Практическое занятие №48

Решение трансцендентных уравнений.

Кроме алгебраических уравнений, есть еще и трансцендентные уравнения: показательные, логарифмические, тригонометрические и др. Решение трансцендентных уравнений, а также неравенств, существенно опирается на свойства функций, которые изучаются в математике. Таким образом, расширяется круг методов решения уравнений.

Трансцендентное уравнение – это уравнение, содержащее *трансцендентные функции* (показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) от неизвестного (переменного), например уравнения:

$\sin x + \lg x = x$, $2^x - \lg x = \arccos x$.

Формул, позволяющих находить корни подобного уравнения (как например, формула корней квадратного уравнения) не существует. Если обобщить и систематизировать имеющийся материал по решению таких уравнений, можно выделить следующие способы решений трансцендентных уравнений:

1. Метод оценки.
2. Функционально-графический способ.
3. Использование свойств функции:

- четности,
- монотонности,
- экстремальных свойств,
- ограниченности,
- области существования,
- неотрицательности функций.

Рассмотрим несколько трансцендентных уравнений.

Пример 1.

а) Решите уравнение $49^{\sqrt{2}\sin x-1}+81\cdot 9^{\sqrt{2}\sin x-3}=42\cdot 21^{\sqrt{2}\sin x-2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $49^{\sqrt{2}\sin x-1}+81\cdot 9^{\sqrt{2}\sin x-3}=42\cdot 21^{\sqrt{2}\sin x-2}$;

$\left(7^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2+81\cdot\left(3^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2\cdot 9^{-2}=2\cdot 21\cdot 21^{\sqrt{2}\sin x-2}$;

$\left(7^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2+\left(3^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2=2\cdot 21^{\sqrt{2}\sin x-1}$.

Разделим обе части уравнения на $\left(7^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2$ $\left(\text{учитывая, что} 7^{\sqrt{2}\sin x-1}\neq 0\right)$, тогда уравнение примет вид: $1+\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{2}\sin x-1}\right)^2=2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{2}\sin x-1}$; введём обозначение $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{2}\sin x-1}=t, t>0$.

$1+t^2=2t, t^2-2t+1=0, (t-1)^2=0, t=1$.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{2}\sin x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^0, \sqrt{2}\sin x-1=0, \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}, x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 182). Получаем: $2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$.

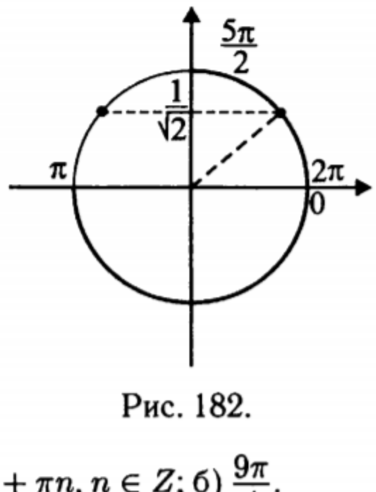

Рис. 182.

Ответ: а) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

Пример 2

а) Решите уравнение $\log_6(5\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 7) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

а) $\log_6(5\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 7) = 0$, $5\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 7 = 1$, $5\sqrt{3}\sin x - 1 + 2\sin^2 x - 8 = 0$, $2\sin^2 x + 5\sqrt{3}\sin x - 9 = 0$; обозначим $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$ тогда $2t^2 + 5\sqrt{3}t - 9 = 0$, $t = \dfrac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{75+72}}{4} = \dfrac{-5\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4}$, $t_1 = -3\sqrt{3}$; $t_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$t_1 = -3\sqrt{3}$ — не удовлетворяет условию $|\sin x| \leqslant 1$.

Отсюда $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 192). Получаем числа: $-2\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{3}$; $-\pi - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{4\pi}{3}$.

