Лекция. График функции. Свойства функции.

1. Функции. Переменная y называется ***функцией*** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$, где f означает совокупность действий, которые надо произвести над x, чтобы получить y.

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется ***частным значением*** этой функции. Например, функция $y = f(x)$ при $x = a$ принимает значение $y = f(a)$.

Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

Например, для функции $y = x$ областью определения является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$; для функции $y = \dfrac{1}{x}$ областью определения является множество $\mathbb{R}$ кроме $x = 0$.

Например

Найти область определения функций:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

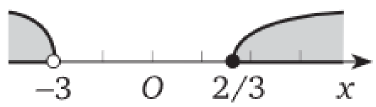
Решение

1) Областью определения данной функции является общая часть областей определения каждого из слагаемых. Для первого слагаемого $x > 0$, для второго $x > 1$. Областью определения функции служит промежуток $x > 1$.

2) Функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{3x-2}{2x+6} \geq 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{3x-2}{2x+6} \geq 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \dfrac{2}{3}, \\ x > -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3}, \\ x < -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{2}{3}, \\ x < -3. \end{array}\right.$$

На рис. 2.1 показаны области определения данной функции.



Множеством значений функции называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Например, множеством значений функции $y = x + 1$ является множество $\mathbb{R}$, множеством значений функции $y = x^2 + 1$ является множество действительных чисел, бо́льших или равных единицы.

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия, по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и ее область определения.

Функция может быть задана аналитически (формулой), таблицей, графиком или каким-либо другим способом.

Аналитический способ – это способ задания функции с помощью формулы.

Например, формула $y = x - 2$ показывает, как с помощью значения аргумента x вычислить соответствующее ему значение функции y.

Табличный способ – это способ задания функции с помощью таблицы со значениями.

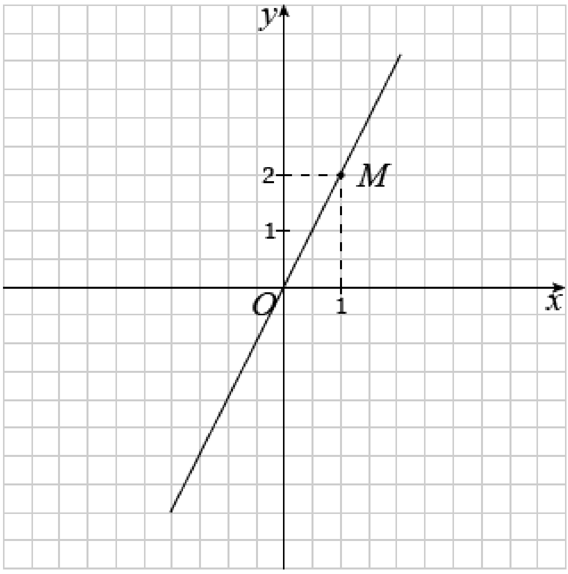
Например, если измерять температуру воздуха каждый час в течении суток, то каждому часу (t) будет соответствовать определённая температура (T). Такое соответствие можно записать в виде таблицы:

***t* (ч)**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
***T* (°)**	14	14	14,5	14,5	15	15	16	16	16	16,5	16,5	17
***t* (ч)**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
***T* (°)**	18	20	22	24	24,5	24,5	24	23	21	20	18	16

Следовательно, T функция от t – $T(t)$, определённая с помощью множества целых чисел от 0 до 24 и заданная таблицей. Соответствие между величинами двух переменных задаётся в данном случае не формулой, а таблицей.

Графический способ – это способ задания функции с помощью графика. В этом случае аргумент является абсциссой точки, а значение функции, соответствующее данному аргументу, ординатой.

Графики позволяют быстро находить значение функции по значению аргумента и наоборот – значение аргумента по значению функции. Например, рассмотрим уже готовый график функции:



Чтобы узнать, какое значение функции будет соответствовать аргументу $x = 1$, надо провести из соответствующей точки оси абсцисс (оси x) перпендикуляр на график. Ордината точки пересечения перпендикуляра с графиком (точки M) и будет соответствующим значением функции. Поэтому, так как точка M имеет координаты (1; 2), то запись этих значений в виде функции будет выглядеть так: $y(1) = 2$.

График функции — это геометрическое место точек плоскости, абсциссы (x) и ординаты (y) которых связаны указанной функцией, или линия, состоящая из точек плоскости с координатами (x, f(x)).

