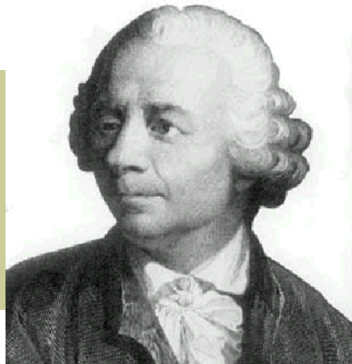


# 离 散 数 学
# Discrete Mathematics



## 第二十讲：欧拉图与哈密顿图

**吴 楠**

南京大学计算机科学与技术系

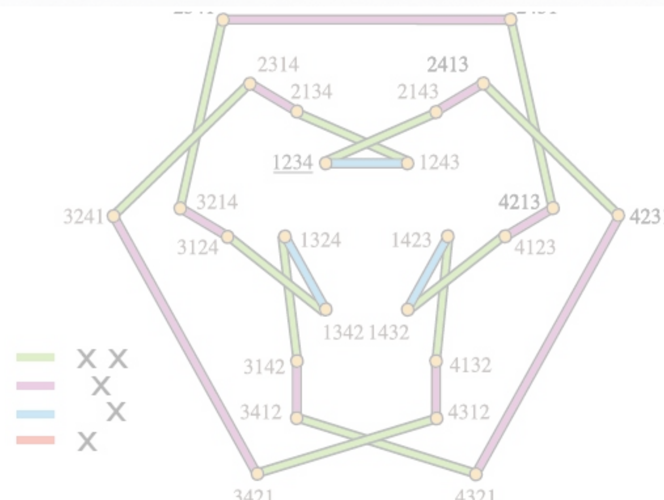
2020年12月24日

# 前 情 提 要

- 图的邻接矩阵表示与计算
- 无向图的连通性
- 连通的度量
- 点连通度与边连通度
- 点连通度与边连通度的关系
- 点连通度与边连通度的上限*

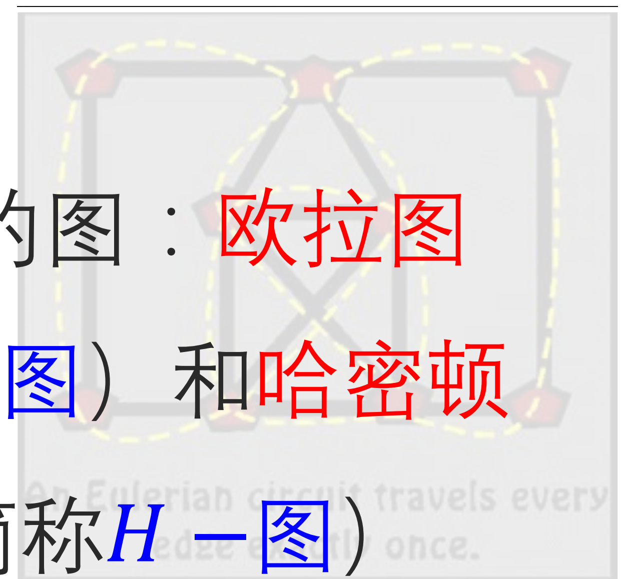
# 本讲主要内容

- 欧拉回路与欧拉图
- 欧拉图的充分必要条件
- 哈密顿回路与哈密顿图
- 哈密顿通路与半哈密顿图
- 哈密顿图的必要条件
- 哈密顿图的充分条件
- 旅行推销员问题(TSP)*



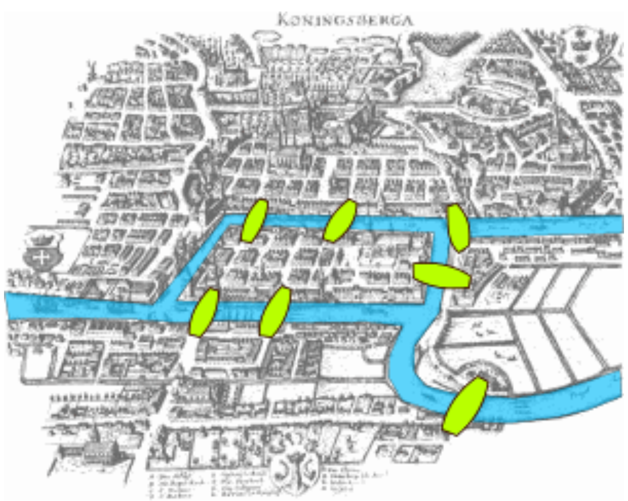
# 图的可遍历性

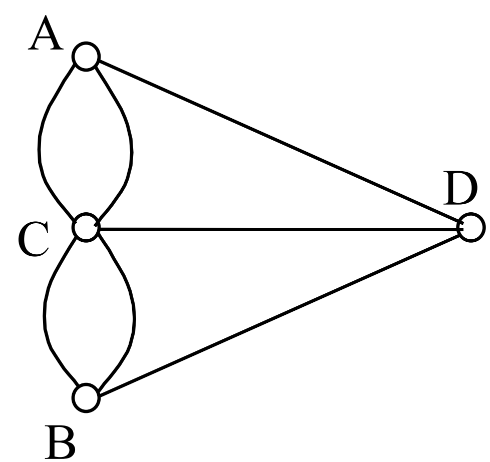
- 本讲讨论图的可遍历性（traversability）
- 遍历在此处指以某种条件（如不重复地）走过图中所有的边或者顶点
- 我们主要讨论两类极为重要的图：欧拉图（Eulerian Graph，简称$E-$图）和哈密顿图（Hamiltonian Graph，简称$H-$图）



