Problem Set 20B

Problem 1

图1没有哈密顿回路, 去掉b点之后, 有两个连通分支
并且图1有三个点的度数为1, 对于度数为1的点, 必须要作为入口或者出口
而入口和出口一共只有两个, 三个度数为1的点过多, 不可能存在哈密顿通路

图2没有哈密顿通路, 去掉o, j, q, m四点之后, 有六个连通分支, 多于$4+1=5$个

图3有哈密顿通路, 一条通路如图

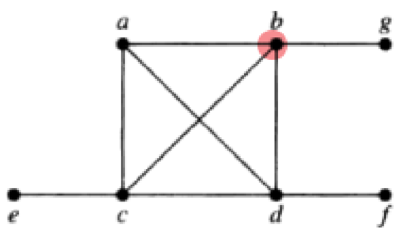


图 1: (1)

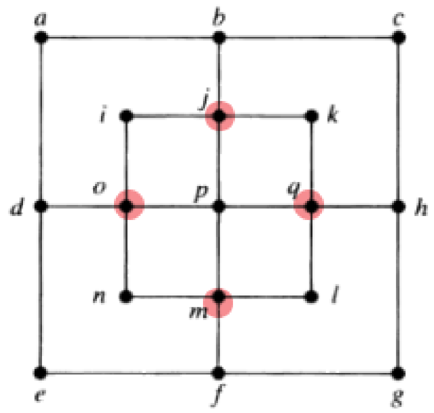


图 2: (2)

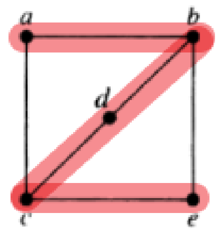


图 3: (3)

Problem 2

$$\therefore m \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 = \frac{n^2-3n+6}{2}$$

$$\therefore \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \geq n^2 - 3n + 6$$

用反证法, 假设其中有两点u_1, u_2不相邻, 它们的度数之和$d(u_1) + d(u_2) \leq n-1$

我们可知,
该图 $\leq u_1$和u_2的度数和恰为$n-1$的图 $\leq$ 恰为$n-1$且剩余点构成全图的图

$\therefore \sum_{v\in V(G)} d(v) \le 2(n-1) + \sum_{v\in V(G)-u_1,u_2} d(v) \le 2(n-1)+(n-2)(n-3) = n^2-3n+4$

$\therefore$ 与 $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m \ge n^2-3n+6$矛盾

$\therefore$ 任何不相邻两点u, v的度数和$d(u)+d(v) \ge n$

$\therefore G$是哈密顿图

Problem 3

当$n=2$时,对于的2维立方体图是正方形,如图易知有哈密顿回路

假设当$n=k$时,k维立方体图Q_k有哈密顿回路

当$n=k+1$时,对于$k+1$维立方体图Q_{k+1},我们可知

Q_k有2^k个顶点,$2^{k-1}k$条边,且是$k-$正则图

Q_{k+1}是由两个k维立方体图Q_k组合,再让这两个同构的Q_k对应点进行一一相连形成的,这样的Q_{k+1}有$2\times 2^k = 2^{k+1}$个顶点,$2\times 2^{k-1}k + 2^k = 2^k(k+1)$条边,是$(k+1)-$正则图,满足条件

由归纳假设可知这两个Q_k有哈密顿回路,分别设为C_1和C_2

设其中一个Q_k有相邻的两点v_1和u_1,另一个Q_k有同构的两点v_2和u_2

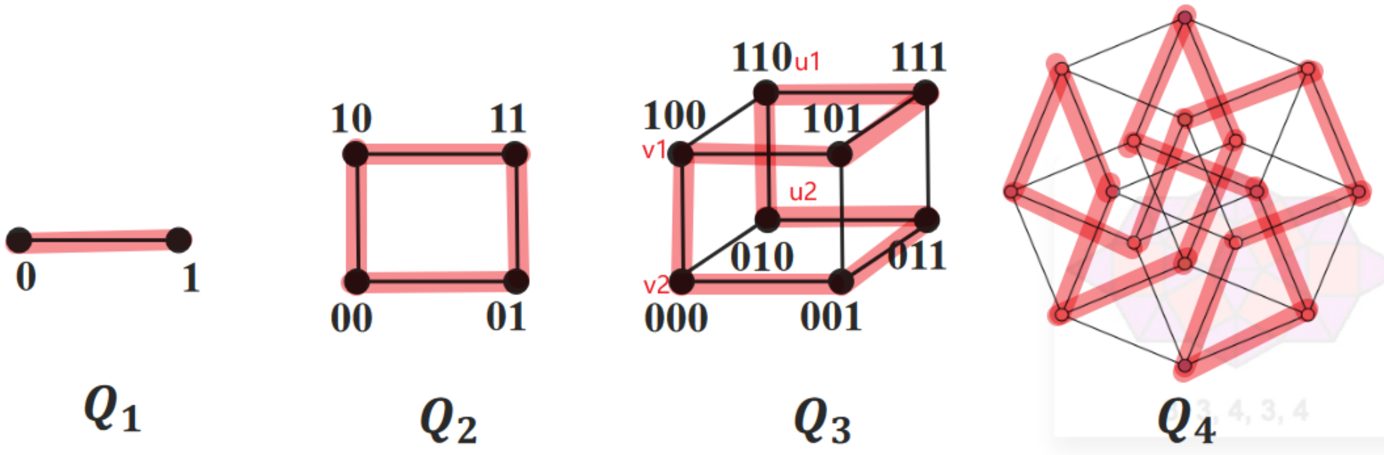
$\therefore C_1 - v_1u_1$和$C_2 - v_2u_2$是同构的两个哈密顿通路,分别设为L_1和L_2

