Лекция. Параллелепипед. Куб.

Практическое занятие №38. Решение задач по теме «Призма»

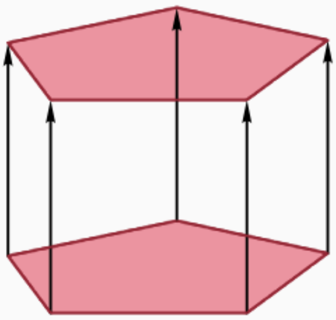
Вспомним основные определения.

1. Определения.

Призма — это многогранник, у которого выделены две грани (основания призмы), лежащие в параллельных плоскостях, являющиеся равными и параллельно расположенными многоугольниками (т. е. одно основание призмы получается параллельным переносом другого).

Боковые ребра призмы соединяют соответствующие вершины оснований. Они равны и параллельны друг другу.

Боковые грани призмы представляют собой параллелограммы.

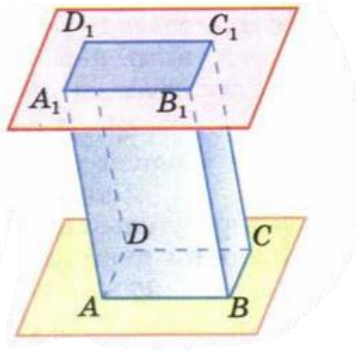


Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (боковые грани при этом также перпендикулярны плоскостям оснований).

Прямая призма называется **правильной**, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Параллелепипед — это четырехугольная призма, в основании которой лежит параллелограмм.

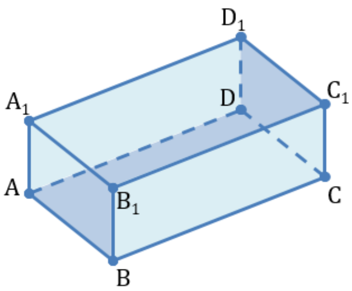
Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих ребер — **противоположными**. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**.



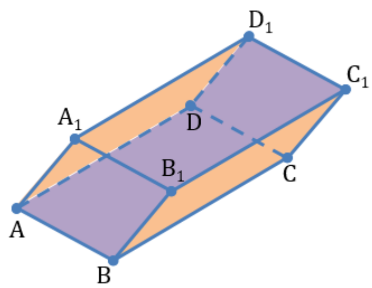
Параллелепипед бывает прямой и наклонный. У произвольного параллелепипеда все шесть граней – параллелограммы. У прямого параллелепипеда основания – параллелограммы, боковые грани – прямоугольники. У прямоугольного параллелепипеда – все шесть граней – прямоугольники.

Параллелепипед

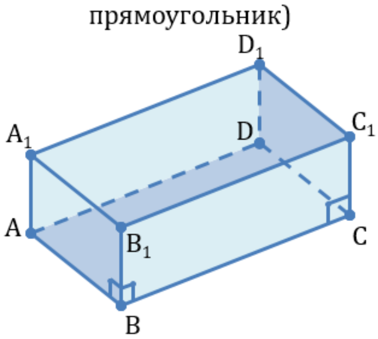
Прямой
(ребра перпендикулярны основаниям)



Наклонный
(ребра наклонены к плоскости основания под углом)



Прямоугольный
(прямой параллелепипед в основании которого лежит прямоугольник)



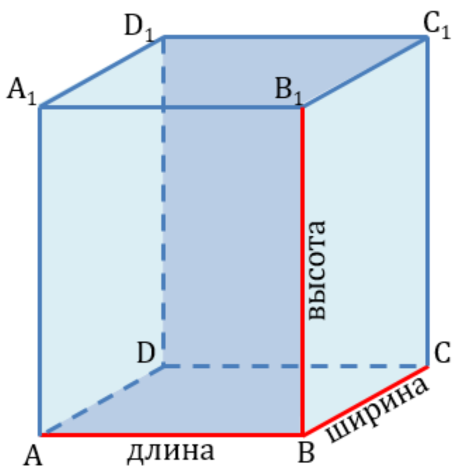
Для любого параллелепипеда сформулируем 2 свойства:

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Часто в задачах говорится о трех измерениях параллелепипеда.

