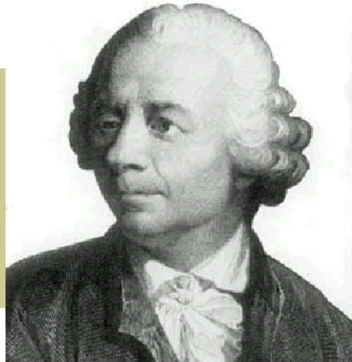
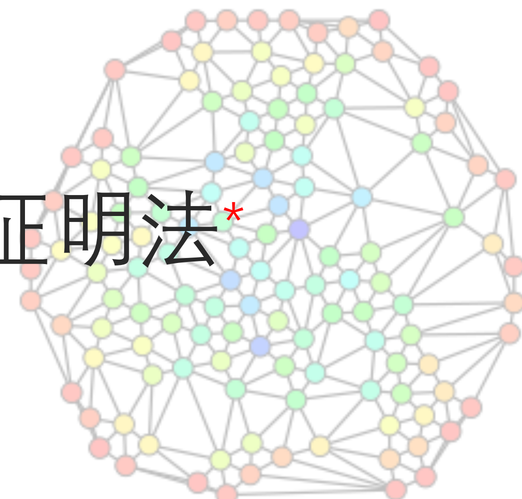
南京大学
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics



扩展阅读：扩大路径证明法*

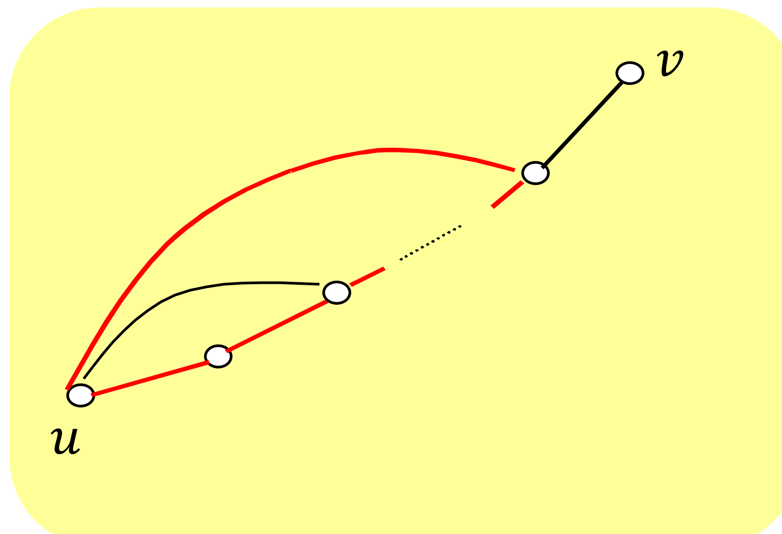
吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 12 月 24 日

极大路径（maximal path）

- 定义（**极大路径**）：设P是图中一条路径，其端点为u, v；若u, v均不与P以外的任意顶点相邻，则称P是G的一条极大路径
- 定义（**最大路径**）：图的极大路径中最长的路径称最大路径

