Доп Задание

Приложение степенных рядов

Вариант 23

№1

Разложение e^x в р. Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$|x| < \infty$

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \dots$$

$$r_n(x) = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

$(n+1) < (n+2)$

$(n+1) < (n+3)$

$(n+1) < (n+4)$

и т.д.

Тогда $r_n(x) < \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \right.$

$$+ \frac{x^3}{(n+1)^3} + \dots \Big)$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}; \quad b_1 = \frac{x}{n+1}; \quad q = \frac{x}{n+1}$$

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \frac{x/(n+1)}{1 - x/(n+1)} =$$

$$= \frac{x^n}{n!} \frac{x}{n+1-x}$$

$$r_n(x) = \frac{x^n}{n!} \frac{x}{n+1-x}$$

Подставим в ряд Маклорена

$x = \frac{1}{3}$, тогда

$$e^{1/3} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} + \frac{1}{3! \, 3^3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n! \, 3^n} + \dots$$

Т.к. $x = 1/3$, тогда

$$r_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{1}{n! \, 3^n} \frac{1/3}{n+1-1/3} =$$

$$= \frac{1}{n! \, 3^n} \frac{1}{3n+1}$$

Пусть $r_n < 0{,}00001$, тогда методом подбора

Если $n=4$, то

$$r_4 < \frac{1}{4!\,3^4}\frac{1}{3\cdot 4+1} > 0{,}00001$$

Если $n=5$, то

$$r_5 < \frac{1}{5!\,3^5}\frac{1}{3\cdot 5+1} < 0{,}00001$$

Значит при $n=5$

$$e^{1/3} \approx 1+\frac{1}{1!\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 3^2}+\frac{1}{3!\,3^3}+\frac{1}{4!\,3^4}+$$

$$+\frac{1}{5!\,3^5} \approx 1{,}000000+0{,}333333+$$

$$+0{,}055555+0{,}006172+0{,}000514+$$

$$+0{,}000034 \approx 1{,}395608$$

Ответ: $e^{1/3} \approx 1{,}395608$ с точностью до $\delta = 0{,}00001$

№2

Разложение $\operatorname{arctg} x$ в р. Маклорена

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$-1 < x < 1$

$$x = \frac{\pi}{10}: \operatorname{arctg}\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5} + \dots,$$

$$\frac{\pi}{10} \approx 0{,}3142,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0{,}0310,\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0{,}0031$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3} \approx 0{,}0103,\ \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5} \approx 0{,}0006$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5} < 0{,}001$$

Достаточно первых двух членов ряда

$$\operatorname{arctg}\frac{\pi}{10} \approx 0{,}3142 - 0{,}0103 \approx 0{,}3039 \approx 0{,}304$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{10} \approx 0{,}304$ с точностью $\delta = 0{,}001$

№3

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$$

Разложим $\sin x$ и e^x в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$|x| < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$|x| < \infty$

Разложим e^{-x} и $\sin 2x$ в р. Маклорена

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \dots$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right) - 1 + x^4}{2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{25x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{25x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)}{x\left(2 - \frac{(2x)^2}{3!} + \frac{(2x)^4}{5!} - \frac{(2x)^6}{7!} + \frac{(2x)^8}{9!}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{25x^3}{4!} - \frac{x^4}{5!} + \dots}{2 - \frac{(2x)^2}{3!} + \frac{(2x)^4}{5!} - \frac{(2x)^6}{7!} + \frac{(2x)^8}{9!}} = -0{,}5$$

№4

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx, \quad \delta = 0{,}001$$

Разложим $\sin x$ в р. Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

Разложение $\sin x^2$ в р. Маклорена

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots, \quad |x| < \infty$$

Разложим $\frac{\sin x^2}{2}$ в р. Маклорена

$$\frac{\sin x^2}{x} = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \frac{x^{17}}{9!} + \dots, \quad |x| < \infty$$

Радиус сходимости $R = \infty$, т.к. на промежутке $[0; 1/2]$ ряд можно проинтегрировать почленно.

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \int_0^{1/2}\left(x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \frac{x^{17}}{9!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{3!\cdot 6} + \frac{x^{10}}{5!\cdot 10} - \frac{x^{14}}{7!\cdot 14} + \frac{x^{18}}{9!\cdot 18} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{3!\cdot 6\cdot 2^6} + \frac{1}{5!\cdot 10\cdot 2^{10}} - \frac{1}{7!\cdot 14\cdot 2^{14}} + \frac{1}{9!\cdot 18\cdot 2^{18}} + \ldots$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{3!\cdot 6\cdot 2^6} + \frac{1}{5!\cdot 10\cdot 2^{10}} - \frac{1}{7!\cdot 14\cdot 2^{14}} + \frac{1}{9!\cdot 18\cdot 2^{18}} + \ldots$$

$u_1 \approx 0{,}1250$, $u_2 \approx -0{,}0004$; $u_3 \approx 0{,}0000008$

$$\left|\frac{1}{5!\cdot 10\cdot 2^{10}}\right| < 0{,}001$$

Достаточно взять сумму двух первых членов ряда

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx \approx \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{3!\cdot 6\cdot 2^6} \approx 0{,}1250 - 0{,}0004 \approx$$

$$\approx 0{,}1246 \approx 0{,}125$$

Ответ: $\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}\,dx \approx 0{,}125$ с точностью до $\delta = 0{,}001$

№5

$$y' = e^{\sin x} + x; \quad y=0 \text{ при } x=0$$

Решение диф. ур-я будем искать в виде ряда:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

Продифференцируем

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots$$

Разложим $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Разложим e^x в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Тогда $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) +$

$$+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^2}{2!} + \dots$$

Подставляем ряды и значение y' в диф. ур.:

$$C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \dots =$$

$$= x + 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^2}{2!} +$$

$$\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^4}{4!}$$

Т.к. по усл. $y=0$ при $x=0$, значит $C_0=0$

Приравняем коэф. при одинаковых степенях x!

$C_1=1$

$x: \; 2C_2=1+1 \Rightarrow C_2=1$

$x^2: \; 3C_3=0{,}5 \Rightarrow C_3=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!}$

$x^3: \; 4C_4=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \Rightarrow C_4=0$

$x^4: \; 5C_5=-\frac{1}{4!}=-\frac{1}{120}=-\frac{1}{5!}$

$x^5: \; 6C_6=\frac{1}{5!}+\frac{1}{5!}=\frac{1}{360}$

Ответ: $y=x+x^2+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{360}+\ldots$

№6

$y'+2y=x^2; \; y=1$ при $x=0$

Решение искомого диф. ур.-я будем искать в виде

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}(x-0)+\frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2+$$
$$+\frac{y'''(0)}{3!}(x-0)^3+\ldots$$

$y'(0) = 0^2 - 2\cdot 1 = -2$

Значения $y'', y''', y^{(4)}, \ldots$ находим с помощью последовательного дифф. ур-я $y' = x^2 - 2y$

$y'' = 2x - 2y'$; $y''(0) = 0 - 2y'(0) = 4$

$y''' = 2 - 2y''$; $y'''(0) = 2 - 2y''(0) = 2 - 8 = -6$

$y^{(4)} = -2y'''$; $y^{(4)}(0) = -2y'''(0) = 12$

Найденные значения производных подставим в ряд

$$y = 1 + \frac{-2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{6x^3}{3!} + \frac{12x^4}{4!} =$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2}$$

Ответ: $1 - 2x + 2x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2}$