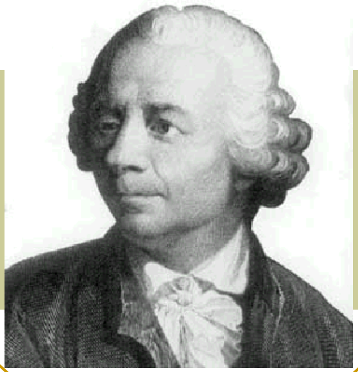
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第九讲：集合的基数

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 11 月 9 日

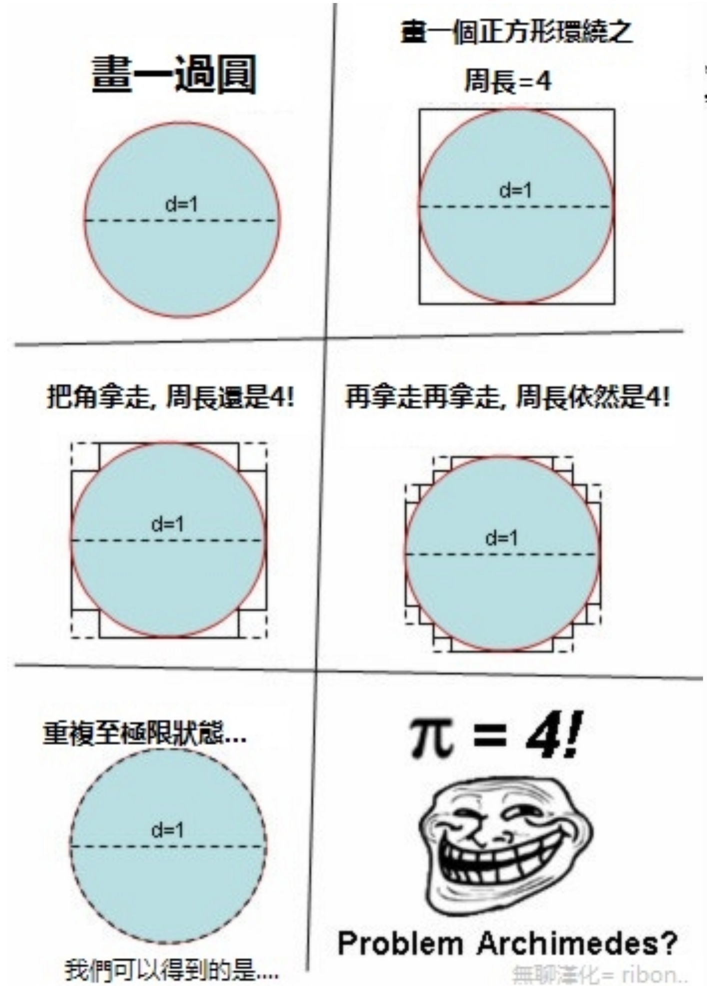
前情提要

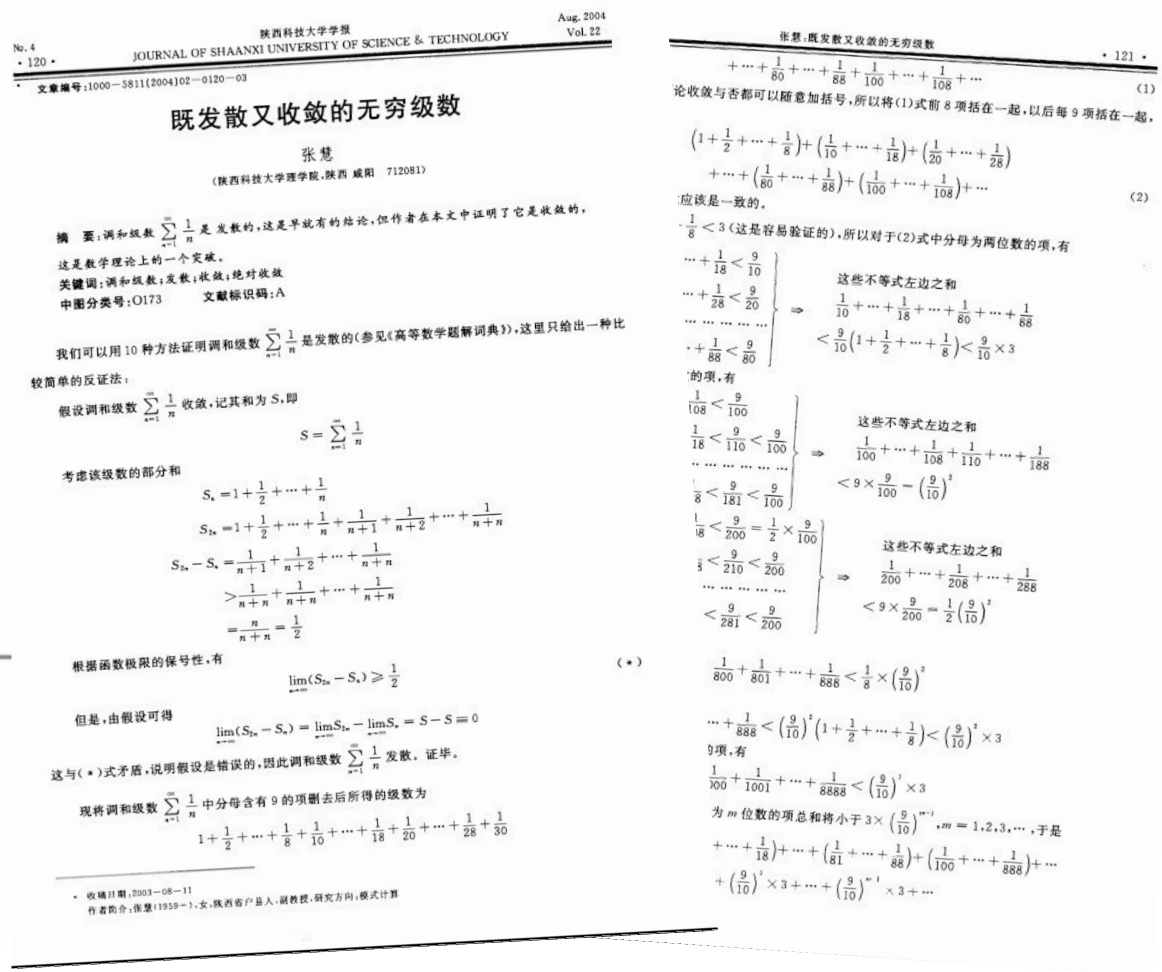
- 函数的定义
- 函数的性质
  - 满射、单射、双射
- 函数的复合
- 反函数

