Лекция. Дискретная случайная величина, закон ее распределения и числовые характеристики. Понятие о законе больших чисел.

Прежде, чем приступить к изучению данной темы, познакомимся еще с некоторыми теоремами теории вероятностей и их применением

Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого ожидается наступление интересующего нас события, можно многократно повторять. В каждом из таких повторений нас интересует вопрос, произойдёт или не произойдёт это событие. А во всей серии повторений важно знать, *сколько именно раз* может произойти или не произойти это событие. Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четвёрка» выпадет ровно три раза? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты орёл выпадет ровно четыре раза? Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему, её принято называть *схемой Бернулли*.

Рассмотрим испытание, в котором вероятность наступления случайного события A равна $P(A)$. Из курса 10-го класса вам известна формула $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, где $\bar{A}$ — событие, противоположное событию A. Значит, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Будем рассматривать исходное испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один состоит в том, что событие A произойдёт, а другой состоит в том, что событие A не произойдёт, т. е. произойдёт событие $\bar{A}$. Для краткости назовём первый исход (наступление события A) «успехом», а второй исход (наступление события $\bar{A}$) — «неудачей». Вероятность «успеха» обозначим $P(A) = p$, а вероятность **«неудачи» обозначим через q:** $\boldsymbol{q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p}$

Схема Бернулли

Рассматривают n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» равна q, $p + q = 1$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n повторениях произойдёт ровно k «успехов».

Про n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами более кратко говорят, как об n *испытаниях Бернулли.* Точный ответ на поставленный вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Бернулли). ***Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Прежде чем говорить о доказательстве теоремы Бернулли, приведём два примера её использования.

Пример 1. Каждый из четырёх приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачёту. На зачёте они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;

б) никому не достался вопрос, который он выучил;

в) только одному из приятелей достался тот вопрос, который он не выучил;

г) хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил.

Решение. Если кому-то достался известный ему вопрос, то это «успех». Вероятность «успеха» у каждого из приятелей, готовившихся к зачёту, одна и та же: она равна $\frac{5}{20} = 0{,}25$. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с $n = 4$ испытаниями Бернулли с вероятностью «успеха» в отдельном испытании $p = 0{,}25$.

а) В этом случае $k = n = 4$, поэтому

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}25^4 \approx 0{,}004.$$

б) В этом случае $k = 0$, поэтому

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = 0{,}75^4 \approx 0{,}316.$$

в) Здесь $k = 3$, поэтому

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047.$$

г) Событие, противоположное заданному, состоит в том, что никому из приятелей не достался известный ему вопрос, т. е. что произошло $k = 0$ «успехов». Вероятность такой общей неудачи уже посчитана в пункте б). Значит, нужная нам вероятность равна $1 - P_4(0) = 1 - 0{,}75^2 \approx 0{,}684$. ■

Пример 2. Проведены n испытаний Бернулли с вероятностью p «успеха» в отдельном испытании, $n > 1$. Найти вероятность того, что:

а) все испытания закончатся «успехом»;

б) все испытания закончатся «неудачей»;

в) «неудача» наступит ровно в двух случаях;

г) произойдёт или ровно два «успеха», или ровно две «неудачи».

Решение.

а) В данном случае число k «успехов» равно числу n всех испытаний. По теореме Бернулли получаем $P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$.

б) В данном случае число k «успехов» равно 0. Значит,

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n = q^n = (1-p)^n.$$

в) В данном случае число «неудач» равно 2, а число k «успехов» равно $n-2$. Значит,

$$P_n(n-2) = C_n^{n-2} p^{n-2} q^{n-(n-2)} = \frac{n!}{(n-2)!2!} p^{n-2} q^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2.$$

г) Если A — событие, состоящее в наступлении ровно двух «успехов», а B — событие, состоящее в наступлении ровно двух «неудач», то

$$P(A) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}; \; P(B) = \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2.$$

Требуется найти вероятность $P(A+B)$ суммы $A+B$ событий A и B. Если число n испытаний больше четырёх, то события A и B не могут наступить одновременно. Напомним, что такие события называют *несовместными*. В таком случае

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{n(n-1)}{2}(p^2 q^{n-2} + p^{n-2} q^2) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^2 (q^{n-4} + p^{n-4}).$$

Если $n = 4$, то $A = B$: ведь если в четырёх повторениях имеется ровно два «успеха», то имеется и ровно две «неудачи». Значит, $A + B = A$ и $P(A+B) = P(A) = 6p^2q^2$.

При $n = 3$ и $n = 2$ опять получаются несовместные события A и B. Поэтому искомые вероятности равны соответственно $3p^2q + 3pq^2 = 3pq(p+q) = 3pq$ и $p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$. ■

Дискретная случайная величина.

Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Случайную величину обозначают заглавной латинской буквой X, Y, Z…. и т.д., а их значения соответствующими маленькими буквами с индексами x_1, x_2, и т.д.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины образуют счетное множество. Например, количество элементов, на которое распадается вещество в единицу времени или число студентов, присутствующих на лекции по математике. Студент присутствует независимо от временного интервала проведения лекции. Считаем всех присутствующих – множество можно посчитать.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Например, сила тока в электрической цепи или время опаздания студента на лекцию – студент привязан к временному интервалу лекции.

Случайная величина считается полностью определенной с вероятностной точки зрения, если существует соотношение между значениями случайной величины и соответствующим им вероятностями. Такое соотношение называется законом распределения случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Довольно часто встречается термин ***ряд*** *распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

Очень важный момент: поскольку случайная величина X *обязательно* примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, то соответствующие события образуют и сумма вероятностей их наступления равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$ или, если записать свёрнуто: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

<u>Пример 1</u>

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	–5	2,5	10
	0,5	p_2	0,1

Найти p_2

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$0{,}5 + p_2 + 0{,}1 = 1$$

$p_2 + 0{,}6 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - 0{,}6$ – таким образом, вероятность выигрыша $u_2 = 2{,}5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0{,}4$

Закон больших чисел.

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *случайного события* и *случайной величины*. При этом предсказать заранее результат испытания, в котором может появиться или не появиться то или иное событие или какое-либо определенное значение случайной величины, невозможно, так как исход испытания зависит от многих случайных причин, не поддающихся учету.

Однако при неоднократном повторении испытаний наблюдаются закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Эти закономерности обладают свойством *устойчивости*. Суть этого свойства состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых в испытаниях, при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически не случайными.

Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер, становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*.

Под законом больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами. Закон больших чисел - это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным.

К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли - простейшим.

Для каждого положительного числа r при неограниченном увеличении числа n независимых повторений испытания с двумя исходами вероятность того, что частота $\frac{k}{n}$ появления «успеха» отличается менее чем на r от вероятности p «успеха» в одном отдельном испытании, стремится к единице.

На самом деле правильнее было бы говорить, что мы познакомились с одним из простейших вариантов многочисленных законов больших чисел, которые применимы не только к испытаниям с двумя исходами, но верны для куда более сложно устроенных серий независимых испытаний. Подчеркнём, что закон больших чисел отличается от утверждения о том, что $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{k}{n} - p \right| = 0$, как это понимается в теории пределов числовых последовательностей

Никто не гарантирует, что для любого $r > 0$ *при всех достаточно больших n* верно неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant r$. Вполне может так случиться, что при каких-то, пусть даже и очень больших n, верно противоположное неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| > r$. В законе больших чисел утверждается лишь, что вероятность такого сорта ошибки стремится к нулю. В математике в таких случаях говорят, что имеет место «сходимость по вероятности».

Глава 11 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/
3. https://spravochnick.ru/
4. http://mathprofi.ru/