Problem Set 4

Problem 1

$$
\begin{array}{lr}
1.\forall x(P(x) \land R(x)) & (\text{前提引入}) \\
2.P(c) \land R(c), \text{任意} c & (\text{全称实例}, \text{由}1.) \\
3.P(c), \text{任意} c & (\text{化简}, \text{由}2.) \\
4.\forall x(P(x) \to (Q(x) \land S(x))) & (\text{前提引入}) \\
5.Q(c) \land S(c), \text{任意} c & (\text{全称假言推理}, \text{由}3.4.) \\
6.S(c), \text{任意} c & (\text{化简}, \text{由}5.) \\
7.R(c), \text{任意} c & (\text{化简}, \text{由}2.) \\
8.R(c) \land S(c), \text{任意} c & (\text{合取}, \text{由}6.7.) \\
9.\forall x(R(x) \land S(x)) & (\text{全称引入}, \text{由}8.)
\end{array}
$$

Problem 2

$$
\begin{array}{rr}
1.\exists x \neg P(x) & (\text{前提引入}) \\
2.\neg P(c) & (\text{存在实例}, \text{由}1.) \\
3.\forall x(P(x) \lor Q(x)) & (\text{前提引入}) \\
4.P(c) \lor Q(c) & (\text{全称实例}, \text{由}3.) \\
5.\forall x(\neg Q(x) \lor S(x)) & (\text{前提引入}) \\
6.\neg Q(c) \lor S(c) & (\text{全称实例}, \text{由}5.) \\
7.P(c) \lor S(x) & (\text{消解律}, \text{由}4.6.) \\
8.S(c) & (\text{析取三段论}, \text{由}2.7.) \\
9.\forall x(R(x) \to \neg S(x)) & (\text{前提引入}) \\
10.\neg R(c) & (\text{全称取拒式}, \text{由}8.9.) \\
11.\exists x \neg R(x) & (\text{存在引入}, \text{由}10.)
\end{array}
$$

Problem 3

该定理的表述为$\forall x \forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$
其中$P(x,y) : x, y$是实数,$Q(x) : |x| + |y| \geq |x+y|$

使用直接证明法:

当x, y同号或x, y其中一个为0时：
$|x+y| = |x| + |y| \le |x| + |y|$

当x, y异号时：
$|x+y| = ||x| - |y|| \le |x| + |y|$

综上$|x| + |y| \ge |x+y|$成立.

所以$\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y))$为真.

Problem 4

a)

$P(x)$: x是乌鸦.

$Q(x)$: x是北京鸭.

$R(x)$: x是白色的.

原题转化为:

如果$\forall x(P(x) \to \neg R(x))$和$\forall x(Q(x) \to R(x))$为真, 则$\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$为真.

证明

$$
\begin{aligned}
&1. \forall x(P(x) \to \neg R(x)) && \text{(前提引入)} \\
&2. \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) && \text{(德摩根律, 由1.)} \\
&3. \neg P(c) \vee \neg R(c), \text{任意}c && \text{(全称实例, 由3.)} \\
&4. \forall x(Q(x) \to R(x)) && \text{(前提引入)} \\
&5. \forall x(\neg Q(x) \vee R(x)) && \text{(德摩根律, 由3.)} \\
&6. \neg Q(c) \vee R(c), \text{任意}c && \text{(全称实例, 由5.)} \\
&7. \neg P(c) \vee \neg Q(c), \text{任意}c && \text{(消解, 由5.6.)} \\
&8. Q(x) \to \neg P(c), \text{任意}c && \text{(德摩根律, 由7.)} \\
&9. \forall x(Q(x) \to \neg P(x)) && \text{(全称引入, 由8.)}
\end{aligned}
$$

b)

论域为人.

$P(x):x$喜欢步行.

$Q(x):x$喜欢乘汽车.

$R(x):x$喜欢骑自行车.

原题转化为:

如果$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x)),\forall x(Q(x)\vee R(x))$和$\exists x\neg R(x)$为真, 则$\exists x\neg P(x)$为真.

证明:

$$
\begin{aligned}
&1.\exists x\neg R(x) && \text{(前提引入)}\\
&2.\neg R(c) && \text{(存在实例, 由1.)}\\
&3.\forall x(Q(x)\vee R(x)) && \text{(前提引入)}\\
&4.Q(c)\vee R(c) && \text{(全称实例, 由3.)}\\
&5.Q(c) && \text{(析取三段论, 由2.4.)}\\
&6.\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x)) && \text{(前提引入)}\\
&7.P(c)\rightarrow\neg Q(c) && \text{(全称实例)}\\
&8.\neg P(c) && \text{(取拒式, 由5.7.)}\\
&9.\exists x\neg P(x) && \text{(存在引入, 由8.)}
\end{aligned}
$$

Problem 5

猜想:

$\forall x\forall y(R(x)\wedge R(y)\rightarrow\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\geq\dfrac{x+y}{2})$, 其中$R(x):x$是实数.

