Лекция. Многогранники. Теорема Эйлера. Призма

Многогранники и их основные свойства.

1. Понятие о многогранниках. Тело, ограниченное плоскими многоугольниками, называется ***многогранником*** (рис. 13.1). Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника.

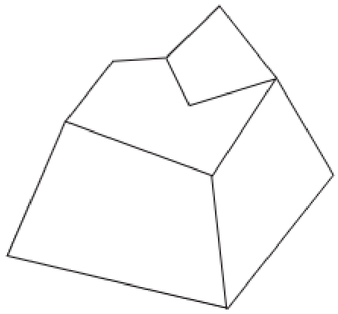


Рис. 13.1

Грани, имеющие общее ребро, называются *смежными*. Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

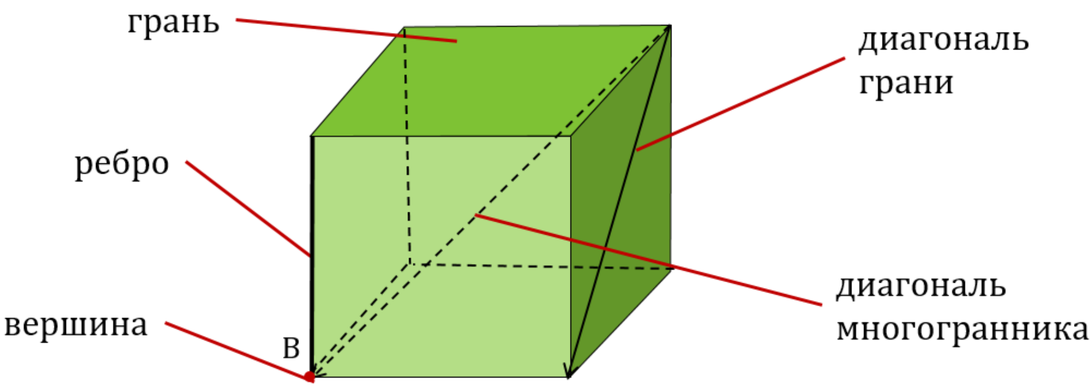
Многогранники различают по форме и по числу граней.

Многогранник называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две внутренние точки многогранника, не пересекает его поверхности; в противном случае многогранник называется *невыпуклым*, например, на рис. 13.1 изображен невыпуклый многогранник.

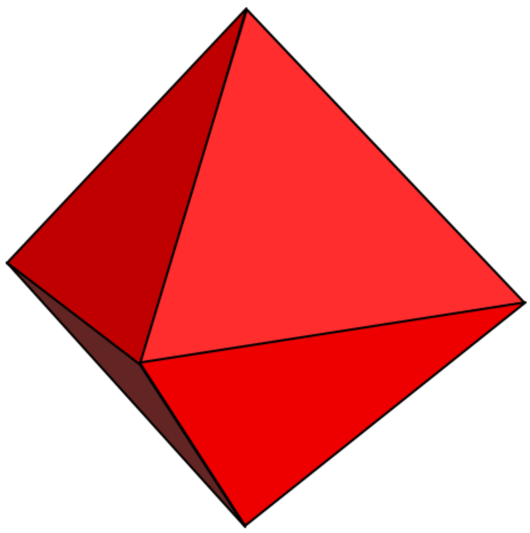
Рассмотрим все элементы многогранника на примере куба.

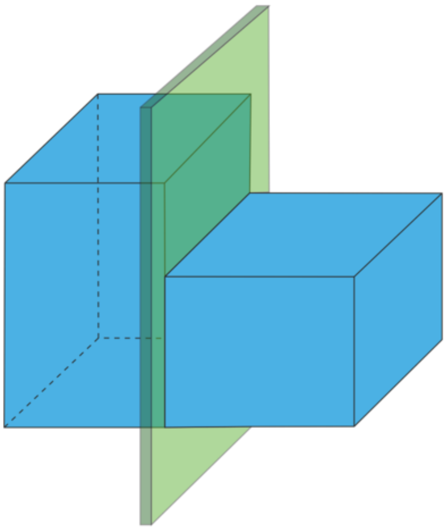
Определение

Многогранником называется поверхность, которая составлена из **многоугольников** и ограничивает некоторое **геометрическое тело**



Рассмотрим пример выпуклого и невыпуклого многогранника. Многогранник выпуклый, если его можно полностью расположить по одну сторону от плоскости, проходящей через любую из его граней, иначе многогранник невыпуклый.





