Практическое занятие №37.

Исследование функции и построение графика с помощью производной

Примерная схема исследования и построения графиков функций

Внимание! В данной схеме отражены основные пункты исследования.

Необходимо помнить – у каждой функции есть свои особенности.

1. Найти область определения функции
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной, периодической
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
9. Построить график, используя полученные результаты исследования.
10. Найти область значения функции.

Заметим, что данная схема несколько отличается от схемы, предложенной для исследования функции, без применения производной.

Рассмотрим теоретический материал, который нам будет необходим при решении данной задачи.

Возрастание и убывание функции

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её производной: *если в некотором промежутке* $f'(x) > 0$, *то функция возрастает в этом промежутке; если же* $f'(x) < 0$, *то функция убывает в этом промежутке.*

Экстремумы функции.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Экстремумы функции можно найти с помощью второй производной.

1. Определение производной второго порядка. Если существует производная от производной y' функции $y = f(x)$, то она называется ***второй производной***, или производной второго порядка, т. е.

$$y'' = (f'(x))' = f''(x).$$

Для второй производной употребляются следующие обозначения: y'', y''_x, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Пример 5.16

Найти вторую производную функции $y = x^3$.

Решение

Находим первую производную: $y' = (x^3)' = 3x^2$. Полагая первую производную функцией, вычисляем вторую производную: $(y')' = (3x^2)' = 6x$, $y'' = 6x$.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.
5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат. Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет вертикальную асимптоту, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; при этом $x = a$ есть точка разрыва II рода.

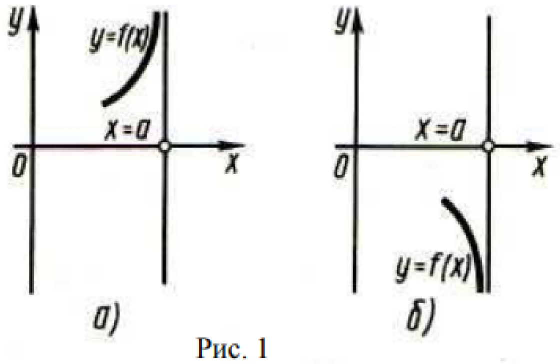


Рис. 1

Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид $x = a$ (рис. 1, а и б).

Горизонтальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b_1$. Может оказаться, что либо только один из этих пределов конечный, либо ни одного, тогда график имеет или одну горизонтальную асимптоту, или ни одной. Уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид $y = b$ (рис. 2, а и б).

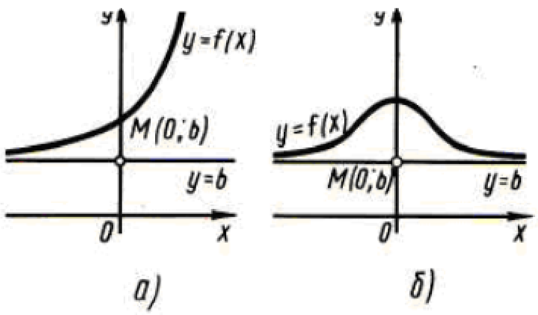


Рис. 2

Наклонные асимптоты. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ (рис. 3, а и б). В этом случае справедливо равенство $\lim\limits_{x\to \pm\infty} [f(x) - kx - b] = 0$.

Вынося x за скобки, получим $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{b}{x} = 0$,

то получаем формулы для вычисления параметров k и b:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Следует отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$

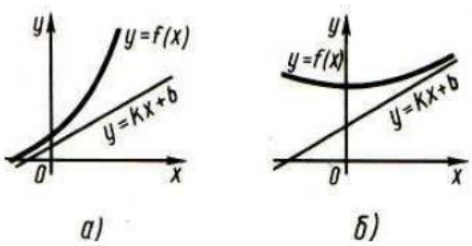


Рис.3

Пример: Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{1}{x-3}$.

