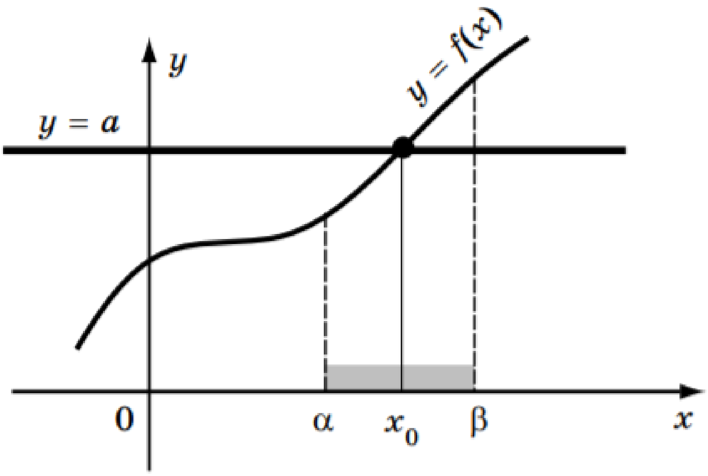
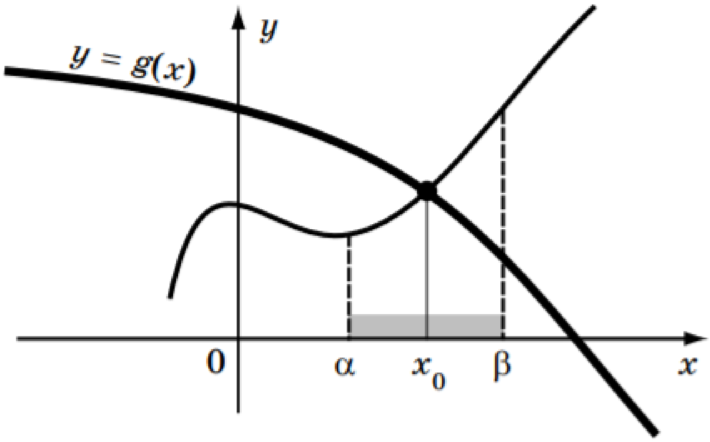
Лекция. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств

Ограниченность ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения, неравенства или системы состоит из ограниченного количества значений, то для решения уравнения достаточно проверить эти значения	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ 2-2x^2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2=1;$ $x=\pm 1$. Проверка показывает, что $x=1$ — корень уравнения. *Ответ*: 1
Оценка левой и правой частей уравнения	
$\begin{matrix} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge a \\ g(x)\le a \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$ Если при решении уравнения $f(x)=g(x)$ выяснилось, что $f(x)\ge a$ и $g(x)\le a$, то равенство достигается тогда, когда $f(x)=g(x)=a$	$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+\lvert x\rvert}$; $f(x)=1-x^2\le 1$, а $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\ge 1$. Тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$ *Ответ*: 0

$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0;$ $\begin{matrix} f_1(x)\ge 0 \\ f_2(x)\ge 0 \\ \ldots \\ f_n(x)\ge 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots \\ f_n(x)=0 \end{matrix}$	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0;$ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\ge 0;$ $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\ge 0;$ $f_3(x)=(x^2-4)^2\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0; \end{cases}$ $x=2$. *Ответ*: 2.

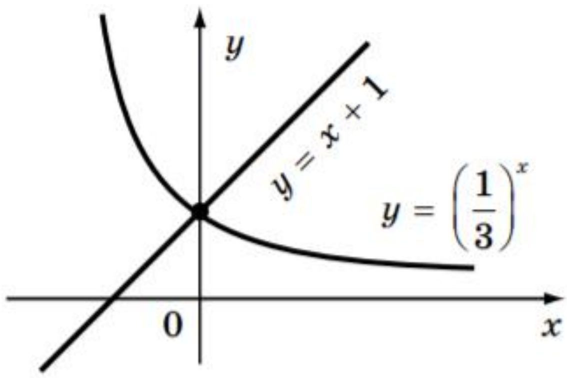
Использование возрастания и убывания функций
Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение имеет не более одного корня на этом промежутке
 Уравнение $\sqrt{x} + 2x^3 = 3$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{x} + 2\cdot 1^3 = 3$, т. е. $3=3$), поскольку функция $f(x) = \sqrt{x} + 2x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$

Если в уравнении $f(x) = g(x)$ одна из функций возрастает, а вторая убывает на некотором промежутке, то уравнение имеет на нём не более одного корня
 Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{x} + 1^3 = 3 - 1$, т. е. $2 = 2$), поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает на множестве R и $x \geq 0$; $x = 1$

Использование ограниченности функций	
При решении тригонометрических уравнений используют ограниченность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$	$\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = 2$, $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, сумма $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равна 2 тогда и только тогда, когда $\begin{cases}\cos\frac{x}{2} = 1,\\ \cos 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4\pi n,\ n \in Z,\\ x = \pi k,\ k \in Z\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 4\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$

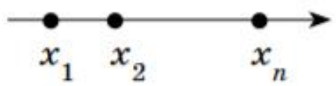
Использование графиков функций

Для решения уравнения $g(x)=f(x)$ нужно построить графики функций $y = g(x)$ и $y=f(x)$ и найти точку их пересечения



Для решения уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ построим графики функций $y = x+1$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Они имеют одну общую точку (0; 1). Уравнение имеет один корень: $x = 0$

Практическое занятие №52. Метод интервалов.

