

电力系统无功优化的改进内点算法

刘明波 陈学军

(华南理工大学电力学院 510641 广州)

摘要 提出一种采用改进的原-对偶仿射尺度内点法求解无功优化问题的线性规划模型,该算法对迭代初始点的选择要求不严,不需要保证寻优过程沿着原-对偶路径,但仍能收敛于最优解。对 Ward & Hale 6 节点、IEEE 14 节点和 IEEE 30 节点系统分别进行的无功优化计算结果表明,此算法具有稳定的收敛性能。

关键词 无功优化 线性规划 原-对偶仿射尺度内点法 迭代初值

0 引言

线性规划法是一种非常成功的求解无功优化问题的方法,它的主要优点是数据稳定、收敛可靠、计算速度快、便于处理各种约束条件。线性规划模型的求解方法主要采用单纯形法或其变形。尽管单纯形法在大多数情况下都具有较好的收敛性,但对它的计算复杂性的分析表明:单纯形法是指数时间收敛的。1984年,Karmarkar 提出了求解线性规划的多项式时间算法——投影尺度法^[1]之后,内点法以其较少的计算时间和较强的求解大规模问题的能力立即引起了人们的关注。与单纯形法沿着可行域边界移动寻优不同,Karmarkar 最初的算法是建立在线性规划问题的单纯形结构上的,它在每步迭代中通过空间变换将现行解置于多胞体的中心,并在可行域的内部移动寻优。随后,又有学者提出了可以直接解标准形式线性规划的仿射尺度法及其变形:对偶仿射尺度法和原-对偶仿射尺度法^[1],但只有原-对偶仿射尺度法已从理论上证明了其具有多项式时间复杂性。

本文提出一种采用改进的原-对偶仿射尺度内点法求解无功优化问题的算法,它对迭代初始值的选择要求不严,不需要使寻优过程始终沿着原-对偶路径,但它最终仍收敛于最优解。并对 Ward & Hale 6 节点、IEEE 14 节点和 IEEE 30 节点系统分别进行计算,证明了此算法的迭代收敛次数稳定。

1 数学模型

电力系统无功优化是通过调节发电机端电压、无功补偿设备出力及可调变压器变比,在满足各状态变量和控制变量的约束条件下,使整个系统的有功

功损耗最小。其线性规划模型为:

$$\min \Delta P_s = c^T \Delta u \quad (1)$$

$$\text{s. t. } D_{\min} \leq S' \Delta u \leq D_{\max} \quad (2)$$

$$B_{\min}' \leq \Delta u \leq B_{\max}' \quad (3)$$

式中 $c = \frac{\partial P_s}{\partial u}$; $D_{\min} = x_{\min} - x_1$; $D_{\max} = x_{\max} - x_1$; $B_{\min}' = u_{\min} - u$; $B_{\max}' = u_{\max} - u$; S' 为状态变量对控制变量的相对灵敏度系数矩阵;状态变量 $x_1 = [Q_G^T, V_D^T]^T$; 控制变量 $u = [V_G^T, Q_C^T, T_B^T]^T$; 下标 max 和 min 表示上下限; P_s 为有功网损; Q_G 为发电机无功出力向量; V_D 为负荷节点电压向量; V_G 为发电机端电压幅值向量; Q_C 为无功补偿设备出力向量; T_B 为可调变压器变比向量。

引入松弛变量,可将上述线性规划问题化为标准形式:

$$\begin{cases} \min \Delta P_s = c^T x \\ \text{s. t. } Ax = b, x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中 A 是 $m \times n$ 阶矩阵,且 $m \leq n$, 矩阵 A 和向量 b 容易从式(2)和式(3)推导得出。

2 求解线性规划问题的内点算法

2.1 原-对偶仿射尺度内点法的基本原理

考虑标准形式的线性规划问题(4)及其对偶问题:

$$\begin{cases} \max(b^T w) \\ \text{s. t. } A^T w + s = c, s \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 s 为松弛变量。

如果我们对问题(4)和(5)分别引入一个对数壁垒函数,则有:

$$\begin{cases} \min(c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j) \\ \text{s. t. } Ax = b, x > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \max(b^T w + \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j) \\ \text{s. t. } A^T w + s = c, s > 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\mu > 0$ 是壁垒参数。

问题(6)和(7)的一阶最优性条件都导致如下的方程组:

$$\begin{cases} Ax - b = 0, x > 0 \\ A^T w + s - c = 0, s > 0 \\ XSe - \mu e = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 X, S 分别是以 x, s 的分量为对角元素的对角矩阵; e 表示分量全为 1 的单位向量。

