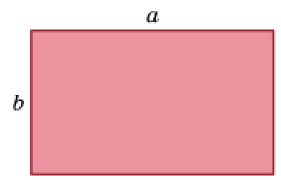
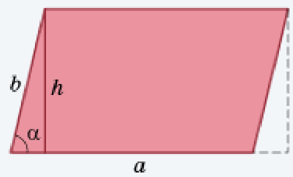
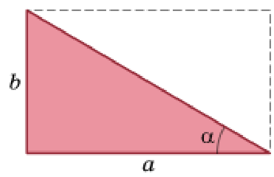
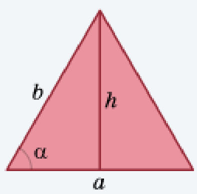
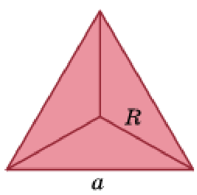
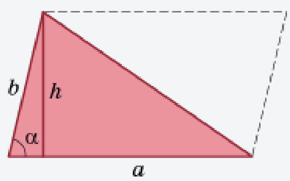
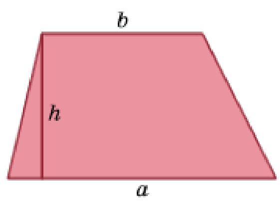
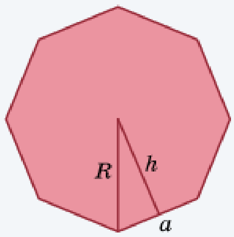
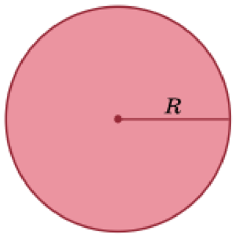
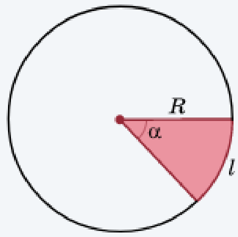
Лекция. Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции

Вспомним основные формулы нахождения площадей.

№ п/п	Фигура	Формула	Рисунок
1	Прямоугольник	$S = ab$	
2	Параллелограмм	$S = ah = ab\sin\alpha$	
3	Прямоугольный треугольник	$S = \frac{1}{2}ab$	
4	Равнобедренный треугольник	$S = \frac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}b^2\sin 2\alpha$ $h = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\alpha,\ a = 2b\cos\alpha$	
5	Правильный треугольник	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\ \ a = R\sqrt{3}$	
6	Произвольный треугольник	$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$	
7	Трапеция	$S = \frac{a+b}{2}h$	

8	Правильный n-угольник	$S = \frac{1}{2}nah = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$ $a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$, $h = R\cos\frac{\pi}{n}$	
9	Круг	$S = \pi R^2$	
10	Круговой сектор	$S = \frac{1}{4}lR = \frac{1}{2}R^2\alpha \; l = R\alpha$	

Однако, не всегда мы имеем дело с фигурами, площадь которых вычисляется по формулам, приведенным выше. Применяя определенный интеграл можно вычислить площадь практически любой фигуры.

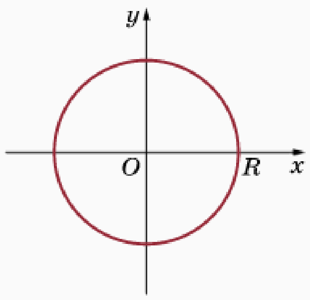
> **1. Метод исчерпывания Архимеда.** Площадь прямоугольника нам известна исходя из самого смысла понятия площади. Зная ее, легко вычислить площади треугольника, а затем и любого многоугольника, используя аддитивность площади. Площадь криволинейной фигуры естественно измерять приближенно, с помощью сетки из многоугольников. Переход от приближенных вычислений площади к точным связывают с именем Архимеда (III в. до н. э.), предложившим некоторый тип предельного перехода, который стал называться «методом исчерпывания». С помощью этого метода Архимед, например, предложил формулу для вычисления площади параболического сегмента. На современном языке Архимед сумел найти сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$. Метод Архимеда применялся многократно, но каждый раз он требовал специальных приемов для «исчерпывания», т. е. для перехода к пределу.

2. Идея переменной площади. В основе теории функций лежит понятие переменной, т. е. некоторого процесса, движения. Как заставить меняться фигуру, площадь которой требуется измерить?

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Прежде всего поместим фигуру на координатную плоскость и потребуем, чтобы было известно уравнение, которым связаны координаты точек **границы** фигуры.

Например, если круг радиуса R поместить на координатную плоскость xOy с началом в центре круга, то уравнение окружности, ограничивающей этот круг, запишется в виде зависимости $x^2 + y^2 = R^2$.