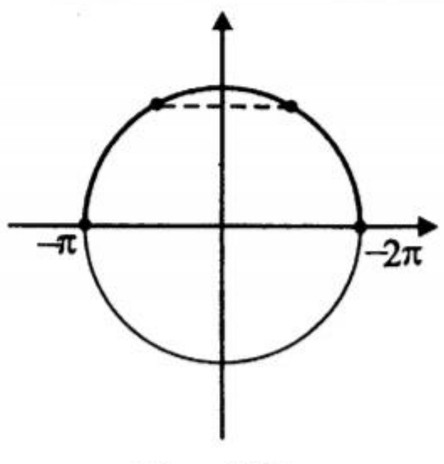

Рис. 192.

Ответ: а) $(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; б) $-\dfrac{5\pi}{3}$; $-\dfrac{4\pi}{3}$.

Пример 3.

а) Решите уравнение $\log_3^2(10-\sin x)^2 - 4\log_3(30-3\sin x) = 4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение:

а) $\log_3^2(10-\sin x)^2 - 4\log_3(30-3\sin x) = 4;$

$4\log_3^2(10-\sin x) - 4(\log_3 3 + \log_3(10-\sin x)) = 4;$

$4\log_3^2(10-\sin x) - 4 - 4\log_3(10-\sin x) = 4;$

$4\log_3^2(10-\sin x) - 4\log_3(10-\sin x) - 8 = 0;$

$\log_3^2(10-\sin x) - \log_3(10-\sin x) - 2 = 0.$

Введём обозначение $\log_3(10-\sin x) = t$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$; $t_2 = 2$.

$\left[\begin{array}{l}\log_3(10-\sin x) = -1,\\ \log_3(10-\sin x) = 2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}10-\sin x = \frac{1}{3},\\ 10-\sin x = 9;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x = 9\frac{2}{3},\\ \sin x = 1.\end{array}\right.$

$\sin x = 9\frac{2}{3}$ — не имеет корней, так как не удовлетворяет условию $|\sin x| \leqslant 1$.

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

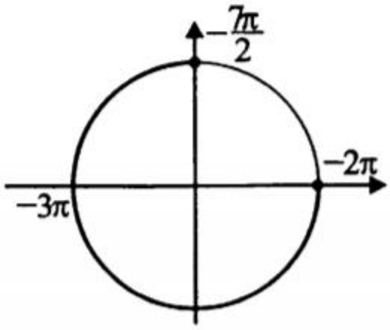

Рис. 199.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 199). Получаем число: $-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

Уравнение 1.

а) Решите уравнение $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Для решения уравнения разложите левую часть уравнения на множители методом группировки и вынесения общего множителя за скобки.

Решение пункта б):

б) Найдем корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрической окружности (см. рис. 209).

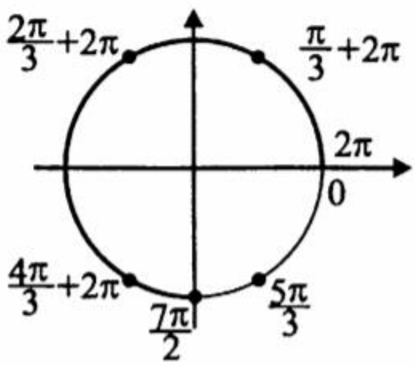

Рис. 209.

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$; $x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3}$; $x_4 = \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Уравнение 2.

а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x) - 11\log_2(2\sin x) + 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Для решения уравнения сделайте замену

Решение пункта б):

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, найдём с помощью числовой окружности (см. рис. 222).

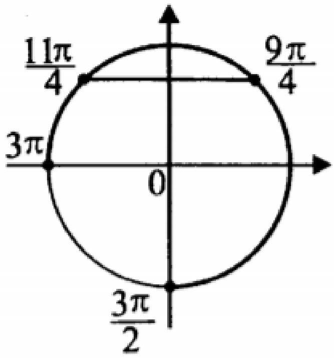

Рис. 222.

$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$,

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{11\pi}{4}$.

Ответ: а) $(-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.

Материалы учебно-методического пособия:

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2018.
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ.
40 тренировочных вариантов по демоверсии 2018 года
Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://www.resolventa.ru/