Метод интервалов	
$f(x) \geq 0$	$x^2+7x+10>0$
1. Найти корни уравнения $f(x)=0$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Найдём корни уравнения $x^2+7x+10=0$: $x_1=-2$, $x_2=-5$
2. Нанести эти корни на числовую прямую, разбивая её на интервалы: 	Наносим корни на числовую прямую, получим три интервала: 
3. Если коэффициент при старшей степени $f(x)$ положителен, то на крайнем правом интервале функция сохраняет знак «+»; остальные знаки расставлены в порядке чередования	Коэффициент при x^2 равен $1>0$, поэтому на интервале $x>2$ функция сохраняет знак «+», остальные знаки ставим в порядке чередования
4. В ответ записать интервалы, соответствующие знаку неравенства	$x^2+7x+10>0$, поэтому в ответ пишем интервалы, где сохраняется знак «+». *Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$

Обобщённый метод интервалов
Для решения неравенств вида $\varphi(x)>0$, $\varphi(x)\geq 0$, $\varphi(x)<0$ и $\varphi(x)\leq 0$, где $\varphi(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots(x-a_n)^{k_n}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные, неравные друг другу числа; $k_1, \ldots, k_n$ — целые положительные числа используют обобщённый метод интервалов

На чем базируется метод?

Подход, лежащий в основе метода интервалов, имеет место в силу следующего свойства непрерывной функции: если на интервале *(a,b)* функция *f* непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак (от себя добавим, что аналогичное свойство справедливо и для числовых лучей $(-\infty,\ a)$ и $(a,\ +\infty)$).

Для выражений $f(x)$, имеющих указанный в предыдущем пункте вид, постоянство знака на промежутках можно обосновать и иначе, отталкиваясь от свойств числовых неравенств и учитывая правила умножения и деления чисел с одинаковыми знаками и разными знаками.

Как определять знаки на интервалах?

Самый надежный способ определения знака выражения из левой части неравенства на каждом промежутке состоит в вычислении значения этого выражения в какой-либо одной точке из каждого промежутка. При этом искомый знак на промежутке совпадает со знаком значения выражения в любой точке этого промежутка.

Возьмем неравенство

$$\frac{x^2-x+4}{x+3}\ge 0$$

.

Выражение из его левой части не имеет нулей числителя, а нулем знаменателя является число −3. Оно делит числовую прямую на два промежутка $(-\infty,\ -3)$ и $(-3,\ +\infty)$. Определим знаки на них. Для этого возьмем по одной точке из этих промежутков, и вычислим значения выражения в них.

$$\frac{x^2-x+4}{x+3}$$

Сразу заметим, что целесообразно брать такие точки, чтобы проводить вычисления было легко. Например, из первого промежутка $(-\infty,\ -3)$ можно взять -4. При $x=-4$ имеем $\frac{(-4)^2-(-4)+4}{(-4)+3}=-24$, получили значение со знаком минус (отрицательное), поэтому, на этом интервале будет знак минус. Переходим к определению знака на втором промежутке *(−3, +∞)*. Из него удобно взять *0* (если *0* входит в промежуток, то целесообразно всегда брать его, так как при *x=0* вычисления оказываются наиболее простыми). При *x=0* имеем $\frac{0^2-0+4}{0+3}=\frac{4}{3}$. Это значение со знаком плюс (положительное), поэтому, на этом интервале будет знак плюс.

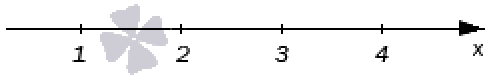
Существует и другой подход к определению знаков, состоящий в нахождении знака на одном из интервалов и его сохранении или изменении при переходе к соседнему интервалу через нуль. Нужно придерживаться следующего правила. При переходе через нуль числителя, но не знаменателя, или через нуль знаменателя, но не числителя, знак изменяется, если степень выражения, дающего этот нуль, нечетная, и не изменяется, если четная. А при переходе через точку, являющуюся одновременно и нулем числителя, и нулем знаменателя, знак изменяется, если сумма степеней выражений, дающих этот нуль, нечетная, и не изменяется, если четная.

