**Лекция. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Обратные функции.**

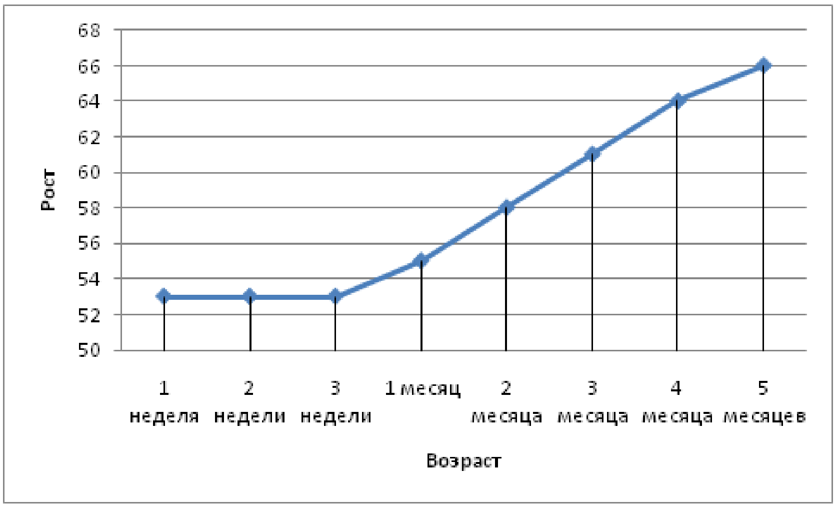
Рассмотрим примеры **функциональной зависимости в реальной жизни**.

***<u>Пример 1</u>***

Таблицей заданы данный о росте ребенка в течении первых 5 месяцев жизни:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст | 0 недель | 1 н. | 2 н. | 3 н. | 1 мес. | 2 мес. | 3 мес. | 4 мес. | 5 мес. |
| Рост, см | 53 | 53 | 53 | 53 | 55 | 58 | 61 | 64 | 66 |

Имея таблицу значений функциональной зависимости роста от возраста, можно по точкам построить график:




***<u>Пример 2</u>***

Вот яркий пример функции, заданной графически. На графике можно увидеть максимум и минимум, фрагменты линейной функции, сглаживание линий и т.д.

Кардиограмма - график работы сердца.

*Кардиограмма* - это запись сокращений сердца человека, которая осуществляется при помощи какого-либо инструментального способа. Во время сокращения сердце передвигается в пределах грудной клетки, оно вращается вокруг своей оси слева направо.

Суть электрографии заключается в том, чтобы зарегистрировать разности потенциала во времени. Кривая, которая показывает нам эти изменения и есть кардиограмма.

***<u>Пример 3</u>***

Переход вещества из твердого состояние в жидкое называется плавлением. Для того чтобы тело начало плавиться, его необходимо нагреть до определенной температуры. Температура, при которой вещество плавится, называют температурой плавления вещества.

Каждое вещество имеет свою температуру плавления. У каких-то тел она очень низкая, например, у льда. А у каких-то тел температура плавления очень высокая, например, железо. Плавление кристаллического тела это сложный процесс.

