限布尔代数：

与含n个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为B_n。



布尔代数与数字逻辑电路设计*

- 与含n个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为B_n。逻辑代数系统是$B_1=\langle\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$
- B_n的每一个元素可以看做一个长度为n的二进字符串
- 一个有n个输入、一个输出的逻辑电路对应于一个用含n个布尔变量的布尔代数表达式定义的布尔函数f：$B_1^n\rightarrow B_1$，也可以看作 f：$B_n\rightarrow B_1$
- 在确定表示该函数的布尔表达式后，很容易用门电路元件搭出所需要的逻辑电路
- 因此，关键问题是如何确定所需的布尔表达式，并将其化为最简形式

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效，设计一个电子打分器，输出一个结果：“成功”或“失败”

布尔函数：$f(x,y,z)=1 \Leftrightarrow$

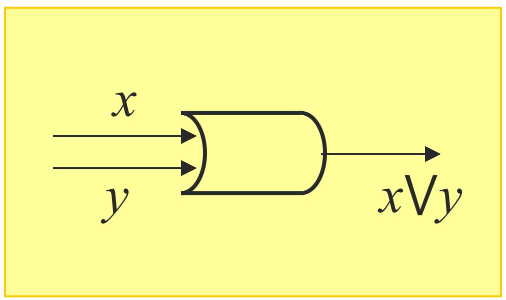
x,y,z中至少有2个为1

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

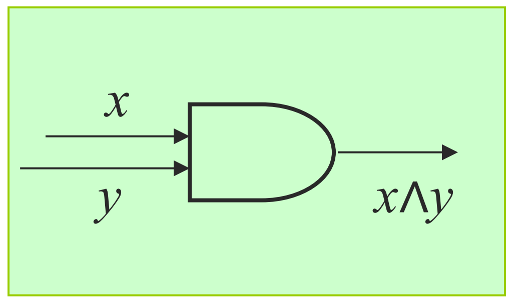
相应的布尔表达式

$$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$

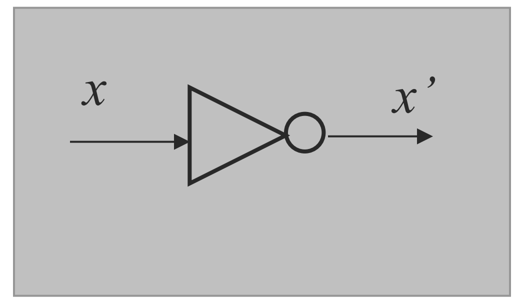
基本逻辑元件



“或” 门



“与” 门

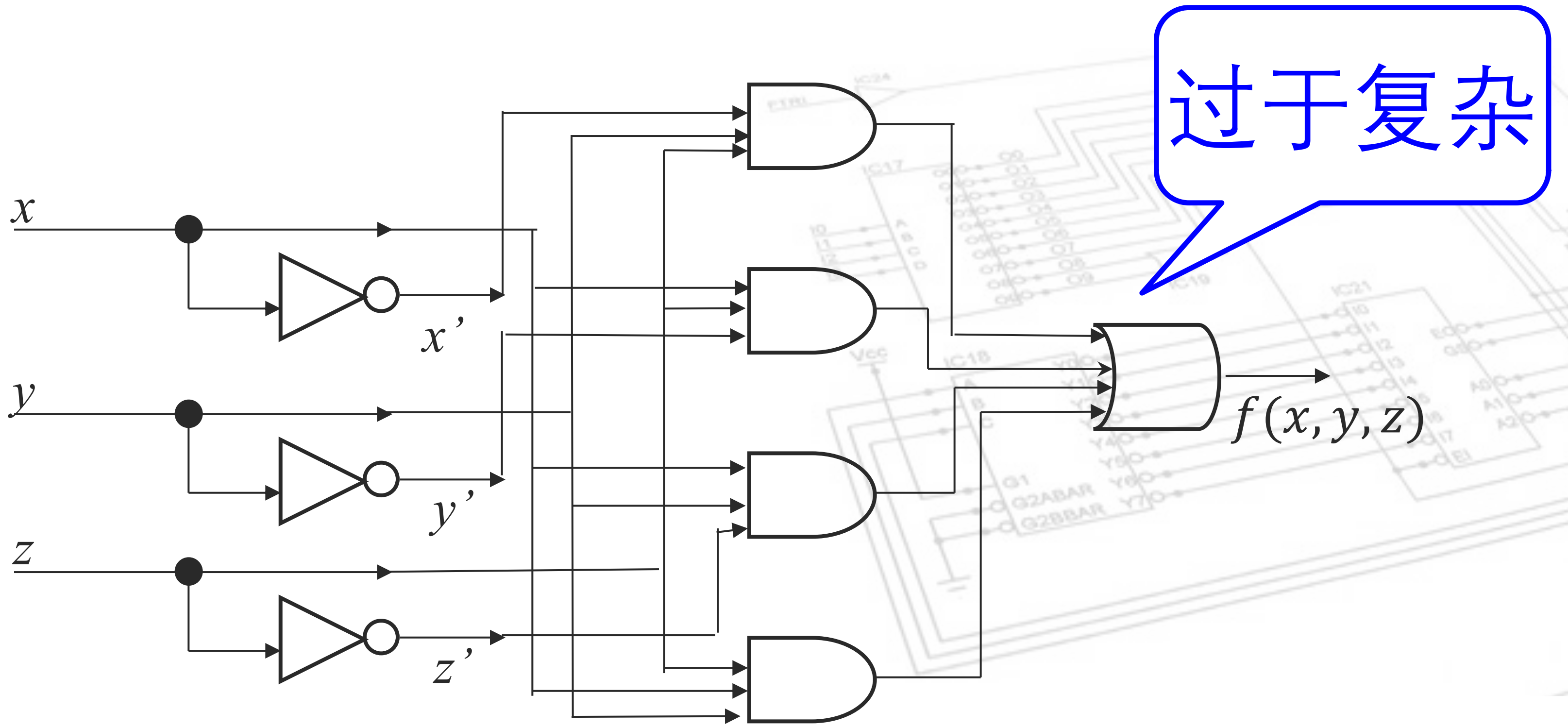


反相器（“非” 门）

电路设计

相应的布尔表达式

$$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$



卡诺图：$n = 2$

