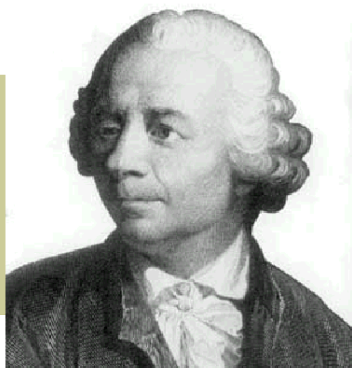
南京大學 NANJING UNIVERSITY



离散数学
Discrete Mathematics

第六讲：二元关系

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020年10月22日

前 情 提 要

- 数学基础的危机与公理化集合论
- 集合的概念
- 子集、空集与幂集
- 集合的运算与集合代数
- 集合公式的几种基本证明方式

本讲主要内容

- 引子：集合与关系
- 有序对
- 笛卡尔积
- 二元关系
- 关系的运算

引子：集合与关系

- 由于集合模型中元素的无序性，“序”的刻划是无法直接实现的，但现实世界中存在着大量的有序关系，这就需要在集合论的基础上建立一种描述“序”的模型：

关 系

（RELATION）

有序对

- 序（order）是一个非常重要和基础的数学概念，它刻划出对象的可比性。最简单的序关系可通过有序对（ordered pair，或称序偶）来定义
- 定义：设a,b为对象，二元运算$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$称为$a$与$b$的有序对指$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c\wedge b=d)$。这里称$a$为$(a,b)$的第一分量，称$b$为$(a,b)$的第二分量
- 集合论作为数学的基础，可以构造数学的其它内容。如何利用集合构造有序对呢？

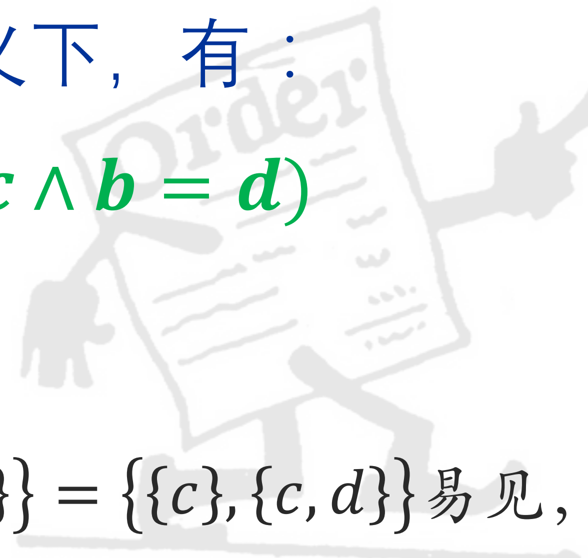
有序对（续）

- 定义（Kuratowski, 1921）：

$$\text{令 } (a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

- 命题：在上述有序对的集合定义下，有：

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a=c \wedge b=d)$$



- 证明*：

"$\Leftarrow$"，即$(a=c\wedge b=d) \Longrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$易见，

有序对（续）

“⇒”：

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$\text{令}\begin{cases}\prod_1 Z = \cup\cap Z\\ \prod_2 Z = \cup(\cup Z-\cap Z)\end{cases}$$

$$\text{故}\begin{cases}\prod_1(a,b) = a\\ \prod_2(a,b) = \begin{cases}\emptyset, & \text{当}a=b\\ b, & \text{当}a\neq b\end{cases}\end{cases}$$

设$(a,b)=(c,d)$，则$\prod_1(a,b)=\prod_1(c,d)$，

从而$a=c$，且$(a,b)=(a,d)$，

下面证$b=d$

$Case1$：$a=b$

从而$(a,b)=(a,d)\Rightarrow\{a,b\}=\{a,d\}\Rightarrow\{a\}=\{a,d\}\Rightarrow d\in\{a\}\Rightarrow d=a\Rightarrow d=b$

有序对（续）

$$Case2: \ a \neq b \qquad\qquad (a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

