Практическое занятие №43. Применения интеграла в физике и геометрии

На прошлом занятии были изучены примеры применения интеграла в физике и геометрии.

Рассмотрим несколько прикладных задач.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) > 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}. \qquad (1)$$

Пример 1. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 6t^2 + 4$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

○Согласно условию $f(t) = 6t^2 + 4$, $t_1 = 0$, $t_2 = 5$. По формуле (1) находим

$$s = \int_0^5 (6t^2+4)dt = (2t^3+4t)\Big|_0^5 = 250 + 20 = 270 \text{ (м)}.\bullet$$

Зная уравнение скорости, мы находим расстояние, пройденное за определенный промежуток времени, используя определенный интеграл.

Пример 2. Скорость движения точки выражается формулой $v = 2t + 8t^{-2}$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.

○Имеем

$$s = \int_1^2 (2t+8t^{-2})dt = \left(t^2 - \frac{8}{t}\right)\Big|_1^2 = (4-4)-(1-8) = 7 \text{ (м)}.\bullet$$

Пример 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 18t - 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

○Скорость точки равна нулю в момент начала движения и в момент остановки. Выясним, в какой момент точка остановится. Для этого решим уравнение $18t - 3t^2 = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 6$. Теперь по формуле (1) находим

$$s = \int_0^6 (18t-3t^2)dt = (9t^2-t^3)\Big|_0^6 = 324 - 216 = 108 \text{ (м)}.\bullet$$

Пример 4. Два тела начали двигаться по прямой одновременно из одной точки в одном направлении. Первое тело движется со скоростью $v_1 = 6t^2 + 10$ (м/с), второе — со скоростью $v = 3t^2$ (м/с). На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?

○Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 10 с:

$$s_1 = \int_0^{10} (6t^2 + 10)dt = (2t^3 + 10t)\Big|_0^{10} = 2 \cdot 10^3 + 10^2 = 2100 \text{ (м)};$$

$$s_2 = \int_0^{10} 3t^2 dt = t^3\Big|_0^{10} = 1000 \text{ (м)};$$

$$s_1 - s_2 = 2100 - 1000 = 1100 \text{ (м)}. \bullet$$

Вычисление работы силы.

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находится по формуле

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}. \qquad (1)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используют ***закон Гука***:

$$F = kx, \qquad (2)$$

где F — сила (в ньютонах); x — абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F (в метрах); k — коэффициент пропорциональности (в Н/м).

Пример 1. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,02 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

○Так как $x = 0{,}01$ м при $F = 10$ Н, то, подставив эти значения в равенство (2), получим $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, получим $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Искомую работу найдем по формуле (1), полагая $a = 0$, $b = 0{,}02$:

$$A = \int_0^{0{,}02} 1000x dx = 500x^2\Big|_0^{0{,}02} = 0{,}2 \text{ (Дж)}. \bullet$$

Пример 2. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от 0,12 м до 0,22 м?

○Согласно формуле (2) имеем $50 = 0{,}01k$, откуда $k = 5000$ Н/м. Находим пределы интегрирования: $a = 0{,}12 - 0{,}1 = 0{,}02$ (м), $b = 0{,}22 - 0{,}1 = 0{,}12$ (м). Теперь по формуле (1) получим

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000x\,dx = 5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0{,}0144 - 0{,}0004) =$$

$$= 2500 \cdot 0{,}014 = 35 \text{ (Дж)}. \bullet$$

Пример 3. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 30 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м?

○Зная величину сжатия пружины (0,05 м) и произведенную при этом работу (30 Дж), воспользуемся формулой (1):

$$30 = \int_0^{0,05} kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05} = k\frac{0{,}0025}{2} = 0{,}00125k,$$

откуда $k = \dfrac{30}{0{,}00125} = 24\,000$ (Н/м). Далее по этой же формуле находим

$$A = \int_0^{0,08} 24\,000x\,dx = 24\,000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,08} = 12\,000 \cdot 0{,}0064 = 76{,}8 \text{ (Дж)}. \bullet$$

Вычисление работы, производимой при поднятии груза

Пример 1. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 3 м заполнен водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

○Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx (рис. 17.9). Работа A, которую необходимо совершить, чтобы поднять слой воды весом P на высоту x, равна Px.

