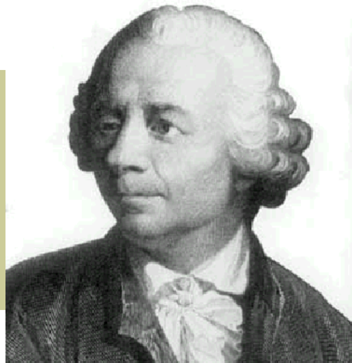
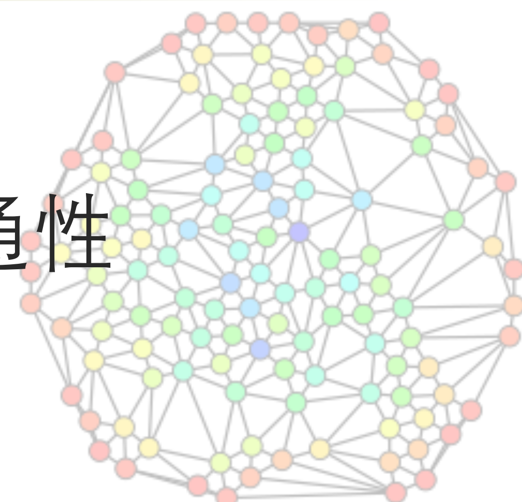
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics



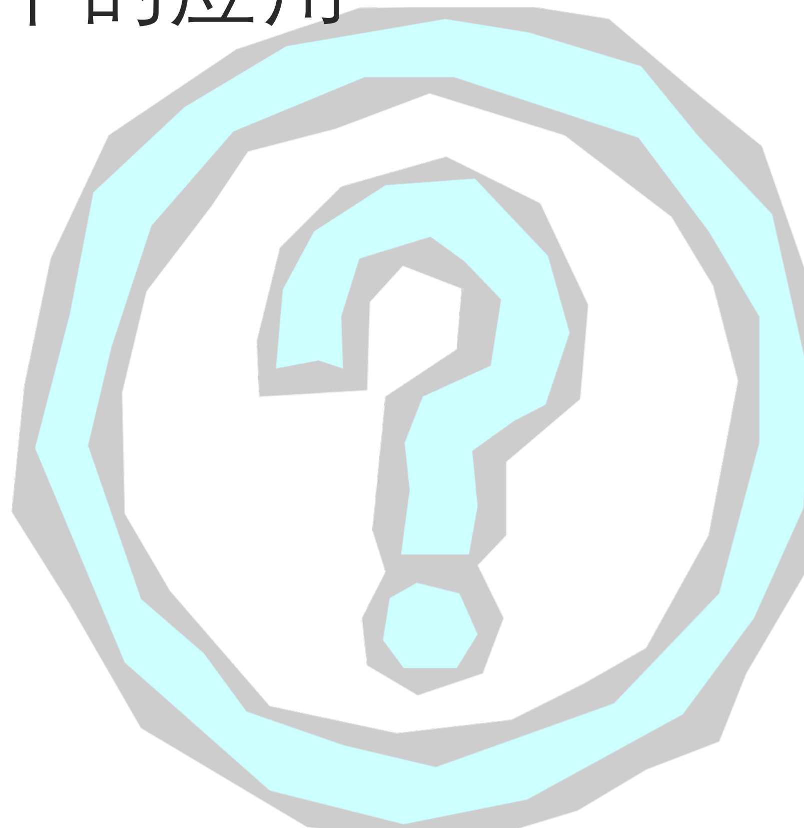
第十九讲：图的连通性

吴 楠
南京大学计算机科学与技术系

2020 年 12 月 21 日

前情提要

- 图论在计算机科学中的应用
- 图的定义与表示
- 图的术语
- 子图与图同构
- 图的基本运算
- 图模型及其应用
- 图的通路与回路



本讲主要内容

- 图的邻接矩阵表示与计算（参照课件自学）
- 无向图的连通性
- 连通的度量
- 点连通度与边连通度
- 点连通度与边连通度的关系
- 点连通度与边连通度的上限*

