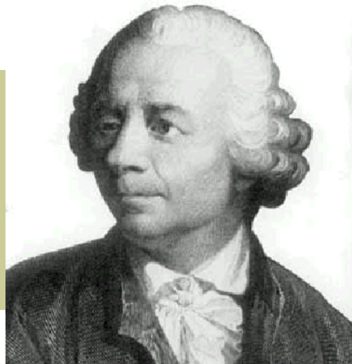
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第十六讲：偏序格与代数格

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

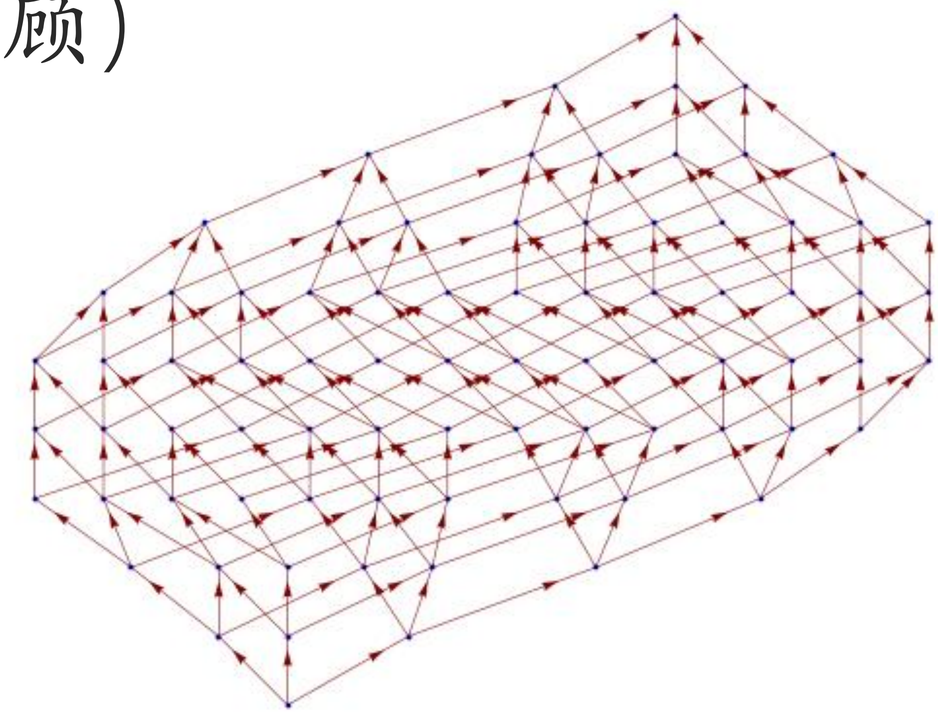
2020 年 12 月 10 日

前 情 提 要

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 偏序格

本讲主要内容

- 偏序集与格（回顾）
- 格的对偶原理
- 格的性质
- 代数格
- 代数格与偏序格的等价性



偏序集与格

- 格（lattice）作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义（第十五讲）
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 对立与统一：本讲我们分别研究格的两种不同的定义与呈现方式以及它们的统一

偏序关系与格（续）

- 格作为偏序集的定义：设$(S,\preccurlyeq)$为偏序集，若$\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$皆有上确界和下确界，则称集合S关于偏序$\preccurlyeq$构成（偏序）格

格导出的代数系统

- 若$(L,\preccurlyeq)$构成格，则称$\langle L,\wedge,\vee\rangle$为偏序格$L$导出的代数系统
- $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 满足以下公理：
  - **Ax.1** 交换律：$a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$
  - **Ax.2** 结合律：$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
  - **Ax.3** 幂等律：$a \wedge a = a, a \vee a = a$
- 满足上述三条公理的代数系统称为半格，记为：$\langle L,\wedge\rangle$和$\langle L,\vee\rangle$；吸收律公理将两个半格统一为格：
  - **Ax.4** 吸收律：$a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$

格中偏序的性质

- 定理（格中元素的基本性质）：设L是格，则$\forall a,b \in L$，有：

$$\boxed{a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b}$$

  - 证明：(1)先证$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$：由$a \preccurlyeq a$和$a \preccurlyeq b$可知$a$是$\{a,b\}$的下界，因此$a \preccurlyeq a \wedge b$；又因$a \wedge b \preccurlyeq a$，由反对称性得$a \wedge b = a$；(2)再证$a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$：根据吸收律和交换律，有$b = b \vee (a \wedge b)$，由$a \wedge b = a$和上式得$b = b \vee a$，即$a \vee b = b$；(3)最后证$a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$：由$a \preccurlyeq a \vee b$得$a \preccurlyeq a \vee b = b$. □

代数格

- 定义（代数格）：设$\langle L,*,\circ\rangle$是代数系统，其中$*$和$\circ$是二元运算，且满足交换律、结合律、吸收律，则称$\langle L,*,\circ\rangle$是代数格。以下论证代数格与偏序格的等价性

- 引理1：代数格满足幂等律：$\forall a\in L, a*a=a,\ a\circ a=a$
  - 根据吸收律：$a=\big(a\circ(a*a)\big)=\big(a*(a\circ a)\big)$,
    $\therefore a*a=a*\big(a\circ(a*a)\big)=a, a\circ a=a\circ\big(a*(a\circ a)\big)=a$

- 引理2：$a\circ b=b$ 当且仅当 $a*b=a$
  - $\Rightarrow$：若$a\circ b=b$，则$a*b=a*(a\circ b)=a$
    $\Leftarrow$：若$a*b=a$，则$a\circ b=(a*b)\circ b=b\circ(b*a)=b$

代数格（续）

- **引理3**：设$\langle L,*,\circ\rangle$是代数格，定义L上的关系$\boldsymbol{R}$如下：

$$\forall a,b \in L, a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow a \circ b = b$$

则$\boldsymbol{R}$是偏序

- 自反性：注意∘满足幂等律（引理1）；
- 反对称性：若$a\boldsymbol{R}b$且$b\boldsymbol{R}a$，则$a \circ b = b$，$b \circ a = a$，但$a \circ b = b \circ a$，$\therefore a = b$；
- 传递性：若$a\boldsymbol{R}b, b\boldsymbol{R}c$，则$a \circ b = b$，$b \circ c = c$，则$a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$，即$a\boldsymbol{R}c$.

