

## Практическое занятие №50.

### Рациональные, иррациональные неравенства.

#### 1. Дробно-рациональные неравенства

При решении этих неравенств удобно пользоваться методом интервалов, который основан на важном свойстве непрерывных функций: *если функция не обращается в нуль на некотором интервале из области определения, то она на этом интервале сохраняет знак.*

**5.18.** Решить неравенство:  $\frac{x-4}{x-2} \leq \frac{2}{x+1}$ .

**Решение.** Перенесем все члены неравенства в левую часть и приведем полученное выражение к общему знаменателю. Получим

$\frac{x^2 - 5x}{(x-2)(x+1)} \leq 0$ . Найдем, при каком значении  $x$  обращаются в нуль числитель ( $x = 0, x = 5$ ) и знаменатель ( $x = -1, x = 2$ ).

Отметим эти значения на числовой оси. Точки, в которых обращается в нуль знаменатель дроби, исключаются, так как левая часть неравенства не имеет смысла (на числовой оси изображаем эти точки светлыми кружками). На каждом из интервалов  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(2; 5)$ ,  $(5; +\infty)$  функция непрерывна и не обращается в нуль, т.е. сохраняет знак. Найдем эти знаки, определив значение функции в произвольных точках, взятых на каждом интервале, и построим кривую знаков (рис. 5.3).



Рис. 5.3

Выражение, стоящее в левой части неравенства, отрицательно в интервалах  $(-1; 0)$ ,  $(2; 5)$ . Точки, в которых числитель обращается в нуль, входят в решение, так как неравенство нестрогое (на числовой оси изображаем эти точки закрашенными кружками). При записи ответа используем знак  $\cup$  объединения множеств.

**О т в е т:**  $(-1; 0] \cup (2; 5]$

Если числитель и знаменатель не содержат большого количества множителей, решение неравенства можно свести к решению системы линейных неравенств.

5.19. Решить неравенство:  $\frac{5+2x}{x-6} > 0$ .

Решение. Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, т.е.

$$1) \begin{cases} 5+2x > 0, \\ x-6 > 0, \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} 5+2x < 0, \\ x-6 < 0. \end{cases}$$

Решаем системы неравенств, отмечая решения на действительной оси (рис. 5.4).

$$1) \begin{cases} 2x > -5, \\ x > 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x > 6;$$

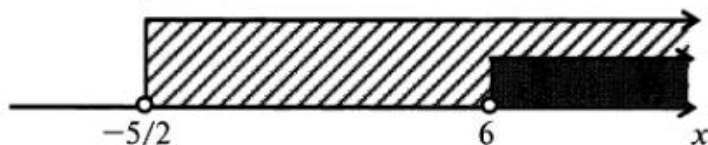


Рис. 5.4

$$2) \begin{cases} 2x < -5, \\ x < 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x < -\frac{5}{2} \text{ (рис. 5.5).}$$

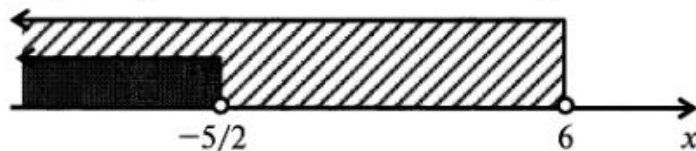


Рис. 5.5

О т в е т:  $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (6; +\infty)$ .

Иногда в дробно-рациональных выражениях знаменатель (или числитель) принимает при всех  $x$  положительное значение, в этих случаях знак дроби определяется только числителем (знаменателем).

5.20. Решить неравенство:  $\frac{x(x-1)}{x^2+4} \geq 0$ .

Решение. Так как  $x^2 \geq 0$  при всех  $x$ , то  $x^2 + 4 \geq 4$ , т.е. знаменатель — величина положительная, и дробь  $\frac{x(x-1)}{x^2+4}$  неотрицательна тогда и только тогда, когда неотрицателен числитель этой дроби. Исходное неравенство, таким образом, равносильно неравенству  $x(x-1) \geq 0$ . Произведение неотрицательно, когда оба сомножителя имеют одинаковые знаки:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x-1 \leq 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является  $x \geq 1$ , второй  $x \leq 0$ .

О т в е т:  $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ .

## 2. Иррациональные неравенства

**5.70.** Решить неравенство:  $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ .

**Решение.** Неравенство имеет смысл, когда под корнем стоит неотрицательная величина, при этом  $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ , а значения  $x = -1$  и  $x = 2$  обращают левую часть в 0, потому включаются в область решения неравенства. Так как  $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ , то левая часть неравенства неотрицательна при  $(x-1) \geq 0$ . Запишем эти условия системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, & (a) \\ x - 1 \geq 0. & (б) \end{cases}$$

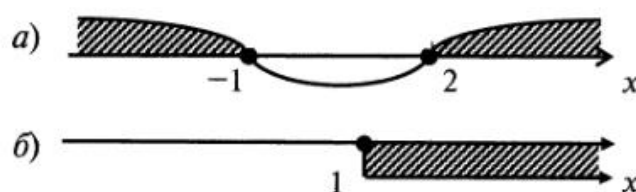


Рис. 5.14

К общей части решений двух неравенств (рис. 5.14, *a* и *б*) необходимо присоединить отмеченные выше значения  $x = -1$  и  $x = 2$ .

