离散数学作业 Problem Set 10

Problem 1

证明：如果 n 是一个大于 6 的整数，则 $3^n < n!$。

Problem 2

试证明：正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同。

Problem 3

通过数学归纳法证明: 当 $n > 3$ 时, n 边凸多边形的对角线数目为 $\frac{1}{2}n(n-3)$。

Problem 4

用强归纳法证明：任意正整数 n 都可以写成 2 的不同幂次之和，即可以写成整数的一个子集 $2^0 = 1$、$2^1 = 2$、$2^2 = 4$ 等的和。（提示：对归纳步骤，分别考虑 $k+1$ 是偶数和奇数时的情况。当 $k+1$ 是偶数时，注意 $(k+1)/2$ 是整数）

Problem 5

a) 给出计算位串 s 中 1 的个数的函数 $ones(s)$ 的递归定义。

b) 用结构归纳法证明 $ones(s \cdot t) = ones(s) + ones(t)$。（其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接）

Problem 6

a) 对于表示十进制数字的非空字符串 s，给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义。

b) 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = min(m(s), m(t))$。(其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接)

Problem 7

正整数 n 的分拆是把 n 写成正整数之和的方式。例如，$7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分。设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目，其中和式里项的顺序无关紧要，并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数。

a) 证明：$P_{m,m} = P_m$。

b) 证明：下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的。

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{m = 1} \\ 1 & \text{n = 1} \\ P_{m,m} & \text{m < n} \\ 1 + P_{m,m-1} & \text{m = n > 1} \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & \text{m > n > 1} \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

Problem 8

定义二元集合 $M \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

a)$(3, 2) \in M$。

b) 如果 $(x, y) \in M$，则 $(3x - 2y, x) \in M$。

集合 M 仅包含上述步骤生成的元素。
使用结构归纳证明 M 中的元素可以用 $(2^{k+1} + 1, 2^k + 1)$ 的形式表示，其中

k 是一个自然数。

Problem 9 (请自学5.4节后尝试解答)

给出字符串的倒置的递归算法。(一个字符串的倒置(反转),是由原字符里的符号以相反顺序组成的字符串。把字符串 w 的倒置表示为 w^R。)