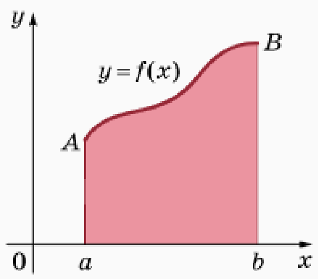
Чтобы перейти от зависимостей к функциям, можно разбить границу фигуры на две части — «верхнюю» и «нижнюю». Так мы придем к понятию «криволинейной трапеции».

Пусть на координатной плоскости дан график неотрицательной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$.

Определение

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс.

Площадь криволинейной трапеции



$x \in [a; b]$

$aABb$ — криволинейная трапеция (подграфик функции $y = f(x)$)

Иногда так построенную криволинейную трапецию называют **подграфиком** функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Иногда так построенную криволинейную трапецию называют **подграфиком** функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

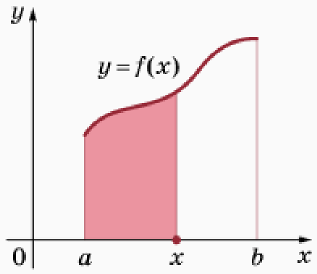
Теперь можно, не меняя задание функции формулой $y = f(x)$, начать изменять промежуток, на котором она определена. Чтобы упростить ситуацию, можно зафиксировать левый конец промежутка a и менять правый x, т. е. рассмотреть криволинейную трапецию для функции f, заданной на промежутке $[a; x]$ (x меняется от a до b). Можно сказать, что мы двигаем правую стенку криволинейной трапеции и получаем меняющуюся фигуру. Обозначим ее площадь через $S(x)$. Мы связали с функцией $y = f(x)$ новую функцию $y = S(x)$ — площадь переменной криволинейной трапеции. Площадь исходной (постоянной!) фигуры является значением функции S при $x = b$: $S = S(b)$.

3. Скорость роста переменной площади. В простейшей формулировке теорема Ньютона — Лейбница утверждает, что скоростью роста функции $y = S(x)$ является функция $y = f(x)$, т. е. производной функции $y = S(x)$ есть функция $y = f(x)$: $S'(x) = f(x)$.

Таким образом, задача нахождения площади переменной криволинейной трапеции оказалась обратной задаче дифференцирования функции. Зная функцию, определяющую границу фигуры, нужно найти функцию, производная которой равна этой функции.

Используя понятие **первообразной**, можно сказать, что площадь переменной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, является **первообразной** для функции f, точнее «одной из первообразных» функции f, так как функция имеет бесконечно много первообразных.

Переменная площадь



$S = S(x)$

$$S'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$S(x) = \int f(x)dx + C$$

Нахождение площади криволинейной трапеции сводится к вычислению интеграла. Не всегда это табличный интеграл.

Рассмотрим несколько приемов (методов), позволяющих вычислить различные интегралы.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$\int$ – знак интеграла;
$f(x)$ – подынтегральная функция;
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;
x – переменная интегрирования;
C – постоянная интегрирования;

1. Метод непосредственного интегрирования

Приведение к табличному виду или **метод непосредственного интегрирования.** С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int 2^{3x-1}dx$

Решение. Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к табличному виду.

$$\int 2^{3x-1}dx = \int 2^{3x} \cdot 2^{-1}dx = \frac{1}{2}\int \left(2^3\right)^x dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$$

Ответ. $\int 2^{3x-1}dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$

2. Внесение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина dx означает, что берется дифференциал от переменной x. Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла. Для этого используется формула

$$y'(x)dx = dy(x)$$

Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

Пример

Задание. Внесением под дифференциал найти неопределенный интеграл $\int \cos(2x)dx$

Решение. Внесем $2x$ под знак дифференциала, тем самым приведя исходный интеграл к табличному.

$$\int \cos(2x)dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2}\int d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Ответ. $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

!!! Если Вы сомневаетесь в правильности нахождения интеграла – возьмите от полученной первообразной производную, Вы должны получить подынтегральную функцию!!!

В общем виде справедливо равенство:

$$\int f(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int f(y(x)) d(y(x))$$

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3-5x}$

Решение. Внесем $3-5x$ под знак дифференциала, тем самым приведя исходный интеграл к табличному.

$$\int \frac{dx}{3-5x} = \int \frac{-\frac{1}{5}d(-5x)}{3-5x} =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$$

Ответ. $\int \frac{dx}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$

3. Интегрирование заменой переменной

Интегрирование заменой переменной или методом подстановки. Пусть $x = \phi(t)$, где функция $\phi(t)$ имеет непрерывную производную $\phi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \cdot dt$$

Определенный интеграл зависит от переменной интегрирования, поэтому если выполнена замена переменных, то обязательно надо вернуться к первоначальной переменной интегрирования.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3-5x}$

Решение. Заменим знаменатель на переменную t и приведем исходный интеграл к табличному.

$$\int \frac{dx}{3-5x} \left\| \begin{array}{l} 3-5x = t \\ -5dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{5} \end{array} \right\| = \int \frac{-\frac{dt}{5}}{t} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|t| + C = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$$

Ответ. $\int \frac{dx}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$

!!! Заменили подынтегральное выражение на другое с новой переменной, значит и dx тоже заменяется на dt в подстановке:

1. Заменили подынтегральную функцию на t
2. Продифференцировали новую функцию по переменной t, чтобы заменить dx на dt
3. Все полученные замены подставили в подынтегральное выражение.