Рассмотрим на примере прямоугольного параллелепипеда

Длины трёх рёбер, имеющих общую вершину, называются ***измерениями прямоугольного параллелепипеда.***



Свойства прямоугольного параллелепипеда

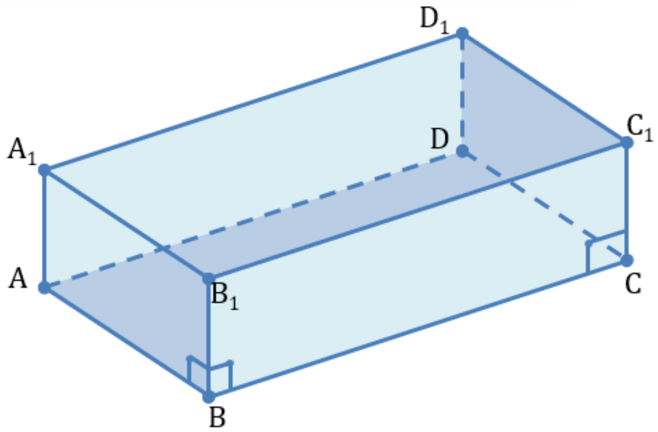
Свойство №1

В **прямоугольном** параллелепипеде **все шесть граней прямоугольники**

Доказательство:

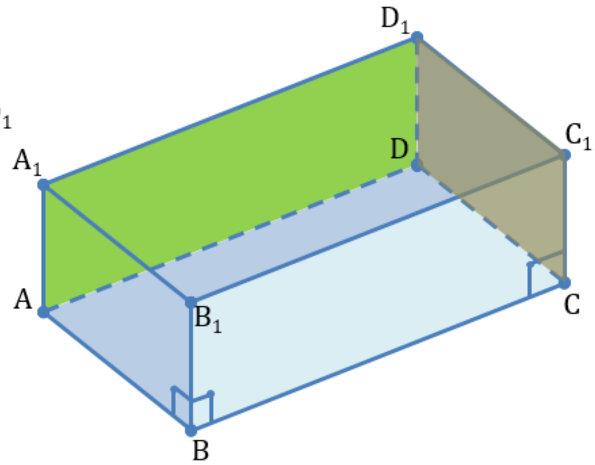
$AA_1 \perp ABCD \Rightarrow AA_1 \perp AD,\ AA_1 \perp AB$
$BB_1 \perp ABCD \Rightarrow BB_1 \perp AB,\ BB_1 \perp BC$
$CC_1 \perp ABCD \Rightarrow CC_1 \perp BC,\ CC_1 \perp CD$
$DD_1 \perp ABCD \Rightarrow DD_1 \perp AD,\ DD_1 \perp DC$

Боковые грани параллелепипеда являются прямоугольниками



Что и требовалось доказать.

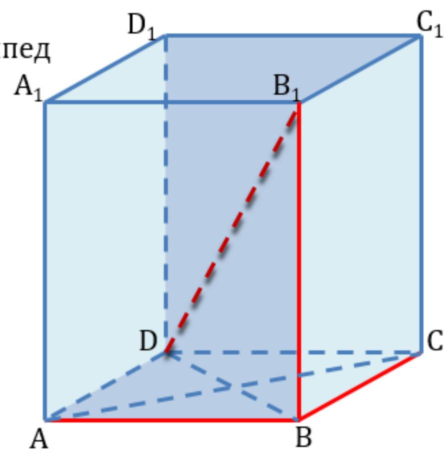
Дано: двухгранный угол ADD_1C
$DD_1 \perp ABCD \Rightarrow AD \perp DD_1$, $DC \perp DD_1$
$\angle ADC$ — прямой по условию $\Rightarrow$
$\angle ADD_1C$ — также прямой.



Свойство №2
Все двухгранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.

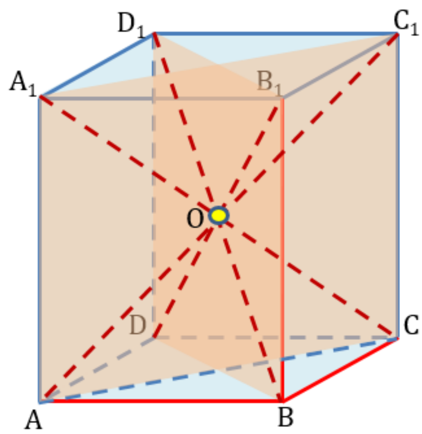
Свойство №3
Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен **сумме квадратов трех его измерений**

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
Доказать:
$DB_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$
Доказательство:
1) $DB^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2$ (по свойству прямоугольника)
2) $BB_1 \perp DB$, $DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2$
3) $\left.\begin{matrix} DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2 \\ DB^2 = AB^2 + BC^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow DB_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$



