Практическое занятие №46

Показательные и логарифмические уравнения.

Повторим основные понятия и свойства показательной и логарифмической функций.

Показательная функция

Основные свойства степени. Если $a > 0$, $b > 0$ и x, x_1, x_2 — любые действительные числа, то:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}; \quad (2.1)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}; \quad (2.2)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}; \quad (2.3)$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad (2.1)$$

$$a^x > 0; \quad (2.6)$$

$$a^x > 1, \text{ если } a > 1, x > 0; \quad (2.7)$$

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1, x_1 < x_2; \quad (2.8)$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1, x_1 < x_2. \quad (2.9)$$

Функция вида $y = a^x$, где основанием служит заданное число $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***показательной функцией***.

Область определения показательной функции — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел $y > 0$.

Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ на множестве всех действительных чисел и убывающей при $0 < a < 1$. Это следует из свойств (2.8), (2.9).

Построим графики показательных функций $y = 2^x$ (рис. 2.11) и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 2.12) и перечислим их основные свойства.

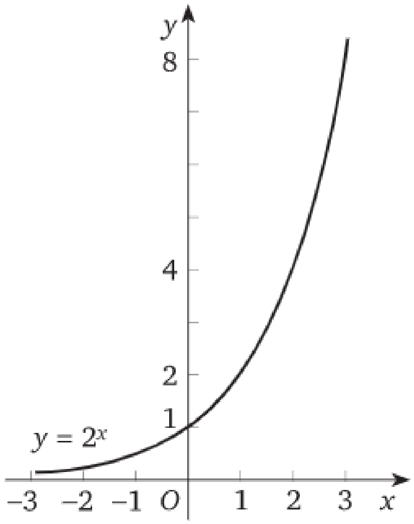

Рис. 2.11

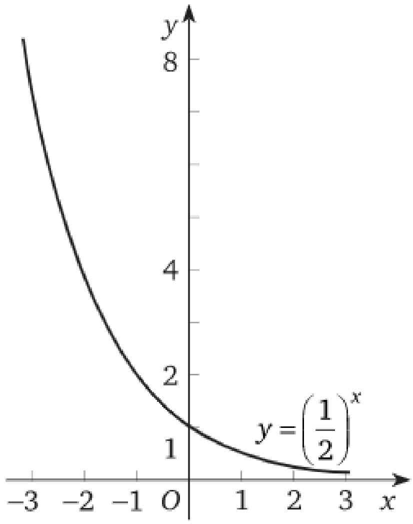

Рис. 2.12

Логарифмическая функция.

1. Понятие о логарифме числа. Задача определения показателя степени x в простом соотношении $2^x = 8$ оказывается неразрешимой с применением известных шести математических действий. Определив тем не менее, что $x = 3$, записать решение этой задачи с помощью известных математических знаков невозможно.

Правда, эту задачу легко решить графическим способом — нахождением точки пересечения графиков $y = 2^x$ и $y = 8$ (рис. 2.15); это точка (3; 8). Графический способ иногда позволяет решить задачу, неразрешимую с применением обычных математических приемов.

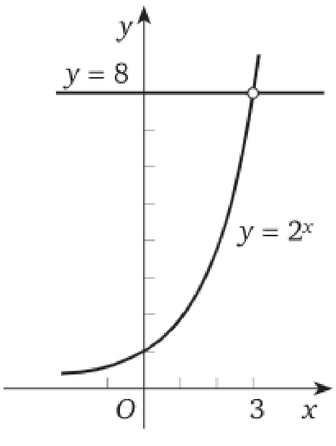

Рис. 2.15

В общем виде задача $a^x = N$ разрешима только с введением нового математического действия. Это действие называется нахождением ***логарифма числа N по основанию a***, что записывается таким образом:

$$\log_a N = x. \qquad (2.10)$$

Логарифмом положительного числа N по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число N.

Например, $2^5 = 32$, поэтому $\log_2 32 = 5$; $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$, поэтому $\log_2(1/8) = -3$; $5^0 = 1$, поэтому $\log_5 1 = 0$; $10^2 = 100$, поэтому $\log_{10} 100 = 2$; $a^1 = a$ ($a > 0$, $a \neq 1$), поэтому $\log_a a = 1$.

Подставим в выражение $a^x = N$ в качестве x его представление по формуле (2.10). Тогда получим

$$a^{\log_a N} = N. \tag{2.11}$$

Это равенство называется ***основным логарифмическим тождеством***. Оно справедливо при $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Например: $2^{\log_2 8} = 8$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} 7} = 7$, $a^{-3\log_a x} = (a^{\log_a x})^{-3} = x^{-3}$.

2. Свойства логарифмов. Рассмотрим некоторые свойства логарифмов, используемые при выполнении различных преобразований и решении уравнений.

Пусть $a > 0$, $M > 0$, $N > 0$, n — любое действительное число, тогда:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N; \tag{2.12}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N; \tag{2.13}$$

$$\log_a M^n = n\log_a M; \tag{2.14}$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M. \tag{2.15}$$

Докажем эти свойства.

По основному логарифмическому тождеству (2.11) имеем

$$a^{\log_a M} = M; \tag{2.16}$$

$$a^{\log_a N} = N. \tag{2.17}$$

Отметим, что из условия $\log_a x = \log_a y$ ($a > 0$, $a \neq 1$) следует, что $x = y$, т. е. если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами числа.

3. Логарифмирование. Действие нахождения логарифма числа называют ***логарифмированием***. Если одночленное выражение составлено из положительных чисел с применением действий умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то логарифм такого выражения вычисляется с использованием формул (2.12)—(2.15).

Методы решения показательных и логарифмических уравнений

1. Показательные уравнения. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным.***

При решении показательных уравнений вида

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

используется следующее свойство:

$$(a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \varphi(x)).$$

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые из них.