无向图的连通性（connectivity）

- 定义（无向图顶点间的连通关系）：设$G = \langle V, E \rangle$为无向图，$v_i, v_j \in V(G)$，定义关系~：$v_i \sim v_j$若v_i与v_j之间存在通路。易见，~为V上的等价关系

- 定义（无向图的连通性）：若$\forall u, v \in V(G), u \sim v$，称无向图$G$连通（connected）

- 定义（连通分支）：商集$V(G)/\sim = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_k]$为图$G$的连通分支（connected component），其计数为$p(G) = k$

无向图的连通性（续）

- 定义（连通图）：若无向图G是平凡图或任何两顶点均连通，称 G 为连通图（connected graph），否则称G是非连通图（disconnected graph）或分离图（separated graph）。显然，完全图$K_n(n \geq 1)$是连通图，零图$N_n(n \geq 2)$是分离图且其连通分支最多，为$p(N_n) = n$
- 对连通图，$p(G) = 1$；对非连通图，$p(G) \geq 2$

图的连通性（续）

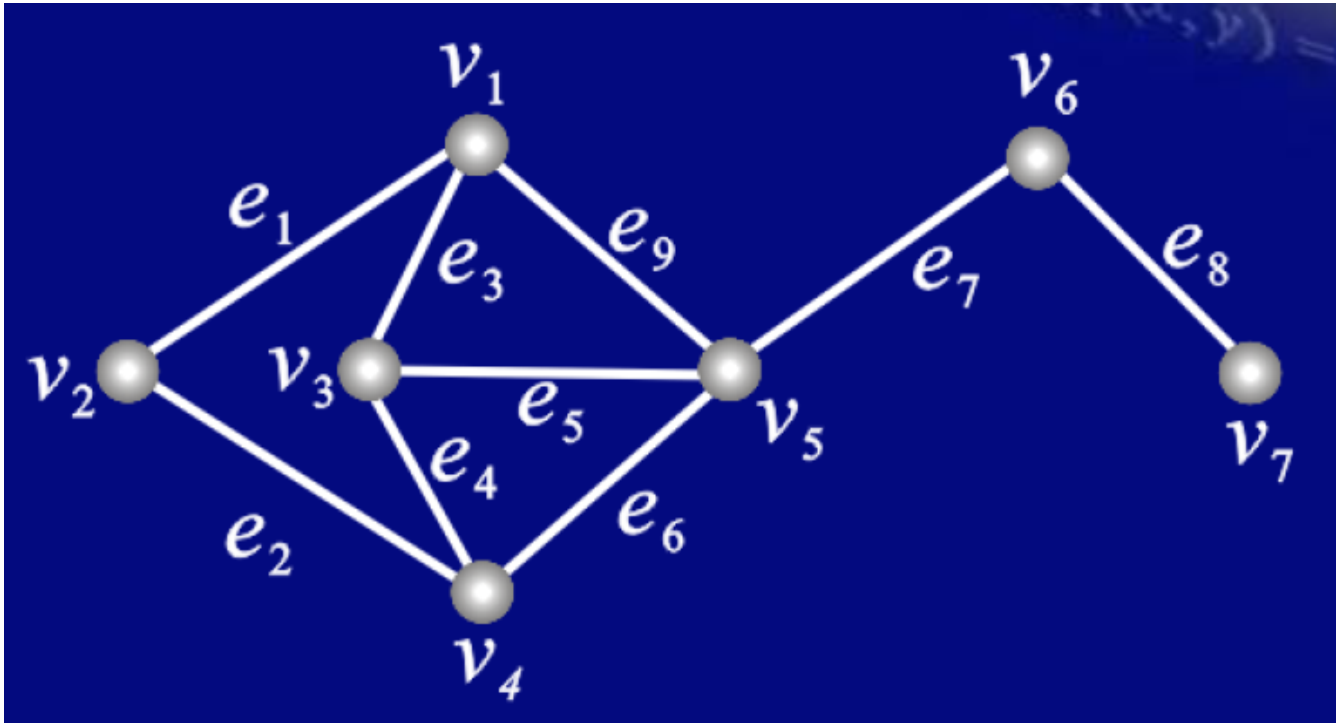
- 命题：若G不连通，则G的补图$\bar{G}$连通
- **证明：**

假设G不连通。任给$u, v \in \bar{G}$:

