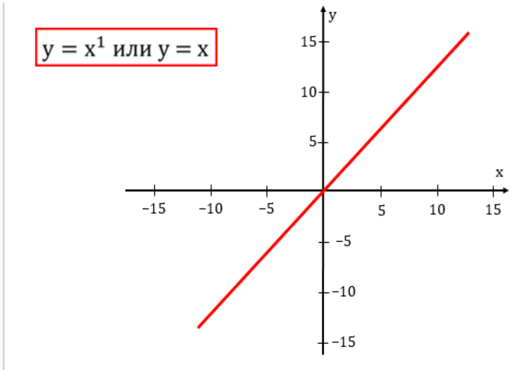
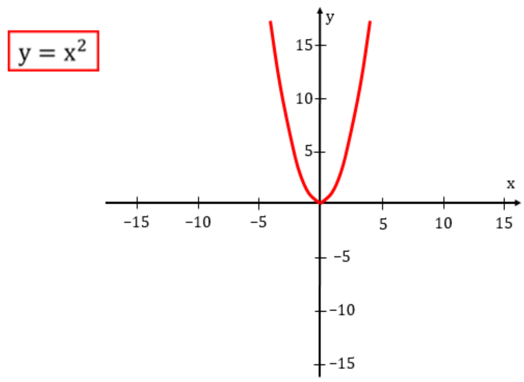
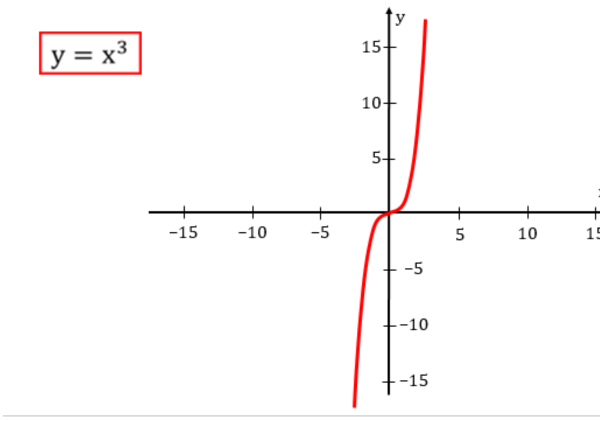
Практическое занятие №34

Построение графиков степенных, показательных, логарифмических функций

Степенная функция. Степенная функция — это функция вида $y = x^{\alpha}$ где α — действительное число. Она определена при всех значениях x, если α — натуральное число; при всех x, не равных нулю, если α — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если α — произвольное действительное число.







Остановимся на построении квадратичной функции. Графиком квадратичной функции является парабола.

Первое, что необходимо сделать – найти вершину параболы (x_0; y_0)

Проводим ось симметрии параболы $x = x_0$

Смотрим куда направлены ветви параболы (вверх или вниз)

Находим точки пересечения с осями координат. Не всегда можно найти рациональные координаты с осью ОХ. Если это невозможно (значение дискриминанта является иррациональным числом) используйте другие точки, например:

1. Построй график функции $y = x^2 - 2x - 1$.

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1;$

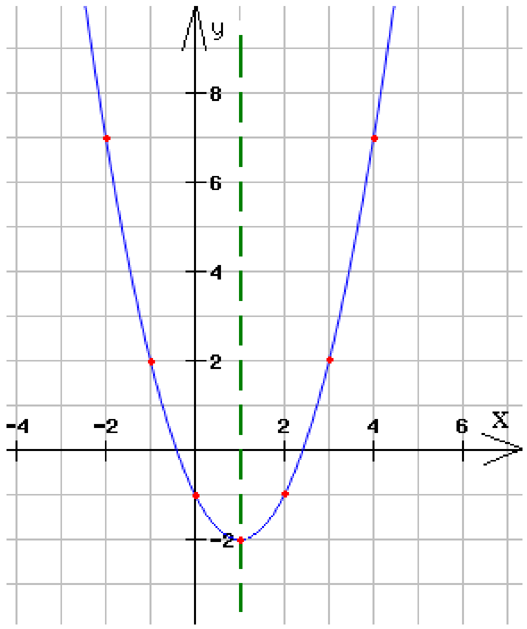
$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = -2.$

Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.

