Практическое занятие №42.

Нахождение площади криволинейной трапеции

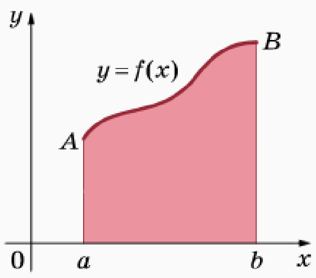
На этом занятии научимся находить площади фигур с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что $g(x) \le f(x)$ для всех x из отрезка $[a; b]$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Напомню определение криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс.

Площадь криволинейной трапеции



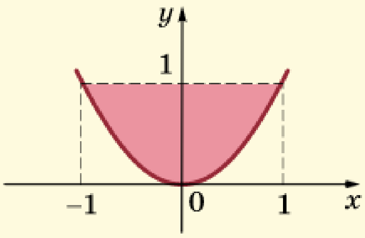
$x \in [a; b]$

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры

1. Найти площадь параболического сегмента (**задача Архимеда**).

Под параболическим сегментом понимают фигуру, ограниченную параболой и отрезком, перпендикулярным ее оси симметрии.



Выберем систему координат так, чтобы парабола записалась уравнением $y = x^2$, а отрезок соединял точки (−1; 1) и (1; 1).

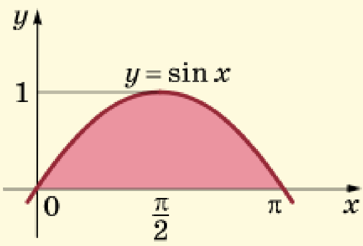
Тогда площадь сегмента запишется в виде интеграла, который легко вычисляется:

$$S = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

То, что гениальный Архимед вычислял путем сложных рассуждений, мы получили практически устно.

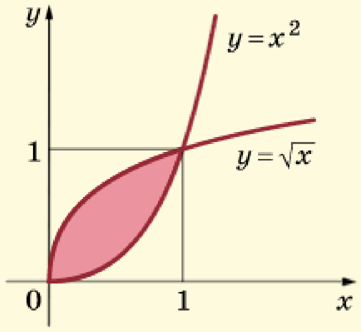
2. Найти площадь одной арки синусоиды.

Искомая площадь



$$S = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

3. Найти площадь фигуры, заключенной между дугами парабол $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.



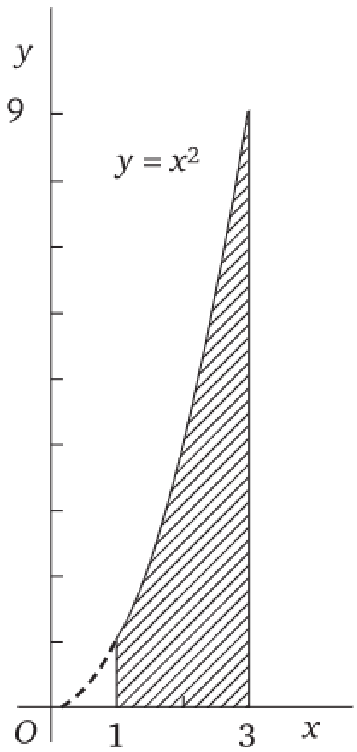
Данная фигура ограничена графиками двух функций:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ и } g(x) = x^2.$$

Искомая площадь:

$$S = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox (Пользуясь формулой находим искомую площадь: $S = \int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$.



Задания для самостоятельного решения. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми и установить соответствие. Задание справа, ответы – слева. Для каждого задания записать формулу нахождения площади фигуры.

1. В первом задании необходимо начертить точный чертеж при нахождении площади фигур

$y=4-x^2$, $y=0$	$S=\frac{25}{6}$
$y=\sin x$, $y=0$, $0 \le x \le \pi$	$S=2$
$y=3x-1$, $x=2$, $y=0$	$S=\frac{32}{3}$

2. Схематичный чертеж при нахождении площади фигур.

$y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$	$S=\ln 2$
$y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=2$	$S=\frac{4\sqrt{2}}{3}$
$y=x^3+1$, $y=1$, $x=2$	$S=e^2-1$
$y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$	$S=4$

$y=2x^2-4x+3,\ x=0,\ x=2$	$S=4$
$y=x^3,\ y=0,\ x=2$	$S=\frac{1}{3}$
$y=(x+1)^2,\ y=0,\ x=0$	$S=\frac{10}{3}$

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с.

Теорема Ньютона-Лейбница, задание 5.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/