- 如果$uv \notin E(G)$，则u与v在$\bar{G}$中相邻；
- 如果$uv \in E(G)$，因为G是非连通图，一定存在顶点w与u, v在不同的连通分支中，于是$uw \notin E(G), vw \notin E(G)$。所以$uw \in E(\bar{G}), vw \in E(\bar{G})$，因此$(u, w, v)$是$\bar{G}$中的$(u, v)$－通路，$\bar{G}$是连通图. $\square$

连通性的度量

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$？



连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$？

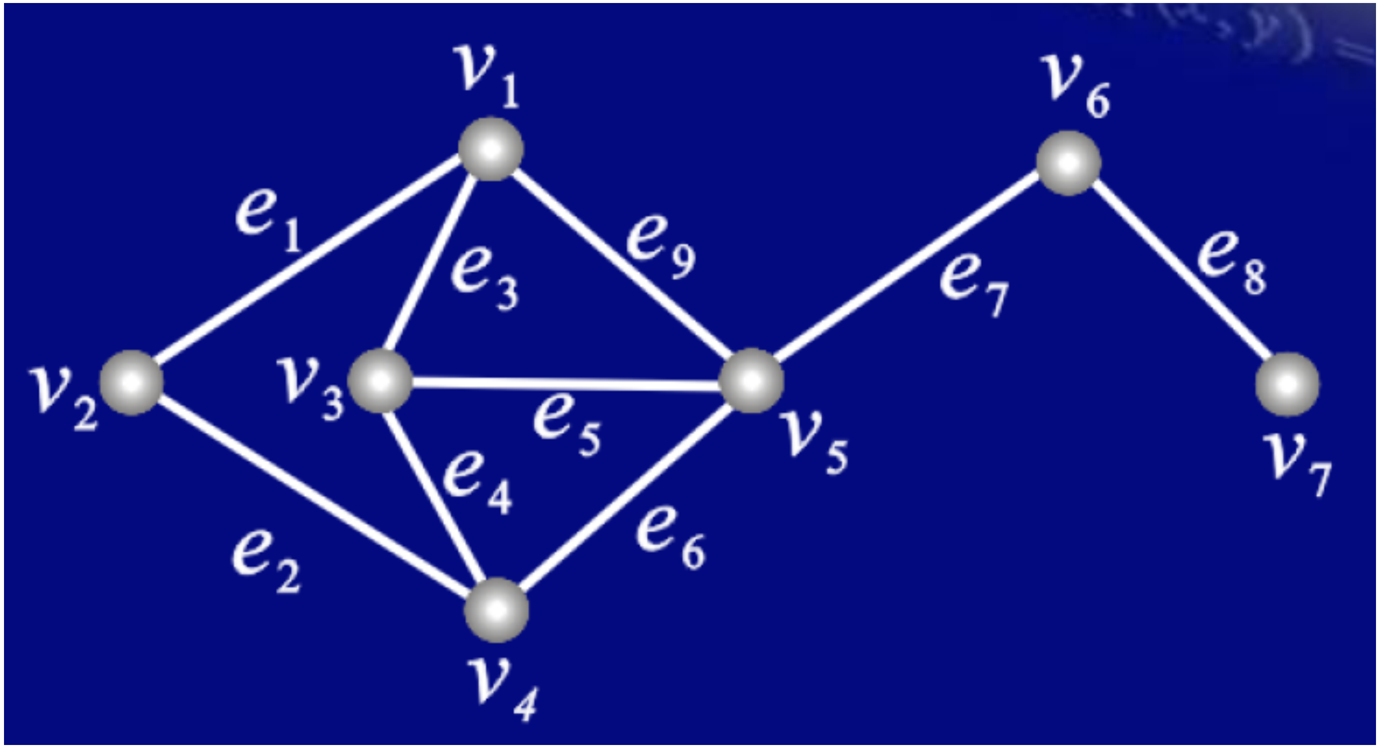
- (1) 边的删除可能导致连通分支数的增加：

$$p(G) \leq p(G-\{e\}) \leq p(G)+1$$

  - 第一个“不大于”显然成立(删除边e只会影响e所在的那一个连通分支)
  - 第二个“不大于”成立：注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将**两个**连通分支连成一个。因此删除某条边**不会**使连通分支增加多于一个

