

Практическое занятие №32.

Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума

Промежутки возрастания и убывания функции

1. Возрастание и убывание функций. Вы уже знакомы с понятием возрастающей и убывающей функций. Так, на рисунке 39 изображен график функции, определенной на отрезке $[-1; 10]$. Эта функция возрастает на отрезках $[-1; 3]$ и $[4; 5]$, убывает на отрезках $[3; 4]$ и $[5; 10]$. Известно, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; \infty)$. График этой функции при изменении x от $-\infty$ до ∞ сначала «опускается» до нуля (значение функции в точке 0 равно нулю), а затем «поднимается» до бесконечности (см. рис. 20).

Определение. Функция f *возрастает* на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функция f *убывает* на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

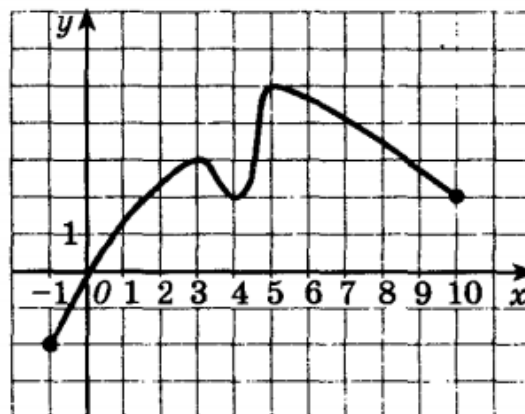


Рис. 39

Точки экстремума, экстремумы функции.

3. Экстремумы. При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности. *Окрестностью точки a* называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал $(2; 6)$ — одна из окрестностей точки 3, интервал $(-3,3; -2,7)$ — окрестность точки -3 .

Изучая график рисунка 39, можно прийти к выводу, что наиболее «заметными» точками области определения являются

такие точки x , в которых возрастание функции сменяется убыванием (точки 3 и 5) или, наоборот, убывание сменяется возрастанием (точка 4). Эти точки называют соответственно *точками максимума* ($x_{\max} = 3$ и $x_{\max} = 5$) и *минимума* ($x_{\min} = 4$).

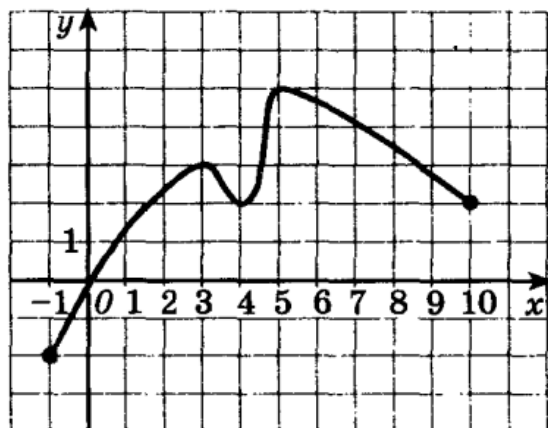
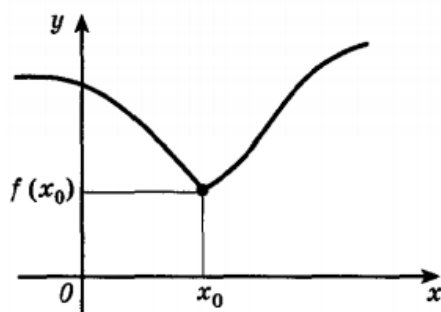
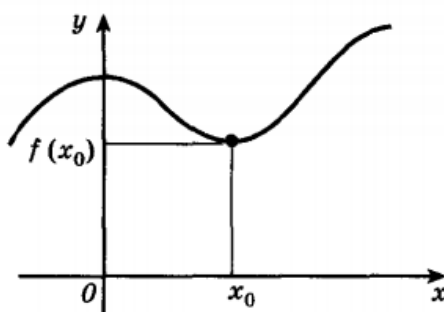


Рис. 39

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума функции f* , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ (рис. 42).

