**Лекция. Степенные, показательные, логарифмические функции, их свойства и графики.**

**Степенная функция.** Степенная функция — это функция вида $y = x^{\alpha}$ где $\alpha$ — действительное число. Она определена при всех значениях $x$, если $\alpha$ — натуральное число; при всех $x$, не равных нулю, если $\alpha$ — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если $\alpha$ — произвольное действительное число.

---

График функции $y = x^1 = x$ – это прямая,

график, где степень – положительное натуральное число представлен ниже

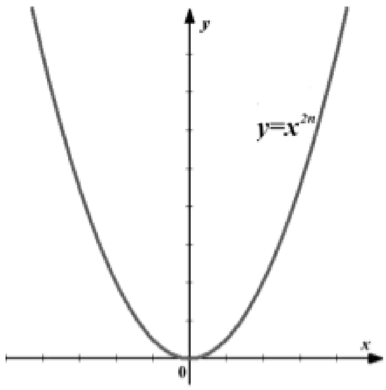



Рисунок 2. График функции $f(x) = x^{2n}$

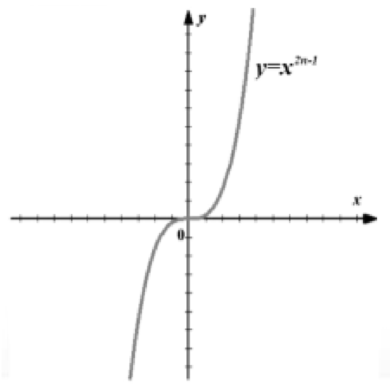
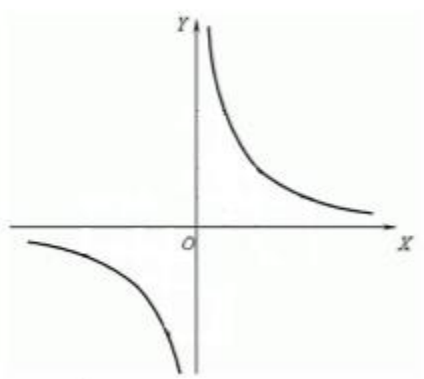
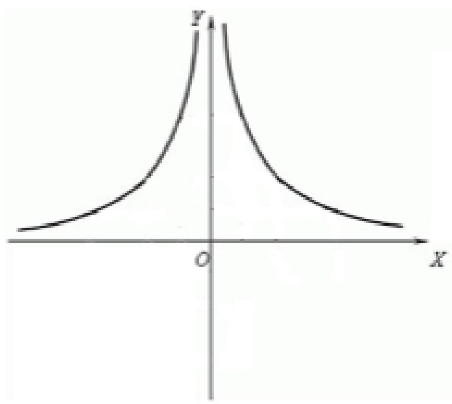



Рисунок 3. График функции $f(x) = x^{2n-1}$

Например, $y = x^2$ Например, $y = x^3$



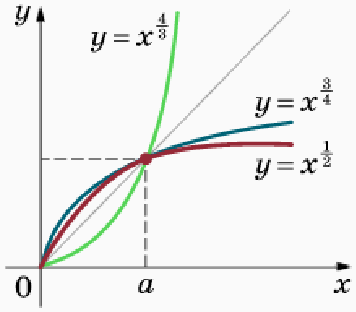

При нечетном показателе




При четном показателе

Например, $y = \frac{1}{x^3}$ Например, $y = \frac{1}{x^2}$

## Графики степенных функций с положительными дробными показателями




В зависимости от того, каким числом является показатель степенной функции и определяется ее дальнейшее поведение и ее основные свойства: область определения, монотонность, экстремумы.

Более подробно Вы можете посмотреть в видеоуроке.

