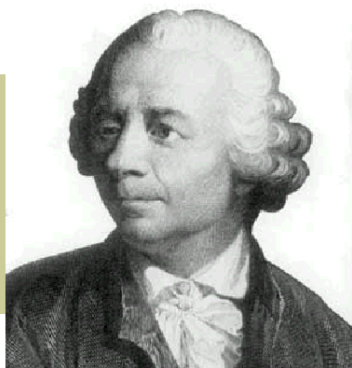


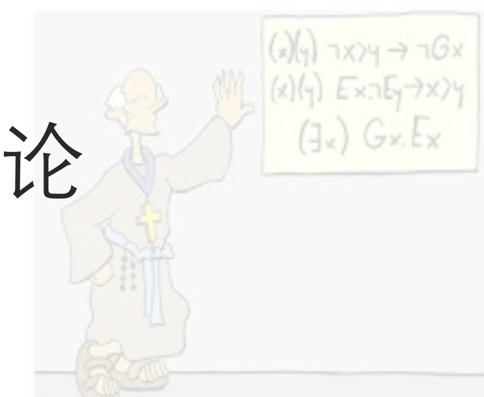
离 散 数 学

Discrete Mathematics

第三讲：谓词逻辑引论

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

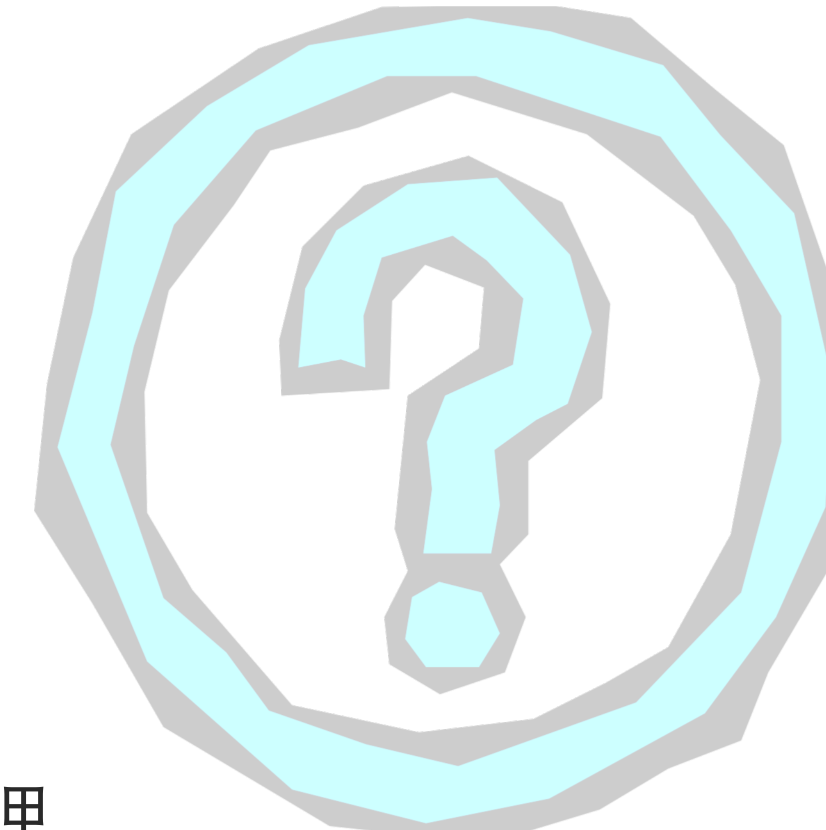


Anselm figured it all out
(or did he?)

