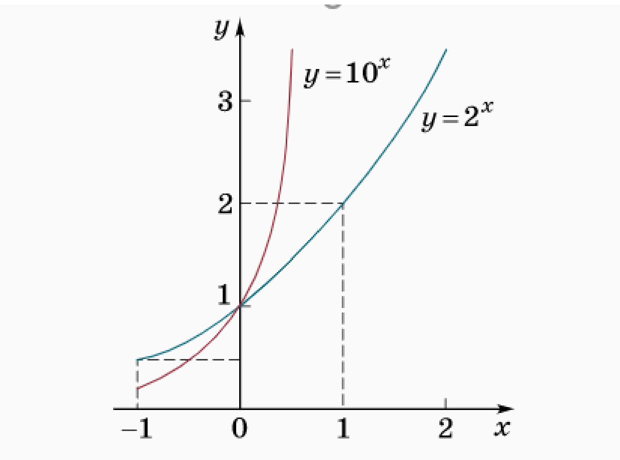
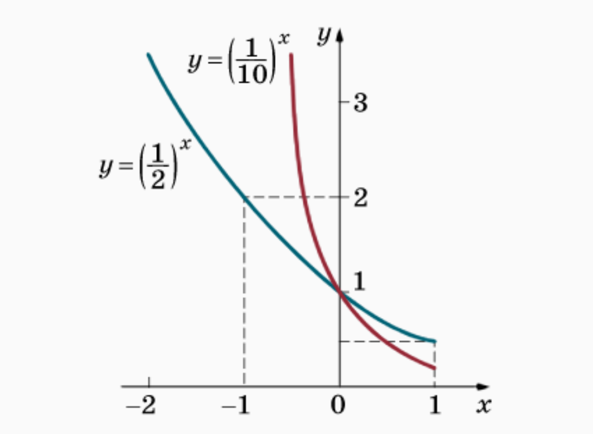
Практическое занятие №51.

Показательные и тригонометрические неравенства.

1. Показательные неравенства



$y = a^x$, $a > 1$



$y = a^x$, $0 < a < 1$

При решении показательных и логарифмических неравенств следует помнить, что показательная $y = a^x$ и логарифмическая $y = \log_a x$ функции являются возрастающими при $a > 1$ и убывающими при $0 < a < 1$. Поэтому из неравенств $a^x > a^y$ или $\log_a x > \log_a y$ следует, что $x > y$, если $a > 1$, и $x < y$, если $0 < a < 1$. При потенцировании или логарифмировании обеих частей неравенства по основанию a знак неравенства сохраняется прежним, если $a > 1$, и изменяется на противоположный, если $0 < a < 1$. Если значение основания a неизвестно, то необходимо рассматривать два случая.

5.55. Решить неравенство: $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

Решение. Учитывая, что $\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$, перепишем неравенство в виде $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Так как основание показательной функции $a = \frac{3}{4} < 1$, равносильным данному неравенству будет следующее неравенство с противоположным знаком: $6x + 10 - x^2 > 3$, или $x^2 - 6x - 7 < 0$, решением которого будет $-1 < x < 7$.

Ответ: $(-1; 7)$.

5.56. Решить неравенство: $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x < 0$.

Решение. Так как $10^x > 0$, то, разделив исходное уравнение на 10^x, получим равносильное неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 < 0$.

Обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0$, имеем $y - 2 \cdot \frac{1}{y} - 1 < 0$, или $y^2 - y - 2 < 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители $(y - 2)(y + 1) < 0$. Так как $y > 0$, $y + 1 > 0$, то $y - 2 < 0$, т.е. $y < 2$. Следовательно, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$. Логарифмируя по основанию $a = \frac{2}{5} < 1$, придем к неравенству с противоположным знаком: $x > \log_{2/5} 2$.

Ответ: $(\log_{2/5} 2;\ +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенство $5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \le 0$

$9^x - 31 \cdot 3^x + 108 \le 0$

$2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \le 0$

$3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11$

$2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7$

$2^{x^2} \le 64 \cdot 2^x$

2. Тригонометрические неравенства

Для овладения навыками решения тригонометрических неравенств прежде всего надо научиться решать простейшие неравенства вида $a_1 < \sin x < a_2$, $b_1 < \cos x < b_2$, $c_1 < \operatorname{tg} x < c_2$, $d_1 < \operatorname{ctg} x < d_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 — заданные числа. Для решения этих неравенств удобно использовать тригонометрический круг.