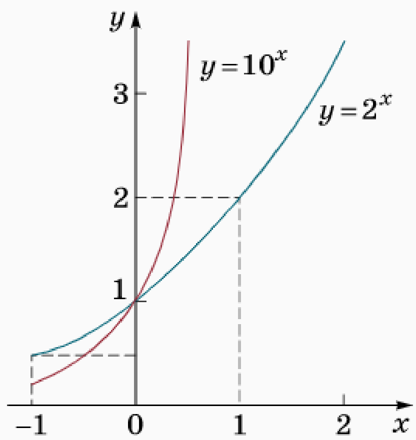
Степенная функция

https://www.youtube.com/watch?v=VaaQnS3fTRs&feature=emb_rel_pause

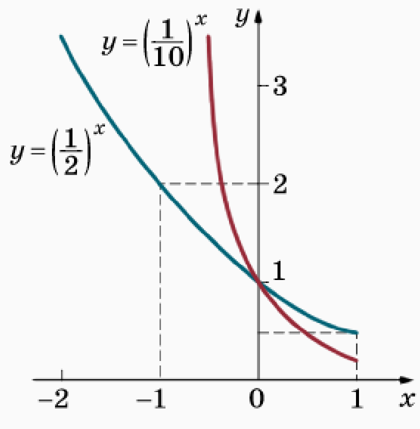
Показательная функция

**2. Свойства и графики показательной функции $y = a^x$:**

- область определения: множество всех действительных чисел **R**;
- монотонность: при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает;
- положительность: значения функции $y = a^x$ положительны;
- область значений: все положительные числа, т. е. интервал $(0, +\infty)$.




$y = a^x$, $a > 1$

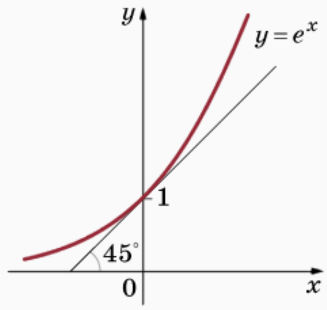



$y = a^x$, $0 < a < 1$

**1. Монотонность показательной функции.** Возьмем основание $a > 1$. Докажем, что $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. Сначала заметим, что $a^x > 1$ при $x > 0$ (подумайте, почему).

Далее выполним преобразование: $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1)$. Оба множителя в этом произведении положительны, поэтому $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Заменяя $a$ на $\frac{1}{a}$, получим доказательство того, что $y = a^x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей числовой оси.




Касательная к графику функции $y = e^x$ в точке (0; 1) наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Это свойство определяет число $e$.

Видеоурок показательная функция

https://www.youtube.com/watch?v=dUWirzg6cro

## Логарифмическая функция

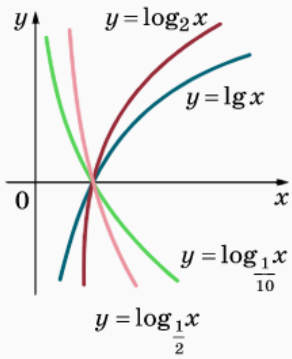
**3. Свойства и график логарифмической функции $y = \log_a x$:**

- область определения: $x > 0$;
- промежутки постоянного знака:

— при $a > 1$
$y = 0$ при $x = 1$;
$y < 0$ при $0 < x < 1$;
$y > 0$ при $x > 1$;

— при $0 < a < 1$
$y < 0$ при $x > 1$;
$y > 0$ при $0 < x < 1$;

- монотонность: функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает на всей области определения, при $0 < a < 1$ — убывает;
- область значений: множество всех действительных чисел **R**.




**2. Монотонность логарифмической функции.** Пусть $a > 1$.

Докажем, что $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$. Сначала заметим, что $\log_a x > 0$ при $x > 1$ (подумайте, почему).

Выполним преобразование: $\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \frac{x_2}{x_1} > 0$, так как $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} > 1$.

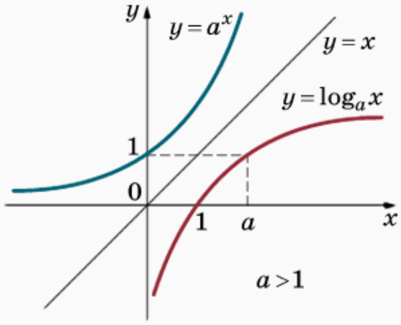
Заменим $a$ на $\frac{1}{a}$, тогда $0 < \frac{1}{a} < 1$; $\log_{\frac{1}{a}} x_2 - \log_{\frac{1}{a}} x_1 = \log_{\frac{1}{a}} \frac{x_2}{x_1} = \log_a \frac{x_1}{x_2} < 0$, так как $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Таким образом мы доказали, что функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ убывает на всей области определения.

## Видеоурок логарифмическая функция

https://www.youtube.com/watch?v=FnEEydWzeoQ

**3. Симметрия графиков функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$.** Графики этих функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Возьмем точку $P(c;\ d)$ на графике функции $y = a^x$. По условию $d = a^c$. Тогда $c = \log_a d$ и точка $Q(d;\ c)$ лежит на графике функции $y = \log_a x$. Точки $P$ и $Q$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.




Решение заданий к главе «Графики и функции» на образовательной платформе «Академия-Медиа»

Схема исследования функций, задание 9, 10.

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://spravochnick.ru/
3. https://23.edu-reg.ru/