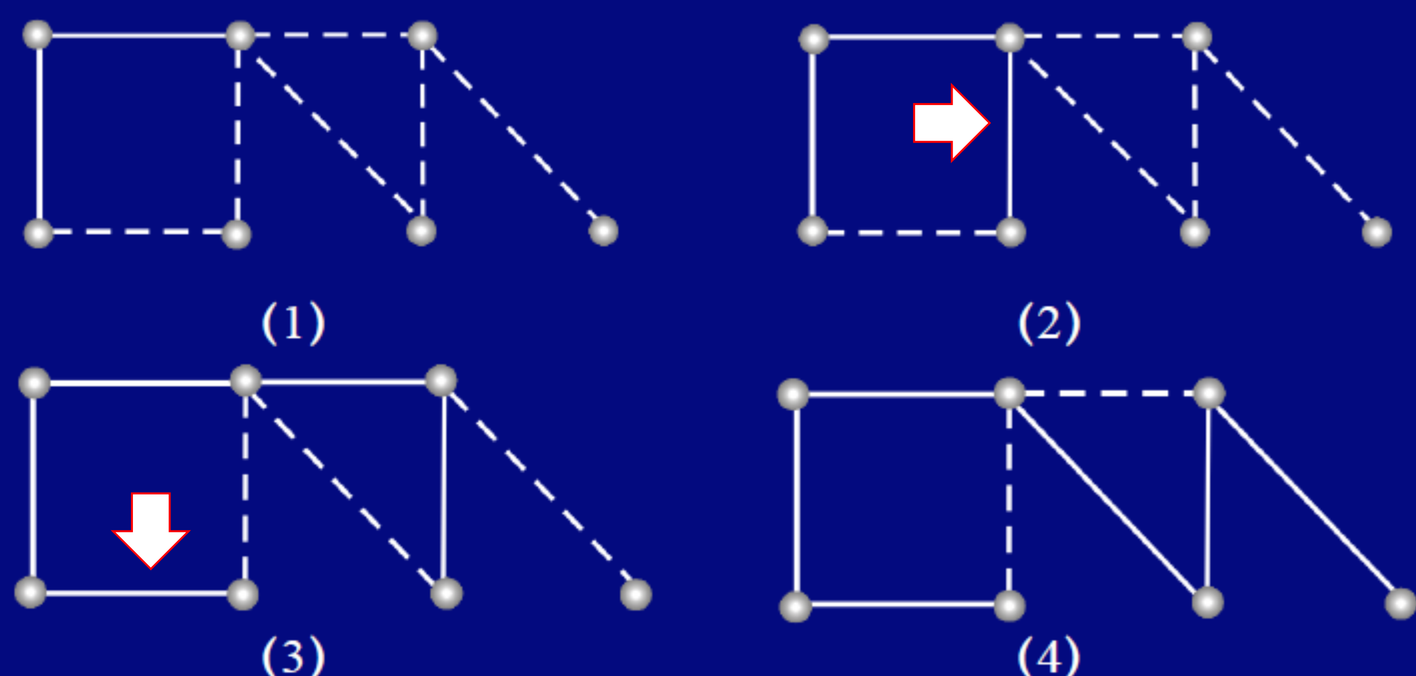


扩大路径证明法

- 方 法（扩大路径证明法）：
  - 思 想：只要 G 中有边（*i.e.* $\delta(G) > 0$），从任一条边开始，通过“扩大路径”方法一定可以构作一极大路径
  - 方 法：设$G = \langle V, E\rangle$为n阶无向图，$E \neq \emptyset$，设Γ_l为G中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，**直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止**，设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为l的路径扩大成了长度为$l + k$的路径），即G的“**极大路径**”，称使用此种方法证明问题的方法为“**扩大路径（证明）法**”

扩大路径证明法（续）

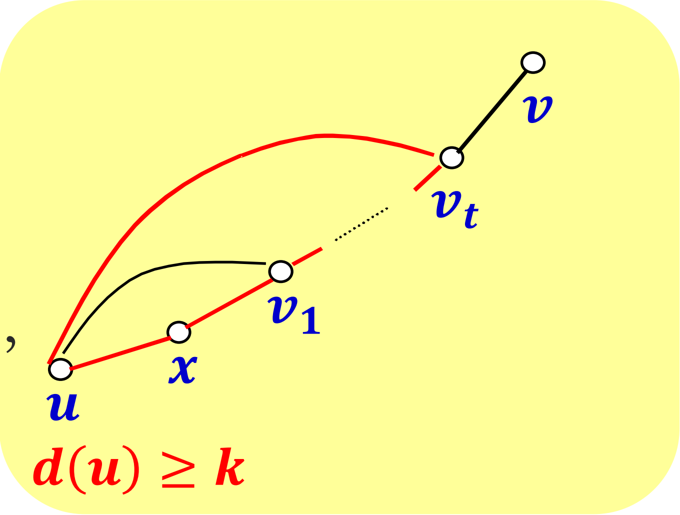
- 由某条路径扩大出的极大路径不惟一
- 极大路径不一定是图中最长的路径



扩大路径证明法（续）

- 定理（最小顶点度与回路）：G是简单图，若$\delta(G)=k(k>1)$则G中必含长度至少为$k+1$的初级回路

- 证明（扩大路径法）：因为图G最小顶点度数非零，一定可以通过扩大路径法找到一条极大路径$(u,x,\cdots,v)$，则u至少与该路径中$k-1$个不同的顶点相邻，且这$k-1$个顶点中不含x，故此$k-1$个顶点中沿该路径离u最远的一个下标一定不小于$k-1$，设其为v_t，则$(u,x,v_1,\cdots,v_t,u)$构成长度不小于$k+1$的初级回路. □



扩大路径证明法（续）

- 练 习：G是简单图且$\delta(G) \geq 3$，试证：图G中一定存在偶圈（即长度为偶数的初级回路）

- 证 明（扩大路径法）：任取图G中一路径，用扩大路径法扩展至最大路径（即扩展至找不到更长的路径为止）$p=(v_0, v_1, \cdots, v_k)$，由于$d(v_0) \geq 3$故可取$v_0$的两个相邻顶点；若此二顶点不在$p$上，则可以取得更长的路径，所以两个顶点都应在$p$上。不妨设此二点不同，为$v_i, v_j$，且$i<j$；由于$v_i, v_j$皆与$v_0$相邻且与$v_1$不同，故$1<i<j$。若$i,j$中有一个为奇数，如$i$，则$p$上$v_0$到$v_i$与边$v_0v_i$构成偶圈（其长度为$i+1$）；如若$i,j$皆为偶数，则$p$上$v_iv_j$段与$v_0v_i$和$v_0v_j$构成一个偶圈（其长度为$j-i+2$）。故$G$中一定存在偶圈. □