Лекция. Применение производной к исследованию функции и построению графиков.

Вспомним основные понятия.

1. Функции. Переменная y называется ***функцией*** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$, где f означает совокупность действий, которые надо произвести над x, чтобы получить y.

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется ***частным значением*** этой функции. Например, функция $y = f(x)$ при $x = a$ принимает значение $y = f(a)$.

Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

Например, для функции $y = x$ областью определения является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$; для функции $y = \dfrac{1}{x}$ областью определения является множество $\mathbb{R}$ кроме $x = 0$.

2. Четные и нечетные функции. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не изменяется, т. е. $f(-x) = f(x)$. Например, парабола $y = x^2$ является четной функцией, так как $(-x)^2 = x^2$. График четной функции *симметричен относительно оси Oy.*

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный функция изменяется только по знаку, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$. График нечетной функции *симметричен относительно начала координат.*

Свойством четности или нечетности обладает не всякая функция. Например, функция $f(x) = x^2 + x^3$ не является ни четной, ни нечетной: $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$; $x^2 - x^3 \neq x^2 + x^3$ и $x^2 - x^3 \neq -(x^2 - x^3)$.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности.*

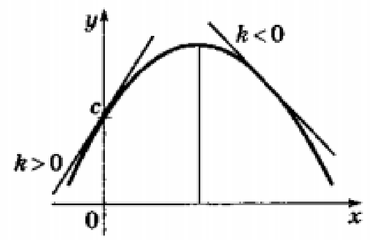
Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её производной: *если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.*

1. *Монотонность функции.*

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на некотором промежутке и имеет производную y' в каждой точке этого промежутка.

> **Если функция возрастает на промежутке T, то ее производная во всех точках этого промежутка больше или равна нулю:**
>
> $$f \nearrow \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$
>
> **Если функция убывает на промежутке T, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше или равна нулю:**
>
> $$f \searrow \Rightarrow f'(x) \leq 0.$$

Проведем касательные к графикам функций:



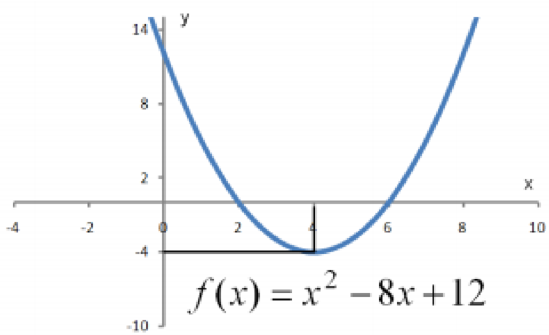
$$y = ax^2 + bx + c$$

$a < 0 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вниз

<u>**Пример:**</u> Найти промежутки монотонности функции

$$f(x) = x^2 - 8x + 12$$

Решение: 1) Находим производную: $f(x) = 2x - 8$; имеем



$2x-8=0, \quad x=4.$ Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty;4$	4	$4;+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Таким образом, данная функция в промежутке $-\infty < x < 4$ убывает, а в промежутке $4 < x < +\infty$ возрастает

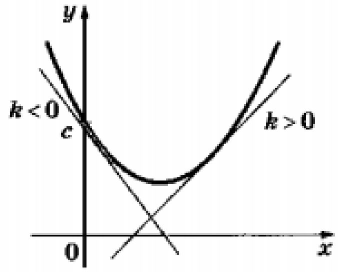
Для применения производной важны обратные утверждения.

Если на некотором промежутке производная положительна, то функция возрастает на этом промежутке:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$$

Если на некотором промежутке производная отрицательна, то функция убывает на этом промежутке:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$$



$y = ax^2 + bx + c$
$a > 0 \Rightarrow$ **ветви параболы направлены вверх**

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются *экстремальными точками* (или *точками экстремума)* данной функции, а значения функции в этих точках – *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами)* функции.

Точками экстремума могут служить только *критические точки,* т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум – когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции *y=f(x)* с помощью первой производной

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

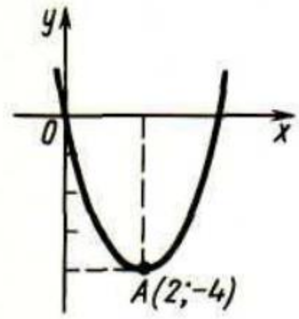
Пример: Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^2 - 4x$.

