

Практическое занятие №35

Нахождение производных элементарных функций.

Цель практической работы:

- сформировать представление о правилах дифференцирования;
- овладеть методами дифференцирования, научиться их применять;
- овладеть алгоритмами решения задач и научиться их применять при составлении уравнений касательной к графику функции.

Теоретический материал: (лекция «Уравнение касательной к графику функции. Производная суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций»)

Таблица производных элементарных функций.

$$1. c' = 0, c = \text{const}$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Образцы решения:

1. Найти производную функции $y = 3x^4$;

Используем формулы 1, 2 таблицы производных элементарных функций

$$y' = 3(x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3.$$

2. Найти производную функции $y = 4x^{\frac{1}{3}}$

(4 – это константа, ставим перед найденной производной, степень $\frac{1}{3}$, значит при

нахождении производной степень X станет ($\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$))

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{4}{3} x^{-2/3} = \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

3. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{2x^{2/3}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (x^{-2/3})' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-2/3-1} = -\frac{1}{3} x^{-5/3} = -\frac{1}{3x^{5/3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}};$$

4. Дана функция $f(x) = 1/x^4$; вычислить $f'(-1)$ и $f'(2)$.

Имеем $f(x) = 1/x^4 = x^{-4}$. Следовательно, $f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -4/x^5$.

Для вычисления $f'(-1)$ и $f'(2)$ нужно в выражение производной вместо x подставить значения -1 и 2 :

$$f'(-1) = -4/(-1)^5 = -4/(-1) = 4; f'(2) = -4/2^5 = -4/32 = -1/8. \bullet$$

5. Найти производную функции $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

Используем правило дифференцирования произведения.

Производная произведения двух функций равна

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$u = (x^3 - 1),$$

$$v = (x^2 + x + 1)$$

Подставляем в формулу

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)'(x^3 - 1) = \\
&= 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)'(x^3 - 1) = \\
&= 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)[3x^2 + (2x + 1)(x - 1)] = \\
&= (x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)(5x^2 - x - 1). \bullet
\end{aligned}$$

6. Найти производные следующих функций: 1) $y = x + \ln x$;

Используем формулу 2 и формулу 6 таблицы производных элементарных функций.

$$\text{получим } y' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

7. Найти производную функции $y = 2 \cdot 5^x + 3e^x$.

Используем формулу 1, 3 и формулу 4 таблицы производных элементарных функций.

$$\text{Получим } y' = 2 * 5^x \ln 5 + 3e^x$$

8. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ и найти $f'(-1)$.

Используем формулу 4 таблицы производных элементарных функций и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

правило дифференцирования частного

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2};$$

$$f'(-1) = \frac{-2e^{-1}}{(e^{-1} - 1)^2} = -\frac{2e}{(1 - e)^2}.$$

9. Найти производную функции $y = 2^x + \arctg x$

Так как производная суммы равна сумме производных, то

$$y' = (2^x)' + (\arctg x)' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{1 + x^2}$$

10. Составьте уравнение касательной к графику функции.

Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Алгоритм составления уравнения касательной

1. Вычислить значение в точке касания $f(x_0)$
2. Найти производную функции $f'(x)$
3. Вычислить значение производной в точке касания $f'(x_0)$
4. Подставить все полученные значения в уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример.

Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = x^3 - 3x - 5 \text{ в точке } M \text{ с абсциссой } x_0 = 2$$

Решение:

1. Вычислить значение в точке касания

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 * 2 - 5 = 8 - 6 - 5 = -3$$

2. Найти производную функции $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

3. Вычислить значение производной в точке касания $f'(x_0)$

$$f'(2) = 3 * 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

4. Подставить все полученные значения в уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3 + 9(x - 2) = -3 + 9x - 18 = 9x - 21$$

Ответ: $y = 9x - 21$

Задания для самостоятельного решения:

1. $y = 5x^4 - \frac{2}{x} + x\sqrt{x} - 2$

2. $y = \frac{3 - x^2}{3 + x^2}$

3. $y = 10x^3 + \frac{2}{x} - x\sqrt{x} + 7$

4. $y = \frac{3 - 2x}{2x + 5}$

5. Найти производную функции в точке $x = \frac{\pi}{4}$

$$y = 5\sin x * \operatorname{tg} x$$

6. Найти производную функции в точке $x=2$

$$y = \frac{4e^x}{x}$$

7. Найти производную функции в точке $x=5$

$$y = \frac{4x^4}{17}$$

8. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 5x + 3$ в точке $x_0 = -1$

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>
2. <https://www.resolventa.ru/>
3. <https://egemaximum.ru/>