

内点半定规划法求解含机组组合动态最优潮流

白晓清, 韦 化

(广西大学电气工程学院, 南宁 530004)

摘要: 考虑电力系统运行的经济性和安全性,建立了含机组组合的动态最优潮流问题的半定规划模型,并采用基于半定规划的内点法直接求解。所提算法采用修正策略处理模型中的离散变量,计算时不需要进行模型分解,收敛性好,能在多项式时间内完成。为提高计算效率,采用了半定规划块状矩阵运算的稀疏技术。通过对 IEEE-118 节点等 4 个测试系统 24 时段的仿真计算,验证了所提方法的正确性、有效性和优越性,其研究和应用前景广阔。

关键词: 动态最优潮流; 半定规划; 机组组合; 内点法

中图分类号: TM71 **文献标志码:** A **文章编号:** 1003-8930(2011)06-0067-09

SDP-based Method for Dynamic Optimal Power Flow with Unit Commitment

BAI Xiao-qing, WEI Hua

(College of Electric Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Considering the economy and security of the operation of power system, a semidefinite programming (SDP) model for dynamic optimal power flow(DOPF) problem with unit commitment(UC), named as DOPF-UC, is set up in this paper, which is directly solved by the interior-point method(IPM) on the base of the SDP. The proposed method is applied for the DOPF-UC problems due to its excellent convergence and the ability in handling the discrete variables by a modification strategy and no requirement of the model decomposition, which can be finished within polynomial time. In order to increase the calculation speed, the sparse technology of block matrix operation of SDP is adopted. Four different size test cases from 6 to 118 buses over 24 hours are used to simulate, and the result verifies the accuracy, effectiveness and superiority of the proposed method. Therefore, the research and application of the SDP-based method for DOPF-UC has a good prospect.

Key words: dynamic optimal power flow; semidefinite programming; unit commitment; interior point method

动态最优潮流问题 DOPF(dynamic optimal power flow)是在满足线路容量、节点电压以及运行约束等条件下,求解一个调度周期的电力系统运行计划,并使得特定的目标函数最小^[1]。其中可以调整的电力系统控制变量一般包括机组有功出力、节点电压、有载变压器变比和无功电源的无功出力。由于对离散变量的处理有一定困难,传统的 DOPF 问题一般不考虑机组组合问题 UC(unit commitment),因此获得的运行计划不能保证目标的最优性。为实现总运行成本最小或系统利润最大

的目标,且能满足电网安全运行约束条件,有必要将机组组合问题与最优潮流问题同时考虑,通常称其为考虑机组组合的动态最优潮流问题 DOPF-UC(dynamic optimal power flow with unit commitment)^[2]。

从数学的角度看,DOPF-UC 问题是一个高维的、非凸的、离散的、非线性的优化问题,围绕这一复杂的新问题,国内外学者提出了许多计算方法,如 Benders 分解法^[2,3]、Lagrangian 松弛法^[4]、内点割平面法^[5]、动态规划^[6]和智能优化算法^[7]等。

收稿日期:2010-01-21;修回日期:2010-06-17

但由于现有算法的内在限制,上述方法存在对离散变量处理不合理、算法求解效率不稳定、需要对原问题模型分层求解等问题。本文所提内点半定规划法对离散变量采用半定松弛,不必对原模型分层求解,且算法能在多项式时间内完成,具有良好的收敛性。

半定规划 SDP(semidefinite programming)^[8,9] 属于凸规划问题,能有效处理模型中的整数变量。经近 10 年发展,目前已成为数值最优化领域的研究热点。其理论研究已逐渐成熟,被成功应用于系统控制理论^[10~12],信号处理和通讯^[13,14],组合优化^[15]等领域。同时,由于 SDP 具有良好的算法结构,许多成熟算法已被开发成接口清晰,易于调用的核心软件包^[16,17]。求解相应问题不再需进行复杂的公式推导和计算,仅需按照对应关系形成问题的 SDP 模型,直接调用核心软件包计算。

文献[18,19]首次将半定规划应用于求解电力系统经济调度问题,效果令人满意。文献[20]采用内点半定法求解最优潮流,结果表明其全局最优性能可以得到保证。因此,将内点半定规划法引入 DOPF-UC 问题的求解中是一种有益的尝试。54 机 IEEE-118 节点等 4 个测试系统 24 时段的仿真计算表明:所提方法能有效求解连续变量和离散变量,算法收敛性好,是一种应用前景广阔的方法。

1 内点半定规划法

1.1 半定规划的定义

半定规划是指线性函数在对称矩阵的仿射组合半正定约束下的极值问题,是特殊的锥优化问题,可视作线性规划的推广^[9]。

半定规划与线性规划有着紧密的联系。首先,半定规划与线性规划在形式上类似,都是凸优化问题;其次,线性规划与半定规划相比,变量 $x \in R_+^n$ ($x \geq 0$) 用矩阵变量 $X \in R^{n \times n}$ ($X \geq 0$) 代替,向量的非负性以矩阵的非负定性取代。半定规划的理论及线性规划的理论非常相似,许多用于求解线性规划的算法可以扩展到求解半定规划^[8,9]。

