Лекция. Понятие о пределе последовательности.

Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма

На прошлом занятии мы начали изучать числовые последовательности. Познакомились со способами задания и свойствами числовых последовательностей. В учебниках числовую последовательность, иногда, рассматривают как функцию числового аргумента. Иначе говоря, каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n. Числовые последовательности могут обладать свойствами обычных функций.

<u>Возрастающие и убывающие последовательности</u>

Определение 1. Числовую последовательность x_1 , x_2 , … x_n , … называют ***возрастающей последовательностью,*** если каждый член этой последовательности **больше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $x_{n+1} > x_n$, например, последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ является **возрастающей последовательностью**.

Определение 2. Числовую последовательность x_1 , x_2 , … x_n , …, называют ***убывающей последовательностью,*** если каждый член этой последовательности **меньше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $x_{n+1} < x_n$, например, последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ заданная формулой $x_n = \frac{1}{2^n}$, является **убывающей последовательностью**.

Числовая последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ заданная формулой $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ не является **ни возрастающей, ни убывающей** последовательностью.

Определение 3. Возрастающие и убывающие числовые последовательности называют ***монотонными последовательностями***.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 4. Числовую последовательность x_1, x_2, … x_n, … , называют ***ограниченной сверху,*** если существует такое число M, что каждый член этой последовательности **меньше** числа M.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $x_n < M$

Определение 5. Числовую последовательность x_1, x_2, … x_n, … называют ***ограниченной снизу,*** если существует такое число m, что каждый член этой последовательности **больше** числа m.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $x_n > m$, Например, числовая последовательность 1, 4, 9, … n^2, … заданная формулой $x_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, **ограничена снизу**, например, числом 0. Однако эта последовательность **неограничена сверху**.

Определение 6. Числовую последовательность x_1, x_2, … x_n, …, называют ***ограниченной,*** если она **ограничена и сверху, и снизу.**

Другими словами, существуют такие числа M и m, что для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $m < x_n < M$

Например, последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ заданная формулой $x_n = \frac{1}{2^n}$, является **ограниченной последовательностью**, поскольку для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполнено неравенство $0 < \frac{1}{2^n} < 1$

Определение 7. Числовые последовательности, которые **не являются ограниченными**, называют ***неограниченными последовательностями***.

Последовательности удобно изображать графически. Существует два способа отображения последовательностей: на числовой прямой и на координатной плоскости.

На рис. 1.5 и 1.6 приведены примеры изображения последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ соответственно на числовой прямой и на координатной плоскости. На числовой прямой (см. рис. 1.5) значения соответствующих членов последовательности изображаются точками и помечаются символами a_n, чтобы можно было установить их номера. На плоскости в декартовой системе координат изображается график функции $f(n)$, где на горизонтальной оси откладывается значение аргумента, а на вертикальной — значение функции (члена последовательности). Заметим, что функция в этом случае задается только для натуральных значений аргумента (см. рис. 1.6).

