Problem Set 18A

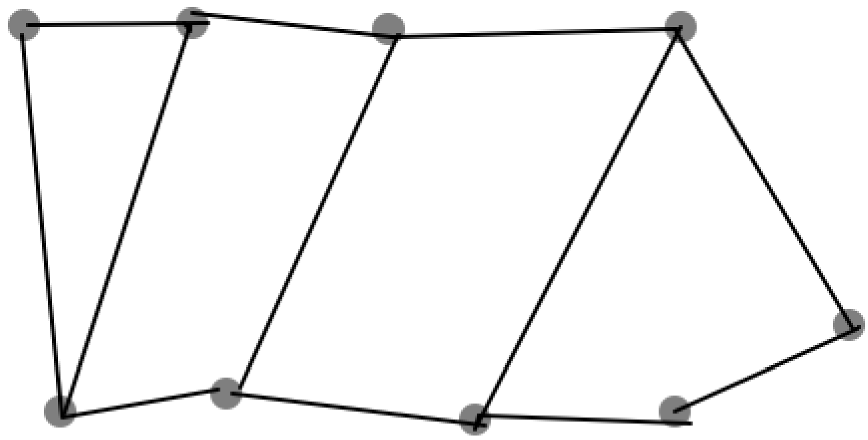
Problem 1

由握手定理可知,剩下的度数为$2|E_G| - 3 \times 6 = 2 \times 12 - 3 \times 6 = 6$

$\because$ 其余顶点的度数均小于3

$\therefore$ 要到达顶点最少,则令剩下顶点的度数都等于2,即剩下$6/2 = 3$个点

$\therefore$ G中至少有9个顶点,如图:

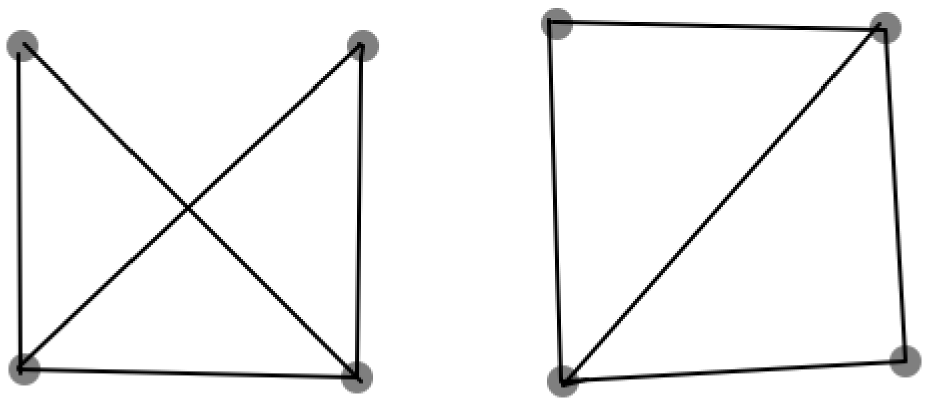


Problem 2

对于四个顶点,每个顶点都最多能与3个顶点相连,即最多能有$3 \times 4/2 = 6$条边

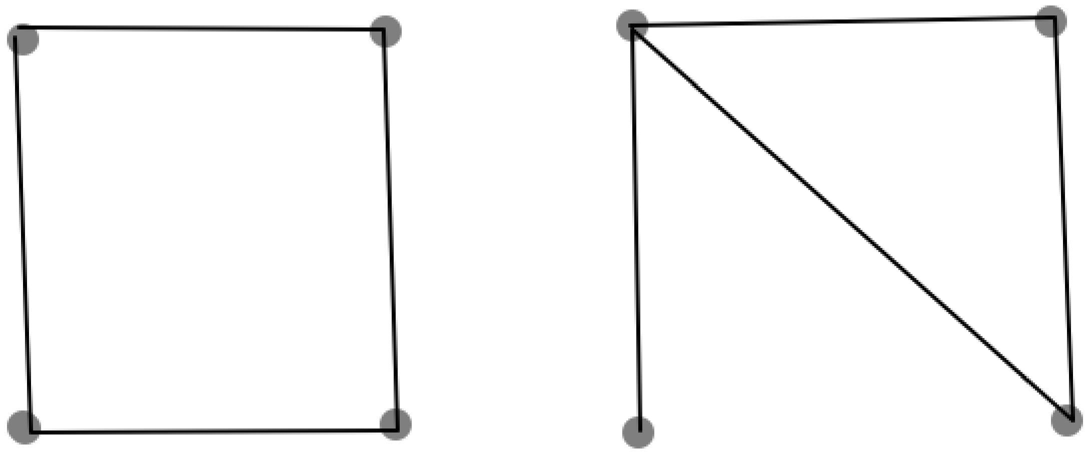
对于6条边的情况:易知只有一种情况

对于5条边的情况:



