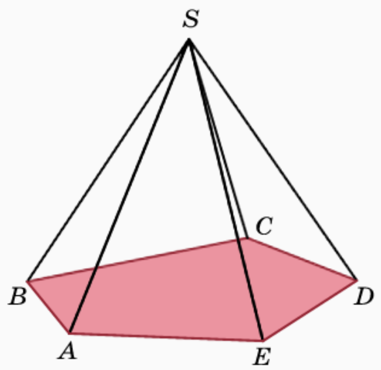
Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

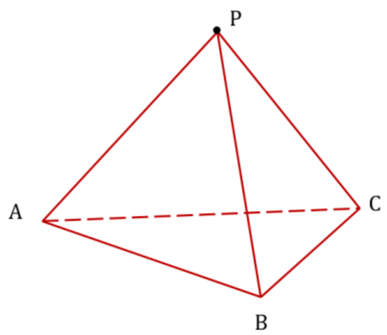
Определение.

Пирамида — это многогранник, одна из граней которого (основание) произвольный многоугольник *ABCDE*, а остальные грани — треугольники с общей вершиной *S*.

При этом, разумеется, предполагается, что вершина пирамиды и ее основание не лежат в одной плоскости. Вершина пирамиды соединена ребрами с вершинами основания. Боковые грани пирамиды — треугольники.



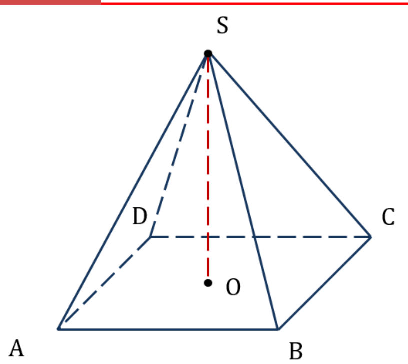
Треугольная пирамида — это тетраэдр

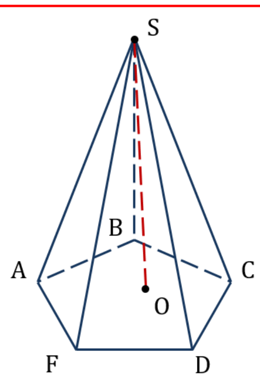


Основные элементы

Определение

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из её вершины к основанию



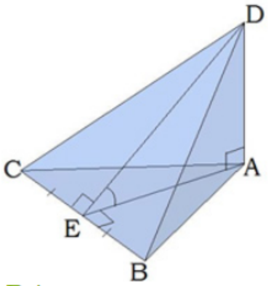


— Сумма площадей **боковых граней** пирамиды называется **площадью её боковой поверхности**
— Сумма площадей **всех граней** (и основания и боковых граней), называется **площадью полной поверхности** пирамиды

$$S_{полн.} = S_{осн.} + S_{бок.}$$

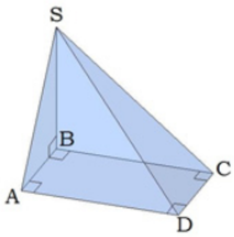
Если у пирамиды одно ребро перпендикулярно плоскости основания, то вершина пирамиды проецируется на одну из вершин основания.

На рисунке дана треугольная пирамида с ребром DA, перпендикулярным основанию.



DA — перпендикулярное основанию ребро, DA также является высотой,
ΔDAC и ΔDAB — прямоугольные, угол DEA — двугранный угол при основании.

На следующем рисунке дана пирамида, основание которой — прямоугольник.



Ребро SB перпендикулярно основанию, SB также является высотой,
ΔSBA и ΔSBC — прямоугольные;
если основание — прямоугольник, то ΔSAD и SCD — прямоугольные.

Если боковые грани пирамиды с её основанием образуют равные двугранные углы, то все высоты боковых граней пирамиды равны (у правильной пирамиды это апофемы), и вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в многоугольник основания.

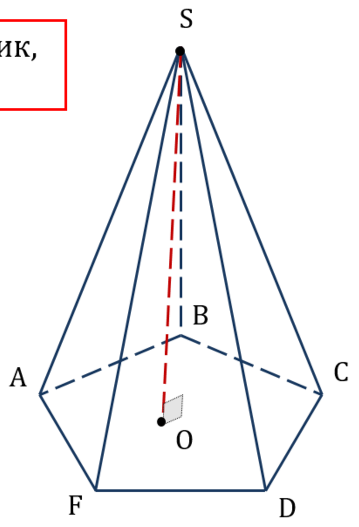
Формула нахождения объёма применяется для всех видов пирамид: $V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot H$.