2. Четные и нечетные функции. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не изменяется, т. е. $f(-x) = f(x)$. Например, парабола $y = x^2$ является четной функцией, так как $(-x)^2 = x^2$. График четной функции *симметричен относительно оси Oy.*

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный функция изменяется только по знаку, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$. График нечетной функции *симметричен относительно начала координат.*

Свойством четности или нечетности обладает не всякая функция. Например, функция $f(x) = x^2 + x^3$ не является ни четной, ни нечетной: $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$; $x^2 - x^3 \neq x^2 + x^3$ и $x^2 - x^3 \neq -(x^2 - x^3)$.

Пример 2.2

Исследовать на четность и нечетность функции, определенную на всей числовой оси:

1) $y = \dfrac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - x}{3x^2 + 4}$; 3) $y = \dfrac{x^3 + 1}{4x^2 + 3}$.

Решение

Подставляем на место аргумента $(-x)$:

1) $\dfrac{3(-x)^4 - 2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$ — функция четная;

2) $\dfrac{(-x)^3 - (-x)}{3(-x)^2 + 4} = \dfrac{-x^3 + x}{3x^2 + 4} = -\dfrac{x^3 - x}{3x^2 + 4}$ — функция нечетная;

3) $\dfrac{(-x)^3 + 1}{4(-x)^2 + 3} = \dfrac{-x^3 + 1}{4x^2 + 3}$ — функция не является ни четной, ни нечетной.

Рассмотрим некоторые задачи.

1. Дана функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Найти $f(0), f(1), f(-1), f(2)$.

○ Чтобы вычислить значение $f(0)$, надо в данную функцию вместо аргумента x подставить его значение $x = 0$. Имеем $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$. Аналогично получим $f(1) = -1$, $f(-1) = -5$, $f(2) = 1$.●

2. Найти области определения функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = \dfrac{1}{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{2x - 6}$; 4) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

○ 1) Здесь на x не накладывается никаких ограничений, поэтому функция $y = x^2$ определена на множестве $\mathbb{R}$.

2) Если $x = 0$, то y не имеет числового значения (на нуль делить нельзя). Для всех значений (кроме нуля) y принимает действительные значения, поэтому областью определения служит вся числовая ось, кроме точки $x = 0$.

3) Функция определена для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. Решив уравнение $2x - 6 = 0$, найдем его корень $x = 3$. Таким образом, область определения $D(y)$ есть вся числовая ось, кроме точки $x = 3$.

4) Функция определена для всех значений аргумента, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Решив уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, найдем его корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, область определения $D(y)$ — вся числовая ось, кроме точек $x = 2$ и $x = 3$.●

3. Найти области определения функций:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{2x-4}$; 3) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

○ 1) Квадратные корни определены для неотрицательных чисел. Поэтому функция $y=\sqrt{x}$ определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x\ge 0$, т. е. $0\le D(y)<\infty$.

2) Решив неравенство $2x-4\ge 0$, получим $x\ge 2$, т. е. $2\le D(y)<\infty$.

3) Найдем область определения каждого из слагаемых; общая часть этих областей и будет областью определения данной функции. Для первого слагаемого $x>0$, а для второго $x>1$. Тогда областью определения суммы $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ служит промежуток $1\le D(y)<\infty$.

4) Функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{3x-2}{2x+6}\ge 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{3x-2}{2x+6}\ge 0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2/3,\\ x>-3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 2/3,\\ x<-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2/3,\\ x<-3.\end{array}\right.$$

Следовательно, областью определения функции является совокупность промежутков: $D(y)=\left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x\ge 2/3.\end{array}\right.$ ●

Задачи для самостоятельного решения.

4. 1) Дана функция $F(x)=x^4-x^3+2x^2+4$. Найдите $F(0)$, $F(-1)$ и $F(2)$.
2) Дана функция $s(t)=t^2-6t+8$. Найдите $s(0)$, $s(-1)$ и $s(2)$.
5. 1) Дана функция $f(x)=x^4-x^2+1$. Покажите, что $f(1)=f(-1)$.
2) Дана функция $f(x)=x^4+x^2+5$. Покажите, что $f(2)=f(-2)$.
6. 1) Дана функция $f(x)=x^3+x$. Покажите, что $f(1)=-f(-1)$.
2) Дана функция $f(x)=x^5+x^3$. Покажите, что $f(2)=-f(-2)$.
Найдите области определения функций:
7. 1) $y=x^2$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=x^3+1$.
8. 1) $y=\dfrac{1}{4x-2}$; 2) $y=\dfrac{x+2}{2x-8}$; 3) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

Домашнее задание:

Глава 7 «Графики и функции», занятие 1 «Обзор общих понятий», стр 122-126 учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф.

образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/
4. https://infourok.ru/videouroki