Определенный интеграл

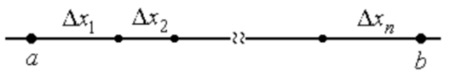
Практическое занятие №40. Вычисление определенного интеграла.

На прошлом уроке вы познакомились с понятием неопределённого интеграла.

Вспомним, что если функция $y=f\left(x\right)$ имеет на промежутке , принадлежащем области определения первообразную $y=F\left(x\right)$, то множество функций вида $y=F(x)+C$, называют неопределённым интегралом от функции $y=f\left(x\right)$ и обозначают $\int f(x)dx$ (читается «неопределённый интеграл эф от икс дэ икс»).

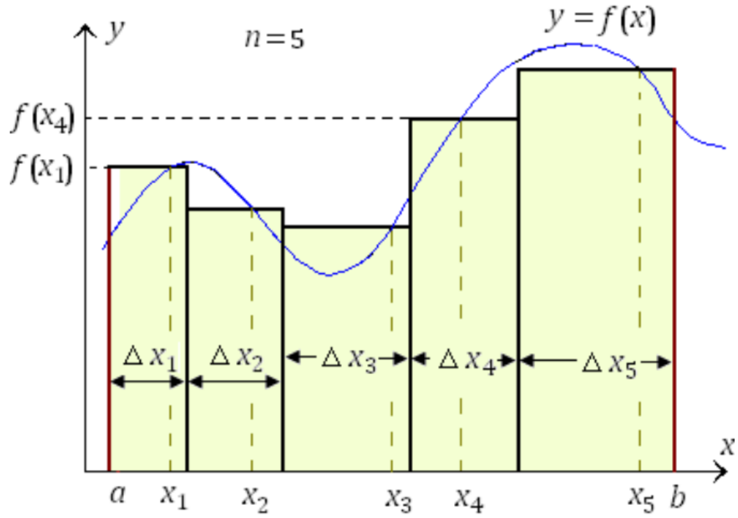
Рассмотрим функцию $y=f\left(x\right)$ непрерывную на отрезке $\left[a;b\right]$.

1.Разобьём данный отрезок на n равных частей.



2.Внутри каждого отрезка выберем произвольную точку и вычислим значение функции в этой точке. Затем составим сумму из произведений $f(x_0)\Delta x_0+f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+...+f(x_k)\Delta x_k+...+f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$

Полученная сумма произведений называется интегральной суммой.



Геометрическая интерпретация интегральной суммы при n=5

3.Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Если данный предел существует, его называют определённым интегралом от $y = f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Числа a и b - верхним и нижним пределами интегрирования.

Теорема.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ – формула Ньютона-Лейбница;

Формулу Ньютона-Лейбница можно переписать в виде:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Пример 1:

Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{3} x^3 dx$

Решение:

1. $F(x^3) = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} = \dfrac{x^4}{4}$ -первообразная для x^3.

Подставим найденную первообразную в формулу Ньютона-Лейбница и выполним подстановку: сначала подставим b=3 в первообразную, затем a= - 1 и найдем их разность

2.По формуле Ньютона-Лейбница: $\int\limits_{-1}^{3} x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \dfrac{3^4}{4} - \dfrac{(-1)^4}{4} = \dfrac{81}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{80}{4} = 20$

Ответ: $\int\limits_{-1}^{3} x^3 dx = 20$

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$
2. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ где k - константа;
3. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$
4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$ где $a < c < b$;
5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $0 \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx$.
6. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$
7. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$
8. Если $f(x) \ge 0$ в интервале $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Зная свойства определенного интеграла рассмотрим решение следующего примера.

Пример 2:

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$

Решение

1.Воспользуемся свойством интеграла $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$ и разобьём данный интеграл на сумму и разность интегралов: $\int\limits_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = \int\limits_{-2}^{4}8dx + \int\limits_{-2}^{4}2xdx - \int\limits_{-2}^{4}x^2dx$

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, имеем:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=\int_{-2}^{4}8dx+\int_{-2}^{4}2xdx-\int_{-2}^{4}x^2dx=$$

$$=8\int_{-2}^{4}dx+2\int_{-2}^{4}xdx-\int_{-2}^{4}x^2dx$$

2.Найдём первообразную полученной функции применяя табличные значения первообразной

$F(x^n)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ и $F(C)=Cx, C-const$,

$$F(x)=8x+2*\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=8x+x^2-\frac{x^3}{3}$$

3.Для простоты решения вычислим отдельно каждый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$8x\Big|_{-2}^{4}=8*4-8*(-2)=32+16=48$$

$$x^2\Big|_{-2}^{4}=4^2-(-2)^2=16-4=12$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4}=\frac{4^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}=\frac{64}{3}-\frac{-8}{3}=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}=\frac{72}{3}=24$$

Подставим полученные значения интегралов в формулу:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=48+12-24=36$$

Ответ: $\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=36$

Пример 3:

Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{-2}^{1}x^3(4x-5)dx$ 2) $\int_{0}^{\pi}\sin xdx$

Решение:

1) $$\int_{-2}^{1}x^3(4x-5)dx=\int_{-2}^{1}(4x^4-5x^3)dx=\left(\frac{4}{5}x^5-\frac{5}{4}x^4\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{4}{5}\cdot1^5-\frac{5}{4}\cdot1^5-\left(-\frac{4}{5}(-2)^5-\frac{5}{4}(-2)^4\right)=$$
$$=45{,}15$$

2) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

Задания для самостоятельного решения

Вычислите определенный интеграл:

1 $\int_0^2 x^2 dx$

2 $\int_{-1}^0 \left(x^3 + 2x\right)dx$

3 $\int_1^2 x^3 dx$

4 $\int_{-2}^3 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right)dx$

5 $\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$

6 $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

7 $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$

8 $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

9 $\int_0^{\pi/3} \sin x dx$

10 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x dx$

11 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos x - \sin x\right)dx$

Глава 10 «Интеграл и его применение», учебник БашмаковМ.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М.: ИЦ «Академия», 2017, - 256с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. http://www.math24.ru/
2. https://infourok.ru/videouroki