Практическое занятие №38

Решение прикладных задач.

На прошлом занятии были рассмотрены примеры решения прикладных задач с помощью производной. Остановимся на физических задачах.

Задача 1.

Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону

$s(t) = 4 + 8t - 5t^2$, где s(t) измеряется в метрах, а время t в секундах.

Найти:

а) Скорость тела в начальный момент;

б) Скорость тела в момент соприкосновения с землей;

в) Наибольшую высоту подъема тела.

Решение:

Тело движется по параболе, это очевидно, т.к. уравнение, которое описывает движение тела – уравнение параболы (заметьте – это уравнение движения).

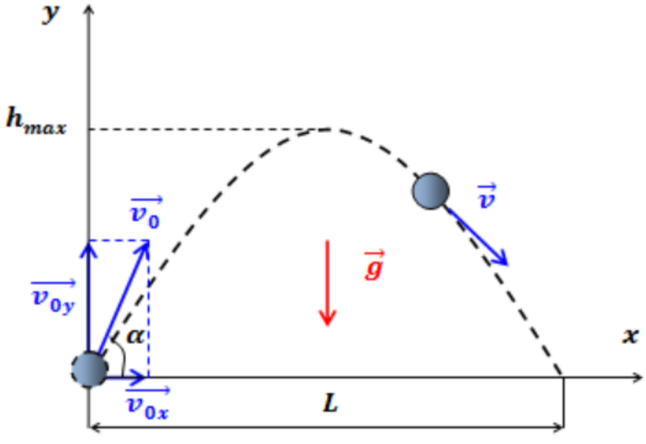
а) Скорость тела в начальный момент момент равна первой производной от пути, который описывается уравнением $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$

$s'(t) = v(t) = 8 - 10t$

В момент t=0, $v(t) = 8 - 10 * 0 = 8$

б) В момент соприкосновения с землей $s(t) = 0$, т.е. решаем уравнение $4 + 8t - 5t^2 = 0$

получаем: $t_1 = 2, t_2 = -0{,}4$, второй корень нам не подходит по смыслу, т.к. время t не может быть отрицательным в классической физике.



Значит, скорость в момент $s'(2) = v(2) = 8 - 10 * 2 = -12$ м/с (минус указывает не то, что скорость тела в момент времени $t \quad = 2$ противоположна направлению начальной скорости.

в) Наибольшая высота подъема $s_{\text{наиб.}}(t)$ будет в момент, когда скорость тела равна нулю (в точке максимума функции) и происходит переход от подъема тела к опусканию (переход от возрастания функции к ее убыванию)

$s'(t) = v(t) = 8 - 10t = 0$, t = 0,8 с.

Подставляем в уравнение движения

$s_{\text{наиб.}}(t) = 4 + 8t - 5t^2 = s(0{,}8) = 4 + 8 * 0.8 - 5 * 0.8^2 = 8.2$ м

Значит, наибольшая высота подъема равна 8,2 м.

Решим следующую задачу.

7.119. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону: $h(t) = 9t - 2t^2$. Найти начальную скорость и ускорение тела ($t_0 = 0$) и максимальную высоту подъема, при которой скорость $v(t) = 0$.

Ответ **7.119.** $v_0 = 9$; $a_0 = -4$, $h_{\max} = 10{,}125$.

Подготовка к экзамену

Часто в задачах предлагается по графику производной, который дан, исследовать саму функцию. Многих график производной «смущает». Некоторые по невнимательности принимают его за график самой функции. Поэтому в таких зданиях, где видите, что дан график, сразу же акцентируйте своё внимание в условии на том, что дано: график функции или график производной функции?

Если это график производной функции, то относитесь к нему как бы к «отражению» самой функции, которое просто даёт вам информацию об этой функции.

Основная информация (кратко):

1. Производная на интервалах возрастания имеет положительный знак.

Если производная в определённой точке из некоторого интервала имеет положительное значение, то график функции на этом интервале возрастает.