另一方面,半定规划与线性规划也有重大区别。其一,线性规划具有强对偶性,而半定规划具有弱对偶性,即具有非负的对偶间隙。其二,线性规划的向量分量不等式约束是线性和光滑的,而半定规划的线性矩阵不等式约束可以是非线性和非光滑的,但却是凸的。因此,对于某些混合整数非线性规划问题可以转换成半定规划问题。

半定规划问题有多种表达方式^[9]。其中标准形式如下,分别称半定规划的原问题(Primal)和对偶问题(Dual)。

$$\begin{array}{ll} \text{Primal} & \text{Dual} \\ \min. A_0 \cdot X & \max. b^T y \\ \text{s. t. } A_i \cdot X = b_i, i = 1, \dots, m & \text{s. t. } A^T(y) + Y = A_0 \\ X \geq 0 & Y \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

其中:“ \cdot ”是矩阵迹的运算符, $A \cdot X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} X_{ij}$, $A^T(y) = \sum_{k=1}^m y_k A_k$, $\{A_0, A_1, \dots, A_m\} \in R^{n \times n}$, $b \in R^m$ 。

1.2 内点法解半定规划

解半定规划问题(1)等价于求解其原问题的对数障碍函数问题^[8]:

$$\begin{cases} \min. A_0 \cdot X - \mu \ln \det X \\ \text{s. t. } A_i \cdot X = b_i, (i = 1, \dots, m) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\det X$ 为 X 的行列式值, $\mu > 0$ 为单调递减的障碍因子,其拉格朗日函数为: $L(X, y) \equiv A_0 \cdot X - \mu \ln \det X - \sum_{i=1}^m y_i (b_i - A_i \cdot X)$

可导出其一阶最优性条件如下:

$$\begin{cases} \nabla L_X^\mu = A_0 - \sum_{i=1}^m A_i y_i(\mu) - \mu X(\mu)^{-1} = 0 \\ \nabla L_{y_i}^\mu = b_i - A_i \cdot X(\mu) = 0, (i = 1, \dots, m) \end{cases} \quad (4)$$

引入对称矩阵 Y ,可以获得如下非线性系统:

$$\begin{cases} A_i \cdot X(\mu) = b_i, (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m A_i y_i(\mu) + Y(\mu) = A_0 \\ Y(\mu) = \mu X(\mu)^{-1} \end{cases} \quad (5)$$

对系统(5)可导出其修正方程:

$$\begin{cases} A_i \cdot (X + \Delta X) = b_i, (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m (y_i + \Delta y_i) A_i + (Y + \Delta Y) = A_0 \\ XY + \Delta XY + \Delta XY + \Delta X \Delta Y = \mu I \end{cases} \quad (6)$$

这时,系统(6)中除了最后一个方程中的 $\Delta X \Delta Y$ 为非线性项外,其余部分是线性的。忽略该非线性项并引入辅助矩阵 $\Delta \tilde{Y}$,则搜索方向 $(\Delta X, \Delta y, \Delta Y)$ 可由以下线性系统求出:

$$\begin{cases} B \Delta y = r \\ \Delta X = P + \sum_{i=1}^m A_i \Delta y_i \\ \Delta \tilde{Y} = (X)^{-1} (R - Y \Delta X) \\ \Delta Y = (\Delta \tilde{Y} + \Delta \tilde{Y}^T) / 2 \end{cases} \quad (7)$$

其中:

B 是一个 $m \times m$ 的矩阵,且

$B_{ij} = (X^{-1} A_i Y) \cdot A_j, (i, j = 1, \dots, m)$; r 是一个

m 维纵向量,且 $r_i = -d_i + A_i \cdot [X^{-1}(R - PY)]$, $(i = 1, \dots, m)$ 。其中 P, d_i, R 分别定义为:

$$P = \sum_{i=1}^m A_i y_i - A_0 - X$$

$$d_i = b_i - A_i \cdot Y, (i = 1, \dots, m)$$

$$R = \mu I - XY$$

修正当前点为 $(X + \alpha_p \Delta X, y + \alpha_d \Delta y, Y + \alpha_d \Delta Y)$, 其中 α_p 和 α_d 是步长因子, 以保证更新后的 $X + \alpha_p \Delta X$ 和 $Y + \alpha_d \Delta Y$ 仍在正定锥中。如此反复迭代, 直到互补间隙 $\mu = X \cdot Y / n$ 足够小。

当 $\mu \rightarrow 0$ 时, $(X(\mu), y(\mu), Y(\mu))$ 将沿着中心路径 $\gamma(\mu) \equiv \{X(\mu), y(\mu), Y(\mu) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n \times n} : \mu > 0\}$ 精确收敛到最优解 (X^*, y^*, Y^*) 。

可以证明, 内点法求解半定规划模型能在多项式时间内完成, 具有超线性收敛^[16]。

2 拟求解问题的半定规划模型

首先根据 DOPF-UC 问题的混合整数非线性规划模型, 采用对离散变量进行半定松弛的方法^[21] 导出其凸规划模型, 然后直接建立其半定规划模型。

2.1 DOPF-UC 的混合整数非线性模型

DOPF-UC 问题可以用混合整数非线性模型表示。为方便建立其半定规划模型, 本文采用如下直角坐标数学模型表示。

不失一般性, 目标函数为煤耗最小的火电机组组合 F_{Cost} 。

$$\min. F_{\text{Cost}} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{S_G} FP_i [u_i^t f_i(P_i^t) + u_i^t (1 - u_i^{t-1}) CU_i^t] \quad (8)$$