I. ***Способ уравнивания оснований.*** Проиллюстрируем его на примерах решения следующих уравнений.

Пример 2.6

Решить уравнение $\left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 128.$

Решение

Левую часть уравнения представим в виде $\left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 8^{2x} = (2^3)^{2x}$, правую — в виде $128 = 2^7$. Тогда $3 \cdot 2x = 7$, $x = 7/6$.

Пример 2.7

Решить уравнение $2^{x-2} = 5^{2-x}$.

Решение

Правую часть уравнения можно представить в виде $\dfrac{1}{5^{x-2}}$; умножая обе части уравнения на 5^{x-2}, приходим к $2^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$, иначе, $10^{x-2} = 1$, в то же время правую часть этого уравнения можно представить в виде $1 = 10^0$, отсюда $x - 2 = 0$, $x = 2$.

II. ***Логарифмирование обеих частей уравнения. Применение основного логарифмического тождества.*** Рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.8

Решить уравнение $3^{2x-3} = 11^{1-x}$.

Решение

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим

$$(3^{2x-3} = 11^{1-x}) \Leftrightarrow ((2x-3)\lg 3 = (1-x)\lg 11) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x\lg 3 - 3\lg 3 = \lg 11 - x\lg 11) \Leftrightarrow (2x\lg 3 + x\lg 11 = \lg 11 + 3\lg 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x(2\lg 3 + \lg 11) = \lg 11 + 3\lg 3) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\lg 11 + 3\lg 3}{2\lg 3 + \lg 11}\right).$$

Пример 2.9

Решить уравнение $3^x = 8$.

Решение

Согласно основному логарифмическому тождеству (2.11) имеем $8 = 3^{\log_3 8}$, тогда

$$(3^x = 8) \Leftrightarrow (3^x = 3^{\log_3 8}) \Leftrightarrow (x = \log_3 8).$$

К этому результату можно прийти, логарифмируя обе части уравнения по основанию 3:

$$(3^x = 8) \Leftrightarrow (x\log_3 3 = \log_3 8) \Leftrightarrow (x = \log_3 8/\log_3 3).$$

Из последнего выражения согласно тождеству (2.23) следует

$$x = (\lg 8)/(\lg 3).$$

С использованием таблиц получим $x = \dfrac{0{,}903}{0{,}477} \approx 1{,}89$.

III. ***Преобразование к квадратному уравнению.*** Рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.10

Решить уравнение $5^x + \dfrac{125}{5^x} = 30$.

Решение

Умножим все члены уравнения на 5^x:

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0.$$

Решив это уравнение относительно 5^x, получим два корня: $5^{x_1} = 5$, $5^{x_2} = 25$. Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Пример 2.11

Решить уравнение $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$.

Решение

Преобразовав второй член уравнения, получим

$$6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделив все члены уравнения на 3^{2x} (при этом $3^{2x} \neq 0$), получим относительно переменной $(2/3)^x$ квадратное уравнение

$$6 \cdot (2/3)^{2x} - 13 \cdot (2/3)^x + 6 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $(2/3)^{x_1} = 2/3$, $(2/3)^{x_2} = 3/2$, следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

IV. ***Способ группировки.*** Проиллюстрируем этот способ на следующем примере.

Пример 2.12

Решить уравнение $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$.

Решение

Преобразуем это уравнение:

$$(5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0) \Leftrightarrow (5 \cdot 25^x + 7 \cdot 7^x - 25^x \cdot 7^x - 35 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (25^x(5 - 7^x) - 7(5 - 7^x) = 0) \Leftrightarrow ((5 - 7^x)(25^x - 7) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (5 - 7^{x_1} = 0;\ 25^{x_2} - 7 = 0).$$

Следовательно, $x_1 = \log_7 5$, $x_2 = \log_{25} 7$.

1. Логарифмические уравнения. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется ***логарифмическим***. Проиллюстрируем различные способы решения таких уравнений с помощью следующих примеров.

Пример 2.17

Решить уравнение $\log_x 16 - \log_x 2 = 1/2$.

Решение

$$(\log_x 16 - \log_x 2 = 1/2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x(16/2) = 1/2, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{1/2} = 8, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решением является $x = 64$.

Пример 2.18

Решить уравнение $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5$.

Решение

Учитывая, что $1 = \lg 10$, потенцируем:

$$(\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x-3) + \lg(x-2) = \lg 10 - \lg 5, \\ x - 3 > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(x-3)(x-2)] = \lg(10/5), \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) = 2, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4, \end{array} \right. \\ x > 3. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяет единственное решение $x = 4$.

Пример 2.19

Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$.

Решение

Данное уравнение преобразуем к квадратному, решив которое относительно переменной $\lg x$, получим

$$(\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x + 2\lg x - \lg^2 2 + 1 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = -1 - \lg 2, \\ \lg x = -1 + \lg 2, \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x + \lg 2 = -1, \\ \lg x - \lg 2 = -1, \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg(2x) = -1, \\ \lg(x/2) = -1, \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 10^{-1}, \\ x/2 = 10^{-1}. \end{array} \right.$$

Корнями исходного уравнения являются $x_1 = 0{,}05$ и $x_2 = 0{,}2$.

Пример 2.20

Решить уравнение $x^{\lg x} = 100x$.

Решение

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 и решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$$(x^{\lg x} = 100x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x - \lg x - 2 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = -1, \\ \lg x = 2, \end{array} \right. \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Исходному уравнению удовлетворяют корни $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 100$.

Задание: тест «Показательные и логарифмические уравнения»

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017. - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/data/metodsch/degeq.pdf
3. https://www.resolventa.ru/data/metodsch/logeq.pdf