

Практическое занятие №36

Нахождение производных сложных функций.

Цель практической работы:

- сформировать представление о правилах дифференцирования;
- овладеть методами дифференцирования сложных функций, научиться их применять.

Таблица производных элементарных функций (для успешного решения!)

$$1. c' = 0, c = \text{const}$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

На данном занятии мы научимся находить **производную сложной функции**.

Сложная функция (или суперпозиция) – это функция, аргументом которой также является функция. Условно можно обозначать как $f(g(x))$. То

есть, $g(x)$ как бы аргумент функции $f(g(x))$. $f(g(x)) = (x^2 + 2x - 3)^4$

f – функция возведения в четвертую степень, а

$g(x) = x^2 + 2x - 3$ – целая рациональная функция.

Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Правило дифференцирования сложной функции:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. В данном примере понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а \sin – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней.

Второй шаг, нахождение производной

$$y' = (\sin(3x - 5))'$$

Сначала находим производную внешней функции ***sin*** (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций $(\sin x)' = \cos x$.

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0) = 3\cos(3x - 5)$$

Пример 2

Найти производную функции $y = (2x + 1)^5$

записываем: $y' = ((2x + 1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя:

$$y' = ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)'$$

$$f(g(x)) = f(g(x)^5), \text{ где } g(x) = (2x + 1)$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции, результат:

$$y' = ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2 + 0) = 10 \cdot (2x + 1)^4$$

Пример 3

Найти производную функции $y = \sin^2 x$, где $g(x) = \sin x$

$$y' = 2 \cdot \sin^{2-1} x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Пример 4

а) Найти производную функции $y = \arctg \sqrt{x}$, функция $g(x) = \sqrt{x}$

$$y' = (\arctg \sqrt{x})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{\arctg x}$, функция $g(x) = \arctg x$

$$y' = (\sqrt{\arctg x})' = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot (\arctg x)' = \frac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{\arctg x}}$$

Задачи для самостоятельного решения.

$$y = (5x^2 - 2)^6$$

$$y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = (1 - 6x^3)^5$$

$$y = 2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$y = (3 - 4x^4)^5$$

$$y = 2 \operatorname{tg}(3x - 1)$$

$$y = (1 - 3x^2)^7$$
$$y = 3 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = (7 - 3x^3)^7$$

$$y = 3 \operatorname{ctg}(2x + 3)$$

Контроль

Тестовое задание по теме «Производная» 15 мин.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>
2. <https://www.resolventa.ru/>
3. <https://egemaximum.ru/>
4. <http://mathprofi.ru/>
5. <http://www.cleverstudents.ru/>