连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$？



连通性的度量（续）

- 讨论：对图G进行哪些基本操作，会影响G的连通分支数$p(G)$？

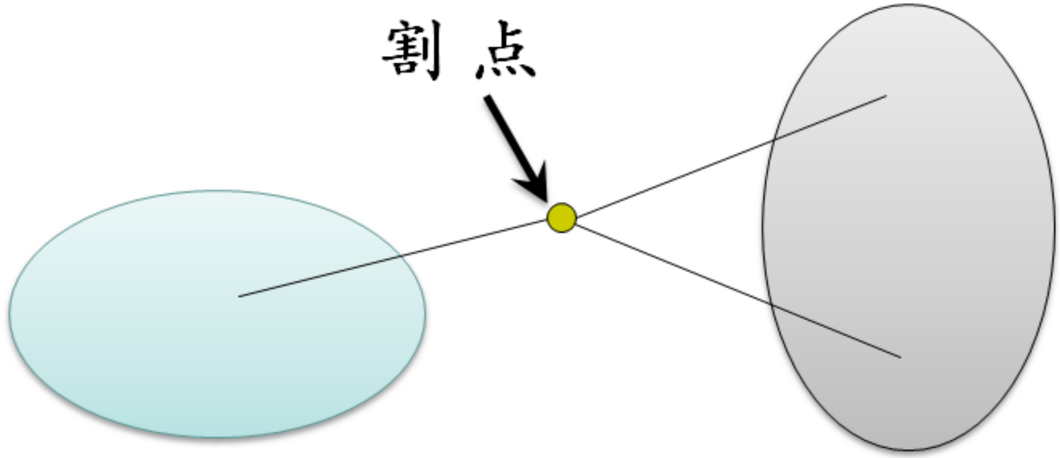
- (2) 点的删除可能导致连通分支数的增加或减少：

$$p(G)\ ?\ p(G-\{v\})$$

  - $p(G) > p(G-\{v\})$：删除孤立顶点连通分支数会**减少**
  - $p(G) = p(G-\{v\})$：删除悬挂顶点连通分支数**不变**
  - $p(G) < p(G-\{v\})$：删除星图中间顶点会导致连通分支数**增加**任意有限多个

连通性的度量（续）

- 定义（点割集与割点）：设无向图$G=\langle V,E\rangle$，若存在非空的$V'\subset V$使得$p(G-V')>p(G)$而对于任意的$V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$，则称集合V'是G的点割集，若$V'=\{v\}$，称v为割点



