Problem Set 10

Problem 1

(1) $Basis: 3^7 = 2187 < 7! = 5040$

(2) $I.H.:$ 假设$3^k < k!, k > 6$

(3) $I.S.: 3^{k+1} = 3 \times 3^k < 3 \times k! < (k+1) \times k! = (k+1)!$成立

由数学归纳法, 命题得证

Problem 2

对于$n < 10$的情况,

0和$0^5 = 0$最后一位相同
1和$1^5 = 1$最后一位相同
2和$2^5 = 32$最后一位相同
3和$3^5 = 243$最后一位相同
4和$4^5 = 1024$最后一位相同
5和$5^5 = 3125$最后一位相同
6和$6^5 = 7776$最后一位相同
7和$7^5 = 16807$最后一位相同
8和$8^5 = 32768$最后一位相同
9和$9^5 = 59049$最后一位相同

对于$n \geq 10$的情况, $n = 10a + b$, 其中$a \geq 10, b < 10$

$\therefore n^5 = (10a+b)^5 = 100000a^5 + 50000a^4b + 10000a^3b^2 + 1000a^2b^3 + 50ab^4 + b^5$

$\therefore n^5 \mod 10 = b^5 \mod 10$

$\because n \mod 10 = b$

$\because$ 由$n < 10$的情况可知, $b^5 \mod 10 = b$

$\therefore$ 可知正整数n和n^5最后一位必相同

Problem 3

(1) $Basis:$ 当$n=4$时, 四边凸多边形的对角线数目为$\frac{1}{2}n(n-3)=2$成立

(2) $I.H.:$ 假设当$n=k$时, k边凸多边形的对角线数目为$\frac{1}{2}k(k-3)$

(3) $I.S.:$

当$n=k+1$时,

易知$k+1$边形的对角线与k边形对角线的数目相差$k-1$条

$\therefore$ 对角线数目 $=\frac{1}{2}k(k-3)+k-1=\frac{1}{2}(k+1)(k-2)$

由数学归纳法, 命题得证

Problem 4

(1) $Basis:$ 当$n=1$时, $1=2^0$

(2) $I.H.:$ 假设当$n\leq k$时, n可以写成2的不同幂次之和

(3) $I.S.:$

对于$n=k+1$,

当$k+1$是偶数时,

$\dfrac{k+1}{2}$是小于等于k的整数, 可以写成2的不同幂次之和

给$\dfrac{k+1}{2}$乘上2后得$k+1$, 易知也可以写成2的不同幂次之和

当$k+1$是奇数时,

k是偶数, 可以写成无2^0项的2的不同幂次之和

给k加上2^0得$k+1$, 易知$k+1$可以写成2的不同幂次之和

由数学归纳法, 命题得证

Problem 5

a)

(1) 奠基 : $ones(\lambda) = 0$

(2) 递归步骤 :

$ones(\omega 1) = ones(\omega) + 1, \omega \in \sum^*$
$ones(\omega x) = ones(\omega), \omega \in \sum^* \wedge x \in \sum -\{1\}$

b)

(1) $Basis$: 对$s \in \sum^*$, 显然有$ones(s \cdot \lambda) = ones(s) + ones(\lambda)$

(2) $I.H.$:

令$P(t)$表示 : 每当$s \in \sum^*$, 就有$ones(s \cdot t) = ones(s) + ones(t)$
假设$P(t)$成立

(3) $I.S.$:

由$I.H.$可知$P(t)$成立, 即$ones(s \cdot t) = ones(s) + ones(t)$

$$\begin{aligned} \therefore ones(s \cdot (t1)) &= ones((s \cdot t)1) \\ &= ones(s \cdot t) + 1 \\ &= ones(s) + ones(t) + 1 \\ &= ones(s) + ones(t1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ones(s \cdot (tx)) &= ones((s \cdot t)x) \\ &= ones(s \cdot t) \\ &= ones(s) + ones(t) \\ &= ones(s) + ones(tx) \end{aligned}$$

其中$x \in \sum -\{1\}$

由结构归纳法, 命题得证

Problem 6

a)

(1) 奠基 : $m(x) = x, x \in N$, 其中$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(2) 递归步骤：

$m(sx) = \min(m(s), m(x))$

其中$s \in N^*, x \in N$

b)