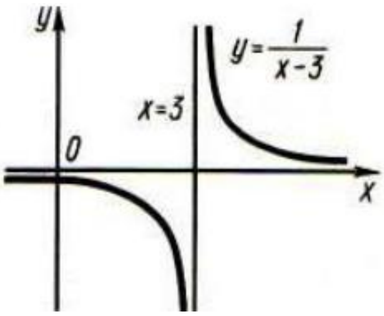


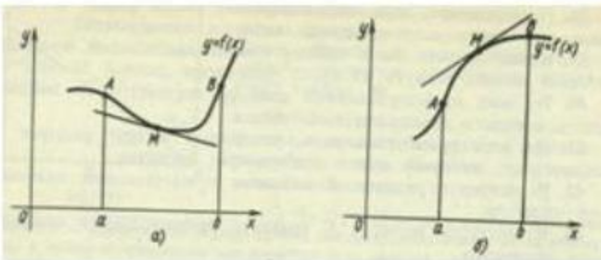
рис.4

Решение: так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту

$y = 0$. Далее, находим $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$; следовательно кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ (рис. 4)

Выпуклость (вогнутость) графика. Точки перегиба.

Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вниз в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка (рис. а).



Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх в промежутке $a < x < b$, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка (рис. б).

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются промежутками выпуклости графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

Точки перегиба.

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

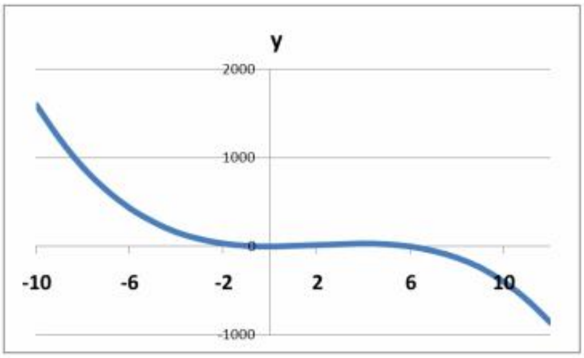
Пример: Найти точки перегиба функции $f(x) = 6x^2 - x^3$

Решение:

$f'(x) = 12x - 3x^2$

$f''(x) = 12 - 6x$. Полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$.

	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \infty$
$f''(x)$	+	Точка перегиба	—
$f(x)$	Выпукла вниз	$f(2) = 16$	Выпукла вверх



Рассмотрим пример построения графика функции

(схема исследования применяется к данной функции)

Пример: Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$,получим $y = -3$

   Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем $(3x^2 - 12x + 9 = 0)$

   $\Leftrightarrow$ «>$(x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$ Точки $x = 1$ и $x = 3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ и $3 < x < \infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < \infty$ $y' > 0$, т.е. функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' < 0$, т.е. функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ — с минуса на плюс. Значит, $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -3$.
6. Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$.Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, т.е. в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < +\infty$ выпукла вниз.

   Таким образом, получаем точку перегиба $(2;-1)$.
7. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 1).

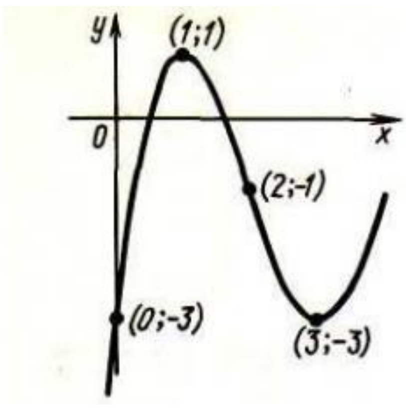


Рис.1

Используя примерную схему исследования функции можно построить график любой функции, не производя громоздких вычислений.

Задачи для самостоятельного решения.

Исследуйте следующие функции и постройте их графики.

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

$$y = x^2 + 5x + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x^4$$

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$y = -x^4 + 8x^2 + 9$$

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

Глава 9 «Начала математического анализа», занятие 6 «Применение производной к исследованию функций», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://infourok.ru/videouroki
3. https://www.irgups.ru/sites/
4. https://matematikalegko.ru/