代数格（续）

- **引理4：** 偏序格中的确界可由代数格中的运算体现
- $a \circ b$即$\{a, b\}$的上界
  - 由引理1、3，$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b \ \therefore a\boldsymbol{R}(a \circ b)$
  - 由引理1、3，$b \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ b$

    $\therefore\ b\boldsymbol{R}(a \circ b)$
- $a \circ b$即$\{a, b\}$的最小上界
  - 对$c \in L$，若c也是$\{a, b\}$的上界，则$a \circ c = c$，$b \circ c = c$
  - 于是：$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$，即$(a \circ b)\boldsymbol{R}c$

代数格（续）

- 注意：由引理2，$a \circ b = b$当且仅当$a * b = a$，因此
  $$\forall a, b \in L, a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow a * b = a$$
- $a * b$即$\{a, b\}$的下界
  - $\because (a * b) * a = a * (a * b) = (a * a) * b = a * b$
    $\therefore (a * b)\boldsymbol{R}a$
  - $\because (a * b) * b = a * (b * b) = a * b \quad \therefore (a * b)\boldsymbol{R}b$
- $a * b$即$\{a, b\}$的最大下界
  - 任给$c \in L$，若c也是$\{a, b\}$的下界，则$c * a = c, c * b = c$
  - 于是：$c * (a * b) = (c * a) * b = c * b = c$, 即$c\boldsymbol{R}(a * b)$

偏序格与代数格的等价性

- $(L,\boldsymbol{R})$即偏序格
- $*$和$\circ$即相应的求下确界和上确界运算
- 代数格$\langle L,*,\circ\rangle$即$(L,\boldsymbol{R})$的导出代数系统

偏序格与代数格的等价性（续）

- 偏序格与代数格的对应关系：

$$(L, \preccurlyeq)$$

（偏序格：（$L,\preccurlyeq$）是偏序集，任意2个元素皆有上下确界）

$$\downarrow$$

$$\langle L, \wedge, \vee \rangle$$

（格导出的代数系统：*i.e.* 格公理：$\wedge$和$\vee$满足交换律、结合律、吸收律和幂等律等4条公理）

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\langle L, *, \circ \rangle$$

（代数格：二元运算$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律等3个代数算律）

子 格

- 子格（sub lattice）是格的子代数。设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$是格，非空集合$S \subseteq L$，若$S$关于$L$中的运算$\wedge,\vee$仍构成格，称$\langle S,\wedge,\vee\rangle$是$L$的子格

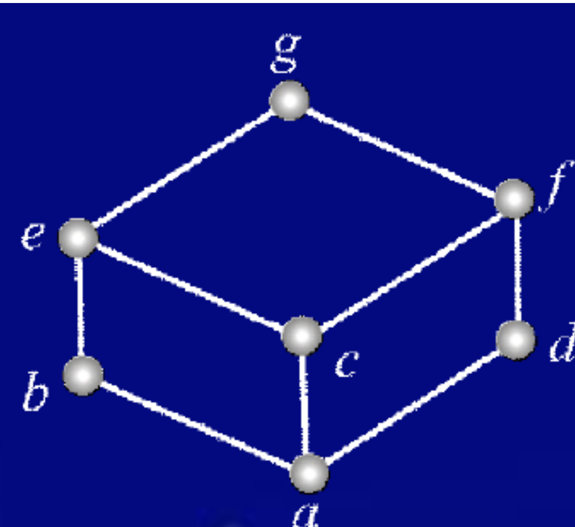
例 13.5 设格 L 如图 3 所示. 令

$$S_1=\{a, e, f, g\}, S_2=\{a, b, e, g\}$$

S_1 不是 L 的子格，因为

$$e, f\in S_1 \text{ 但 } e\wedge f = c\notin S_1.$$

S_2 是 L 的子格.



格同态

- 定义（**格同态**）：设L_1和L_2是格，函数$f: L_1 \to L_2$若满足$\forall a, b \in L_1$,

$$\boxed{\begin{aligned} f(a \wedge b) &= f(a) \wedge f(b), \\ f(a \vee b) &= f(a) \vee f(b) \end{aligned}}$$

同时成立，则称函数f是格L_1到格L_2的同态映射，简称格同态

格同态的保序性

- 定理（格同态保序）：设 f 是格 L_1 到 L_2 的映射，
  - (1) 若 f 为格同态映射，则 f 保序，即

$$(\forall x, y \in L_1)\big(x \preccurlyeq y \rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)\big)$$

  - (2) 若 f 为双射，则 f 为格同构当且仅当

$$(\forall x, y \in L_1)\big(x \preccurlyeq y \leftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)\big)$$

格同态的保序性（续）

例　设 $L_1=\langle S_{12},D\rangle$, $L_2=\langle S_{12},\le\rangle$是格，其中：

S_{12} 是 12 的所有正因子构成的集合，

D 为整除关系, $\le$为通常数的小于或等于关系.

