Problem Set 19

Problem 1

(1)

用反证法,设S为G的最小点割集,假设$\kappa(G) = |S| < n - 2$

$\therefore$ 令$G_1 = G - S, |G_1| = n - |S| \geq 3, G_1$的连通分支数$p(G) \geq 2$

$\therefore$ 存在其中的一个连通分支V_0,使得剩下的连通分支的点的数目 ≥ 2

$\therefore$ 对于V_0其中的一个点v_0来说,
在G中的点度数$d(v_0) \leq |S| + (|G_1| - 2 - 1) = n - 3$

$\therefore d(v_0) \leq n - 3 < n - 2 \leq \delta(G)$,产生矛盾

$\therefore |S| \geq n - 2$

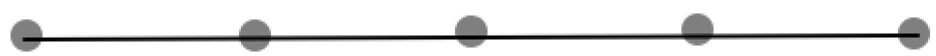
$\because$ 对任意简单图G,有$\kappa(G) = |S| \leq \delta(G)$

考虑是否存在$|S| = n - 2, \delta(G) = n - 1$的情况：

任何一个全图,去掉任意$n - 2$个点之后,
都依然存在一条边相连剩下的两个点,即这种可能性不存在

$\therefore$ 综上,$\kappa(G) = \delta(G)$

(2)



如图,$n=5, \delta(G)=2, \kappa(G)=1$

Problem 2

对于充分性：

$\because$ 简单图G是二部图,记这两个部分为V_1和V_2

假设G包含一条奇数条边的回路,
设为$\Gamma=v_0e_1\cdots e_kv_k$,其中$k$为奇数,$v_i$和$v_j$为$e_j$的端点,$v_k=v_0$

不妨令$v_0\in V_2$,那么由二部图性质与v_0,v_1通过e_1相邻可知$v_1\in V_1$

同理可知$v_2,v_4,\cdots,v_{k-1}\in V_2, v_3,v_5,\cdots,v_k\in V_1$

此时$v_0=v_k\in V_1$且$v_0=v_k\in V_2$,产生矛盾

$\therefore G$没有包含奇数条边的回路

对于必要性：

$\because G$没有奇数条边的回路

假设G的任意一条回路$\Gamma=v_0e_1\cdots e_kv_k$,
其中k为偶数,v_i和v_j为e_j的端点,$v_k=v_0$

我们令$v_0,v_2,v_4,\cdots,v_k\in V_2, v_3,v_5,\cdots,v_{k-1}\in V_1$,
即偶数顶点位于V_2,奇数顶点位于V_1

$\because$ 任意一条边$v_ie_jv_j$都可以构造出一个偶数边回路$v_ie_iv_je_jv_i$

$\therefore$ 对于任意边都可以让这条边的两个端点分属V_1和V_2

$\therefore G$是二部图

Problem 3

(1)