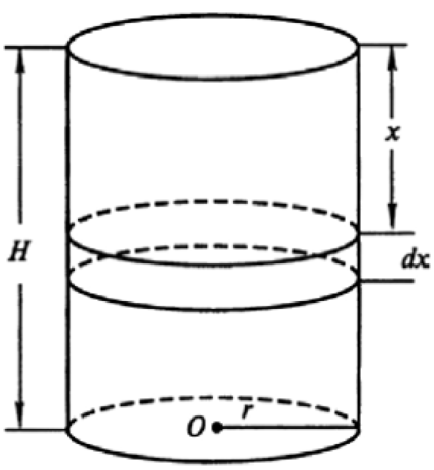

Рис. 17.9

Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV = \pi r^2 dx$ и изменение веса P на величину $dP = 9807\pi r^2 dx$ (так как плотность воды равна 1000 кг/м^3, то вес воды в объеме 1 м^3 составляет $9{,}807 \cdot 1000 = 9807$ Н, поэтому вес dP слоя воды в объеме dV равен $9807\pi r^2 dx$). При этом совершаемая работа A изменится на величину $dA = 9807\pi r^2 x dx$. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903{,}5\pi r^2 H^2 = 4903{,}5\pi \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 176\,526\pi \text{ (Дж)}. \bullet$$

Пример 3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара с радиусом $R = 1$ м.

○Выделим на глубине x горизонтальный слой высоты dx, радиус которого равен r. Объем слоя примем равным $dV = \pi r^2 dx$. Выразим r через x и R: $r^2 = R^2 - x^2$ (рис. 17.11), тогда $dV = \pi(R^2 - x^2)dx$ (элементарный слой dV примем за цилиндр).

При изменении веса P элементарного слоя на величину dP совершаемая работа A изменяется на величину $dA = 9807\pi(1 - x^2)xdx = 9807\pi(x - x^3)dx$. Интегрируя это равенство от $R = 0$ до $R = 1$, получим

$$A = \int_0^1 9807\pi(x - x^3)dx = 9807\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 9807\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 9807\pi \cdot \frac{1}{4} = 2452\pi \text{ (Дж)}. \bullet$$

Вычисление силы давления жидкости

Сила P давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т. е. от расстояния от площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (в ньютонах) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9807\rho S x,$$

где ρ — плотность жидкости (в кг/м^3); S — площадь площадки (в м^2); x — глубина погружения площадки (в метрах).

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения $P(x)$.

Пример 1. Найти силу давления воды на вертикальную прямоугольную стенку с основанием 2 м и высотой 4 м. Уровень воды совпадает с верхним обрезом стенки.

○На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx (рис. 17.13).

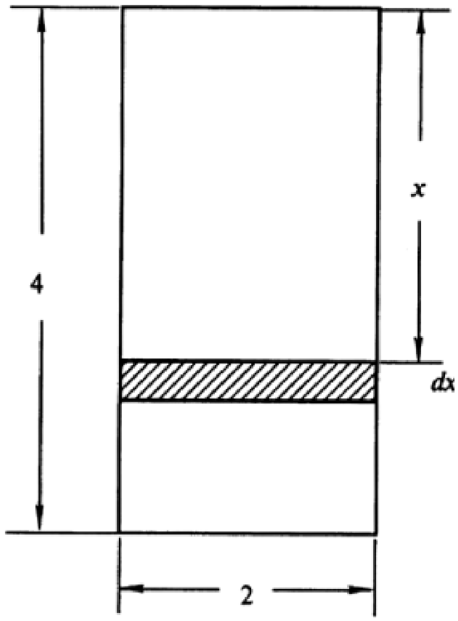

Рис. 17.13

Сила давления P на стенку есть функция от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину $dP = 9807x \cdot 2dx$. Интегрируя это равенство при изменении x от 0 до 4, находим

$$P = \int_0^4 9807 \cdot 2x dx = 9807 x^2 \Big|_0^4 = 9807 \cdot 16 = 156\,912 \text{ (Н)}. \bullet$$

Подведем итог, при решении физических задач – нахождении различных физических величин, также применяется интегральное исчисление.

В заключении изучения разделов математического анализа, Вам необходимо решить итоговую контрольную работу.

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/