

## Решение тригонометрических неравенств.

The diagram shows a unit circle with the following labels:

- Angles (Degrees):** 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°.
- Angles (Radians):** 0,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ,  $2\pi$ .
- Arc Length (s):** 0,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $1$ ,  $\frac{7}{6}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{4}$ ,  $\frac{11}{6}$ ,  $2$ .
- Coordinates:**
  - X-axis (cos):** 1,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , -1,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ , 0,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 1.
  - Y-axis (sin):** 0,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 1,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , -1,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ , 0.

Рассмотрим примеры.

### Пример 1

Решите неравенство  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

#### Решение

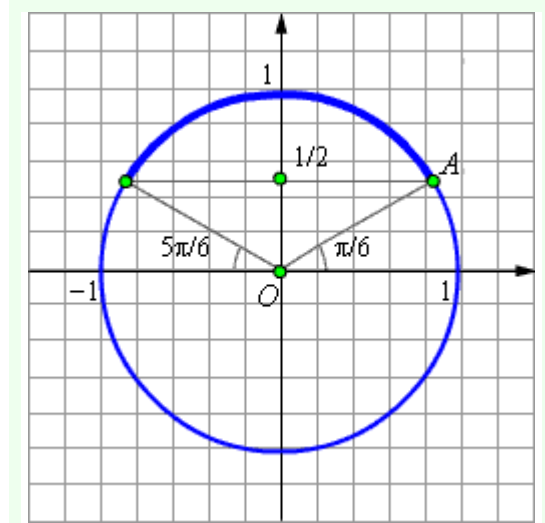
Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит  $\frac{1}{2}$

Для  $x \in [0; 2\pi]$  решением данного

$$x \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

неравенства будут

Ясно также, что если некоторое число  $x$  будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала



на  $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  то  $\sin x$  также будет не меньше  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить  $2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$

Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут

$$x \in \left[ \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right],$$

все где  $n \in \mathbb{Z}$

$$x \in \left[ \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right],$$

где  $n \in \mathbb{Z}$

**Ответ.**

### Пример 2

Решите неравенство  $\operatorname{tg} \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \geq 0$

Решение Обозначим  $t = \pi + \frac{\pi}{3}$  тогда неравенство примет вид простейшего:  $\operatorname{tg} t \geq -1$ .

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Рассмотрим интервал  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  длиной, равной

наименьшему положительному периоду (НПП) тангенса. На этом отрезке с

$$t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

помощью линии тангенсов устанавливаем, что

Вспоминаем

теперь, что необходимо добавить  $\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , поскольку НПП

$$t \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

функции  $\operatorname{tg} x$   $T = \pi$ . Итак,

Возвращаясь к переменной  $x$ ,

получаем, что

$$\begin{aligned} \pi + \frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) &\Leftrightarrow \frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{4} - \pi + \pi n; \frac{\pi}{2} - \pi + \pi n\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{15\pi}{4} + 3\pi n; -\frac{3\pi}{2} + 3\pi n\right). \end{aligned}$$

$$x \in \left[-\frac{15\pi}{4} + 3\pi n; -\frac{3\pi}{2} + 3\pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ.**

## Подготовка к контрольной работе:

### 1. Комбинаторика

$$P_n = n!, \quad A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Например, вычислить  $C_7^3 : P_5 = \frac{7!}{3!(7-3)!} : 4! = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{24}$

**4. Вычислить значения выражений:** 1)  $5! + 6!$ ; 2)  $\frac{52!}{50!}$ .

○ 1)  $5! + 6! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 720 = 840$ .

2)  $\frac{52!}{50!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50!} = 52 \cdot 51 = 2652$ . ●

**5. Вычислить:** 1)  $C_{15}^{13}$ ; 2)  $C_6^4 + C_5^0$ .

○ Согласно формуле (16.7) получим:

1)  $C_{15}^{13} = \frac{15!}{13!(15-13)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105$ ;

2)  $C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16$ . ●

## Треугольник Паскаля

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Используя треугольник Паскаля разложить двучлен:

$$(3x + 2)^5 = (3x)^5 * 2^0 + (3x)^4 * 2^1 + (3x)^3 * 2^2 + (3x)^2 * 2^3 + (3x)^1 * 2^4 + (3x)^0 * 2^5 = 243x^5 + 162x^4 + 108x^3 + 72x^2 + 48x + 32$$

## 2. Скалярное произведение векторов.

**6. Скалярное произведение двух векторов.** Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается символом  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Таким образом, если обозначить через  $\varphi$  угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (10.10)$$

Скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  выражается через их координаты по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (10.15)$$

Угол  $\varphi$  между двумя векторами  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (10.16)$$

### Пример 10.7

Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (-3; 2)$  и  $\vec{b} = (4; 3)$ .

*Решение*

По формуле (10.15)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 3 = -6.$$

### Пример 10.8

Вычислить угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{a} = (-4; 3)$  и  $\vec{b} = (3; -4)$ .

*Решение*

По формуле (10.16) находим

$$\cos \varphi = \frac{(-4) \cdot 3 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -0,96,$$

из таблиц находим, что  $\varphi = 163,7^\circ$ .

**Пример 3.** Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$  и  $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ .

○ Из условия следует, что  $\vec{a} = (-2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -4)$ ; тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = -26. \bullet$$

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>
2. <https://www.resolventa.ru/>
3. <https://egemaximum.ru/>