$f: B_2 \to B_1$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$$f(x,y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

我们知道：

$$f(x,y) = x'$$

	y'	y
x'	1	1
x	0	0

用卡诺图化简布尔表达式

$f: B_2 \to B_1$

基本位置

00	01
10	11

	y'	y
x'	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
x	$x \wedge y'$	$x \wedge y$

$$f(x,y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\boldsymbol{f(x,y) = x' \vee y'}$$

	y'	y
x'	1	1
x	1	0

卡诺图：$n = 3$

	00	01	11	10
0	0 0 0	0 0 1	0 1 1	0 1 0
1	1 0 0	1 0 1	1 1 1	1 1 0

y' $\qquad\qquad$ y

	$y'\wedge z'$	$y'\wedge z$	$y\wedge z$	$y\wedge z'$
x'	$x'\wedge y'\wedge z'$	$x'\wedge y'\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z$	$x'\wedge y\wedge z'$
x	$x\wedge y'\wedge z'$	$x\wedge y'\wedge z$	$x\wedge y\wedge z$	$x\wedge y\wedge z'$

z' $\qquad\qquad$ z

化简三个变量的布尔表达式

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	1	0	0	1
x	1	0	1	1

布尔表达式

$$(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\mathbf{z' \vee (x \wedge y)}$$

