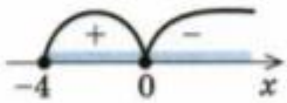
Практическое занятие №53.

Решение неравенств.

1. **Решение иррациональных неравенств**

1. Метод интервалов (для неравенств вида $f(x) \geq 0$)	
1) Найти ОДЗ неравенства. 2) Найти нули функции $f(x)$ ($f(x) = 0$). 3) Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак функции в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ. 4) Записать ответ, учитывая знак неравенства.	$\sqrt{x+4} > x+2.$ ▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+4} - x - 2 > 0.$ Обозначим $f(x) = \sqrt{x+4} - x - 2.$ ОДЗ: $x + 4 \geq 0$, то есть $x \geq -4$. Нули $f(x)$: $\sqrt{x+4} - x - 2 = 0,$ $\sqrt{x+4} = x+2,\ x + 4 = x^2 + 4x + 4,$ $x^2 + 3x = 0,\ x_1 = 0$ — корень, $x_2 = -3$ — посторонний корень. *Ответ:* $[-4;\ 0)$. 
2. Равносильные преобразования	
1) При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного неравенства).	$\sqrt[3]{x+2} < -1.$ ▶ ОДЗ: $\boldsymbol{R}$. Данное неравенство равносильно неравенствам: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 < (-1)^3,\ x + 2 < -1,\ x < -3.$ *Ответ:* $(-\infty;\ -3)$. ◁
2) Если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении обеих частей неравенства в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ заданного неравенства).	$\sqrt[4]{2x-6} < 1.$ ▶ ОДЗ: $2x - 6 \geq 0$, то есть $x \geq 3$. Обе части данного неравенства неотрицательны, следовательно, данное неравенство равносильно (на его ОДЗ) неравенствам: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4 < 1^4,\ 2x - 6 < 1,\ x < \frac{7}{2}.$ Учитывая ОДЗ, получаем $3 \leq x < \frac{7}{2}.$ *Ответ:* $\left[3;\ \frac{7}{2}\right)$. ◁

3) Если на ОДЗ заданного неравенства какая-либо часть неравенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то прежде чем возводить обе части неравенства в четную степень, эти случаи необходимо рассмотреть отдельно.

Например,

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} > x+2.$$

▶ Данное неравенствао равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2 > (x+2)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$$

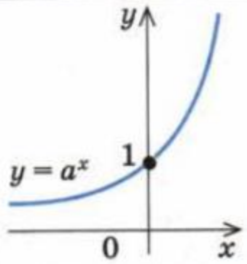
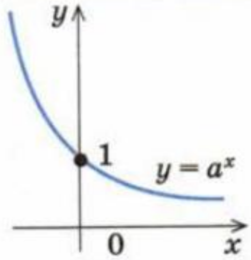
Тогда $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2+3x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -2. \end{cases}$

Решив неравенство $x^2 + 3x < 0$, имеем $-3 < x < 0$ (см. рисунок).

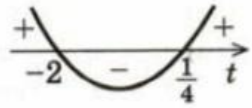
Учитывая неравенство $x \geqslant -2$, получаем решение первой системы: $-2 \leqslant x < 0$. Решение второй системы: $-4 \leqslant x < -2$. Объединяя эти решения, получаем ответ.

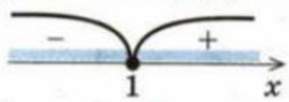
Ответ: $[-4; 0)$. ◁

2. Решение показательных неравенств.