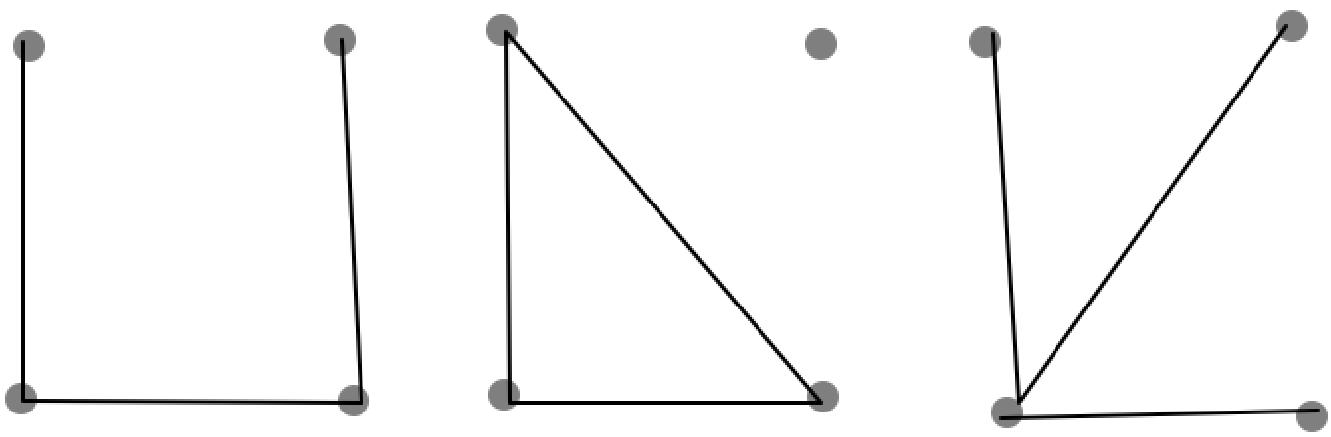
只有这两个可能的图形，但这两个图形也同构，因此也只有一种情况

对于4条边的情况：



只有这两种情况

对于3条边的情况：



有三种可能的情况

而由对称性可知0条边和6条边相同, 1条边和5条边相同, 2条边和4条边相同

$\therefore$ 四个顶点的非同构简单图总共有$2\times(1+1+2)+3=11$种

Problem 3

假设存在一个n阶简单图G, G至少有两个顶点且各顶点度数均不相同

由n阶简单图的最大度$\Delta(G)\le n-1$可知,
每个顶点的度数分别为$0,1,2,\cdots n-1$

$\because$ 度为0的点和其他点无边

$\therefore$ 将其去掉, 剩下的G也是$n-1$阶简单图
但是此时G的度数却是$1,2,\cdots n-1$, 而非$0,1,2,\cdots n-2$, 产生矛盾

$\therefore$ 假设不成立

$\therefore$ 不存在n阶简单图G使得G至少有两个顶点且各顶点度数均不相同

Problem 4

将v_i按照度从小到大排列, 即$d(v_1)\le d(v_2)\le\cdots\le d(v_n)$

$$\therefore v\delta(G)=vd(v_1)\le\sum_{i=1}^{|v_G|}d(v_i)\le v\Delta(G)=vd(v_n)$$

$$\therefore \delta(G)\le\frac{\sum_{i=1}^{|v_G|}d(v_i)}{v}\le\Delta(G)$$

$\therefore$ 由握手定理可知$\delta(G)\le\dfrac{2\varepsilon}{v}\le\Delta(G)$

Problem 5

(1)

对于去掉度最大点之后的G',

我们易知$\sum_{i=1}^{|V_{G'}|} d(v_i) = \sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) - 2\Delta(G) \leq \sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) - \Delta(G)$

即证$\frac{\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) - 2\Delta(G)}{v-1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) - \Delta(G)}{v-1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i)}{v}$

即证$v(\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) - \Delta(G)) \leq (v-1)\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i)$

即证$\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) \leq v\Delta(G)$

$\because d(v_i) \leq \Delta(G), i = 1, 2, \cdots, v$

$\therefore$ 原命题成立

(2)

如图, 去掉了一个度数最小的点和相关的边,
但是图的顶点平均度从2变成了1, 减小了, 命题不成立