连通性的度量（续）

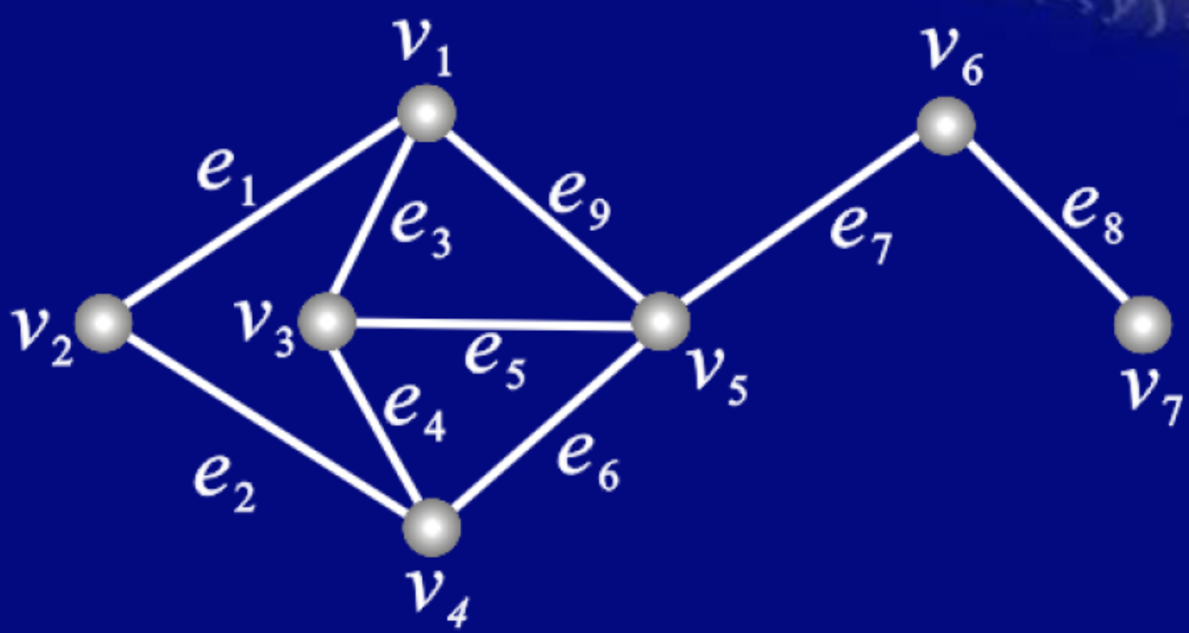
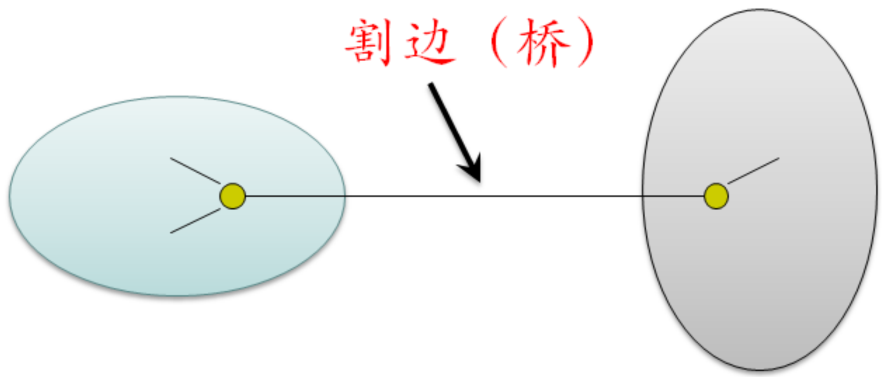


图 7

图 7 中，$\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗?

连通性的度量（续）

- 定义（**边割集与割边**）：设无向图$G=\langle V,E\rangle$，若存在非空的$E'\subset E$使得$\boldsymbol{p(G-E')>p(G)}$而对于任意的$E''\subset E'$，均有$\boldsymbol{p(G-E'')=p(G)}$，则称集合$E'$是$G$的边割集，或简称割集，若$E'=\{e\}$，称$e$为割边或桥