1. График показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$ и $a \neq 1$)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 возрастает	 убывает
2. Схема равносильных преобразований простейших показательных неравенств	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$ *знак неравенства сохраняется*	$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$ *знак неравенства меняется на противоположный*
Примеры	
$2^{x-3} > 4.$ ▶ $2^{x-3} > 2^2$. Функция $y = 2^t$ является возрастающей, следовательно: $x - 3 > 2, \quad x > 5.$ *Ответ:* $(5; +\infty)$. ◁	$(0{,}7)^{x-3} > 0{,}49.$ ▶ $(0{,}7)^{x-3} > (0{,}7)^2$. Функция $y = 0{,}7^t$ убывающая, следовательно: $x - 3 < 2, \quad x < 5.$ *Ответ:* $(-\infty; 5)$. ◁

Решение более сложных показательных неравенств

I. С помощью равносильных преобразований (по схеме решения показательных уравнений, табл. 54) данное неравенство приводится к неравенству известного вида (квадратному, дробному и т. д.). После решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам.	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶ $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ *Замена* $2^x = t$ дает неравенство $4t^2 + 7t - 2 > 0$, решения которого $t < -2$ или $t > \frac{1}{4}$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $2^x < -2$ (решений нет) или $2^x > \frac{1}{4}$, откуда $2^x > 2^{-2}$, то есть $x > -2$. *Ответ:* $(-2; +\infty)$. ◁

II. Применяем *метод интервалов*[1], приводя данное неравенство к виду $f(x) \geq 0$ и используя схему: 1. Найти ОДЗ. 2. Найти нули $f(x)$. 3. Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ. 4. Записать ответ, учитывая знак неравенства.	$3^x + 4^x > 7.$ ▶ Решим неравенство методом интервалов. Данное неравенство равносильно неравенству $3^x + 4^x - 7 > 0.$ Обозначим $f(x) = 3^x + 4^x - 7.$ 1. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$. 2. Нули функции: $f(x) = 0.$ $3^x + 4^x - 7 = 0$. Поскольку функция $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то значение, равное нулю, она принимает только в одной точке области определения: $x = 1$ $(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0)$. 3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решение неравенства $f(x) > 0$.  *Ответ:* $(1; +\infty)$. ◁

Задача 1 Решите неравенство $(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Решение

▶ $(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant (0,6)^0$.

Поскольку функция $y=(0,6)^t$ является убывающей, то $x^2-7x+6 \leqslant 0$.

Отсюда $1 \leqslant x \leqslant 6$ (см. рисунок).

Ответ: [1; 6]. ◁

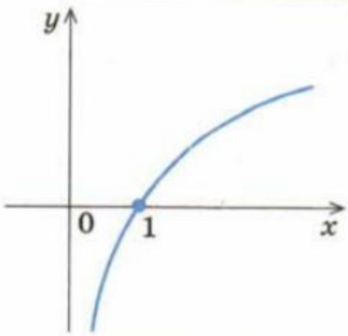
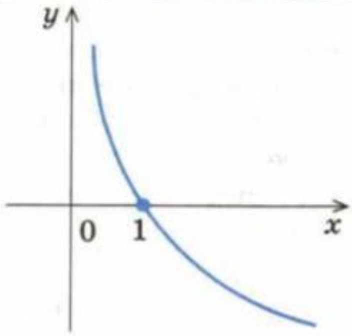
Комментарий

Запишем правую часть неравенства как степень числа 0,6: $1=(0,6)^0$.

Поскольку $0,6<1$, то при переходе от степеней к показателям знак неравенства меняется на противоположный (получаем неравенство, равносильное данному).

Для решения полученного квадратного неравенства используем графическую иллюстрацию.

3. Решение логарифмических неравенств

1. График функции $y=\log_a x$ $(a>0;\ a\neq 1)$	
$a>1$	$0<a<1$
 возрастает	 убывает

2. Равносильные преобразования простейших логарифмических неравенств	
$a>1$	$0<a<1$
$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$	$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$
Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ.	*Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ.*

Примеры	
$\log_2(x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $\log_2(x-5) > \log_2 2^3.$ Функция $y = \log_2 t$ возрастающая, тогда $x - 5 > 2^3,$ $x > 13.$ Учитывая ОДЗ, имеем $x > 13$. *Ответ:* $(13; +\infty)$. ◁	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, то есть $x > 5$. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$ Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ убывающая, тогда $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$. Учитывая ОДЗ, имеем $5 < x < 5\frac{1}{8}$. Ответ: $\left(5; 5\frac{1}{8}\right)$. ◁

Решение более сложных логарифмических неравенств

I. С помощью равносильных преобразований данное неравенство приводится к неравенству известного вида.	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенствам: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$.

