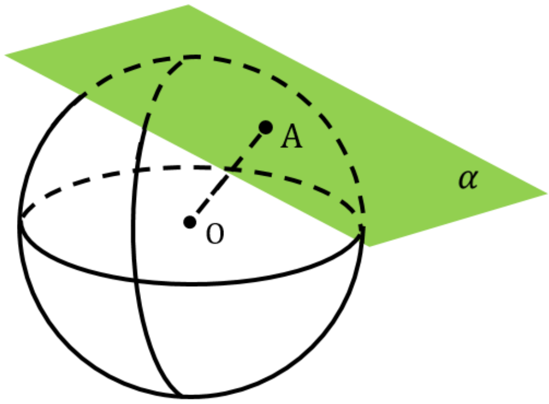
Лекция. Касательная плоскость к сфере.

Касательной плоскостью называется плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, данную общую точку называют точкой касания.

α – касательная плоскость к сфере
A – точка касания



Радиус сферы перпендикулярен к касательной плоскости, если он проведён в точку касания плоскости и сферы.

Дано:
O – центр сферы
R – радиус сферы
α – касательная плоскость
A – точка касания

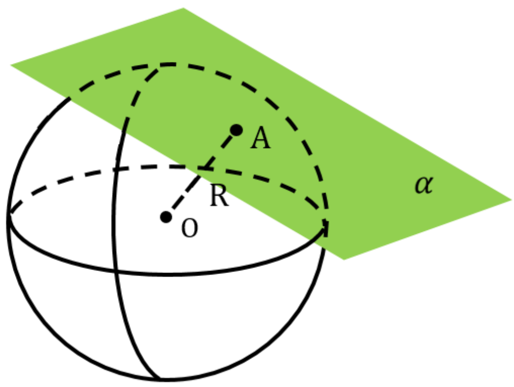
Доказать: $R \perp \alpha$

Доказательство:

1) $R \not\perp \alpha$

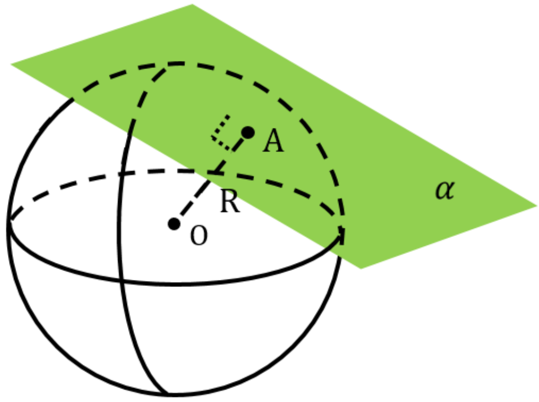
2) OA — наклонная к $\alpha \Rightarrow d < R$

3) Сфера и плоскость α пересекаются по окружности — противоречие $\Rightarrow R \perp \alpha$



! Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец , то эта плоскость является касательной к сфере.

Дано:
O – центр сферы
R – радиус сферы
α – касательная плоскость,
проходит через конец радиуса
R ⊥ α



Доказательство:

1) R ⊥ α, α проходит через конец радиуса
2) d=R ⇒плоскость и сфера имеют одну общую точку ⇒
⇒ α — касательная плоскость.

Видеоурок «Сфера. Касательная плоскость к сфере»: https://infourok.ru/videouroki/1466

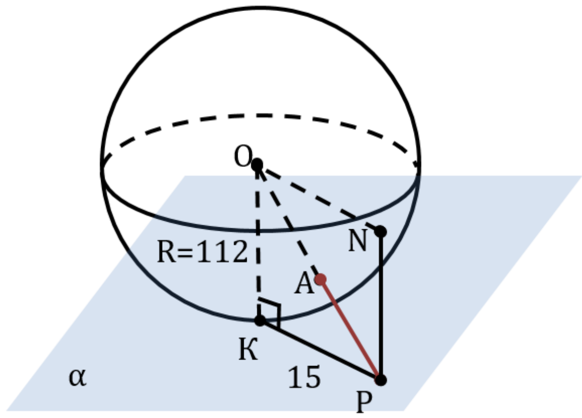
Задача.

