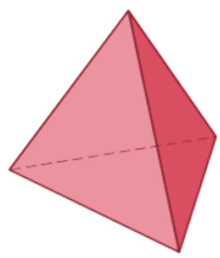
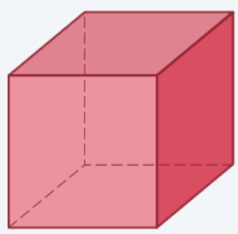
Лекция. Симметрия в многогранниках.

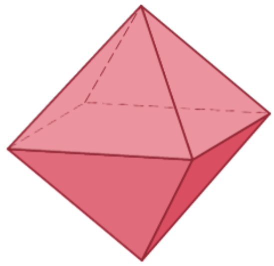
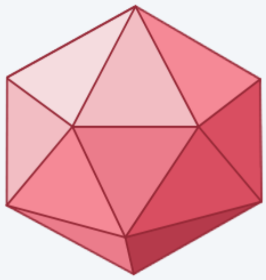
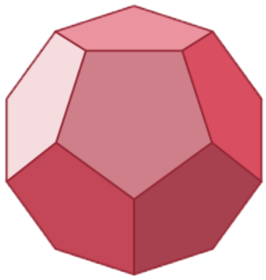
Правильные многогранники. Сечения многогранников.

Древнегреческим философом **Платоном** так описаны правильные многогранники: «Земле мы, конечно, припишем вид куба: ведь из всех четырех сущностей наиболее неподвижна и пригодна к образованию тел именно Земля, а потому ей необходимо иметь самые устойчивые основания… Из всех тел наиболее подвижно по природе своей то, у которого наименьшее число оснований, ибо оно со всех сторон имеет режущие грани и колющие углы… Пусть же образ пирамиды, рожденный объемным, и будет первоначалом и семенем огня…».

Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, у которого все грани — одинаковые правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

Приведем таблицу, описывающую количественные характеристики правильных многогранников.

Много-гранник	Число			Число поворотов, совмещающих тело с собой	Рисунок
	вершин *v*	ребер *e*	граней *f*		
Тетраэдр	4, в которых сходятся по 3 треугольника	6	4 треугольника	12	
Куб (гексаэдр)	8, в которых сходятся по 3 квадрата	12	6 квадратов	24	

Октаэдр	6, в которых сходятся по 4 треугольника	12	8 треугольников	24	
Икосаэдр	12, в которых сходятся по 5 треугольников	30	20 треугольников	60	
Додекаэдр	20, в которых сходятся по 3 пятиугольника	30	12 пятиугольников	60	

В таблице:

v — число вершин многогранника; e — число ребер; f — число граней.

Легко заметить, что во всех случаях выполняется соотношение: $v + f = e + 2$, т. е. что сумма числа вершин и числа граней на 2 больше числа ребер.

Это наблюдение верно для любого выпуклого многогранника и составляет содержание знаменитой теоремы, доказанной впервые Леонардом Эйлером.

Теорема Эйлера. Пусть f обозначает число граней, e — число ребер, v — число вершин выпуклого многогранника. Тогда $f + v = e + 2$.

$$f + v = e + 2$$

Платоновы тела

Пять правильных многогранников (см. таблицу выше).

Почти две с половиной тысячи лет назад, а точнее, в 50—60-х годах III в. до н. э. великий греческий философ **Платон** в диалоге «Тимей» описал систематическое построение космоса и представил все реально существующее как совокупное взаимодействие космических идей и материи.

Четырем главным земным сущностям — земле, огню, воде и воздуху — Платон сопоставляет прекрасные геометрические тела, построения которых он подробно описывает. Приведем несколько цитат из «Тимея»:

«Когда же четыре равносторонних треугольника окажутся соединенными в три двугранных угла, они образуют один объемный угол... Завершив построение четырех таких углов, мы получаем **первый** объемный вид, имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части.

Второй вид строится из исходных треугольников, соединившихся по восемь в равносторонний треугольник и образующих каждый раз из четырех плоских углов по одному объемному; когда таких объемных углов шесть, второе тело получает завершенность.

Третий вид образуется из двенадцати объемных углов, каждый из которых охвачен пятью равносторонними треугольниками, так что все тело имеет двадцать граней...».

Далее столь же образно Платон связывает воздух с октаэдром, а воду — с икосаэдром. Что же касается пятого правильного многогранника — додекаэдра, то Платон пишет, что у него «в запасе оставалось еще пятое многогранное построение: его Бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал ее и украшал».