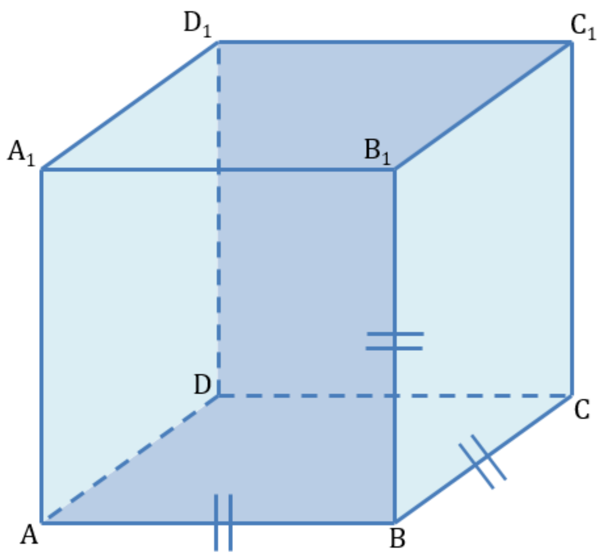
<u>Равенство диагоналей.</u>

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны



Куб

прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны (все ребра равные)



У куба все три измерения: длина, ширина и высота равны, значит

если принять величину ребра куба = а, то

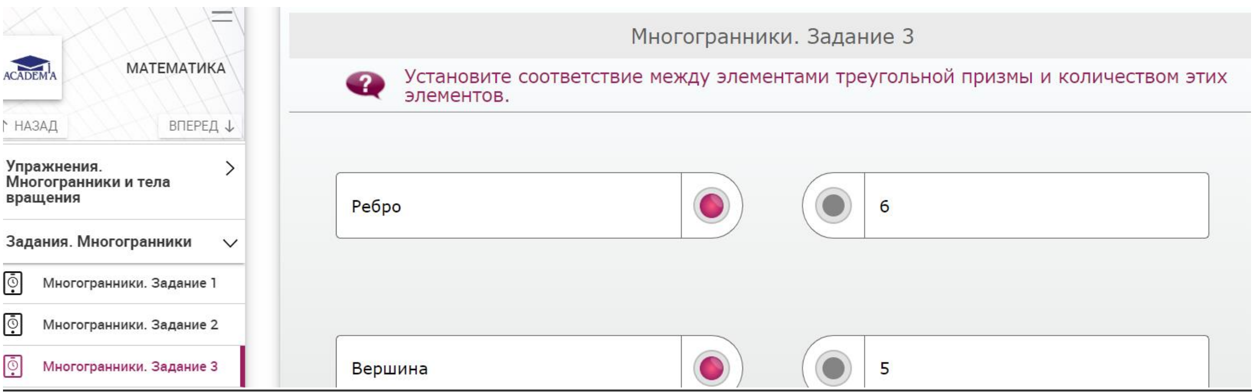
диагональ грани = а$\sqrt{2}$

диагональ куба = а$\sqrt{3}$

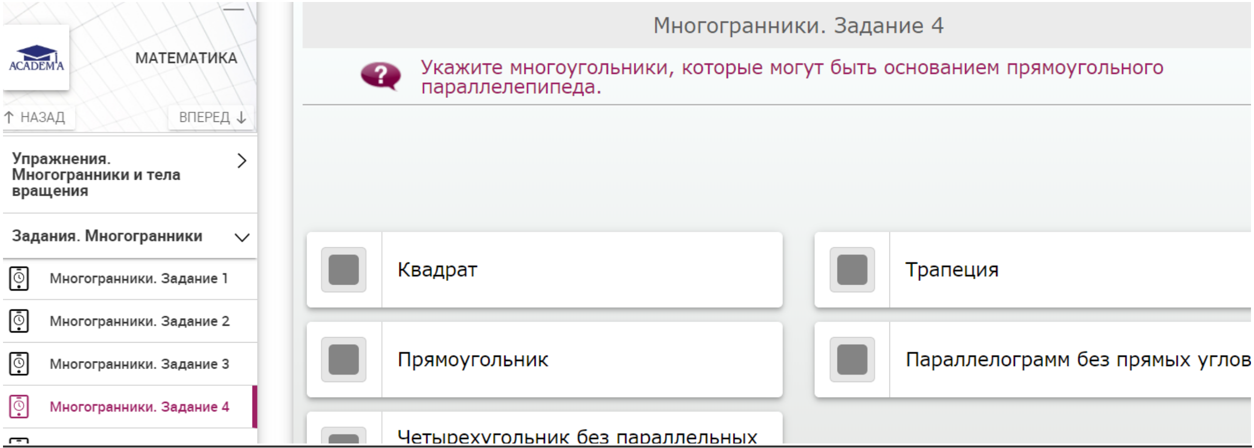
Практическое занятие

На практическом занятии предлагается выполнить Задание 3 Глава 8 «Многогранники и круглые тела», «Академия-Медиа»

Для выполнения этого задания необходимо вспомнить лекцию предыдущего занятия. Формулу Эйлера В+Г-Р = 2



Задание №4 связано непосредственно с темой этого занятия.