同时必需满足如下约束:

1) 功率平衡约束(潮流方程)

$$\begin{cases} P_{Gi}^t - \sum_{j \in S_B} [e_i^t (e_j^t G_{ij} - f_j^t B_{ij}) - f_i^t (f_j^t G_{ij} + e_j^t B_{ij})] = P_{Di}^t \\ Q_{Ri}^t - \sum_{j \in S_B} [f_i^t (e_j^t G_{ij} - f_j^t B_{ij}) - e_i^t (f_j^t G_{ij} + e_j^t B_{ij})] = Q_{Di}^t \\ i \in S_B, t \in T \end{cases} \quad (9)$$

2) 线路约束

$$\bar{P}_{Lij} \geq P_{Lij} \geq \underline{P}_{Lij} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} P_{Lij}^t &= [(e_i^t)^2 + (f_i^t)^2 - e_i^t e_j^t - f_i^t f_j^t] G_{ij} + \\ &\quad (e_i^t f_j^t - e_j^t f_i^t) B_{ij} \\ ij &\in S_L, t \in T \end{aligned}$$

3) 旋转备用约束

$$\sum_{i=1}^{S_G} (u_i^t \bar{P}_{Gi}^t - u_i^t P_{Gi}^t) \geq SR^t, t \in T \quad (11)$$

4) 机组爬坡约束

$$P_{Gi}^t - P_{Gi}^{t-1} \leq [1 - u_i^t (1 - u_i^{t-1})] UR_i + u_i^t (1 - u_i^{t-1}) \underline{P}_{Gi} \quad (12)$$

$$P_{Gi}^{t-1} - P_{Gi}^t \leq [1 - u_i^{t-1} (1 - u_i^t)] DR_i + u_i^{t-1} (1 - u_i^t) \underline{P}_{Gi} \quad (13)$$

5) 最小启停时间约束:

$$(u_i^{t-1} - u_i^t) (T_i^{t-1} - \underline{T}_i^{\text{on}}) \geq 0 \quad (14)$$

$$(u_i^t - u_i^{t-1}) (-T_i^{t-1} - \underline{T}_i^{\text{off}}) \geq 0 \quad (15)$$

该约束为非线性的, 为方便建立半定规划模型, 计及机组的初始状态, 可整理得与其等价的线性组合表达式如下:

$$\sum_{\tau=t}^{a(\underline{T}_i^{\text{on}})} u_i^{\tau} \geq (u_i^t - u_i^{t-1}) b(\underline{T}_i^{\text{on}}) + \delta(t-1) a_i^0 \quad (16)$$

$$\sum_{\tau=t}^{a(\underline{T}_i^{\text{off}})} (1 - u_i^{\tau}) \geq (u_i^{t-1} - u_i^t) b(\underline{T}_i^{\text{off}}) + \delta(t-1) b_i^0 \quad (17)$$

6) 机组有功出力上下限约束:

$$u_{Gi}^t \bar{P}_{Gi} \geq P_{Gi}^t \geq u_{Gi}^t \underline{P}_{Gi} \quad i \in S_G \quad (18)$$

7) 机组无功上下限约束:

$$u_{Ri}^t \bar{Q}_{Ri} \geq Q_{Ri}^t \geq u_{Ri}^t \underline{Q}_{Ri} \quad i \in S_R \quad (19)$$

8) 电压上下限约束

$$\underline{V}_i^2 \leq ((e_i^t)^2 + (f_i^t)^2) \leq \bar{V}_i^2, i \in S_B, t \in T \quad (20)$$

以上模型中各变量和下标含义如下:

T 为调度周期的时段总数。

S_B, S_G, S_R, S_L 分别为系统节点集合, 发电机组集合, 无功电源集合和系统的线路集合, 其中各集合中元素有 n_B, n_G, n_R, n_L 个。

P_{Gi}, Q_{Ri} 分别为机组 $i \in S_G$ 的有功功率和无功功率 $i \in S_R$ 的无功功率。

SR^t 为系统的旋转备用, 取该时段负荷的 10%。

FP_i 为燃料单价 (\$/MBtu)。

$f_i(P_i^t)$ 为机组 $i \in S_G$ 的耗量特性函数。

CU_i 为机组 $i \in S_G$ 的启动费用。

UR_i, DR_i 为机组 $i \in S_G$ 的有功爬坡费用和功下降费用。

u_i^t 为机组 $i \in S_G$ 在第 $t \in T$ 时段的状态, $u_i^t = 1$ 表示机组 i 为运行状态, $u_i^t = 0$ 表示机组 i 为停机状态。

T_i^t 为机组 $i \in S_G$ 在第 $t \in T$ 时段已连续运行

(取正值)或连续停机的时间(取负值),且满足 $T_i^t = T_i^{t-1}u_i^t + u_i^{t-1}$ 和 $-T_i^t = -T_i^{t-1}(1-u_i^t) - (1-u_i^t)$ 。

$\underline{T}_i^{\text{on}}, \underline{T}_i^{\text{off}}$ 分别为机组 $i \in S_G$ 的最小运行时间和最小停机时间。