回归举重裁判的问题

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1

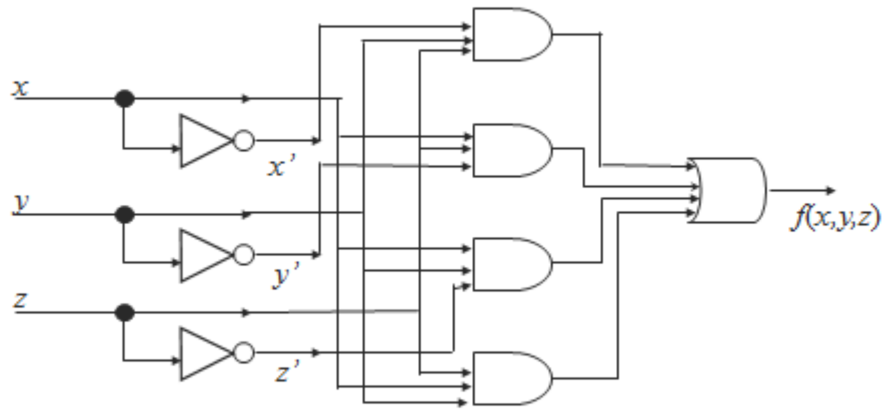
简化后的表达式

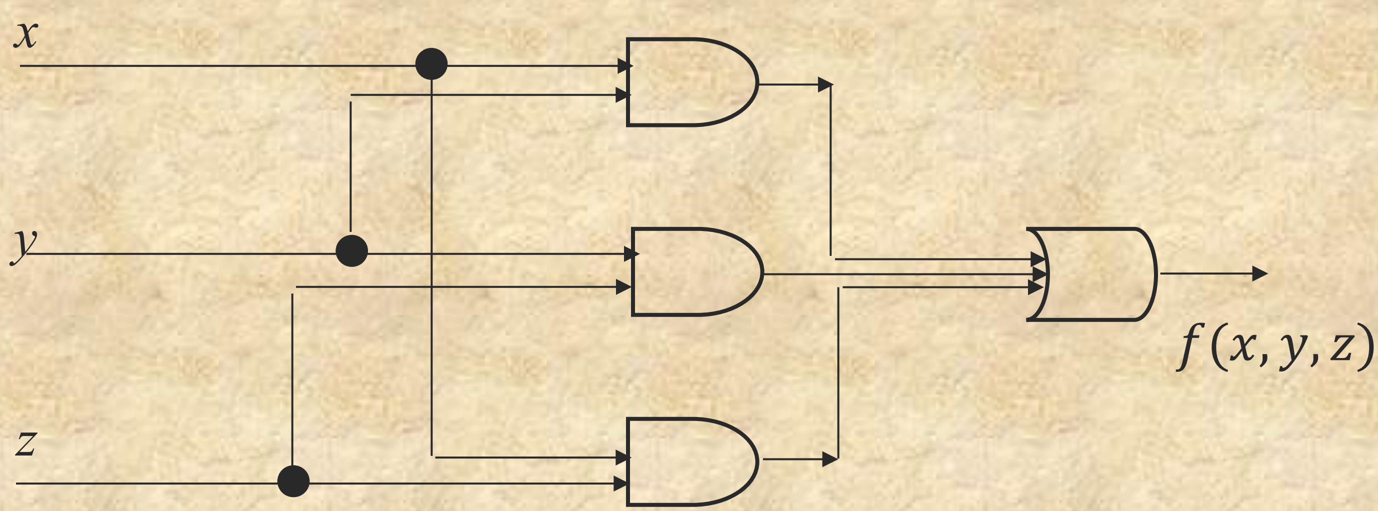
$$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

改进后的电路设计

简化后的表达式

$$(y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$





布尔代数与信息论*

- 信息是什么？
  - 信息是可以在在决策中消除不确定性的数据
- 信息量的大小与何有关？
  - 与它的不确定性有关
- 如何度量信息？
  - 将决策域确定为$\{A, \neg A\}$中的某一个，需要用1比特（bit）信息进行刻画（*i.e.* 消除50%的不确定性）

布尔代数与信息论（续）

[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: tobaccoo] [本篇人气: 19350] 0