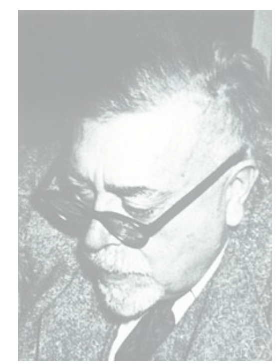
若$c=d$则$a=b$(证明同$Case1$)故设$c \neq d$

$$b = \prod\nolimits_2(a,\ b) = \prod\nolimits_2(c,\ d) = d$$

$$\therefore b = d \qquad \square$$

易见$\{a,\ b\}$不能成为有序对，$\{x,\ \{y\}\}$也不行。

- 有序对最早的集合定义（Wiener, 1914）：



$$令\ (a,b) = \{\{\{a\},\emptyset\},\{\{b\}\}\}$$

笛卡尔积

- 任给集合A与B，令$A \times B = \{(a,b) | a \in A \land b \in B\}$，

  $A \times B$称为A与B的笛卡尔积（Cartesian Product）

- 例：设$A = \{1,2,3\}$，$B = \{a,b\}$，则：

  $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

- 若A与B是有限集合，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

关于笛卡尔积的若干命题

- (1) $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$
- (2) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow [(A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B)]$
- (3) 分配律：$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

Cogito, ergo sum.
吾思故吾在
—René Descartes†
[法]笛卡尔

关于笛卡尔积的若干命题（续）

- 证明(1)：对于任意集合A，由笛卡尔积的定义，$A\times\emptyset=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in\emptyset\}=\emptyset$，同理可证$\emptyset\times A=\emptyset$. □

- 证明(2)："$\Leftarrow$"：*Trivial*；"$\Rightarrow$"：欲证$A\times B=B\times A\Rightarrow[(A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B)]$，只需证$[(A\neq\emptyset)\wedge(B\neq\emptyset)\wedge(A\neq B)]\Longrightarrow A\times B\neq B\times A$.

$\because A\neq B\quad\therefore A-B\neq\emptyset\vee B-A\neq\emptyset$；

关于笛卡尔积的若干命题（续）

- 证明(2)（续）：不妨设$A-B\neq\emptyset$，且取$a\in A-B$，$b\in B$并假设$(a,b)\in A\times B=B\times A$，即有$(a,b)\in B\times A$，故有$a\in B$，与$a\in A-B$矛盾，故假设错误，$A\times B\neq B\times A$. □
- 证明(3)：$A\times(B\cap C)=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in(B\cap C)\}$

$$=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\wedge b\in C\}$$

$$=\{(a,b)|(a\in A\wedge b\in B)\wedge(a\in A\wedge b\in C)\}$$

$$=(A\times B)\cap(A\times C)$$，其余同理可证. □

二元关系（Binary Relation）

- 定义（关系）：集合R为关系指：

$$(\forall r \in R)(\exists x,y)\big(r = (x,y)\big)$$

- 定义（二元关系）：设A,B为集合，若$R \subseteq A\times B$，称R为从A到B的二元关系，当$A = B$时，称R为A上的二元关系，在无歧义时一般可简称关系

二元关系（续）

- 相关记号：设$R \subseteq A \times B$
  - (1) $(a,b) \in R$可简记为aRb
  - (2) $(a,b) \notin R$可简记为$a\not{R}b$或$\neg aRb$
  - (3) $aRb \wedge bRc$可简记为$aRbRc$
- 例：$A = \{1,2\}$，$B = \{3,4,5\}$
  - $R = \{(1,3),(2,3),(1,5)\}$为$A$到$B$的二元关系，每个关系元素可写为$1R3, 2R3, 1R5$，而$(1,4) \notin R$，故$1\not{R}4$

二元关系（续）

- 以下三种关系是A上特别的二元关系，用特有的符号记之（且一般写为粗体）：
  - 空关系（empty relation）$\emptyset$：$\emptyset \subseteq A\times A$
  - 全关系（entire relation）$\boldsymbol{E_A}$：$\boldsymbol{E_A} = \{(x,y)|x,y \in A\}$
  - 恒同关系（identical relation）$\boldsymbol{I_A}$：$\boldsymbol{I_A} = \{(x,x)|x \in A\}$

二元关系（续）

- 自然数集ℕ上常见的关系如下：
  - 小于关系：$< \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) | n < m \land n,m \in \mathbb{N}\}$
  - 整除关系：$| \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) | n|m \land n,m \in \mathbb{N}\}$
  - 相等关系：$= \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{I}_{\mathbb{N}}$

二元关系（续）

- 以下定义与关系R有关的3个重要集合，设$R \subseteq A\times B$：
  - R的定义域 $\mathrm{Dom}(R)=\{x|(\exists y\in B)(x,y)\in R\}$
  - R的值域 $\mathrm{Ran}(R)=\{y|(\exists x\in A)(x,y)\in R\}$
  - R的域 $\mathrm{Fld}(R)=\mathrm{Dom}(R)\cup\mathrm{Ran}(R)$
- 例：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{r,s\}$，$R=\{(1,r),(2,s),(3,r)\}$

