Лекция. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума

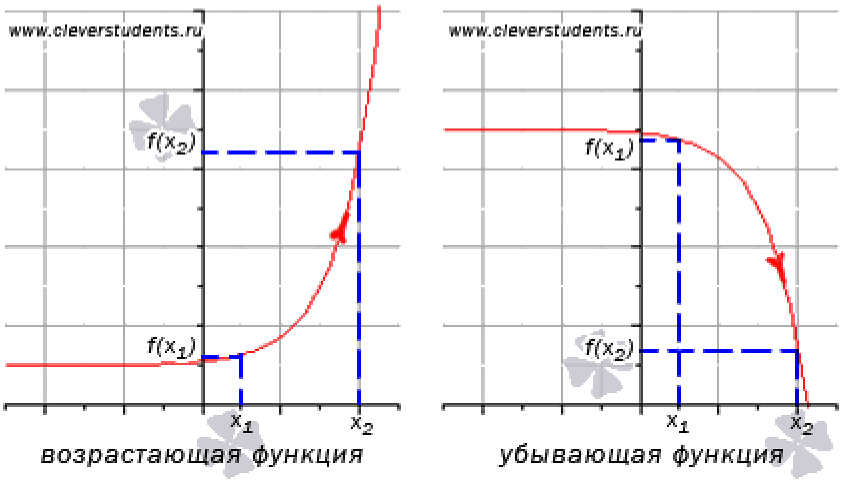
Возрастание и убывание функции на интервале.

Определение возрастающей функции.

Функция *y=f(x)* возрастает на интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, \quad x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение убывающей функции.

Функция *y=f(x)* убывает на интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, \quad x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



ЗАМЕЧАНИЕ: если функция определена и непрерывна в концах интервала возрастания или убывания *(a;b)*, то есть при *x=a* и *x=b*, то эти точки включаются в промежуток возрастания или убывания. Это не противоречит определениям возрастающей и убывающей функции на промежутке *X*.

К примеру, из свойств основных элементарных функций мы знаем, что *y=sinx* определена и непрерывна для всех действительных значений аргумента. Поэтому, из возрастания функции синуса на

интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ мы можем утверждать о возрастании на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Точки экстремума, экстремумы функции.

3. Экстремумы. При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности. *Окрестностью точки a* называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал (2; 6) — одна из окрестностей точки 3, интервал (–3,3; –2,7) — окрестность точки –3.

Изучая график рисунка 39, можно прийти к выводу, что наиболее «заметными» точками области определения являются

такие точки x, в которых возрастание функции сменяется убыванием (точки 3 и 5) или, наоборот, убывание сменяется возрастанием (точка 4). Эти точки называют соответственно *точками максимума* ($x_{max} = 3$ и $x_{max} = 5$) и *минимума* ($x_{min} = 4$).

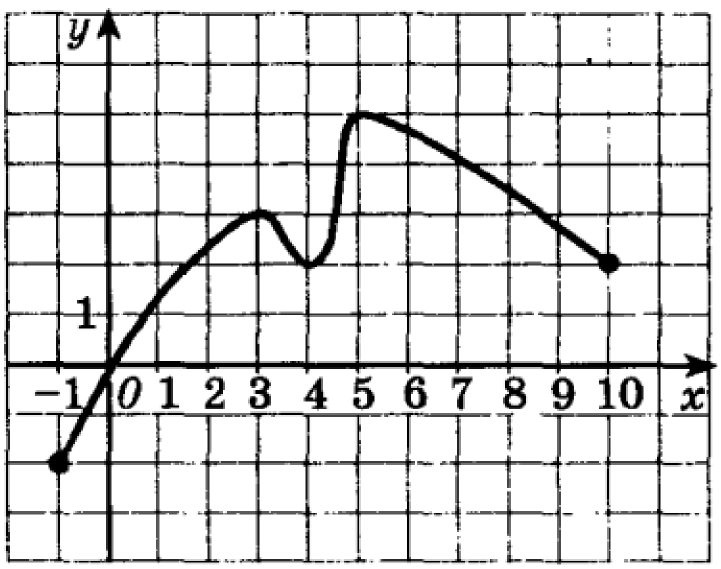


Рис. 39

> Определение. **Точка x_0 называется *точкой минимума функции f*, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (рис. 42).**