Пять правильных многогранников: **куб**, **тетраэдр**, **октаэдр**, **икосаэдр** и **додекаэдр** — остаются символом глубины и стройности геометрии, образцом красоты и совершенства.

Доказательство утверждения о существовании лишь пяти типов правильных многогранников

$$\left.\begin{matrix} fn = 2e \\ vm = 2e \end{matrix}\right\} \Rightarrow v + f = e + 2 \Leftrightarrow \frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} = e + 2 \Rightarrow \frac{2e}{m} + \frac{2e}{n} > e \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

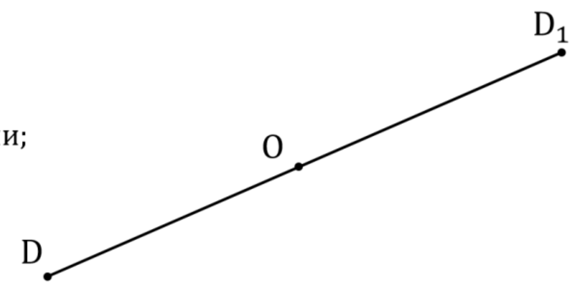
У полученного неравенства только пять решений, которые соответствуют известным пяти типам правильных многогранников — правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Симметрия в многогранниках.

В курсе планиметрии вы рассматривали симметрию фигур относительно точки и относительно прямой.

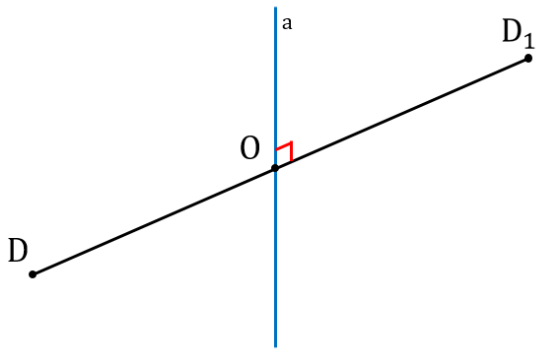
Симметрия относительно точки

O – центр симметрии;
$DO = OD_1$;



Симметрия относительно прямой

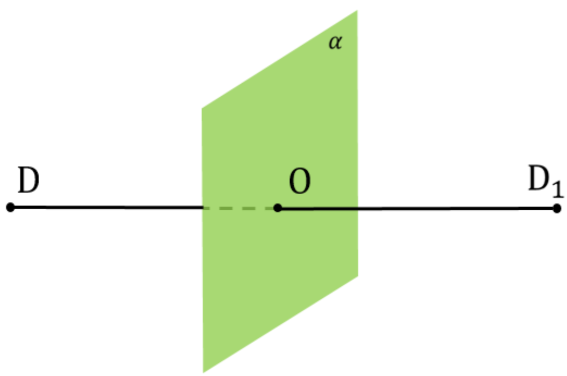
a – ось симметрии;
$a \perp DD_1$;
$DO = OD_1$;



В курсе стереометрии рассматривается симметрия относительно точки-центра симметрии, симметрия относительно прямой-оси симметрии и симметрия относительно плоскости, называемой плоскостью симметрии.

Симметрия относительно плоскости

α – плоскость симметрии;
$\alpha \perp DD_1$;
$DO = OD_1$;



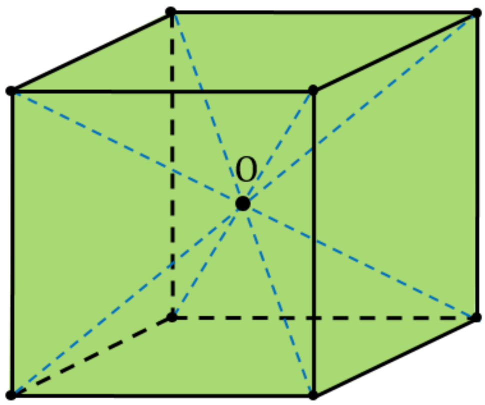
Рассмотрим понятия центра, оси и плоскости симметрии фигуры.

Точка называется центром симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры.

Про фигуру, имеющую центр симметрии говорят, что она обладает центральной симметрией.

Например, куб обладает только одним центром симметрии, это точка пересечения его диагоналей.