令

$$f:S_{12}\to S_{12}, f(x)=x$$

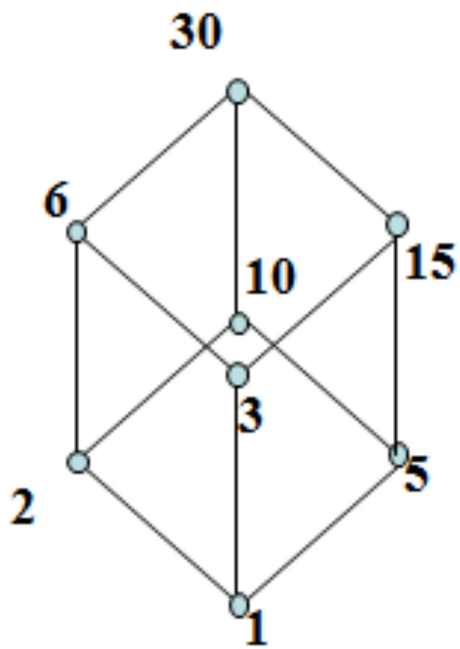
f 是双射，但不是格 L_1 到 L_2 的同构映射.

因为 $f(2)\le f(3)$，但 2 不整除 3.

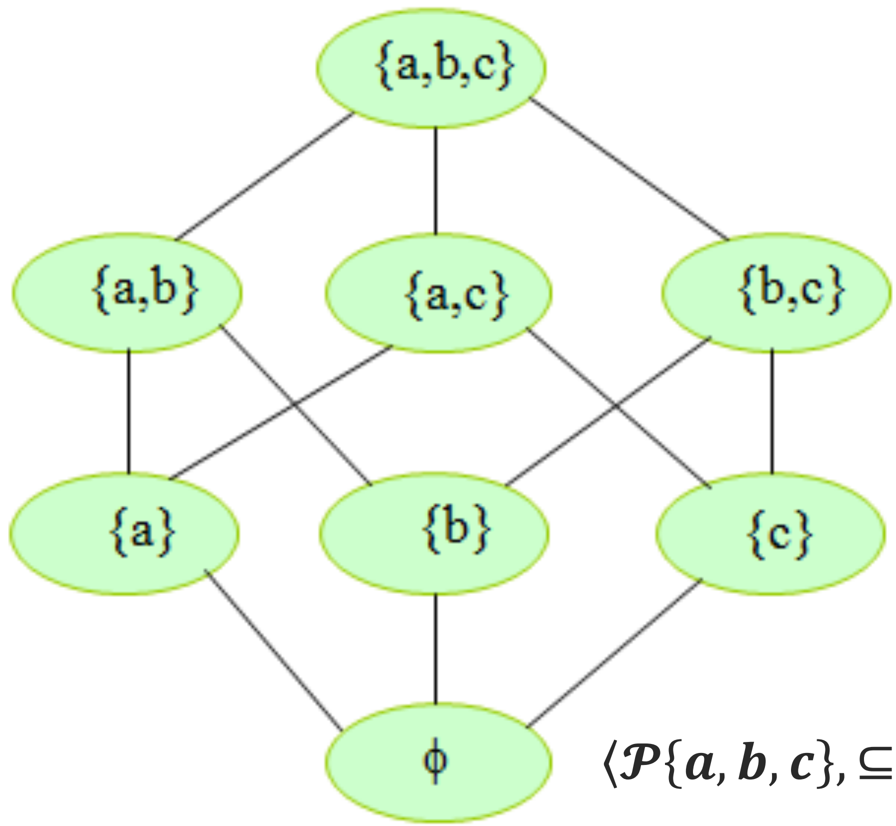
根据上述定理可知 f 不是同构映射

格同构的直观特征

- 观察以下2个格的哈斯图：

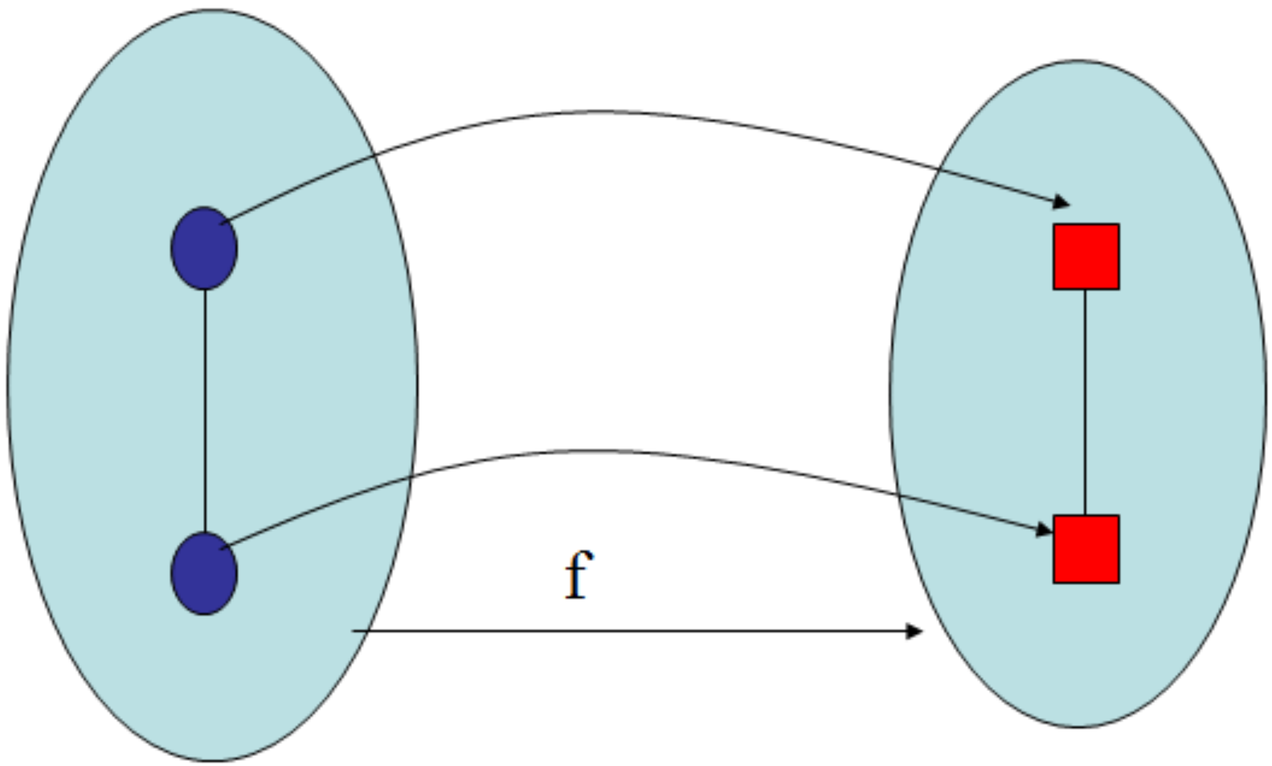


$\langle D_{30}, | \rangle$