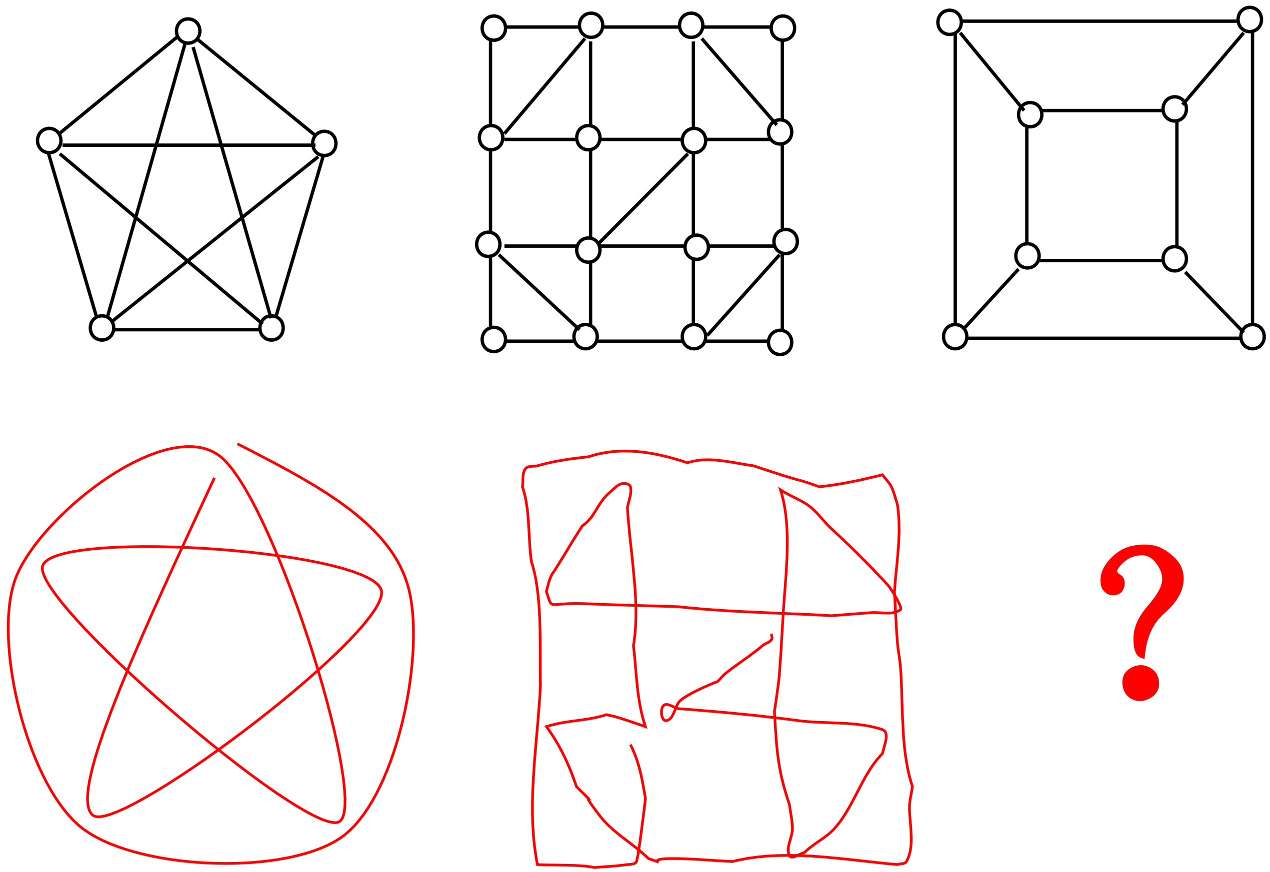
# Königsberg 七桥问题

- Königsberg 七桥问题问题的抽象：
  - 用顶点表示对象——“陆地”
  - 用边表示对象之间的关系——“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”





# “一笔画”问题



# 欧拉通路和欧拉回路

- 定义(**欧拉通路**)：包含图中每条边的简单通路称为欧拉通路
- 定义(**欧拉图**)：包含图中每条边的简单回路称为欧拉回路。如果图$G$中含欧拉回路，则图$G$称为欧拉图（约定$N_n$为欧拉图）
- 定义(**半欧拉图**)：如果图$G$中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则图$G$称为半欧拉图

# 欧拉图的判定定理

- **定理**（**欧拉图判定定理**）：$G$是欧拉图当且仅当$G$是连通图且$G$中每个顶点的度数均为偶数

- **证明：**

  $\Longrightarrow$：$G$显然连通；设$W$是$G$中的欧拉回路，由于$W$为包含所有边的简单回路，则$\forall v \in V(G)$，$d(v)$必为$v$在$W$上出现数的2倍；

  $\Longleftarrow$：可以证明：**引理(1)** $G$中所有的边可以分为若干边不相交的初级回路；**引理(2)** 这些回路可串成一个欧拉回路

# 欧拉图的判定定理（续）

- 引理1：若连通图$G$中各顶点度皆为偶数，则$G$中所有的边均包含在若干边不相交的初级回路中

- **证明：** 对$G$的边数$m$进行归纳
  - Basis：当$m = 1$时$G$是环，结论成立；
  - I.H.：假设$m \le k(k \ge 1)$时结论成立；
  - Ind. Steps：考虑$m = k + 1$的情况：注意$\delta(G) > 1$，$G$中必含初级回路（见“扩展阅读：扩大路径证明法*”），设$C$是一个初级回路，令$G' = G - E(C)$，设$G'$中含$s$个连通分支，显然每个连通分支内各点均为偶度（包括0），且边数不大于$k$。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的初级回路中，注意各连通分支以及$C$两两均无公共边，故结论成立. □

# 欧拉图的判定定理（续）

- 引理2：若连通图$G$中所有的边均包含在若干边不相交的初级回路中，则$G$中含欧拉回路
  - **证明：** 对$G$中初级回路个数$d$进行归纳
    - Basis：当$d=1$时显然成立；
    - I.H.：假设$d \le k(k \ge 1)$时结论成立；
    - Ind. Steps：考虑$d=k+1$的情况：按某种方式对$k+1$个初级回路排序，令$G'=G-E(C_{k+1})$，设$G'$中含$s$个连通分支，则由已知条件，每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的初级回路中，且回路个数不大于$k$。由归纳假设，每个非平凡连通分支$G_i$均为欧拉图，设其欧拉回路是$C_i{'}$；（续后）

# 欧拉图的判定定理（续）

- 引理2：若连通图$G$中所有的边均包含在若干边不相交的初级回路中，则$G$中含欧拉回路
  - **证明：** 对$G$中初级回路个数$d$进行归纳（续）
    - 注意原来的$G$为连通图，所以$C_{k+1}$与诸$C_i{}'$都有公共点。于是，$G$中的欧拉回路可构造如下：从$C_{k+1}$上任一点(设为$v_0$)出发开始遍历$C_{k+1}$上的边，每当遇到一个尚未遍历的$C_i{}'$与$C_{k+1}$的交点(设为$v_i{}'$)，则转而遍历$C_i{}'$上的边，回到$v_i{}'$再继续沿$C_{k+1}$进行即可. 引理得证. □

# 关于欧拉图的等价命题

- 设$G$是非平凡连通图，以下三个命题等价：

(1) $G$是欧拉图；

(2) $G$中每个顶点的度数均为偶数；

(3) $G$中所有的边包含在相互没有公共边的初级回路中

# 半欧拉图的判定

- 定理（**半欧拉图判定定理**）设$G$是连通图，$G$是半欧拉图当且仅当$G$恰有两个奇度顶点
- **证明：**

  $\Rightarrow$：设$P$是$G$中的欧拉通路(非回路)，设$P$的始点与终点分别是$u,v$，则对$G$中任何一点$x$，若$x$非$u,v$，则$x$的度数等于$x$在$P$中出现次数的2倍，而$u,v$的度数则是它们分别在$P$中间位置出现的次数的2倍再**加1**；

