

Лекция. Преобразование графиков.

Преобразования графиков функций частично рассмотрели на примерах построения графиков тригонометрических функций.

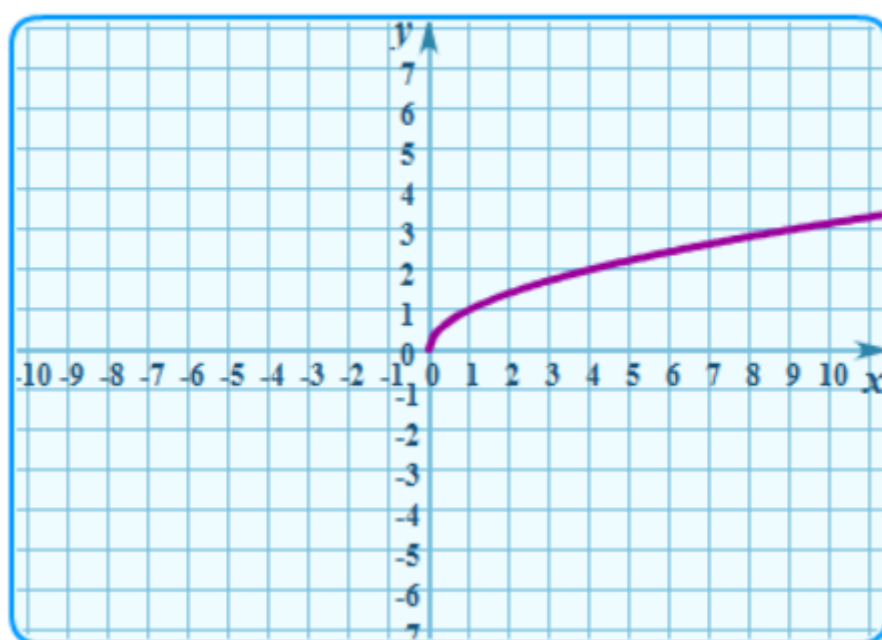
Все преобразования графиков функций можно свести к следующим правилам.

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Чтобы построить график функции

1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m . Такое преобразование называется растяжением от оси x с коэффициентом m , если $m > 1$, и сжатием к оси x , если $0 < m < 1$.
2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси x . (Преобразование симметрии - зеркальное отражение относительно прямой.)
3. $y = f(x) + n$, получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.
4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного сжатием с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное "сжатие" фактически является растяжением с коэффициентом $1/k$)
5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси y
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $l < 0$.

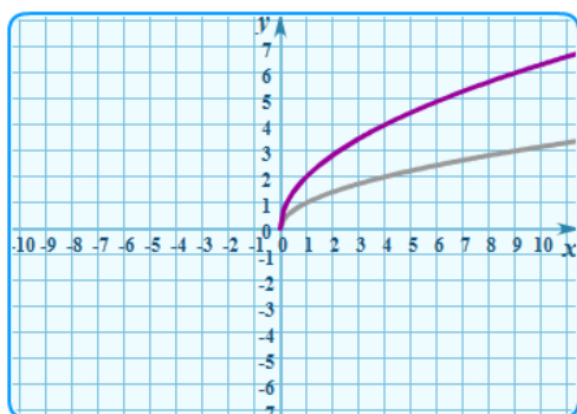
Рассмотрим на примере.

Например, пусть задан график функции $y = \sqrt{x}$.



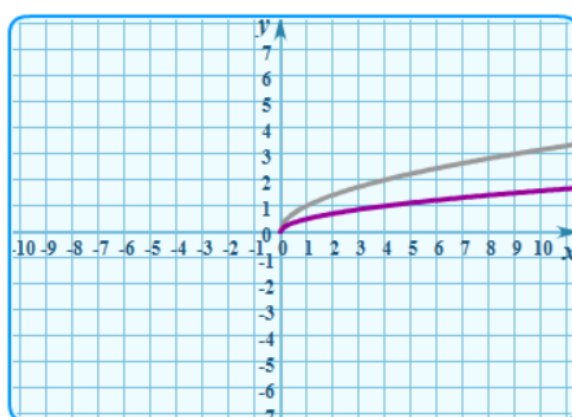
Чтобы построить графики других функций, содержащих аргумент (x) под знаком квадратного корня, воспользуемся перечисленными выше правилами. Заданный график повторим во вновь начерченных осях "карандашом бледно", требуемый график, который получится после преобразований, сделаем более интенсивным. В тетради лишнее можно будет удалить ластиком, останется только результат выполнения задания.