Находим $f'(x) = 2x - 4$. Полагая $f'(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. Дальнейшие рассуждения представлены в таблице.

График функции $f(x) = x^2 - 4x$ есть парабола, изображенная на рисунке. Точка минимума (2; -4) является вершиной параболы.

График функции $f(x) = x^2 - 4x$ есть парабола, изображенная на рисунке.

Точка минимума (2; -4) является вершиной параболы.



x	$-\infty < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Минимум $f_{min} = f(2) = -4$	$\nearrow$

Все выше изложенное можно сформулировать так:

Если гладкая функция имеет экстремум во внутренней точке промежутка T, то в этой точке ее производная обращается в нуль:

$$x_0 \text{ — точка экстремума} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Если в некоторой внутренней точке промежутка производная обратилась в нуль и при прохождении через эту точку сменила свой знак, то в этой точке функция имеет экстремум, т. е.

$$f'(x_0) = 0 \text{ и меняет знак} \Rightarrow$$
$$x_0 \text{ — точка экстремума.}$$

Существует ряд задач, на нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции.

Схема решения:

1. Найти производную f '(x);
2. Найти все критические точки;
3. Исследовать знак производной в промежутках;
4. Вычислить значения этой функции в точках экстремума и на концах отрезка;

5. Выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример 3.33. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$. Исследуем эту функцию на экстремум:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12,$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0, \text{ или } x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Так как $f''(x) = 12x - 18$, то $f''(1) = -6 < 0$ и $f''(2) = 6 > 0$. Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(1) = 2$, а при $x = 2$ эта функция имеет минимум, причем $f(2) = 1$. Находим далее значения функции $f(x)$ на концах отрезка $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$: $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{57}{32}$; $f(3) = 6$.

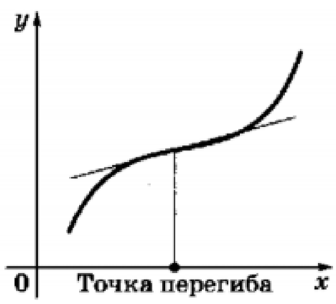
Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$ есть 6, а наименьшее равно 1.

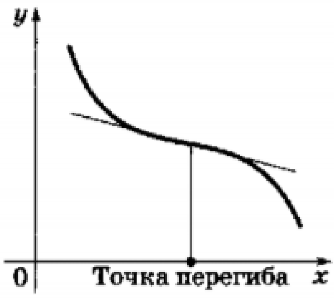
ВЫПУКЛОСТЬ, ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

4. *Выпуклость.* Наглядным свойством графика функции на некотором промежутке является его *выпуклость*. Она может быть направлена как вверх (например, у функции $y = -x^2$), так и вниз ($y = x^2$). Точка, в которой меняется характер выпуклости, называется *точкой перегиба* функции. Если в этой точке провести касательную, то видно, что по одну сторону от точки перегиба график функции начинает уходить выше касательной (с этой стороны график становится выпуклым вниз), а по другую сторону — график уходит вниз (становится выпуклым вверх).

Выпуклость функции и смена ее характера легко определяются с помощью производной:

Точки перегиба функции	↔	Точки экстремума производной
Характер выпуклости функции	↔	Характер монотонности производной





ПРИМЕРНЫЙ ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

При исследовании функции необходимо определить следующее.

1. Область определения функции.
2. Четность и периодичность.
3. Непрерывность, точки разрыва и их классификацию.
4. Асимптоты графика функции.
5. Интервалы монотонности и экстремумы.
6. Выпуклость и точки перегиба.
7. Некоторые дополнительные точки, уточняющие график (например, точки пересечения графика с осями координат и т.п.).

После этого выполнить построение графика.

Глава 9 «Начала математического анализа», занятие 6 «Применение производной к исследованию функций», стр.183 – 186, учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://infourok.ru/videouroki
3. https://www.irgups.ru/sites/