  $\Leftarrow$：设$G$中两个奇度顶点是$u,v$，则$G+(u,v)$是欧拉图，设欧拉回路是$C$，则$C$中含$(u,v)$边，$\therefore$ $G-(u,v)$是$G$中的欧拉通路. □

**（这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点）**

# 课堂练习

- 试证明：若$G$为欧拉图，则$G$中无桥

**证明：** 反设$G$中有桥，且$e=(u,v)$为桥，则$G-e$中必含2个连通分支$G_1$和$G_2$；因为$G$是欧拉图，故$d_G(u)$和$d_G(v)$皆为偶数，故去掉一边后$d_{G_1}(u)$和$d_{G_2}(v)$皆为奇数；注意到此时两连通分支中其它顶点度数皆为偶数，这与握手定理的推论（任意图中奇度顶点的个数为偶数）矛盾。因此假设错误，$G$中无桥. □

# 构造欧拉回路

- 如何构造一条欧拉回路？

- 思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中

# 构造欧拉回路的Fleury算法

- **算法（Fleury 1883）**：
  - **输入**：欧拉图$G$
  - **输出**：简单通路$P = v_0e_1v_1e_2, \cdots, e_iv_ie_{i+1}, \cdots, e_mv_m$，其中包含了$E(G)$中所有的元素
  - **过程**：

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，并令$P_0 = v_0$；

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2, \cdots, e_iv_i$，按照下列原则从$E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选择$e_{i+1}$：

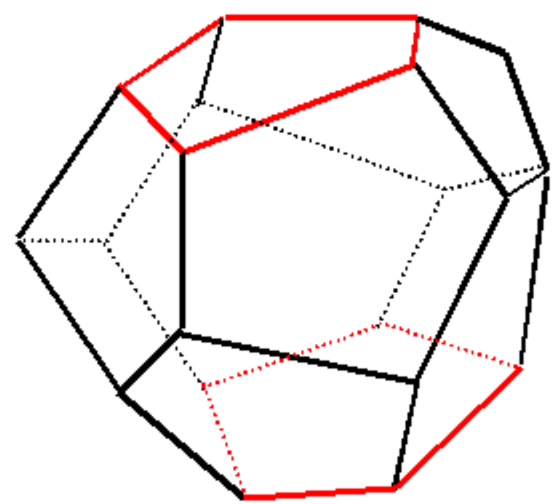
- ① $e_{i+1}$与$v_i$相关联；
- ② 除非别无选择，否则$e_{i+1}$不应是$G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中的割边

(3) 反复执行第(2)步，直到无法执行时终止.

# 周游世界的游戏

- 1859年英国数学家哈密顿(W. Hamilton)提出了一种名为“周游世界”的游戏：

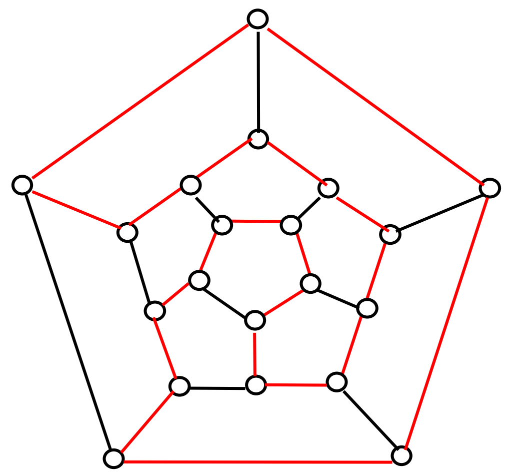
用一个正十二面体的二十个顶点代表二十个大城市，要求沿着棱，从一个城市出发，经过每个城市恰好一次，然后回到出发点



# 哈密顿回路与哈密顿图

- 定义（$\boldsymbol{H}-$**回路与**$\boldsymbol{H}-$**图**）：经过图$G$中所有顶点的初级回路称为哈密顿回路，若$G$中含哈密顿回路，则称$G$为哈密顿图（Hamiltonian Graph，$H-$图）

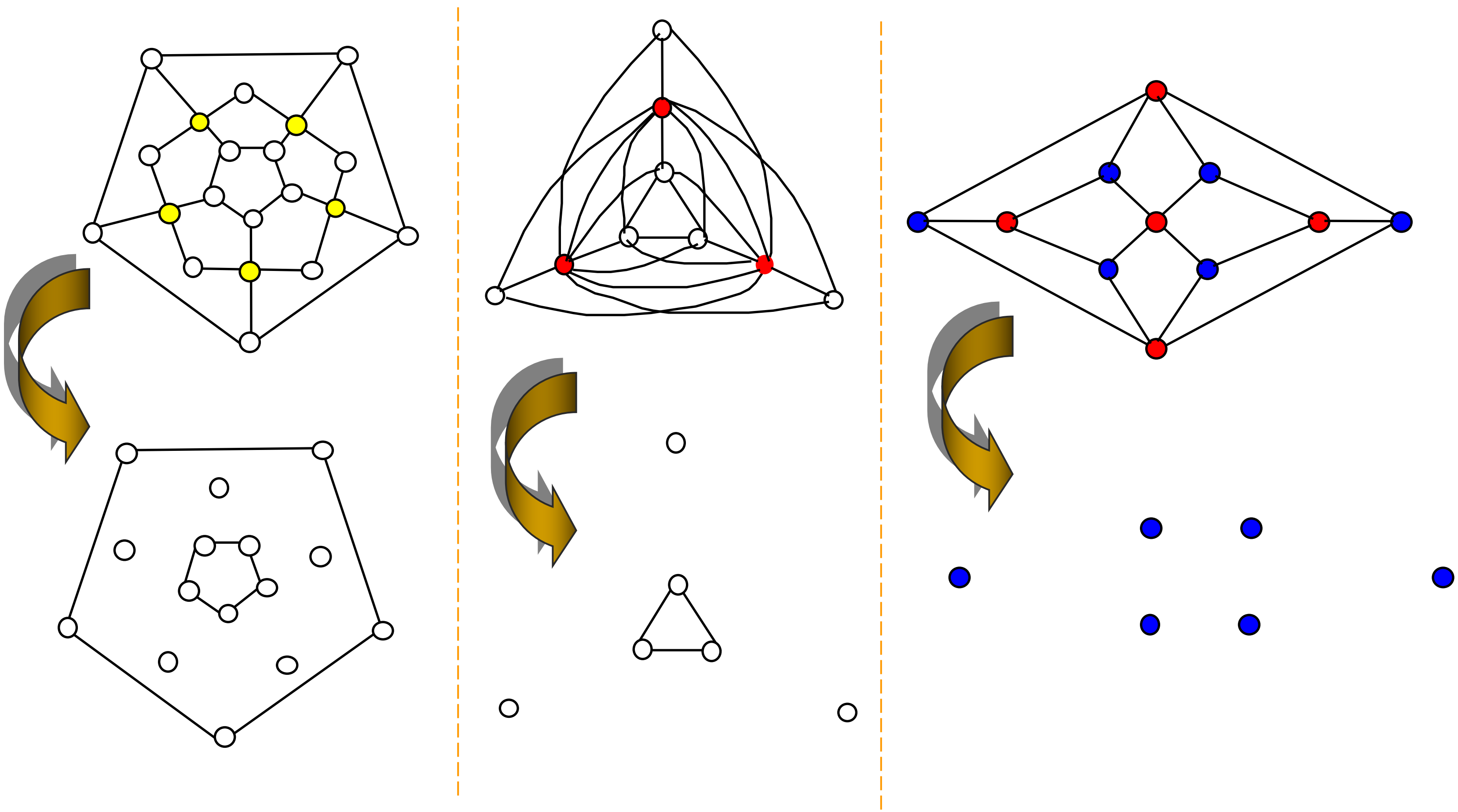
- 定义（**半**$\boldsymbol{H}-$**图**）：经过图$G$中所有顶点的初级通路称为哈密顿通路，若$G$中含哈密顿通路，但不含哈密顿回路，则称$G$为半哈密顿图