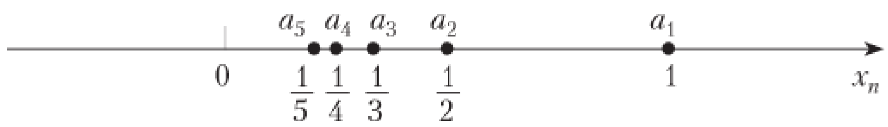

Рис. 1.5. **Изображение последовательности на числовой прямой**

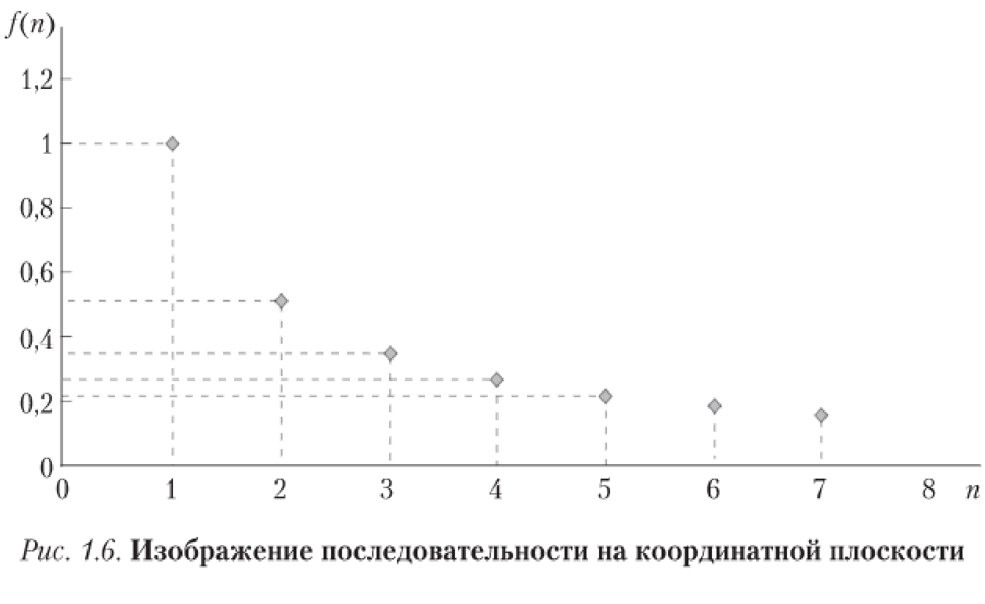

Рис. 1.6. **Изображение последовательности на координатной плоскости**

Понятно, что все члены последовательности мы изобразить не можем, поскольку их бесконечное множество. Однако тенденцию их расположения при неограниченном увеличении n обычно проследить удается.

Графическое изображение последовательности может облегчить процедуру подбора формулы для последовательности чисел по нескольким первым членам. Для этого следует изобразить на плоскости соответствующие точки и «увидеть» класс функций, которыми может описываться искомая последовательность. Затем задать функцию с неопределенными коэффициентами и по заданным первым членам установить эти коэффициенты.

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = -\frac{1}{n}$. Изобразим ее члены на числовой оси и на координатной плоскости (рис. 1.9).

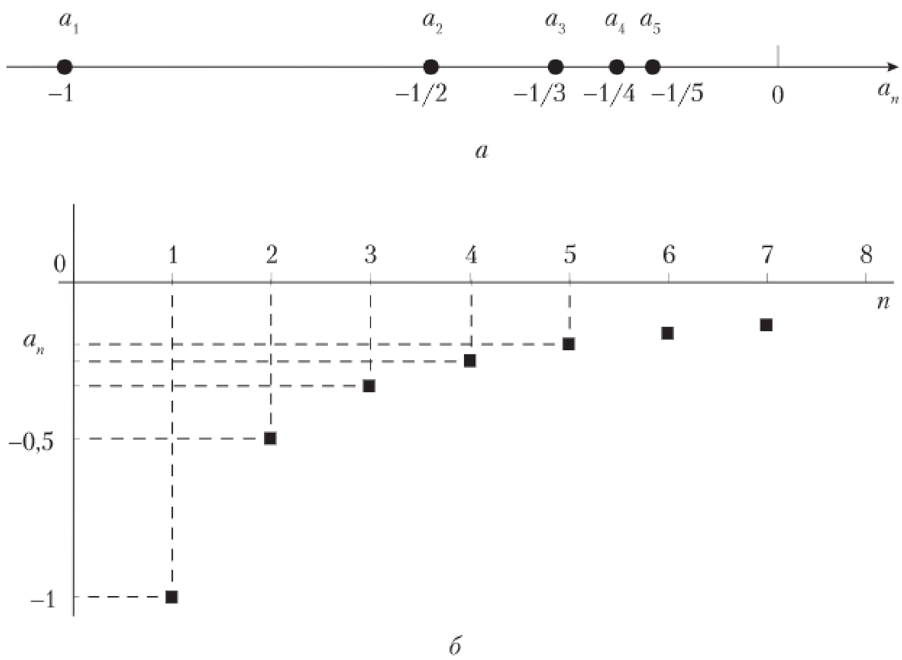

Рис. 1.9. **Последовательность с общим членом $a_n = -\frac{1}{n}$:**
а — на числовой оси; *б* — на координатной плоскости

Как мы видим, точки, изображающие члены последовательности, с ростом номера n накапливаются около точки 0 (значения a_n стремятся к нулю при неограниченном возрастании n). Этот факт обозначается так: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (читается: «предел последовательности $\{a_n\}$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Символ lim введен в употребление Исааком Ньютоном и происходит от латинского слова *limes*, что означает предел. Внизу под словом «предел» пишется переменная, которая (когда мы имеем дело с последовательностями) устремляется к бесконечности. Справа от слова «предел» указывается переменная величина, зависящая от номера члена последовательности, предел которой собственно и вычисляется.

Определение 8. Число a называют ***пределом числовой последовательности*** $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $| a_n - a | < \varepsilon$.

Условие того, что число a является пределом числовой последовательности a_1, a_2, … a_n, … , **записывают** с помощью обозначения $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (**читается как**: «Предел a_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a».) То же самое соотношение можно **записать** следующим образом: $a_n \to a$ при $n \to \infty$.
(читается как: «a_n стремится к a при n, стремящемся к бесконечности»).

Замечание. Если для последовательности a_1, a_2, … a_n, … найдется такое число a, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то эта последовательность ограничена.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма

Знаменитая задача древности состоит в том, догонит ли когда-нибудь Ахиллес идущую впереди черепаху. Несмотря на то, что Ахиллес идет в 10 раз быстрее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет вперед его ровно на одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту одну десятую, черепаха пройдет одну сотую, и так дол бесконечности.