为了使问题(6)或(7)有唯一的最优解,假设:

① $F = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x > 0\}$ 非空; ② $G = \{(w, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n | A^T w + s = c, s > 0\}$ 非空; ③ 约束矩阵 A 行满秩。

应用牛顿法求解非线性方程组(8)。设对某个 $\mu^k > 0$ 和 $(x^k, w^k, s^k), x^k > 0, s^k > 0$, 下一迭代点 $(x^{k+1}, w^{k+1}, s^{k+1})$ 的迭代方向 $\Delta x^k, \Delta w^k, \Delta s^k$ 由以下线性方程组确定:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta w^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} AX^k - b \\ A^T w^k + s^k - c \\ X^k S^k e - \mu^k e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^k \\ z^k \\ v^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 k 为迭代次数, I 为单位矩阵。

求解方程组(9)可以得到:

$$\Delta w^k = [AX^k(S^k)^{-1}A^T]^{-1} \cdot [AX^k(S^k)^{-1}(z^k - p^k) + t^k] \quad (10)$$

$$\Delta s^k = z^k - A^T \Delta w^k \quad (11)$$

$$\Delta x^k = X^k(S^k)^{-1}[p^k - \Delta s^k] \quad (12)$$

其中 $p^k = (X^k)^{-1}v^k$ 。

上述算法需要精心选择第 k 步迭代中的壁垒参数 μ^k 和步长 β^k , 才能保证 $(x^{k+1}, w^{k+1}, s^{k+1}) \in F \times G$ 。 μ^k 和 β^k 的确定方法见文献[1]。

2.2 原-对偶仿射尺度内点算法的改进

上述算法的迭代初始点必须是内点, 并且寻优过程必须沿原-对偶路径进行。下面给出一种改进的原-对偶内点算法, 这种算法可以从任意初始点 (x^0, w^0, s^0) 开始, 产生一个迭代序列 $\{(x^k, w^k, s^k)\}$, 虽然这个序列不总是沿着 $F \times G$ 路径, 但它最终将收敛于最优解。该算法的计算步骤如下:

(1) 设 $k=0$, 选任意点 (x^0, w^0, s^0) , 且有 $x^0 > 0, s^0 > 0$, 并选择三个很小的正数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 。如果 $Ax^0 = b$ 且 $A^T w^0 + s^0 = c$, 则 $(x^0, w^0, s^0) \in F \times G$, 转步骤(3)直接求解原问题(4)和(5)。

(2) 构造两个人工的原-对偶的线性规划问题:

$$\begin{cases} \min(c^T x + \lambda_1 x_{n+1}) \\ \text{s. t. } Ax + (b - Ax^0)x_{n+1} = b \\ (A^T w^0 + s^0 - c)^T x + x_{n+2} = \lambda_2 \\ (x, x_{n+1}, x_{n+2}) \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \max(b^T w + \lambda_2 w_{m+1}) \\ \text{s. t. } A^T w + (A^T w^0 + s^0 - c)w_{m+1} + s = c \\ (b - Ax^0)^T w + s_{n+1} = \lambda_1 \\ w_{m+1} + s_{n+2} = 0, (s, s_{n+1}, s_{n+2}) \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

则 $(x^0, x_{n+1}^0, x_{n+2}^0)$ 和 $(w^0, w_{m+1}^0, s^0, s_{n+1}^0, s_{n+2}^0)$ 分别是问题(13)和(14)的可行解。

其中 $x_{n+1}^0 = 1; x_{n+2}^0 = \lambda_2 - (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^0; s_{n+1}^0 = \lambda_1 - (b - Ax^0)^T w^0; s_{n+2}^0 = 1; w_{m+1}^0 = -1; \lambda_1$ 和 λ_2 为两个充分大的数, 且 $\lambda_1 > (b - Ax^0)^T w^0, \lambda_2 > (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^0$ 。

上述两个人工问题(13)和(14)可写为标准形式:

$$\begin{cases} \min(c_a^T x_a) \\ \text{s. t. } A_a x_a = b_a, x_a \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \max(b_a^T w_a) \\ \text{s. t. } A_a^T w_a + s_a = c_a, s_a \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

(3) 计算:

$$\mu^k = \frac{(x_a^k)^T s_a^k}{4n}, \quad t^k = b_a - A_a x_a^k,$$

$$z^k = c_a - A_a^T w_a^k - s_a^k, \quad v^k = \mu^k e - X_a^k S_a^k e, \quad p^k = (X_a^k)^{-1}v^k$$

