Problem Set 18B

Problem 1

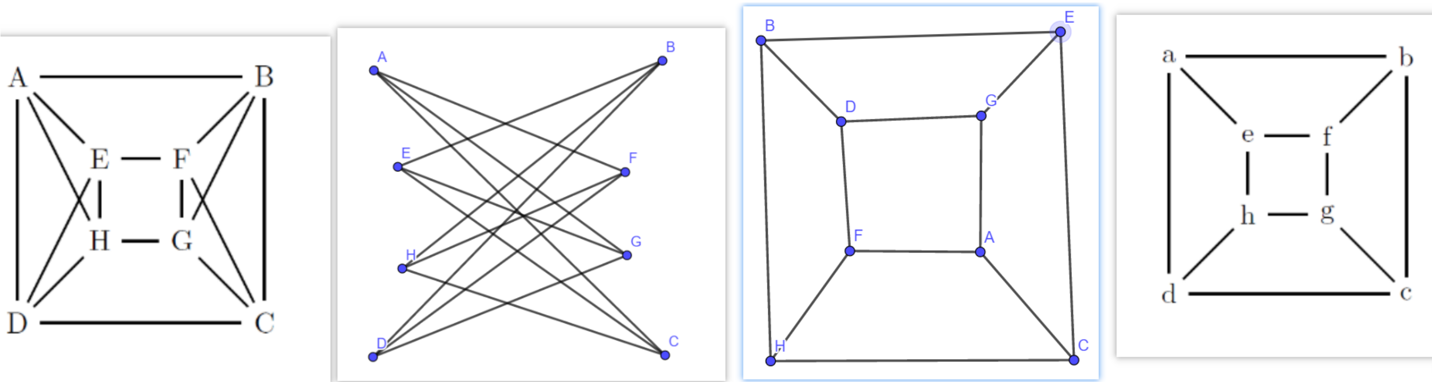
(1) K_n对于任意n值均是正则图

(2) W_n对于$n=3$时是正则图

(3) Q_n对于任意n值均是正则图

Problem 2

下右图(1)的补图如图(2),经过变形后得图(3),可以与图(4)一一对应



$$
\begin{aligned}
\text{即构造} f = \{ & \\
& (a,B),(b,E),(c,C),(d,H),(e,D),(f,G),(g,A),(h,F), \\
& (ab,BE),(bc,EC),(cd,CH),(da,HB), \\
& (ae,BD),(bf,EG),(cg,CA),(dh,HF), \\
& (ef,DG),(fg,GA),(gh,AF),(he,FD), \\
\} &
\end{aligned}
$$

即可知f满足使得两图同构的条件

Problem 3

$G \simeq H \Rightarrow \overline{G} \simeq \overline{H}:$

$\because G\cup\overline{G}=H\cup\overline{H}=K_n, G\simeq H$

$\therefore G,H,\overline{G},\overline{H}$的阶数都是相同的

对于任意一条边$e\in K_n,$

若$e\notin E_{\overline{G}}$,即$\gamma_{\overline{G}}(e)=\{v_i,v_j\}$不存在

我们假设此时$\gamma_{\overline{H}}(e)=\{f(v_i),f(v_j)\}$存在,
则由补图定义我们有$\gamma_G(e)=\{v_i,v_j\}$存在而$\gamma_H(e)=\{f(v_i),f(v_j)\}$不存在,与$G\simeq H$矛盾

因此我们有$\gamma_{\overline{G}}(e)=\{v_i,v_j\}$和$\gamma_{\overline{H}}(e)=\{f(v_i),f(v_j)\}$不可能同时存在

若$e\in E_{\overline{G}}$,同理我们可知$\gamma_{\overline{G}}(e)=\{v_i,v_j\}$和$\gamma_{\overline{H}}(e)=\{f(v_i),f(v_j)\}$不可能同时不存在

即$\gamma_{\overline{G}}(e)=\{v_i,v_j\}\Leftrightarrow\gamma_{\overline{H}}(e)=\{f(v_i),f(v_j)\}$