Пример 1а. Построить график функции $y = 2\sqrt{x}$



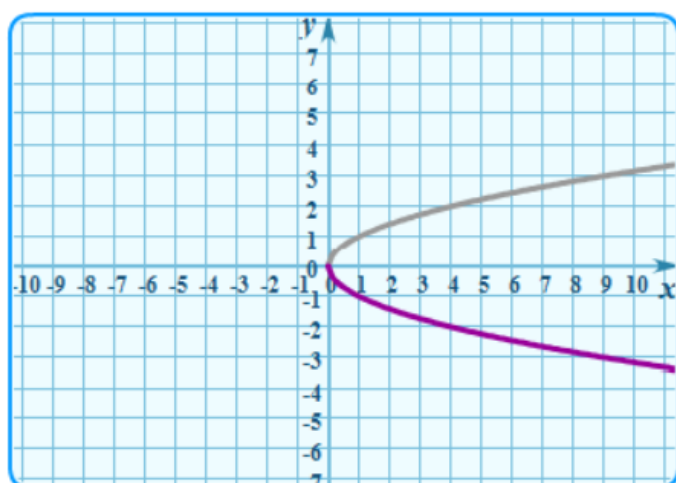
Растянули в 2 раза от оси x . Ордината каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 1б. Построить график функции $y = \sqrt{x}/2$



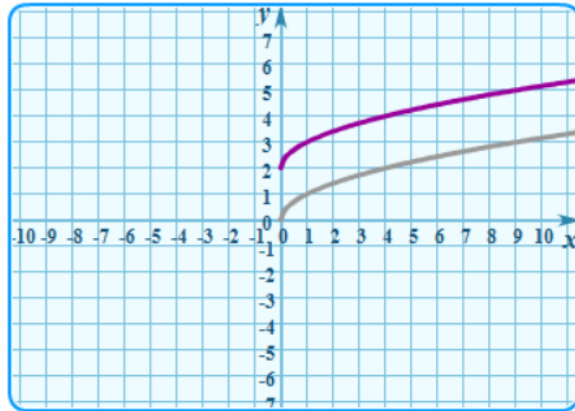
Сжали вдвое к оси x . Ордината каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Пример 2. Построить график функции $y = -\sqrt{x}$



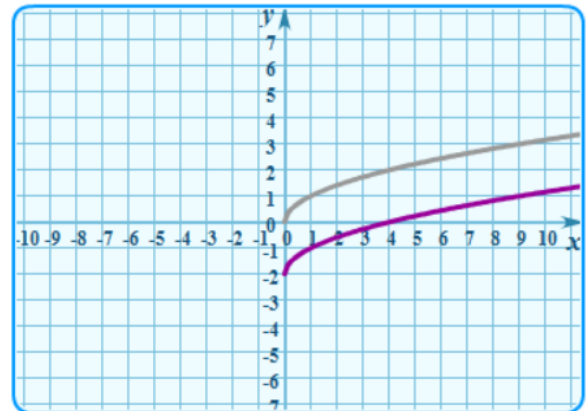
Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси x .

Пример 3а. Построить график функции $y = \sqrt{x} + 2$



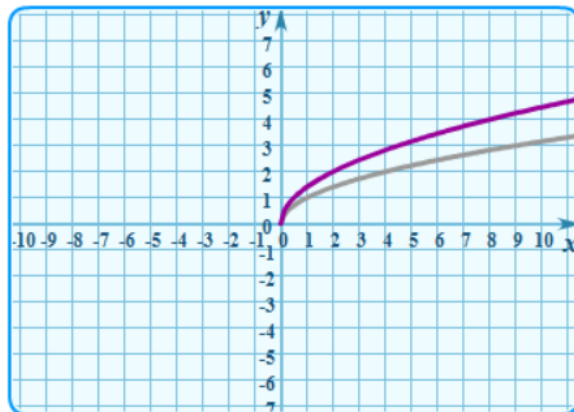
Параллельно перенесли на 2 единицы вверх вдоль оси y . Ордината каждой точки увеличилась на 2.