本讲主要内容

- 自然数与无穷公理
- 有限集与无穷集
- 集合的基数
- 集合的等势关系
- Cantor 定理
- 集合的优势关系

有穷 vs.无穷





No. 4 · 120 · 陕西科技大学学报 JOURNAL OF SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY Aug. 2004 Vol. 22

文章编号:1000—5811(2004)02—0120—03

既发散又收敛的无穷级数

张慧

(陕西科技大学理学院,陕西 咸阳 712081)

摘 要:调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的,这是早就有的结论,但作者在本文中证明了它是收敛的。这是数学理论上的一个突破。

关键词:调和级数;发散;收敛;绝对收敛

中图分类号:O173 文献标识码:A

我们可以用10种方法证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的(参见《高等数学题解词典》),这里只给出一种比较简单的反证法:

假设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛,记其和为 S,即

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

考虑该级数的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$$

根据函数极限的保号性,有

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\geqslant\frac{1}{2} \quad (*)$$

但是,由假设可得

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0$$

这与(*)式矛盾,说明假设是错误的,因此调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。证毕。

现将调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中分母含有9的项删去后所得的级数为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}$$

收稿日期:2003—08—11

作者简介:张慧(1959—),女,陕西省户县人,副教授,研究方向:模式计算

$$+\cdots+\frac{1}{80}+\cdots+\frac{1}{88}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{108}+\cdots \quad (1)$$

论收敛与否都可以随意加括号,所以将(1)式前8项括在一起,以后每9项括在一起,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{28}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{80}+\cdots+\frac{1}{88}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{108}\right)+\cdots \quad (2)$$

应该是一致的。

$\frac{1}{8}<3$(这是容易验证的),所以对于(2)式中分母为两位数的项,有

这些不等式左边之和

$$\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{80}+\cdots+\frac{1}{88}<\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)<\frac{9}{10}\times 3$$

的项,有

这些不等式左边之和

$$\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{108}+\frac{1}{110}+\cdots+\frac{1}{188}<9\times\frac{9}{100}=\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

这些不等式左边之和

$$\frac{1}{200}+\cdots+\frac{1}{208}+\cdots+\frac{1}{288}<9\times\frac{9}{200}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$\frac{1}{800}+\frac{1}{801}+\cdots+\frac{1}{888}<\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$\cdots+\frac{1}{888}<\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)<\left(\frac{9}{10}\right)^2\times 3$$

项,有

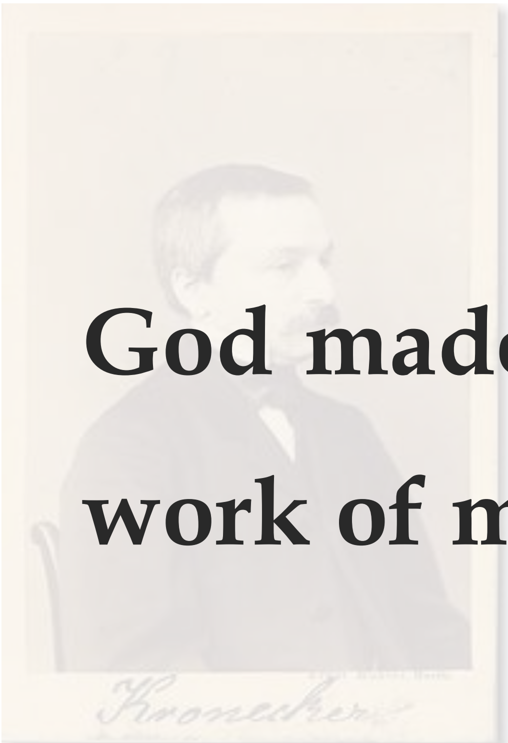
$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\cdots+\frac{1}{8888}<\left(\frac{9}{10}\right)^3\times 3$$