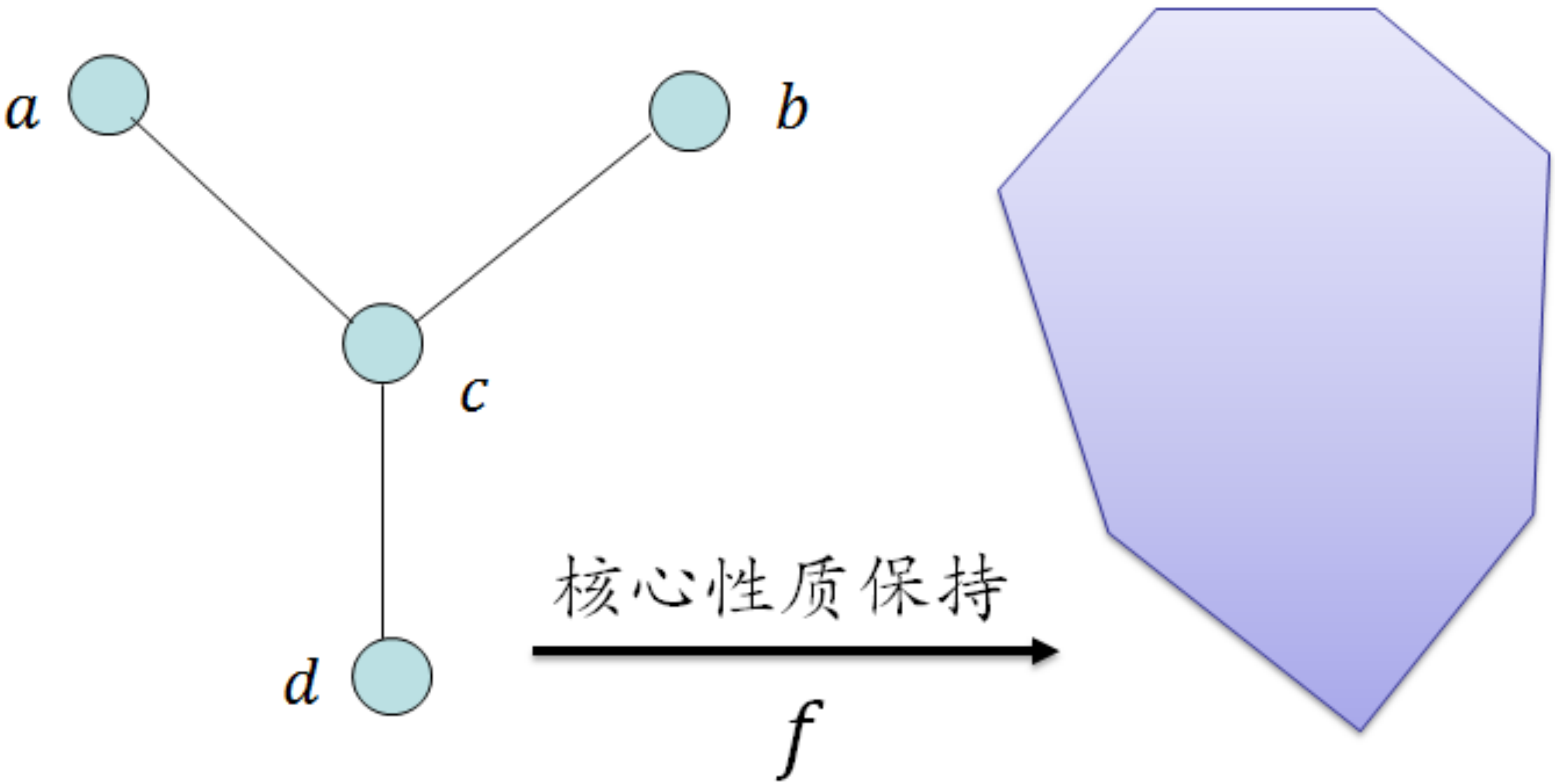


$\langle \mathcal{P}\{a,b,c\}, \subseteq \rangle$

格同构的直观特征（续）



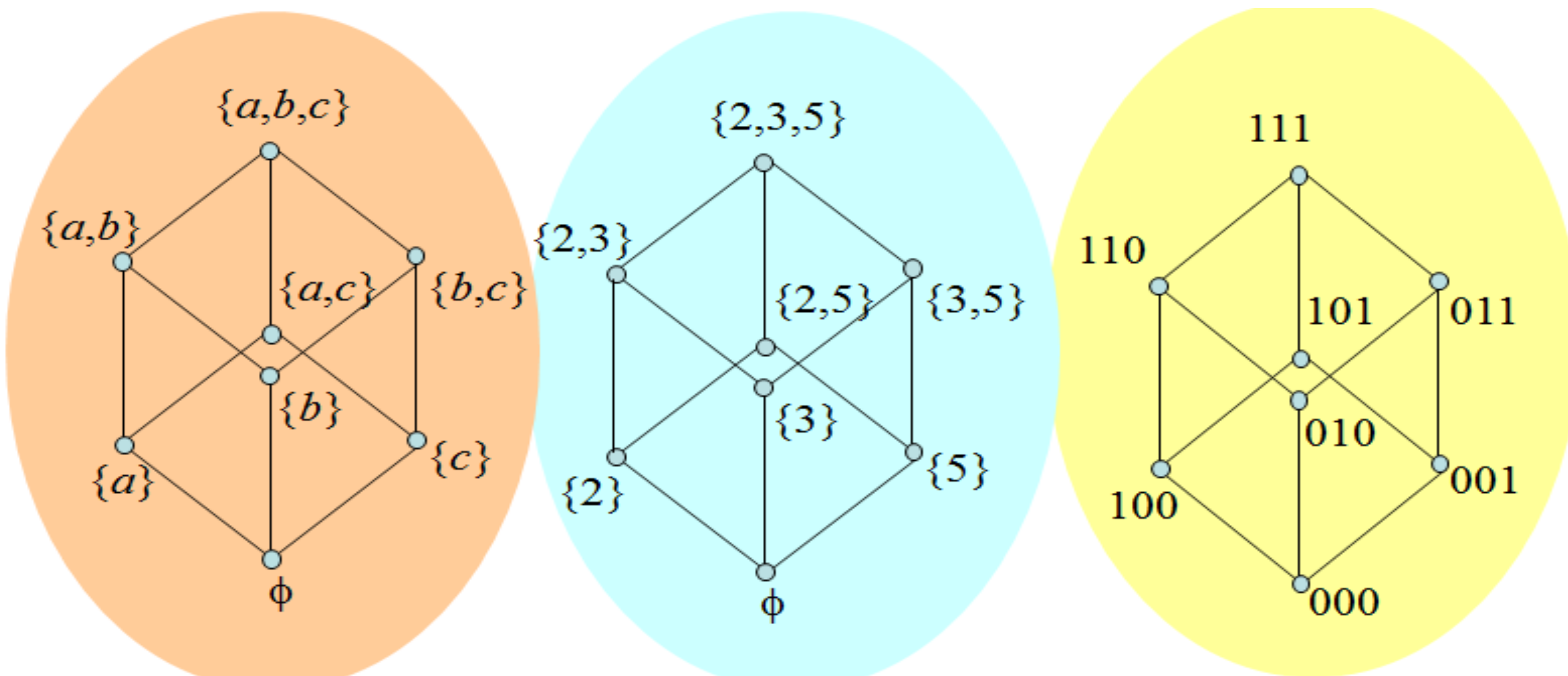
格同构的直观特征（续）



格同构的直观特征（续）

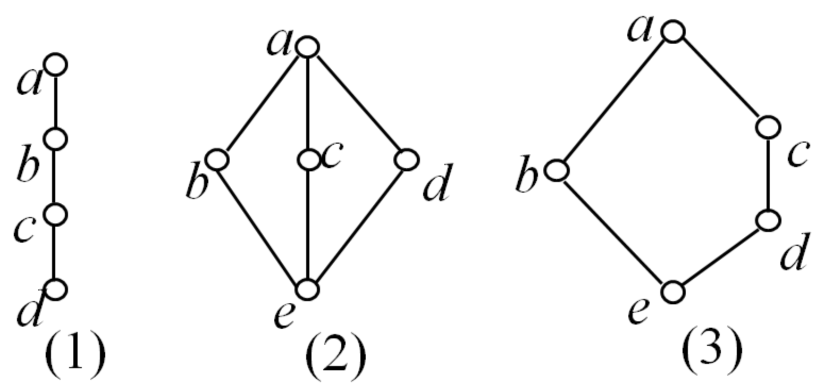
- Iso ⇒ same
- Morph ⇒ shape

⇒ Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape



几种典型的格

- **定义（三种典型的格）：**
  - (1) 链（chain）
  - (2) 钻石格（diamond lattice, $\boldsymbol{M_3}$）
  - (3) 五角格（pentagon lattice, $\boldsymbol{N_5}$）



分配格

- 定义（**分配格**）：设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$为格，若$\forall a,b,c\in L$，有