Пример 3б. Построить график функции $y = \sqrt{x} - 2$



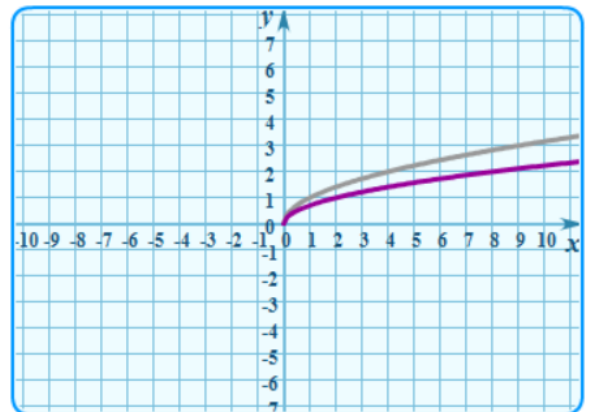
Параллельно перенесли на 2 единицы вниз вдоль оси y . Ордината каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 4а. Построить график функции $y = \sqrt{2x}$



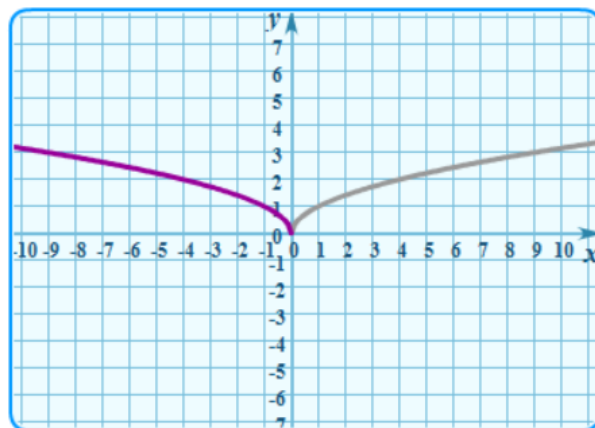
Сжали вдвое к оси y . Абсцисса каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Пример 4б. Построить график функции $y = \sqrt{x/2}$



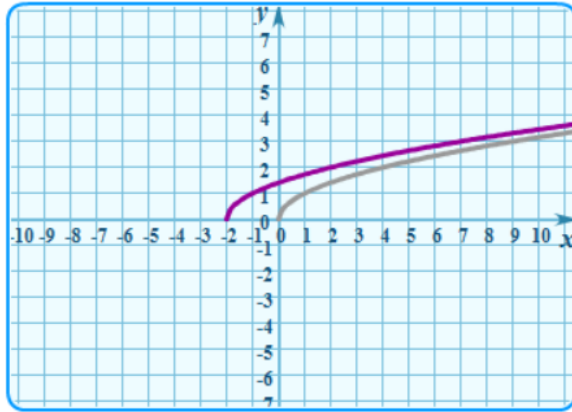
Растянули в 2 раза от оси y . Абсцисса каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt{-x}$



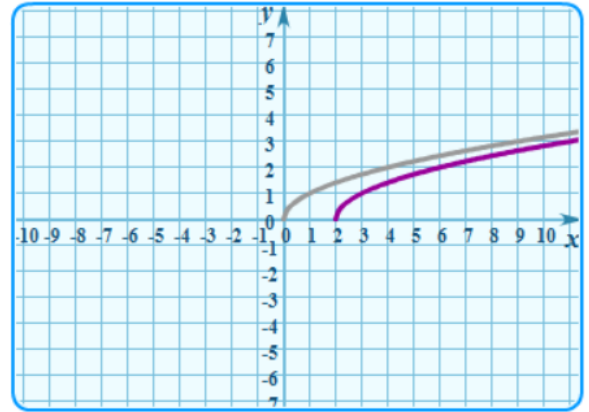
Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси y .

Пример 6а. Построить график функции $y = \sqrt{x+2}$



Параллельно перенесли на 2 единицы влево вдоль оси x . Абсцисса каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 6б. Построить график функции $y = \sqrt{x-2}$



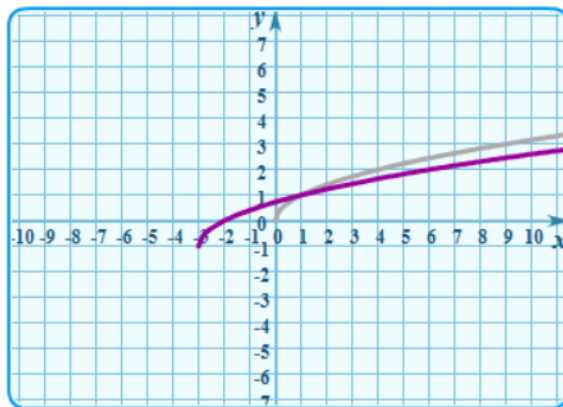
Параллельно перенесли на 2 единицы вправо вдоль оси x . Абсцисса каждой точки увеличилась на 2 единицы.