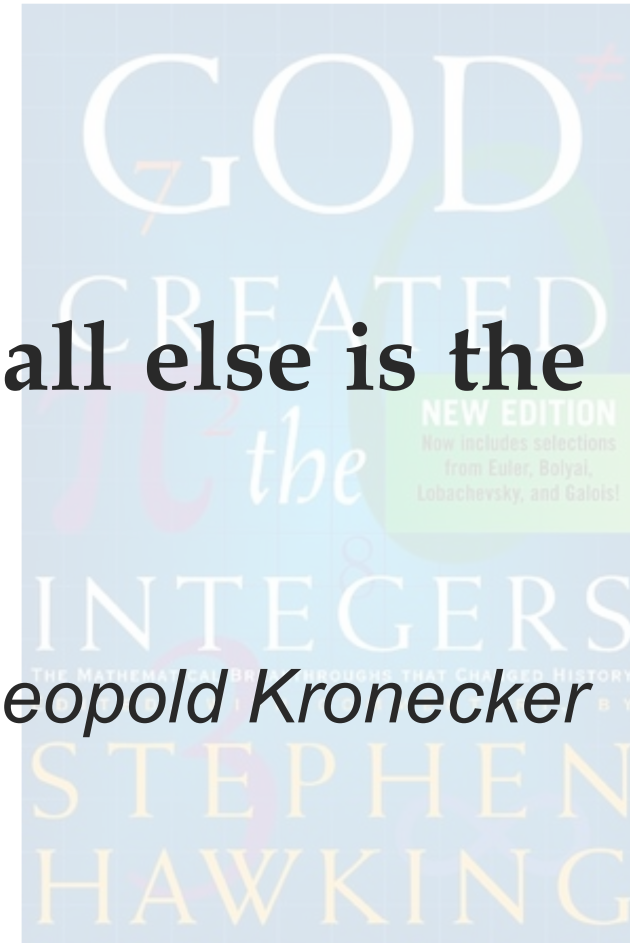
为 m 位数的项总和将小于 $3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$,$m=1,2,3,\cdots$,于是

$$+\cdots+\frac{1}{18}\Big)+\cdots+\left(\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{88}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{888}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{9}{10}\right)^2\times 3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}\times 3+\cdots$$

自然数与无穷集合





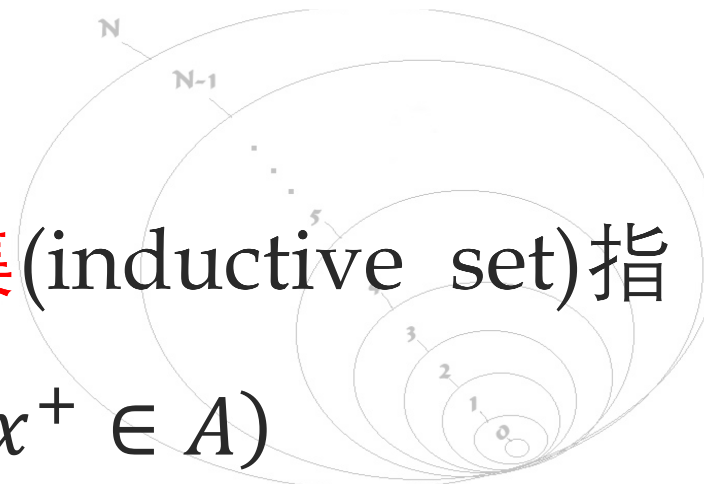
God made the integers; all else is the work of man.

—— *Leopold Kronecker*

回顾：从集合构造自然数

- 设x为集合，x的后继(successor)x^+指$x \cup \{x\}$，令$0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 0^{++}, \cdots, n = 0^{\overbrace{+\cdots+}^{n}}$，这是von Neumann的定义
- 设A为集合，称A为归纳集(inductive set)指：

$$\emptyset \in A \land (\forall x \in A)(x^+ \in A)$$



无穷公理

- 无穷公理（Axiom of Infinity，**ZFC.7**）：

$$\exists A\big(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^{+} \in A)\big)$$

- 以往按照von Neumann的定义，$0 = \emptyset$，$n + 1 = n^{+}$，从而可以定义出单个的自然数，但不能说明全体自然数集合$\mathbb{N}$的存在性，而由无穷公理可以定义$\mathbb{N}$
- 在集合论中（**PA.5**）：$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{A|A\text{为归纳集}\}$

自然数的Peano公理系统

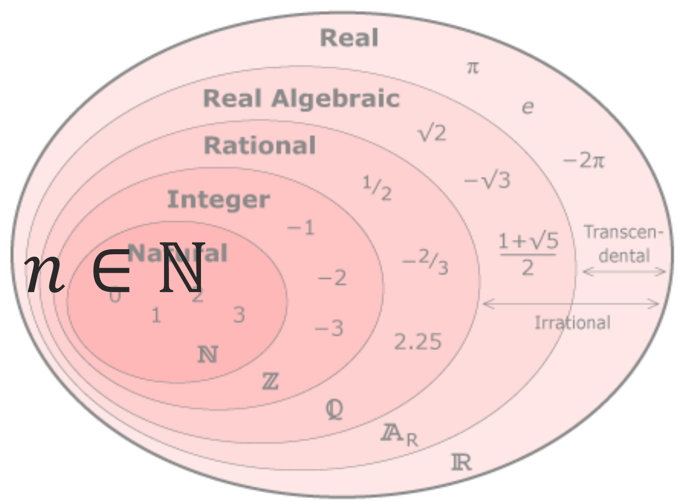
- Peano算术系统的公理（*i.e.* 自然数五公设）为：
  - **Ax.1** $0 \in \mathbb{N}$
  - **Ax.2** $n \in \mathbb{N} \to n^+ \in \mathbb{N}$
  - **Ax.3** $n^+ = m^+ \to n = m$
  - **Ax.4** $0 \neq n^+$
  - **Ax.5** $0 \in A \land (\forall x \in A)(x^+ \in A) \to (\forall x \in \mathbb{N})(x \in A)$
- 由此可由集合构造Peano算术(PA)：$\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$

