# Problem Set 20A

# Problem 1

已知完全二部图中$V_1$中的点的度均为$n$, $V_2$中的点均为$m$

(1) 当$m$和$n$均为偶数的时候$K_{m,n}$具有欧拉回路

(2) 当$m$和$n$均为偶数, 或$m$和$n$其中一个是2的时候具有欧拉通路

# Problem 2

要使含有$k$个奇数度的结点的连接图$G$成为欧拉图,
即要让这$k$个奇数度节点都变成偶数度节点

让我们考虑在$G$中加入一条边会发生什么：

若这条加入的边连接的是两个奇数度节点,
那么这两个奇数度节点都会变成偶数度节点, 即奇数节点减二, 偶数节点加二

若这条加入的边连接的是两个偶数度节点,
那么这两个偶数度节点都会变成奇数度节点, 即偶数节点减二, 奇数节点加二

若这条加入的边连接的是一个奇数度节点和一个偶数度节点,
那么奇数度节点数和偶数度节点数均不变

$\therefore$ 我们可知, 奇数度节点数每次都以2为最小变化量变化,

当$k$为奇数时, 不可能让$k$个奇数度节点都变成偶数度节点

当$k$为偶数时, 设这$k$个奇数度点为$v_1, v_2, \cdots, v_k$

加入边$v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{k-1}v_k$, 那么这$k$个奇数度点都变成了偶数度点

一共加入了$\dfrac{k}{2}$条边, 此时已经成为了欧拉图

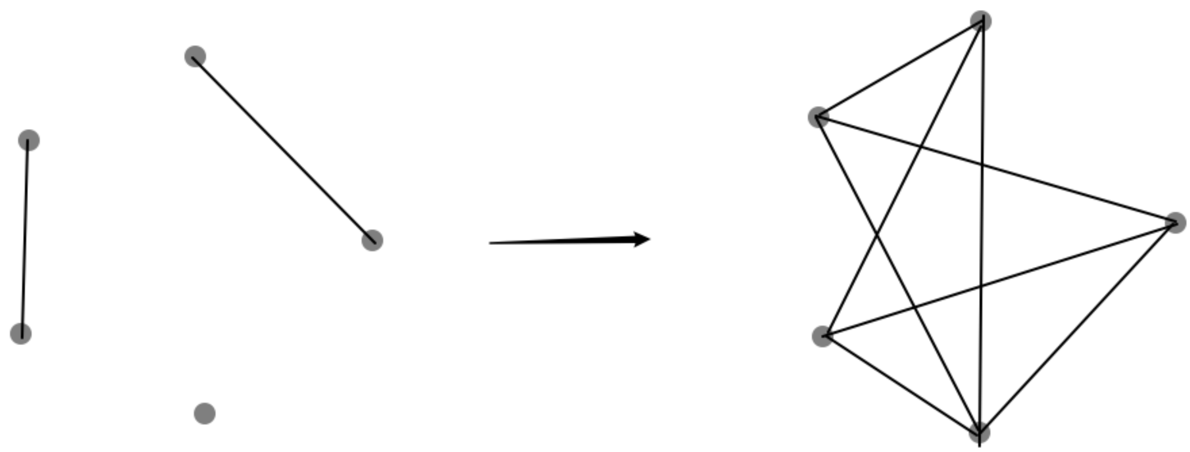
易知如果加入的边数少于$\dfrac{k}{2}$, 则必定会剩余若干个奇数度点, 不可能为欧拉图

$\therefore$ 图$G$中至少要添加$\dfrac{k}{2}$条边才能变为欧拉图

# Problem 3

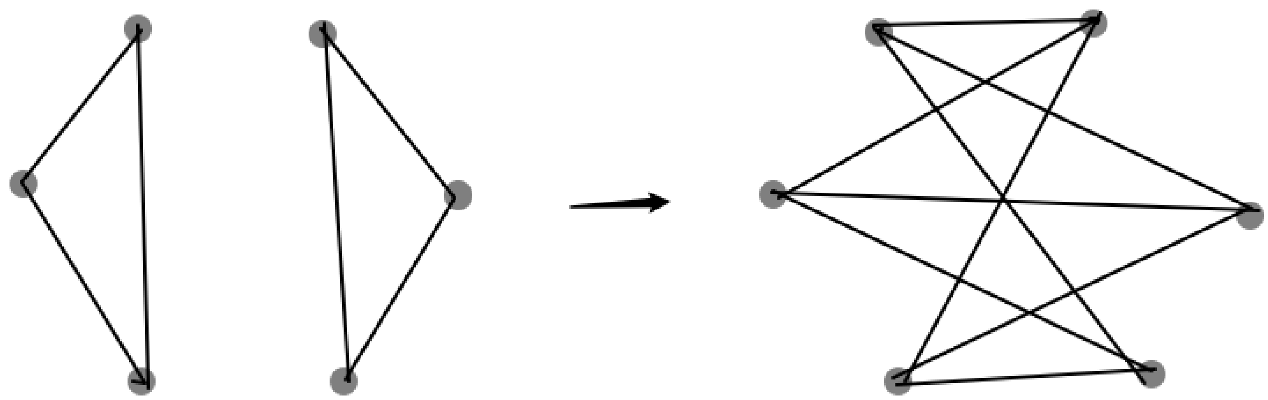
## (1)

反驳,如图：



## (2)

反驳,如图：



# Problem 4

对于$r-$正则图$G$中的任意一条边$e$,有端点$u, v$

$\therefore$ 顶点$u$与$r$条边相连,除去边$e$则还与$r-1$条边相连
且这$r-1$条边的顶点不包含$v$

$\therefore$ 顶点$v$也还与$r-1$条边相连,这$r-1$条边与$u$的$r-1$条边不重合

$\therefore$ 边$e$与$2(r-1)$条边相邻

$\therefore$ $L(G)$中的任意点与$2(r-1)$点相邻,即度数为$2(r-1)$,为偶数

$\therefore$ 由欧拉图判定定理可知,$L(G)$是欧拉图

反之不一定成立,如图：