В продолжении рассмотрим следующие задачи

Задача 1

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед

$BC_1 = 11$ см, $DB = 20$ см, $A_1B = 19$ см

Найти: D_1B

Решение:

1) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (по свойству прямоугольного параллелепипеда)

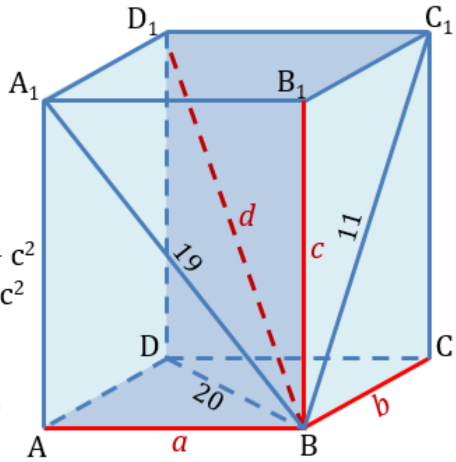
2) $A_1A \perp AB \Rightarrow \triangle A_1AB$ — прямоугольный $\Rightarrow A_1B^2 = a^2 + c^2$

3) $C_1C \perp BC \Rightarrow \triangle C_1CB$ — прямоугольный $\Rightarrow C_1B^2 = b^2 + c^2$

4) $ABCD$ — прямоугольник $\Rightarrow DB^2 = a^2 + b^2$

5) $\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 20^2 \\ a^2 + c^2 &= 19^2 \\ b^2 + c^2 &= 11^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 20^2 + 19^2 + 11^2 \Rightarrow$

$2d^2 = 20^2 + 19^2 + 11^2 \Rightarrow d^2 = \dfrac{20^2 + 19^2 + 11^2}{2} = 441 \Rightarrow d = 21$ см



Ответ: 21 см

Задачи и теоретический материал Вы можете изучить с помощью видеоурока сайта «Инфоурок» https://infourok.ru/videouroki/1430

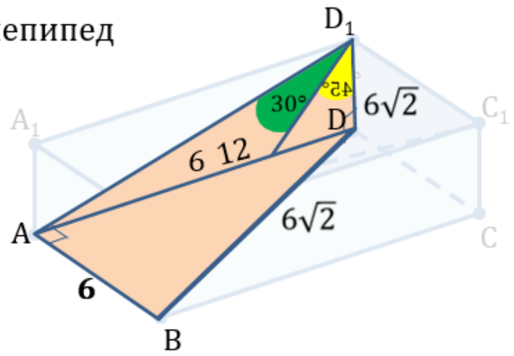
Задача 2

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед

$AC_1 = 12$ см, BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в 30°, а с ребром DD_1 – угол в 45°

Найти: AB, AD, D_1D



Решение:

1) $AB \perp (AA_1D_1D) \Rightarrow AD_1$ — проекция $BD_1 \Rightarrow \angle AD_1B = 30°$

2) $BD_1 = AC_1 = 12$ см (по свойству)

3) $\triangle D_1AB$ – прямоугольный, $\angle AD_1B = 30°$, $D_1B = 12$ см, $\frac{D_1B}{2} = 6$ см

4) $\triangle BDD_1$ – прямоугольный, $\angle BD_1D = 45° \Rightarrow BD = DD_1 = 12\cos 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ см

5) $\triangle BAD$ – прямоугольный, $AB = 6$ см, $BD = 6\sqrt{2}$ см

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = 6$ см

Ответ: 6 см, 6 см, $6\sqrt{2}$ см

Задача 219.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 12$ см, $AD = 5$ см, $(\widehat{D_1B, ABC}) = 45°$.

Найти DD_1.

Решение.

1) Из $\triangle ABD$ имеем $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$, $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ (см) (рис. 3.1).

2) $D_1D \perp ADC$, BD — проекция диагонали BD_1 на плоскость ADC, поэтому $\angle D_1BD$ — угол между диагональю BD_1 и плоскостью основания: $\angle D_1BD = 45°$. $\triangle D_1BD$ прямоугольный и равнобедренный: $D_1D = DB = 13$ (см).

Ответ: 13 см.

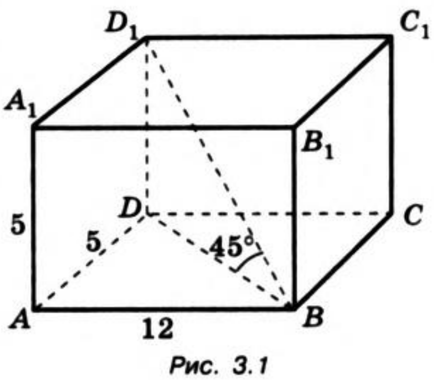


Рис. 3.1

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/