(4) 如果 $\mu^k < \epsilon_1, \frac{\|t^k\|}{\|b_a\| + 1} < \epsilon_2, \frac{\|z^k\|}{\|c_a\| + 1} < \epsilon_3$, 则停止, 其解即为最优解, 否则转下一步。

(5) 根据式(10)~(12)计算转移方向 $\Delta w_a^k, \Delta s_a^k, \Delta x_a^k$ 。

(6) 如果 $t^k = 0, \Delta x_a^k > 0, c_a^T \Delta x_a^k < 0$, 则原问题(15)是无界的;

如果 $z^k = 0, \Delta s_a^k > 0, b_a^T \Delta w_a^k > 0$, 则原问题(16)是无界的。

如果上述两者之一发生, 则停止; 否则转下一步。

(7) 按下式计算步长 β_P 和 β_D :

$$x_a^k + \beta_P \Delta x_a^k > 0, \quad s_a^k + \beta_D \Delta s_a^k > 0,$$

且 $\beta_P, \beta_D \in (0, 1]$ 。

(8) 移动到新点, 更新解向量:

$$x_a^{k+1} = x_a^k + \beta_P \Delta x_a^k; \quad w_a^{k+1} = w_a^k + \beta_D \Delta w_a^k; \quad s_a^{k+1} = s_a^k + \beta_D \Delta s_a^k$$

令 $k = k + 1$, 并转步骤(3)。

上述算法中,设 x^* 和 (w^*, s^*) 为问题(4)和(5)的最优解,且 $\lambda_1 > (b - A x^0)^T w^*$, $\lambda_2 > (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^*$, 则:①可行解 $(x^*, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$ 是问题(13)的极小点当且仅当 x^* 是问题(4)的最优解且 $x_{n+1}^* = 0$;②可行解 $(w^*, w_{m+1}^*, s^*, s_{m+1}^*, s_{m+2}^*)$ 是问题(14)的极大点当且仅当 (w^*, s^*) 是问题(5)的最优解且 $w_{m+1}^* = 0$ 。这个结论容易得到证明。

3 算例及计算结果分析

下面的优化计算中,控制变量的初始步长选为:变压器变比步长 $T_{\text{step}} = 0.02$,发电机端电压步长 $V_{\text{step}} = 0.02$,无功补偿设备出力步长 $Q_{\text{step}} = 0.05$,在优化过程中采用了自动减步长技术。

3.1 Ward & Hale 6 节点系统计算结果

6 节点系统接线图如图 1 所示,该系统包含两

台发电机和两台可调变压器。本文和文献[2]一样选择节点 4 和 6 为无功补偿设备安装地点。该系统的支路数据和节点数据已在图 1 中标出,基准功率 100 MVA。无功优化结果如表 1 所示。

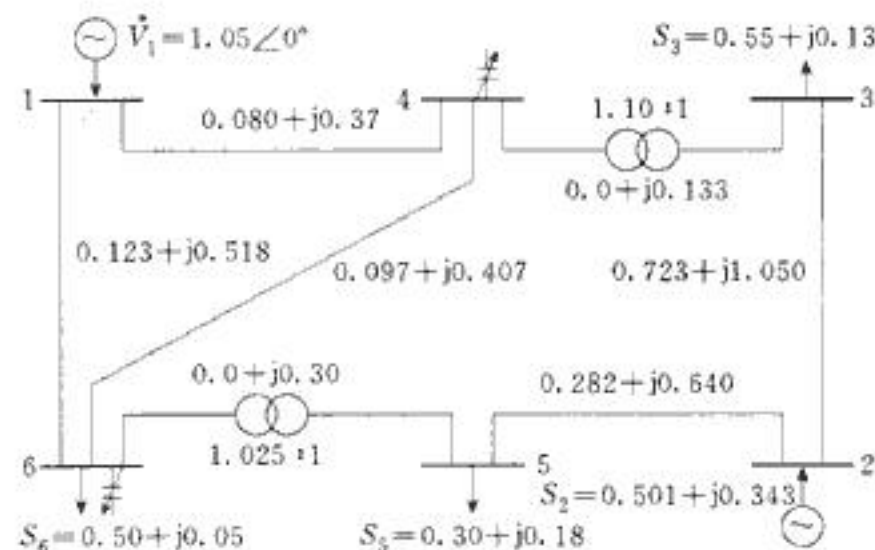


图1 6节点系统接线图

Fig. 1 The connection diagram of 6 bus power system

表 1 6 节点系统变量上下限和无功优化结果

Table 1 Limits on variables and results of reactive power optimization on the 6 bus system

