**Практическое занятие №50.**

**Рациональные, иррациональные неравенства.**

1. **Дробно-рациональные неравенства**

При решении этих неравенств удобно пользоваться методом интервалов, который основан на важном свойстве непрерывных функций: *если функция не обращается в нуль на некотором интервале из области определения, то она на этом интервале сохраняет знак.*

**5.18.** Решить неравенство: $\frac{x-4}{x-2} \le \frac{2}{x+1}$.

Решение. Перенесем все члены неравенства в левую часть и приведем полученное выражение к общему знаменателю. Получим $\frac{x^2-5x}{(x-2)(x+1)} \le 0$. Найдем, при каком значении $x$ обращаются в нуль числитель ($x = 0$, $x = 5$) и знаменатель ($x = -1$, $x = 2$). Отметим эти значения на числовой оси. Точки, в которых обращается в нуль знаменатель дроби, исключаются, так как левая часть неравенства не имеет смысла (на числовой оси изображаем эти точки светлыми кружками). На каждом из интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$ функция непрерывна и не обращается в нуль, т.е. сохраняет знак. Найдем эти знаки, определив значение функции в произвольных точках, взятых на каждом интервале, и построим кривую знаков (рис. 5.3).


**Рис. 5.3**

Выражение, стоящее в левой части неравенства, отрицательно в интервалах $(-1; 0)$, $(2; 5)$. Точки, в которых числитель обращается в нуль, входят в решение, так как неравенство нестрогое (на числовой оси изображаем эти точки закрашенными кружками). При записи ответа используем знак $\cup$ объединения множеств.

*Ответ*: $(-1;0]\cup(2;5]$

Если числитель и знаменатель не содержат большого количества множителей, решение неравенства можно свести к решению системы линейных неравенств.

…ино система линейных неравенств.

**5.19.** Решить неравенство: $\dfrac{5+2x}{x-6} > 0.$

Решение. Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, т.е.

$$1)\ \begin{cases} 5+2x > 0, \\ x-6 > 0, \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} 5+2x < 0, \\ x-6 < 0. \end{cases}$$

Решаем системы неравенств, отмечая решения на действительной оси (рис. 5.4).

$$1)\ \begin{cases} 2x > -5, \\ x > 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x > 6;$$

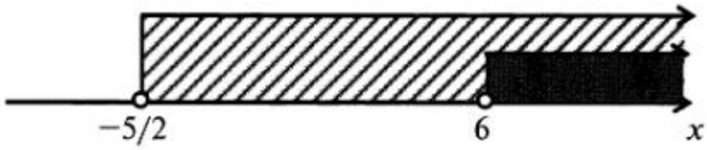


**Рис. 5.4**

$$2)\ \begin{cases} 2x < -5, \\ x < 6, \end{cases} \text{ откуда находим } x < -\frac{5}{2} \text{ (рис. 5.5).}$$


**Рис. 5.5**

*Ответ*: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right) \cup (6; +\infty)$.

Иногда в дробно-рациональных выражениях знаменатель (или числитель) принимает при всех $x$ положительное значение, в этих случаях знак дроби определяется только числителем (знаменателем).

**5.20.** Решить неравенство: $\dfrac{x(x-1)}{x^2+4} \geq 0.$

Решение. Так как $x^2 \geq 0$ при всех $x$, то $x^2 + 4 \geq 4$, т.е. знаменатель — величина положительная, и дробь $\dfrac{x(x-1)}{x^2+4}$ неотрицательна тогда и только тогда, когда неотрицателен числитель этой дроби. Исходное неравенство, таким образом, равносильно неравенству $x(x-1) \geq 0$. Произведение неотрицательно, когда оба сомножителя имеют одинаковые знаки:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x-1 \leq 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является $x \geq 1$, второй $x \leq 0$.

*Ответ*: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

## 2. Иррациональные неравенства

**5.70.** Решить неравенство: $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$

Решение. Неравенство имеет смысл, когда под корнем стоит неотрицательная величина, при этом $\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$, а значения $x = -1$ и $x = 2$ обращают левую часть в 0, потому включаются в область решений неравенства. Так как $\sqrt{x^2+x-2}\ge 0$, то левая часть неравенства неотрицательна при $(x-1)\ge 0$. Запишем эти условия системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-2\ge 0, & (\boldsymbol{a}) \\ x-1\ge 0. & (\boldsymbol{б}) \end{cases}$$

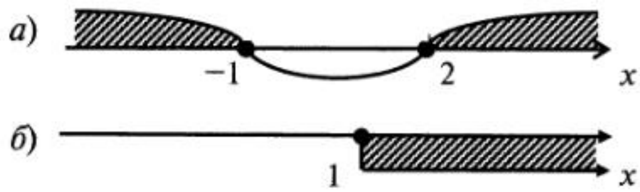


**Рис. 5.14**

К общей части решений двух неравенств (рис. 5.14, *а* и *б*) необходимо присоединить отмеченные выше значения $x = -1$ и $x = 2$.

*Ответ*: $\{-1\}\cup[2;\,+\infty)$.

