Лекция. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

На прошлом занятии были рассмотрены примеры нахождения площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла. Остановимся на физических приложениях определенного интеграла

1. Вычисление пути, пройденного точкой. Путь S, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$, $v \geq 0$, за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (9.17)$$

Обратите свое внимание на то, что в формуле подынтегральная функция всегда пишется через латинскую букву f. В данном случае рассматривается формула скорости. Необходимо найти путь, т.е. первообразную и вычислить значение определенного интеграла, где пределами интегрирования будут значения промежутка времени от t_1 до t_2

Рассмотрим следующую задачу

Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение

По формуле (9.17) имеем

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 \text{ (м)}.$$

---

f(t) = v(t), $t_1 = 0$, $t_2 = 10$

Зная уравнение скорости, мы находим расстояние, пройденное за определенный промежуток времени, используя определенный интеграл.

Скорость движения точки $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.

Решение

Здесь пределами интегрирования являются $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = (3t^3 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83 \text{ (м)}.$$

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = 39,2 - 9,8t$ (м/с). Найти наибольшую высоту H_{max} подъема тела.

Решение

Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t_0, когда $v = 0$, т. е. $39,2 - 9,8t_0 = 0$, следовательно, $t_0 = 4$ (с). Находим:

$$H_{max} = \int_0^4 (39,2 - 9,8t)dt = (39,2t - 4,9t^2)\Big|_0^4 = 78,4 \text{ (м)}.$$

---

2. Вычисление работы. Работу A, произведенную переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находим по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.18}$$

При решении задач на вычисление работы силы, связанных с растяжением-сжатием пружин, основываются на соотношении

$$F = kx, \tag{9.19}$$

где F — сила; x — абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F; k — коэффициент пропорциональности.

Задача 1

Укорочение x винтовой пружины при сжатии пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу A силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение

По формуле (9.19) $F = k \cdot 0,01$, следовательно, $k = 1000$ Н/м, поэтому в данной задаче $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Работу найдем по формуле (9.18), полагая $a = 0$, $b = 0,04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x\,dx = 500\,x^2\Big|_0^{0,04} = 0,8 \text{ (Дж)}.$$

Задача 2

Для растяжения пружины на $l_1 = 0,04$ м необходимо совершить работу $A_x = 20$ Дж. На какую длину l_2 можно растянуть пружину, совершив работу, равную 80 Дж?

Решение

По формуле (9.18) работа $A_1 = \int_0^{l_1} kl\,dl$, т. е.

$$20 = \int_0^{0,04} kl\,dl = k\frac{l^2}{2}\Big|_0^{0,04} = 0,0008k,$$

откуда $k = 20/0,0008 = 25\,000$ (Н/м).

Тогда

$$80 = \int_0^{l_2} 25\,000 l dl = 25\,000 \frac{l^2}{2}\Bigg|_0^{l_2} = 12\,500 l_2^2,$$

откуда $l_2^2 = 80/12\,500 = 16/2500$; $l_2 = 0{,}08$ м.

Задача 3

Цилиндрическая цистерна с радиусом основания $r = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м заполнена водой. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Определить работу A, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

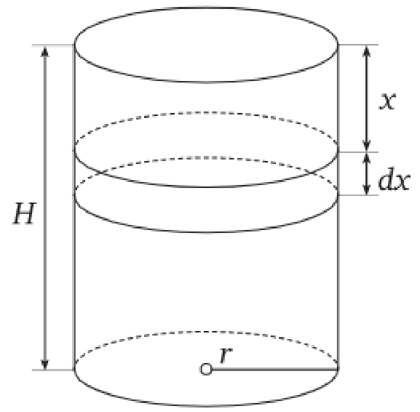


Рис. 9.6

Решение

Вес воды, заполняющей цистерну, равен $P = mg$, где $m = \rho V$ — масса воды; V — объем цистерны; g — ускорение свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2). Таким образом,

$$P = \rho V g.$$

Чтобы поднять слой воды dx на высоту x, необходимо совершить работу

$$dA = dPx,$$

Для того чтобы получить выражение для работы A, следует взять определенный интеграл в пределах от 0 до H:

$$A = \int_0^H \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \int_0^H x dx = \rho g \pi r^2 \frac{H^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3.14 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{4}{2} \approx 15\,400\ (\text{Дж}).$$

Применение интеграла в геометрии

Как применяется математический анализ для вычисления площади фигуры, например, треугольника, параллелограмм, трапеции? Используя определенный интеграл можно вывести формулы общеизвестных площадей данных фигур.

Площадь трапеции:

$$S=\int_0^h\left(\frac{a-b}{h}x+b\right)dx=\left(\frac{a-b}{h}\cdot\frac{x^2}{2}+bx\right)\Big|_0^h=\frac{a-b}{h}\cdot\frac{h^2}{2}+bh=\left(\frac{a-b}{2}+b\right)h=\frac{a+b}{2}h.$$

a – основание, b – основание, h – высота.

