

Problem Set 11

Problem 1

(1)

$f_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$
 $f_2 = \{(0, 0), (1, 1)\}$
 $f_3 = \{(0, 1), (1, 0)\}$
 $f_4 = \{(0, 1), (1, 1)\}$

(2)

定义 $\langle S, \circ \rangle$ 是代数系统, 其中 \circ 是函数的复合运算.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

Problem 2

- (1) 封闭
- (2) 不封闭
- (3) 封闭
- (4) 封闭
- (5) 不封闭
- (6) 封闭

(7) 封闭

(8) 封闭

(9) 关于普通加法不封闭, 关于普通乘法封闭

(10) 关于普通加法不封闭, 关于普通乘法封闭

(11) 关于普通加法封闭, 关于普通乘法不封闭

Problem 3

(1)

$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 是 \mathbb{R} 的二元运算

(2)

f_1 是可交换, 可结合, 非幂等的

f_2 是不可交换, 不可结合, 非幂等的

f_3 是可交换, 可结合, 非幂等的

f_4 是可交换, 可结合, 幂等的

f_5 是可交换, 可结合, 幂等的

f_6 是可交换, 不可结合, 非幂等的

(3)

f_1 的单位元是 0, 无零元, 可逆元素 x 的逆元为 $-x$

f_2 无单位元, 无零元, 无逆元

f_3 的单位元是 1, 零元是 0, 可逆元素 x 的逆元为 $\frac{1}{x}$, 其中 $x \neq 0$

f_4 的无单位元, 无零元, 无逆元

f_5 的无单位元, 无零元, 无逆元

f_6 的单位元是 0, 无零元, 可逆元素 x 的逆元是 x

Problem 4

(1)

能与 S 构成代数系统.

*运算满足交换律, 满足结合律.

没有单位元, 零元为1.

(2)

不能与 S 构成代数系统.

(3)

能与 S 构成代数系统.

*运算满足交换律, 满足结合律.

没有单位元, 没有零元.

(4)

不能与 S 构成代数系统.

Problem 5

(1)

能构成代数系统.

满足交换律和结合律.

单位元为 $f_0(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, 无零元.

(2)

能构成代数系统.

不满足交换律和结合律.

无单位元, 无零元.

(3)

能构成代数系统.

满足交换律和结合律.

单位元为 $f_1(x) = 1, \forall x \in [a, b]$, 零元为 $f_0(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

(3)

不能构成代数系统.

Problem 6

定义运算 $*$, 运算表如下 :

$*$	a	b
a	b	a
b	b	a

$\because a * b = a, b * a = b, a * b \neq b * a$

$(a * b) * b = a, a * (b * b) = b, (a * b) * b = a * (b * b)$

\therefore 该运算在 A 上不可交换也不可结合.

Problem 7

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_3	f_3

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_3	f_2	f_3	f_2
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1

单位元为 f_1 , f_1 有逆元 f_1 , f_4 有逆元 f_4 .