Лекция. Конус. Усеченный конус.

Прямой круговой конус — тело, получаемое вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Пусть прямой круговой конус получен вращением треугольника ABC вокруг его катета BC (C — вершина прямого угла).

Прямая BC называется **осью** конуса; круг, получаемый вращением катета AC, — **основанием** конуса; точка B — **вершиной** конуса; любой отрезок, соединяющий вершину конуса с граничной точкой основания, — **образующей** конуса.

Высота конуса — это тот катет, вокруг которого производилось вращение прямоугольного треугольника, порождающего конус. Его длина равна расстоянию от вершины конуса до его основания.

В сечениях конуса плоскостями, параллельными основанию, образуются круги.

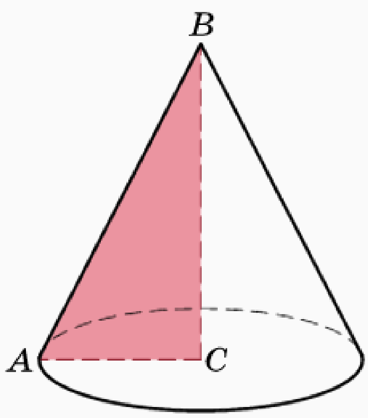
Сечение конуса, проходящее через его ось, называется **осевым сечением**. Осевое сечение перпендикулярно основанию, так как проходит через ось, которая перпендикулярна основанию.

Другие сечения конусов представляют собой плоские фигуры, границы которых являются замечательными кривыми (или их частями).

Сечения конусов могут быть эллипсами, параболами, гиперболами.

Как и в случае пирамиды, плоскость сечения, параллельного основанию, разбивает конус на две части — верхнюю, являющуюся конусом, подобным исходному, и нижнюю, называемую **усеченным конусом**.

Конус



Видеоурок «Конус» https://infourok.ru/videouroki/1460

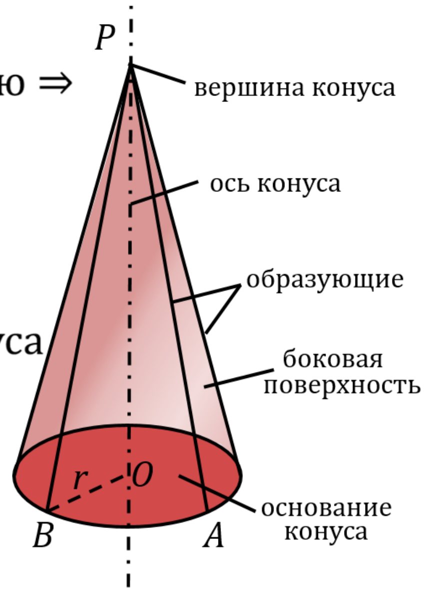
OP — ось конуса, OP$\perp$ основанию $\Rightarrow$

OP — высота конуса

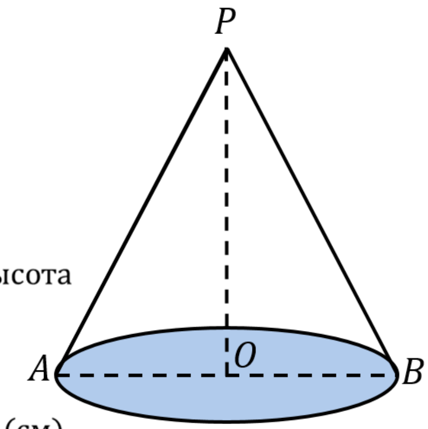
P — вершина конуса

$OB = r$ — радиус основания конуса

PA, PB — образующие конуса ($PA = PB$)



Задача



Дано: конус, OP = 15 см, OB = r = 8 см

Найти: PB

Решение:

ΔOPB — прямоугольный, так как PO $\perp$ AB (высота конуса), значит $\angle$POB=90^0

из ΔOPB найдём PB — образующая конуса — по теореме Пифагора:

PB = $\sqrt{PO^2 + OB^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ (см)

Ответ: 17 см

2. Площадь поверхности конуса. Если мысленно разрезать боковую поверхность конуса по образующей AB (рис. 14.3) и развернуть ее на плоскость, то получим круговой сектор, радиус r которого равен образующей конуса $AB = L$, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса $2\pi R$.

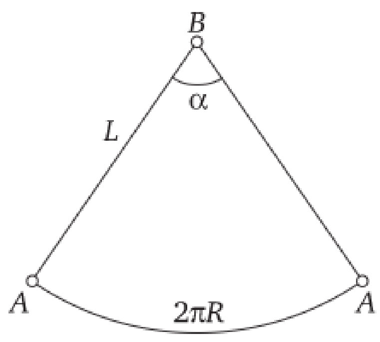


Рис. 14.4

Следовательно, площадь боковой поверхности конуса S равна площади развертки боковой поверхности конуса, т. е. площади сектора ABA:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

Здесь α — угол при вершине развертки; r — радиус сектора, $r = L$; $\frac{\pi r \alpha}{180} = l$ — длина дуги сектора.