# 哈密顿图的必要条件

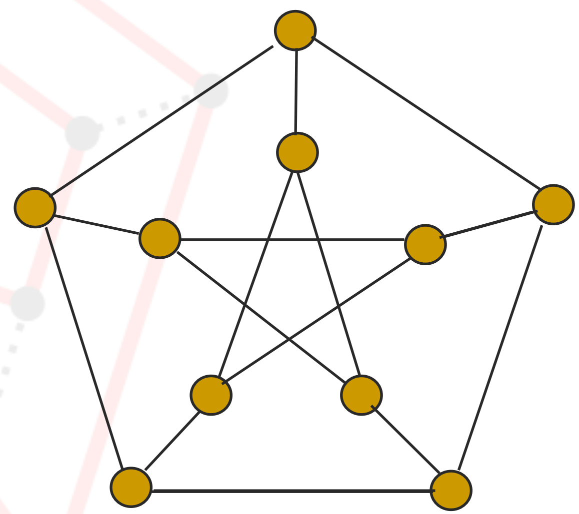
- 注意：
  - 任何一个哈密顿图都可以看成是一个初级回路(即哈密顿回路)再加上连接该回路上顶点对的若干条边
  - 从初级回路上删除$k$个顶点，最多形成$k$个连通分支
  - 向一个图中已有的顶点之间加边不会增加连通分支
- 因此：若$G$是哈密顿图，则对$V_G$的任意非空真子集$V_1$，图$G-V_1$的连通分支数不大于$V_1$中的元素个数，即：$\boxed{p(G-V_1)\le|V_1|}$

# 哈密顿图的必要条件（续）



# 必要条件的局限性

- 必要条件一般只能判定一个图不是哈密顿图
  - Petersen图满足上述必要条件，但它不是哈密顿图



- 有无可能找到哈密顿图的充分条件？

# 顶点对度数和与图的连通

- 事实：只要任意顶点对的度数之和足够大，图一定连通
- 定理：设$G$是$n$阶无向简单图（$n \geq 2$），若$G$中任意不相邻的顶点对$u, v$均满足：

$$\boxed{d(u) + d(v) \geq n - 1} \qquad \text{条件}(*)$$

则$G$是连通图

- **证明：** 假设$G$不连通，则至少含2个连通分支，设为$G_1$，$G_2$。取 $x \in V_{G_1}$，$y \in V_{G_2}$，则 $d(x) + d(y) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) \leq n - 2$ ($n_i$是$G_i$之顶点数)，矛盾！□

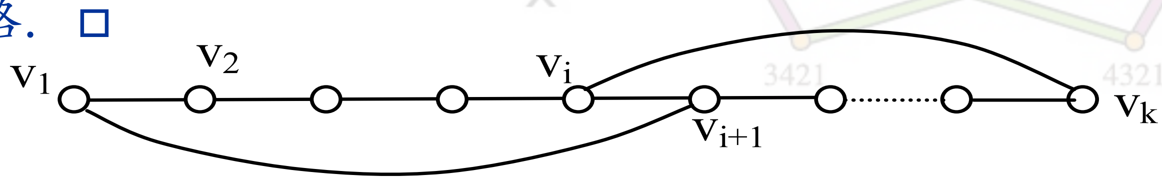
# 将极大通路改造成回路

- 引理：若图$G$满足**条件(*)**，设$\Gamma = v_1v_2 \dots v_{k-1}v_k$是$G$中不含所有顶点的极大路径（i.e. $\Gamma$的2端点均不与$\Gamma$外任意顶点相邻）且$k < n$，则$\Gamma$中所有顶点可构成初级回路

- **证明：** (1) 若$v_1$，$v_k$相邻，结论显然成立；

(2)若$v_1$，$v_k$不相邻，令$T = \{v_j | v_j与v_k相邻\}$，$S = \{v_i | v_1与v_{i+1}相邻\}$；
由条件，$|S| + |T| = d(v_1) + d(v_k) \geq n - 1$；

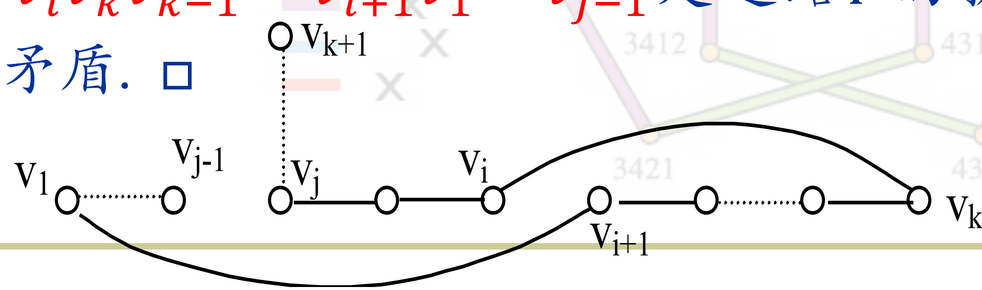
$\because v_k \notin S \cup T$，$\therefore |S \cup T| \leq k - 1 < n - 1$，由容斥原理，$|S \cap T| = |S| + |T| - |S \cup T| > 0$，即$S \cap T$非空，令$v_i \in S \cap T$，则$v_{i+1}$与$v_1$相邻，$v_i$与$v_k$相邻。于是$C = v_1 \cdots v_i v_k v_{k-1} \cdots v_{i+1} v_1$是包含$\Gamma$中所有顶点的初级回路. □