Парабола пересекает ось Oy в точке $(0; -1)$.

x	2	3	4
y	-1	2	7

Симметрично строим левую сторону параболы



2. Построй график функции $y = -2x^2 + 4x$.

В данном случае легко вычислить корни:

$-2x^2 + 4x = 0;$

$x(-2x + 4) = 0;$

$x = 0,$ *или* $-2x + 4 = 0;$

$x = 2;$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2.$

Координаты вершины параболы:

$x_0 = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1;$

$y_0 = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2.$

В таблице достаточно одного значения: если $x = 3$, то

$y = -2 \cdot (3)^2 + 4 \cdot 3 = -18 + 12 = -6.$

Симметрично, если $x = -1$, то $y = -6$

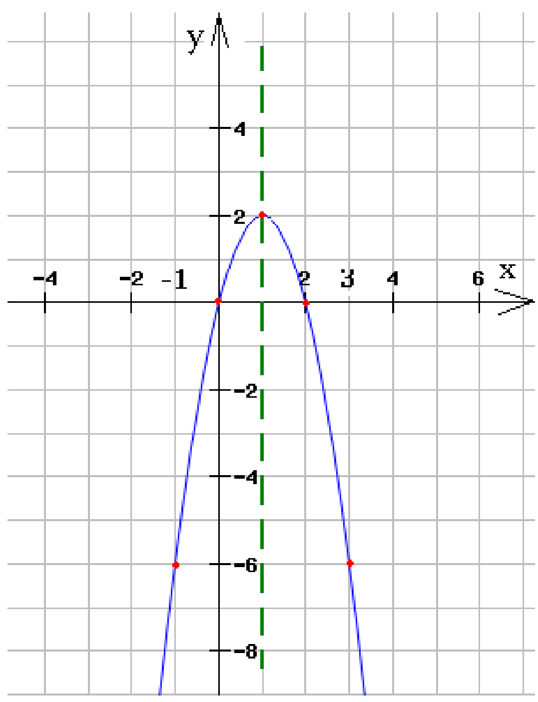
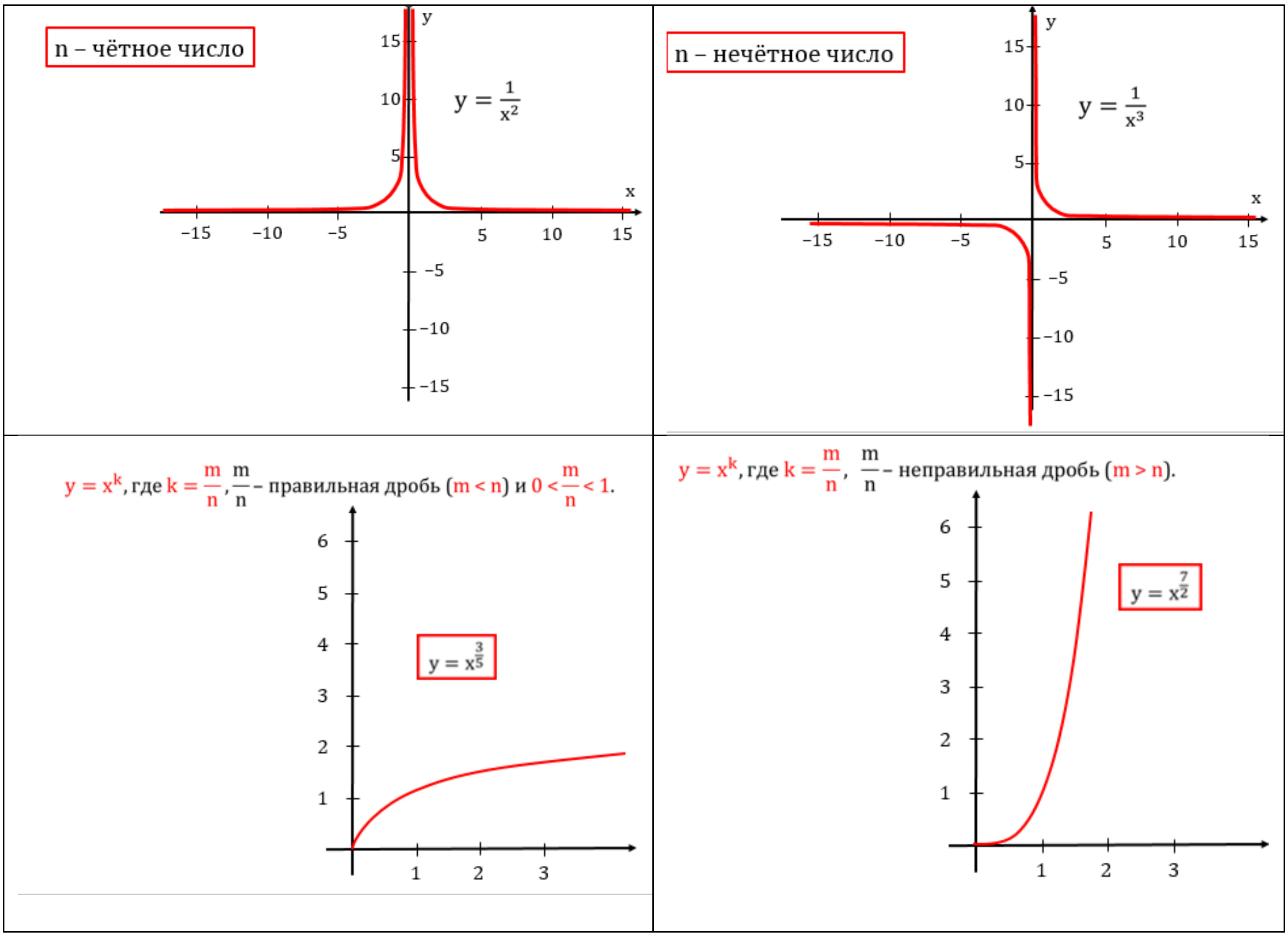


