Лекция. Шар и сфера, их сечения

1. Шар.

Шар — это множество точек пространства, расстояние которых до данной точки (**центра** шара) не превосходит данного числа (**радиуса** шара).

Границу шара называют **сферой**. Точки сферы удалены от центра на одно и то же расстояние, равное радиусу.

Сечения шара плоскостями — круги. Сечения шара плоскостями, проходящими через его центр, — круги, радиусы которых совпадают с радиусом шара.

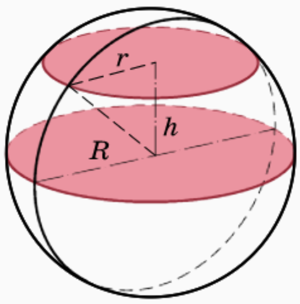
Чем дальше отходит плоскость сечения от центра шара, тем меньше становится радиус окружности в сечении.

Если R — радиус шара; h — расстояние плоскости сечения от центра шара; r — радиус сечения, то

$$R^2 = h^2 + r^2 \text{ и } r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

При $h = 0$ сечение проходит через центр шара, $r = R$; при $h = R$ и $r = 0$ — случай касания — плоскость с шаром имеет одну общую точку, и сечение вырождается в точку.

Сечения шара



2. Сфера

Основные понятия. Поверхность, образованная вращением полуокружности вокруг ее диаметра, называется ***сферой*** (рис. 14.7).

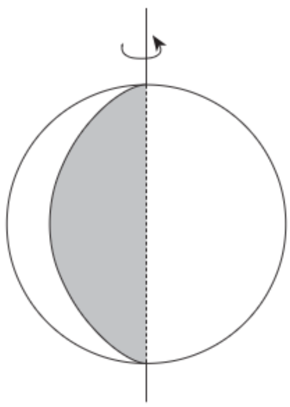


Рис. 14.7

Сфера — это геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки (центра) и образующих поверхность, называемую ***сферой*** или ***шаровой поверхностью***.

. *Сечение сферы плоскостью есть окружность.*

Следствия.

I. Если секущая плоскость не проходит через центр сферы, то радиус окружности сечения меньше радиуса сферы.

II. Сечение имеет наибольший радиус, если плоскость сечения проходит через центр сферы. Это сечение называется *большим кругом сферы*.

III. Плоскость большого круга есть плоскость симметрии сферы.

IV. Радиусы сечений, плоскости которых равноудалены от центра сферы, равны.

Видеоурок «Сфера и шар»: https://infourok.ru/videouroki/1463

Задача.

Дано: $A, B \in$ сфере, R — радиус, $AB = m$

Найти: расстояние от центра сферы до AB

Решение:

1) Д.п. проведём плоскость ABO

Сечение — окружность радиуса r

2) $\triangle AOB$ — равнобедренный ($AO = OB$, радиусы)

Д.п. OM — высота, медиана

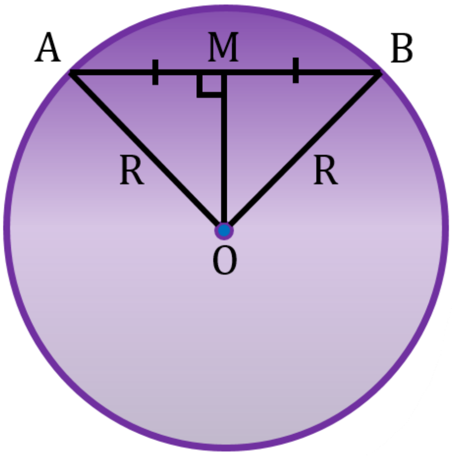
OM — расстояние от точки O до прямой AB

3) $AB = m$, OM — медиана $\Rightarrow MA = MB = \frac{m}{2}$

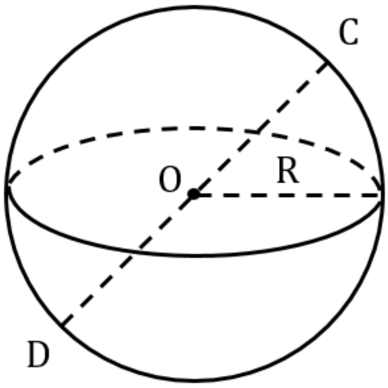
4) $\triangle AOM$ — прямоугольный, по теореме Пифагора:

$$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4R^2 - m^2}{4}}$$

Ответ: $OM = \sqrt{\frac{4R^2 - m^2}{4}}$



Видеоурок «Сфера. Уравнение сферы»: https://infourok.ru/videouroki/1464



O – центр сферы,
OC – радиус сферы R,
DC – диаметр сферы D,
D = 2R.

1. Сфера радиуса R и с центром $C(x_0; y_0; z_0)$.

2. $M(x;y;z)$ и $C(x_0; y_0; z_0)$:

$MC = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

3. $M \in$ сфере $\Longrightarrow MC = R$

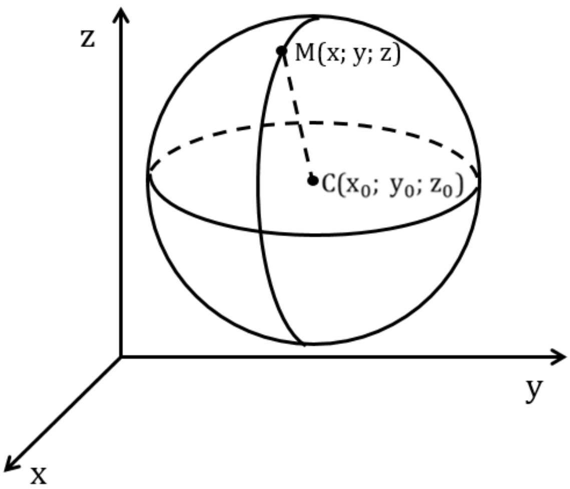
$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$