发信人: tobaccoo (   ), 信区: Pictures
标 题: 有1000个瓶子，其中有999瓶是水，1瓶是毒药
发信站: 南京大学小百合站 (Thu Mar 29 23:13:24 2012)

刚才在校内上看到一条转发状态，做为理工科学生，小弟为自己的智商捉鸡了。。。
看完答案后，小弟更为自己的智商捉鸡了。。。

有 1000 个一模一样的瓶子，其中有 999 瓶是普通的水，有一瓶是毒药。任何喝下毒药的生物都会在一星期之后死亡。现在，你只有 10 只小白鼠和一星期的时间，如何检验出哪个瓶子里有毒药？

布尔代数与信息论（续）

[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: lzh914041] [本篇人气: 2] 86

发信人: lzh914041 (威少), 信区: Pictures
标　题: Re: 有1000个瓶子，其中有999瓶是水，1瓶是毒药
发信站: 南京大学小百合站 (Fri Mar 30 18:03:02 2012)

百度一下，你就知道。。。

这个问题的答案也堪称经典：把瓶子从 0 到 999 依次编号，然后全部转换为 10 位二进制数。让第一只老鼠喝掉所有二进制数右起第一位是 1 的瓶子，让第二只老鼠喝掉所有二进制数右起第二位是 1 的瓶子，等等。一星期后，如果第一只老鼠死了，就知道毒药瓶子的二进制编号中，右起第一位是 1 ；如果第二只老鼠没死，就知道毒药瓶子的二进制编号中，右起第二位是 0 ……每只老鼠的死活都能确定出 10 位二进制数的其中一位，由此便可知道毒药瓶子的编号了。

现在，有意思的问题来了：如果你有两个星期的时间（换句话说你可以做两轮实验），为了从 1000 个瓶子中找出毒药，你最少需要几只老鼠？注意，在第一轮实验中死掉的老鼠，就无法继续参与第二次实验了。

答案：7 只老鼠就足够了。事实上，7 只老鼠足以从 37 = 2187 个瓶子中找出毒药来。首先，把所有瓶子从 0 到 2186 编号，然后全部转换为 7 位三进制数。现在，让第一只老鼠喝掉所有三进制数右起第一位是 2 的瓶子，让第二只老鼠喝掉所有三进制数右起第二位是 2 的瓶子，等等。一星期之后，如果第一只老鼠死了，就知道毒药瓶子的三进制编号中，右起第一位是 2 ；如果第二只老鼠没死，就知道毒药瓶子的三进制编号中，右起第二位不是 2，只可能是 0 或者 1 ……也就是说，每只死掉的老鼠都用自己的生命确定出了，三进制编号中自己负责的那一位是 2 ；但每只活着的老鼠都只能确定，它所负责的那一位不是 2 。于是，问题就归约到了只剩一个星期时的情况。在第二轮实验里，让每只活着的老鼠继续自己未完成的任务，喝掉它负责的那一位是 1 的所有瓶子。再过一星期，毒药瓶子的三进制编号便能全部揭晓了。

类似地，我们可以证明， n 只小白鼠 t 周的时间可以从 (t+1)n 个瓶子中检验出毒药来。

George Boole (1815-1864)

- British mathematician and logician. Largely self-educated, Boole in 1849 was appointed Professor of Mathematics at Queen's College (now University College), Cork, in Ireland. In 1854, in *An Investigation of the Laws of Thought,* Boole described an algebraic system that later became known as Boolean algebra, which is of prime importance in the study of pure mathematics and in the design of modern computers.

  ——From *Microsoft Encarta*

- “纯数学是布尔在一部他称之为《思维规律》的著作中发现的。”

  ——*Bertrand Russell*

- 这样说可能是夸大其词，但是它表明了数理逻辑及其分支在今天具有的重要程度。布尔以前的其他人，特别是莱布尼兹和德·摩根，曾经梦想要把逻辑本身加进代数的领域；布尔把它变成了现实。

  ——摘自 E.T. Bell《数学精英》

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 11.2节
- 课后习题：
  - Problem Set 17
- 提交时间：12月21日