$a(\cdot)$ 为该参数与时刻 t 有关,当其参数为 $\underline{T}_i^{\text{on}}$ 时, $a(\underline{T}_i^{\text{on}}) = \min\{t + \underline{T}_i^{\text{on}} - 1, T\}$, 当其参数为 $\underline{T}_i^{\text{off}}$ 时, $a(\underline{T}_i^{\text{off}}) = \min\{t + \underline{T}_i^{\text{off}} - 1, T\}$ 。

$b(\cdot)$ 为该参数与时刻 t 有关,当其参数为 $\underline{T}_i^{\text{on}}$ 时, $b(\underline{T}_i^{\text{on}}) = \min\{\underline{T}_i^{\text{on}}, T - t + 1\}$, 当其参数为 $\underline{T}_i^{\text{off}}$ 时, $b(\underline{T}_i^{\text{off}}) = \min\{\underline{T}_i^{\text{off}}, T - t + 1\}$ 。

$\delta(t-1)$ 为脉冲函数:

$$\sigma(t-1) = \begin{cases} 1, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

a_i^0, b_i^0 为 $a_i^0 = u_i^1 u_i^0 \max\{0, \underline{T}_i^{\text{on}} - T_i^0\}$ 和 $b_i^0 = (1 - u_i^1)(1 - u_i^0) \max\{0, \underline{T}_i^{\text{off}} + T_i^0\}$, 均为常数,其中 $u_i^0 \in \{0, 1\}$, 是机组初始状态。

2.2 DOPF-UC 问题的凸优化模型

DOPF-UC 的混合整数非线性规划模型(8)~(20)中机组状态 u_i^t 是离散变量,可取值 0 或 1。对每一个 $u_i^t, i \in S_G \cup S_R$ 引入常数 $d_i^t = 1$, 显然 $u_i^t(u_i^t - 1) = 1 \Leftrightarrow (u_i^t)^2 - u_i^t d_i^t = 1$ 。同时,为方便建立 DOPF-UC 问题的半定规划模型,引入松弛变量将不等式约束转换成等式约束。这时, DOPF-UC 的凸优化模型可建立如下。

目标函数:

$$\min. F_{\text{Gost}} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{S_G} FP_i [a_i(u_{Gi}^t)^2 + b_i P_{Gi}^t u_{Gi}^t + c_i (P_{Gi}^t)^2 + (u_{Gi}^t)^2 CU_i^t - u_{Gi}^t u_{Gi}^{t-1} CU_i^t] \quad (21)$$

满足以下 10 种约束:

1) 功率平衡约束(潮流方程)共 $T \times n_B$ 个

$$\begin{cases} u_i^t P_{Gi}^t - \sum_{j \in S_B} (e_i^t e_j^t G_{ij} - e_i^t f_j^t B_{ij} + f_i^t f_j^t G_{ij} + f_i^t e_j^t B_{ij}) = P_{Di}^t \\ u_i^t Q_{Ri}^t - \sum_{j \in S_B} (f_i^t e_j^t G_{ij} - f_i^t f_j^t B_{ij} - e_i^t f_j^t G_{ij} - e_i^t e_j^t B_{ij}) = Q_{Di}^t \end{cases} \quad i \in S_B, t \in T \quad (22)$$

2) 线路共 $2 \times n_L$ 个

$$\begin{cases} (e_i^t)^2 G_{ij} + (f_i^t)^2 G_{ij} - e_i^t e_j^t G_{ij} - f_i^t f_j^t G_{ij} + e_i^t f_j^t B_{ij} - e_j^t f_i^t B_{ij} + (su_{Lij}^t)^2 = \bar{P}_{Lij} \\ (e_i^t)^2 G_{ij} + (f_i^t)^2 G_{ij} - e_i^t e_j^t G_{ij} - f_i^t f_j^t G_{ij} + e_i^t f_j^t B_{ij} - e_j^t f_i^t B_{ij} - (sl_{Lij}^t)^2 = \underline{P}_{Lij} \end{cases} \quad ij \in S_L, t \in T \quad (23)$$

3) 旋转备用共 T 个

$$\sum_{i \in S_G} ((u_i^t)^2 \bar{P}_{Gi} - u_i^t P_{Gi}^t) - SR^t - (sl_{SR}^t)^2 = 0 \quad t \in T \quad (24)$$

4) 机组爬坡共 $2 \times T \times n_G$ 个

$$\begin{cases} P_{Gi}^t - P_{Gi}^{t-1} + UR_i (u_{Gi}^t)^2 - UR_i u_{Gi}^t u_{Gi}^{t-1} - (u_{Gi}^t)^2 \underline{P}_{Gi} + u_{Gi}^t u_{Gi}^{t-1} \underline{P}_{Gi} + (su_{URi}^t)^2 = UR_i \\ P_{Gi}^t - P_{Gi}^{t-1} + DR_i (u_{Gi}^{t-1})^2 - DR_i u_{Gi}^{t-1} u_{Gi}^t - (u_{Gi}^{t-1})^2 \underline{P}_{Gi} + u_{Gi}^{t-1} u_{Gi}^t \underline{P}_{Gi} + (su_{DRi}^t)^2 = DR_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{Gi}^t d_{Gi}^t - P_{Gi}^{t-1} d_{Gi}^{t-1} + (UR_i - \underline{P}_{Gi})(u_{Gi}^t)^2 - (UR_i - \underline{P}_{Gi})u_{Gi}^t u_{Gi}^{t-1} + (su_{URi}^t)^2 = UR_i \\ P_{Gi}^{t-1} d_{Gi}^{t-1} - P_{Gi}^t d_{Gi}^t + (DR_i - \underline{P}_{Gi})(u_{Gi}^{t-1})^2 - (DR_i - \underline{P}_{Gi})u_{Gi}^{t-1} u_{Gi}^t + (su_{DRi}^t)^2 = DR_i \end{cases} \quad (25)$$

