Вариант 23

№1

1.1) $\begin{cases} \dot{x} = 4y + x \\ \dot{y} = y + x \end{cases}$

$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{r}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$

$\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 =$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$ – точка покоя $(0;0)$ неустойчива (седло)

1) $\lambda_1 = 3$

$\begin{cases} (1-3)Y_1 + 4Y_2 = 0 \\ Y_1 + (1-3)Y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2Y_1 + 4Y_2 = 0 \\ Y_1 - 2Y_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 = 2y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2y_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

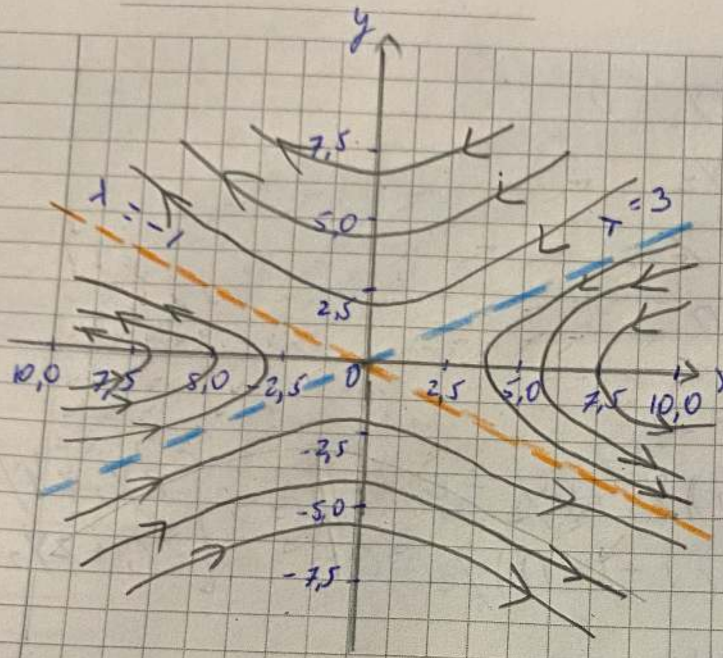
2) $\lambda_2 = -1$

$$\begin{cases} (1-(-1))y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 + (1-(-1))y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 = -2y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2y_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$1.2)\ \begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = y - 9x \end{cases}$$

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -9 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda) - 4\cdot(-9) = \lambda^2 - 0\lambda - 37$$

$$\lambda^2 - 37 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{37}\,i$$

точка покоя (0;0) устойчива (центр)

1) $\lambda = \sqrt{37}\,i$;

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{37}\,i)y_1 + 4y_2 = 0 \\ -9y_1 + (1-\sqrt{37}\,i)y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 - \sqrt{37}\,i y_1 + 4y_2 = 0 \\ -9y_1 + y_2 - \sqrt{37}\,i y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 + \sqrt{37}\,i y_1}{4} \\ -9y_1 + \dfrac{y_1 + \sqrt{37}\,i y_1}{4} - \dfrac{\sqrt{37}\,i(y_1 + \sqrt{37}\,i y_1)}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 + \sqrt{37}\,i y_1}{4} \\ -9y_1 + \dfrac{y_1 + \sqrt{37}\,i y_1 - \sqrt{37}\,i y_1 + 37y_1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 + \sqrt{37}\,i y_1}{4} \\ -9y_1 + 9{,}5y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

2) $\lambda = -\sqrt{37}\,i$

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{37}\,i)y_1 + 4y_2 = 0 \\ -9y_1 + (1+\sqrt{37}\,i)\,y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 + \sqrt{37}\,i\,y_1 + 4y_2 = 0 \\ -9y_1 + y_2 + \sqrt{37}\,i\,y_2 = 0 \end{cases}$$