O – центр симметрии;

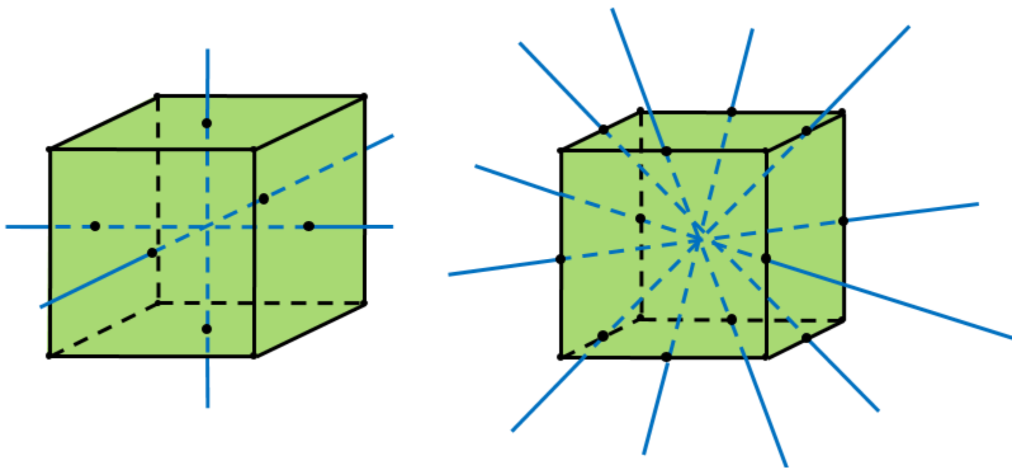


Прямая называется осью симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры.

Про фигуру, имеющую ось симметрии говорят, что она обладает осевой симметрией.

Так куб имеет 9 осей симметрии:

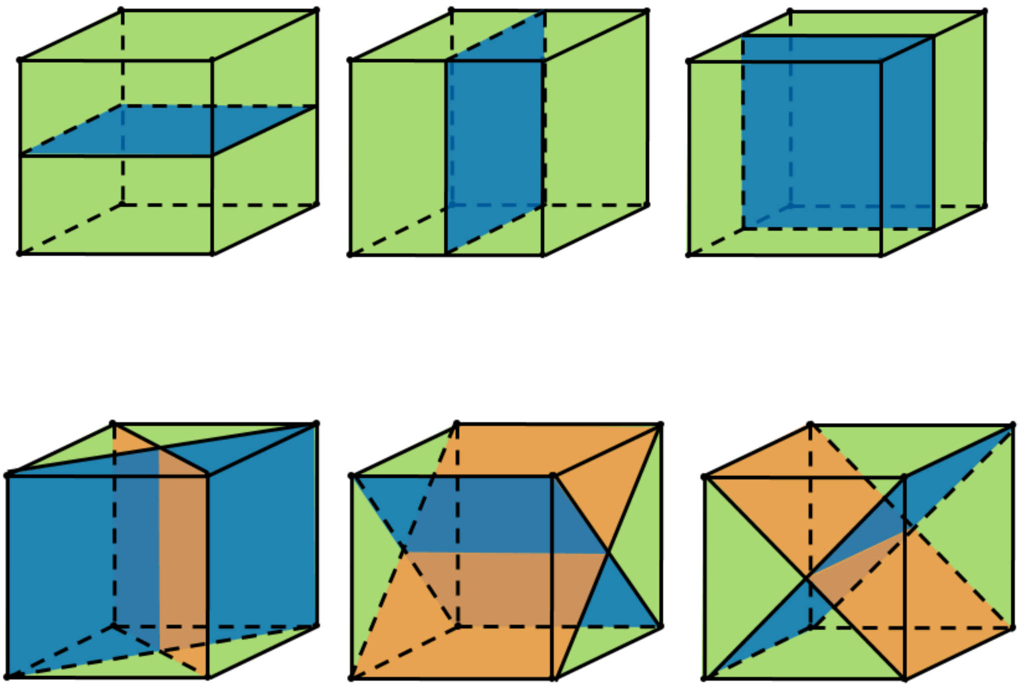
три оси симметрии, проходящие через центры противолежащих граней; шесть осей симметрии, проходящие через середины противолежащих ребер.



Плоскость называется плоскостью симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры.

Про фигуру, имеющую плоскость симметрии говорят, что она обладает зеркальной симметрией.