Задача 1

Дано:
Сфера
O – центр сферы
OK = OA = R = 112 см
K – точка касания сферы и α
α – касательная плоскость
KP = 15 см

Доказать: A ∈ OP – ближайшая к P

Найти: AP

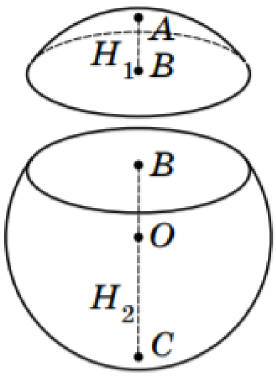
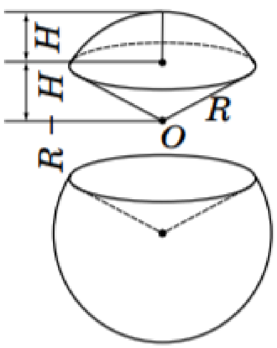
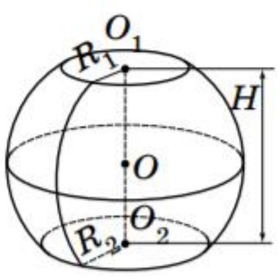


Доказательство:

1) N ∈ сфере
Проведём NO и NP.
△ONP ⇒ ON+NP>OP
OA+AP=OP
ON+NP>OA+AP, где ON и OA – радиусы
R+NP>R+AP или NP>AP ⇒
⇒ A∈ OP – ближайшая к P.

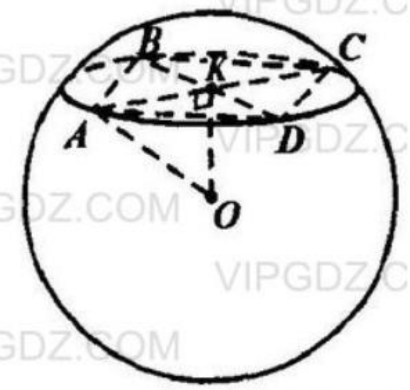
2) AP=OP–OA, OA=R
OK ⊥ α⇒△OKP — прямоугольный
$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{112^2 + 15^2} =$
$= \sqrt{12544 + 225} = \sqrt{112769} = 113$ см
AP=OP–OA=113-112=1
Ответ: AP=1 см.

В дополнение, познакомимся с понятиями шаровой сегмент, шаровой слой и шаровой сектор.

Части шара		
	**Шаровой сегмент** — часть шара, которую отсекает секущая плоскость. Плоскость делит шар на два сегмента: $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH.$ Площадь полной поверхности: $S_{полн} = \pi H(4R - H).$ Объём: $V_{сегм} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$
	**Шаровой сектор** — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса	**Основные формулы** Площадь полной поверхности: $S_{полн} =$ $= \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right).$ Объём: $V_{сек} = \frac{2}{3}\pi R^2 H$
	**Шаровой слой** — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями. H — расстояние между секущими плоскостями; R_1 и R_2 — радиусы оснований	**Основные формулы** Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH;$ R — радиус шара. Площадь полной поверхности: $S_{полн} =$ $= \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2).$ Объём: $V =$ $= \frac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

Задачи для самостоятельного решения.

42. Вершины квадрата лежат на сфере радиуса 10. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна $6\sqrt{2}$.



43. Две параллельные плоскости касаются сферы радиуса 5. Найдите расстояние между плоскостями.

44. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны $6\sqrt{2}$. Расстояние между секущими плоскостями равно $12\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

45. В куб с ребром 2 вписана сфера, найдите ее радиус.

46. Около куба с ребром $2\sqrt{3}$ описана сфера. Найдите ее радиус.

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://infourok.ru/videouroki/