Кстати, если выражение в правой части неравенства имеет вид, указанный в начале первого пункта этой статьи, то на крайнем правом промежутке будет знак плюс.

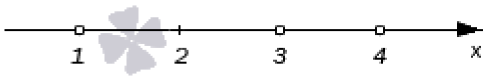
Чтобы все стало понятно, рассмотрим пример.

$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)^3\cdot(x-4)^2}{(x-1)^4\cdot(x-3)^5\cdot(x-4)}\geq 0$$

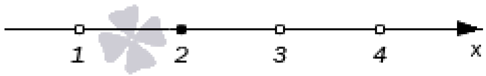
Пусть перед нами неравенство , и мы его решаем методом интервалов. Для этого находим нули числителя *2, 3, 4* и нули знаменателя *1, 3, 4*, отмечаем их на координатной прямой сначала черточками



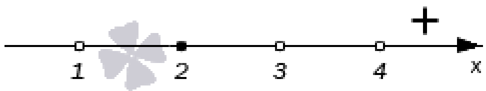
затем нули знаменателя заменяем изображениями выколотых точек



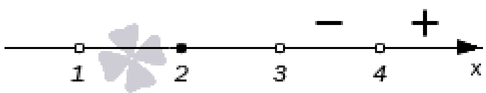
и так как решаем нестрогое неравенство, то оставшиеся черточки заменяем обыкновенными точками



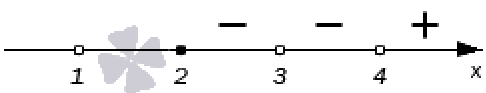
А дальше наступает момент определения знаков на промежутках. Как мы заметили перед этим примером, на крайнем правом промежутке $(4, +\infty)$ будет знак +:



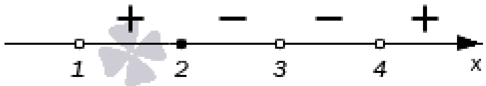
Определим остальные знаки, при этом будем продвигаться от промежутка к промежутку справа налево. Переходя к следующему интервалу $(3, 4)$, мы переходим через точку с координатой 4. Это нуль как числителя, так и знаменателя, эти нули дают выражения $(x-4)^2$ и $x-4$, сумма их степеней равна $2+1=3$, а это нечетное число, значит, при переходе через эту точку нужно изменить знак. Поэтому, на интервале $(3, 4)$ будет знак - :



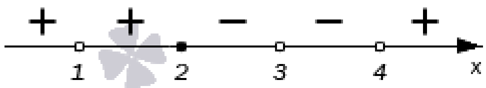
Идем дальше к интервалу $(2, 3)$, при этом переходим через точку с координатой 3. Это нуль также как числителя, так и знаменателя, его дают выражения $(x-3)^3$ и $(x-3)^5$, сумма их степеней равна $3+5=8$, а это четное число, поэтому, знак останется неизменным:



Продвигаемся дальше к интервалу $(1, 2)$. Путь к нему нам преграждает точка с координатой 2. Это нуль числителя, его дает выражение $x-2$, его степень равна 1, то есть она нечетная, следовательно, при переходе через эту точку знак изменится:



Наконец, осталось определить знак на последнем интервале *(−∞, 1)*. Чтобы попасть на него, нам необходимо преодолеть точку с координатой *1*. Это нуль знаменателя, его дает выражение $(x-1)^4$, его степень равна *4*, то есть, она четная, следовательно, знак при переходе через эту точку изменяться не будет. Так мы определили все знаки, и рисунок приобретает такой вид:



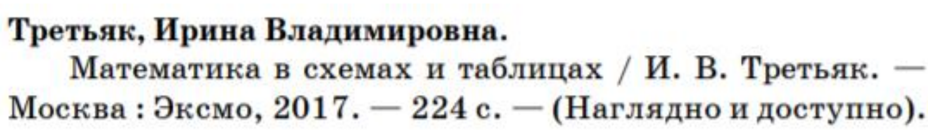
При решении неравенств можно использовать как непосредственное вычисление знака на промежутке, так и описанный выше способ припереходе к следующему интервалу через нуль.

Этот способ целесообразен при решении неравенств, содержащих иррациональности, например для выражения

$$\frac{\left(x+\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^3\cdot\left(x^2+6\cdot x+11\right)^2\cdot\left(x+\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)}{\left(x-1\right)^2\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(x-12\right)}$$

вычислить значение в точке на интервале $\left(\frac{\sqrt{3}-3}{4};\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)$ достаточно проблематично

Список использованных интернет-ресурсов:

1. 
Третьяк, Ирина Владимировна.
Математика в схемах и таблицах / И. В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2017. — 224 с. — (Наглядно и доступно).
2. http://www.cleverstudents.ru/