**Ответ:**  $\{-1\} \cup [2; +\infty)$ .

**5.71.** Решить неравенство:  $\sqrt{x^2+x-12} < x$ .

**Решение.** Так как  $\sqrt{x^2+x-12} \geq 0$ , то для  $x \leq 0$  неравенство неверно, поэтому рассматриваем только  $x > 0$ . Левая часть неравенства существует только при  $x^2+x-12 \geq 0$ , а так как  $x > 0$ , обе части неравенства можно возвести в квадрат. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, & (a) \\ x^2 + x - 12 \geq 0, & (б) \\ x^2 + x - 12 < x^2. & (в) \end{cases}$$

Общая часть решений этих неравенств даст решение системы (рис. 5.15).

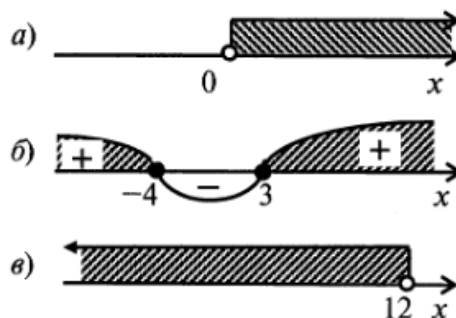


Рис. 5.15

**Ответ:**  $[3; 12)$ .

**5.72.** Решить неравенство:  $\sqrt{13+3x^2} \geq 1-2x$ .

**Решение.** Рассмотрим два случая.

1)  $1-2x < 0$ . Учитывая, что  $\sqrt{13+3x^2} \geq 0$ , имеем:

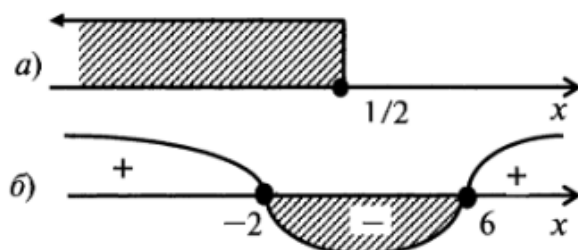
$$\begin{cases} 13+3x^2 \geq 0, \\ 1-2x < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется для всех  $x$ , второе — для  $x > \frac{1}{2}$ ,

т.е.  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$  входит в решение исходного неравенства.

2)  $1-2x \geq 0$ . Обе части неравенства неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат. Получим систему:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0, \\ 13+3x^2 \geq 0, \\ 13+3x^2 \geq 1-4x+4x^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ x^2-4x-12 \leq 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (a) \\ (б) \end{matrix}$$



**Рис. 5.16**

откуда получим решение  $[-2; 1/2]$  (рис. 5.16). Объединяя с полученным выше  $(1/2; +\infty)$ , находим решение исходного неравенства.

**Ответ:**  $[-2; +\infty)$ .

**5.73.** Решить неравенство:  $\sqrt{x^2-4x-5} \leq 1-x$ .

**Решение.**

1)  $1-x < 0$ . Неравенство неверно, так как  $\sqrt{x^2-4x-5} \geq 0$  всюду, где существует.

2)  $1-x \geq 0$ . Обе части неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат и записываем систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, & (a) \\ x^2-4x-5 \geq 0, & (б) \\ x^2-4x-5 \leq 1-2x+x^2. & (в) \end{cases}$$

Решаем систему (рис. 5.17).

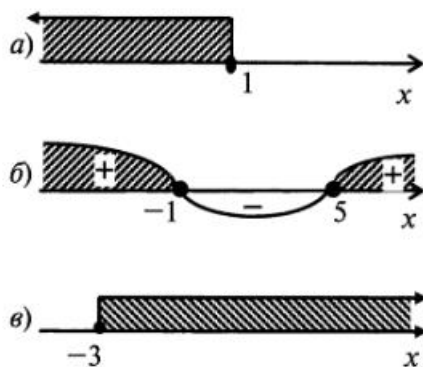


Рис 5.17

О т в е т:  $[-3; -1]$ .

**5.74.** Решить неравенство:  $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x - 2$ .

Р е ш е н и е. Умножив обе части неравенства на положительное выражение  $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}$ , получим  $x+2-5x > (4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x})$ , или, перенеся все члены в одну часть, имеем  $(4x-2)(1+\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}) < 0$ . Так как выражение во второй скобке положительно, неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 5x \geq 0, \\ 4x-2 < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

О т в е т:  $\left[0; \frac{1}{2}\right)$ .

### 3. Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

5.21.  $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 1} < 0$ .

5.23.  $\frac{x^2 - x - 6}{81 + x^2} < 0$ .

5.25.  $\frac{2x+1}{1-x} < -3$ .

Решить неравенства:

5.76.  $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$ .

5.77.  $4-x < \sqrt{x^2-2x}$ .

5.78.  $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$ .

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>

**Кремер, Н. Ш.**

Математика для колледжей : учебное пособие для поступающих в вузы / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

2. <https://23.edu-reg.ru/>