Выпуклый многогранник   Невыпуклый многогранник

Видеоурок по теме «Многогранники» https://infourok.ru/videouroki/1433

Теорема Эйлера

Рассмотрим данную таблицу и найдем некоторую закономерность между элементами выпуклого многогранника.

Многогранник	Число вершин	Число ребер	Число граней
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	n +1	2n	n +1
n-угольная призма	2n	3n	n +2

Закономерность заключается в следующем:

Многогранник	Число граней+вершин	Число ребер
Треугольная пирамида	4+4=8	6
Четырехугольная пирамида	5+5=10	8
Треугольная призма	6+5=11	9
Четырехугольная призма	8+6=14	12
n-угольная пирамида	(n +1)+ (n +1)= 2n +2	2n
n-угольная призма	2n+n+2=3n+2	3n

Итак, данная формула **В + Г – Р = 2**, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее вновь открыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она носит. Формула Эйлера верна для любых выпуклых многогранников.

Теорема Эйлера В + Г – Р = 2, где

В – количество вершин

Г – количество граней

Р – количество ребер.

Краткая биография Леонарда Эйлера, его вклад в науку представлен в презентации.

https://drive.google.com/open?id=1pxsRiItCLyh5DLIYjy3C2mESpy4Hdh78

Призма

2. Призма. ***Призмой*** называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (*основаниями* призмы), а все остальные грани (*боковые*) пересекаются по параллельным прямым (рис. 13.2). Ребра оснований называются *сторонами оснований*, общие ребра боковых граней — *боковыми ребрами*.

Призму называют *прямой*, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскостям оснований. Непрямая призма называется *наклонной*. Прямую призму называют *правильной*, если основанием ее служит правильный многоугольник. Призмы могут быть треугольными, четырехугольными и т. д. На рис. 13.2 изображены шестиугольные призмы (слева прямая, справа наклонная).

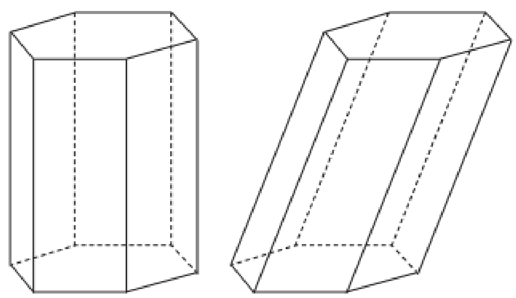


Рис. 13.2

Боковые ребра призмы равны между собой, боковые грани являются параллелограммами. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие в одной грани, называется *диагональю* призмы (на рис. 13.3 изображена одна из диагоналей A_1C).

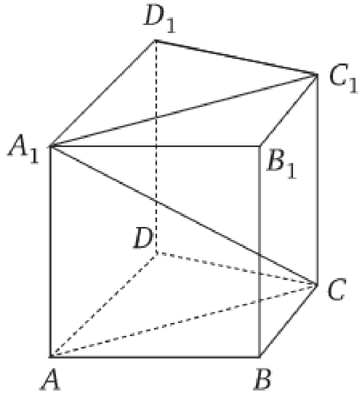


Рис. 13.3

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость другого основания, называется *высотой* призмы (на рис. 13.4 — высота призмы h).

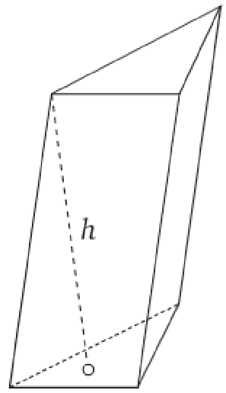


Рис. 13.4

Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не лежащих в одной грани, называется *диагональной плоскостью*. Сечения, образующиеся от пересечения диагональной плоскости с гранями призмы, называются *диагональными сечениями*. На рис. 13.3 изображено диагональное сечение AA_1C_1C.

Если плоскость сечения перпендикулярна боковым ребрам призмы или их продолжениям, то она называется *перпендикулярным сечением*.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей ее боковых граней. Площадь $S_{полн}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{бок}$ боковой поверхности и площадь $S_{осн}$ основания призмы формулой

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Призма, видеоурок https://infourok.ru/videouroki/1434

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/