**5.71.** Решить неравенство: $\sqrt{x^2+x-12}<x.$

Решение. Так как $\sqrt{x^2+x-12}\ge 0$, то для $x\le 0$ неравенство неверно, поэтому рассматриваем только $x>0$. Левая часть неравенства существует только при $x^2+x-12\ge 0$, а так как $x>0$, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x>0, & (\boldsymbol{a}) \\ x^2+x-12\ge 0, & (\boldsymbol{б}) \\ x^2+x-12<x^2. & (\boldsymbol{в}) \end{cases}$$

Общая часть решений этих неравенств даст решение системы (рис. 5.15).

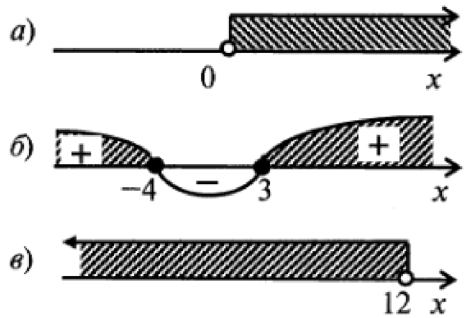


**Рис. 5.15**

*Ответ*: [3; 12).

**5.72.** Решить неравенство: $\sqrt{13+3x^2} \geq 1-2x$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая.

1) $1-2x<0$. Учитывая, что $\sqrt{13+3x^2} \geq 0$, имеем:

$$\begin{cases} 13+3x^2 \geq 0, \\ 1-2x<0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется для всех $x$, второе — для $x>\frac{1}{2}$, т.е. $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ входит в решение исходного неравенства.

2) $1-2x \geq 0$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат. Получим систему:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0, \\ 13+3x^2 \geq 0, \\ 13+3x^2 \geq 1-4x+4x^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, & (\boldsymbol{a}) \\ x^2-4x-12 \leq 0, & (\boldsymbol{б}) \end{cases}$$

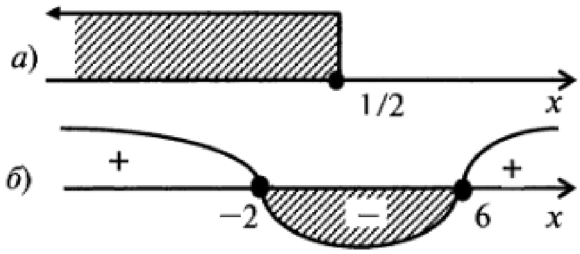


**Рис. 5.16**

откуда получим решение $[-2;\ 1/2]$ (рис. 5.16). Объединяя с полученным выше $(1/2;\ +\infty)$, находим решение исходного неравенства.

*О т в е т*: $[-2;\ +\infty)$.

**5.73.** Решить неравенство: $\sqrt{x^2-4x-5} \leq 1-x$.

Р е ш е н и е.

1) $1-x<0$. Неравенство неверно, так как $\sqrt{x^2-4x-5} \geq 0$ всюду, где существует.

2) $1-x \geq 0$. Обе части неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат и записываем систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, & (\boldsymbol{a}) \\ x^2-4x-5 \geq 0, & (\boldsymbol{б}) \\ x^2-4x-5 \leq 1-2x+x^2. & (\boldsymbol{в}) \end{cases}$$

Решаем систему (рис. 5.17).

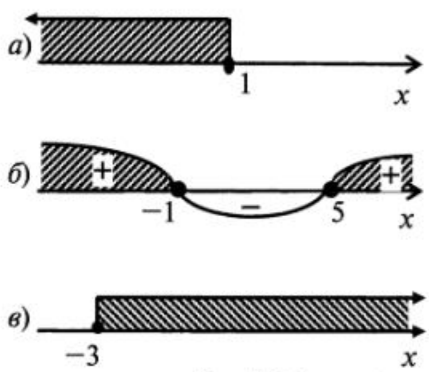


Рис 5.17

*Ответ*: $[-3; -1]$.

**5.74.** Решить неравенство: $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x - 2$.

Решение. Умножив обе части неравенства на положительное выражение $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}$, получим $x + 2 - 5x > (4x - 2)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}\right)$, или, перенеся все члены в одну часть, имеем $(4x-2)\left(1 + \sqrt{x+2} + \sqrt{5x}\right) < 0$. Так как выражение во второй скобке положительно, неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ 5x \ge 0, \\ 4x - 2 < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

*Ответ*: $\left[0; \dfrac{1}{2}\right)$.

## 3. Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

**5.21.** $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 1} < 0.$

**5.23.** $\dfrac{x^2 - x - 6}{81 + x^2} < 0.$

**5.25.** $\dfrac{2x+1}{1-x} < -3.$

Решить неравенства:

**5.76.** $\sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x.$

**5.77.** $4 - x < \sqrt{x^2 - 2x}.$

**5.78.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3} - 1} < 4.$

Список использованных интернет-ресурсов:


1. https://urait.ru/

   **Кремер, Н. Ш.**

   Математика для колледжей : учебное пособие для поступающих в вузы / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

2. https://23.edu-reg.ru/