Лекция. Сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий.

Проведение любого опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий. Всякий **результат (исход) опыта** – **событие.**

Случайное событие может произойти или не произойти при заданных условиях.

Достоверное событие – произойдет непременно.

Невозможное событие – не произойдет ни прикаких условиях.

Несовместные события – когда может произойти только одно из событий.

Совместные события – одно событие не исключает другое.

Противоположные события – события, являясь его единственными исходами, несовместны.

Классическое опредление вероятности.

A – событие.

P(A) – вероятность события A

m – число благоприятных исходов (количество опытов с наступлением события A)

n – число всех исходов (количество всех опытов)

тогда вероятность наступления события A:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Исходя их формулы вероятнояти, очевидно, что

1) Вероятность любого события не может быть меньше 0 и больше 1

$$0 \le P(A) \le 1$$

2) Невозможному событию соответствует вероятность P(A) = 0
3) Достоверному событию вероятность P(A) = 1

Подготовка к экзамену

Задача 1

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

А – событие появления двух черных шаров.

Всего шаров 12+8=20,

тогда общее число возможных случаев n = число сочетаний из 20 по 2 (по условию задачи вынимаем 2 шара)

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

Число случаев m – благоприятных исходов событию А – число сочетаний из 8 по 2 (черных шаров по условию задачи – 8, и вы можете сразу вытянуть 2 черных шара),

$$m = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

тогда вероятность появления 2 черных шаров будет равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} = 0{,}147$$

Ответ: 0,147

Задача 2

В партии из 18 деталей находятся четыре бракованных. Наугад выбирают пять деталей. Найти вероятность того, что из этих пяти деталей две окажутся бракованными.

Решение:

А – событие появления двух бракованных деталей

Всего деталей 18,

тогда общее число возможных случаев n = число сочетаний из 18 по 5 (по условию задачи наугад выбирают 5 деталей из 18)

$$C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Число случаев m – благоприятных исходов событию А

Считаем:

5 – взятых наугад деталей (по условию), значит из них должно быть 3 – качественных и 2 – бракованных (это в идеале).

4 – это количество бракованных деталей во всей партии (по условию задачи), тогда число выборки 2 бракованных деталей – число сочетаний из 4 по 2

$$C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

14 – это количество качественных деталей во всей партии (18 - 4=14), тогда число выборки 3 качественных деталей – число сочетаний из 14 по 3

$$C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, значит число исходов, благоприятных событию А будет равно

$$m = C_{4}^{2} \cdot C_{14}^{3} = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Окончательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} = 0{,}255$$

Ответ: 0,255

Теоремы о сложении вероятностей.

Теорема 16.1 (сложение вероятностей несовместных событий). *Вероятность одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B); \qquad (16.12)$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k). \qquad (16.13)$$

где А и В – это события.

Теорема 16.2 (сложение вероятностей совместных событий). *Вероятность появлениях хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (16.14)$$

P(A) – вероятность события A

P(B) – вероятность события B

P(AB) – вероятность их совместного появления.

Для трех совместных событий имеет место формула

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \qquad (16.15)$$

Событие, противоположное событию A (т. е. ненаступление события A), обозначают через $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (16.16)$$

$\overline{A}$- ненаступление события A (событие, противоположное событию A)

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A при условии B и обозначается через $P_B(A)$ или $P(A/B)$[1]. Если A и B — независимые события, то

$$P(B)-P_A(B)=P_{\overline{A}}(B). \qquad (16.17)$$

События А, B, C, ... называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Пример 16.9

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение

I способ. Очевидно, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B — одна деталь стандартная, две нестандартные; C — две детали стандартные, одна нестандартная и D — три детали стандартные.

Таким образом, событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A = B + C + D$. По теореме сложения имеем $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Находим вероятность каждого из этих событий

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{35}{76};$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38};$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}.$$

Сложив найденные величины, получим

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0{,}601.$$

II способ. События A (хотя бы одна из трех взятых деталей оказалась стандартной) и $\overline{A}$ (ни одна из взятых деталей не оказалась стандартной) являются противоположными; поэтому $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, или $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Вероятность появления события $\overline{A}$ составляет

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{91}{228}.$$

Следовательно, искомая вероятность есть $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 91/228 = 137/228 = 0{,}601$.

Пример 16.10

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение

Пусть A — событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B — в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A + B)$. Так как A и B — совместные события, то воспользуемся формулой (16.14): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события A); 18 — кратными 5 (благоприятствуют наступлению события B) и 6 — кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события AB). Таким образом, $P(A) = 30/90 = 1/3$, $P(B) = 18/90 = 1/5$, $P(AB) = 6/90 = 1/15$, т. е. $P(A + B) = 1/3 + 1/5 - 1/15 = 7/15 = 0{,}467$.

Теоремы умножения вероятностей

События А и В называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие А называется ***зависимым*** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Теорема 16.3 (умножение вероятностей независимых событий). *Вероятность совместного появления (или произведения) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (16.18)$$

где A и B – это события,

P(A) – вероятность события A

P(B) – вероятность события B

P(AB) – вероятность их совместного появления.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (16.19)$$

Теорема 16.4 (умножение вероятностей зависимых событий). *Вероятность совместного появления (или произведения) двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго при условии первого*:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (16.20)$$

Пример 16.11

В одной урне находятся четыре белых и восемь черных шаров, в другой — три белых и девять черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение

Пусть A — появление белого шара из первой урны, а B — появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события A и B независимы. Найдем $P(A) =$

$= 4/12 = 1/3$, $P(B) = 3/12 = 1/4$. По формуле (16.20) получим $P(AB) = P(A)P(B) =$ $= (1/3) \cdot (1/4) = 1/12 = 0{,}083$.

Пример 16.12

В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение

Введем следующие обозначения: A — первая взятая деталь стандартная; B — вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет $P(A) = 8/12 = 2/3$. Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т. е. вероятность события B при условии A, равна $P(B/A) = 7/11$.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) =$ $= (2/3) \cdot (7/11) = 14/33 = 0{,}424$.

Глава 11 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/