# 半哈密顿图的充分条件

**条件(*) 是半哈密顿图的充分条件**

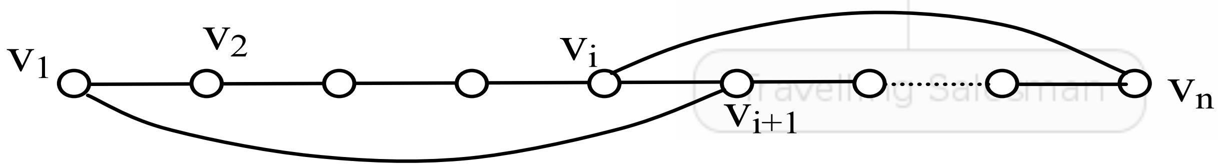
- **证明**：若条件(*)成立，图中的最大路径一定是哈密顿通路
  - 假设$\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_k$是一条最大路径，但$k < n$，则根据上述引理，可以将$\Gamma$改造为一初级回路$C$。设$v_{k+1}$是$C$以外的顶点。因为$G$是连通图，$v_{k+1}$与$C$中的顶点必有通路，设其中最短路径与$\Gamma$的交点是$v_j$（显然异于$v_1$，$v_k$）。则$\Gamma' = v_{k+1} \cdots v_j \cdots v_i v_k v_{k-1} \cdots v_{i+1} v_1 \cdots v_{j-1}$是通路$\Gamma$的扩大，与$\Gamma$为最大路径矛盾. □



# 哈密顿图的充分条件

- **定理（Ore 1960）**：设$n$（$n \geq 3$）阶图$G$为无向简单图，若$G$中任意不相邻的顶点对$u, v$满足：$\boldsymbol{d(u)+d(v) \geq n}$，则$G$为$H-$图

- **证明：** 显然$G$是半哈密顿图，设$\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$是$G$中的哈密顿通路。若$v_1$，$v_n$相邻，结论显然成立；否则令$T = \{v_j | v_j 与 v_n 相邻\}$，$S = \{v_i | v_1 与 v_{i+1} 相邻\}$；由条件，$|S| + |T| = d(v_1) + d(v_n) \geq n$；$\because v_n \notin S \cup T$，$\therefore |S \cup T| \leq n-1 < n$，由容斥原理，$|S \cap T| = |S| + |T| - |S \cup T| > 0$，即$S \cap T$非空，令$v_i \in S \cap T$，则$v_{i+1}$与$v_1$相邻，$v_i$与$v_n$相邻。于是$C = v_1 \cdots v_i v_n v_{n-1} \cdots v_{i+1} v_1$是哈密顿回路. □



# 有关哈密顿图充分条件的讨论

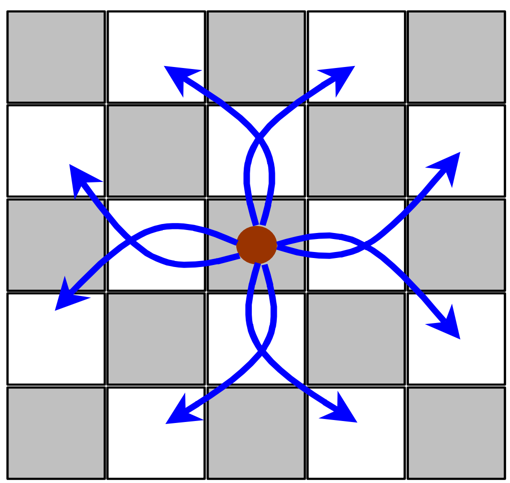
- 此充分条件的前提条件中必须包括$n \geq 3$，而对半哈密顿图只需要$n \geq 2$
- 显然：$\boldsymbol{d(v) \geq n/2}$是$d(u)+d(v) \geq n$的充分条件，故其也是哈密顿图的充分条件（**Dirac 1952**）
- 加边总可以使非哈密顿图变成哈密顿图（且此过程中一定存在一个临界状态）
  - 如果仅在满足$d(u)+d(v) \geq n$的顶点$u, v$之间加边，图的哈密顿性质不会改变

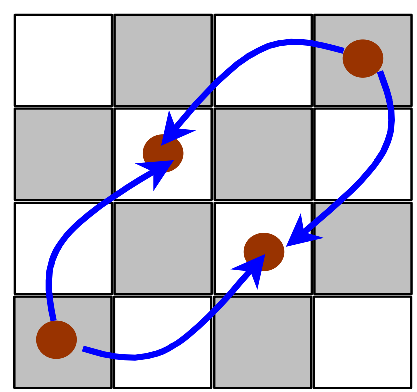
# 哈密顿图的一个充分必要条件*

- 定义（**闭图**）：设$G$是$n$阶简单图，若两个不相邻的顶点$u, v$满足$d(u) + d(v) \geq n$，则将新边$(u, v)$加入$G$中，得到$G + (u, v)$，如此加边直到无边可加。这样得到的图称为图$G$的闭图（closure），记作$\hat{G}$
- 定理（**Bondy & Chvátal 1976**）：$G$为$H-$图当且仅当$\hat{G}$为$H-$图（证明略）

# 哈密顿图的应用：马的遍历

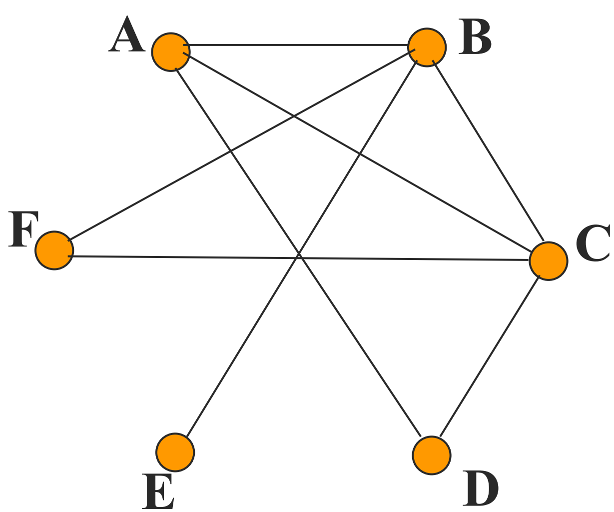
- 在缩小为4×4或5×5的国际象棋棋盘上，马（knight）能否从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点？（p.596第55题）