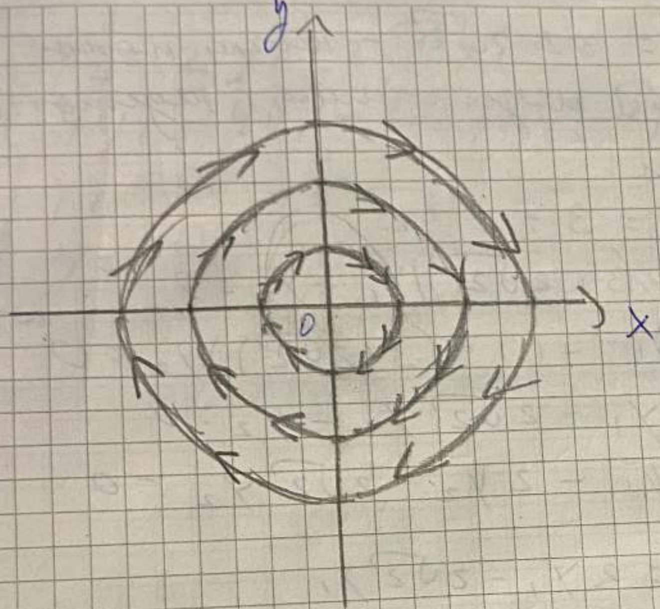
$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1}{4} \\ -9y_1 + \dfrac{y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1}{4} + \dfrac{\sqrt{37}\,i\,(y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1)}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1}{4} \\ -9y_1 + \dfrac{y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1 + \sqrt{37}\,i\,y_1 + 37y_1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 - \sqrt{37}\,i\,y_1 \\ -9y_1 + 9,5\,y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{37}\,t) \\ \sin(\sqrt{37}\,t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{37}\,t) \\ -\cos(\sqrt{37}\,t) \end{pmatrix}$$



1.3) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$

$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$

$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{r}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$

$\dot{\vec{r}} \begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)+4 =$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda = 3$

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = $$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Значит точка покоя (0;0) неустойчива (неустойчивый вырожденный узел)

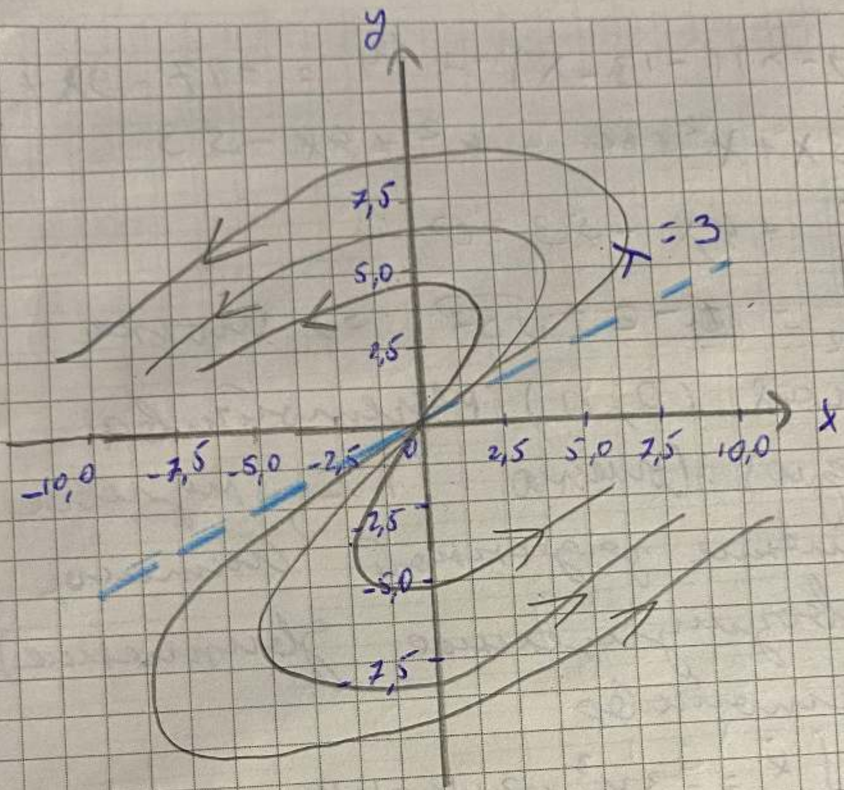
$$\begin{cases} (5-3)y_1 - y_2 = 0 \\ 4y_1 + (1-3)y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 - y_2 = 0 \\ 4y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2y_1 \\ 4y_1 - 4y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2y_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



