Практическое занятие №36

Нахождение производных сложных функций.

Цель практической работы:

- сформировать представление о правилах дифференцирования;
- овладеть методами дифференцирования сложных функций, научиться их применять.

Таблица производных элементарных функций (для успешного решения!)

1. $c' = 0, c = \text{const}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

На данном занятии мы научимся находить **производную сложной функции**.

Сложная функция (или суперпозиция) – это функция, аргументом которой также является функция. Условно можно обозначать как *f(g(x))*. То есть, *g(x)* как бы аргумент функции *f(g(x))*. $f(g(x)) = (x^2 + 2x - 3)^4$

f – функция возведения в четвертую степень, а

$g(x) = x^2 + 2x - 3$ - целая рациональная функция.

Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Правило дифференцирования сложной функции:

$f((g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. В данном примере понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а sin – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.**

Второй шаг, нахождение производной

$$y' = (\sin(3x - 5))'$$

Сначала находим производную внешней функции ***sin*** (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций $(\sin x)' = \cos x$.

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

<u>Пример 2</u>

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

записываем: $y' = ((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$$

$$f\big(g(x)\big) = f(g(x)^5), \text{где } g(x) = (2x+1)$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции, результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

<u>Пример 3</u>

Найти производную функции $y = sin^2 x,$ где $g(x) = \sin x$

$$y' = 2 * sin^{2-1}x * (\sin x)' = 2\sin x * \cos x$$

<u>Пример 4</u>

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$, функция $g(x) = \sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$, функция $g(x) = arctg\ x$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Задачи для самостоятельного решения.

$y = (5x^2-2)^6$

$y = 3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$y = (1-6x^3)^5$

$$y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = (3 - 4x^4)^5$$

$$y = 2tg(3x - 1)$$

$$y = (1 - 3x^2)^7$$

$$y = 3\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = (7 - 3x^3)^7$$

$$y = 3ctg(2x + 3)$$

Контроль

Тестовое задание по теме «Производная» 15мин.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/
4. http://mathprofi.ru/
5. http://www.cleverstudents.ru/