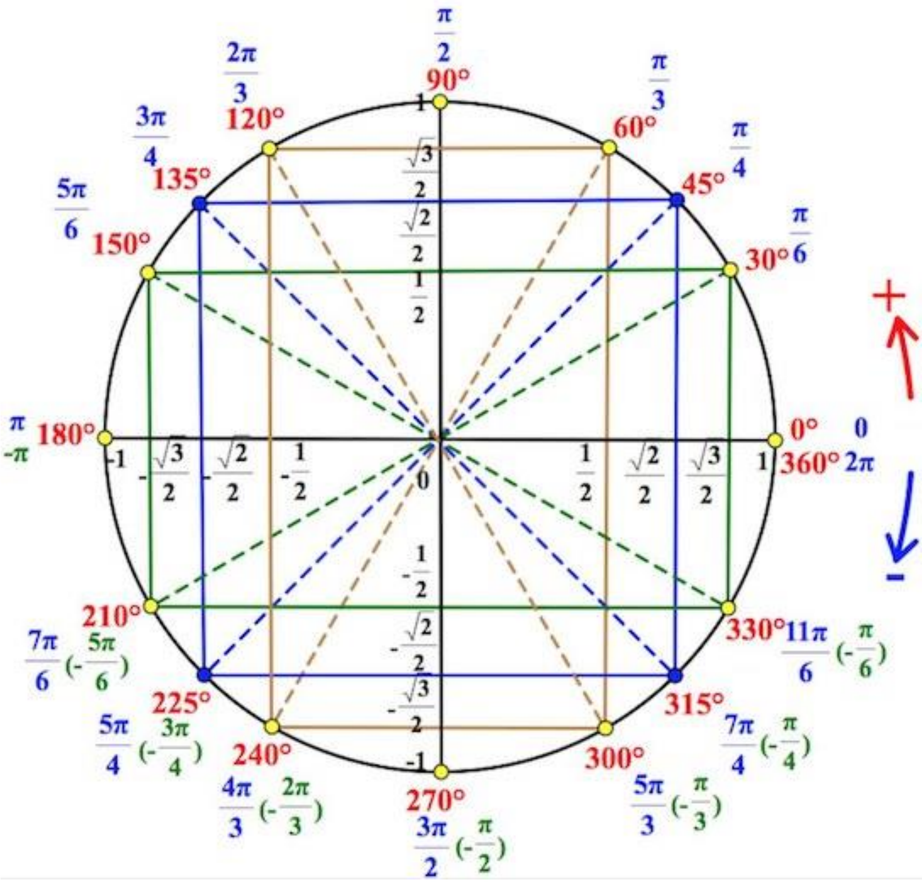
Практическое занятие №31

Решение тригонометрических неравенств.

Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим неравенством*



Какие основные элементарные тригонометрические неравенства вам известны?

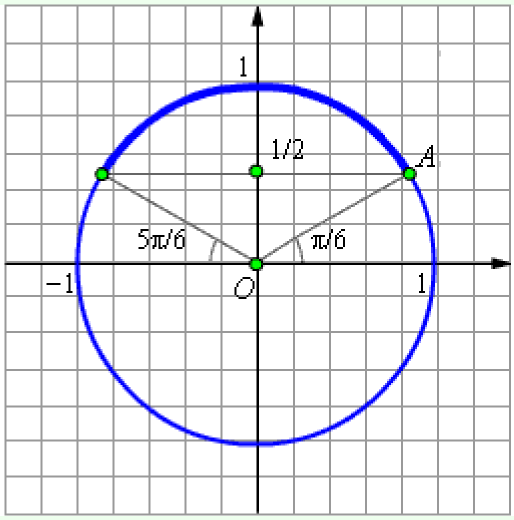
При решении тригонометрических неравенств необходимо свести неравенство к простейшему тригонометрическому неравенству, а затем решить полученное неравенство. Также необходимо уметь решать простейшие тригонометрические уравнения и ориентироваться на тригонометрической окружности.

Рассмотрим примеры.

Пример 1

Решите неравенство $\sin x \ \geq \frac{1}{2}$

Решение



Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит $\frac{1}{2}$

Для $x \in [0;\, 2\pi]$ решением данного неравенства будут

$$x \in \left[\frac{\pi}{6};\, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Ясно также, что если некоторое число x будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на $2\pi n$, $n \in Z$ то $\sin x$ также будет не меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить $2\pi n$, где $n \in Z$

Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут все

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],$$

где $n \in Z$

Ответ. $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],$ где $n \in Z$

Пример 2

Решите неравенство $tg\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \geq 0$

Решение Обозначим $t = \pi + \frac{\pi}{3}$ тогда неравенство примет вид простейшего: tg $t \geq -1$.

Рассмотрим интервал $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$ длиной, равной наименьшему положительному периоду (НПП) тангенса. На этом отрезке с помощью линии тангенсов устанавливаем, что $t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$ Вспоминаем теперь, что необходимо добавить πn, где $n \in \mathbb{Z},$ поскольку НПП функции tg x $T = \pi$.

Итак, $t \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$ Возвращаясь к переменной x, получаем, что

$$\pi + \frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{4} - \pi + \pi n; \frac{\pi}{2} - \pi + \pi n\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{15\pi}{4} + 3\pi n; -\frac{3\pi}{2} + 3\pi n\right).$$

Ответ. $x \in \left[-\frac{15\pi}{4} + 3\pi n; -\frac{3\pi}{2} + 3\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}.$

Подготовка к контрольной работе:

1. Комбинаторика

$$P_n = n!. \qquad A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Например, вычислить $C_7^3 : P_5 = \frac{7!}{3!(7-3)!} : 5! = \frac{7*6*5}{3*2*1 \;\; * 5*4*3*2*1} = \frac{7}{24}$

4. Вычислить значения выражений: 1) $5! + 6!$; 2) $\frac{52!}{50!}$.

○ 1) $5! + 6! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 720 = 840.$

2) $\frac{52!}{50!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50!} = 52 \cdot 51 = 2652.$ ●

5. Вычислить: 1) C_{15}^{13}; 2) $C_6^4 + C_5^0$.

○ Согласно формуле (16.7) получим:

1) $C_{15}^{13} = \frac{15!}{13!(15-13)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105;$

2) $C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16.$ ●

Треугольник Паскаля

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Используя треугольник Паскаля разложить двучлен:

$$(3\mathrm{x}+2)^5=(3x)^5*2^0+(3x)^4*2^1+(3x)^3*2^2+(3x)^2*2^3+(3x)^1*2^4+(3x)^0*2^5=243x^5+162x^4+108x^3+72x^2+48x+32$$

2. Скалярное произведение векторов.

6. Скалярное произведение двух векторов. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, если обозначить через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (10.10)$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ выражается через их координаты по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (10.15)$$

Угол φ между двумя векторами $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (10.16)$$

Пример 10.7

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ = (–3; 2) и $\vec{b}$ = (4; 3).

Решение

По формуле (10.15)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot 4+2\cdot 3=-6.$$

Пример 10.8

Вычислить угол у между векторами $\vec{a}$ = (–4; 3) и $\vec{b}$ = (3; –4).

Решение

По формуле (10.16) находим

$$\cos\varphi=\frac{(-4)\cdot 3+3\cdot(-4)}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-0{,}96,$$

из таблиц находим, что φ = 163,7°.

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

○Из условия следует, что $\vec{a}$ = (–2; 5), $\vec{b}$ = (3; –4); тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot 3 + 5\cdot(-4) = -26.$$ ●

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/