График степенной функции зависит от показателя степени. Рассмотрим следующие графики



<u>Показательная функция</u>

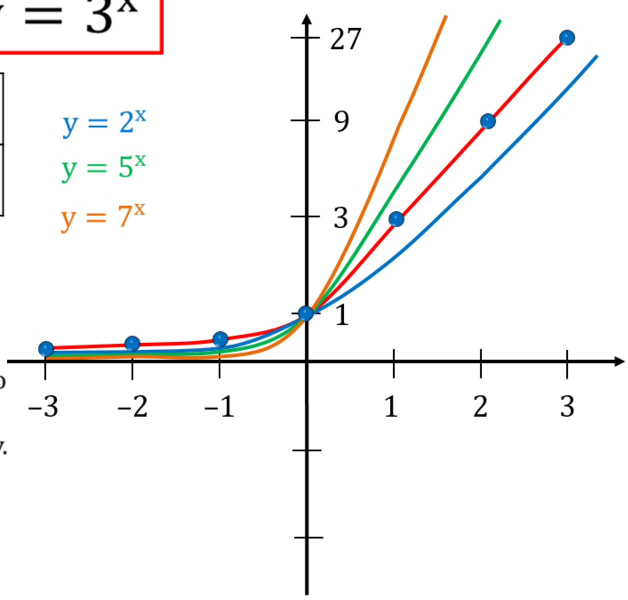
Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$y = a^x$, где $a > 1$

$\boxed{y = 3^x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Не является ни чётной, ни нечётной.
3. Возрастает на всей области определения.
4. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
5. Ограничена снизу, но не ограничена сверху.
6. Непрерывна на всей области определения.
7. $E(y) = (0; +\infty)$.
8. Функция выпукла вниз.