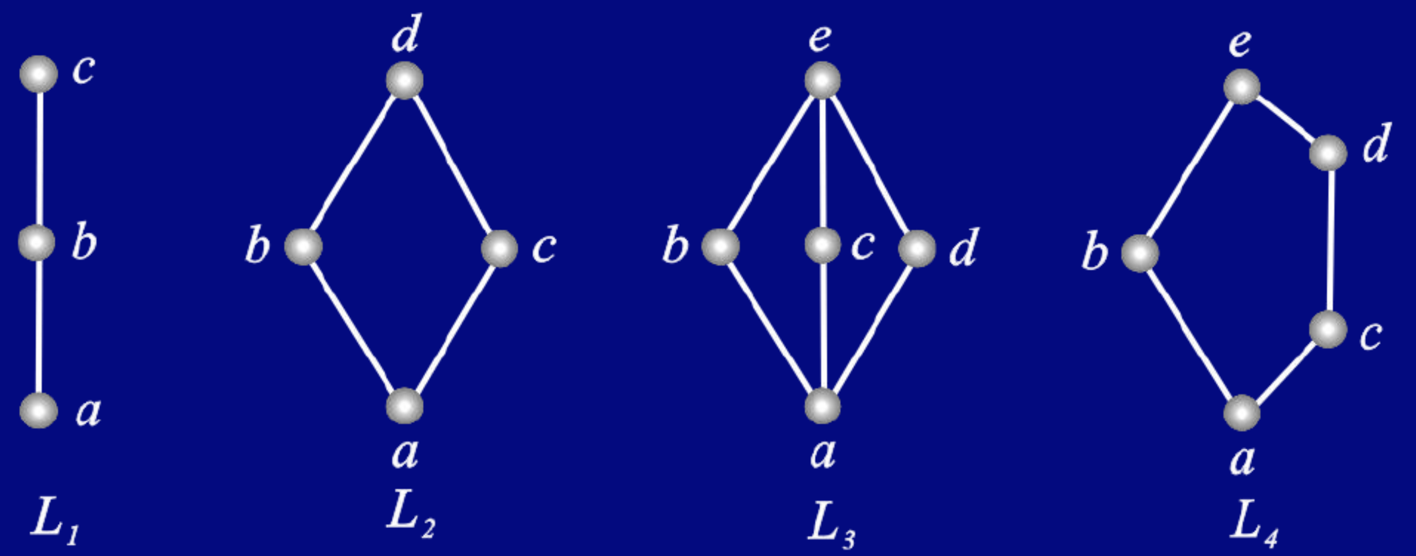
$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格（distributive lattice）

分配格（续）

例　参见下图



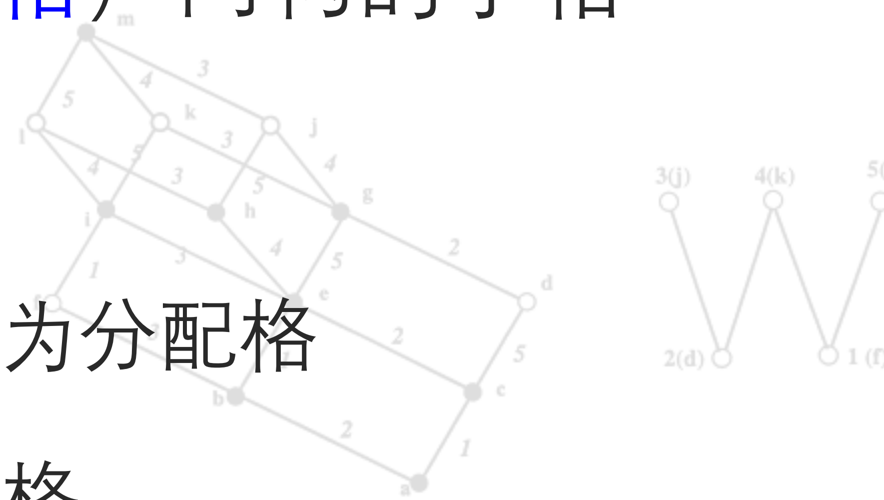
L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4 不是分配格.

在 L_3 中，　$b\wedge(c\vee d)=b\wedge e=b$，$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=a\vee a=a$

在 L_4 中，　$c\vee(b\wedge d)=c\vee a=c$，$(c\vee b)\wedge(c\vee d)=e\wedge d=d$

分配格的判定定理

- 定理（**分配格判定定理一**）：设L为格，则L是分配格当且仅当L不含有与$\boldsymbol{M_3}$（钻石格）或$\boldsymbol{N_5}$（五角格）同构的子格
- 推论：
  - (1) 小于五元的格皆为分配格
  - (2) 任何链皆为分配格



(a) A distributive lattice L (b) $M(L)$

分配格的判定定理（续）

例　说明图 6 中的格是否为分配格，为什么？

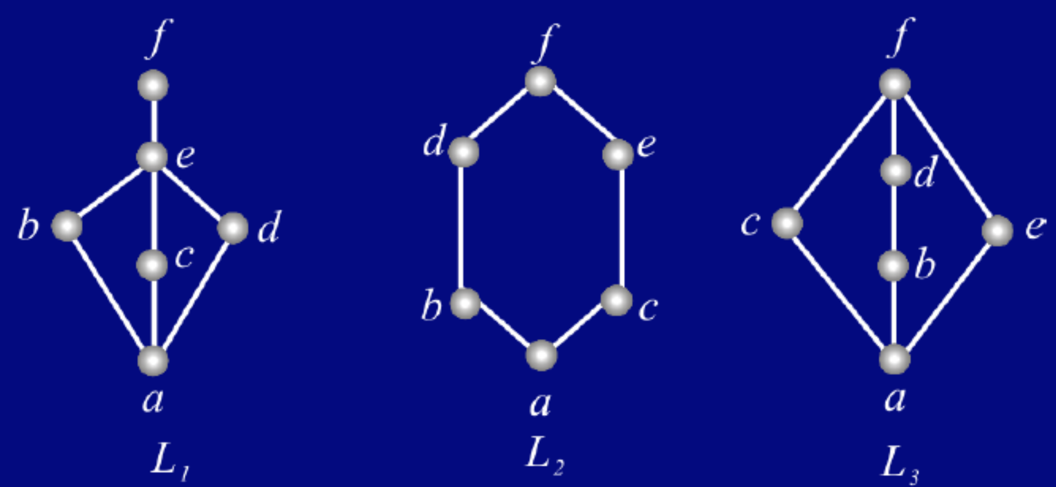


图 6

解　L_1, L_2 和 L_3 都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$ 是 L_1 的子格，并且同构于钻石格；

$\{a, b, c, e, f\}$ 是 L_2 的子格，并且同构于五角格；

$\{a, c, b, e, f\}$ 是 L_3 的子格，也同构于钻石格.