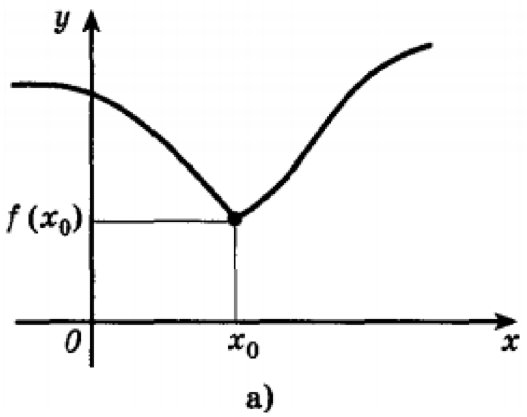


Рис.42

<u>Перейдем к определению точки максимума</u>

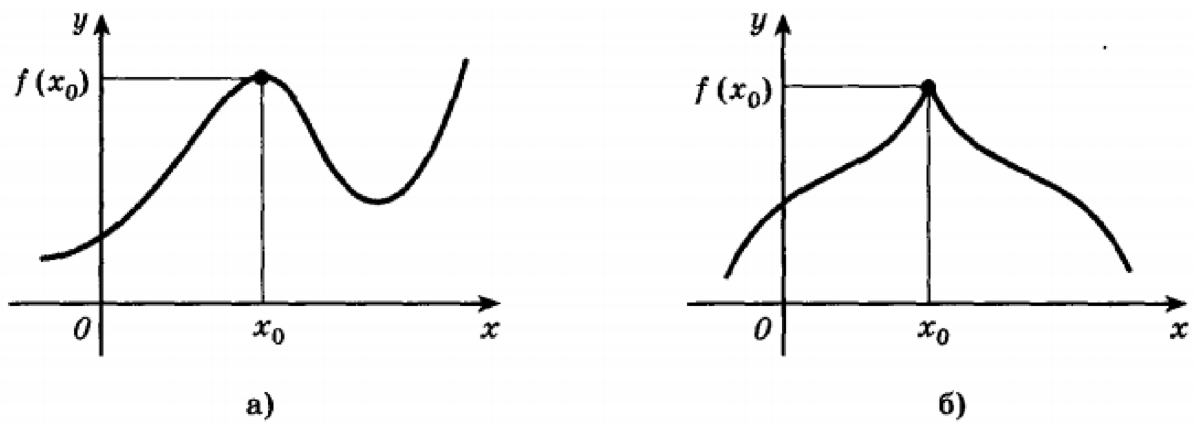


Рис. 43

> Определение. **Точка x_0 называется *точкой максимума функции f*, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (рис. 43).**

Для точек максимума и минимума функции принято общее название — их называют *точками экстремума*. Значение функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции (общее название — *экстремум функции*). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$ и $y_{\min}$.

По определению значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» (рис. 43, *а* и рис. 44 — точки x_1, x_2, x_3) или заостренного «пика» (рис. 43, *б*). В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой (рис. 42, *б* — точка x_0, рис. 44 — точки x_4, x_5), или заостренной (рис. 42, *а* — точка x_0 и рис. 44 — точка x_6).

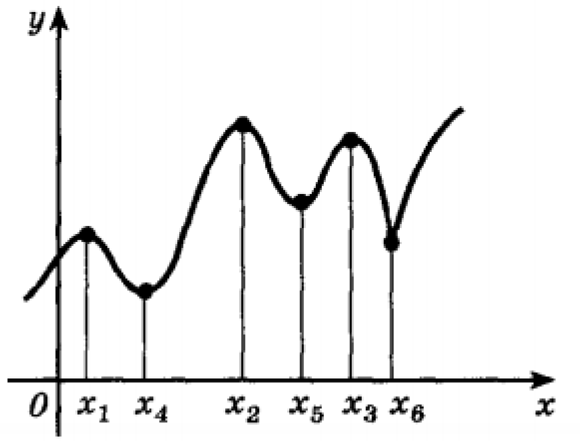


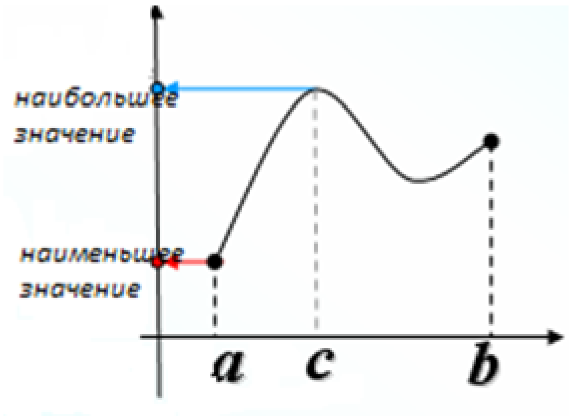
Рис. 44

Точки максимума и минимума являются граничными точками на промежутках возрастания и убывания функции. Иными словами, когда функция возрастает, график функции поднимается и достигает своего пика в точке максимума (вершина «горки»), а затем функция начинает убывать, и график опускается вниз, и достигает точки минимума («впадинка»)

