Практическое занятие №49. Решение систем уравнений

Уравнения и системы уравнений с двумя переменными. ***Уравнение с двумя переменными*** x и y записывается в виде $f(x, y) = 0$, где f — выражение с переменными x и y. ***Решением*** такого ***уравнения*** называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которых в данное уравнение получается верное числовое равенство $f(x_0; y_0) = 0$.

Уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений с двумя переменными в общем виде записывается так:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, являющихся решением каждого из уравнений, входящих в систему.

Две системы уравнений называются ***равносильными***, если множества решений этих систем совпадают.

Рассмотрим четыре системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 4xy, \\ x + y = \dfrac{3}{2}xy. \end{cases}$

1. Метод подстановки

Второе уравнение в системах можно решить относительно y, т. е. преобразовать к виду $y = f(x)$:

1) $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$;

2) $x^2 + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x^2$;

3) $xy = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{x}$;

4) $x + y = \dfrac{3}{2}xy \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{\frac{3}{2}x - 1}$.

Подставляя $y = f(x)$ в первое уравнение систем, получим уравнение с одним неизвестным:

1) $x^2 + (x - 1)^2 = 25$;

2) $x^2 + (3 - x^2)^2 = 5$;

3) $\frac{1}{x} + x = 2$;

4) $2x + \frac{3x}{\frac{3}{2}x - 1} = 4x\frac{x}{\frac{3}{2}x - 1}$.

Решая уравнение, находим его корни — значения неизвестного x, а затем для каждого из них — соответствующее значение y по формуле $y = f(x)$:

1) $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -4; \end{cases}$

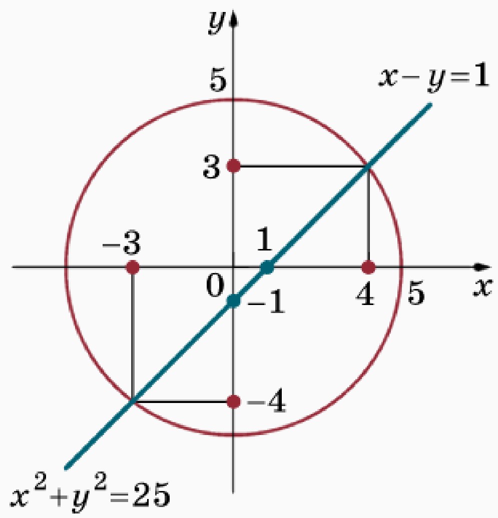
2) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases}$
$\begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$

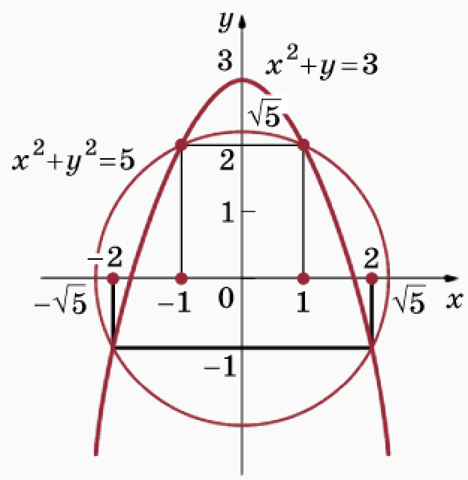
4) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

2. Использование графика. Каждое из уравнений системы можно рассматривать как уравнение кривой. Поэтому решения системы двух уравнений с двумя неизвестными можно интерпретировать как координаты точек пересечения двух кривых.

1)

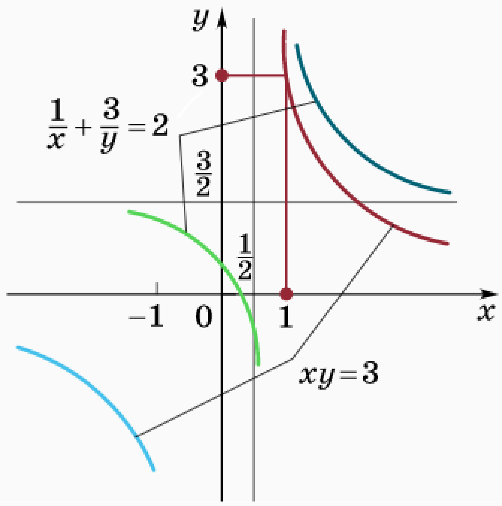


2)



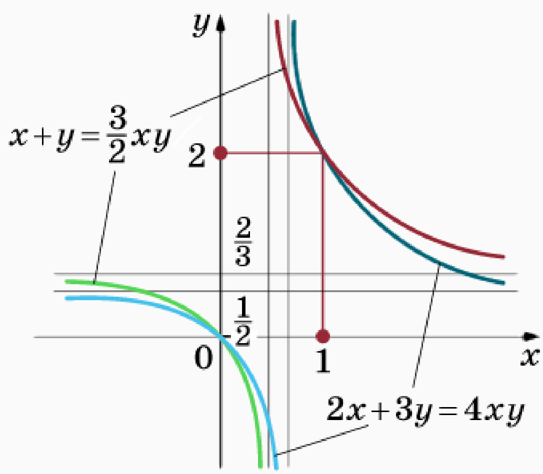
y
3
$x^2+y=3$
$\sqrt{5}$
$x^2+y^2=5$
2
1
-2
2
$-\sqrt{5}$
-1
0
1
$\sqrt{5}$
x
-1

3)



y
3
$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=2$
$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$
-1
0
1
x
$xy=3$

4)



y
$x+y=\frac{3}{2}xy$
2
$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$
0
1
x
$2x+3y=4xy$

3. Линейные системы. В математике и ее приложениях большую роль играют системы линейных уравнений. Любую такую систему можно решить способом подстановки. Выражая из одного уравнения системы одно неизвестное и подставляя в другие уравнения системы, мы уменьшим число уравнений и неизвестных системы, сохраняя ее линейность.

4. Симметричные системы. Система уравнений называется симметричной, если она составлена из выражений, симметричных относительно неизвестных:

1) $x^2 + y^2$;
2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
3) $(x - y)^2$;
4) $x^3 + y^3$;
5) $\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}$;
6) $x + y + z$;
7) $xy + yz + zx$;
8) xyz и т. д.

Возьмем две буквы x и y.

Два выражения — их сумма $u = x + y$ и произведение $v = xy$ — являются основными симметричными выражениями относительно x и y.

Другие симметричные выражения можно выразить через u и v:

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;
2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{v}$;
3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = u\,(u^2 - 3v)$.

2. Системы показательных уравнений. Решение систем показательных уравнений основано на свойствах показательной и логарифмической функций. При этом часто используются метод подстановки и алгебраическое сложение. Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений.

Пример 2.13

Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

Решение

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 3 \cdot 5^2, \\ 3^y \cdot 5^x = 3^2 \cdot 5. \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получим

$$(3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 3^3 \cdot 5^3) \Leftrightarrow (15^{x+y} = 15^3) \Leftrightarrow (x + y = 3).$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$(3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = 3^{-1} \cdot 5) \Leftrightarrow ((3/5)^{x-y} = (3/5)^{-1}) \Leftrightarrow (x - y = -1).$$

Решение данной системы сводится к решению равносильной ей системы

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

В результате получаем $x = 1$, $y = 2$.

Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27, \\ 3^x + 3^y = 12. \end{cases}$

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$$

а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$

а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 8; \end{cases}$

Глава 12 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/