

离散数学作业 Problem Set 11

Problem 1

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

- (1) 试列出 S 中的所有函数。
- (2) 给出 S 上函数复合运算的运算表。

Problem 2

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

- (1) 整数集合 \mathbb{Z} 和普通的减法运算。
- (2) 非零整数集合 \mathbb{Z}^* 和普通的除法运算。
- (3) 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n \geq 2$ 。
- (4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$ 。
- (5) 正实数集合 \mathbb{R}^+ 和 \circ 运算, 其中 \circ 运算定义为:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

- (6) $n \in \mathbb{Z}^+$, $n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$, $n\mathbb{Z}$ 关于普通加法和乘法运算。

- (7) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$ 。 \circ 运算定义如下:

$$\forall a, b \in A, a \circ b = b$$

- (8) $S = \{2x - 1 | x \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通加法和乘法运算。

- (9) $S = \{0, 1\}$, \mathbb{S} 关于普通加法和乘法运算。
- (10) $S = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$, \mathbb{S} 关于普通的加法和乘法运算。
- (11) $S = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$, \mathbb{S} 关于普通的加法和乘法运算。

Problem 3

\mathbb{R} 为实数集, 定义以下 6 个函数 f_1, f_2, \dots, f_6 。 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1((x, y)) &= x + y, & f_2((x, y)) &= x - y, \\ f_3((x, y)) &= x \cdot y, & f_4((x, y)) &= \max(x, y), \\ f_5((x, y)) &= \min(x, y), & f_6((x, y)) &= |x - y| \end{aligned}$$

- (1) 指出哪些函数是 \mathbb{R} 上的二元运算。
- (2) 对所有 \mathbb{R} 上的二元运算说明是否为可交换、可结合、幂等的。
- (3) 求所有 \mathbb{R} 上二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。

Problem 4

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$? 如果能构成代数系统则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并求 $*$ 运算的单位元和零元。

- (1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数。
- (2) $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数。
- (3) $x * y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数。
- (4) $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$ 。

Problem 5

设 $S = \{f | f \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数} \}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 问 S 关于下面每个运算是否构成代数系统? 如果能构成代数系统, 说明该运算是否适

合交换律和结合律，并求出单位元和零元。

(1) 函数加法，即 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

(2) 函数减法，即 $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

(3) 函数乘法，即 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

(4) 函数除法，即 $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Problem 6

设 $A = \{a, b\}$ ，试给出 A 上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

Problem 7

设 $A = \{a, b\}$ ， S 是 A 上的所有函数集合， $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ，其中

$$f_1(a) = a \quad f_1(b) = b$$

$$f_2(a) = a \quad f_2(b) = a$$

$$f_3(a) = b \quad f_3(b) = b$$

$$f_4(a) = b \quad f_4(b) = a$$

于是 $\langle S, \circ \rangle$ 是一代数系统， \circ 是函数复合运算，试作出运算 \circ 的运算表，考察运算 \circ 是否有单位元，哪些元素有逆元。