很多的线性代数的教材都是先引入行列式以及矩阵的额概念，然后通过矩阵和行列式来证明线性代数中一系列重要的结论。这样的讲解方式既让人难以理解，又缺少数学上的动机，学生很难理解为什么需要矩阵来说明，这背后的意义又是什么。

而《线性代数应该这样学》一书打破了常规的思路，先介绍我们比较容易理解的向量空间，然后以此进入抽象的线性算子的结构，思路连续，比较容易理解。

向量空间

- 向量空间的定义

  长度为n的组（list）是按照排序的、用逗号隔开的并且两端用括号括起来的n 个对象（这个对象可以是数、函数和更复杂的东西），n长度的组具有下面的形式：

  $$(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

  $x_j, j = 1, 2, 3 \ldots n$是上述组的第$j$个坐标。我们需要记住组的长度都是有限的。

  每一个坐标的所在的域都要是相同的，下面的说明我们都会使用$x_j \in F, j = 1, 2, 3 \ldots n$ 来表达坐标元素所在的域（比如实数域R，复数域C）。

  这样的组表示的一定长度，有一定的方向的箭头表示的是一个向量（虽然在2维和3维中我们很容易想象出一个这样的箭头，但是更高维我们无能为力，我们也不需要时刻需要几何印象，这不是向量的本质）

  这样的组支持一些加法、标量乘法这样的操作。事实上这也是向量空间最基本的两种运算操作。

  我们定义：**向量空间**是带有加法和标量乘法的集合**V**。

  这样我们可以推导出一系列的性质：交换性、结合性、加法单元、加法逆、乘法单位元、分配性质等等。

- 向量空间的性质

  这些性质都是可以通过简洁的推导证明的，我们在这里就不一一证明了。

- 子空间

  V的子集U称为V的子空间，比如

  $$U = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in F\}$$

  U是向量空间F^3 的一个子空间。

  要证明一个集合是否是另一个集合的子空间，只需要证明下面的性质（充分必要条件）：

  - 加法单位元$\mathbf{0} \in U$
  - U对于加法封闭
  - U对于标量乘法封闭

  第一个条件保证了U这个空间存在加法单位元，第二个保证了加法在U上是有意义上的，第三个保证了乘法在U上有意义。

  子空间U虽然是V的一个子集，但是子空间具有很特殊的性质，并不是任意的子集，值得我们研究。

- 直和

  直和的定义：

> 向量空间V中的每一个向量都可以用V的一组子空间$U_1...U_n$ 通过下面的方式**唯一**表示，那么称$U_1...U_n$ 是V的一组直和。
>
> $v = u_1 + u_2 + ... + u_n, u_j \in U_j$

设一个向量空间V有子空间$U_1, U_2...U_n$，$U_1, U_2...U_n$ 是V的直和（用数学符号表示就是$V = U_1 \oplus U_2 ... \oplus U_n$）当且仅当下面的条件成立：

- $V = U_1 + U_2 + ... U_n$
- 若$0 = u_1 + u_2 + ... u_n, u_j \in U_j$，则每一个$u_j = 0$。

有限维向量空间

在这一章中V表示的是F上的向量空间。

1. 张成的概念

   V中的一组向量的$(v_1, v_2...v_n)$ 的线性组合是下面的形式：

   $$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... a_nv_n$$
   $$\text{其中} a_1, a_2 ... a_n \in F$$

   $(v_1, v_2...v_n)$ 所有的线性组合及称为$(v_1, v_2...v_n)$的张成，记作$span(v_1, v_2...v_n)$ 。

   我们可以想见V中任意一个向量组合的张成都是V的一个子空间，因为所有的向量加法运算和数乘运算最后都可以变成$(v_1, v_2...v_n)$ 的线性组合方式，即在张成内部是加法和数乘封闭的。

   > 如果一个向量空间可以由他的一组向量张成，那么这个向量空间是有限的。

2. 线性无关

   如果一组向量$(v_1, v_2...v_n)$，使得$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... a_nv_n = 0$ 的只有$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$，那么称$(v_1, v_2...v_n)$ 是线性无关的。

3. 线性相关性引理

   如果$(v_1, v_2...v_n)$ 在V中是线性相关的，并且$v_1 \neq 0$，则有$j \in \{2, 3...n\}$ 使得下面的成立

   (a) $v_j \in span(v_1, v_2...v_{j-1})$;

   (b) 如果从$(v_1, v_2...v_n)$ 中去掉第 j 项，那么剩余的组张成等于$span(v_1, v_2...v_n)$.

   这个引理会经常用到，比如下面的这个结论证明就用到了该引理

   > 在有限维的向量空间中，线性无关组的长度一定小于或等于张成向量组的长度

   > 有限维的向量空间的子空间都是有限维的。

   上面的两个结论都是在我们的知识范围内可以证明的，感兴趣可以证明一下。

基

1. 定义：如果V中的一个向量组既是线性无关的，又能够张成V，那么这组向量组就是一组基。

   根据这个定义来证明一个向量是一个空间的基是最直接的。

2. V中的向量组$(v_1, v_2...v_n)$ 是V的基当且仅当V中的每一个向量都能表唯一示成下面的形式：

   $$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... a_nv_n$$

3. 向量空间中，每一个张成组都可以化简成一个基。

4. 在向量空间中，每一个线性无关组都可以扩充成一个基。
5. 设V是有限维的，U是V的一个子空间，那么一定一定存在V的一个子空间W使得$V = U \oplus W$.
6. 一个向量空间的所有基的长度都是一致的，这个长度称为该向量空间的维数。
7. 若V是有限维的，而且U是V的子空间，那么$dimU \leq dimV$
8. 如果V是有限维的，则V中每个长度为$dimV$ 的张成向量组都是V的基。
9. 如果V是有限维的，则V中每个长度为$dimV$ 的无关向量组都是V的基。
10. 如果U和W是同一个有限维向量空间的两个子空间，那么