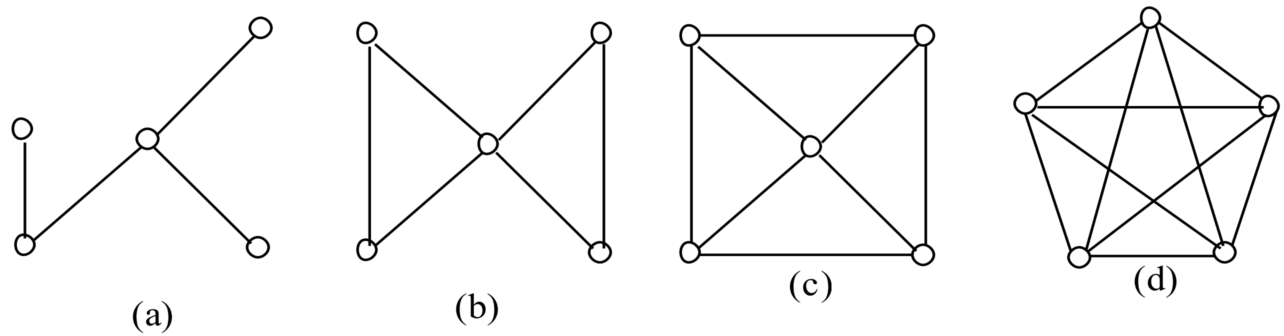
连通性的度量（续）

- 命题：e是割边当且仅当e不在G的任一简单回路上（注意：对割点则没有相应结论）
  - **证明：** $\Rightarrow$: 假设C是包含$e=(x,y)$的简单回路，令$C-\{e\}=P$，P是不含e的$(x,y)-$简单通路。对G中任意顶点u,v，若$(u,v)-$通路中不含e，则该通路也是$G-\{e\}$中的$(u,v)-$通路；若$(u,v)-$通路中含e，则将所有的e均替换为P，得到$G-\{e\}$中的$(u,v)-$通路，$\therefore G-\{e\}$仍连通，与e是割边矛盾；

    $\Leftarrow$: 假设$e=(x,y)$不是割边。则$G-\{e\}$仍连通，设P是$G-\{e\}$中的$(x,y)-$路径，P中不含e，则：$P+\{e\}$是G中的简单回路，矛盾. □

图的连通性的度量

- 试观察以下4图中连通的“强度”或“牢度”



  - 图a中删除任意一条边便不连通了
  - 图b则至少要删除两条边或删除当中那个顶点才不连通
  - 图c删除任意一个点都不可能不连通
  - 图d至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通

图的连通性的度量（续）

- 如何来衡量图中连通的程度？一个科学的方法是看图中有多少“关键”的顶点或边，去除这些顶点或边可导致连通分支数的变化；因此可用点割集和边割集的大小来度量连通性
- 那么，应该选取最小的点（边）割集还是最大的点（边）割集之大小来衡量呢？

图的连通性的度量（续）

图的连通性的度量（续）

性能信息和工具
控制面板 › 所有控制面板项 › 性能信息和工具
搜索控制面板
下一张
控制面板主页
调整视觉效果
调整索引选项
调整电源设置
打开磁盘清理
为计算机评分并提高其性能
Windows 体验指数可评估主要系统组件，分数范围从 1.0 到 9.9。
组件
评分的项目
子分数
基本分数
处理器:
每秒计算速度
7.1
内存(RAM):
每秒内存运行速度
7.1
图形:
桌面图形性能
4.8
游戏图形:
3D 商务和游戏图形性能
5.8
主硬盘:
磁盘数据传输速率
6.8
4.8
由最低子分数决定
查看和打印详细的性能和系统信息
你的分数是最新的
上次更新: 2013/9/5 20:58:21
重新运行评估

图的点连通度

- 定义（点连通度）：使非平凡连通图G成为不连通图或者平凡图需要删除的最少顶点数称为图G的点连通度（或连通度），记为$\kappa(G)$：

$$\kappa(G) = \min\{|T| \mid T\text{为}G\text{的点割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除$\kappa(G)$个点就一定会使该图不连通）

- 约定：非连通图或者平凡图的连通度为0

图的点连通度（续）

- 定义（k－连通图）：若图G的（点）连通度不小于k，称G是k－(点)连通图
    - 也就是说：k－连通图同样是1－，2－，3－，…，$(k-1)$－连通图，或者说：对k－连通图，如果删除少于k个顶点，它一定依然连通

图的边连通度

- 定义（**边连通度**）：使非平凡连通图G成为不连通图或者平凡图需要删除的最少边数称为图G的边连通度，记为$\lambda(G)$：

$$\lambda(G) = \min\{|S| \mid S\text{为}G\text{的边割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除$\lambda(G)$条边就一定会使该图不连通）