2.Правильная пирамида

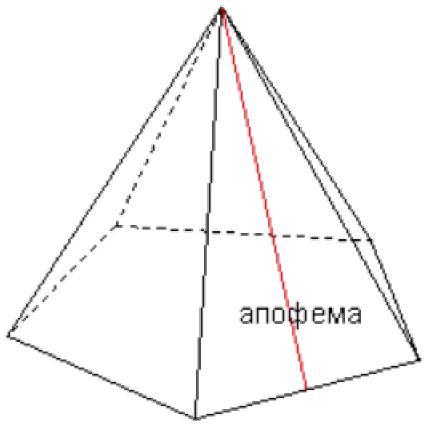
Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и вершина проецируется в центр основания, называется *правильной*.

Если ABCDE — правильный пятиугольник, то SABCDE — правильная пирамида

SO — высота
SO ⊥ (ABCDE)



Высота боковой грани правильной пирамиды называется **апофемой**.



Внимание! В задачах не путайте высоту пирамиды H и апофему - высоту боковой грани правильной пирамиды h.

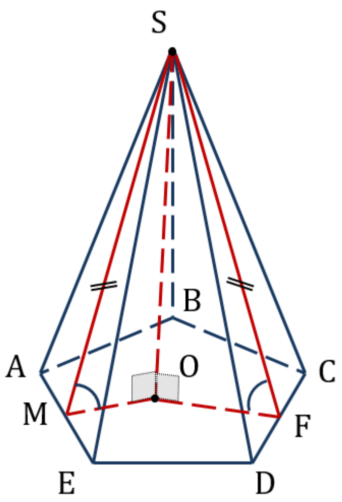
Основные свойства правильной пирамиды

I. Боковые ребра, боковые грани и апофемы соответственно равны.
II. Двугранные углы при основании равны.
III. Двугранные углы при боковых ребрах равны.
IV. Каждая точка высоты равноудалена от всех вершин основания.
V. Каждая точка высоты равноудалена от всех боковых граней.

Все **апофемы** правильной пирамиды равны, а так же все **двугранные углы при основании** равны

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны

Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками



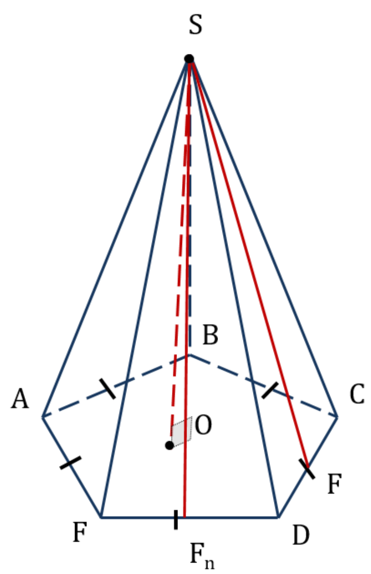
Поэтому посчитать площадь боковой поверхности правильной пирамиды не составит труда – это сумма площадей равнобедренных треугольников. Основание этих треугольников – сторона правильного многоугольника, лежащего в основании правильной пирамиды.

$AB = BC = CD = DE = EA$ — основания

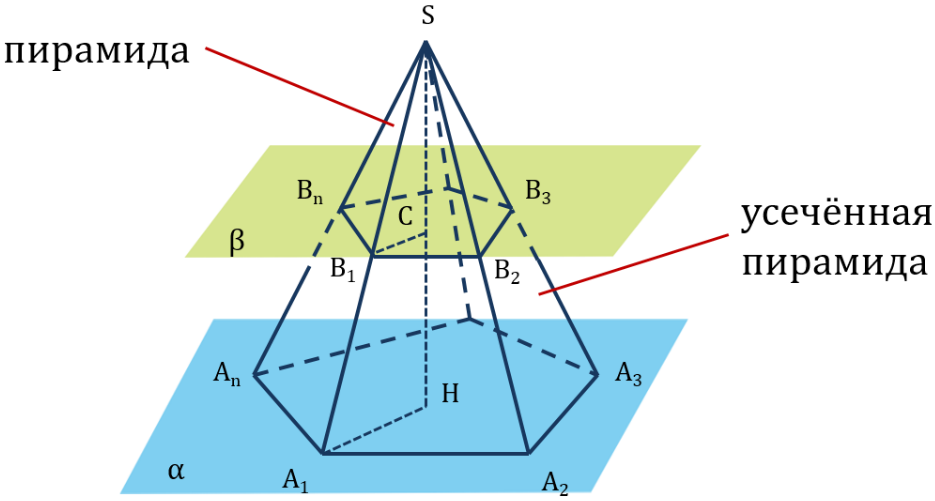
$F = F_1 = \ldots = F_n = d$ — апофемы

$S_{бок.} = \frac{1}{2} d\ (AB + BC + CD + DE + EA) = \frac{1}{2} d \cdot P$

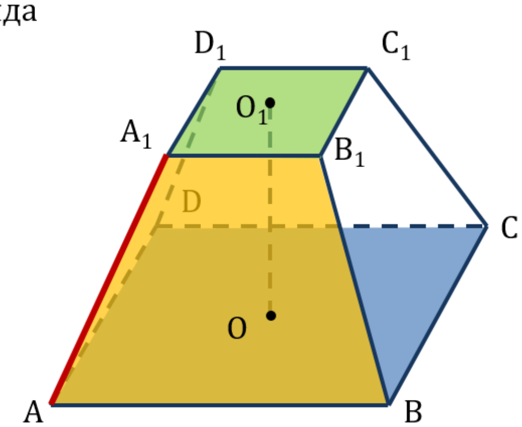
$$\boxed{S_{бок.} = \frac{1}{2} d \cdot P}$$