有关自然数的若干命题

- 对于自然数的von Neumann定义，可定义：$m \le n \overset{\text{def}}{=} m \subseteq n$，于是有以下命题成立：
  - (1) $n+1=\{0,1,2,\cdots,n\}$
  - (2) $n \in n+1$
  - (3) $n \le n$
  - (4) $n \le m \le 1 \rightarrow n \le 1$；$n \le m \le n \rightarrow n = m$
  - (5) $m \le n \vee n \le m$

自然数的定义方式

- 总言之，有两种方法定义自然数：
  - Ⅰ. 归纳定义：$\emptyset$为自然数，若n为自然数，则n^+也为自然数；
  - Ⅱ. 集合定义：n为自然数$\Leftrightarrow$ $n \in \mathbb{N}$

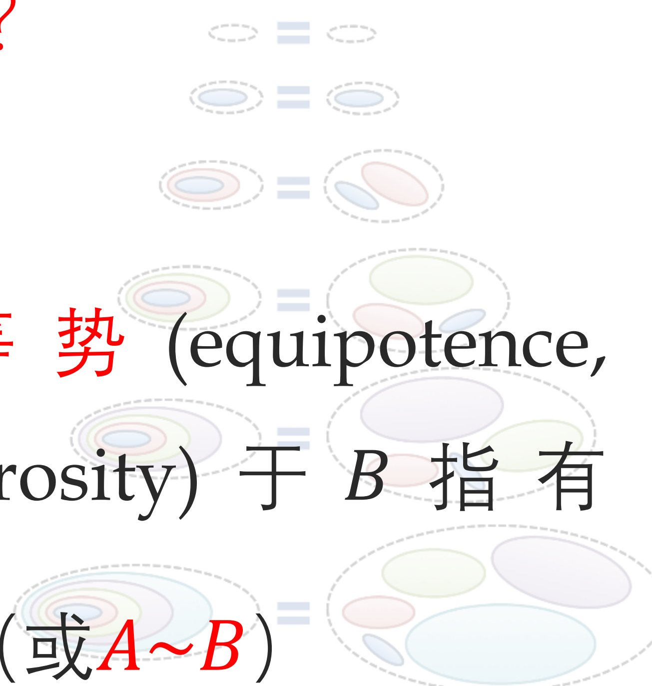


集合的基数

- 定义（**集合的基数**）：
  - 集合A中所包含元素的个数称为集合A的基数（cardinal numbers，简写为cardinals），或称A的势（cardinality），记为card$A$，也可记为$|A|$（von Neumann 记号）

集合的等势关系

- 有限集合的基数等于该集合中元素的个数
- 如何度量无穷集合的大小呢？
- 定义（**等势**）：
  - 设 A, B 为集合， A 等势 (equipotence, equipollence 或 equinumerosity) 于 B 指有 $f: A \xrightarrow{1-1,\text{onto}} B$，记为$A \approx B$（或$A \sim B$）



有限集与无穷集的基数定义

- 定义（**有限集**, **无穷集**, **可列集**）：A为集合,
  - (1) 若有自然数n使得$A \approx n$，则称A为有限集，且记A的基数为$|A| = n$
  - (2) 若A非有限集则称A为无穷集
  - (3) 若$A \approx \mathbb{N}$，则称A为可列集（或可数集）且记A的基数为$|A| = \aleph_0$（读作aleph null） 注：本课程中可列集特指无穷可列集（无穷可数集），有穷可列集直称有穷集
  - (4) 若$A \approx \mathbb{R}$，则记$|A| = \aleph$（或$\aleph_1$）

关于无穷集的讨论：自然数集

- **证明**：自然数集$\mathbb{N}$是无穷集

反设$\mathbb{N}$有穷，从而存在n以及双射函数$f: n \to \mathbb{N}$，因为 $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，令 $m = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + 1 \in \mathbb{N}$，从而有$\forall x \in n, f(x) \neq m$，故$f$非满射，矛盾！故$\mathbb{N}$为无穷集. □

关于无穷集的讨论：可列集

- 上述定义中，可列集的直观概念可以看作集合的元素可以按确定的顺序线性排列，即：对序列中任一元素，可以明确指出它的“前一个”元素和“后一个”元素
- 例如：整数集与自然数集等势，故$\mathbb{Z}$为可列集：

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, \cdots$$

关于无穷集的讨论：可列集（续）

- 证明：构造如下$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$，易见$f$为双射.