Схема равносильных преобразований неравенства: 1. **Учитываем ОДЗ** заданного неравенства (и избегаем преобразований, приводящих к сужению ОДЗ). 2. Следим за тем, чтобы **на ОДЗ каждое преобразование можно было выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением верного неравенства.**	*Замена* $\lg x = t$. Тогда $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, то есть $t^2 + t - 2 \geqslant 0$. Решение этого неравенства $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 1$ (см. рисунок).  Обратная замена дает $\lg x \leqslant -2$ или $\lg x \geqslant 1$. Тогда $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ или $\lg x \geqslant \lg 10$. Учитывая, что функция $y = \lg x$ является возрастающей, получаем: $x \leqslant 10^{-2}$ или $x \geqslant 10$. С учетом ОДЗ имеем: $0 < x \leqslant 0{,}01$ или $x \geqslant 10$. *Ответ:* $(0; 0{,}01] \cup [10; +\infty)$. ◁

II. Применяется метод интервалов

(данное неравенство приводится к неравенству $f(x) \geq 0$) и используется схема:

1. **Найти ОДЗ.**
2. **Найти нули $f(x)$.**
3. **Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.**
4. **Записать ответ, учитывая знак неравенства.**

$$\log_x(2x + 3) < 2.$$

▶ Решим неравенство методом интервалов. Оно равносильно неравенству

$$\log_x(2x + 3) - 2 < 0.$$

Обозначим $f(x) = \log_x(2x + 3) - 2$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x \neq 1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x>0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2. Нули функции: $f(x) = 0$. $\log_x(2x + 3) - 2 = 0$. Тогда $\log_x(2x + 3) = 2$. На ОДЗ это уравнение равносильно уравнению $2x + 3 = x^2$ (полученному по определению логарифма). То есть $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. В ОДЗ входит только $x = 3$. Итак, $f(x)$ имеет единственный нуль функции $x = 3$.

3. Отмечаем нули функции на ОДЗ, находим знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ, и записываем решения неравенства $f(x) < 0$.

Ответ: $x \in (0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Задача 1 Решите неравенство $\log_{0,2}(x - 1) + \log_{0,2}(x + 3) \geq -1$

Решение

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ Тогда $x > 1$.

На этой ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству

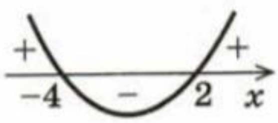
$$\log_{0,2}((x-1)(x+3)) \geq \log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функция $y = \log_{0,2} t$ убывающая, поэтому $(x - 1)(x + 3) \leq (0,2)^{-1}$.

Получаем $x^2 + 2x - 3 \leq 5$, $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

Последнее неравенство имеет решения:

$-4 \leq x \leq 2$ (см. рисунок).



Учитывая ОДЗ, получаем $1 < x \leq 2$.

Ответ: $(1;\ 2]$. ◁

Задания для самостоятельного решения.

$(x+1)\sqrt{2-x} > 0;$

$\sqrt{2x+4} \le 2;$

$\sqrt{x^2-3x+2} > -4.$

$3^x - 3^{x-3} > 26;$

$4^x - 2^x \ge 2.$

$2^{x+2} + 2^{x+5} < 9;$

$9^x - 3^x \le 6.$

$\log_2(x^2-3x) < 2;$

$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 > 0.$

$\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 > 0.$

Список использованных источников:

Нелин Е.П., Лазарев В.А.
Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Илекса, 2011, — 480 с.: ил.

Ершова А.П., Нелин Е.П.
Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам математического анализа для 10 класса.— М.: ИЛЕКСА, — 2013, — 144 с.