Пример 7. Задан график функции $y = \sqrt{x}$. Построить график функции $y = \sqrt{x+3} - 1$.

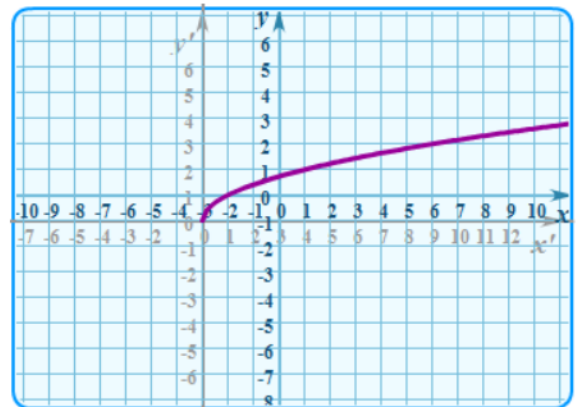
В этом случае $m = -3$, $n = -1$. Если есть затруднения в определении знаков m и n , то записывайте формулу функции так, чтобы она совпадала с правилом

$$y = f(x - m) + n; \quad y = \sqrt{x - m} + n; \quad y = \sqrt{x - (-3)} + (-1)$$

Построение выполняем так. Чертим оси нужной системы координат. Находим точку с координатами $(-3; -1)$. Проводим через неё "бледно карандашом" прямые параллельные основным осям. Это вспомогательная система координат. В этой (карандашной) системе координат строим график $y = \sqrt{x}$. Относительно основной системы координат, он является графиком функции $y = \sqrt{x+3} - 1$. Т.е., если карандаш удалить ластиком, то останется график, который требовалось построить.



Этот график построен двумя последовательными параллельными переносами - на 3 единицы влево и на 1 единицу вниз.



Этот график построен с использованием новой системы координат. Видно, что обе сиреневые кривые относительно синих осей располагаются абсолютно одинаково.

Если нужно скомбинировать только параллельные переносы, чтобы построить график функции, то всё равно в каком порядке их выполнять, и всё равно, что переносить - оси или кривые. Но если нужно построить график

сложной функции, используя и перенос, и растяжение-сжатие, и отражения, то следует тщательно соблюдать порядок выполнения операций.

Последовательность преобразований при построении графиков.

Пусть задан график функции $y = f(x)$ и нужно построить график функции $y = m \cdot f(kx + l) + n$, где k, l, m, n - числа.

1. Записываем формулу функции в виде $y = m \cdot f(k \cdot (x + l/k))$, т.е. выносим за скобки коэффициент при x в аргументе функции.
2. Производим сжатие с коэффициентом k вдоль оси Ox к оси Oy . (Если $k < 1$, то получится растяжение от оси Oy .)
3. Если $k < 0$, то симметрично отображаем график относительно относительно оси Oy .
4. Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на l/k единиц влево или вправо (в зависимости от знака, для положительного числа влево).
5. Производим растяжение с коэффициентом m от оси Ox (вдоль оси Oy). (Если $m < 1$, то получится сжатие к оси Ox .)
6. Если $m < 0$, то симметрично отображаем график относительно оси Ox .
7. Осуществляем параллельный перенос (сдвиг) полученного графика на n единиц вверх или вниз (в зависимости от знака, при $n > 0$ вверх).

Выполните задание.

Установите соответствие между функциями и преобразованиями графика функции $y = \ln x$, которые необходимо выполнить, чтобы получить графики указанных функций.

Симметрия функций и преобразование их графиков. Задание 2



Установите соответствие между функциями и преобразованиями графика функции $y = \ln x$, которые необходимо выполнить, чтобы...[Далее](#)

$$y = \ln(x - 3)$$



Симметрия относительно оси Oy

$$y = \log_2 x$$



Растяжение по оси Oy

$$y = \ln \frac{1}{x}$$



Сдвиг по оси Ox

$$y = \ln(-x)$$



Симметрия относительно оси Ox

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>
2. <http://mathematichka.ru/>
3. <https://23.edu-reg.ru/>