将 Z 中元素以下列顺序排列并与 N 中元素对应：

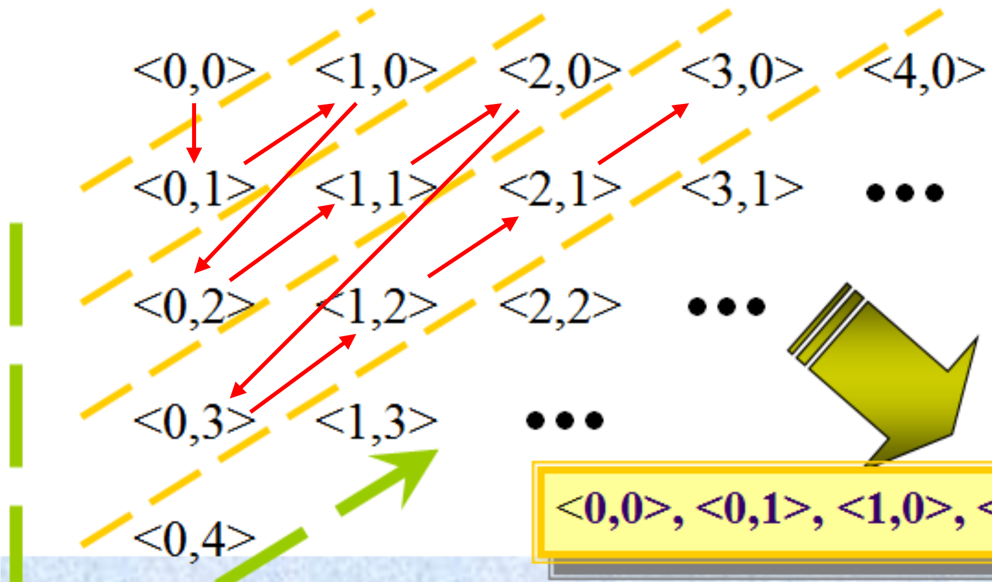
$$
\begin{array}{cccccccc}
Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f:\ Z\to N, f(x)=\begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

关于无穷集的讨论：可列集（续）

- 自然数集的笛卡尔积是可列集：所有的自然数序偶构成的集合与自然数集等势



类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ……

$$N(m,n)=\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

关于无穷集的讨论：等势与集合相等

- 等势的涵义是两个集合元素的个数“一样多”
- 整体一定大于部分吗？
- Galileo佯谬(Galileo's paradox, 1638)：
  - (1) 令$\mathbb{N}^{(2)}=\{0^2,1^2,2^2,3^2,\cdots\}$，显然：$\mathbb{N}^{(2)}\subset\mathbb{N}$；但G. Galileo发现$\mathbb{N}^{(2)}$与$\mathbb{N}$中的元素一一对应：令$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{(2)}$如下：$f(x)=x^2$，易见$f$是双射，故$\mathbb{N}\approx\mathbb{N}^{(2)}$
  - (2) 令$\mathbb{N}^{\star}=\{0,1^1,2^2,3^3,4^4,5^5,\cdots\}$，易见$\mathbb{N}\approx\mathbb{N}^{\star}$

关于无穷集的讨论：等势与集合相等（续）

- Hilbert 佯谬（Paradox of the Grand Hotel）：

$$\{0,1,2,\cdots\} \approx \{1,2,3,\cdots\}$$

"宇宙旅馆"

客满了？没关系，让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。新来的客人就住进第1号房间吧！

与自然数有关的若干命题

- (1) 自然数n的任何真子集为有限集
- (2) 任何自然数不等势于其真子集
- (3) 若集合A有穷，则A不与其任何真子集等势
- (4) 若集合A与其某个真子集等势，则A无穷
- 其中(2)即为"鸽笼原理"

典型的等势

- 对于互异的$a, b \in \mathbb{R}$和互异的$c, d \in \mathbb{R}$，有：

$$[a, b] \approx [c, d],\ (a, b) \approx (c, d)$$

对任何 $a, b \in R$, $a<b$, $[0,1] \approx [a,b]$.

双射函数 f: $[0,1] \to [a,b]$, $f(x)=(b-a)x+a$

类似地可以证明，对任何 $a, b \in R$, $a<b$，有$(0,1) \approx (a,b)$.

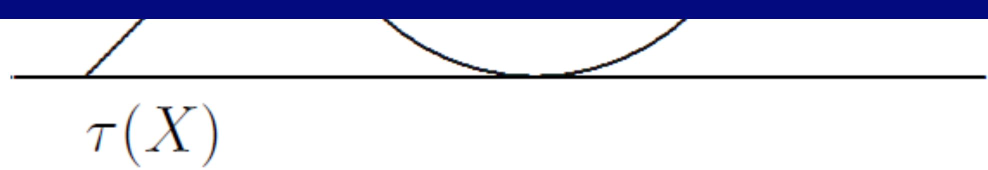
$\tau(X)$

典型的等势（续）

- 命题（Riemann）：设$a \neq b$，则$(a,b) \approx \mathbb{R}$
- 构作$\tau:(a,b) \to \mathbb{R}$如下所示：

$(0,1) \approx R$. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x \in R \wedge 0<x<1\}$. 令

双射函数 $f:(0,1) \to R$, $f(x)=\tan \pi \dfrac{2x-1}{2}$



实数集不是可列集

- 命题：实数集非可列集
- 证明（Cantor's diagonalization argument, 1891）：

由于$\mathbb{R} \approx [0,1]$，故只需要说明$[0,1]$之间的实数点集不可列即可。首先约定实数$x \in [0,1]$，令$x = 0.x_1x_2x_3\cdots(0 \le x_i \le 9)$，对于无限循环小数$0.249999\cdots$与$0.250000\cdots$统一只采用后者的表示法表示；

实数集不是可列集（续）

- 证明（Cantor's diagonalization argument）（续）：

假设[0,1]之间用上述方法表示的实数~~可列~~，则[0,1]上的值可列举为：

$$
\begin{array}{l}
0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\cdots \\
0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\cdots \\
0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\cdots \\
0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

令取实数$y \in [0,1]$，将其表为$0.b_1b_2b_3\cdots$，并令$b_i \neq b_{ii}\ (i = 1,2,3,\cdots)$。易见，$y$与上表中任何一个值均不等，上述假设错误。即实数集$\mathbb{R}$是不可列集. □

