Лекция. Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические системы

Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$ и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений:

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют решением системы уравнений.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Может быть система и из трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x; y; z) = 0, \\ q(x; y; z) = 0, \\ r(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

Две системы уравнений называют равносильными, если они имеют одни и те же решения, или если обе системы не имеют решений.

Для решения систем уравнений применяют методы:

1. подстановки,
2. алгебраического сложения,
3. введения новых переменных,
4. графический.

1. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

будем называть пару чисел (x_0; y_0), которая каждое уравнение этой системы обращает в верное числовое равенство.

Приведем различные способы решения подобных систем на примере следующей системы:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

I. Способ подстановки. Этот способ заключается в том, что из одного уравнения данной системы выражают какую-либо из переменных через другую переменную и найденное для этой переменной выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего получают уравнение с одной переменной:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y-1}{4}, \\ 3\cdot\dfrac{3y-1}{4} + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y-1}{4}, \\ 25y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\cdot 3-1}{4}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

II. Способ алгебраического сложения. Этот способ состоит в том, что все члены каждого из уравнений умножают на соответственно подобранные множители так, чтобы коэффициенты при одной и той же переменной в обоих уравнениях оказались противоположными числами, а затем уравнения почленно складывают, в результате чего получают уравнение, содержащее только одну переменную:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \ |\cdot 3 \\ 3x + 4y = 18 \ |\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9y = -3, \\ -12x - 16y = -72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y = -75, \\ 12x - 9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ 12x - 9\cdot 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

III. Графический способ. Каждое из уравнений системы представляет собой линейную функцию, график которой — прямая линия. Если эти прямые имеют общую точку пересечения, то координаты этой точки и будут корнями решения системы:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x+1}{3}, \\ y = \dfrac{18-3x}{4}. \end{cases}$$

Прямая определяется двумя точками. Для построения первой прямой (рис. 1.23) возьмем точки (–1; –1) и (5; 7), для построения второй — точки (–2; 6) и (6; 0). Чтобы упростить построение графиков, следует подбирать такие точки, в которых обеим переменным соответствуют целые числа. Построенные прямые пересекаются в точке с координатами (2; 3) — эти координаты являются корнями данной системы $x = 2$, $y = 3$.

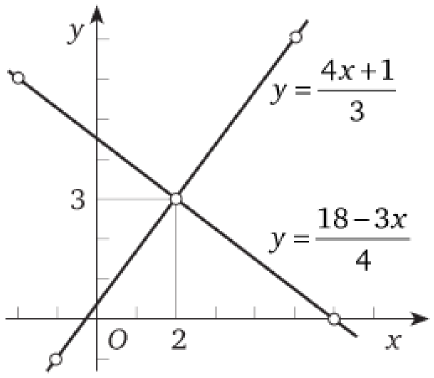

Рис. 1.23

Графический способ решения системы по сравнению с первыми двумя способами требует значительно большего времени, поэтому для решения систем уравнений он применяется редко. Преимуществом графического способа решения системы является его наглядность. Необходимо отметить, что некоторые уравнения можно решить только графическим способом.

При решении систем уравнений используют правила, позволяющие преобразовать данную систему в равносильную ей.

I. Одно из уравнений системы можно заменить на равносильное.
II. Если одно из уравнений системы имеет вид $x = A$ (A — выражение, не содержащее x), то в остальных уравнениях системы можно заменить переменную x на ее выражение A.
III. Любое уравнение системы можно заменить на уравнение, получающееся при его сложении с любым другим уравнением системы.
IV. Любое уравнение системы можно умножить на выражение, не обращающееся в нуль.

Системы рациональных уравнений

Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{6}, \\ x^2 - y^2 = 24. \end{cases}$

Решение

1) Складывая первое уравнение системы с удвоенным вторым, получаем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 25, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

2) Положим $z = \dfrac{x}{y}$ ($x \neq 0$ и $y \neq 0$); тогда первое уравнение системы примет вид $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{26}{5}$, откуда $z_1 = 5$, $z_2 = \dfrac{1}{5}$. Таким образом, исходная система распадается на совокупность двух систем, каждая из которых решается способом подстановки:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5, \\ x^2 - y^2 = 24, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{5}, \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5y, \\ 24y^2 = 24, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{y}{5}, \\ -\dfrac{24y^2}{25} = 24 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5y, \\ y_{1,2} = \pm 1; \end{cases} \\ \text{нет решения.} \end{array} \right.$$

Таким образом, получаем два решения: $(x_1 = -5, y_1 = -1)$ и $(x_2 = 5, y_2 = 1)$.

Системы иррациональных уравнений

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют *иррациональными*. Таково, например, уравнение $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$.

. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28. \end{cases}$$

Положив $u = \sqrt[3]{x}$ и $v = \sqrt[3]{y}$, приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^3 + v^3 = 28. \end{cases}$$

Разложим левую часть второго уравнения на множители: $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ — и подставим в него из первого уравнения $u + v = 4$. Тогда получим систему, равносильную второй:

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^2 - uv + v^2 = 7. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение значение v, найденное из первого ($v = 4 - u$), приходим к уравнению

$$u^2 - u(4 - u) + (4 - u)^2 = 7, \text{ т. е. } u^2 - 4u + 3 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $u_1 = 1$ и $u_2 = 3$. Соответствующие значения v таковы: $v_1 = 3$ и $v_2 = 1$. Переходя к переменным x и y, получаем: $\sqrt[3]{x} = u_1$, т. е. $x_1 = u_1^3 = 1$, $y_1 = v_1^3 = 27$, $x_2 = u_2^3 = 27$, $y_2 = v_2^3 = 1$.

Ответ: (1; 27), (27; 1).

Системы показательных уравнений.

Показательное уравнение - это

уравнение

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область значений функции $y = a^x$ — множество положительных чисел. Поэтому в случае $b < 0$ или $b = 0$ уравнение (1) не имеет решений.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ 3^{2x - y} = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $2x - y = 1$, откуда $y = 2x - 1$. Подставляя вместо y в первое уравнение выражение

$2x - 1$, получим $2^x + 2^{2x-1} = 12$, откуда $2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 12$. Обозначив 2^x через t, приходим к квадратному уравнению $t^2 + 2t - 24 = 0$, откуда $t_1 = -6$, $t_2 = 4$. Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет. Корнем уравнения $2^x = 4$ является $x = 2$. Соответствующее значение y равно 3. Ответ: (2; 3).

Системы тригонометрических уранений.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $y = x - \frac{5\pi}{3}$. Тогда $2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Второе уравнение системы примет вид $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, откуда $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Далее находим $y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n - \frac{7\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://www.yaklass.ru/
2. https://urait.ru/