2. На интервалах убывания производная имеет отрицательный знак.

Если производная в определённой точке из некоторого интервала имеет отрицательное значение, то график функции на этом интервале убывает.

3. Производная в точке х равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой же точке.

4. В точках экстремума (максимума-минимума) функции производная равна нулю. Касательная к графику функции в этой точке параллельна оси ох.

Это нужно чётко уяснить и помнить!!!

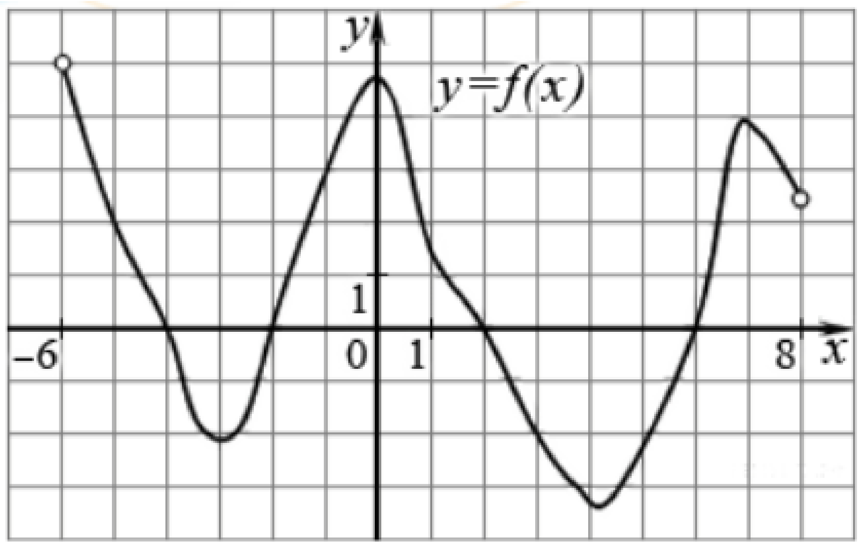
Далее рассмотрим несколько типичных задач.

На рисунке изображен график функции y = f (x), определенной на интервале (−6; 8). Определите:

1. Количество целых точек, в которых производная функции отрицательна;

2. Количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 2;

3. Количество точек, в которых производная равна нулю;



1. Производная функции отрицательна на интервалах, на которых функция убывает, то есть на интервалах (−6; −3), (0; 4,2), (6,9; 8). В них содержатся целые точки −5, −4, 1, 2, 3, 4, и 7. Получили 7 точек.

2. Прямая *y* = 2 параллельная оси *ox*. Касательная будет параллельна прямой *y* = 2 только в точках экстремума (в точках, где график меняет своё поведение с возрастания на убывание или наоборот). Таких точек четыре: −3; 0; 4,2; 6,9

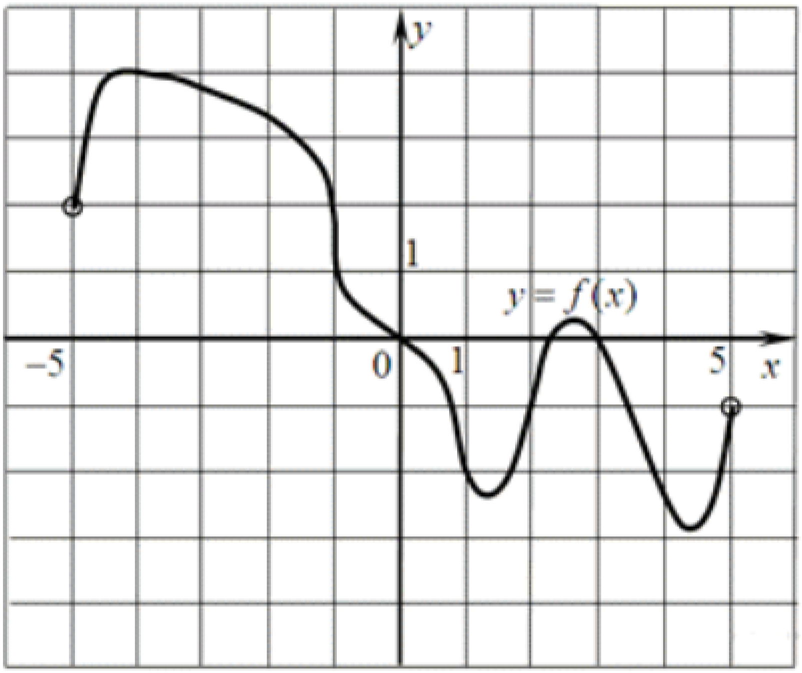
3. Производная равна нулю в четырёх точках (в точках экстремума), их мы уже указали.