5) 最小启停时间共 $2 \times T \times n_G$ 个:

分析式(15)和(16),除 $t=1$ 的算式不一样,其他时段的可以用统一的算式表示。

当 $t=1$ 时,由于,

$$\begin{aligned} a(\underline{T}_i^{\text{on}}) &= \min\{t + \underline{T}_i^{\text{on}} - 1, T\} = \underline{T}_i^{\text{on}} \\ b(\underline{T}_i^{\text{on}}) &= \min\{\underline{T}_i^{\text{on}}, T - t + 1\} = \underline{T}_i^{\text{on}} \\ a(\underline{T}_i^{\text{off}}) &= \min\{t + \underline{T}_i^{\text{off}} - 1, T\} = \underline{T}_i^{\text{off}} \\ b(\underline{T}_i^{\text{off}}) &= \min\{\underline{T}_i^{\text{off}}, T - t + 1\} = \underline{T}_i^{\text{off}} \end{aligned}$$

则有:

$$\sum_{t=1}^{\underline{T}_i^{\text{on}}} (u_i^t)^2 - \underline{T}_i^{\text{on}} (u_i^t)^2 + \underline{T}_i^{\text{on}} (u_i^{t-1})^2 - (sl_{\text{ON}i}^1)^2 = \delta(t-1) a_i^0 \quad (26)$$

$$\sum_{t=1}^{\underline{T}_i^{\text{off}}} [1 - (u_i^t)^2] - \underline{T}_i^{\text{off}} (u_i^{t-1})^2 + \underline{T}_i^{\text{off}} (u_i^t)^2 - (sl_{\text{OFF}i}^1)^2 = \delta(t-1) b_i^0 \quad (27)$$

当 $t=2 \sim T$ 时,由于

$$\begin{aligned} a(\underline{T}_i^{\text{on}}) &= \min\{t + \underline{T}_i^{\text{on}} - 1, T\} \\ b(\underline{T}_i^{\text{on}}) &= \min\{\underline{T}_i^{\text{on}}, T - t + 1\} \\ a(\underline{T}_i^{\text{off}}) &= \min\{t + \underline{T}_i^{\text{off}} - 1, T\} \\ b(\underline{T}_i^{\text{off}}) &= \min\{\underline{T}_i^{\text{off}}, T - t + 1\} \end{aligned}$$

则有:

$$\sum_{t=1}^{a(\underline{T}_i^{\text{on}})} (u_i^t)^2 - b(\underline{T}_i^{\text{on}}) (u_i^t)^2 + b(\underline{T}_i^{\text{on}}) (u_i^{t-1})^2 - (sl_{\text{ON}i}^t)^2 = 0 \quad (28)$$

$$\sum_{t=1}^{a(\underline{T}_i^{\text{off}})} [1 - (u_i^t)^2] - b(\underline{T}_i^{\text{off}}) (u_i^{t-1})^2 + b(\underline{T}_i^{\text{off}}) (u_i^t)^2 - (sl_{\text{OFF}i}^t)^2 = 0 \quad (29)$$

6) 机组有功出力上下限共 $2 \times T \times n_G$ 个:

$$P_{Gi}^t u_{Gi}^t + (su_{Gi}^t)^2 = \bar{P}_{Gi} (u_{Gi}^t)^2, i \in S_G, t \in T \quad (30)$$

$$P_{Gi}^t u_{Gi}^t - (sl_{Gi}^t)^2 = \underline{P}_{Gi} (u_{Gi}^t)^2, i \in S_G, t \in T \quad (31)$$

7) 机组无功上下限共 $2 \times T \times n_R$ 个:

$$Q_{Ri}^t u_{Ri}^t + (su_{Ri}^t)^2 = \underline{Q}_{Ri} (u_{Ri}^t)^2, i \in S_R, t \in T \quad (32)$$

$$Q_{Ri}^t u_{Ri}^t - (sl_{Ri}^t)^2 = \underline{Q}_{Ri} (u_{Ri}^t)^2, i \in S_R, t \in T \quad (33)$$

8) 电压上下限共 $2 \times T \times n_B$ 个:

$$(e_i^t)^2 + (f_i^t)^2 + (su_{Bi}^t)^2 = \bar{V}_i^2, i \in S_B, t \in T \quad (34)$$

$$(e_i^t)^2 + (f_i^t)^2 - (sl_{Bi}^t)^2 = \underline{V}_i^2, i \in S_B, t \in T \quad (35)$$