分配格的判定定理（续）

- 定理（**分配格判定定理二**）：设L为格，

  则L是分配格当且仅当

  $$(\forall a,b,c\in L)(a\wedge b=a\wedge c \text{ 且 } a\vee b=a\vee c)$$

  $$\rightarrow b=c$$

分配格的判定定理（续）

证 必要性. $\forall a,b,c \in L$, 有

$$
\begin{aligned}
b &= b \vee (a \wedge b) && \text{(吸收律,交换律)} \\
&= b \vee (a \wedge c) && \text{(已知条件代入)} \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) && \text{(分配律)} \\
&= (a \vee c) \wedge (b \vee c) && \text{(已知条件代入,交换律)} \\
&= (a \wedge b) \vee c && \text{(分配律)} \\
&= (a \wedge c) \vee c && \text{(已知条件代入)} \\
&= c && \text{(交换律,吸收律)}
\end{aligned}
$$

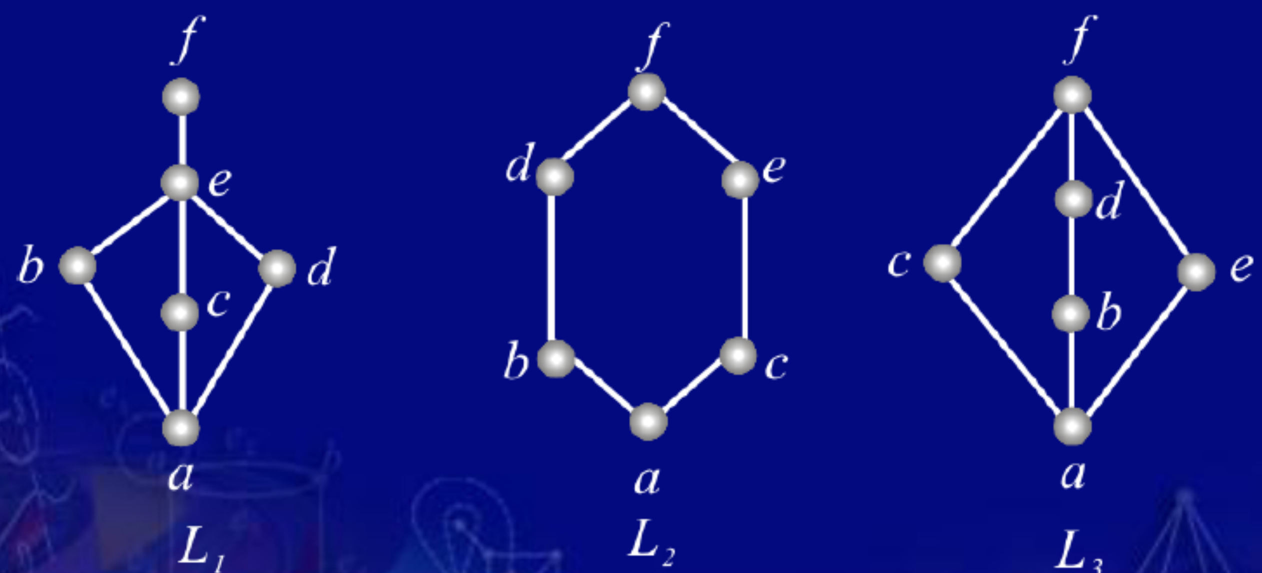
分配格的判定定理（续）

例　以下三个格都不是分配格.

在 L_1 中有 $b\vee c=b\vee d, b\wedge c=b\wedge d$, 但 $c\neq d$

在 L_2 中有 $b\wedge c=b\wedge e, b\vee c=b\vee e$, 但 $c\neq e$

在 L_3 中有 $c\wedge b=c\wedge d, c\vee b=c\vee d$, 但 $b\neq d$



有界格

- 定义（**有界格**）：设L为格，
  - 若存在$b \in L$，使得$\forall x \in L$有$b \preccurlyeq x$，则称元素b是格L的全下界（bottom）
  - 若存在$t \in L$，使得$\forall x \in L$有$x \preccurlyeq t$，则称元素t是格L的全上界（top）

此时格 L 称为有界格（bounded lattice）

有界格（续）

- 注意：
  - 若格L中存在全下界或全上界，则一定唯一
  - 一般将格L的全下界记为$\mathbf{0}$，全上界记为$\mathbf{1}$
  - 有界格L一般记为$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$
  - 有界格$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$满足同一律，即$\forall a \in L$：

$a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \vee \mathbf{0} = a$；$a \wedge \mathbf{1} = a, a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$

有界格（续）

- 事实：
  - 有限格皆为有界格，设$L = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

    $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$是$L$的全下界

    $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$是$L$的全上界
  - **0**是关于∧运算的零元，∨运算的单位元；**1**是关于∨运算的零元，∧运算的单位元
  - 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界对换