Давайте разберем эту задачу:

Ахиллес пробегает отрезки, равные 1, $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10^2}$; ... от начального расстояния. Сложив бесконечно убывающую прогрессию

$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = \frac{1}{1-0,1} = \frac{10}{9}$, мы видим какой путь пробегает Ахиллес до встречи с черепахой.

Однако в этом решении не все так просто. Это решение основано на некотором бесконечном процессе. Для того, чтобы обосновать рассуждения, связанные с бесконечными процессами, была создана теория пределов. Такие математические понятия, как сумма бесконечного ряда, производная, интеграл, непрерывность могут быть определены с помощью понятия предела, что позволяет строго доказать и применять свойства этих понятий.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ с определенным первым элементом a_1 и рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

где q – постоянное число (q ≠ 1), называется геометрической прогрессией.

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии. Рекуррентное соотношение, определяющее геометрическую прогрессию, словами формулируется так: *Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число* q.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ Вычислим суммы двух, трёх, четырёх и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$

Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться.

Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют суммой геометрической прогрессии <u>(обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии).</u>

Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Таким образом, одним из наиболее простых предельных переходов является вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Он основан на рассмотрении частичных сумм

$$S_n = a_1\,(1 + q + \cdots + q^{n+1}) = a_1\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Главным является утверждение о том, что «предел последовательности q^n при $|q| < 1$, равен нулю».

Определение. Геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей, если ее знаменатель q по модулю меньше 1: $|q| < 1$

Такое название возникло потому, что при $|q| < 1$ общий член прогрессии $a_n = a_1\,q^{n-1}$ становится сколь угодно малым, «бесконечно убывает»

Если знаменатель q **геометрической прогрессии** a_n **удовлетворяет неравенству** |q|<1, **то сумма прогрессии** S **существует и вычисляется по формуле**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Понятие о непрерывности функции.

1. Приращение аргумента и функции. Для функции $y = f(x)$ разность двух значений аргумента x_1 и x_2, лежащих в области определения функции, называется ***приращением аргумента*** и обозначается символом Δx, т. е. $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (из множества значений функции, которые она может принимать), соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2, называется ***приращением функции*** и обозначается символом Δy, т. е. $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$.

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$; если же $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$. Соответственно, и приращение функции $\Delta y > 0$, если $y_2 > y_1$, и $\Delta y < 0$, если $y_2 < y_1$.

Пусть аргумент x получил приращение Δx, тогда новое значение аргумента есть $x + \Delta x$, а соответствующее ему значение функции есть $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Чтобы найти приращение функции, нужно из нового значения функции вычесть первоначальное:

$$\begin{array}{r} -\;\; y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \end{array}$$

Пример 4.4

Найти приращение функции $y = x^2 + x + 1$, если аргумент x изменил свое значение от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$.

Решение

Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}5$. Вычислим значения функции $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2)$:

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7;$$

$$y_2 = f(x_2) = f(2{,}5) = 2{,}5^2 + 2{,}5 + 1 = 9{,}75.$$

Тогда $\Delta y = y_2 - y_1 = 9{,}75 - 7 = 2{,}755$.

---

2. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Можно дать другое определение непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют ***точкой разрыва функции***.

Степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации называют ***элементарными функциями***. Для элементарных функций справедливы следующие утверждения.

I. Область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т. е. элементарная функция непрерывна во всей области определения.

II. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках.

III. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется ***непрерывной в промежутке*** (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Пример 4.5

Исследовать на непрерывность функцию $y = 3x$.

Решение

Функция $y = 3x$ определена для всех действительных значений аргумента x, т. е. $x \in \mathbb{R}$. Область непрерывности функции совпадает с ее областью определения.

Найдем приращение функции Δy, если аргумент x получает приращение Δx:

$$\begin{array}{r} -\; y + \Delta y = 3(x + \Delta x) = 3x + 3\Delta x \\ y = 3x \\ \hline \Delta y = 3\Delta x. \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (3\Delta x) = 3 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ справедливо при любом конечном значении x, поэтому функция $y = 3x$ непрерывна при любом значении x.

Пример 4.6

Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2$ при $x = 3$.

Решение

Предел функции:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2) = (\lim_{x \to 3} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7.$$

Значение функции $f(3) = 3^2 - 2 = 7$, т. е. предел функции при $x \to 3$ равен значению функции при $x = 3$. Следовательно, функция $y = x^2 - 2$ в точке $x = 3$ непрерывна.

Однако не все функции и не при любых значениях аргумента непрерывны. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 0$ имеет разрыв; функция $y = \dfrac{2x}{x-5}$ имеет разрыв при $x = 5$; функция $y = \dfrac{3}{x^2-4}$ имеет разрывы при $x = -2$ и $x = 2$; функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы при $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/