Лекция. Равносильность уравнений, неравенств, систем.

Практическое занятие №45 Рациональные, иррациональные уравнения.

При решении уравнений используются следующие термины:

- **неизвестное** — буква для обозначения какой-либо неизвестной величины;
- **уравнение** — два выражения с неизвестными, соединенные знаком равенства;
- **область допустимых значений (ОДЗ) уравнения** — множество значений, которые могут принимать неизвестные, входящие в уравнение;
- **решение уравнения** — набор значений неизвестных (из ОДЗ), при подстановке которых уравнение превращается в верное числовое равенство;
- **решить уравнение** (найти корни уравнения) — найти, описать все решения уравнения. Может оказаться, что уравнение решений не имеет, т. е. множество его решений пусто.

Решение уравнений

Неизвестные в уравнениях обычно обозначают последними буквами латинского алфавита: x, y, z.

Примеры

Решить следующие уравнения:

1) $x^2 - 1 = x$ — уравнение с одним неизвестным;

2) $x^2 + y^2 = x + y$ — уравнение с двумя неизвестными;

3) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$; ОДЗ: $\mathbf{R}$;

4) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{3}$; ОДЗ: $x \neq \pm 1$;

5) $\sqrt{1-x} = \lg x$; ОДЗ: $(0; 1]$, или $0 < x \leqslant 1$.

Решение:

- $x = 1$ является решением (корнем, одним из решений) уравнений 3 и 5, не является решением уравнения 1) и не входит в ОДЗ уравнения 4);
- $x = 1$, $y = 1$ (или $(1; 1)$) — одно из решений уравнения 2);
- $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — решение уравнения 1).

Как использовать математический язык при решении уравнений?

1. Язык теории множеств. Уравнение будем обозначать буквой E (от Equation); множество решений уравнения E — $R(E) = R$ (от Root); область допустимых значений (ОДЗ) уравнения E — $D(E) = D$ (от Domain). По определению $R(E) \subset D(E)$ — корни уравнения должны входить в его ОДЗ.

1) Если уравнение E не имеет решений, то $R(E) = \varnothing$ — пустое множество.

2) Если уравнение E имеет единственное решение, то множество $R(E)$ состоит из одного элемента (одного числа, если в уравнении одно числовое неизвестное).

3) Уравнение E_2 является **следствием** уравнения E_1, если $R(E_2) \supset R(E_1)$, т. е. каждое решение уравнения E_1 является решением уравнения E_2.

4) Уравнение E_2 равносильно уравнению E_1, если $R(E_2) = R(E_1)$, т. е. множества решений E_1 и E_2 совпадают.

Равенство $R(E_1) = R(E_2)$ эквивалентно двум включениям $R(E_1) \subset R(E_2)$ и $R(E_2) \subset R(E_1)$. Это дает возможность переформулировать определение равносильности.

Уравнения E_1 и E_2 **равносильны**, если каждое решение уравнения E_1 является решением уравнения E_2 и каждое решение уравнения E_2 является решением уравнения E_1.

5) Если уравнение E_3 является следствием уравнения E_2, а уравнение E_2 — следствием уравнения E_1, то уравнение E_3 является следствием уравнения E_1.

При этом:

$$R(E_1) \subset R(E_2) \subset R(E_3).$$

Аналогичное утверждение верно и для понятия равносильности уравнений.

6) Обычный путь решения уравнения состоит в построении такой цепочки следствий, последнее уравнение которой мы решать умеем. После этого либо выполняют проверку, либо выясняют, нельзя ли сделать «обратный ход» в построенной цепочке, т. е. будут ли уравнения цепочки равносильны друг другу.

Если при переходе от уравнения E_1 к уравнению E_2 оказалось, что множество $R(E_2)$ больше множества $R(E_1)$, т. е. $R(E_1) \subset R(E_2)$, то говорят, что появились «посторонние корни», которые надо отсеять.

Если не все элементы множества $R(E_1)$ вошли в $R(E_2)$, то говорят, что произошла «потеря корней». Разумеется, в этом случае уравнение E_2 не является следствием уравнения E_1.

- E — уравнение;
- $R\ (E)$ — множество решений уравнения;
- $D\ (E)$ — область допустимых значений.

Если в уравнение E входит одно неизвестное, значениями которого являются действительные числа, то множество его корней $R(E)$ является подмножеством **R**.

Общепринятая запись множества перечислением его элементов в фигурных скобках часто оказывается громоздкой, и можно использовать любую другую форму записи, лишь бы она была точной и понятной.