- 约定：非连通图或者平凡图的边连通度为0

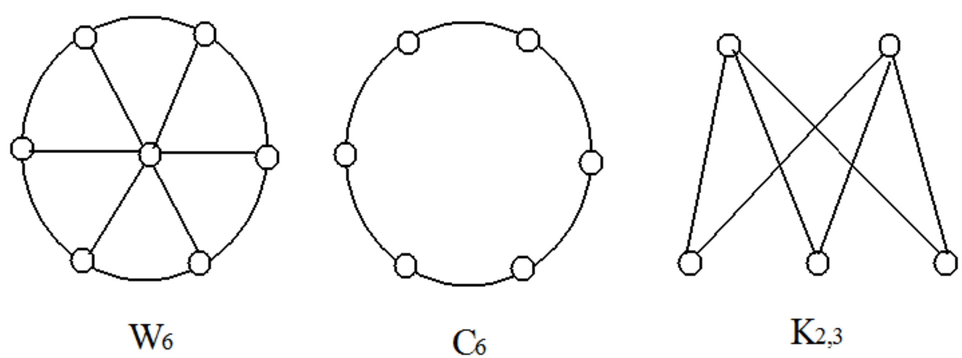
图的边连通度（续）

- 定义（k −边连通图）：若图G的边连通度不小于k，称G是k −边连通图
  - 也就是说：k −边连通图同样是$1-$，$2-$，$3-$，⋯，$(k-1)-$边连通图，或者说：对$k-$边连通图，如果删除少于k条边，它一定依然连通

点连通度与边连通度的关系

- 对6阶轮图W_6：$\kappa(W_6) = \lambda(W_6) = 3 = \delta(W_6)$
- 对6阶圈图C_6：$\kappa(C_6) = \lambda(C_6) = 2 = \delta(C_6)$
- 对完全二部图$K_{2,3}$：$\kappa(K_{2,3}) = \lambda(K_{2,3}) = 2 = \delta(K_{2,3})$

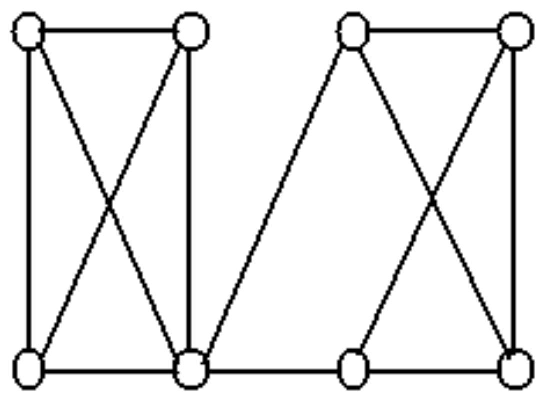
$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)\,?$$



点连通度与边连通度的关系（续）

$\cancel{\kappa = \lambda = \delta}\,?$

- ✓ $\kappa(G) = 1$
- ✓ $\lambda(G) = 2$
- ✓ $\delta(G) = 3$



G

- **我们猜想：** $\boldsymbol{\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)}$

点连通度与边连通度的关系（续）

猜想：$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

- **证明：(1) $\kappa(G) \le \lambda(G)$**，对边连通度λ进行归纳：
- Basis：$\lambda = 0$时，G为N_1或分离图，从而$\kappa = 0$；

  $\lambda = 1$时，设e为G之桥，u与v为e之端点，从而$G - \{u\}$不连通或为N_1，故$\kappa = 1$；故当$\lambda = 0,1$时，有$\kappa \le \lambda$；

点连通度与边连通度的关系（续）

- **证明：(1) $\boldsymbol{\kappa(G) \le \lambda(G)}$（续）**
- I.H.：对任意图G，$\lambda(G) = k$，有$\kappa(G) \le \lambda(G) = k$
- Ind. Step：设H为无向图且$\lambda(H) = k + 1$，设$S = \{e_0, e_1, \cdots, e_k\}$为$H$之最小边割集，从而易见：$\lambda(H - \{e_0\}) = k$，由I. H.知，$H - \{e_0\}$有点割集$T$且$|T| \le k$，设$u$为$e_0$的一个端点，从而$T \cup \{u\}$为$H$的点割集，故$\kappa(H) \le k + 1 = \lambda(H)$，归纳完成.□

点连通度与边连通度的关系（续）

猜想：$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

- **证明：(2) $\lambda(G) \le \delta(G)$**

设$v \in V(G)$且$d(v) = \delta(G)$，且S为与v关联的边的集合，有$|S| = \delta(G)$。$\because G - S$为N_1或分离图，$\therefore \lambda(G) \le \delta(G)$. $\square$

