

Определенный интеграл

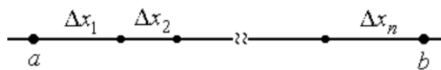
Практическое занятие №40. Вычисление определенного интеграла.

На прошлом уроке вы познакомились с понятием неопределённого интеграла.

Вспомним, что если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке, принадлежащем области определения первообразную $y = F(x)$, то множество функций вида $y = F(x) + C$, называют неопределённым интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$ (читается «неопределённый интеграл эф от икс дэ икс»).

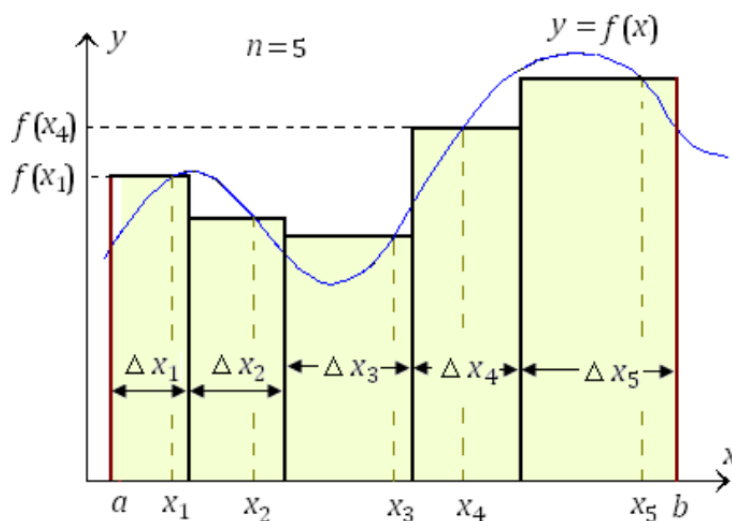
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на отрезке $[a; b]$.

1. Разобьём данный отрезок на n равных частей.



2. Внутри каждого отрезка выберем произвольную точку и вычислим значение функции в этой точке. Затем составим сумму из произведений $f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$

Полученная сумма произведений называется интегральной суммой.



Геометрическая интерпретация интегральной суммы при $n=5$

3. Вычислим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Если данный предел существует, его называют определённым интегралом от $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначают: $\int_a^b f(x) dx$

Числа a и b - верхним и нижним пределами интегрирования.

Данную формулу называют Формулой Ньютона-Лейбница

Формулу Ньютона-Лейбница можно переписать в виде:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

Пример 1:

Вычислить интеграл $\int_{-1}^3 x^3 dx$

Решение:

1. $F(x^3) = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4}$ - первообразная для x^3 .

Подставим найденную первообразную в формулу Ньютона-Лейбница и выполним подстановку: сначала подставим $b=3$ в первообразную, затем $a=-1$ и найдем их разность

2. По формуле Ньютона-Лейбница: $\int_{-1}^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

Ответ: $\int_{-1}^3 x^3 dx = 20$

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. $\int_a^b 1 dx = b - a$

2. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, где k - константа;

3. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, где $a < c < b$;

5. Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

6. $\int_a^a f(x) dx = 0$

7. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

8. Если $f(x) \geq 0$ в интервале $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Зная свойства определенного интеграла рассмотрим решение следующего примера.

Пример 2:

Вычислить определённый интеграл $\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$

Решение

1. Воспользуемся свойством интеграла $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ и разобьём

данный интеграл на сумму и разность интегралов:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = \int_{-2}^4 8 dx + \int_{-2}^4 2x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx$$

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, имеем:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= \int_{-2}^4 8 dx + \int_{-2}^4 2x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx = \\ &= 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx\end{aligned}$$

2. Найдём первообразную полученной функции применяя табличные значения первообразной

$$F(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ и } F(C) = Cx, C - const,$$

$$F(x) = 8x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = 8x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

3. Для простоты решения вычислим отдельно каждый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$8x \Big|_{-2}^4 = 8 \cdot 4 - 8 \cdot (-2) = 32 + 16 = 48$$

$$x^2 \Big|_{-2}^4 = 4^2 - (-2)^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

Подставим полученные значения интегралов в формулу:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = 48 + 12 - 24 = 36$$

$$\text{Ответ: } \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = 36$$

Пример 3:

Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_{-2}^1 x^3(4x-5) dx \quad 2) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Решение:

$$1) \int_{-2}^1 x^3(4x-5) dx = \int_{-2}^1 (4x^4 - 5x^3) dx = \left(\frac{4}{5} x^5 - \frac{5}{4} x^4 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{4}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{4} \cdot 1^5 - \left(-\frac{4}{5} (-2)^5 - \frac{5}{4} (-2)^4 \right) = 45,15$$

$$2) \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислите определенный интеграл:

$$1 \int_0^2 x^2 dx$$

$$5 \int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$$

$$9 \int_0^{\pi/3} \sin x dx$$

$$2 \int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$$

$$6 \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

$$10 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x dx$$

$$3 \int_1^2 x^3 dx$$

$$7 \int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$11 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx$$

$$4 \int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$8 \int_3^6 \frac{dx}{x}$$

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <http://www.math24.ru/>
2. <https://infourok.ru/videouroki>