

# 离散数学作业 Problem Set 9

## Problem 1

请给出下列各集合的基数.

- (1)  $A = \{x, y, z\}$ ;
- (2)  $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in N\}$ ;
- (3)  $C = \{x | x = n^{109} \wedge n \in N\}$ ;
- (4)  $B \cap C$  (基于 (2), (3) 小题的定义);
- (5)  $B \cup C$  (基于 (2), (3) 小题的定义);
- (6) 平面上所有的圆心在  $x$  轴上的单位圆的集合.

## Problem 2

设  $A, B$  为可数集 (包括有穷集和无穷可列集, 下同), 证明:

- (1)  $A \cup B$  是可数集;
- (2)  $A \times B$  是可数集.

## Problem 3

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的. 对那些可数无限集合, 给出在自然数集合和该集合之间的一一对应.

- a) 大于 10 的整数;
- b) 奇负整数;
- c) 绝对值小于 1 000 000 的整数;
- d) 0 和 2 之间的实数 (不包含 0 和 2);
- e) 集合  $A \times \mathbb{Z}^+$  这里  $A = \{2, 3\}$ ,  $\mathbb{Z}^+$  表示正整数集合;
- f) 10 的整数倍.

### Problem 4

如果  $A$  是不可数集合而  $B$  是可数集合 (包括有穷集和无穷可列集), 那么  $A - B$  一定是不可数的吗? 请给出证明.

### Problem 5

假设  $A$  是可数集合 (包括有穷集和无穷可列集). 证明如果存在一个从  $A$  到  $B$  的满射函数  $f$ , 则  $B$  也是可数的.

### Problem 6

证明: 如果  $A$  和  $B$  是集合且  $A \subset B$ , 则  $A \preceq B$ .

### Problem 7

设  $A = a, b, c$ ,  $B = 2^A$ , 由定义证明  $\mathcal{P}(A) \approx 2^A$ .

### Problem 8

确定下列集合是否为无限可数集, 若是, 请给出自然数集合到该集合之间的一个双射函数; 若不是, 请说明理由:

- (1) 偶数;

(2) 0 和 0.5 之间的实数 (不包括 0 和 0.5);

(3) 是 7 的倍数的整数;

(4) 不能被 3 整除的整数.

### **Problem 9**

给出两个不可数集合  $A$  和  $B$  的例子使得  $A - B$  是

a) 有限的;

b) 可数无限的;

c) 不可数的.

### **Problem 10**

证明: 可数多个可数集的并集是可数的 (包括有穷集和无穷可列集).