  则：$\mathrm{Dom}(R)=\{1,2,3\}$，$\mathrm{Ran}(R)=\{r,s\}$，

  $\mathrm{Fld}(R)=\{1,2,3,r,s\}$

二元关系（续）

- 对于$R \subseteq A\times B$，我们以集合表示之，当R为有穷集时，还可用矩阵或有向图来表示二元关系
- 定义：设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$与$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$分别为m元与n元集，$R\subseteq A\times B$为A到B的二元关系，可由$m\times n$的矩阵M_R表示关系R，$M_R=[m_{ij}]_{m\times n}$定义如下，称为关系矩阵：

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若(a_i,b_j)\in R\\ 0, & 若(a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

二元关系（续）

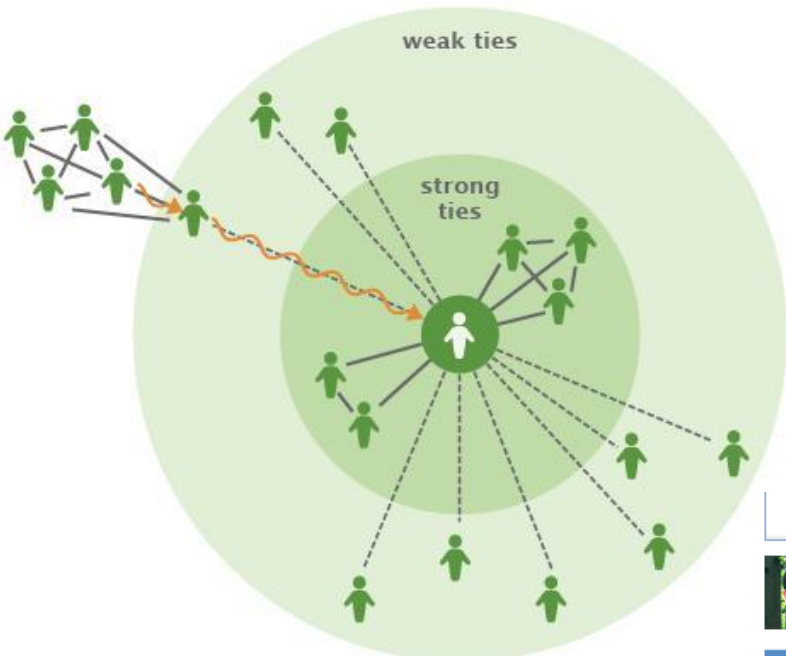
- 例：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{r,s\}$，$R=\{(1,r),(2,s),(3,r)\}$，

  则用关系矩阵表述关系R为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

- 通常由M_R可方便地验证R是否具备某性质，同时通过M_R可对关系R进行代数处理和机器处理

关系的运算



$$M_{TR} = \sum_{n=1}^{\infty} M_T^n$$

关系的运算（续）

- 定义：设$R \subseteq A \times B$，R的逆（inverse）为

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$$

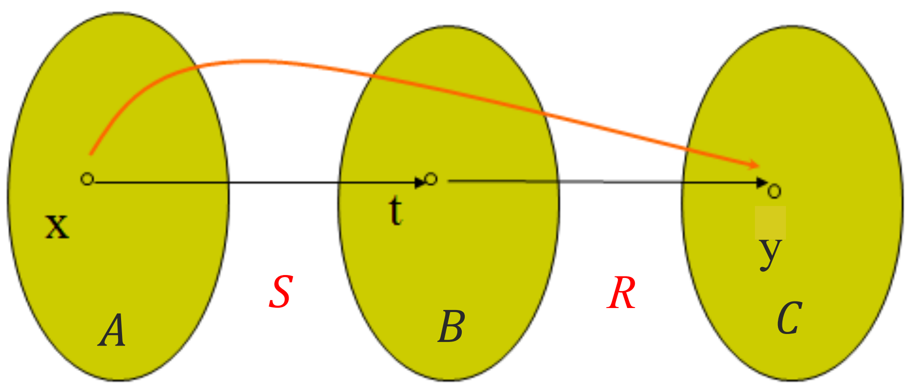
易见，R^{-1}为从B到A的关系：$R^{-1} \subseteq B \times A$

关系的运算（续）

- 定义：设$S \subseteq A\times B, R \subseteq B\times C$， R与S的复合为

$$R \circ S = \{(x,y) \mid (\exists t \in B)((x,t) \in S \land (t,y) \in R)\}$$

事 实 上 ， $x(R \circ S)y \Leftrightarrow \exists t(xStRy)$ 或 $x(R \circ S)y = xS\square Ry$， $R \circ S$为从A到C的关系