反驳：

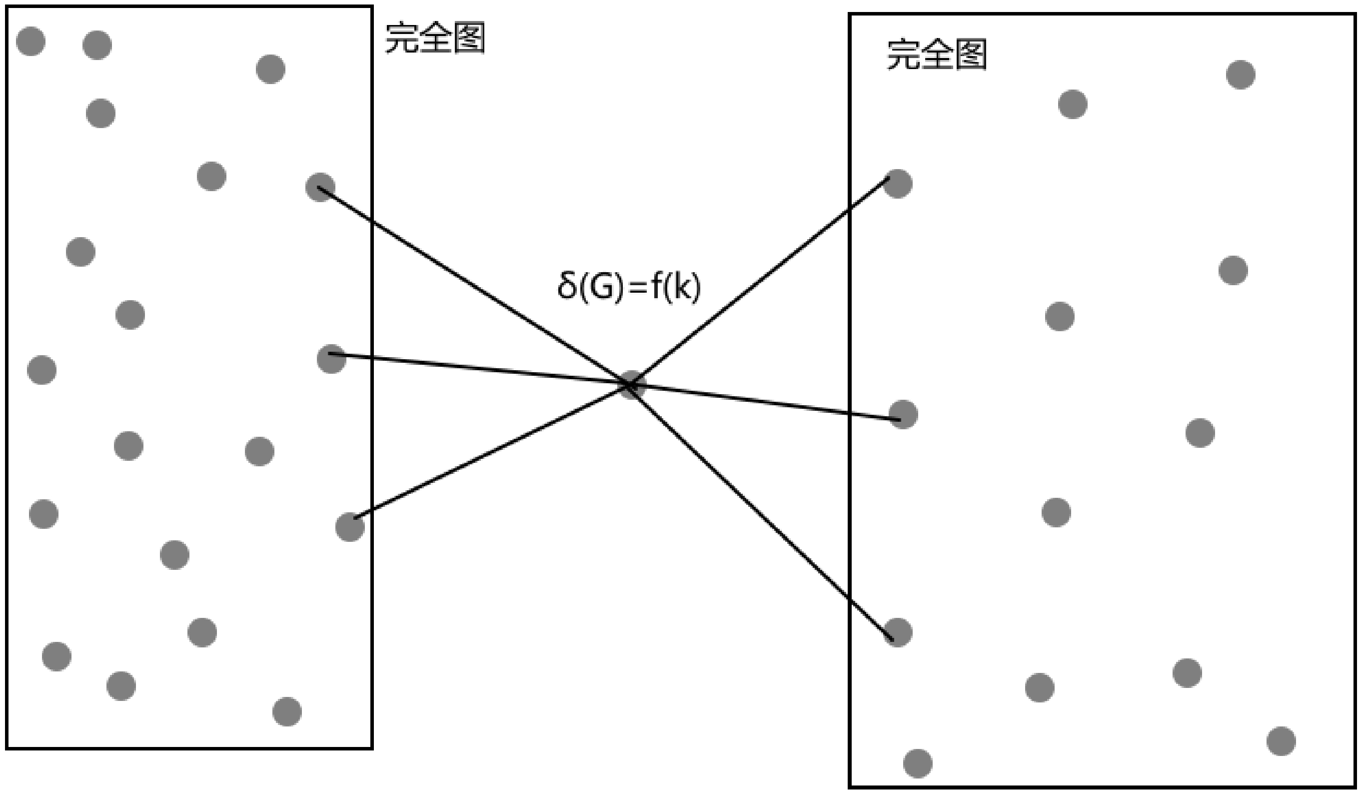
设该最小度$f(k)=\delta$,我们可以构造出这样的图：

中间有一点v_0,且$d(v_0)=\delta$,两边与两个完全图$K_{(\delta+1)}$相连

则改图满足最小度至少为$f(k)=\delta$,但是这个图的连通度$\kappa=1$

我们可知对任何$f(k)\in\mathbb{N}$都存在这样的一个图,使得$k\leq\kappa=1$

$\therefore$ 不存在这样的函数f



(2)

反驳：

由(1)中的图可知,只要我们将点v_0纳入左边的完全图里,
这时可以同理剩下的边作为$f(k)$,即边连通度

我们仍然可以知道$\kappa=1$,与(1)同理可知不存在这样的函数f

Problem 4

假设能够有一种删除k条边获得多于2个连通分支的方法

则我们可知可以删除这k条边其中的p条边,来获得2个连通分支,$p<k$

$\therefore$ 这p条边是G的边割集,可知边连通度$\lambda\leq p$

$\therefore k\leq\lambda\leq p<k$,产生矛盾

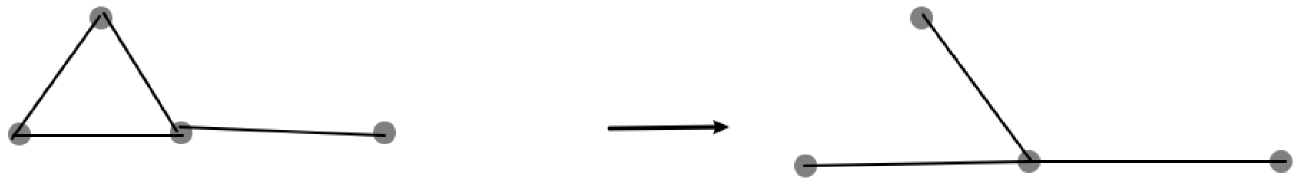
$\therefore$ 最多能获得两个连通分支

Problem 5

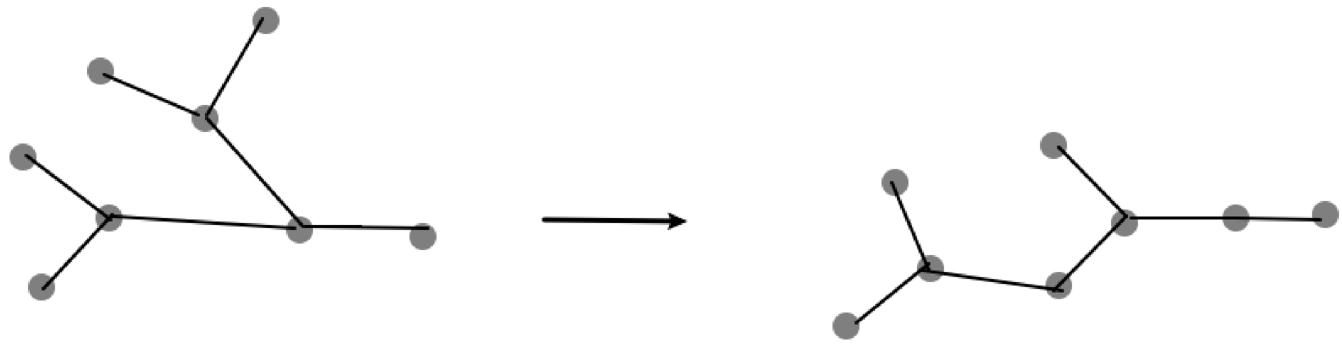
(1)

假设$\varepsilon < v - 1$

对于连通图G的所有初级回路,去掉其中的一条边,
则仍然有边数$\varepsilon' < \varepsilon < v - 1$,且此时图变成了树



对于将树的枝干移动到另一条枝干上的顶点上,易知不会改变边数ε'



循环此过程,则能够将图变为一个ε'条边的线图,且点数v不变

$\therefore$ 由线图存在一条路径将整个图连通可知

$\therefore \varepsilon' = v - 1$,与$\varepsilon' < v - 1$矛盾

$\therefore$ 任意连通的简单图都有$\varepsilon \geq v - 1$

(2)

$\because$ 若已知$\varepsilon = v$时,G中有回路,
　则加上任意条边使得$\varepsilon \geq v$时,G仍有回路

$\therefore$ 只需证$\varepsilon = v$时,G中有回路

当$\varepsilon = 1$或者$\varepsilon = 2$时,不能实现只有有1个或2个点,舍去

当$\varepsilon = 3$时,易知此时存在回路

假设当$\varepsilon = k$时,G中有回路$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_0$

则当$\varepsilon = k+1$时,

任意一个边数点数均为$k+1$的图都可以分为两类:圈图和非圈图

对于圈图,易知这个图有回路,即$v_0 e_1 \cdots e_{k+1} v_0$

对于非圈图,则存在一个度数为1的点,设为v_0,与其相连的边为e_0

去点v_0和e_0之后,则该图变为边数点数都为ε的图,由归纳假设可知有回路

$\therefore$ 综上所述,G中有回路