Лекция.

Тема: Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения и частного. Производные основных элементарных функций.

Геометрическая интерпретация производной, впервые данная в конце XVII века Лейбницем, состоит в следующем:

Значение производной функции y=f(x) в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в той же точке x, т.е. $\boldsymbol{k = f'(x) = tg\,\varphi}$

Рассмотрим задачу.

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy дана кривая уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т.е. tgφ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 3.1).

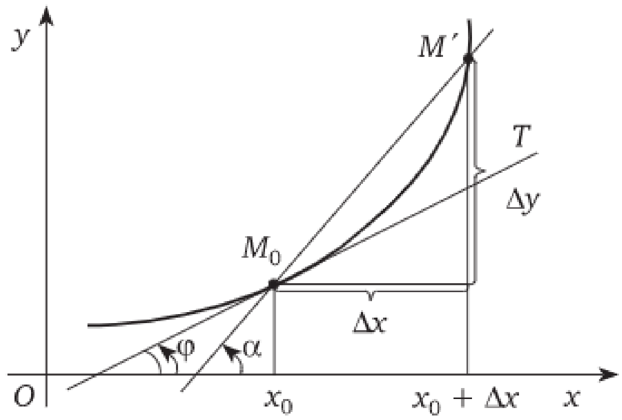


Рис. 3.1

Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M'(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ проведем секущую M_0M'. Из рис. 3.1 очевидно, что угловой коэффициент tgα секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

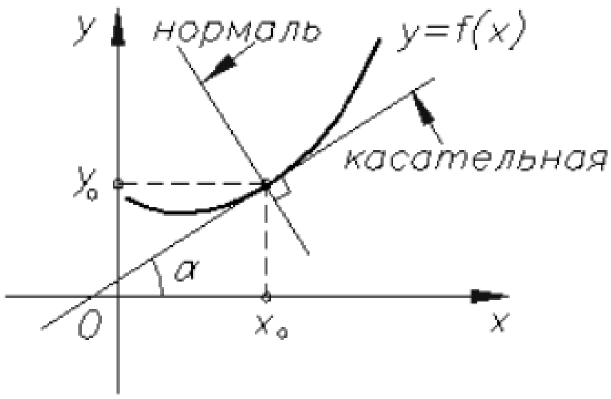
где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение: прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется **нормалью** к кривой в этой точке.



Если кривая определена уравнением $y = f(x)$, то уравнение касательной к ней в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

а уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Как Вы заметили нам нужно найти производную, чтобы написать уравнение касательной или нормали.

Операцию отыскания производной некоторой функции называют *дифференцированием* функции, а раздел математики, изучающий свойства этой операции, — *дифференциальным исчислением*.

Если функция имеет производную в точке $x = a$, то говорят, что она *дифференцируема в этой точке*. Если функция имеет производную в каждой точке данного промежутка, то говорят, что она *дифференцируема на этом промежутке*.

Существуют общие правила нахождения производной:

1^0. Находят новое значение функции, подставив в данную функцию вместо x новое значение аргумента $x+\Delta x$:

$$y_н = f(x+\Delta x) = y + \Delta y.$$

2^0. Определяют приращение функции, вычитая данное значение функции из ее нового значения:

$$\Delta y = y_н - y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

3^0. Составляют отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4^0. Переходят к пределу при $\Delta x \to 0$ и находят производную:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

(в пояснении $y_н$ – это y(x +Δx))

Применим эти правила и найдем производную функции y=5x

1. y(x +Δx) = 5(x +Δx) = 5x + 5Δx
2. Δy = y(x +Δx) – y(x) = (5x + 5Δx) – 5x = 5Δx
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$

Таким образом, мы нашли производную функции, пользуясь непосредственным определением производной.

Но это не очень удобно, хотя и позволяет вычислить производную любой элементарной функции.

Вспомним, элементарные функции — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из следующих основных элементарных функций: степенная функция с любым действительным показателем; показательная и логарифмическая функции; тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Формулы производных основных элементарных функций

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Правила вычисления производных

Вычисление производных основано на применении следующих правил, которые мы будем использовать

Правило 1 *(производная от произведения числа на функцию)*. Справедливо равенство $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$, где c – любое число.

Другими словами, производная от произведения числа на функцию равна произведению этого числа на производную функции.

Правило 2 (производная суммы функций).

Производная суммы функций вычисляется по формуле

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

то есть производная от суммы функций равна сумме производных этих функций.

Правило 3 (производная разности функций).

Производная разности функций вычисляется по формуле

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x),$$

то есть производная от разности функций равна разности производных этих функций.

Правило 4 (производная произведения двух функций).

Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$$

Другими словами, производная от произведения двух функций равна производной от первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс первая функция, умноженная на производную от второй функции.

Правило 5 (производная частного двух функций).

Производная от дроби (частного двух функций) вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Рассмотрим пример нахождения производной.

Найти производную функции $y = 8x^6 - 2x^{-3} + 15x - 61$

Решение $y' = 8 \cdot 6x^{6-1} - 2 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} + 15 = 48x^5 + 6x^{-4} + 15$.

Подробно рассмотрим примеры из видеоурока.

В учебнике Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

Занятие 5 «Производные элементарных функций» стр. 180-182.
Вопросы и упражнения, задание 5, примеры 1-6.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/