Лекция. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Нахождение скорости, заданной формулой и графиком.

Вторая производная.

1) **Ускорение.** Ускорение по своему смыслу есть скорость изменения скорости. Если функция $v = v(t)$ задает скорость движения точки по прямой, то производная этой функции есть ускорение: $a(t) = v'(t)$.

Если задана координата $x = x(t)$ точки, то, чтобы найти ускорение, надо сначала продифференцировать функцию x и получить скорость v, а затем еще раз продифференцировать и получить ускорение. Поэтому ускорение называют **второй производной пути** (**перемещения**) **по времени** и обозначают так:

$$a(t) = x''(t).$$

Ускорение движения, когда координата x зависит от времени квадратично, постоянно и равно удвоенному коэффициенту при t^2. Из механики известно и обратное — если ускорение постоянно, то перемещение зависит от t по квадратичному закону. Если ускорение равно a, скорость при $t = 0$ равна v_0, а положение точки в начальный момент времени есть x_0, то путь задается формулой $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$. Это объясняет смысл коэффициента в квадратичном законе движения.

Примеры

1. $x(t) = kt$,

$v(t) = x'(t) = k$,

$a(t) = x''(t) = 0$.

Такое движение называется равномерным, ускорение в этом случае равно нулю.

2. $x(t) = At^2 + Bt + C$,

$v(t) = x'(t) = 2At + B$,

$a(t) = x''(t) = 2A$.

Такое движение называется равноускоренным.

3. $x(t) = \frac{1}{t+C}$,

$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{(t+C)^2}$,

$a(t) = x''(t) = \frac{2}{(t+C)^3}$.

Такое движение называется равнозамедленным.

Мы видим, что направление ускорения противоположно направлению движения, а модуль ускорения убывает очень быстро.

(Производные высших порядков https://www.youtube.com/watch?v=AQBiDSh4b7I)

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Пусть прямолинейное движение материальной точки происходит по закону

$$s = \frac{2t^3}{5}$$

где время t выражается в сек, а путь s -- в см.

Найти ускорение w движущейся точки в момент времени t = 4 сек.

Решение.

По формуле:

$$\omega = v_t' = s''$$

Найдем искомое ускорение

$$s' = \left(\frac{2t^3}{5}\right)' = \frac{6t^2}{5}$$

$$\omega = s'' = \left(\frac{6t^2}{5}\right)' = \frac{12t}{5}$$

Пример 3

Скорость движения тела выражается формулой

$$v = 0,8t^3 - 1,2$$

Найти ускорение тела спустя 12 секунд от начала его движения.

Решение.

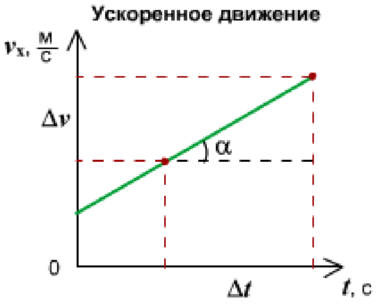
Поскольку ускорением является производная от скорости:

$$\omega = v'' = \left(0,8t^3 - 1,2\right)'' = 4,8t$$

Через 12 секунд ускорение составит:

$$\omega = 4,8 \cdot 12 = 57,6\text{м/с}^2$$

Правило определения ускорения по графику v(t): Ускорение тела - это тангенс угла наклона графика к оси времени. Если тело замедляет движение, ускорение отрицательное, угол графика тупой, поэтому находим тангенс смежного угла.



$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = tg\ \alpha$$

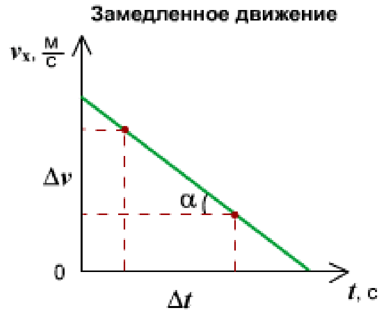
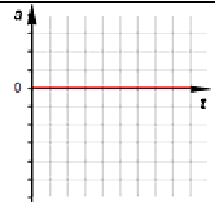
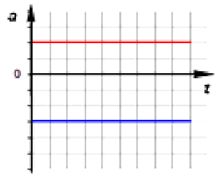
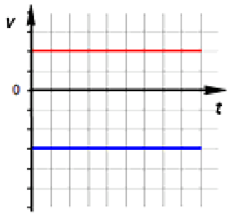
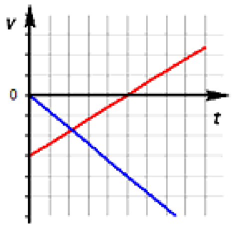
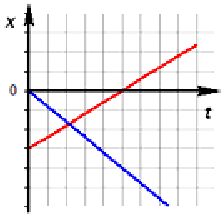
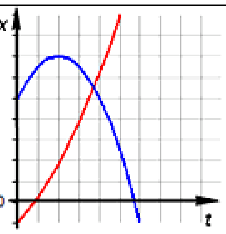


График зависимости пути от времени

График движения при $v_0 = 5\frac{м}{с}$, $a = 2\frac{м}{с^2}$. График движения при $v_0 = 5\frac{м}{с}$, $a = 10\frac{м}{с^2}$

График движения при $v_0 = -25\frac{м}{с}$, $a = 10\frac{м}{с^2}$. График движения при $v_0 = 20\frac{м}{с}$, $a = -5\frac{м}{с^2}$

Сравнительная таблица графиков

зависимость	равномерное движение	равноускоренное движение
$a(t)$	 $a = 0$	 $a = const$
$v(t)$	 $v = const$	 $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$
$x(t)$	 $x = x_0 + \vec{v}t$	 $x = x_0 + \vec{v}_o t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

3) **Геометрический смысл второй производной**. Мы уже отмечали, что понятие выпуклости функции тесно связано с поведением производной. Эту связь легко проследить по графику.