	控制变量						状态变量						迭代次数	网损
	T_{65}	T_{13}	V_{G1}	V_{G2}	Q_4	Q_6	Q_{G1}	Q_{G2}	V_{D3}	V_{D4}	V_{D5}	V_{D6}		
运行下限	0.90	0.90	1.00	1.10	0.00	0.00	-0.20	-0.20	0.90	0.90	0.90	0.90		
运行上限	1.10	1.10	1.10	1.15	0.05	0.055	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00		
初始状态	1.025	1.100	1.050	1.100	0.00	0.00	0.371	0.343	0.858	0.955	0.902	0.935		0.116
文献[1]优化结果	0.956	0.981	1.092	1.150	0.050	0.055	0.363	0.194	1.000	1.000	1.000	0.985	11	0.0893
本文优化结果	0.946	0.982	1.100	1.134	0.050	0.055	0.413	0.146	1.000	1.000	1.000	0.979	8	0.0888

由表 1 可以看到,采用本文方法,经过 8 次迭代,所有越限节点电压都被提高到允许水平,网损由 0.116 降至 0.0888,降幅 23%;而采用文献[1]的单纯形法需进行 11 次迭代。

3.2 IEEE 14 和 IEEE 30 节点系统计算结果

14 节点和 30 节点系统数据见文献[3],14 节点系统包含 2 台发电机、3 台可调变压器及 3 个无功补偿点(节点 3、6 和 8),优化前大部分节点电压越限,网损值为 0.1745,采用内点法和单纯形法优化,网损分别降至 0.1392 和 0.1385。30 节点系统包含 6 台发电机、4 台可调变压器及 9 个无功补偿点(节点 12、15、18、19、21、24、26、28 和 30),优化前有 7 个节点电压越限,网损值为 0.08865,采用内点法和单纯形法优化,网损分别降至 0.0735 和 0.0739。14 节点和 30 节点系统采用内点法和单纯形法的无功优化网损曲线分别示于图 2 和图 3。

3.3 三个系统无功优化迭代次数比较

表 2 中大循环是指求解潮流,建立线性规划模型,求解后修改系统参数,再回到潮流求解这个循环;小循环则指求解线性规划模型过程中的反复迭

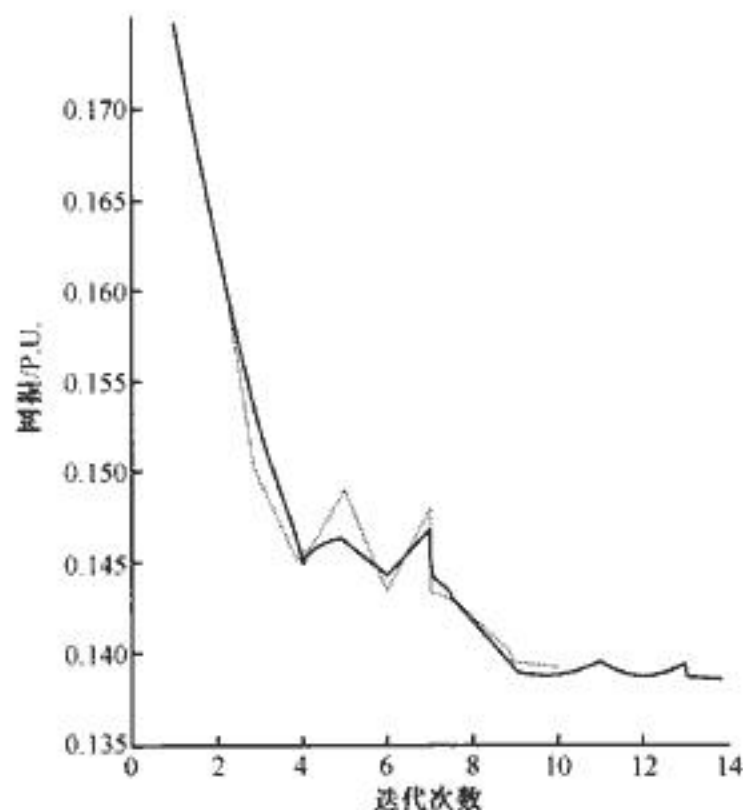


图 2 14 节点系统无功优化网损变化曲线

Fig. 2 Real power loss change curves of reactive power optimization on 14 bus system