Нарушение равносильности

Примеры

1. $x + \frac{1}{x} + 2 \left(x - \frac{1}{2x}\right) = 0$, $x + 2x = 0$.
2. $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, $x + 1 = 2$.
3. $2x + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{x - 3} + x + 3$, $2x = x + 3$.
4. $2x + 1 = x$; $\frac{2x}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$.
5. $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$, $x^2 - 2 = x$.

В примерах 1 — 5 второе уравнение является следствием первого, но имеет «посторонний корень», появившийся за счет расширения ОДЗ.

6. $x - 1 = 2x + 3$, $x^2 - 1 = (x + 1)(2x + 3)$.
7. $x - 2 = 1 - 2x$, $(x - 2)^2 = (1 - 2x)^2$.
8. $x^2 - 1 = (x - 1)(2x + 1)$, $x + 1 = 2x + 1$.
9. $x^2 = (2x - 1)^2$, $x = 2x - 1$.

В примерах 6 и 7 появляется «посторонний корень», в примерах 8 и 9 происходит «потеря корня».

2. Язык логики. Уравнение можно рассматривать как переменное высказывание, множество решений которого — «множество истинности» этого высказывания, т. е. множество тех значений неизвестных (переменных для данного высказывания), при подстановке которых получается утверждение (равенство чисел).

Следствия можно записывать с помощью логического знака **следствия** (**импликации**):

$$E_1 \Rightarrow E_2 \text{ означает, что } R(E_1) \subset R(E_2).$$

Равносильность уравнений записывается с помощью знака **эквивалентности** (**равносильности**):

$$E_1 \Leftrightarrow E_2 \text{ означает, что } R(E_1) = R(E_2).$$

Равносильность эквивалентна наличию двух следствий:

$$E_1 \Leftrightarrow E_2 \text{ означает, что } E_1 \Rightarrow E_2 \text{ и } E_2 \Rightarrow E_1.$$

- переменное высказывание — уравнение;
- «множество истинности» этого высказывания — множество решений уравнения.

$E_1 \Rightarrow E_2$, т. е. $R(E_1) \subset R(E_2)$, — импликация;
$E_1 \Leftrightarrow E_2$, т. е. $R(E_1) = R(E_2)$, — эквивалентность.

3. Системы и совокупности уравнений.

Система уравнений — это набор нескольких уравнений вместе с задачей нахождения решений, которые удовлетворяют каждому из уравнений.

Обозначение: $E = \begin{cases} E_1, \\ E_2. \end{cases}$

Решение системы E — множество всех общих решений уравнений E_1 и E_2, т. е.

$$R(E) = R(E_1) \cap R(E_2).$$

Совокупность уравнений — набор нескольких уравнений вместе с задачей нахождения решений, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений.

Обозначение: $E = \left[\begin{array}{l} E_1, \\ E_2. \end{array}\right.$

Решение совокупности E — это объединение решений уравнений, входящих в эту совокупность:

$$R(E) = R(E_1) \cup R(E_2).$$

Совокупность уравнений часто появляется при необходимости разбить ОДЗ уравнения на более мелкие части: если $D(E) = D_1 \cup D_2$, то уравнение E равносильно совокупности уравнений, запись которых совпадает с записью уравнения E, но которые имеют областями допустимых значений множества D_1 и D_2.

Системы и совокупности уравнений

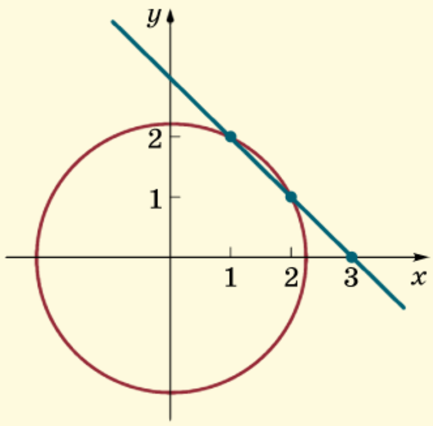
Каждое уравнение системы можно рассматривать как уравнение некоторой линии на координатной плоскости.

Координаты каждой точки этой линии — одно решение уравнения.

Решения системы — координаты точек пересечения графиков уравнений.

Пример

$$E = \begin{cases} x + y = 3; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$



$R(E)$: $(2; 1) \cup (1; 2)$.

При решении уравнения применяется несколько приемов, позволяющих свести уравнение к простейшему.

1. Разложение на множители. Если уравнение равносильными преобразованиями удается привести к виду $\square \cdot \bigcirc = 0$, то оно равносильно $\left[\begin{array}{l} \bigcirc = 0 \\ \square = 0 \end{array}\right.$ при условии сохранения ОДЗ.

