Лекция. Первообразная и интеграл.

Практическое занятие №39 Вычисление неопределенного интеграла.

1. Определения.

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

$$y = f(x)$$
$$y = F(x)$$
$$F'(x) = f(x)$$
$$F(x) \text{ — первообразная функции } f(x)$$

С помощью этой операции для функции $y = f(x)$, вычисляется новая функция $y = F(x)$, производная которой равна функции f: $F'(x) = f(x)$. Такая функция F называется **первообразной** функции f.

Так как производная постоянной функции равна нулю, то $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$. Это означает, что если F — одна из первообразных функции f, то и сумма $F + C$, где C — постоянное число, также будет первообразной f.

Задача интегрирования возникает в процессе поиска некоторой функции F при известной ее производной f. Известно, что производная площади S подграфика функции f равна самой функции f. Следовательно, для нахождения S нужно искать первообразную известной функции f.

<u>Определение</u>

Первообразная. Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого $x \in X$

$$F'(x) = f(x).$$

П р и м е р . Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции

$f(x) = 3x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, так как

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$$

для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Легко проверить, что функция $x^3 + 13$ имеет ту же производную, равную $3x^2$, т.к. производная 13 равна 0, вспомните, что производная константы всегда равна нулю. Таким образом вместо 13 можно взять любое число.

2. **Свойства первообразной.**

Свойства первообразной — это свойства производной, только переписанные в обратном порядке.

Исключение составляет свойство 2, которое означает, что функция, производная которой тождественно равна нулю, обязательно является константой. Это свойство очевидно, так как с точки зрения механики производная — это скорость. Если скорость тела равна нулю, то тело находится в покое.

1. Если F — первообразная функции f, то функция $F + C$, где C — константа, также является первообразной той же функции f.

2. Обратно, если F_1 и F_2 — две первообразные одной и той же функции f, то они отличаются на постоянное слагаемое: $F_1 = F_2 + C$.

3. Если F и G — первообразные функций f и g, то сумма $F + G$ является первообразной функции $f + g$.

4. Если F — первообразная функции f, то Cf является первообразной функции Cf (C — постоянное число).

Неопределенный интеграл — совокупность всех первообразных F функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке.

Обозначение:

$$\int f(x)dx.$$

Итак, согласно определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Как вычислять первообразную.

1. Операция дифференцирования совершается **формально** — нужно запомнить несколько правил, и их будет достаточно для нахождения производных. Не так обстоит дело с интегрированием: например, нет формулы для интегрирования произведения и частного функций. Поэтому составлены обширные таблицы интегралов (первообразных) и появляется новая задача — научиться преобразовывать вычисляемые интегралы в табличные.

2. Одна и та же функция f имеет **бесконечно много первообразных**, но все они друг от друга отличаются на константу. Знаком неопределенного интеграла $\int$ обозначается **какая-либо** из первообразных. Отсюда ясно, что всякие равенства с использованием знака $\int$ надо понимать с точностью до постоянного слагаемого. Чтобы помнить это, при вычислении первообразных пишут какую-нибудь из них, а затем добавляют постоянную C.

3. **Линейная замена** переменной. Пусть F — первообразная для функции f. Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Таблица неопределенных интегралов.

$$\int \mathrm{d}x = x + C$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int (kx+b)^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \mathrm{e}^{kx+b} \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx+b} + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

Замена переменной на линейную функцию:

$$f(x) \to F(x) + C \Rightarrow f(kx+b) \to \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C$$

Переход от корней к степеням:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[b]{x^n} = x^{\frac{n}{b}}; \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Видеоурок первообразная https://infourok.ru/videouroki/1232

Рассмотрим несколько примеров на вычисление неопределенных интегралов

$$\int (5x+8)dx = 5\int x dx + 8\int dx = \frac{5}{2}x^2 + 8x + C,$$

первый шаг – разобьем на сумму интегралов

второй шаг – вычислим каждый интеграл отдельно

$$\int x^3(2x - x^7)dx = \int (2x^4 - x^{10})dx = 2\int x^4 dx - \int x^{10}dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{x^{11}}{11} + C,$$

первый шаг – раскроем скобки

второй шаг – разобьем на разность интегралов

третий шаг – вычислим каждый интеграл отдельно

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+5} = \int \frac{(x^2+5)-5}{x^2+5}dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - 5\int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2} = x - \frac{5}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

первый шаг – преобразуем подынтегральное выражение

второй шаг – разобьем на разность интегралов

третий шаг – вычислим каждый интеграл отдельно

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интеграл:

$$\int (4x^5 + 6x^2 - 2)\,dx$$

$$\int (8x^6 + 2x^2 - 12)\,dx$$

$$\int (5x^5 + 3x^2 - 2x)\,dx$$

$$\int x^{0,5}dx$$

$$\int \sqrt{3}x^5 dx$$

$$\int (2x^2 + 1)dx$$

$$\int\left(x^5+6x^2-3x^{\frac{1}{4}}\right)dx$$

$$\int x^5dx$$

Глава 9, 10, учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с. В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://infourok.ru/
3. https://23.edu-reg.ru/