关系的运算（续）

- 设$S \subseteq A \times B$，$R \subseteq B \times C$，则:
  - (1) $(R^{-1})^{-1} = R$
  - (2) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
  - (3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
  - (4) $\boldsymbol{I}_B \circ S = S \circ \boldsymbol{I}_A = S$

关系的运算（续）

- 求证：$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$（设 $R_2 \subseteq A \times B$，$R_1 \subseteq B \times C$）
- 证明：只要证明等号左右两个集合相等即可。$(x,y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (y,t) \in R_2 \wedge (t,x) \in R_1) \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (t,y) \in R_2^{-1} \wedge (x,t) \in R_1^{-1}) \Leftrightarrow (x,y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$。根据集合相等的定义，命题得证. □

关系的运算（续）

- 定义(**关系的幂**)：

  设$R\subseteq A\times A$，以下归纳定义关系R的n次幂：

  $$R^0=\boldsymbol{I_A},\ R^{n+1}=R\circ R^n$$

- 一般来说，计算关系的高次幂R^n是比较复杂的，然而我们可以方便地通过关系矩阵M_R来计算M_{R^n}（在第7讲中介绍）

关系的运算（续）

- 关于关系的幂的定理：设R为集合A上的关系
  - (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$， $m, n \in \mathbb{N}$
  - (2) $(R^m)^n = R^{mn}$， $m, n \in \mathbb{N}$
  - (3) 若存在$S \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}^+$使$R^S = R^{S+T}$，则：
    - ① $(\forall k \geq S)(R^k = R^{k+T})$
    - ② $(\forall k \geq S)(\forall n \in \mathbb{N})\left(R^k = R^{k+nT}\right)$
    - ③ $\{R^0, R^1, \cdots, R^{S+T-1}\} = \{R^0, R^1, \cdots, R^n, \cdots\}$
  - (4) 若$|A| = n$,则$(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$

关系的运算（续）

- 证明：(1)(2)：对n归纳即可；(3)：设$R^S=R^{S+T}$
  - (3.1) 设 $k\geq S, R^k=R^{S+(k-S)}=R^S\circ R^{k-S}=R^{S+T}\circ R^{k-S}=R^{S+T+k-S}=R^{k+T}$

$$\boxed{\{R^0,R^1,\cdots,R^{S+T-1}\}=\{R^0,R^1,\cdots,R^n,\cdots\}}$$

  - (3.2) $R^k=R^{k+T}=R^{k+T+T}=R^{k+\overbrace{T+\cdots+T}^{n}}=R^{k+nT}$
  - (3.3) 由(3.2)容易看出，T为R复合的周期。该式说明有穷集上的关系有周期，但无穷集上关系未必有周期

关系的运算（续）

- 证明(4)：$|A| = n \Rightarrow (\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \le s < t \le 2^{n^2})$

设$R \subseteq A\times A$，$\because |A| = n \Rightarrow |A\times A| = n^2 \Rightarrow$ $|P(A\times A)| = 2^{n^2}$，$\therefore R^0, R^1, \cdots R^{2^{n^2}}$共有$2^{n^2}+1$个关系在$P(A\times A)$中，由鸽笼原理，$(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \le s < t \le 2^{n^2})$. □

- 鸽笼原理："If $n+1$ objects are put into n boxes, then at least one box contains two or more of the objects." ——**Pigeonhole Principle** (Das Schubfachprinzip) 由Peter Gustav Lejeune Dirichlet于1834年首提，他用这一原理证明数论中的定理

笛卡尔 (Descartes, 1596—1650)

- 绅士、军人和数学家
- “（解析几何学）使笛卡尔的名字不朽，它构成了人类在精确科学的进步史上所曾迈出的最伟大的一步。”

  —John Stuart Mill
- “我只要求安宁和平静。”，他一生中经常不得不在军营里寻找安宁，寻找在孤独中冥思的平静。
- 笛卡尔生在重建宗教和政治的阵痛中陷于战火中的欧洲。但在非物质的、永恒的一面，情况要好得多。笛卡尔所处的时代是文明史上最伟大的智力时期之一。费马和帕斯卡是他数学上的同代人；莎士比亚辞世时笛卡尔20岁；笛卡尔比伽利略多活8年，笛卡尔卒年牛顿8岁；密尔顿出生时笛卡尔12岁，而哈维比笛卡尔多活了7年

资料来源：E. T. Bell《数学精英》

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 2.1.6节， 9.1节
- 课后习题：
  - Problem Set 6
- 提交时间：11月2日