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

11. 设V是有限维的，并且$U_1, U_2 ... U_m$ 是V的子空间，使得

$$< Empty\ Math\ Block >$$

$$V = U_1 + U_2 + ... + U_m$$

$$\text{并且 } dimV = dimU_1 + ... + dimU_m$$

$$\text{则 } V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

线性映射

1. 定义：从向量空间V到W的线性映射是具有下面性质的函数$T : V \to W$

   T 符合加性和齐性两种特质

   加性：对于所有的$u, v \in V$，都有$T(u+v) = T(u) + T(v)$;

   齐性：对于所有的$u \in V, a \in F$，都有$T(u) = aT(u)$;

   从 V 到W的所有的线性变换的集合记为$L(V, W)$，下面我们看几个线性变换的例子

   ### 零

   $0v = 0$,零吧V中所有的向量转换为W中的加法单位元

   ### 恒等

   这种函数记为 I ，它把每个向量映射为自身，$I \in L(V, V)$

   ### 微分

   对于一个多项式空间，定义$T \in L(P(R), P(R))$，使得

   $$T(p) = p'$$

   ### 从F^n 到F^m 的映射

   定义$T \in L(R^3, R^2)$

   $$T(x, y, z) = (2x - 3y + z, 7x + 5y - 2z)$$

   更一般的是m,n是正整数

   $$T(x_1, x_2 ... x_n) = (a_{11}x_1 + .. a_{1n}x_n ... a_{m1}x_1 + ... a_{mn}x_n)$$

每一个从F^n 到F^m 的映射都可以转化这种形式。

还有其他的线性映射可以自己去了解。

2. 线性变换构成的向量空间

   前面定义向量空间的时候就有说过，向量空间元素可以任何的对象，也包括这里的映射函数,我们要使$L(V,W)$ 构成一个向量空间，要满足三个条件——有加法单位元0，加法封闭，数乘封闭。

   对于$S,T \in L(V,W)$，定义一个函数$S+T \in L(V,W)$

   $$(S+T)v = S(v)+T(v)$$

   我们要证明（S+T）的确是一个$V \to W$的映射。

   同理对于$T \in L(V,W)$，定义一个函数$aT \in L(V,W)$

   $$(aT)v = a(Tv)$$

   我们要证明 aT 的确是一个$V \to W$的映射。

3. 零空间和值域

   零空间：就是在 V 中的一些向量，这些向量经过映射 T 之后在W中得到的是加法单位元 0 。这些向量组成的集合就是零空间，记为：$null\ T$

   $$null\ T = \{v \in V | Tv = 0\}$$

   具体的例子就是比如对于**微分**这个线性变换，只有对于常数的求导才是0，所以对弈微分这种线性变换来说$null\ T =$ 常函数

   1. 若$T \in L(V,W)$，则$null\ T$ 是V的子空间

   这个结论可以根据子空间的充要条件来证明。

   2. 设 $T \in L(V,W)$， 则T是单射的当且仅当$null\ T = \{0\}$

      这结论很重要，单射的概念和函数中的一一映射是相同的，一个向量只对应一个向量。

   值域：V中的所有向量能够通过的T映射到的W中的所有向量的集合是值域，记为$range\ T$

   $$range\ T = \{Tv |\ v \in V\}$$

   1. 若$T \in L(V,W)$，那么$range\ T$ 是W的子空间

      这个结论是和零空间是V的子空间对应的，证明方法相同。

   2. 如果V是有限维向量空间，并且$T \in L(V,W)$ ，那么$range\ T$是W的有限维子空间，并且

      $$dim\ V = dim\ null\ T + dim\ range\ T$$

      证明思路，我们在前面已经知道，零空间是T的子空间，也就是零空间的维数小于T，设为n，而且可以从 $(v_1 ... v_n)$ 这个零空间的基中扩展出T的基$(v_1 ... v_n, w_1 ... w_m)$。那么只要证明$range\ T$ 维数是m。

      这个结论是本章的重点，它描述的是原向量空间和映射函数空间的关系

   3. 上面结论的推论：

      - 如果V和W都是有限维的向量空间，并且$dim\ V > dim\ W$，那么V到W的映射一定不是单射的。
      - 如果V和W都是有限维的向量空间，并且$dim\ V < dim\ W$，那么V到W的映射一定不是满射的。

      上面的两个结论可以从一个方面来解释线性方程组的解析解的个数问题。

      对于一个齐次方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k = 0$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k = 0$$

我们可以先行空间来理解，设方程组的n个变量看成是向量空间V中的一个向量$x = (x_1 \ldots x_n)$，映射关系T可以把这个向量映射到一个m维的空间中的一个向量

$$T(x_1 \ldots x_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k)$$

齐次方程的解的问题就是这个映射的零空间的集合是否就是一个零向量而没有其他取值。

如果是$n > m$ (变量多于方程数量)，映射不是单射的，说明方程必然有非零解。

线性映射的矩阵