№2

2.1) $\begin{cases} \dot{x} = 9x + 2e^{x} + xy - 8y - 2\cos y \\ \dot{y} = 8x + 12\sin x - 5x^{3}y - 13y \end{cases}$

Разложения по ф-ле Тейлора

$$2e^{x} = 2 + \frac{2x}{1!} + \frac{2x^{2}}{2!} + \frac{2x^{3}}{3!} + \dots$$

$$2\cos y = 2 + \frac{-2x^{2}}{2!} + \frac{2x^{4}}{4!} + \frac{-2x^{6}}{6!} + \dots$$

$$12\sin x = \frac{12x}{1!} + \frac{-12x^{3}}{3!} + \frac{12x^{5}}{5!} + \dots$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 9x + 2x - 8y + R_1(x;y) \\ \dot{y} = 8x + 12x - 13y + R_2(x;y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 11x - 8y + R_1(x;y) \\ \dot{y} = 20x - 13y + R_2(x;y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 11x - 8y \\ \dot{y} = 20x - 13y \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 11 & -8 \\ 20 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 \\ 20 & -13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (11-\lambda)(-13-\lambda) - (-8)20 =$$

$$= -143 - 11\lambda + 13\lambda + \lambda^2 + 160 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 17$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$\lambda = -1 \pm 4i$ – точка покоя $(0;0)$ является устойчивым фокусом (асимптотически устойчива). Согласно T_1, нулевое решения заданной системы (невозмущенного движения) асимптотически устойчиво.

2.2) $\begin{cases} \dot{x} = -3x^3 + 2xy - 4y \\ \dot{y} = 3x - 4yx - \frac{1}{3}y^4 \end{cases}$

Система первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-\lambda) - (-4)\cdot 3 = \lambda^2 + 12$$

$$\lambda^2 + 12 = 0$$

$$\lambda = \pm 2\sqrt{3}i$$

Так как корни характеристического ур-я имеют равные нулю действительные части, то по системе ур-й первого приближения в данном случае нельзя судить об устойчивости нулевого решения заданной системы.

№3

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + \alpha y \\ \dot{y} = \alpha x - 7y \end{cases}$$

Система имеет устойчивое положение равновесия $(0,0)$ при

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in R$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$
   $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$

2) $\lambda_1 = p + iq$; $\lambda_2 = p - iq$
   $p < 0$; $q \neq 0$

3) $\lambda_1 = iq$; $\lambda_2 = -iq$; $q \neq 0$

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$
   $rank(A - \lambda E) = 1$

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$
   $rank(A - \lambda E) = 0$

$$A = \begin{vmatrix} -7 & \alpha \\ \alpha & -7 \end{vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & \alpha \\ \alpha & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-7-\lambda)(-7-\lambda) - \alpha^2 =$$

$$= -\alpha^2 + \lambda^2 + 14\lambda + 49$$

$$-\alpha^2 + \lambda^2 + 14\lambda + 49 = 0$$

$$\alpha^2 = (\lambda+7)^2$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -\alpha - 7 \\ \lambda_2 = \alpha - 7 \end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda = \pm\alpha - 7$$

Комплексных чисел нет, значит подходит случай 1; при этом $\alpha < 6$; $\alpha \neq 0$

Чтобы проверить случаи 4 и 5 найдем ранг матрицы

1) $\lambda = \alpha - 7$

$$\operatorname{rank}(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -7-(\alpha-7) & \alpha \\ \alpha & -7-(\alpha-7) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

В таком случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, то невозможно, т.к. по усл из п. 1

$\alpha \neq 0$, но это единственный

случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2$

2) $\lambda = -\alpha - 7$

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -7-(-\alpha-7) & \alpha \\ \alpha & -7-(-\alpha-7) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Здесь то же самое

Ответ: $\alpha < 6$; $\alpha \neq 0$