3. Усеченная пирамида. Часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется ***усеченной пирамидой***

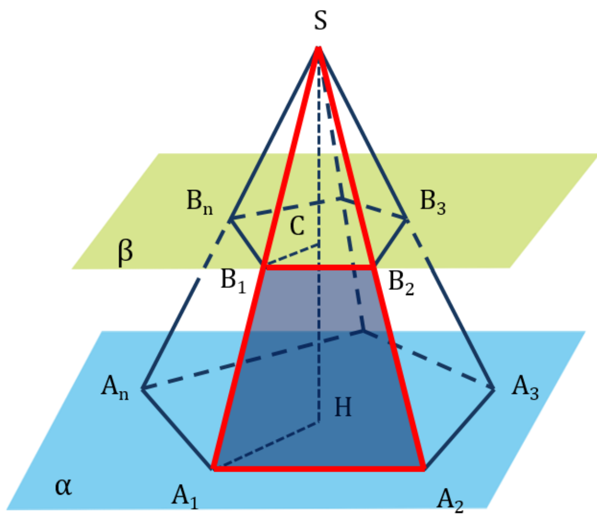


$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усечённая пирамида
$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания
AA_1B_1B — боковая грань
AA_1 — боковое ребро
OO_1 — высота



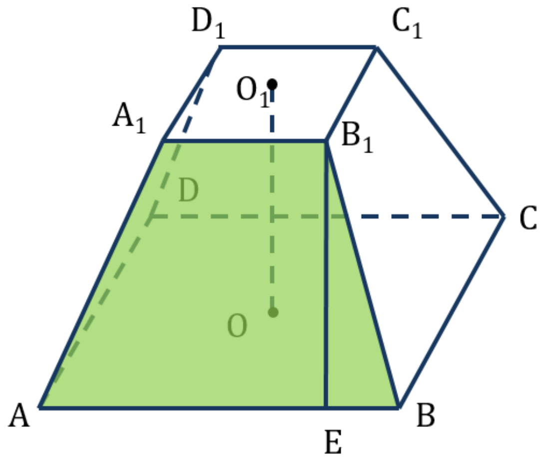
$A_1A_2 \parallel B_1B_2$
$A_1B_1 \nparallel A_2B_2$

$\boxed{A_1A_2B_2B_1 \text{ — трапеция}}$

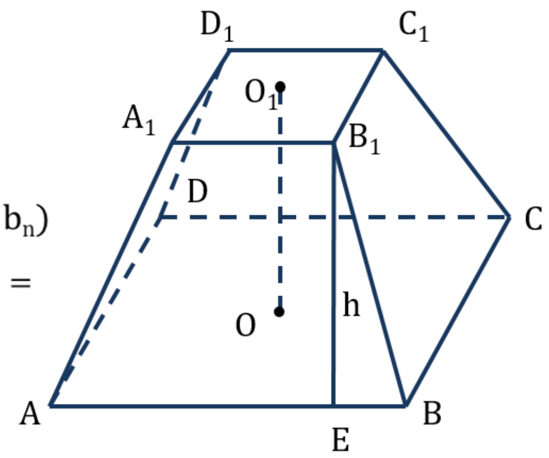


Усеченная пирамида называется **правильной,** если она составляет часть правильной пирамиды.

AA_1B_1B — равнобедренная трапеция
B_1E — апофема



AA_1B_1B — равнобедренная трапеция
B_1E — апофема
$S_{бок.} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$
h — апофема
P_a — периметр нижнего основания
P_b — периметр верхнего основания
$S_1 = \frac{1}{2}h(a_1 + b_1), S_2 = \frac{1}{2}h(a_2 + b_2), \dots S_n = \frac{1}{2}h(a_n + b_n)$
$S_{бок.} = \frac{1}{2}h(a_1 + b_1) + \frac{1}{2}h(a_2 + b_2) + \dots + \frac{1}{2}h(a_n + b_n) =$
$= \frac{1}{2}h(P_a + P_b)$



Основные свойства правильной усеченной пирамиды
I. Боковые ребра, боковые грани и апофемы соответственно равны.
II. Двугранные углы при основании равны.
III. Двугранные углы при боковых ребрах равны.
IV. Каждая точка оси равноудалена от всех вершин основания.
V. Каждая точка оси равноудалена от плоскостей боковых граней.

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/