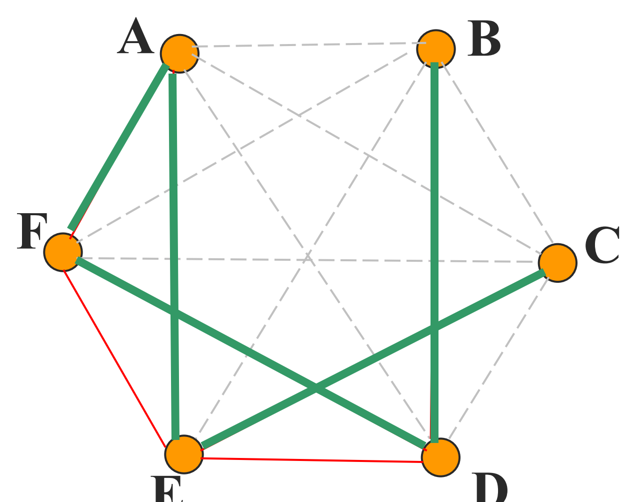




# 安排考试日程

- 问题：在6天里安排6门课 $A,B,C,D,E,F$ 的考试，每天考1门。假设每人选课的情况有如下的4类：$DCA$，$BCF$，$EB$，$AB$。如何安排日程，使得没有人必须连续两天都有考试？



# 课堂练习

- 11个小朋友坐成一个圆圈做游戏，要求每次游戏每个小朋友有完全不同的邻座，这样的游戏共能做几次？

**解：** 每个小朋友看作图的顶点，小朋友的邻座关系看作边。小朋友每次游戏的就坐方式对应一个哈密顿回路。两次游戏中每个小朋友有完全不同的邻座对应着两个没有公共边的哈密顿回路。因为每个小朋友都可以与其余小朋友邻座，所以本问题转化为在完全图$K_{11}$中找出所有没有公共边的哈密顿回路的个数。$K_{11}$中共有$11\times\frac{11-1}{2}=55$条边，每条哈密顿回路长度为11，故最多有$\frac{55}{11}=5$条没有公共边的哈密顿回路，因此共可做游戏5次.

# 旅行推销员问题(TSP) *

- 问题：$n$个城市间均有道路，但距离不等，旅行推销员从某地出发，走过其它$n-1$个城市一次且只一次，最后返回出发城市，如何选择最短路线？
- 模型：
  - 构造无向带权图$G$，$V_G$中的元素对应于每个城市，$E_G$中每个元素对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示；
  - 问题的解对应于$G$中权最小的哈密顿回路；
  - $G$是带权完全图，总共有$\frac{1}{2}(n-1)!$条不同的哈密顿回路。问题是如何从这$\frac{1}{2}(n-1)!$条中找出最短的一条

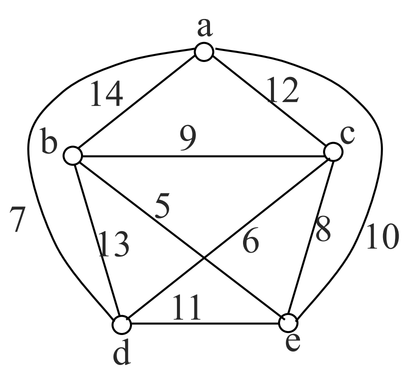
(事实：含20个顶点的完全图中不同的哈密顿回路有约$6.082\times10^{16}$即约6万万亿条，若机械地检查，每秒处理10万条，约需2万年)

# TSP的一个近似算法*

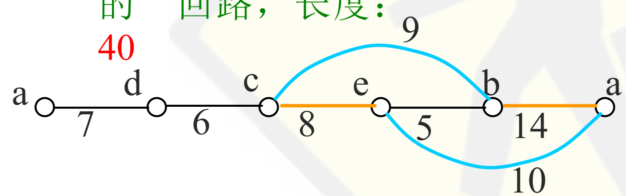
## 算法思路

(1) 找“较好的”哈密顿回路（总选关联的最小权边）

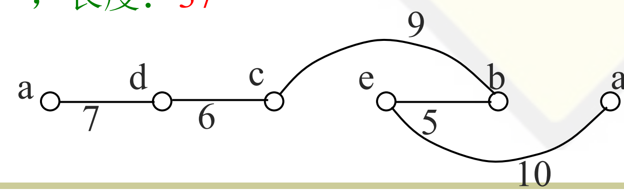
(2) 改进：如果在已有回路中$W(v_i, v_j) + W(v_{i+1}, v_{j+1}) < W(v_i, v_{i+1}) + W(v_j, v_{j+1})$，则分别用边$v_i v_j$和$v_{i+1} v_{j+1}$替代$v_i v_{i+1}$和$v_j v_{j+1}$。