4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называют интегрирование по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du$$

При нахождении функции v по ее дифференциалу dv можно брать любое значение постоянной интегрирования C, так как она в конечный результат не входит. Поэтому для удобства будем брать $C = 0$.

Использование формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда дифференцирование упрощает один из сомножителей, в то время как интегрирование не усложняет другой.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int x \cos x dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int x \cos x dx \left\| \begin{matrix} u = x & v = \sin x \\ du = dx & dv = \cos x dx \end{matrix} \right\| = x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

Ответ. $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник БашмаковМ.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://www.webmath.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/

Выполнить задание – тест

Срок сдачи теста 06 мая 2020г. до 14.00 в чат по математике, сдавать в виде: № вопроса – номер ответа и его значение (ответ)

Вариант№1

№ п/п	Вычислить	Варианты ответов				
		1	2	3	4	5
1	Подынтегральное выражение	$f(x)$	$f(x)dx$	dx	$F(x)$	c
2	$\int 3x^2\,dx$	$3x$	x^3	$\frac{1}{3}x^3$	$6x$	$6x^3$
3	$\int \cos 2x\,dx$	$-\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	$\frac{1}{2}\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\sin 2x$	$2\sin 2x$
4	$\int 3^x\,dx$	$3^x \ln 3$	$\frac{1}{3^x \ln 3}$	$\frac{3^x}{\ln 3}$	$\frac{3}{3^x \ln 3}$	$\frac{\ln 3}{3^x}$
5	$\int \sin(\frac{x}{2}+4)\,dx$	$-\frac{1}{2}cos(\frac{x}{2}+4)$	$2cos(\frac{x}{2}+4)$	$\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}+4)$	$-2cos(\frac{x}{2}+4)$	$\frac{1}{2}cos(\frac{x}{2}+4)$
6	$\int_{-1}^{1}(x+1)\ dx$	3	$2\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	1
7	$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\ dx$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

Вариант №2

№ п/п	Вычислить	Варианты ответов				
		1	2	3	4	5
1	Подынтегральная функция	$F(x)$	$f(x)dx$	dx	$f(x)$	c
2	$\int 6x^5\,dx$	$30x^4$	$\frac{6}{5}x^5$	$\frac{30}{x^5}$	x^6	$\frac{6}{5}x^6$
3	$\int \cos 3x\,dx$	$-\frac{1}{3}\sin 3x$	$\frac{1}{3}\cos 3x$	$\frac{1}{3}\sin 3x$	$3\cos 3x$	$3\sin 3x$
4	$\int 2^x\,dx$	$\frac{2^x}{\ln 2}$	$\frac{2}{2^x}$	$\frac{\ln 2}{2^x}$	$2^x \ln 2$	$2^x \ln x$
5	$\int \cos(\frac{x}{2}+4)\,dx$	$-\sin(\frac{x}{2}+4)$	$2\sin(\frac{x}{2}+4)$	$-2\sin(x+4)$	$2cos(\frac{x}{2}+4)$	$2\sin(x+4)$
6	$\int_{-1}^{2}(x+4)\,dx$	6,5	−13,5	−6,5	10,5	13,5
7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$	$\frac{\sqrt{2}-2}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}-2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант№3

№ п/п	Вычислить	Варианты ответов				
		1	2	3	4	5
1	Постоянная интегрирования	$F(x)$	$f(x)dx$	dx	$f(x)$	c
2	$\int 2x\,dx$	$2x$	$4x^2$	4	x^2	1
3	$\int \sin 2x\,dx$	$\frac{1}{2}\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	$2\cos 2x$	$\frac{1}{2}\cos x$	$2\cos x$
4	$\int 4^x\,dx$	$\frac{\ln4}{4^x}$	$4^x \ln 4$	$\frac{4^x}{\ln4}$	$4x\ln x$	$\frac{4x}{\ln4}$
5	$\int \sin(\frac{x}{3}-1)\,dx$	$3\,cos(x-1)$	$\frac{1}{3}\sin(x-1)$	$-3\,cos(\frac{x}{3}-1)$	$\frac{1}{3}cos(x-1)$	$\frac{1}{3}cos(\frac{x}{3}-1)$
6	$\int_{-1}^{1}(x-1)\,\,dx$	-2	0	2	1	$2{,}5$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\,dx$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1