实数集不是可列集（续）

- 一个例子：

$r_1 = 0\,.\,5\;1\;0\;5\;1\;1\;0\;\ldots$

$r_2 = 0\,.\,4\;1\;3\;2\;0\;4\;3\;\ldots$

$r_3 = 0\,.\,8\;2\;4\;5\;0\;2\;6\;\ldots$

$r_4 = 0\,.\,2\;3\;3\;0\;1\;2\;6\;\ldots$

$r_5 = 0\,.\,4\;1\;0\;7\;2\;4\;6\;\ldots$

$r_6 = 0\,.\,9\;9\;3\;7\;8\;3\;8\;\ldots$

$r_7 = 0\,.\,0\;1\;0\;5\;1\;3\;5\;\ldots$

$\ldots$

$\Rightarrow$

$r_1 = 0\,.\,\underline{\mathbf{5}}\;1\;0\;5\;1\;1\;0\;\ldots$

$r_2 = 0\,.\,4\;\underline{\mathbf{1}}\;3\;2\;0\;4\;3\;\ldots$

$r_3 = 0\,.\,8\;2\;\underline{\mathbf{4}}\;5\;0\;2\;6\;\ldots$

$r_4 = 0\,.\,2\;3\;3\;\underline{\mathbf{0}}\;1\;2\;6\;\ldots$

$r_5 = 0\,.\,4\;1\;0\;7\;\underline{\mathbf{2}}\;4\;6\;\ldots$

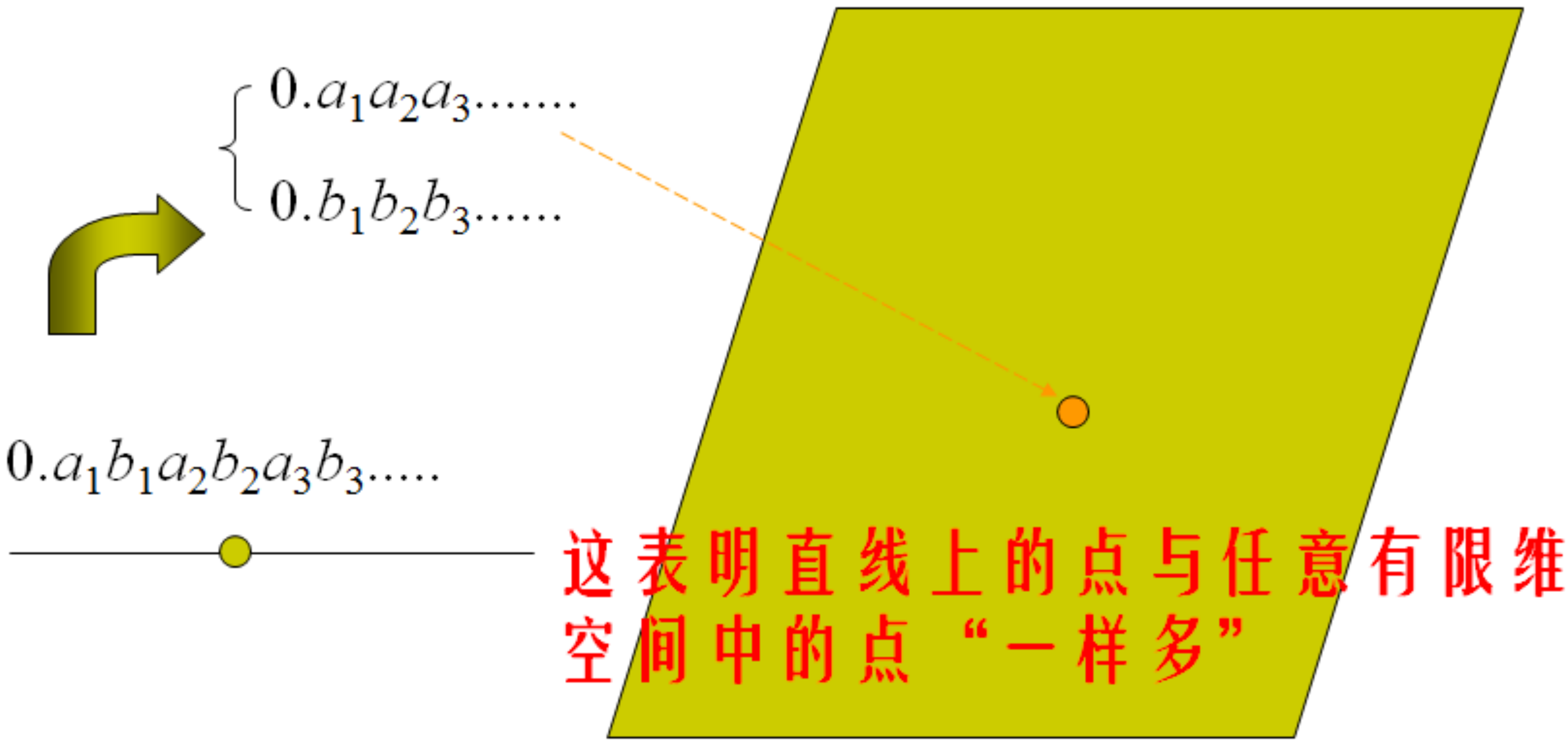
$r_6 = 0\,.\,9\;9\;3\;7\;8\;\underline{\mathbf{3}}\;8\;\ldots$

$r_7 = 0\,.\,0\;1\;0\;5\;1\;3\;\underline{\mathbf{5}}\;\ldots$

$\ldots$

实数集不是可列集（续）

- 直线点集与平面点集等势



幂集的基数

- 命题：$\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$

证*：令τ：$\mathscr{P}(A) \to \{0,1\}^A$如下：设$X \subseteq A$

$\tau(X): A \to \{0,\ 1\}$被定义为

$$\tau(X)_{(x)} = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$$，即子集X之特征函数，