На рисунке изображен график функции y = f (x), определенной на интервале (−5; 5). Определите:

1. Количество целых точек, в которых производная функции положительна;

2. Количество целых точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 3;

3. Количество точек, в которых производная равна нулю;



1. Из свойств производной функции известно, что она положительна на интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (1,4; 2,5) и (4,4;5). В них содержится только одна целая точка x = 2.

2. Прямая $y = 3$ параллельная оси *ox*. Касательная будет параллельна прямой $y = 3$ только в точках экстремума (в точках, где график меняет своё поведение с возрастания на убывание или наоборот).

Таких точек четыре: –4,3; 1,4; 2,5; 4,4

3. Производная равна нулю в четырёх точках (в точках экстремума), их мы уже указали.

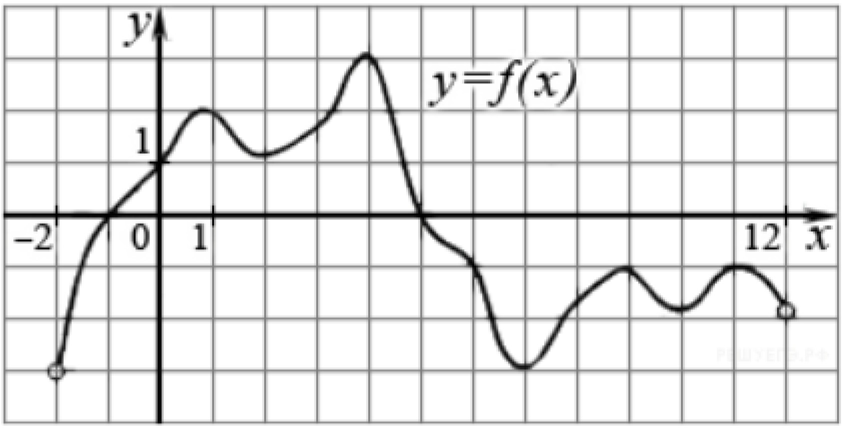
На рисунке изображен график функции y = f (x), определенной на интервале (−2; 12). Найдите:

1. Количество целых точек, в которых производная функции положительна;

2. Количество целых точек, в которых производная функции отрицательна;

3. Количество целых точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 2;

4. Количество точек, в которых производная равна нулю.



1. Из свойств производной функции известно, что она положительна на интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−2; 1), (2;4), (7; 9) и (10;11). В них содержатся целые точки: −1, 0, 3, 8. Всего их четыре.

2. Производная функции отрицательна на интервалах, на которых функция убывает, то есть на интервалах (1; 2), (4; 7), (9; 10), (11;12). В них содержатся целые точки 5 и 6. Получили 2 точки.

3. Прямая *y* = 2 параллельная оси *ox*. Касательная будет параллельна прямой *y* = 2 только в точках экстремума (в точках, где график меняет своё поведение с возрастания на убывание или наоборот). Таких точек семь: 1; 2; 4; 7; 9; 10; 11.

4. Производная равна нулю в семи точках (в точках экстремума), их мы уже указали.

Глава 9 «Начала математического анализа», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/
3. https://matematikalegko.ru/