7.169. Решить неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$.

Решение. Так как в тригонометрическом круге $\sin \alpha$ есть ордината конца подвижного радиуса, отложим на оси ординат отрезок, равный $\frac{1}{2}$, и проведем через точку K отрезок $MN \parallel Ox$ (рис.7.3).

7.169. Решить неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как в тригонометрическом круге $\sin \alpha$ есть ордината конца подвижного радиуса, отложим на оси ординат отрезок, равный $\frac{1}{2}$, и проведем через точку K отрезок $MN \parallel Ox$ (рис.7.3).

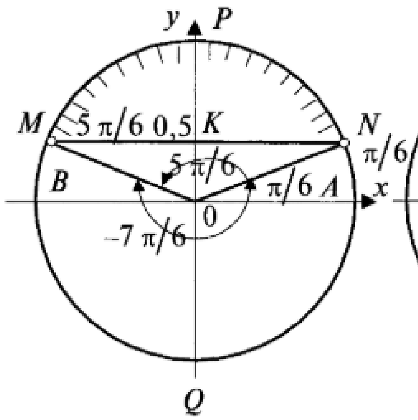


Рис: 7.3

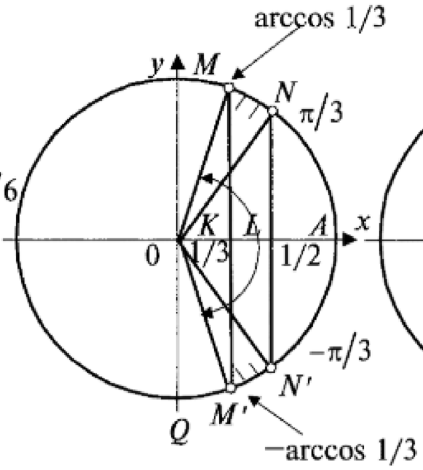


Рис. 7.4

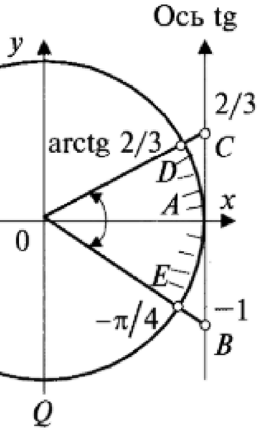


Рис. 7.5

Получим $\angle NOA = \frac{\pi}{6}$, а $\angle MOA = \frac{5\pi}{6}$, ибо их синусы равны $\frac{1}{2}$. Очевидно, что неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ соответствуют все точки дуги $\overset{\frown}{MPN}$ (отмечены на рис. 7.3 штриховкой), т.е. заключены от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$. С учетом периода функции $\sin x$, равного 2π, ответ запишется в виде интервала $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Решениями неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$ будут все точки дуги $\overset{\frown}{MQN}$. Если полагать, что угол с конечной стороной OM равен $\frac{5\pi}{6}$, то точки дуги $\overset{\frown}{MQN}$ будут описаны интервалом $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, так как если двигаться по дуге $\overset{\frown}{MQN}$ в положительном направлении (против часовой стрелки), то угол с конечной стороной ON будет равен $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$. Запись ответа несколько упростится, если считать угол с конечной стороной OM равным $-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$. Тогда «охвату» точек дуги $\overset{\frown}{MQN}$ будет соответствовать интервал $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Ответ: а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$; б) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

7.170. Решить неравенство: $\frac{1}{3}<\cos x<\frac{1}{2}$.

Решение. Так как в тригонометрическом круге $\cos\alpha$ есть абсцисса конца подвижного радиуса, отложим на оси Ox отрезки, равные $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$, и проведем через точки K и L $MM' \parallel Oy$, $NN' \parallel Oy$ (см. рис. 7.4).

Получим $\angle MOA=\arccos\frac{1}{3}$, $\angle M'OA=-\arccos\frac{1}{3}$, $\angle NOA=\frac{\pi}{3}$, $\angle N'OA=-\frac{\pi}{3}$. Очевидно, решениями неравенства будут все точки дуг MN и $M'N'$, т.е. (с учетом периода функции $\cos x$, равного 2π) интервалы соответственно

$$\left(-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \text{ и } \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right).$$

Ответ: $\left(-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/

   Кремер, Н. Ш.

   Математика для колледжей : учебное пособие для поступающих в вузы / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

2. https://23.edu-reg.ru/