证明:

使用直接证明法.

假设x,y都是实数.

当$\dfrac{x+y}{2}>0$时候

$\because(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\geq0$

$\therefore x^2+y^2\geq2xy$

$\therefore 2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2$

$\therefore \dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \dfrac{x^2+2xy+y^2}{4}$

$\therefore \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \geq \dfrac{x+y}{2}$

当$\dfrac{x+y}{2} \leq 0$时候

$\therefore \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \geq 0 \geq \dfrac{x+y}{2}$

综上原式总是成立.

$\forall x \forall y(R(x) \wedge R(y) \rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \geq \dfrac{x+y}{2})$成立.

Problem 6

原式可转化为：
$P(x) \rightarrow Q(x), P(x): x$是整数$, Q(x): x$的四次方的最后一位必然是$0,1,5,6$中的一个.

证明:

使用直接证明法:

假设x是整数,不妨令$x=10a+b$,其中b为一位整数,a为整数.

$$\begin{aligned}\therefore x^4 &= (10a+b)^4 \\ &= (10a)^4+4(10a)^3b+6(10a)^2b^2+4(10a)b^3+b^4 \\ &= 10(1000a^4+400a^3b+60a^2b^2+4ab^3)+b^4\end{aligned}$$

易得b^4的个位数就是x^4的个位数.

$b^4=0$或1或16或81或256或625或1296或2401或4096或6561

可看出x的四次方的最后一位必然是$0,1,5,6$中的一个.

$P(x) \rightarrow Q(x)$成立.

Problem 7

原式可转化为:
$\forall a\forall b(P(a)\wedge Q(b)\rightarrow \exists c(a<c<b\wedge P(c)))$
$\wedge\forall a\forall b(Q(a)\wedge P(b)\rightarrow \exists c(a<c<b\wedge P(c)))$

$P(x):x$是无理数,$Q(x):x$是有理数.

论域为实数.

证明:

使用归谬法.

假设a,b分别是无理数和有理数,c是个有理数,$a<c<b$,且$c=\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore 2c-b=a$

易知等式左边是个有理数,等式右边是个无理数,二者不可能相等,则假设不成立

$\therefore c$是无理数

$\because a<\dfrac{a+b}{2}<b$

$\therefore \forall a\forall b(P(a)\wedge Q(b)\rightarrow \exists c(a<c<b\wedge P(c)))$成立

同理$\forall a\forall b(Q(a)\wedge P(b)\rightarrow \exists c(a<c<b\wedge P(c)))$成立

$\therefore$ 原式成立.

Problem 8

原式可转化为:

$\forall xN(x)\rightarrow \neg(n^2+n^3=100)$

$N(x):x$为正整数

证明:

使用直接证明法.

设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^3+n^2$.

易知$\{a_n\}$是个递增数列.

$\because a_4=4^3+4^2=80,a_5=5^3+5^2=150$

$\therefore$ 在4和5之间不存在另一个正整数m使得$a_m = 100$

$\therefore \forall x N(x) \to \neg(n^2 + n^3 = 100)$成立

Problem 9

原式可转化为:

$\forall r Q(r) \to \neg(r^3 + r + 1 = 0)$

$Q(r)$: r是有理数

证明:

使用归谬法.

假设存在有理数r使得$r^3 + r + 1 = 0$成立.

$\because r^3 + r + 1 = 0$

$$\therefore r_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}}$$

$$r_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}}$$

$$r_2 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} + \omega^3\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}}$$

其中$\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

易知r_1, r_2, r_3都不是有理数.

$\therefore$ 与假设存在有理数r矛盾.

$\therefore \forall r Q(r) \to \neg(r^3 + r + 1 = 0)$成立

Problem 10

原式转化为:

$P(x) \to Q(x)$,其中$P(x)$: x是$\sqrt[3]{2}$, $Q(x)$: x是无理数.

论域为实数.

证明:

使用归谬法.

假设$\sqrt[3]{2}$是有理数,则不妨令$\sqrt[3]{2}=\dfrac{p}{q}$,其中p,q是不为零且互质的自然数.

$\therefore 2=\dfrac{p^3}{q^3}$

$\therefore 2q^3=p^3$

$\therefore p^3$是偶数

$\therefore p$是偶数

$\therefore q^3=\dfrac{p^3}{2}$是偶数

$\therefore q$是偶数

$\therefore p,q$都是偶数,不互质,与题设矛盾

$\therefore P(x)\to Q(x)$成立