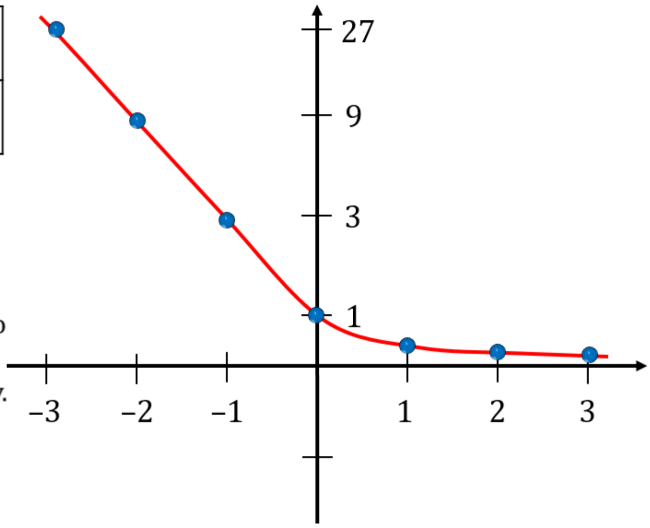


$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, где $0 < a < 1$

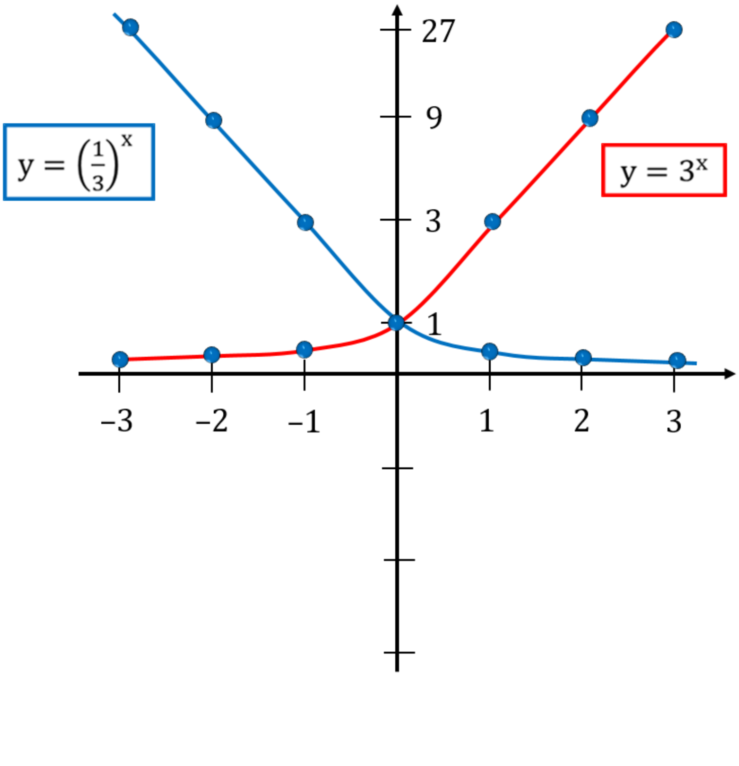
$\boxed{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Не является ни чётной, ни нечётной.
3. Убывает на всей области определения.
4. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
5. Ограничена снизу, но не ограничена сверху.
6. Непрерывна на всей области определения.
7. $E(y) = (0; +\infty)$.
8. Функция выпукла вниз.



Сравните поведение этих двух функций на одном графике.



Логарифмическая функция

Логарифмической функцией ннازывается функция вида $y = \log_a x$, где $a>0$, $a\neq1$

$a>1$, $a=3$

$$\boxed{y = \log_3 x}$$

$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1;$

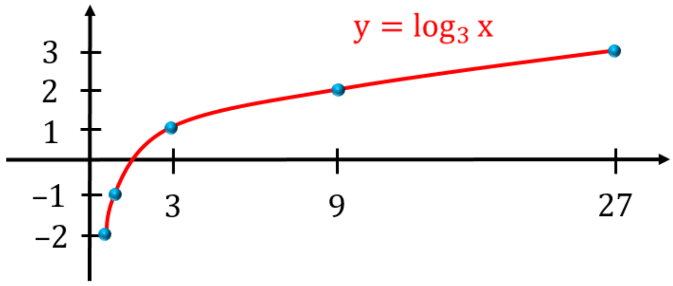
$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2;$

$\log_3 1 = \log_3 3^{0} = 0;$

$\log_3 3 = 1;$

$\log_3 9 = \log_3 3^{2} = 2;$

$\log_3 27 = \log_3 3^{3} = 3;$

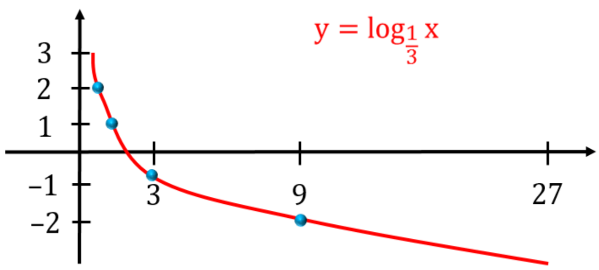


x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1	3	9	27
y	-1	-2	0	1	2	3

1. $D(f)=(0;+\infty)$.
2. $E(f)=(-\infty;+\infty)$.
3. Не является ни чётной, ни нечётной.
4. Возрастает на $(0;+\infty)$.
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. Выпукла вверх.