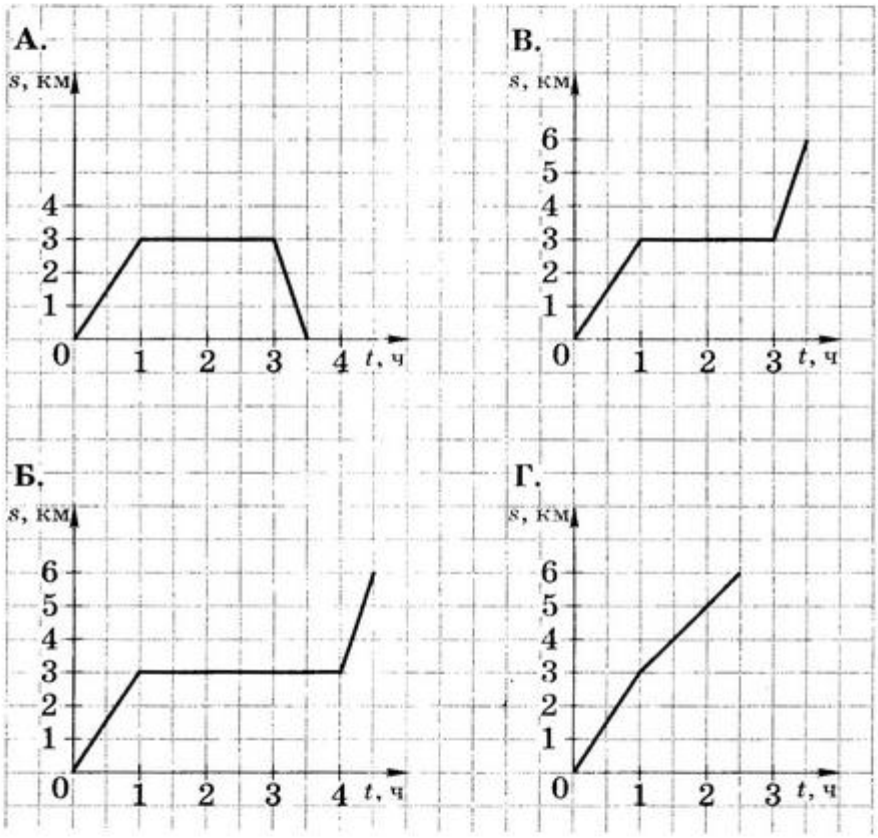
На рисунке представлен известный из курса физики график плавления льда.


График показывает зависимость температуры льда от времени, которое его нагревают. На вертикальной оси отложена температура, по горизонтальной - время.

Из графика видно, что изначально температура льда была -40 градусов. Потом его начали нагревать. С течением времени, температура увеличилась до 0 градусов. Эта температура считается температурой плавления льда. При этой температуре лед начал плавиться, но при этом перестала возрастать его температура, хотя при этом лед также продолжали нагревать. Затем, когда весь лед расплавился и превратился в жидкость, температура воды снова стала увеличиваться. Во время плавления температура тела не изменяется, так как вся поступающая энергия идет на плавление. После нагревания (пик графика) жидкость стали охлаждать, процесс пошел в обратную сторону до затвердевания.

***<u>Рассмотрим задачу</u>***

Туристы отправились с турбазы на озеро, провели там 2 часа и вернулись обратно. Выберите график, описывающий зависимость пройденного расстояния от времени:




Верным будет ответ **А.**, т.к. в течении двух часов туристы находились на озере, добравшись до него, а затем снова вернулись в лагерь, т.е. в нулевую точку отсчета.

## Обратные функции

. **Обратная функция.** Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при единственном значении $x$, то такую функцию называют ***обратимой***.

Например, функция $y = 3x + 5$ является обратимой, так как каждое значение $y$ принимается при единственном значении аргумента $x$. Напротив, функция $y = 3x^2$ не является обратимой, поскольку, например, значение $y = 3$ она принимает и при $x = 1$, и при $x = -1$.

Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Это означает, что каждому $y$ из множества значений функции соответствует одно определенное число $x$ из области ее определения, такое что $f(x) = y$. Решив это уравнение относительно $x$, получим уравнение $x = \varphi(y)$, в котором $y$ является аргументом, а $x$ — функцией этого аргумента. Поменяв местами в соответствии с принятыми обозначениями $x$ и $y$, получим $y = \varphi(x)$.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$.

---

Рассмотрим следующие теоремы.

**Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке множества $X$ (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).**

**Теорема 1**
Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ монотонна на множестве $X$, то она обратима.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция, и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому $y$ из $Y$ единственное значение $x$, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной $x$). Тогда получим функцию, которая определена на $Y$, а $X$ — область её значений. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y), y \in Y$ и называют обратной по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

**Теорема 2**
Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $X$, а $Y$ — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y), y \in Y$ возрастает (убывает) на множестве $Y$.