1) **Выделение множителя в алгебраическом выражении.**

Выделение линейного множителя

■ $f(x) = x^3 + 6x - 7$.

Легко заметить, что $f(1) = 0$. Следовательно, $f(x)$ делится на $x - 1$. Второй множитель можно найти либо делением «столбиком», либо «заставляя» $f(x)$ разделиться на $x - 1$:

$$x^3 + 6x - 7 = x^3 - x^2 + x^2 - x + 7x - 7 = (x - 1)(x^2 + x + 7).$$

Разложение многочлена на множители основано на следующей простой теореме (ее часто называют теоремой Декарта, иначе ее можно получить как следствие известной теоремы Безу):

Если число a является **корнем многочлена** $f(x)$, то $f(x)$ делится на двучлен $x - a$, т. е. справедливо разложение на множители: $f(x) = (x - a)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен, степень которого на единицу меньше степени $f(x)$.

Корень многочлена с целыми коэффициентами можно попытаться найти подбором.

Нетрудно доказать, что целый корень многочлена с целыми коэффициентами и с коэффициентом, равным 1, при старшей степени обязательно является делителем свободного члена.

Поэтому, перебирая делители свободного члена, можно узнать все целые корни.

2) **Способ группировки**.

Разложение многочлена на множители способом группировки

- $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$;
- $x^6 + 4x^4 - 32x^2 = x^2(x^4 + 4x^2 + 4 - 36) = x^2((x^2 + 2)^2 - 6^2) = x^2(x^2 + 8)(x - 2)(x + 2)$.

Часто для выделения множителя некоторого выражения полезно рационально сгруппировать его слагаемые.

Этот прием широко используется при решении алгебраических уравнений.

В ходе решения тригонометрических уравнений часто удается выделить множители и тем самым упростить уравнение.

3) **Сокращение общего множителя.**

Уравнение вида □ · ■ = ○ · ■ можно преобразовать к виду (□ − ○) · ■ = 0, но можно и сократить на ■, решив предварительно уравнение ■ = 0 и указав его корни в окончательном ответе (не забыв проверить, что они лежат в ОДЗ уравнения □ = ○).

2. Замена неизвестного. Замена неизвестного — самый распространенный способ решения уравнений.

Он состоит в следующем. Анализируя внешний вид уравнения, стараются заметить его симметрию — часто можно увидеть, что сложное выражение зависит лишь от некоторого блока — повторяющегося выражения.

Посмотрите, не решая, на следующий набор уравнений:

а) $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 120 = 0$;

б) $\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+3x+1} = 1$;

в) $2^{x^2+3x} - 2^{x^2+3x-1} = \frac{1}{2}$;

г) $\log_2^2(x^2+3x) - \log_2(x^2+3x) = 2$.

В каждом из этих уравнений отметим присутствие выражения $x^2 + 3x$.

Если заменить его буквой y, т. е. положить $y = x^2 + 3x$, то получим более простые уравнения относительно y:

а) $y^2 + 2y - 120 = 0$;

б) $\sqrt{y} + \sqrt{y+1} = 1$;

в) $2^y - 2^{y-1} = \frac{1}{2}$;

г) $\log_2^2 y - \log_2 y = 2$.

Найдя из этих уравнений значения y, подставим их в соотношение $y = x^2 + 3x$ и вычислим корни исходного уравнения.

Некоторые замены встречаются наиболее часто.

1) **Биквадратное уравнение**

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

заменой $x^2 = y$ приводится к квадратному

$$y^2 + py + q = 0.$$

Ответ: 1; 4; $\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

2) **Возвратное уравнение**

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Делим на x^2 (0 не является корнем) и выполняем замену $x + \frac{1}{x} = y$. Заметим, что $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, так что $x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2$.

3) **Однородное уравнение**

$$\sin^2 x + p \sin x \cos x + q \cos^2 x = 0.$$

Делим на $\cos^2 x$ и заменяем $\operatorname{tg} x$ на y. Заметим, что ни один корень уравнения $\cos x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Получаем $y^2 + py + q = 0$.

4) **Замены в показательных уравнениях.** Показательные уравнения обычно приводят заменой неизвестного к линейному или квадратному уравнению.

Замечание об области определения нового неизвестного. Обозначая в некотором уравнении с неизвестным x выражение $f(x)$ за новое неизвестное y, приходим к уравнению с неизвестным y.

