Problem Set 15

Problem 1

$$
\begin{aligned}
&\{ \\
&\qquad (\{a\},\emptyset),(\{b\},\emptyset),(\{c\},\emptyset), \\
&\qquad (\{a,b\},\{a\}),(\{a,b\},\{b\}), \\
&\qquad (\{a,c\},\{a\}),(\{a,c\},\{c\}), \\
&\qquad (\{b,c\},\{b\}),(\{b,c\},\{c\}), \\
&\qquad (\{a,b,c\},\{a,b\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{b,c\}) \\
&\}
\end{aligned}
$$

Problem 2

设有穷偏序集为S,它的覆盖关系为R,设$R \subseteq A \times A$

由覆盖关系的定义可知,$R \subseteq S$

$\because S$为有穷偏序集

$\therefore S$具有自反性和传递性

对于任意T满足$R \subseteq T$且T具有自反性和传递性

$\therefore I_A \subseteq T, R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \subseteq T$

若$(x,y) \in S$,即$x \preceq y$,那么只有$x = y$和$x \prec y$两种情况

对于$\forall x = y$的时候,$(x,y) \in I_A$

$\because R = \{(x,y) | \forall x,y \in A, x \prec y \wedge \neg \exists z \in A (x \prec z \prec y)\}$

对于$\forall x,y$满足$x \prec y$,只有两种情况
当$\neg \exists z \in A$使得$x \prec z \prec y$时,$(x,y) \in R$

当$\exists z \in A$使得$x \prec z \prec y$时,

可以分别看$x \prec z$和$z \prec y$,
若两者都无中间元素即$(x,z) \in R, (z,y) \in R$,

则有$xRzRy$,即$(x,y) \in R^2$

若有中间元素,则同理也可以证明$(x,y)\in R^k$

$\therefore$ 可知此时有$(x,y)\in R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

$\therefore S\subseteq I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

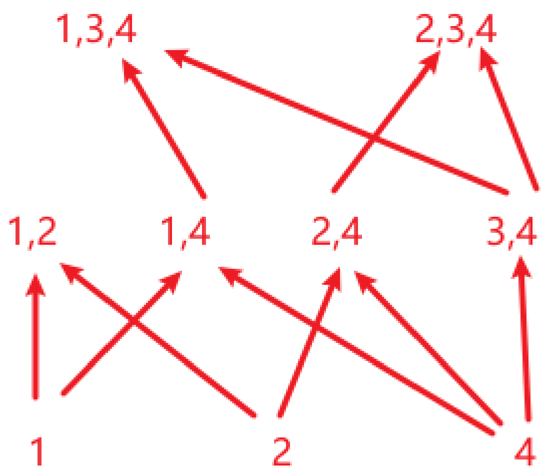
$\because I_A\subseteq S, R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\subseteq S$

$\therefore S=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\subseteq T$

$\therefore S$是R的自反传递闭包

$\therefore S$可以从R中构造出来

Problem 3



(a) 极大元素为$\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$

(b) 极小元素为$\{1\},\{2\},\{4\}$

(c) 不存在最大元素

(d) 不存在最小元素

(e) $\{2,4\},\{2,3,4\}$

(f) 最小上界为$\{2,4\}$

(g) $\{4\},\{3,4\}$

(h) 最大下界为$\{3,4\}$

Problem 4

(a) 该偏序集为格

(b) 该偏序集不为格

(c) 该偏序集为格

Problem 5

设该格为A,该非空子集为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$,设$|B| = n$

若$n = 1$,则上下确界就是B里唯一的一个元素

$\therefore$ 对$\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3\}, \cdots, \{b_{n-1}, b_n\}$都有上确界$m_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$

$\because$ 对于B的最小上界M,有$b_i \preceq M$,则$b_i \preceq M, b_{i+1} \preceq M$

$\because b_i \preceq m_i, b_{i+1} \preceq m_i,$
由最小上界定义可知$\forall x(b_i \preceq x, b_{i+1} \preceq x \to m_i \preceq x)$

$\therefore m_i \preceq M, M$也是$\{m_i\}$的上界

$\therefore$ 假设$\exists x$使得$b_i \preceq m_i \preceq x \prec M$

$\because \forall y(b_i \preceq y \to M \preceq y)$

$\therefore M \preceq x$与$x \prec M$产生矛盾

$\therefore M$也是$\{m_i\}$的最小上界

$\therefore |\{m_i\}| \leq n - 1$

$\therefore$ 若$\{m_i\}$基数为1,则可得该唯一元素就为上确界,
若基数不为1,同理可以重复该步骤直至基数唯一

$\therefore$ 上确界唯一

$\therefore$ 同理可知下确界也唯一

Problem 6

假设该有穷格无最大元素

$\therefore$ 有两个或两个以上的极大元, 设其中两个为a, b, 且$a \neq b$

$\therefore$ 不存在关系$a \prec b$或$b \prec a$

$\because$ 格的性质$\exists c$, 使得$a \preceq c$且$b \preceq c$

若$a \prec c$或$b \prec c$, 则a或b不为极大值, 矛盾

若$a = c$且$b = c$, 则有$a \preceq b$且$b \preceq a$即$a = b$, 矛盾

$\therefore$ 每个有限格都有一个最大元素

$\therefore$ 同理每个有限格都有一个最小元素

Problem 7

设有穷非空偏序集为A, 随机取$x \in A$

若不存在$y \in A$使得$x \prec y$, 则x即为一个极大元素

若存在$y \in A$使得$x \prec y$, 则用y替换x, 继续该循环

$\because$ 该集合为有限集

$\therefore$ 总能找到一个x符合条件, 即有极大元素

Problem 8

$\because$ 对于$\forall \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in A,$

我们取$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in A$, 且$c_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$

$\therefore$ 易知$(a_{ij}) \preceq (c_{ij}), (b_{ij}) \preceq (c_{ij})$, 即$(c_{ij})$是$\{(a_{ij}), (b_{ij})\}$的一个上界

假设$\exists (d_{ij})$使得$(a_{ij}) \preceq (d_{ij}) \prec (c_{ij})$且$(b_{ij}) \preceq (d_{ij}) \prec (c_{ij})$

$\therefore$ 矩阵(d_{ij})的其中一个元素$d_{ij} < max(a_{ij}, b_{ij})$, 不妨设为$d_{ij} < a_{ij}$

$\therefore$ 由定义知$(c_{ij}) \preceq (d_{ij})$不成立, 产生矛盾

$\therefore \neg\exists (d_{ij})$使得$(a_{ij}) \preceq (d_{ij}) \prec (c_{ij})$且$(b_{ij}) \preceq (d_{ij}) \prec (c_{ij})$

$\therefore (c_{ij})$即为$\{(a_{ij}), (b_{ij})\}$的上确界

$\therefore$ 同理可证任何一个$(a_{ij}),(b_{ij}) \in A$,存在下确界$(\min((a_{ij}),(b_{ij})))$

$\therefore (A,R)$是格