可验证τ为$1-1$ and onto

故$\mathscr{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ $i.e.$ $\mathscr{P}(A) \sim A_I$ $\square$

Cantor 定理（续）

- Cantor 定理（1891）：

  (1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$

  (2) 对于任意集合A，$A \not\approx \mathcal{P}(A)$

- 证明：(1) 参见对角线法；

(2) 证明非$A \sim \mathscr{P}(A)$，

反设$f : A \xrightarrow[onto]{1-1} \mathscr{P}(A)$ 令 $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$，显然$B \in \mathscr{P}(A)$，

但$B \notin Ran(f)$，这是因为若$B = f(a)$则$a \in B \leftrightarrow a \notin f(a) \leftrightarrow a \notin B$矛盾！

故f非onto矛盾。 $\square$

集合的优势关系

- 设A, B为集合，若存在从A到B的单射函数，则称集合B优势于集合A，记做$A \preccurlyeq\cdot B$；真优势：$A \prec\cdot B \Leftrightarrow A \preccurlyeq\cdot B \wedge A \not\approx B$。
- 优势关系下的Cantor定理：$\mathbb{N} \prec\cdot \mathbb{R}$，任意集合$A \prec\cdot \mathcal{P}(A)$

一个问题

南京大学小百合站 -- 主题文章阅读 [讨论区: Pictures][回帖预定]

添加标签 +

追踪此人

[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: xuq(男生)] [本篇人气: 2251]

发信人: xuq (mossad), 信区: Pictures
标　题: 0到1之间有理数多还是无理数多
发信站: 南京大学小百合站 (Tue Mar 15 16:50:37 2011)

这是一个面试题，我觉得是无理数多，但不知道怎么解释。求证明！

一个问题（续）

其他答案

无法比较

回答人的补充 2009-10-12 22:32

不能啊，都是无数个的吧

暗星 回答采纳率:19.9% 2009-10-12 22:28 好:0 不好:0

一样多，两者都是不计其数

提问人的追问 2009-10-12 22:32

怎么可能是一样多呢？

回答人的补充 2009-10-12 22:33

对啊，整数和分数统称为有理数，无限不循环小数称为无理数，有理数和无理数不计其数。
0-1之间就有无数个数，无限个数就可以分成无限组

提问人的追问 2009-10-12 22:39

不计其数不见得没法比较多少嘛~

回答人的补充 2009-10-12 22:54

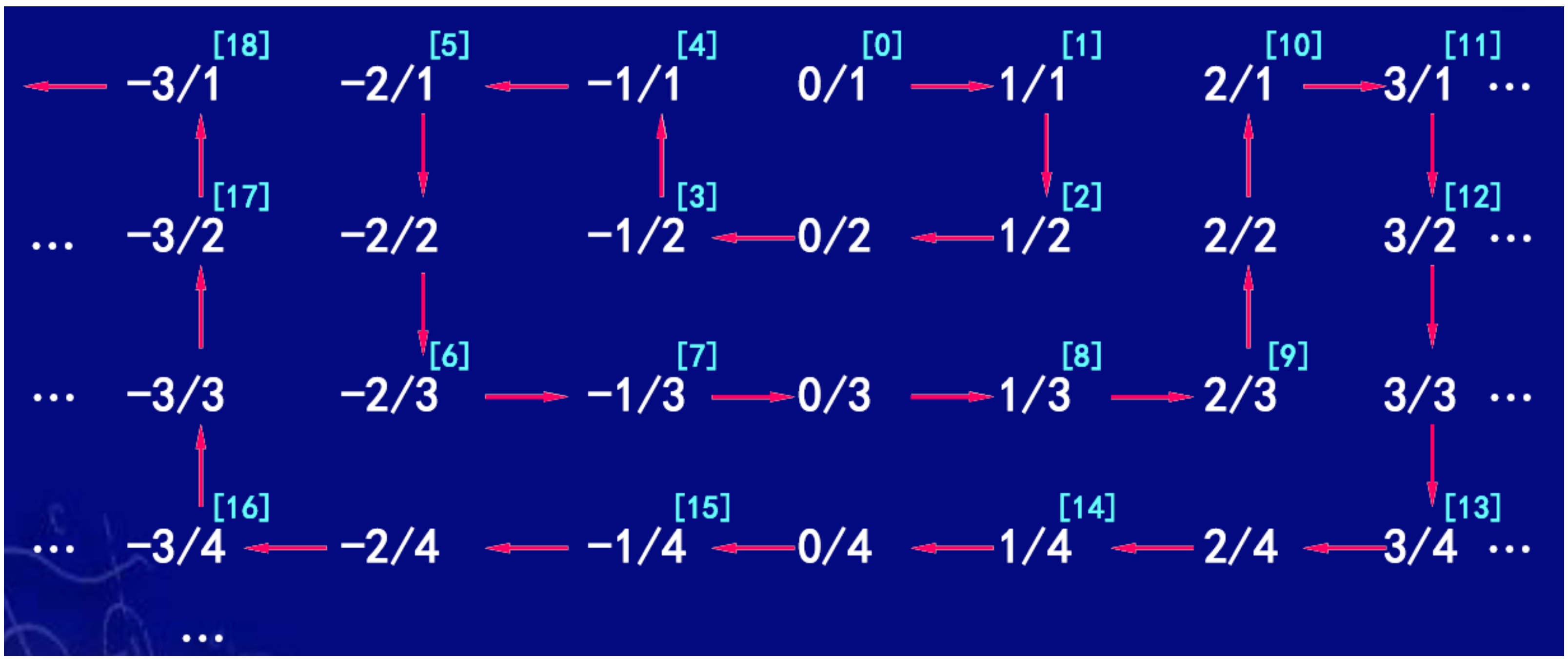
不计其数就是无穷无尽，无穷无尽的比较下去可以让你天荒地老，海枯石烂也比不完

乘风破浪! 回答采纳率:25.8% 2009-10-12 22:29 好:0 不好:0

一个问题（续）

- 证明：

(1) 易构造如下双射$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$，故$\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$，为可列集