Наибольшее и наименьшее значение функции

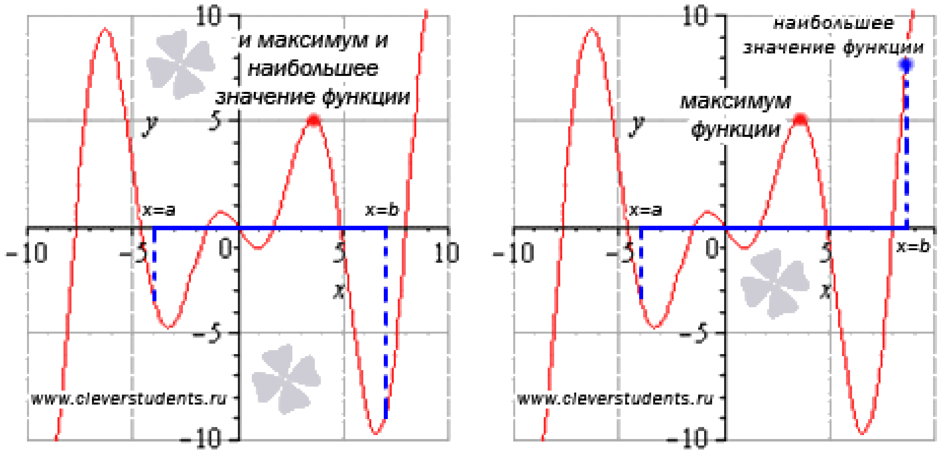
Когда **функция** $y = f(x)$, определенная на промежутке X, и достигает на нем своего **наибольшего (наименьшего) значения**, то существует такая **точка** c, принадлежащая этому промежутку, что для всех x из X верно **неравенство** $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$ для наименьшего).

Наибольшее значение c и **наименьшее значение** a **непрерывной функции** могут располагаться как внутри **отрезка**, так и по его концам.



Часто употребляют вместо терминов наибольшее и наименьшее значения термины – **максимальное и минимальное значение функции**.

Не путайте экстремумы функции с наибольшим и наименьшим значением функции.



На первом рисунке наибольшее значение функции на отрезке *[a;b]* достигается в точке максимума и равно максимуму функции, а на втором рисунке – наибольшее значение функции достигается в точке $x=b$, которая не является точкой максимума.

Задачи для самостоятельного решения.

Для функций, графики которых изображены на рисунке 48, *а—г*, найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) точки максимума и минимума функции;

в) экстремумы функции.

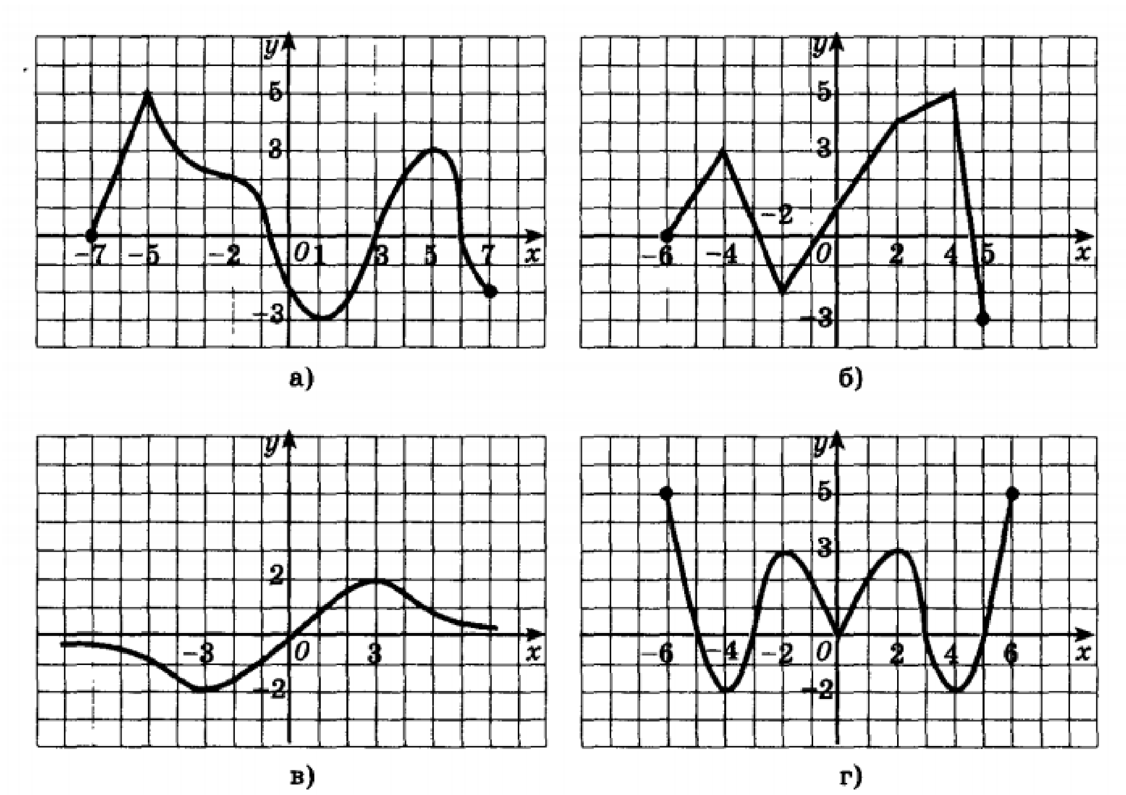


Рис. 48

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://infourok.ru/videouroki
3. http://www.cleverstudents.ru/