- **故猜想成立**

点连通度与边连通度的关系（续）

- 练习(★★★)：G是n阶简单图且$\delta(G) \ge \lfloor n/2 \rfloor$，试证明：$\lambda(G) = \delta(G)$（Chartrand, 1966）

- (留作习题) G是n阶简单图且$\delta(G) \ge n-2$，试证明：$\kappa(G) = \delta(G)$

- 上述2种情况下，图之点（边）连通度皆达上限

点连通度与边连通度的关系（续）

- **证明（用反证法）：** 由于对于任意简单图G，有$\lambda(G) \leq \delta(G)$，假设已知条件下$\lambda(G) = p < \delta(G)$，则存在最小边割集$S \subseteq E(G)$使得$|S| = p$且$G - S$含两个连通分支(回忆$p(G-\{e\}) \leq p(G)+1$)$G_1$与$G_2$；不妨设$|G_1| \leq |G_2|$，则$|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor$；由于$G$是简单图，故$G_1$中顶点度数之和不大于$K_{|G_1|}$的顶点度数之和加之上已被删除的边数$p$，即：$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) \leq |G_1|(|G_1|-1) + p < |G_1|(|G_1|-1) + \delta(G)$；注意$|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq \delta(G)$（已知条件），故有：$\sum_{v \in V(G_1)} d(v) < \delta(G)(|G_1|-1) + \delta(G) = |G_1| \cdot \delta(G)$，即$G_1$子图的度数和小于$G_1$的度数下限，这显然不可能，故假设错误，$\lambda(G) = \delta(G)$. □

点连通度与边连通度的上限*

- 定理（Whitney, 1933）：对任意图G，

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

（只需证明$\delta(G) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$）

- 定理（Harary, 1962）：对任意图G，

$$\kappa(G), \lambda(G) \le \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

（不依赖上述结论，证明超出范围）

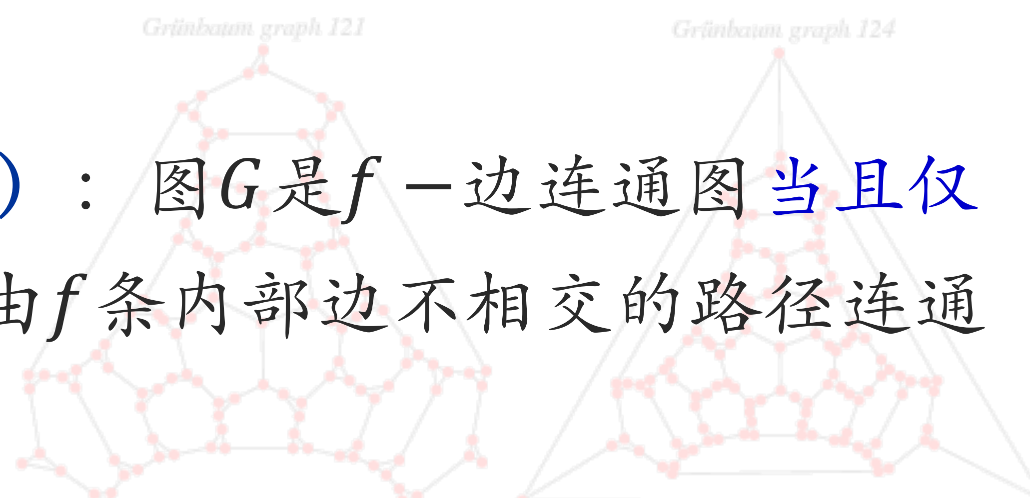
连通度与点(边)不相交的通路*

- 定理*（Whitney, 1935）： 图G是f－连通图当且仅当G中任意两点被至少f条内部（即除端点外）顶点不相交的路径连通

  （证明超出范围）

- 定理*（Menger, 1927）： 图G是f－边连通图当且仅当G中任意两点至少由f条内部边不相交的路径连通

  （证明超出范围）



本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 10.3.3，10.3.4（自学内容），10.4.3 节
- 课后习题：
  - Problem Set 19
- 提交时间：12月28日（习题课时发回）