2020 年 10 月 12 日

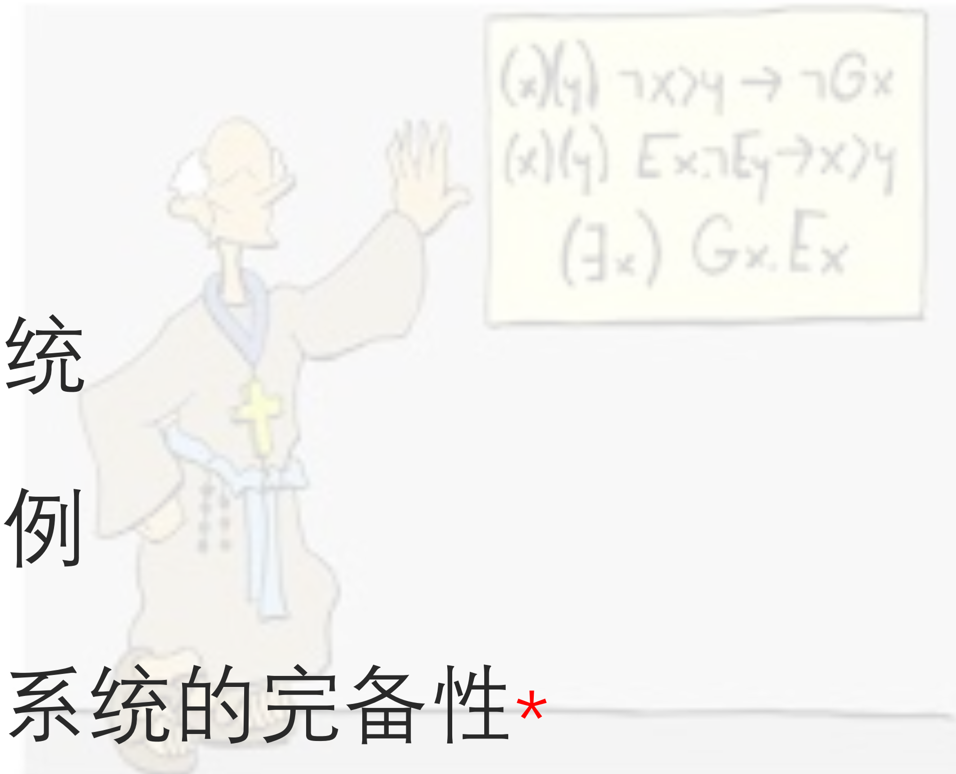
前 情 提 要

- 逻辑推理
- 命题演算的推理
- 公理推理系统*
- 自然推理系统
- 用命题逻辑进行推理



本讲主要内容

- 谓词与量词
- 谓词逻辑
- 谓词逻辑的推理系统
- 谓词逻辑的推理实例
- 一阶谓词逻辑推理系统的完备性*
- 谓词逻辑的应用举例*



Anselm figured it all out (or did he?)

为什么引入谓词逻辑？

- 命题逻辑中的命题是以整个语句为最小单位的，这种“主宾式”的原子逻辑结构限制了逻辑系统的表达能力，故此有些句子无法用命题精确表达：
  - 含有变量的语句：如“$3+x=5$”，“$a^2+b^2=c^2$”
  - 含有数量限定性定语的语句：如“所有学生今天都来上课了。”，“有的西瓜是黄瓤的。”

谓词逻辑

- 对于含有变量的语句，引入描述属性的逻辑形式——谓词（predicate）。谓词引入之后，便可以变量作为参数，命题作为其值来进行描述
- 定义（**谓词**）：函数P为呈型$P(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$的陈述句，且$P$在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$处为一具体命题，称函数$P$为谓词，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为个体（individual）。谓词描述了个体所具有的性质，或给出了个体之间的关系
- 例：谓词 $P(a,b,c)$ 指 $a^2+b^2=c^2$，则 $P(3,4,5)$ 的值为真，而$P(4,5,6)$的值为假

谓词逻辑（续）

- 对于含有数量限定性定语的语句，引入量词（quantifier）来量化谓词在一定范围（称为论域）的事物上成立的程度
- 定义（**量词**）：
  - (1)**全称量词**：“$P(x)$的全称化”记为$\forall x P(x)$，指命题“对所有论域中的x，$P(x)$为真。”
  - (2)**存在量词**：“$P(x)$的存在化”记为$\exists x P(x)$，指命题“存在论域中的某个x，使$P(x)$为真。”
- 例：对任何数总有一个数比它大。表示为（论域为实数集）：$\forall x \exists y (y > x)$

含量词公式的否定式

- $\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$
  - 例：对所有的x，x的平方是正数
  - 否定：存在某个实数x，其平方不是正数
- $\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$
  - 例：存在x，满足$5x = x$
  - 否定：对所有的x，$5x \neq x$

将自然语言翻译为谓词逻辑表达式

- 例1： “这个班上的每个学生都学过微积分课程。”
  - $S(x)$：x是这个班上的学生
  - $C(x)$：x学过微积分课程
  - $\forall x\big(S(x) \to C(x)\big)$
- 例2： “这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥。”
  - $S(x)$：x是这个班上的学生
  - $V(x,y)$：x去过y地方
  - $\forall x\ \big(S(x) \to V(x,\text{加拿大}) \vee V(x,\text{墨西哥})\big)$

将自然语言翻译为谓词逻辑表达式(续)

- 请尝试使用谓词和量词翻译如下Чебышёв 定理：“在正整数n与$2n$之间存在质数。” （定义谓词$N(x)$：x是正整数；$y|x$：y可整除x）

- $$\forall \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{N}(\boldsymbol{n}) \rightarrow \exists \boldsymbol{x}\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \wedge (\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{n}) \wedge (\boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}\boldsymbol{n}) \wedge \\ \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x} \rightarrow (\boldsymbol{y} = \mathbf{1} \vee \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}))\end{array}\right)\right)$$