$0<a<1$, $a = \frac{1}{3}$

$$\boxed{y = \log_{\frac{1}{3}} x}$$

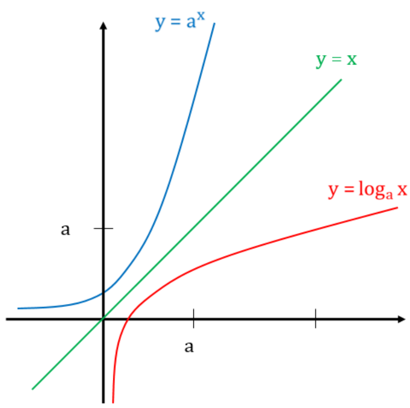


x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	-2	-1	0	1	2

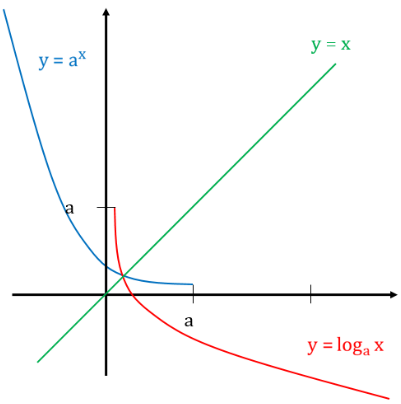
1. D(f)=(0; +∞).
2. E(f)=(−∞; +∞).
3. Не является ни чётной, ни нечётной.
4. Убывает на (0; +∞).
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. Выпукла вниз.

Показательная и логарифмические функции взаимнообратные. Рассмотрим симметрию графиков этих функций относительно оси симметрии y = x

$\boxed{a > 1}$



$\boxed{0 < a < 1}$



<u>Использование графиков функций для решения уравнений</u>

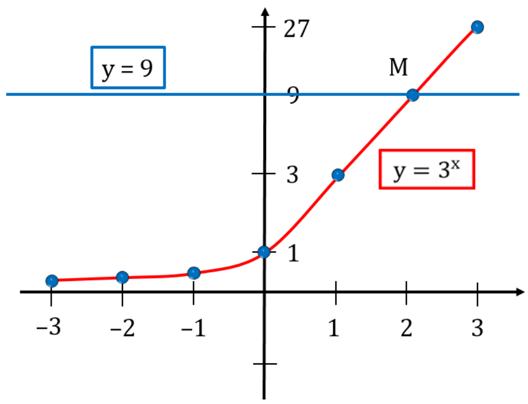
Пример 1. Решите уравнение $3^x = 9$.

Решение.

M (2; 9);

x = 2;

Ответ: x = 2.



Решением уравнения является точка пересечения графиков функций.

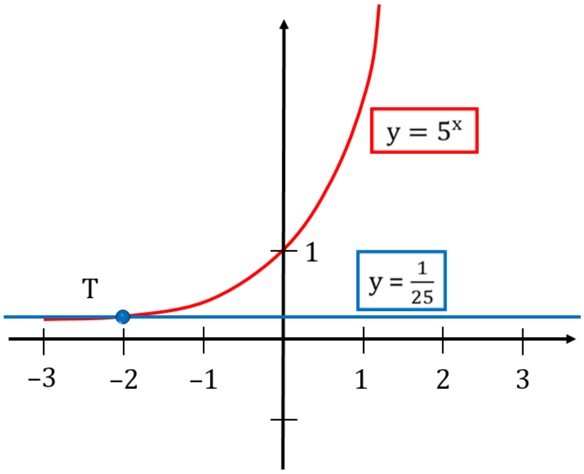
Пример 2. Решите уравнение $5^x = \frac{1}{25}$.

Решение.

T $(-2; \frac{1}{25})$;

x = –2;

Ответ: x = –2.



Задачи для самостоятельного решения:

Постройте график функции: $y = 2^x$

$y = \log_4 x$

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Решить графически уравнение:

$4^x = 5 - x$

$3^x = 4 - x.$

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://life-prog.ru/
2. https://www.yaklass.ru/
3. https://23.edu-reg.ru/