一个问题（续）

- 证明（续）：

  (2) 用Cantor对角线法易证$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$不可列，故

  $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}|=\aleph$

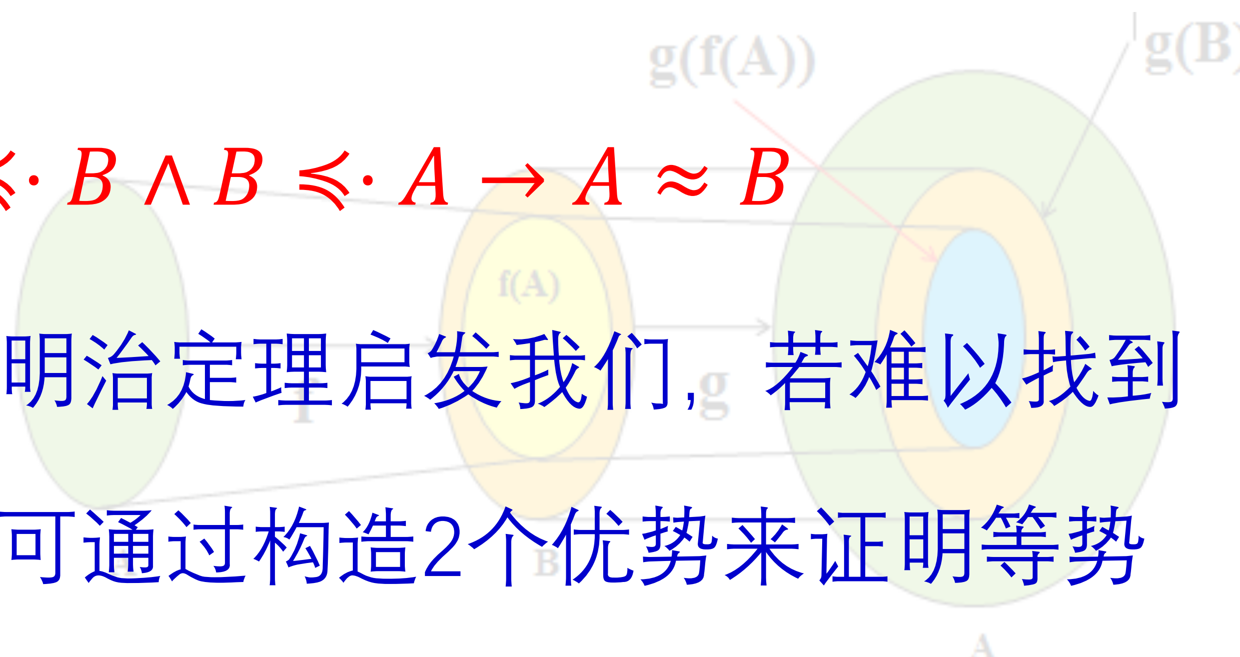
  因此$\mathbb{Q}\prec\cdot\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}$，即[0,1]内无理数的基数比有理数大.

  $\square$

集合优势关系的性质

- 定理（**Cantor-Bernstein-Schröder“三明治”定理**）：

$$A \preccurlyeq\cdot B \wedge B \preccurlyeq\cdot A \rightarrow A \approx B$$



- 证明略。三明治定理启发我们，若难以找到双射函数，可通过构造2个优势来证明等势

一些重要的等势与优势关系

- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \approx [a, b] \approx (c, d) \approx (0,1)$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$（可由“三明治”定理证明）
- $\{0,1\}^A \approx \mathcal{P}(A)$
- $\mathbb{N} \prec\cdot\ \mathbb{R}$
- $A \prec\cdot\ \mathcal{P}(A) \prec\cdot\ \mathcal{P}\mathcal{P}(A) \prec\cdot \cdots$

康托尔 (Georg Cantor, 1845-1918)

- “无限！再没有其它问题如此深刻地打动过人类的心灵。”

  ——David Hilbert

- “由康托尔在1874—1895年创造地集合论的引起争论的题目，象征着19世纪有先见之明的预言家们认为是从物理科学到民主政府的一切事物中，极其合理的原则的总崩溃，这些预言家们预见到了一切，只是没有预见到这场大崩溃。”
- “悖论和自相矛盾开始同时出现，这些可能最终是康托尔的理论注定要对数学做出的最大贡献，因为它们就在围绕无穷的逻辑和数学推理的基础中意想不到地存在，是现在整个演绎推论中批判运动地直接启迪。我们希望从这里能得出一个更丰富、更“真实”——摆脱了不一致——的数学。

  ——**上述两段摘自** E.T.Bell **《数学精英》**

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 2.5 节

- 课后习题：
  - Problem Set 8
- 提交时间：11月16日