Найдем площадь параллелограмма с основанием a и высотой h:

$$S=\int_0^h a\,dx=ax\Big|_0^h=ah.$$

Найдем площадь треугольника с основанием a и высотой h:

$$S=\int_0^h\frac{a}{h}x\,dx=\frac{a}{h}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^h=\frac{a}{h}\cdot\frac{h^2}{2}=\frac{1}{2}ah.$$

Итак, мы получили формулы для вычисления площадей трапеции, параллелограмма и треугольника.●

Рассмотрим интегральные формулы объема.

1. Интегральная формула объема. Будем исходить из соотношения, связывающего объем и площадь. Рассмотрим тело F, выберем в пространстве некоторую ось x и будем рассекать тело F плоскостями, перпендикулярными оси x.

Проекция тела F на ось x представляет некоторый отрезок, концы которого обозначим через a и b. Плоскость сечения будем задавать точкой x на оси: $a \leqslant x \leqslant b$. Площадь сечения, проведенного через точку x, обозначим через $S(x)$. Таким образом, мы построили функцию — площадь переменного сечения: $x \to S(x)$, эта функция определена при $x \in [a, b]$.

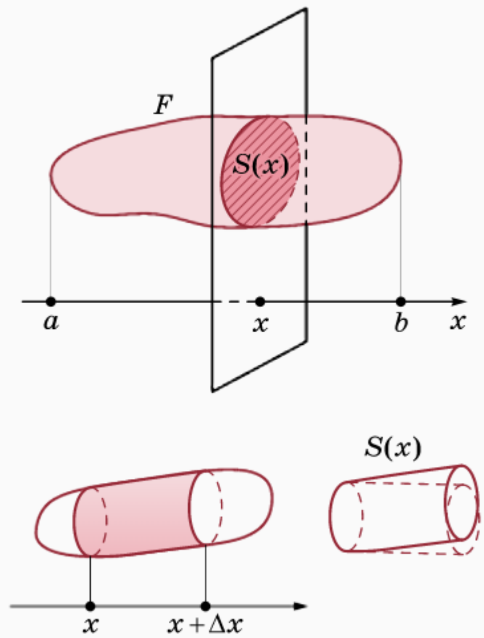
Возьмем любые две точки x_1 и x_2 на оси x и рассмотрим часть тела F, заключенную между сечениями, проходящими через x_1 и x_2. Объем такого тела зависит от выбранного отрезка и является интегральной величиной: он положителен и аддитивен по соответствующим аксиомам объема. Чтобы представить объем как интеграл, необходимо найти его плотность.

Для этого рассмотрим часть тела, заключенную между достаточно близкими сечениями — x и $x + dx$. Получаем главную линейную часть изменения объема, если будем считать, что на отрезке $[x, x + dx]$ площадь сечения не меняется и остается равной $S(x)$. Геометрически это означает, что на малом отрезке $[x, x + dx]$ объем части тела заменен близким к нему объемом прямого цилиндра с основаниями $S(x)$. Отсюда получаем формулу для дифференциала объема: $dV = S(x)\,dx$.

Итак, объем тела представлен как интегральная величина, зависящая от отрезка на оси x, причем плотность этой величины равна $S(x)$ — площади переменного сечения. Используя схему применения интеграла, получаем: $V = \int_a^b S(x)dx$, т. е. объем есть интеграл от площади переменного сечения.

Заметим, что при вычислении объема тела с помощью интегральной формулы направление, в котором проводятся плоские сечения, можно выбирать произвольно. Его обычно выбирают так, чтобы формула для площади переменного сечения была возможно более простой (далее это будет показано при вычислении объемов пирамиды, конуса и шара).

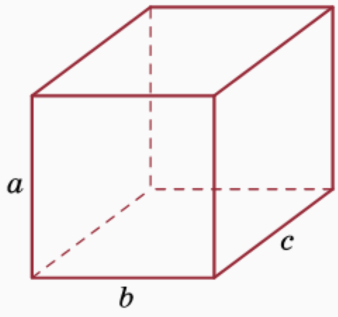
Интегральная формула объема



$$\Delta V \approx S(x)\Delta x$$

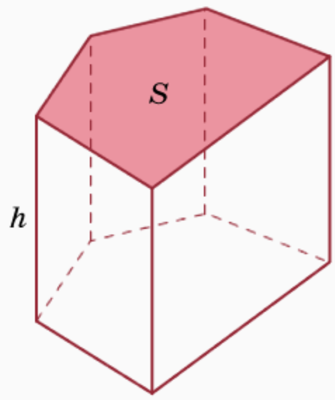
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Объем куба



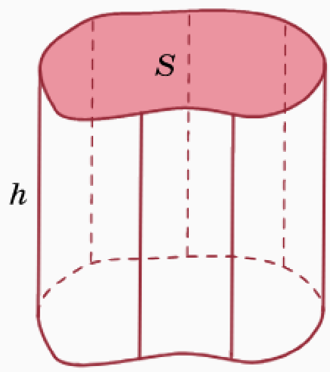
$V = abc$

Объем прямой призмы



$V = Sh$

Объем прямого цилиндра



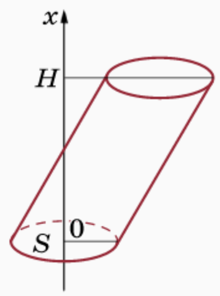
$V = Sh$

2. Вывод известных формул.