Изменение ОДЗ при разложении на множители

- $x\sqrt{x-3}-2=2x-\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}-2x-2=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x-3}-2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x-3}-2)=0.$

Корень первого множителя $x+1$ не попадает в ОДЗ второго, поэтому его нужно отбросить. Приравняв нулю второй множитель, получим корень $x=7$.

Ответ: 7;

При замене неизвестного

- уравнение может быть однородным не только по отношению к тригонометрическим функциям:

$$(x-2)^4+(x-2)^2(x+3)^2-20(x+3)^4=0.$$

Делим на $(x+3)^4$ ($x=-3$ не является корнем): $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^4+\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2-20=0.$ После замены $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2=y$ получаем $y^2+y-20=0$; $y_1=4$, $y_2=-5$.

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2=4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3}=\pm 2;\ \frac{x-2}{x+3}=2 \Leftrightarrow x_1=-8;$$

$$\frac{x-2}{x+3}=-2 \Leftrightarrow x_2=-\frac{4}{3};$$

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2=-5 \text{ — решений нет.}$$

Ответ: $-8;\ -\frac{4}{3}$;

Практическое занятие

Алгебраические уравнения делятся на:

- целые рациональные уравнения P(x) = 0, где P(x) – целая рациональная функция. В свою очередь данные уравнения можно разбить на линейные, квадратные и уравнения высших степеней;
- дробно-рациональные уравнения
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}+\dots+\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=0$$
- иррациональные (уравнения, в которых неизвестная величина содержится под знаком корня).

Рассмотрим несколько задач.

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}. \qquad (1)$$

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби из правой части уравнения. Для этого сначала нужно найти корни квадратного трехчлена:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}\Leftrightarrow x_1=-2,\, x_2=-1.$$

Следовательно,

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

и уравнение (1) принимает форму

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}. \qquad (2)$$

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнений (1) и (2) имеет вид:

$$\{x\neq -1,\, x\neq -2\}.$$

Умножая обе части уравнения (2) на выражение

$$(x+1)(x+2),$$

и, производя необходимые сокращения, получаем:

$$3(x+1)-(2x-1)(x+2)=2x+1 \Leftrightarrow 3x+3-\left(2x^2-x+4x-2\right)=2x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+3-2x^2+x-4x+2-2x-1=0\Leftrightarrow -2x^2-2x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Leftrightarrow x_1=-2,\, x_2=1.$$

Корень $x_1=-2$ не входит в ОДЗ и должен быть отброшен.

Ответ: 1.

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}+\frac{x^2+4x+9}{x-3}=-2 \qquad (3)$$

Решение. В результате замены переменного

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}=y,$$

совершенной в уравнении (3), получаем:

$$y+\frac{1}{y}=-2 \Rightarrow y^2+1=-2y \Leftrightarrow y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2=0 \Leftrightarrow y=-1.$$

Следовательно,

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9}=-1 \Rightarrow x-3=-\left(x^2+4x+9\right) \Leftrightarrow x^2+4x+9+x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=-3, x_2=-2.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению (3).

Ответ: $-3, -2$.

$$\frac{x}{1-x}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=1 \qquad (5)$$

Решение. Уравнение (5) проще всего решить при помощи замены переменного

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=y. \qquad (6)$$

В этом случае

$$\frac{x}{1-x}=y^2$$

и уравнение (5) принимает вид

$$y^2-\frac{3}{2}y-1=0 \Leftrightarrow 2y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4} \Leftrightarrow y_1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}, y_2=2.$$

В силу того, что переменная y, определенная по формуле (6), является неотрицательным числом, значение $y_1=-\frac{1}{2}$ должно быть отброшено. Следовательно,

$$y=2 \Rightarrow \frac{x}{1-x}=y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=4 \Rightarrow x=4-4x \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

$$\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+2}=2.. \qquad (22)$$

Решение. Возводя обе части уравнения (22) в квадрат, получим

$$\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+2}=2 \Rightarrow 3x+10-2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2}+x+2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x+8=2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} \Rightarrow 2x+4=\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2}.$$

Теперь возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$2x+4=\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} \Rightarrow (2x+4)^2=(3x+10)(x+2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2+16x+16=3x^2+10x+6x+20 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: –2; 2.

Задачи для самостоятельного решения

$1+\frac{x-1}{x+2}+\frac{1}{x}=\frac{2+3x}{x(x+2)}$,	$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{3}{2}$,
$\sqrt{12-2x+x^2}=x+2$, $\sqrt{-11+8x-x^2}=x-3$,	$x^2-24-2\sqrt{x^2-24}=15$, $13-x^2-2\sqrt{13-x^2}=3$,

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017. - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://www.resolventa.ru/data/metodsch/aleq.pdf