Формула Ньютона-Лейбница

Практическое занятие №41.

Нахождение площади криволинейной трапеции

Формула Ньютона — Лейбница. Рассмотрим неотрицательную функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $[a; b]$. Пусть $y = F(x)$ — произвольная первообразная функции f, т. е. пусть $F'(x) = f(x)$.

Площадь S криволинейной трапеции, образованной функцией f на отрезке $[a; b]$, равна приращению первообразной этой функции.

Формула Ньютона — Лейбница

$$S = F(b) - F(a)$$

Если знать, что площадь переменной криволинейной трапеции, т. е. функция $y = S(x)$, является **одной** из первообразных, то получить формулу Ньютона — Лейбница, верную для **любой** первообразной, легко. Действительно, искомая площадь S равна значению функции $y = S(x)$ в точке $x = b$, т. е. $S = S(b)$.

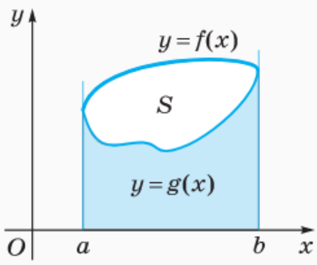
С другой стороны, нам известно, что любые две первообразные одной и той же функции различаются на константу, т. е. существует число C такое, что $F(x) = S(x) + C$ при любом x.

Подставим в это равенство $x = a$. Число $S(a)$ равно нулю, так как «трапеция», заданная на отрезке $[a; a]$, сводящемся к точке, является отрезком, площадь которого равна нулю. Итак, $F(a) = 0 + C = C$. Получаем

$$S = S(b) = F(b) - C = F(b) - F(a),$$

что и требовалось доказать.

Вычисление площади с помощью формулы Ньютона — Лейбница



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

!!! Внимание! В рассмотренном примере от площади фигуры, ограниченной кривой, которая находится выше, вычитаем площадь фигуры, которую ограничивает нижняя кривая.

> Вычисление площади криволинейных фигур проводят по следующему алгоритму:
>
> - **шаг 1** — расположить фигуру на координатной плоскости *xOy* (в упражнениях этот шаг часто уже проделан);
> - **шаг 2** — выразить площадь фигуры через площади криволинейных трапеций, используя свойство аддитивности площади;
> - **шаг 3** — вычислить площади криволинейных трапеций с помощью формулы Ньютона — Лейбница, помня, что она была получена для неотрицательных функций.

Разберем еще один пример.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2,\ y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$.

Решение.

$S = \int_{-2}^{4}\left(\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6\right) - (x + 2)\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx =$

$= \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx;$

$F\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 4x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x;$

$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{6} + 4\cdot 4 - \left(\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{6} + 4\cdot(-2)\right) =$

$= \frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{6} - 8\right);$

$S = 8 - \frac{32}{3} + 16 - \left(2 - \frac{4}{3} - 8\right) = 30 - \frac{36}{3} = 30 - 12 = 18.$

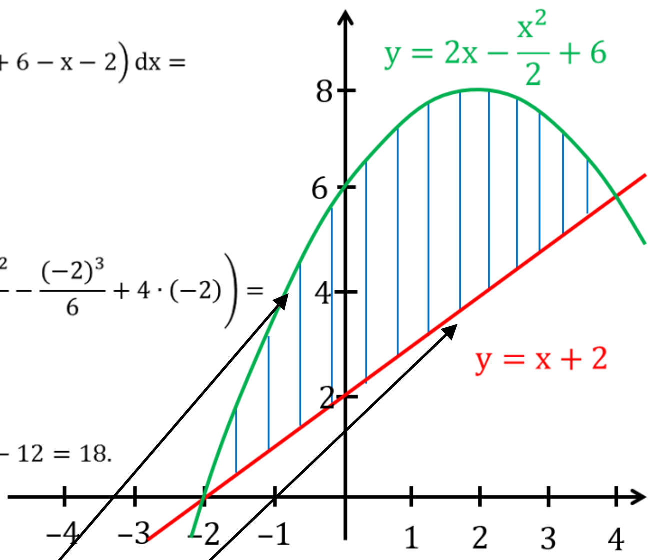


График функции, который «выше» - ----------- парабола

График функции, который «ниже» - ---------- прямая

В подынтегральном выражении записано: функция «выше» вычесть функцию «ниже»

Это правило математическим языком формул можно записать следующим образом:

Площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что
$g(x) \leq f(x)$ для всех x из отрезка $[a; b]$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$.

Интегральная запись формулы Ньютона — Лейбница. Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на промежутке $[a; b]$.

Интегралом от этой функции называется некоторое число, различные определения которого будут рассмотрены в беседе, приведенной в конце главы.

Традиционно определенный интеграл обозначается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Примем сейчас одно из возможных определений интеграла: **интеграл равен приращению первообразной** F, т. е. возьмем за основу формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формулу Ньютона — Лейбница для вычисления площади криволинейной трапеции теперь можно записать в интегральной форме:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Интегральная запись нам будет удобна для вычисления площадей. Переведем в интегральную запись некоторые уже известные нам свойства первообразной:

- **независимость от выбора первообразной**:

$\int_a^b f(x)dx$ мы определили как приращение первообразной, не уточнив, какую первообразную имеем в виду.

Однако **приращение** первообразной (одной и той же функции) на отрезке **не зависит от выбора первообразной**.

Действительно, если F_1 и F_2 — две первообразные, то существует константа C такая, что тождество $F_1(x) = F_2(x) + C$ верно для любого x.

Вычисляем: $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$;

- **аддитивность**:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Приведенное определение интеграла делает эту формулу очевидной: $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$;

- **линейность**:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

— постоянную можно выносить за знак интеграла;

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

— интеграл от суммы функций равен сумме интегралов.

Сумма первообразных для двух функций будет одной из первообразных для суммы этих функций.

Аналогичное утверждение верно и для умножения на константу. Зная это, легко проверить свойство линейности интеграла.

Заметим, что при вычислении интегралов приращение первообразной часто записывается так: $F(b) — F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. http://www.math24.ru/
3. infourok.ru