Лекция. Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей.

Числовые последовательности встречаются уже в программе средней школы. Примерами таких последовательностей служат: 1) последовательность членов арифметической и геометрической прогрессий; 2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность;

3) последовательность $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, ... приближенных значений $\sqrt{2}$. Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

Определение числовой последовательности:

Определение 1. *Если каждому числу n из натурального ряда чисел*

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

поставлено в соответствие вещественное число x_n, то *множество вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

называется числовой последовательностью или просто последовательностью[1].

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ - элементы или члены последовательности (1)

Символ x_n - общий член последовательности,

А число n – его номер (1, 2, 3, 4, …, n, …)

Сокращенно последовательность (1) обозначается $\{x_n\}$.

Формула, задающая x_n, называется формулой общего элемента (или члена)последовательности $\{x_n\}$. Например, последовательность $\{n^2\}$ задана формулой $x_n = n^2$. С помощью этих формул можно вычислить любой элемент последовательности: x_1=1, x_2=4, x_3=9, …, x_{10} =100 и т.д.

○ **Пример 1.** Дана формула общего элемента последовательности: $x_n = \frac{n}{n+1}$. Написать пять первых элементов последовательности.

Решение. Положив последовательно $n=1, 2, 3, 4, 5$ в общем элементе x_n, получаем $x_1=1/2$, $x_2=2/3$, $x_3=3/4$, $x_4=4/5$, $x_5=5/6$. ●

Вычислите:

Упражнения. Написать пять первых элементов каждой из последовательностей, заданных их общими элементами:

1. $x_n = \frac{1}{2n+1}$. (*Отв.* $x_1=1/3, x_2=1/5, x_3=1/7, x_4=1/9, x_5=1/11$.)

2. $x_n = \frac{n+2}{n^3+1}$. (*Отв.* $x_1=3/2$, $x_2=4/9$, $x_3=5/28$, $x_4=6/65$, $x_5=7/126$.)

3. $x_n = \frac{n}{2^{n+1}}$. (*Отв.* $x_1=1/2^2$, $x_2=2/2^3$, $x_3=3/2^4$, $x_4=4/2^5$, $x_5=5/2^6$.)

4. $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$. (*Отв.* $x_1=2, x_2=-3/2^2, x_3=4/3^2, x_4=-5/4^2$, $x_5=6/5^2$.)

Можно, зная несколько первых элементов последовательности, написать формулу для общего элемента последовательности, например:

$1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \ldots$, т.е. знаменатели данной последовательности образуют последовательность из квадратов нечетных натуральных чисел, следовательно, можно выбрать формулу: $x_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Однако знание нескольких первых элементов последовательности еще не определяет саму последовательность. Поэтому данную задачу следует рассматривать как задачу отыскания некоторой простой индуктивной закономерности, согласующейся с заданными элементами последовательности. ●

Формула, задающая x_n не является единственной.

Последовательность $\{x_n\}$ является заданной, если указан способ получения любого ее элемента.

Часто используется рекуррентный способ задания последовательности $\{x_n\}$:

1. дается первый элемент последовательности или несколько первых элементов;
2. формула (или рекуррентное соотношение), указывающая, какие действия нужно выполнить, чтобы вычислить следующий элемент, или несколько следующих элементов.

Таким образом, чтобы задать последовательность, недостаточно написать только рекуррентное соотношение, необходимо указать также начальные члены последовательности.

Действия над последовательностями:

Введем понятие арифметических действий над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. *Произведением* последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на число m назовем последовательность

$$mx_1, mx_2, \ldots, mx_n, \ldots$$

Суммой данных последовательностей назовем последовательность

$$x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots;$$

разностью — последовательность

$$x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n, \ldots;$$

произведением — последовательность

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2,\ \ldots,\ x_n \cdot y_n,\ \ldots;$$

частным — последовательность

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots,$$

если все элементы последовательности, на которую делят, отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$m\{x_n\}=\{mx_n\},\ \{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},$$

$$\{x_n\}-\{y_n\}=\{x_n-y_n\},\ \{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n \cdot y_n\},$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ y_n \neq 0$$ [1].

Глава 9 «Начала математического анализа», занятие 6 «Применение производной к исследованию функций», стр.183 – 186, учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/