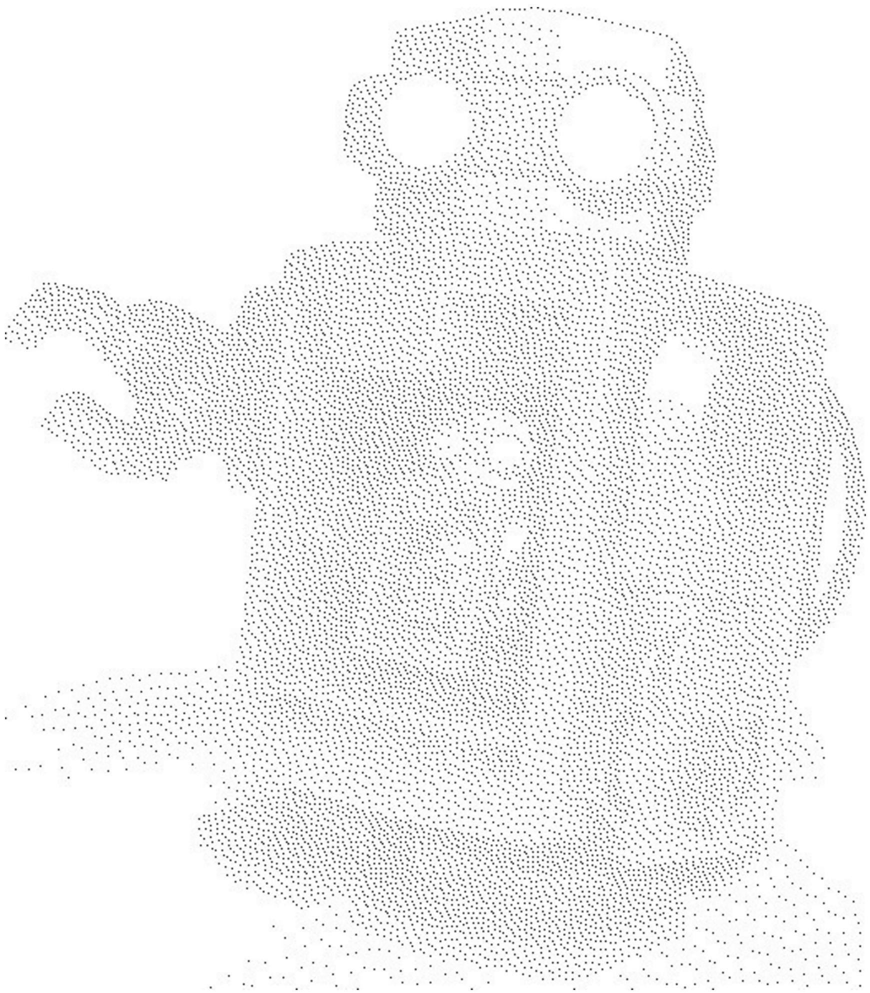

从a出发的“较好的”回路，长度：40

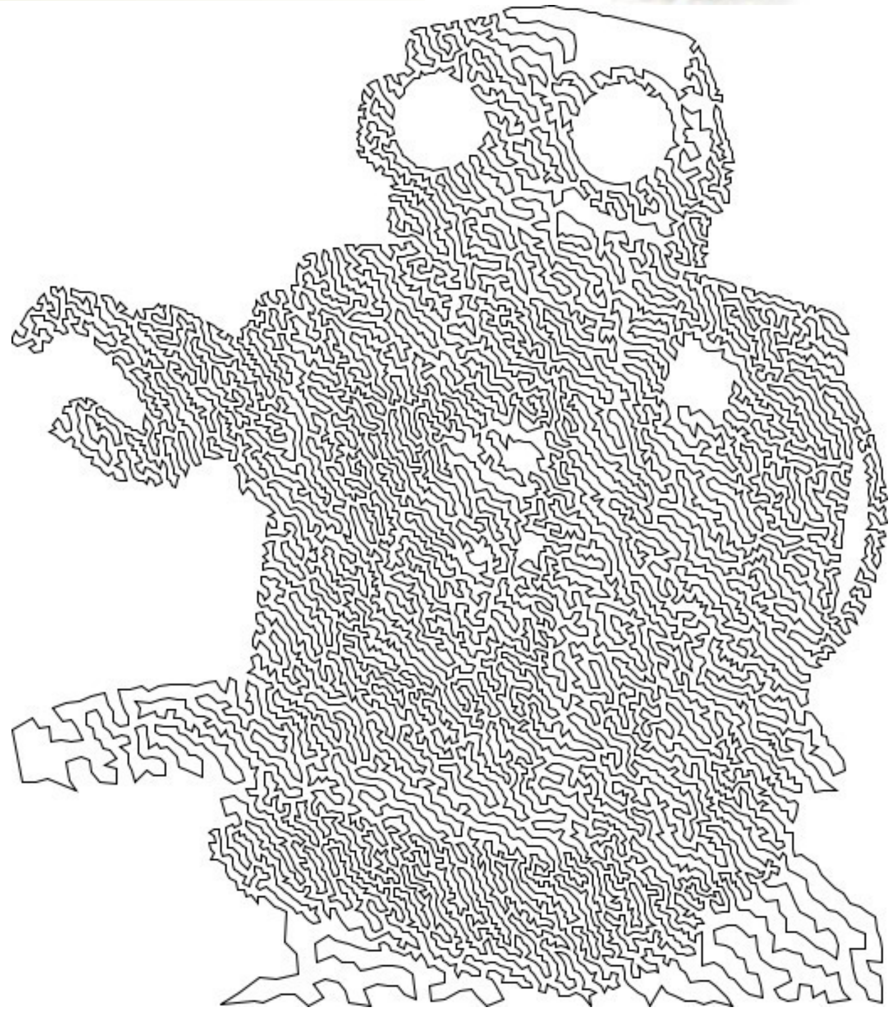



经改进的回路，长度：37

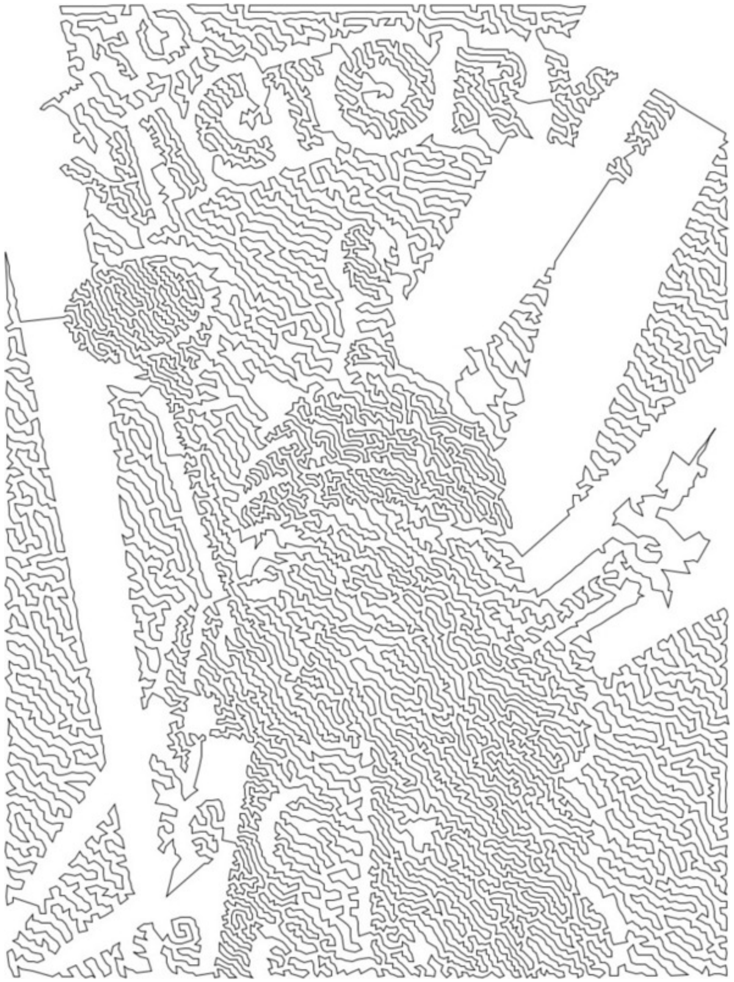


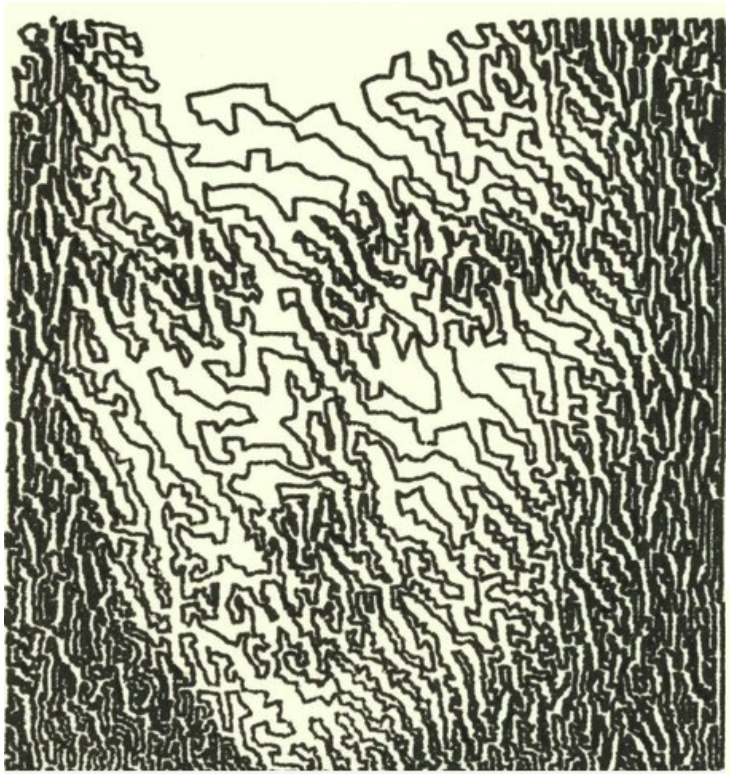
# TSP Solving Contest*





# TSP Solving Contest* （续）



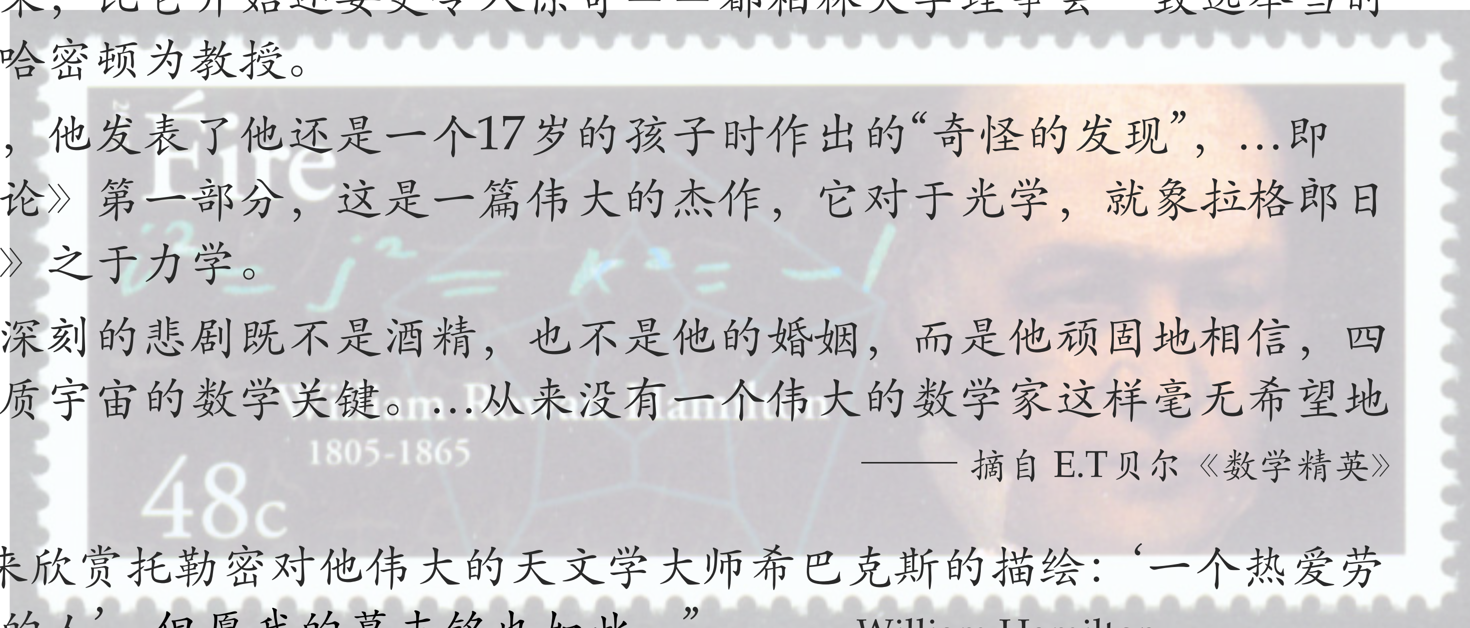


# *Sir* William Hamilton (1805—1865)

爱尔兰历史上最伟大的科学家。

关于哈密顿早期的才能的传说，读起来象一篇拙劣的虚构的故事，但它是真实的。(例如，在十岁时，他差不多掌握了大多数主要东方语言)。

哈密顿在进大学以前从未上过学…(他)轻而易举地取得第一名，进入三一学院。大学生涯的结束，比它开始还要更令人惊奇——都柏林大学理事会一致选举当时22岁的大学生哈密顿为教授。




在23岁时，他发表了他还是一个17岁的孩子时作出的“奇怪的发现”，…即《光线系统理论》第一部分，这是一篇伟大的杰作，它对于光学，就象拉格郎日的《分析力学》之于力学。

哈密顿最深刻的悲剧既不是酒精，也不是他的婚姻，而是他顽固地相信，四元数是解决物质宇宙的数学关键。…从来没有一个伟大的数学家这样毫无希望地错误过。

—— 摘自 E.T 贝尔《数学精英》