9) 辅助变量约束共 $2 \times T \times n_G + 2 \times T \times n_R$ 个:

$$(d_{Gi}^t)^2 = 1, i \in S_G, t \in T \quad (36)$$

$$(d_{Ri}^t)^2 = 1, i \in S_R, t \in T \quad (37)$$

10) 机组启停状态共 $2 \times T \times n_G + 2 \times T \times n_R$ 个:

$$(u_{Gi}^t)^2 - u_{Gi}^t d_{Gi}^t = 0, i \in S_G, t \in T \quad (38)$$

$$(u_{Ri}^t)^2 - u_{Ri}^t d_{Ri}^t = 0, i \in S_R, t \in T \quad (39)$$

以上 10 种约束共有 $n = 2n_B + 2n_L + T(1 + 10n_G + 6n_R + 2n_B)$ 个。

2.3 DOPF-UC 问题的半定规划模型

首先定义矢量 x :

$$x = [x_{Gi}^t \ x_{Rj}^t \ x_B^t \ x_S^t], i \in S_G, j \in S_R, t \in T \quad (40)$$

其中:① 机组有功处理及其状态变量为

$$x_{Gi}^t = [P_{Gi}^t \ u_{Gi}^t \ d_{Gi}^t], t \in T, i \in S_G;$$

② 无功源及其状态变量为

$$x_{Ri}^t = [Q_{Ri}^t \ u_{Ri}^t \ d_{Ri}^t], t \in T, i \in S_R;$$

③ 节点电压(直角坐标)为

$$x_B^t = [\cdots e_i^t \ f_i^t \cdots], t \in T, i \in S_B;$$

④ 松弛变量为

$$x_s = [su_{Lij}^t \ sl_{Lij}^t \ sl_{SR}^t \ su_{UR1}^t \ \cdots \ su_{URS_G}^t \ su_{DR1}^t \ \cdots \ su_{DRS_G}^t \ sl_{ON1}^t \ \cdots \ sl_{ONS_G}^t \ sl_{OFF1}^t \ \cdots \ sl_{OFFS_G}^t \ su_{G1}^t \ \cdots \ su_{GS_G}^t \ sl_{G1}^t \ \cdots \ sl_{GS_G}^t \ \cdots \ su_{Q1}^t \ \cdots \ su_{QS_R}^t \ sl_{Q1}^t \ \cdots \ sl_{QS_R}^t \ su_B^t \ sl_B^t]$$

另外:

$su_{Lij}^t \ sl_{Lij}^t$: 线路功率上下限的松弛变量组;

sl_{SR}^t : 旋转备用约束松弛组;

$su_{UR1}^t \ \cdots \ su_{URS_G}^t$: 机组爬坡约束松弛组;

$su_{DR1}^t \ \cdots \ su_{DRS_G}^t$: 机组下降约束松弛组;

$sl_{ON1}^t \ \cdots \ sl_{ONS_G}^t$: 机组最小开机约束松弛组;

$sl_{OFF1}^t \ \cdots \ sl_{OFFS_G}^t$: 机组最小停机约束松弛组;

$su_{G1}^t \ \cdots \ sl_{GS_G}^t$: 机组有功功率上限约束松弛;

$sl_{G1}^t \ \cdots \ sl_{GS_G}^t$: 机组有功功率下限约束松弛组;

$su_{Q1}^t \ \cdots \ su_{QS_R}^t$: 机组无功功率上限约束松弛组;

$sl_{Q1}^t \ \cdots \ sl_{QS_R}^t$: 机组无功功率下限约束松弛组;

$su_B^t \ sl_B^t$: 系统节点电压幅值约束组。

定义矩阵变量 X 如下:

$$X = x'x = \begin{bmatrix} X_{G,G} & \cdots & \cdots & X_{G,S} \\ \vdots & X_{R,R} & & \vdots \\ \vdots & & X_{B,B} & \vdots \\ X_{S,G} & \cdots & \cdots & X_{S,S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{Gi}^t)'x_{Gi}^t & \cdots & \cdots & (x_{Gi}^t)'x_{Si}^t \\ & (x_{Ri}^t)'x_{Ri}^t & & \vdots \\ & & (x_{Bi}^t)x_{Bi}^t & \vdots \\ (x_{Si}^t)'x_{Gi}^t & \cdots & \cdots & (x_{Si}^t)'x_{Si}^t \end{bmatrix} \quad (41)$$

在矩阵变量 X 中的 $X_{G,G}$ 为

$$X_{G,G} = (x_{Gi}^t)'x_{Gi}^t = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & (P_{Gi}^t)^2 & P_{Gi}^t u_{Gi}^t & P_{Gi}^t d_{Gi}^t & P_{Gi}^t P_{Gj}^t & P_{Gi}^t u_{Gj}^t & P_{Gi}^t d_{Gj}^t \\ & (u_{Gi}^t)^2 & u_{Gi}^t d_{Gi}^t & \cdots & u_{Gi}^t P_{Gj}^t & u_{Gi}^t u_{Gj}^t & u_{Gi}^t d_{Gj}^t & \cdots \\ & & (d_{Gi}^t)^2 & & d_{Gi}^t P_{Gj}^t & d_{Gi}^t u_{Gj}^t & d_{Gi}^t d_{Gj}^t \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & (P_{Gj}^t)^2 & P_{Gj}^t u_{Gj}^t & P_{Gj}^t d_{Gj}^t \\ & & & & & (u_{Gj}^t)^2 & u_{Gj}^t d_{Gj}^t & \cdots \\ & & & & & & (d_{Gj}^t)^2 & \ddots \end{bmatrix} \quad (i, j \in S_G; t1, t2 \in T)$$