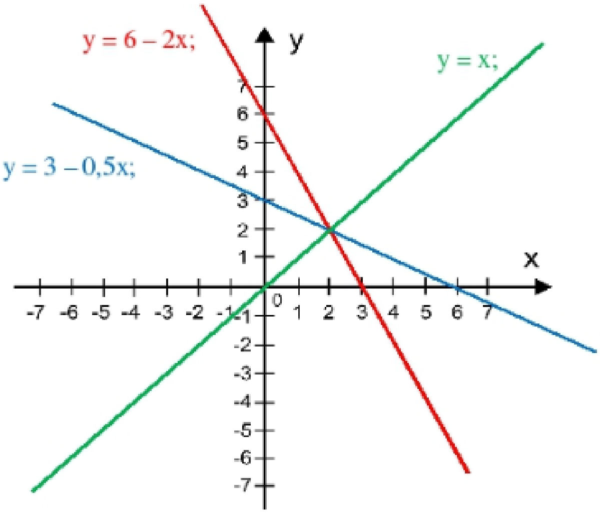
**Теорема 3**
Точки $M(a; b)$ и $P(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Обратите внимание, графики функций симметричны относительно прямой y = x

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти функцию обратную для y = 6 – 2x, построить их графики в одной координатной плоскости.

Решение.




y = 6 – 2x;

2x = 6 – y;

$x = \frac{6 - y}{2}$;

x = 3 – 0,5 y;

y = 3 – 0,5x – обратная функция;

Ответ: y = 3 – 0,5x. ■

**Пример 1**

**Условие:** какая функция будет обратной для $y = 3x + 2$?

***Решение***

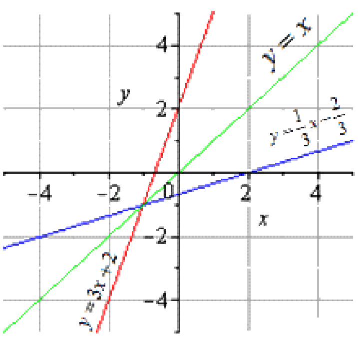
Область определений и область значений функции, заданной в условии, – это множество всех действительных чисел. Попробуем решить данное уравнение через $x$, то есть выразив $x$ через $y$.

Мы получим $x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$. Это и есть нужная нам обратная функция, но у здесь будет аргументом, а $x$ - функцией. Переставим их, чтобы получить более привычную форму записи:

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

**Ответ:** функция $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ будет обратной для $y = 3x + 2$.

Обе взаимно обратные функции можно отобразить на графике следующим образом:



**Пример 2**

**Условие:** определите, какая функция будет обратной для $y = 2^x$.

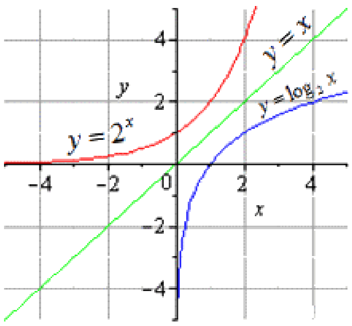
***Решение***

Для заданной функции областью определения являются все действительные числа. Область значений лежит в интервале $(0; \ +\infty)$. Теперь нам нужно выразить $x$ через $y$, то есть решить указанное уравнение через $x$. Мы получаем $x = \log_2 y$. Переставим переменные и получим $y = \log_2 x$.

В итоге у нас вышли показательная и логарифмическая функции, которые будут взаимно обратными друг другу на всей области определения.

**Ответ:** $y = \log_2 x$.

На графике обе функции будут выглядеть так:




Нахождение обратных функций показано в следующем видеоуроке

https://www.youtube.com/watch?v=tnX9Oss6BKc

Глава 7 «Графики и функции», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:


1. https://il.tpu.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://zaochnik.com/
4. https://www.yaklass.ru/
5. https://urait.ru/