$\because v_1$和v_2在Q_{k+1}中相邻,u_1和u_2在Q_{k+1}中相邻

$\therefore$ 可以构造哈密顿回路$v_1L_1u_1u_2L_2v_2v_1$,如图

$\therefore Q_{k+1}$也是哈密顿图

$\therefore$ 综上$n>1$的n维立方体Q_n,总是有哈密顿回路

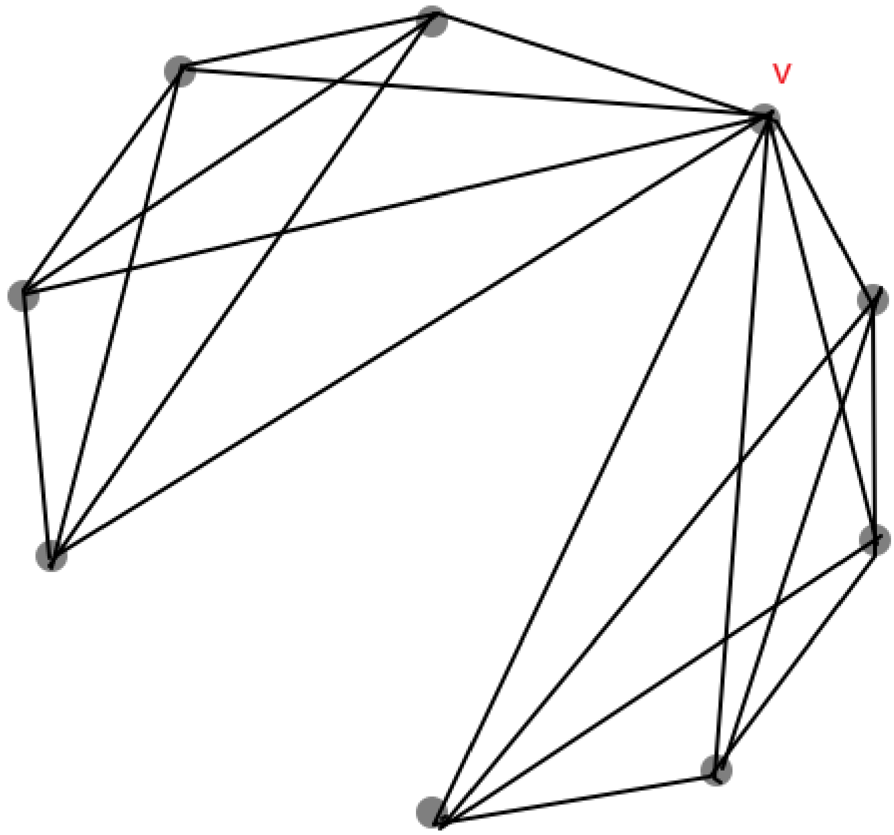


Problem 4

(1)

不一定存在哈密顿回路,如图,

9阶图G的每一点的度数都$\geq \dfrac{9-1}{2}=4,$
但去掉点v后连通分支数变为$2>1,$不可能存在哈密顿回路



(2)

对于G中任意两点u,v,有$d(u)+d(v)\geq 2\delta(G)=V(G)-1=n-1$

$\therefore$ 由半哈密顿图的充分条件可知,G一定存在哈密顿通路

Problem 5

将这15们课程作为一个图的15个点,两个点相邻当且仅当任课老师是同一个人

$\therefore$ 这个图的任意一个点的度数 ≤ 8

$\therefore$ 这个图的补图的任意一个点的度数 ≥ 7

$\therefore$ 补图的任意两个点的度数和$d(u)+d(v)\geq 14=15-1=n-1$

$\therefore$ 可知补图必定存在一个哈密顿通路,且这个哈密顿通路满足:
相连的两点的任课老师必定不是同一个人

$\therefore$ 按照这个通路安排考试时间,则可以满足题意