“我长期以来欣赏托勒密对他伟大的天文学大师希巴克斯的描绘：‘一个热爱劳动和热爱真理的人’。但愿我的墓志铭也如此。” —— William Hamilton

# Tips：欧拉回路的计数

- 求一个给定的有限（有向或无向）图中含有的欧拉回路的个数称欧拉回路计数问题
- 有向图$G$的欧拉回路计数由BEST（de **B**ruijn, van **A**ardenne-**E**hrenfest, Cedric **S**mith and **T**utte）定理给出：$ec(G) = t_w(G)\prod_{v\in V}(d(v)-1)!$，其中$t_w(G)$表示$G$的树形图（arborescence）的计数
- 无向图$G$的欧拉回路计数问题要复杂得多，它是一个著名的$\#P-$完全问题，对完全图$K_n$和完全二部图$K_{n,n}$，有：

$$ec(K_n) = 2^{(n+1)/2}\pi^{1/2}e^{-n^2/2+11/12}n^{(n-2)(n+1)/2}\left(1+O(n^{-1/2+\epsilon})\right);$$

$$ec(K_{n,n}) = (n/2-1)!^{2n}2^{n^2-n+1/2}\pi^{-n+1/2}n^{n-1}\left(1+O(n^{-1/2+\epsilon})\right).$$

# 本次课后作业（提交日期如下）

- 教材内容：[Rosen] 10.5 节
- 课后习题：
  - Problem Set 20A：欧拉图部分（12月28日提交）
  - Problem Set 20B：哈密顿图部分（12月31日提交）