有补格

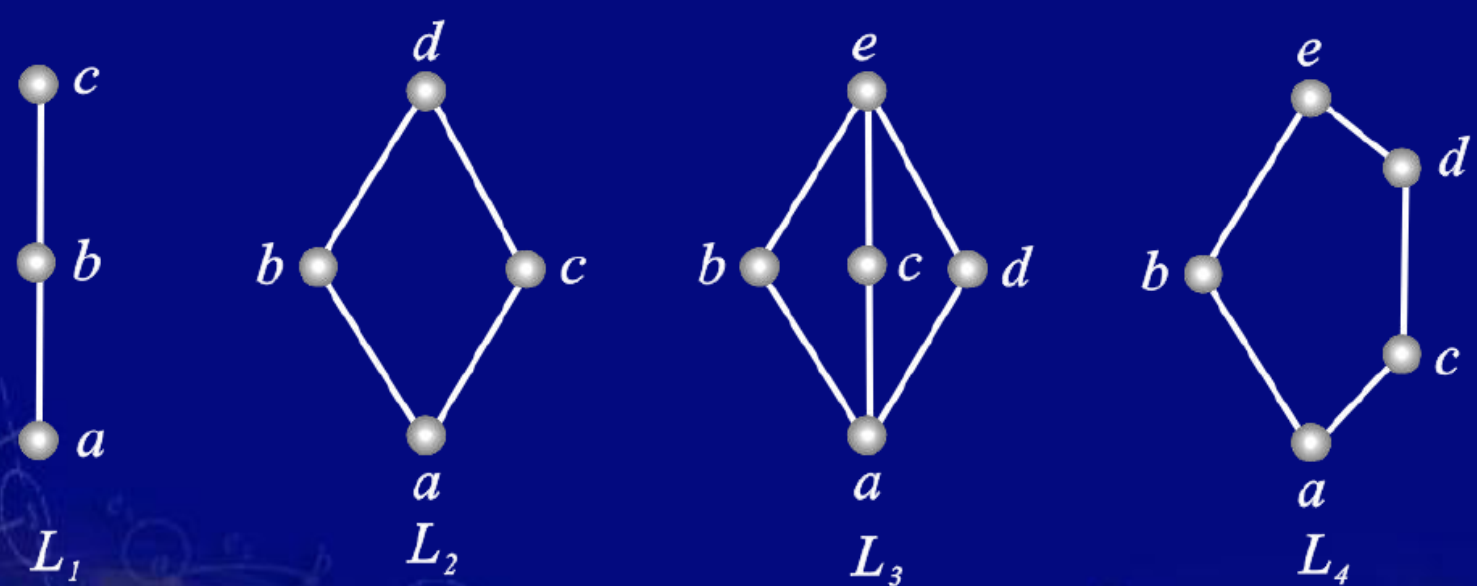
- 定义（**有界格的补元**）：设$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$为有界格，若对$a \in L$存在$b \in L$使得

$$a \wedge b = \mathbf{0} \text{ 且 } a \vee b = \mathbf{1}$$

成立，则称元素b是a的补元（complement）

有补格（续）

例 考虑下图中的四个格．针对不同的元素，求出所有的补元．



有补格（续）

- 定理（有界分配格的补元唯一）：设 $\langle L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$为有界分配格，若$a\in L$存在补元，则其补元唯一

- 证明：假设b,c皆为a之补元，则有：

  $$a\vee c=\mathbf{1}, a\wedge c=\mathbf{0};\ \ a\vee b=\mathbf{1}, a\wedge b=\mathbf{0}$$

  由于全上界和全下界唯一，从而有$a\vee c=a\vee b$，$a\wedge c=a\wedge b$，由于L是分配格，故$b=c.\Box$

有补格（续）

- 事实：
  - 任何有界格中，全上界**1**和全下界**0**互补
  - 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元
  - 补元若存在，则可能唯一，也可能有多个
  - 对于有界分配格，补元若存在则唯一

有补格（续）

- 定义（有补格）：设$\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$为有界格，若$L$中所有元素皆存在补元，则称$L$为有补格（complemented lattice）
- 例：钻石格$\boldsymbol{M_3}$和五角格$\boldsymbol{N_5}$皆为有补格

布尔代数引论

- 布尔代数是一种代数系统，与格一样，其也有两种定义方式，本引论中仅看其一：
- 定义（布尔格）：如果一个格为有补分配格，则称其为布尔格，或称布尔代数（Boolean algebra），可记为$\langle B,\wedge,\vee,',\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$

布尔代数之例

例 设

$$S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$$

是 110 的正因子集合，

gcd 表示求最大公约数的运算，

lcm 表示求最小公倍数的运算，

问 $\langle S_{110}, \gcd, \mathrm{lcm} \rangle$ 是否构成布尔代数？为什么？

布尔代数之例

解（1）验证<S_{110}, gcd, lcm>是格

容易验证 gcd 和 lcm 在 S_{110} 上封闭

$\gcd(x, y) = \gcd(y, x)$ (交换律)

$\mathrm{lcm}(x, y) = \mathrm{lcm}(y, x)$

$\gcd(\gcd(x, y), z) = \gcd(x, \gcd(y, z))$ (结合律)

$\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(x,y), z) = \mathrm{lcm}(x, \mathrm{lcm}(y,z))$

$\gcd(x, \mathrm{lcm}(x, y)) = x$ (吸收律)

$\mathrm{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$

因此,<S_{110}, gcd, lcm>构成格.

布尔代数之例（续）

（2）验证它是分配格.

易验证$\forall x, y, z \in S_{110}$ 有

$$\gcd(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

（3）验证它是有补格

1 作为 S_{110} 中的全下界, 110 为全上界,

1 和 110 互为补元, 2 和 55 互为补元,

5 和 22 互为补元, 10 和 11 互为补元,

从而证明了$<S_{110}, \gcd, \mathrm{lcm}>$为布尔代数.

布尔代数之例（续）

例 设 B 为任意集合，证明 B 的幂集格 $<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$ 构成布尔代数，称为集合代数.

证 $P(B)$关于$\cap$和$\cup$构成格，因为$\cap$和$\cup$运算满足交换律，结合律和吸收律.

由于$\cap$和$\cup$互相可分配，因此 $P(B)$是分配格.

全下界是空集$\varnothing$，全上界是 B.

根据绝对补的定义，取全集为 B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$ 是 x 的补元.

从而证明 $P(B)$是有补分配格，即布尔代数.

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 11.1，11.2节
- 课后习题：
  - Problem Set 16
- 提交时间：12月14日