1) **Объем наклонного цилиндра**. Сечения наклонного цилиндра плоскостями, параллельными основаниям, имеют постоянную площадь S. Поэтому ось x надо выбрать перпендикулярно плоскостям оснований. Выберем начало 0 на оси x в точке пересечения оси с плоскостью нижнего основания цилиндра, а направление оси укажем снизу вверх. Тогда плоскость верхнего основания пересекает ось x в точке H.

Итак, $S(x) = S$ и $V = \int_0^H Sdx = S\int_0^H dx = SH$, т. е. формулы объема прямого и наклонного цилиндров совпадают.

Объем наклонного цилиндра



$$V = SH,$$

где S — площадь основания; H — высота цилиндра.

2) **Объем пирамиды**. Ось x проведем перпендикулярно плоскости основания, тогда в сечениях пирамиды плоскостями, параллельными основанию (а значит, перпендикулярными оси x), будут многоугольники, подобные основанию. Выберем начало на оси x в точке пересечения оси с сечением, проходящим через вершину пирамиды, и направим ось сверху вниз. Тогда плоскость основания пересекает ось в точке $x = H$.

Вычислим площадь переменного сечения $S(x)$. Как уже было сказано, в сечении получается многоугольник, подобный основанию. Коэффициент подобия равен отношению расстояний секущих плоскостей от вершины, т. е. $\frac{x}{H}$. Обозначим площадь основания через S. Тогда по теореме об отношении площадей подобных многоугольников имеем:

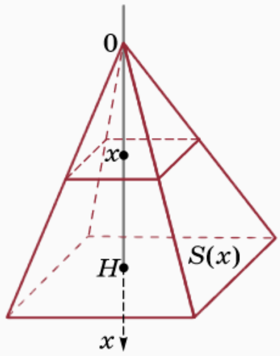
$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \text{ т. е. } S(x) = \frac{S}{H^2}x^2.$$

Площадь переменного сечения представлена квадратичной функцией от x. Интеграл от нее вычисляется просто:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{S}{H^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^H = \frac{1}{3}SH,$$

т. е. объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Объем пирамиды



$$V = \frac{1}{3}SH,$$

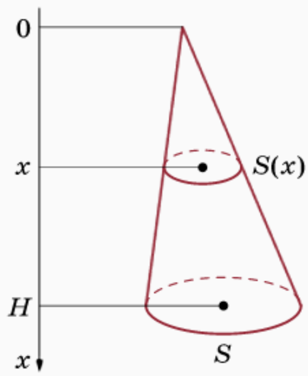
где S — площадь основания; H — высота пирамиды

3) **Объем конуса.** Рассуждения и формулы аналогичны приведенным для пирамиды:

$$S(x) = \frac{S}{H^2}x^2, V = \frac{1}{3}SH,$$

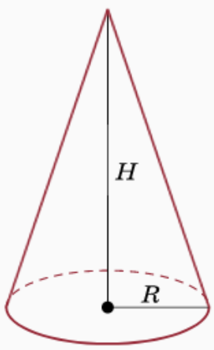
т. е. объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. В частности, объем кругового конуса с радиусом основания R и высотой H равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Объем конуса



$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания; H — высота конуса.



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

4) **Объем шара.** В сечении шара любой плоскостью получается круг. Поэтому ось можно выбрать произвольно, а начало удобно взять в точке пересечения плоскости, проходящей через центр шара. Вычислим площадь круга, получающегося в сечении плоскостью, проходящей через точку x. По теореме Пифагора получаем: $r^2 + x^2 = R^2$, откуда

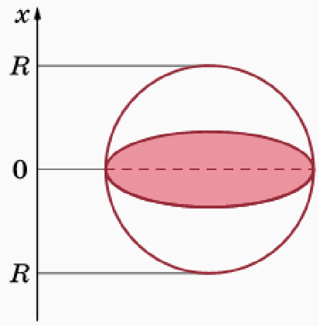
$$S(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

В силу симметрии шара можно найти объем его верхней половины, который получится интегрированием переменной площади от 0 до R. Весь объем V получим удвоением:

$$V = 2\int_0^R S(x)dx = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = 2\pi\left(R^2\int_0^R dx - \int_0^R x^2dx\right) = 2\pi\left(R^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R\right) = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

т. е. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объем шара



$$V = \frac{4}{3}R^3,$$

где R — радиус шара.

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/