Практическое занятие №35

Нахождение производных элементарных функций.

Цель практической работы:

- сформировать представление о правилах дифференцирования;
- овладеть методами дифференцирования, научиться их применять;
- овладеть алгоритмами решения задач и научиться их применять при составлении уравнений касательной к графику функции.

Теоретический материал: (лекция «Уравнение касательной к графику функции. Производная суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций»)

Таблица производных элементарных функций.

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Образцы решения:

1. Найти производную функции $y = 3x^4$

   Используем формулы 1, 2 таблицы производных элементарных функций

   $y' = 3(x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3.$

2. Найти производную функции $y = 4x^{\frac{1}{3}}$

   (4 – это константа, ставим перед найденной производной, степень $\frac{1}{3}$, значит при нахождении производной степень Х станет ($\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$))

   $$y' = 4 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{4}{3} x^{-2/3} = \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

3. Найти производную функции

   $$y = \frac{1}{2x^{2/3}}$$

   $$y' = \frac{1}{2}(x^{-2/3})' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-2/3-1} = -\frac{1}{3} x^{-5/3} = -\frac{1}{3x^{5/3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}};$$

4. Дана функция $f(x) = 1/x^4$; вычислить $f'(-1)$ и $f'(2)$.

   Имеем $f(x) = 1/x^4 = x^{-4}$. Следовательно, $f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -4/x^5$.

   Для вычисления $f'(-1)$ и $f'(2)$ нужно в выражение производной вместо x подставить значения -1 и 2:

   $$f'(-1) = -4/(-1)^5 = -4/(-1) = 4; f'(2) = -4/2^5 = -4/32 = -1/8.\bullet$$

5. Найти производную функции $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1).$

   Используем правило дифференцирования произведения.

   Производная произведения двух функций равна

   (uv)`=u`v + v`u

   u = $(x^3 - 1)$,

   v = $(x^2 + x + 1)$

   Подставляем в формулу

$$f'(x) = (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)'(x^3 - 1) =$$

$$= 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)'(x^3 - 1) =$$

$$= 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) =$$

$$= (x^2 + x + 1)[3x^2 + (2x + 1)(x - 1)] =$$

$$= (x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1) =$$

$$= (x^2 + x + 1)(5x^2 - x - 1).\bullet$$

6. Найти производные следующих функций: 1) $y = x + \ln x$;

Используем формулу 2 и формулу 6 таблицы производных элементарных функций.

получим $y' = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$.

7. Найти производную функции $y = 2 \cdot 5^x + 3e^x$.

Используем формулу 1, 3 и формулу 4 таблицы производных элементарных функций.

Получим $y' = 2 * 5^x \ln 5 + 3e^x$

8. Вычислить производную функции $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ и найти $f'(-1)$.

Используем формулу 4 таблицы производных элементарных функций и правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2};$$

$$f'(-1) = \frac{-2e^{-1}}{(e^{-1} - 1)^2} = -\frac{2e}{(1 - e)^2}.$$

9. Найти производную функции $y = 2^x + arctg\, x$

Так как производная суммы равна сумме производных, то

$$y' = (2^x)' + (arctg\, x)' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{1 + x^2}$$

10. Составьте уравнение касательной к графику функции.

Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Алгоритм составления уравнения касательной

1. Вычислить значение в точке касания $f(x_0)$
2. Найти производную функции $f'(x)$
3. Вычислить значение производной в точке касания $f'(x_0)$
4. Подставить все полученные значения в уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример.

Составьте уравнение касательной к графику функции

$f(x) = x^3 - 3x - 5$ в точке М с абсциссой $x_0 = 2$

Решение:

1. Вычислить значение в точке касания

   $$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 * 2 - 5 = 8 - 6 - 5 = -3$$

2. Найти производную функции $f'(x)$

   $$f'(x) = 3x^2 - 3$$

3. Вычислить значение производной в точке касания $f'(x_0)$

   $$f'(2) = 3 * 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

4. Подставить все полученные значения в уравнение касательной

   $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   $$y = -3 + 9(x - 2) = -3 + 9x - 18 = 9x - 21$$

   Ответ: $y = 9x - 21$

Задания для самостоятельного решения:

1. $y = 5x^4 - \frac{2}{x} + x\sqrt{x} - 2$

2. $y = \frac{3 - x^2}{3 + x^2}$

3. $y = 10x^3 + \frac{2}{x} - x\sqrt{x} + 7$

4. $y = \frac{3 - 2x}{2x + 5}$

5. Найти производную функции в точке x = $\frac{\pi}{2}$

   $y = 5\sin x * tgx$

6. Найти производную функции в точке x=2

   $y = \frac{4e^x}{x}$

7. Найти производную функции в точке x=5

   $y = \frac{4x^4}{17}$

8. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 5x + 3$ в точке $x_0 = -1$

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/