含量词的推理规则

- 含量词的自然推理系统需增加以下4条推理规则：
  - 全称例示（UI）：$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$
  - 全称生成（UG）：对任意$c, P(c) \Rightarrow \forall x P(x)$
  - 存在例示（EI）：$\exists x P(x) \Rightarrow$对某个$c, P(c)$
  - 存在生成（EG）：对某个$c\,, P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$

谓词逻辑的公理系统*

- 谓词逻辑的公理系统在命题逻辑公理系统中增加以下4条量化公理：
  - PRED-1：$\forall x Z(x) \to Z(t)$
  - PRED-2：$Z(t) \to \exists x Z(x)$
  - PRED-3：$\forall x\big(W \to Z(x)\big) \to \big(W \to \forall x Z(x)\big)$
  - PRED-4：$\forall x(Z(x) \to W) \to (\exists x Z(x) \to W)$

谓词逻辑推理实例

- 一个例子（由 Lewis Carroll 提供）：
  - "All lions fierce." ①
  - "Some lions do not drink coffee." ②
  - "Some fierce creatures do not drink coffee." ③
- $P(x)$：x是狮子；$Q(x)$：x凶猛；$R(x)$：x喝咖啡

  ①：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$；②：$\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$

  $\{①, ②\} \Rightarrow ③$：$\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$

谓词逻辑推理实例（续）

“在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。

$C(x)$: x在这个班上

$B(x)$: x读过书了

$P(x)$: x通过了第一门考试

- $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$
- $\forall x(C(x) \to P(x))$
- $\exists x(P(x) \land \neg B(x))$

证明框架：

对于论域（某学校的全体学生）中的某个体a:

$C(a) \land \neg B(a)$	存在例示
$C(a)$	化简
$C(a) \to P(a)$	全称例示
$P(a)$	假言推理
$\neg B(a)$	化简
$P(a) \land \neg B(a)$	合取引入
$\exists x(P(x) \land \neg B(x))$	存在生成

一阶谓词逻辑推理系统的性质*

- 定理（Gödel 完备性定理，*K. Gödel 1929*）：一阶谓词逻辑推理系统*FOL*是完备的（completeness），即*FOL*中所有逻辑有效的公式均可在*FOL*中证明
- 定理（*FOL*的可靠性，*J. Herbrand 1930*）：一阶谓词逻辑推理系统*FOL*是可靠的（soundness），即所有在*FOL*中可证的公式均在*FOL*中逻辑有效
- 定理（*FOL*的不可判定性，*A. Church 1936 & A. Turing 1937*）：一阶谓词逻辑系统是不可判定的（undecidable / semi-decidable）
- 证明均略

逻辑的应用：程序的逻辑验证

- 现代计算机程序规模巨大而且复杂，一些安全攸关（safe-critical）的代码一旦出错，将产生灾难后果，而这些代码仅凭测试很难证明其无错
  - **加拿大Therac-25辐射治疗机导致三死三重伤（1985）**
  - **美国AT&T 电话网络大瘫痪（1990-01-15）**
  - **法国Ariane-5运载火箭发射失败（1996-06-04）**
  - **NASA“火星极地登陆者”探测器失踪（1999-12-03）**
  - **NASA“火星环球勘探者”探测器失踪（2007-11-02）**

程序的逻辑验证（续）

view plain copy to clipboard print ?

```
network code()
{
switch (line) {
    case THING1:
        doit1();
        break;
 case THING2:
           if (x == STUFF) {
              do_first_stuff();
              if (y == OTHER_STUFF)
                   break;
              do_later_stuff();
            } /* coder meant to break to here... */
            initialize_modes_pointer();
            break;
    default:
          processing();
    } /* ...but actually broke to here! */
   use_modes_pointer();/* leaving the modes_pointer
    uninitialized */
}
```

程序的逻辑验证（续）


```
declare
    …
    horizontal_veloc_sensor: float;
    …
    horizontal_veloc_bias: integer;
    …
begin
   sensor_get(vertical_veloc_sensor);
   sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
   vertical_veloc_bias  := integer(vertical_veloc_sensor);
   horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor)
   …
   exception
      when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
      when others => use_irs1();
end;
```

程序的逻辑验证（续）

- 现代一般用逻辑的方法进行程序正确性证明或形式化验证。已经通过程序正确性证明的例子：
  - 中国火车控制系统（CTCS-2）核心（约1.4万行C代码）
  - 美军F-16战斗机控制系统核心（约2.8万行Ada代码）
  - 美国奋进号航天飞机主控系统核心（约4万行Ada代码）
  - 通用汽车发动机管理系统（EMS）（约8000行C代码）

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 1.4－1.6节（1.5节请自学）
- 课后习题：
  - Problem Set 3
    - 注：如需要，可用符号∃!表示量词：“存在唯一的”
- 提交时间：10月19日