Функция выпукла вверх	↔	Производная возрастает
Функция выпукла вниз	↔	Производная убывает
Точка перегиба	↔	Экстремум производной

Так как необходимым условием экстремума функции является обращение ее производной в нуль, необходимым условием перегиба функции будет обращение в нуль производной от ее производной, т. е. второй производной функции.

Пример. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 3x$.

Вычисляем производные: $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, т. е. график функции имеет перегиб в начале координат.

Пройдите тест по вариантам

Время прохождения теста 45 минут.

1 вариант

1. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента х $$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x - 1,$$ при $x = -1$	А) 17 Б) 21 С) - 5
2. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента х $$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \text{при } x = \sqrt{3}$$	А) $1 - \sqrt{3}$ Б) $-\sqrt{3}$ С) $\sqrt{3}$
3. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. В какой момент времени t_0 скорость точки окажется равной нулю?	А) $t_0 = 2$ Б) $t_0 = 5$ С) $t_0 = 4$
4. Найдите производную тригонометрических функций $y = sin^2 2x$	А) $2sin\ \ 2x$ Б) $-2sin^2 2x$ С) $2sin\ \ 4x$
5. Исследуйте функцию на экстремум $$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$$	А) $\max(2; 12)$ Б) $\max(3; 10), \min(0; 2)$ С) $\max(2; 12), \min(-1; 2)$
6. Найдите наибольшее, наименьшее значение функции в заданном промежутке $$y = x^2 - 6x + 3, \ \ x \in [0; 5]$$	А) $y(-3) = 12, y(0) = 1$ Б) $y(3) = -6, y(0) = 3$ С) $y(1) = 2, y(5) = -1$
7. Найдите точки перегиба кривой $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$$	А) (1; 3) Б) (- 2; 1), (1; 6) С) (3; 2)

2 вариант

1. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 1,$ при $x = -1$	А) - 4 Б) - 2 С) 5
2. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, при $x = 2$	А) $\sqrt{3}$ Б) 2 С) $\sqrt{2}$
3. Зависимость температуры тела T от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени t =10 с?	А) 10 град/с Б) 9 град/с С) 8 град/с
4. Найдите производную тригонометрических функций $y = cos^2 x$	А) $sin\ \ 2x$ Б) $-cos^2 2x$ С) $-sin\ \ 2x$
5. Исследуйте функцию на экстремум $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$	А) $\max\left(-2; \frac{16}{3}\right); \min(2; -\frac{16}{3})$ Б) $\max(3; \frac{10}{3}), \min(0; \frac{2}{3})$ С) $\max(2; \frac{12)}{7}, \min(-1; \frac{2}{7})$
6. Найдите наибольшее, наименьшее значение функции в заданном промежутке $y = x^2 - 8x + 4, \ \ x \in [-2; 2]$	А) $y(-1) = 1, y(0) = 12$ Б) $y(4) = -12, y(-2) = 24$ С) $y(-2) = -8, y(2) = 8$
7. Найдите точки перегиба кривой $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$	А) (1; 31), (2; -8) Б) (- 9; 0) С) (1; -6), (3; -86)

3 вариант

1. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ при $x = 2$	А) 56 Б) 64 С) 46
2. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, при $x = 3$	А) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ С) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
3. Сила тока I(A) изменяется в зависимости от времени t(c) по закону $I = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите скорость изменения силы тока через 8с.	А) 10 А/с Б) 40 А/с С) 50 А/с
4. Найдите производную тригонометрических функций $y = tg^2 x$	А) $\frac{sin^2 x}{\cos x}$ Б) $\frac{2\sin x}{cos^2 x}$ С) $\frac{2\sin x}{cos^3 x}$
5. Исследуйте функцию на экстремум $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$	А) $\max(0; 0); \min(2; -\frac{4}{3})$ Б) $\max(3; 0), \min(-1; -\frac{2}{3})$ С) $\max(0; \frac{2)}{3}, \min(-1; \frac{1}{3})$
6. Найдите наибольшее, наименьшее значение функции в заданном промежутке $y = x^2 - 6x + 13, \ \ x \in [0; 6]$	А) $y(2) = 5, y(0) = y(6) = 10$ Б) $y(3) = 4, y(0) = y(6) = 13$ С) $y(-2) = -8, y(4) = 8$
7. Найдите точки перегиба кривой $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$	А) (1; 1), (2; -1) Б) (- 9; 0), (1;4) С) (1; -3), (2; 6)

Глава 9 «Начала математического анализа», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://spravochnick.ru/
3. https://23.edu-reg.ru/