代。表 2 中采用单纯形法和内点法的大循环次数的

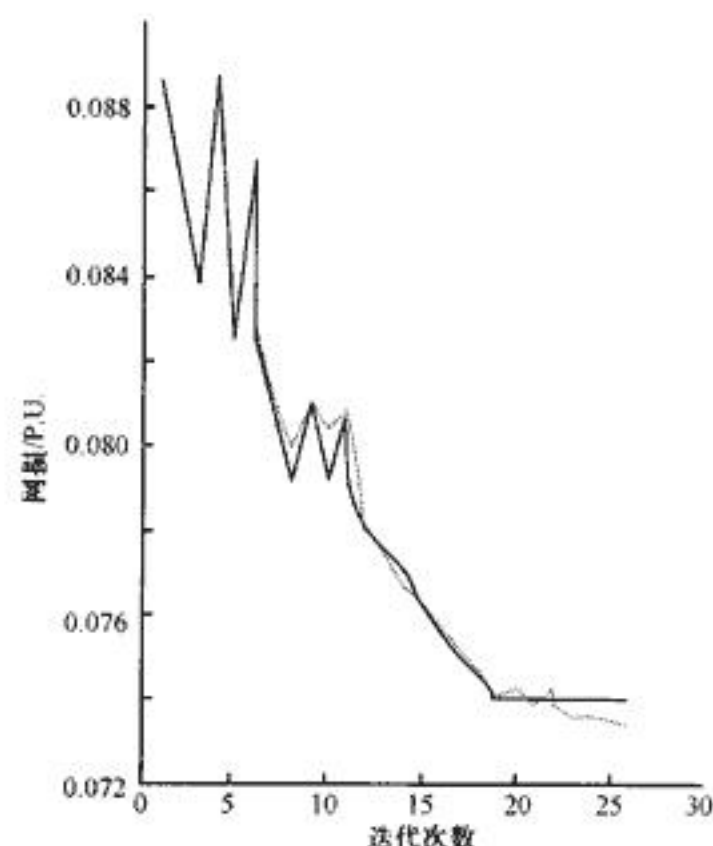


图3 30节点系统无功优化网损变化曲线
.....内点法 ———单纯形法

Fig. 3 Real power loss change curves
of reactive power optimization on the 30 bus system

差异是由于优化深度的不同引起的,实际上两者基本上相同,这从图2和图3中可看出。但采用两种优化方法的小循环次数则有很大差异,采用内点法的小循环次数与问题的规模关系不大,迭代收敛次数稳定在21次~22次,而采用单纯形法的小循环次数随系统规模的不同有很大的变化。

表2 采用内点法和单纯形法的迭代次数比较
Table 2 The comparison of iteration numbers
by interior point method or by simplex method

	大循环		小循环	
	内点法	单纯形法	内点法	单纯形法
6节点系统	8	11	21~22	4~7
14节点系统	10	13	21~22	5~20
30节点系统	25	19	21~22	13~37

4 结论

本文给出的改进的原-对偶仿射尺度内点法的无功优化计算结果与采用单纯形法的结果一致,但该算法对迭代初始点的选择要求不严,不需要保证寻优过程沿着原-对偶路径,而且具有稳定的收敛性能。

参考文献

- 1 方述诚. 线性优化及扩展——理论与算法. 北京:科学出版社,1994
- 2 Mamandur K R C, Chenoweth R D. Optimal Control of Reactive Power Flow for Improvements in Voltage Profiles and Real Power Loss Minimization. IEEE Trans, 1981, 100:3185~3194
- 3 张伯明,陈寿孙. 高等电力网络分析. 北京:清华大学出版社,1994

刘明波,男,1964年生,博士,教研室主任,副教授,主要研究方向为电力系统的分析与计算。

IMPROVED INTERIOR POINT METHOD FOR REACTIVE POWER OPTIMIZATION IN POWER SYSTEMS

Liu Mingbo, Chen Xuejun

(South China University of Technology, 510641, Guangzhou, China)

Abstract An improved interior point method for solving linear programming model of reactive power optimization problem is proposed in this paper. The demand on selecting initial values of iteration of this method is not strict, and the optimization process needn't be ensured to optimize along the prime-dual path while it still can converge to an optimal solution. The results of reactive power optimization of Ward & Hale 6, IEEE 14 and IEEE 30 bus systems show that this improved method has stable convergence.

Keywords reactive power optimization linear programming prime-dual affine scaling method initial values of iteration