$\therefore$ 我们有$\overline{G}\simeq\overline{H}$

$\overline{G}\simeq\overline{H}\Rightarrow G\simeq H:$

同上述论证,同理可知成立

Problem 4

设正则图G中$d(v)=k$,阶数为v

$\because G$和$\overline{G}$是同构的

$\therefore 2k=v-1$,即$v=2k+1, k\in\mathbb{N}$

$\therefore v\equiv 1(mod2)$

$\therefore v\equiv 1(mod4)$或$v\equiv 3(mod4)$

对于$v\equiv 3(mod4):$

即顶点数$v=4n+3, n\in\mathbb{N}$

$\therefore v=4n+3=2k+1\Rightarrow k=2n+1, k$为奇数

$\therefore$ 由握手定理可知边数$|E_G|=\frac{1}{2}vk$,其中v和k都是奇数,$|E_G|$不是整数,导致矛盾

所以舍去该情况

$\therefore v\equiv 1(mod4)$

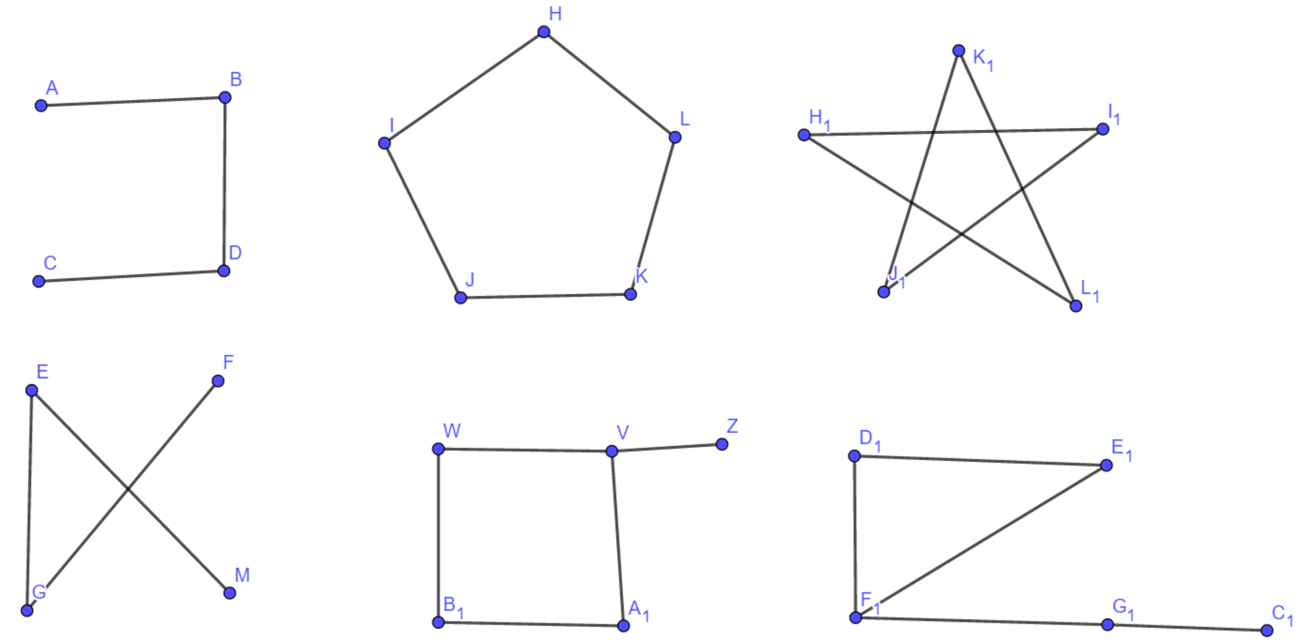
Problem 5

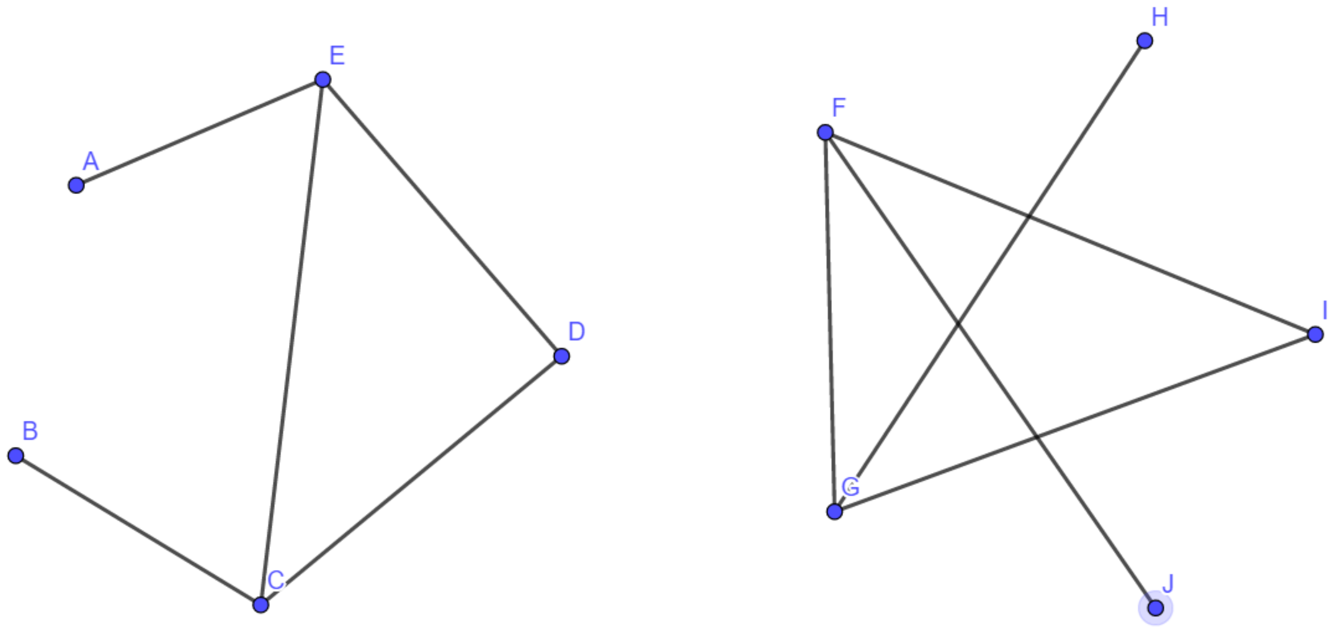
(1)

若有一个点有$n-1$度即与其他边均相连,
则补图该点必定与其他点都不相连,不可能与原图重构,排除该种情况

对于4阶图如上左下左,易知互为补图且重构,因此4阶自补图有一个

对于5阶图,如图可知有两个





(2)

对于任意一个n阶全图,由握手定理可知有$\frac{n(n-1)}{2}$条边

一个n阶自补图G和补图$\overline{G}$同构,即也有相同数目的边

又知道G和$\overline{G}$的并图是全图K_n,则可知G的边数为$\frac{n(n-1)}{4}$

对于3阶图,边数$\frac{n(n-1)}{4}=\frac{3}{2}$不是整数,因此自补图不存在

对于6阶图,边数$\frac{n(n-1)}{4}=\frac{15}{2}$不是整数,因此自补图不存在