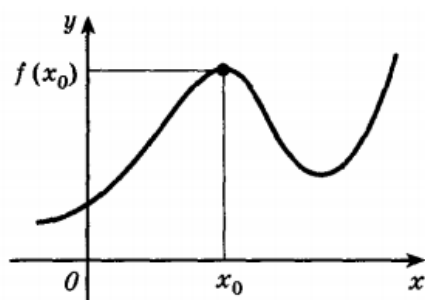


а)

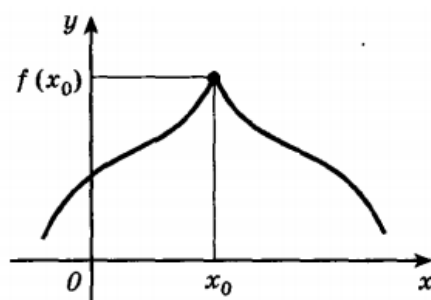


б)

Рис.42



а)



б)

Рис. 43

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума функции* f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (рис. 43).

Для точек максимума и минимума функции принято общее название — их называют *точками экстремума*. Значение функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции (общее название — *экстремум функции*). Точки максимума обозначают x_{\max} , а точки минимума x_{\min} . Значения функции в этих точках обозначаются соответственно y_{\max} и y_{\min} .

По определению значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0 , как правило, имеет вид гладкого «холма» (рис. 43, а и рис. 44 — точки x_1, x_2, x_3) или заостренного «пика» (рис. 43, б). В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой (рис. 42, б — точка x_0 , рис. 44 — точки x_4, x_5), или заостренной (рис. 42, а — точка x_0 и рис. 44 — точка x_6).

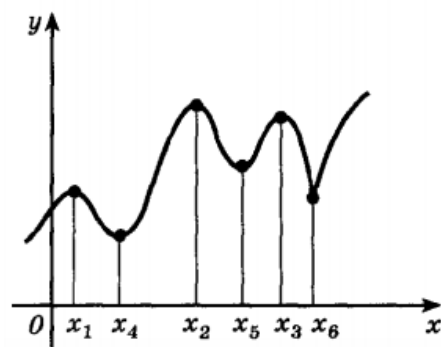


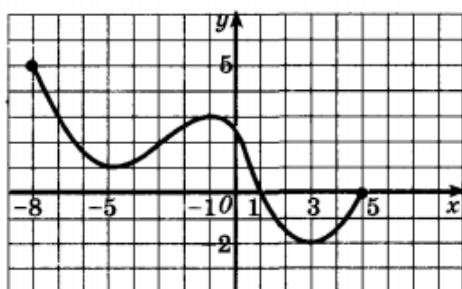
Рис. 44

Точки максимума и минимума являются граничными точками на промежутках возрастания и убывания функции. Иными словами, когда функция возрастает, график функции поднимается и достигает своего пика в точке максимума (вершина «горки»), а затем функция начинает убывать, и график опускается вниз, и достигает точки минимума («впадинка»)

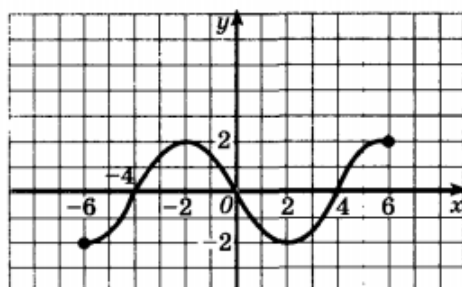
Задачи для самостоятельного решения.

Для функций, графики которых изображены на рисунке, найти:

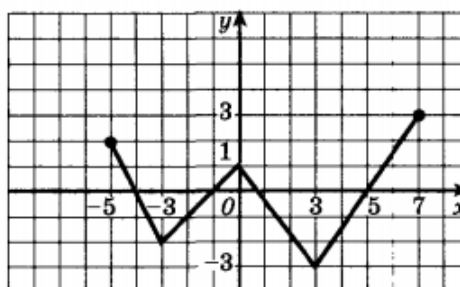
1. Промежутки возрастания и убывания функции
2. Экстремумы функции
3. Точки максимума и минимума.



а)



в)



г)

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. <https://urait.ru/>
2. <https://infourok.ru/videouroki>
3. <http://www.cleverstudents.ru/>