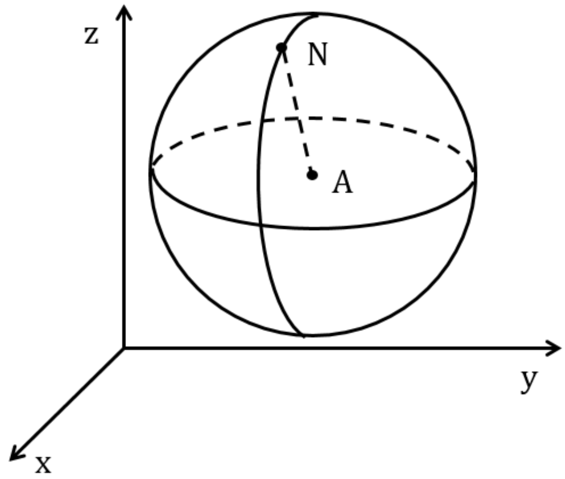
4. $M \notin$ сфере $\Longrightarrow MC \neq R$

5. В прямоугольной системе координат O_{xyz} уравнение сферы с центром $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}$$



Задача 1.



Дано:

A — центр сферы, $N \in$ сфере

$A(-2; 2; 0)$, $N(5; 0; -1)$

Найти: уравнение сферы

Решение:

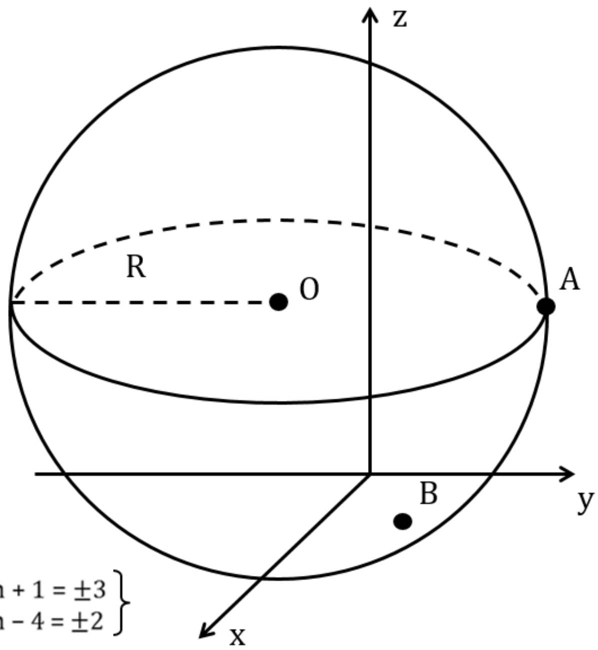
1. $(x - x_0)^2+(y - y_0)^2+(z - z_0)^2 = R^2$
2. $A(-2;2;0) \Rightarrow (x + 2)^2+(y - 2)^2+(z - 0)^2 = R^2 \Rightarrow$

   $\Rightarrow (x + 2)^2+(y - 2)^2 + z^2 = R^2$
3. $N \in$ сфере; $N(5;0;-1) \Rightarrow$

   $\Rightarrow R^2 = (5 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (-1)^2 = 49 + 4 + 1 = 54$

Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54$

Задача 2.



Дано:

$x^2 + y^2+ z^2 + 2y - 4z = 4$

Найти:

1. $O(x_0; y_0; z_0)$, R.
2. m, при котором точки $A(0; m;2)$ и $B(1;1; m - 2)$ принадлежат сфере.

Решение:

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 4$

   $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 4$

   $x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 4z + 4 - 4 = 4$

   $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 5 = 4$

   $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

   $O(0; -1; 2)$ – центр сферы

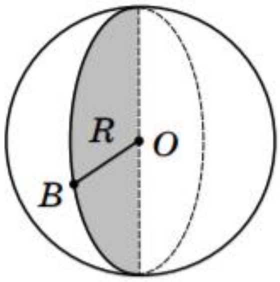
   $R = \sqrt{9} = 3$
2. $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

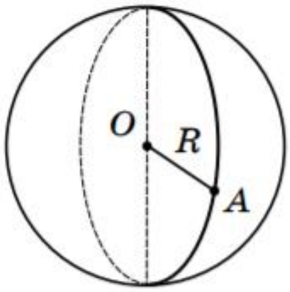
   $\left.\begin{matrix} 0^2 + (m + 1)^2 + (2 - 2)^2 = 9 \\ 1^2 + (1 + 1)^2 + (m - 2 - 2)^2 = 9 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} (m + 1)^2 = 9 \\ (m - 4)^2 = 4 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} m + 1 = \pm 3 \\ m - 4 = \pm 2 \end{matrix}\right\}$

   $m = -4$; $m = 2$; $m = 6$; $m = 2$

Ответ: 1) $O(0; -1; 2)$, $R = 3$; 2) при $m = 2$ точки $A(0; m;2)$ и $B(1;1; m - 2)$ принадлежат сфере.

Подведем итог, основное отличие заключается в том, что сфера – это поверхность (все точки равноудалены от центра), а шар – тело, все точки которого не превосходят данного расстояния от центра (т.е. входят и внутренние точки тоже, тогда можно сказать, что сфера – граница шара).

<table>
<tr><th>Шар</th><th>Сфера</th></tr>
<tr><td>


Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O).
O — центр шара;
OB — радиус шара; $OB = R$.
Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.
Объём шара:
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$$
</td><td>


Сфера — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).
O — центр сферы;
OA — радиус сферы;
$AO = R$.
При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу.
Площадь поверхности сферы:
$$S_{сф} = 4\pi R^2$$
</td></tr>
</table>

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/