Тогда $S_{\text{сект}} = l \cdot \frac{r}{2}$. Заменив в этом выражении l на $2\pi R$ и r на L, получим

$$S = S_{\text{сект}} = \pi R L, \qquad (14.1)$$

где R — радиус основания конуса; L — его образующая.

Площадь полной поверхности конуса $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$, где $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, тогда

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + L).$$

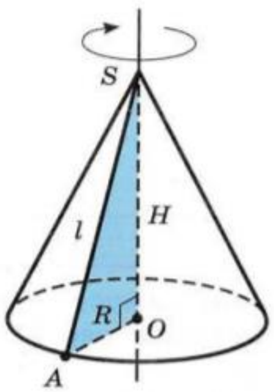
Видеоурок «Площадь поверхности конуса» https://infourok.ru/videouroki/1461

Свойства

1. Образующие конуса равны.

$SA = SB = \ldots$

2. $H_{\text{кон}} = SO$ $(SO \perp \text{пл. } AOB)$



3. При вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси образуется конус.

$\Delta\, AOS$ — прямоугольный, $\angle AOS = 90°$

Прямая SO — ось конуса	
$R_{\text{кон}} = AO$	$H_{\text{кон}} = SO$
AS — образующая, $AS = l$	

4. $S_{\text{осн. кон}} = \pi R^2$ $S_{\text{бок. кон}} = \pi R l$ $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi R\,(l + R)$

5. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Усеченный конус

1. Основные понятия. Часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется ***усеченным конусом***.

Пусть прямоугольная трапеция AOO_1B (рис. 14.5) вращается вокруг ее боковой стороны OO_1, перпендикулярной к основанию трапеции AO. Вторая боковая сторона трапеции AB служит образующей усеченного конуса. Две параллельные стороны являются радиусами R и r трапеции. Описываемые ими круги служат *основаниями* усеченного конуса.

Ось усеченного конуса OO_1 является его *высотой* h.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его *боковой поверхностью*.

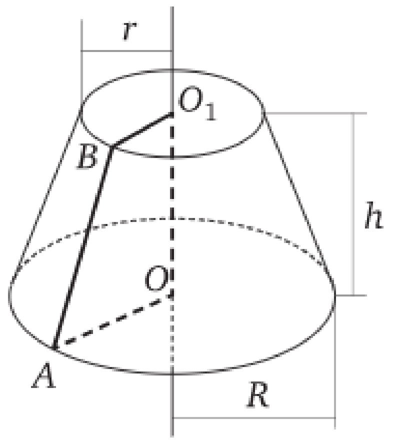


Рис. 14.5

2. Площадь поверхности усеченного конуса. Пусть L — образующая усеченного конуса, x — образующая дополненной части конуса, R — радиус нижнего основания, r — радиус верхнего основания (рис. 14.6).

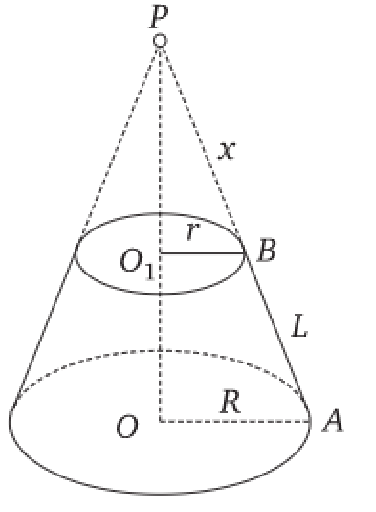


Рис. 14.6

$$S_{бок} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} L. \qquad (14.2)$$

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей основания на образующую.

Полная площадь поверхности усеченного конуса равна

$$S_{полн} = \pi(R + r)L + \pi R^2 + \pi r^2,$$

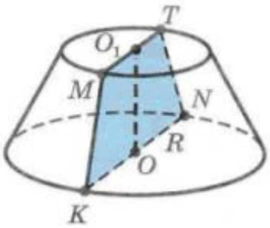
или

$$S_{полн} = \pi(LR + Lr + R^2 + r^2).$$

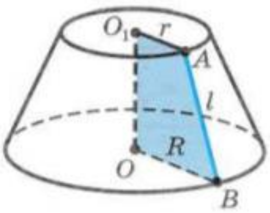
Видеурок «Усеченный конус» https://infourok.ru/videouroki/1462

Свойства

1. Осевое сечение усеченного конуса — равнобокая трапеция.



$MKNT$ — осевое сечение	$MT \parallel KN$, $MK = TN$ (образующие)
$MT = 2r$, $KN = 2R$	$OO_1 \perp KN$; $OO_1 = H$



2. При вращении прямоугольной трапеции ($OBAO_1$) вокруг оси, проходящей через боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усеченный конус.

3. $\boxed{S_{бок.\ усеч.\ кон} = \pi(R + r)\,l}$, где R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований, $l = AB$ — образующая.

$$\boxed{S_{полн} = S_{бок} + S_{1\ осн} + S_{2\ осн} = \pi(R + r)\,l + \pi R^2 + \pi r^2}$$

4. $\boxed{V_{усеч.\ конуса} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)}$

Глава 8 «Многогранники и круглые тела», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе «Академия»

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://infourok.ru/videouroki/