篇幅所限,且由于该矩阵变量是对称正定的^[20],这里仅列出其中 $X_{G,G}$ 子块中上三角元素以示说明。由此,根据矩阵迹的定义,可直接导出 DOPF-UC 问题的 SDP 模型原问题形式如下:

$$\min F = A_0 \cdot X$$

$$\text{s. t. } A_i \cdot X = b_i, i = 1, \cdots, n \quad (42)$$

$$x \geq 0$$

值得注意的是,按以上矢量 x 分组方式形成的

变量矩阵具有优良的分块特性,适合采用基于分块矩阵运算的半定规划稀疏技术求解^[22],使得求解 DOPF-UC 问题的计算和存储效率能大幅度提高。

3 内点半定规划法求解 DOPF-UC 问题

采用内点半定规划法求解 DOPF-UC 问题的流程如图 1。内点半定规划法求解 DOPF-UC 问题,其中离散变量存在少量非 0/1 解。采用一般的四舍五入处理,不能保证获得可行解。因此,为保证解的质量和可行性,本研究采用如下策略处理离散变量,列于图 2。图 2 是对图 1 中虚线部分的进一步说明。经验表明,多数情况下用该策略修正不超过 2 次就可以获得满意的结果,解的质量令人满意。

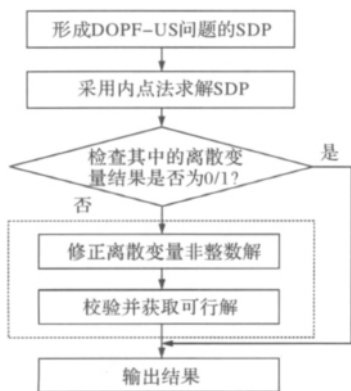


图 1 内点半定规划法求解 DOPF-UC 问题流程
Fig. 1 Flow chart of the solution of DOPF-UC problem by IPM of SDP

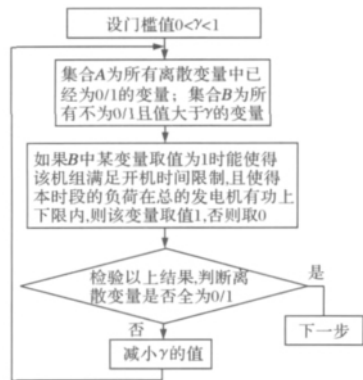


图 2 内点半定规划法离散变量处理策略
Fig. 2 Processing strategy of discrete variables by IPM of SDP

4 仿真计算及算例分析

本研究对 4 个规模从 6 到 118 的系统进行仿真计算和研究,调度时间均为 24 h。其中 GX-98 是广西的一个实际系统,有 36 台机组和 98 个节点。各

算例规模列于表 1。

表 1 算例规模
Tab. 1 Example size

算例	系统规模			模型规模		
	节点数	发电机	传输线路	约束	整数变量	总变量
TEST-6	6	3	5	1561	144	1584
IEEE-30	30	6	37	6168	288	6264
GX-98	98	36	53	19126	1728	20458
IEEE-118	118	54	177	32855	2592	34104

4.1 TEST-6——六节点系统

本小节用一个 6 节点的简单电力系统说明 SDP 求解 DOPF-UC 问题的结果和优越性,见图 3,其中含 3 台发电机,5 条传输线路和 2 台有载调压器。TEST-6 中发电机、节点、有载调压变压器、线路参数及系统 24 时段负荷分别列于表 2 至表 6。

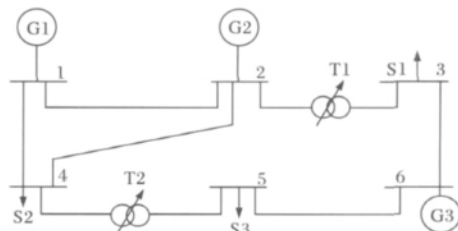


图 3 六节点电力系统——TEST-6
Fig. 3 TEST-6: Six bus power system

表 2 发电机数据
Tab. 2 Generator data

参数	机组		
	G1	G2	G3
节点编号	1	2	6
机组 A (MBtu)	176.9	129.9	137.4
费用 b (MBtu/MWh)	13.5	32.6	32.6
系数 c (MBtu/MW ² h)	0.0004	0.001	0.001
有功出力上限 (MW)	220	100	20
有功出力下限 (MW)	100	10	10
无功出力上限 (Mvar)	200	70	50
无功出力下限 (Mvar)	-80	-40	-40
已开机时间 (h)	4	2	2
最小停机时间 (h)	4	2	2
最小开机时间 (h)	4	2	2
爬坡速率 (MW/h)	100	50	20
机组启动能量 (MBtu)	100	200	0
燃料费用 (\$/MBtu)	1	1	1

表 3 节点电压幅值数据 (标幺值)

Tab. 3 Bus voltage amplitude data (pu)