(1) $Basis$：

对$s \in N^*$,显然有$m(s \cdot x) = m(sx) = \min(m(s), m(x)), x \in N$

(2) $I.H.$：

令$P(t)$表示：每当$s \in N^*$,就有$m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$
假设$P(t)$成立

(3) $I.S.$：

由$I.H.$可知$P(t)$成立,即$m(s \cdot t) = \min(m(s), m(x))$

$$\begin{aligned} m(s \cdot (tx)) &= m((s \cdot t)x) \\ &= \min(m(s \cdot t), m(x)) \\ &= \min(\min(m(s), m(t)), m(x)) \\ &= \min(m(s), m(t), m(x)) \\ &= \min(m(s), \min(m(t), m(x))) \\ &= \min(m(s), m(t \cdot x)) \\ &= \min(m(s), m(tx)) \end{aligned}$$

其中$x \in N$

由结构归纳法,命题得证

Problem 7

a)

假设$P_{m,m} \neq P_m$

由P_m和$P_{m,m}$的定义易知$P_{m,m} \subseteq P_m$

$\therefore P_{m,m} \subset P_m$

$\therefore \exists x_0 > m$, 使得$m = x_0$

$\therefore$ 产生矛盾

$\therefore P_{m,m} = P_m$

b)

(1) 奠基：$P_{m,1} = 1$易知成立

(2) 归纳步骤：

当$m < n$时,

同理于(a), 易证明$P_{m,n} = P_m = P_{m,m}$

当$m = 1$时

$\therefore P_{1,n} = P_{1,1} = 1$

当$m = n > 1$时

$\because P_{m,m}$仅仅比$P_{m,m-1}$多了$m = m$这种分拆方式

$\therefore P_{m,m} = 1 + P_{m,m-1}$

当$m > n > 1$时

此时$P_{m,n}$有两类拆分方式,
一种是有n这一项的, 一种是没有n这一项的

对于没有n这一项的分拆方式数目, 可以直接用$P_{m,n-1}$表示

对于有n这一项的分拆方式, 可以写成$m = n + \overbrace{\cdots\cdots}^{m-n\text{的拆分}}$
即有n这一项的分拆方式数目可以记作$P_{m-n,n}$

$\therefore P_{m,m} = P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$

由广义归纳法, 命题得证

c)

$$\begin{aligned} P_5 &= P_{5,5} = 1 + P_{5,4} = 1 + P_{5,3} + P_{1,4} = 2 + P_{5,2} + P_{2,3} \\ &= 2 + P_{5,1} + P_{3,2} + P_{2,2} = 4 + P_{3,1} + P_{1,2} + P_{2,1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_6 &= P_{6,6} = 1 + P_{6,5} = 1 + P_{6,4} + P_{1,5} = 2 + P_{6,3} + P_{2,4} \\
&= 2 + P_{6,2} + P_{3,3} + P_{2,2} = 4 + P_{6,1} + P_{4,2} + P_{3,2} + P_{2,1} \\
&= 6 + P_{4,2} + P_{3,2} = 6 + P_{4,1} + P_{2,2} + P_{3,1} + P_{1,2} = 10 + P_{2,1} \\
&= 11
\end{aligned}
$$

Problem 8

(1) $Basis:$

对$(3,2) \in M,$可以表示为$(2^1+1, 2^0+1)$的形式

(2) $I.H.:$

假设$(x,y) \in M,$且(x,y)可以表示成$(2^{k+1}+1, 2^k+1)$

(3) $I.S.:$

由$I.H.$可知$(x,y) \in M,$且(x,y)可以表示成$(2^{k+1}+1, 2^k+1)$

$$
\begin{aligned}
\therefore (3x-2y, x) &= (3(2^{k+1}+1) - 2(2^k+1), 2^{k+1}+1) \\
&= (3 \times 2^{k+1} + 3 - 2 \times 2^k - 2, 2^{k+1}+1) \\
&= (6 \times 2^k - 2 \times 2^k + 1, 2^{k+1}+1) \\
&= (2^{k+2}+1, 2^{k+1}+1)
\end{aligned}
$$

由结构归纳法, 命题得证

Problem 9

> **procdure** reverse(str: 字符串)
> **if** str只有一个字符 **then return** str
> **else return** str的最后一个字符 + reverse(去掉最后一个字符的str)
> {输出是str的倒置字符串}