Например, куб имеет 9 плоскостей симметрии: три плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер; шесть плоскостей симметрии, проходящие через противолежащие ребра.

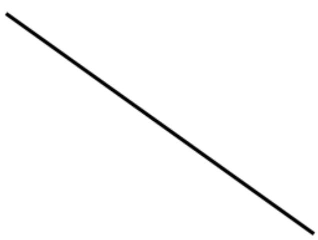


Фигура может иметь один центр (ось, плоскость) симметрии;

иметь несколько центров (осей, плоскостей) симметрии;

либо не иметь центра (оси, плоскости) симметрии.

Фигуры, имеющие бесконечно много центров, осей или плоскостей симметрии: прямая и плоскость.



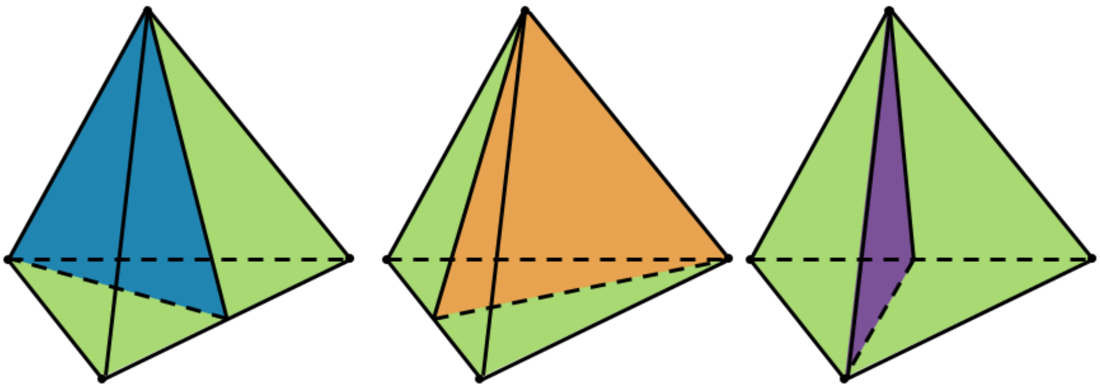
Прямая

Плоскость

Существуют фигуры не имеющие центра, оси или плоскости симметрии.

К примеру, тетраэдр не имеет ни одного центра симметрии, но имеет три оси симметрии, которые проходят через середины скрещивающихся рёбер и 6 плоскостей симметрии, которые проходят через ребро тетраэдра перпендикулярно скрещивающемуся с ним ребру.

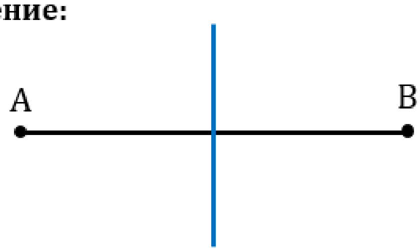
Тетраэдр обладает только осевой и зеркальной симметрией.



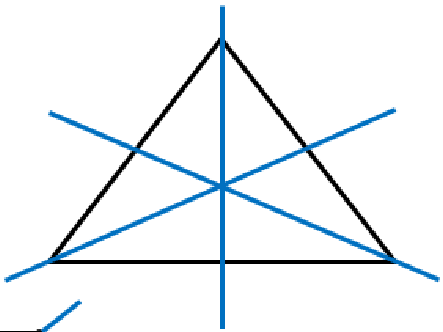
Задача 1. Сколько осей симметрии имеет:
а) отрезок;
б) правильный треугольник;
в) куб?

Решение:

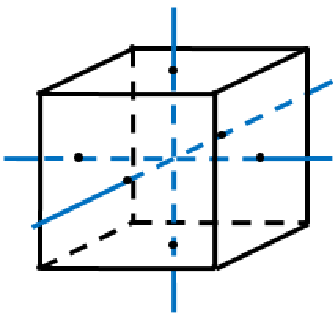
а)

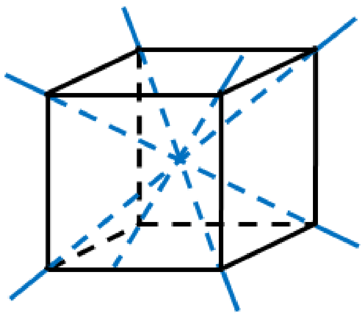


б)



в)





Ответ: а) 1;
б) 3;
в) 9.

Видеоурок: https://infourok.ru/videouroki/1439

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/