节点	上限	下界
1	1.05	0.95
2	1.15	0.95
3	1.15	0.95
4	1.05	0.95
5	1.15	0.95
6	1.15	0.95

表 4 传输线路数据
Tab. 4 Transmission line data

线路 编号	首节点	尾节点	电阻 (pu)	电抗 (pu)	线路功率 限制/(MW)
1	1	2	0.0050	0.170	200
2	1	4	0.0030	0.258	100
3	2	4	0.0070	0.197	100
4	5	6	0.0020	0.140	100
5	3	6	0.0005	0.018	100

表 5 有载调压变压器数据
Tab. 5 On-load tap changer data

变压器 编号	首节点	尾节点	电阻 (pu)	电抗 (pu)	最大分 接头(pu)	最小分 接头(pu)
1	1	2	0.0	0.170	0.98	0.95
2	1	4	0.0	0.258	0.98	0.95

为详细说明所提方法的有效性,考虑以下 2 种情况:

1)UC-TEST-6:无任何网络约束,相当于传统的机组组合问题;

2)DOPF-TEST-6:考虑潮流方程、线路传输限制和节点电压限制,为考虑机组组合的动态最优潮流问题。以下分别予以说明。

表 6 每小时负荷
Tab. 6 Hourly load

时段	有功/ (MW)	无功/ (Mvar)	时段	有功/ (MW)	无功/ (Mvar)
1	178.69	50.37	13	247.03	69.63
2	168.45	47.48	14	248.47	70.03
3	161.84	45.62	15	253.83	71.55
4	157.83	44.48	16	270.90	73.54
5	158.16	44.58	17	290.12	73.60
6	163.69	46.14	18	251.68	70.94
7	176.86	49.85	19	250.89	70.72
8	198.21	51.06	20	242.10	68.24
9	209.67	53.71	21	242.05	68.23
10	223.54	59.50	22	231.68	66.89
11	233.18	65.73	23	198.07	52.33
12	240.80	67.88	24	190.69	51.23

4.1.1 UC-TEST-6

运用内点半定规划法求解机组组合问题^[21],机组启停计划列于表 7。其中 0/1 分别表示机组的启停状态。24 h 运行费用为 \$ 84317.80。可看出,在满足有功功率与负荷平衡的情况下,为使运行费用最小,费用较高的机组 2 和 3 在某些时段不开机。

考察该机组运行计划,在时段 10 中仅有机组 1 和 2 投入运行。检查该时段的潮流分布情况,此时

线路 1-4 的有功传输功率为 102.38MW,存在线路传输功率越限;同时,节点 2 和 4 的电压幅值分别为 0.9464 和 0.9363,低于电压幅值要求。很明显,该机组运行计划不满足实际运行要求。

表 7 机组启停计划(算例 1)
Tab. 7 Unit commitment (example one)

24 时段运行费用 = \$ 83430.11	
U	时段(0-24)
G1	1 1
G2	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
G3	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0

4.1.2 DOPF-TEST-6

用本文所提方法求解计及电网静态安全约束的机组组合问题,机组启停计划列于表 8。

表 8 计及电网静态安全约束的机组启停计划
Tab. 8 Security-constrained unit commitment

24 时段运行费用 = \$ 84317.80	
U	时段(0-24)
G1	1 1
G2	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
G3	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0

按以上计划运行,UC-TEST-6 中出现的线路传输功率越限和节点电压越限问题同时被消除。由于考虑了系统网损,且在第 10 时段为解决越限问题,3 台发电机此刻同时投入运行,造成总的运行费用比 UC-TEST-6 高,达 \$ 84317.90。

表 9 对 UC-TEST-6 和 DOPF-TEST-6 计算出

表 9 机组调度有功出力比较
Tab. 9 Comparing the active power output of unit schedule

时 段	UC-TEST-6			DOPF-TEST-6		
	U1(MW)	U2(MW)	U3(MW)	U1(MW)	U2(MW)	U3(MW)
1	168.69	10	0	169.34	10	0
2	168.45	0	0	169.08	0	0
3	161.84	0	0	162.42	0	0
4	157.83	0	0	158.38	0	0
5	158.16	0	0	158.72	0	0
6	163.69	0	0	164.29	0	0
7	176.86	0	0	177.56	0	0
8	198.21	0	0	199.09	0	0
9	199.67	10	0	200.57	10	0
10	213.54	10	0	204.5	10	10
11	213.18	10	10	214.27	10	10
12	220	10	10.8	220	10	12.35
13	220	10	17.03	220	10	18.71
14	220	10	18.47	220	10.18	20
15	220	13.83	20	220	15.72	20
16	220	30.9	20	220	33.44	20
17	220	50.12	20	217.78	55.82	20
18	220	11.68	20	220	13.5	20
19	220	10.89	20	220	12.68	20
20	220	10	12.1	220	10	13.68
21	220	10	12.05	220	10	13.63
22	211.68	10	10	212.73	10	10
23	198.07	0	0	198.95	0	0
24	190.69	0	0	191.5	0	0

的各时段发电机有功出力进行比较。结果表明,由

于 DOPF-TEST-6 考虑了网络约束, 机组有功出力 and 运行费用均有所增加。同时, 也正是由于同时考虑了系统安全运行约束, DOPF-TEST-6 计算得出的机组运行计划能满足实际运行需要。

4.2 算法性能及其收敛性

采用内点半定规划法能有效地求解 DOPF-UC 问题。针对少数离散变量的微小偏差采取修正策略, 能获得满意的整数解。表 10 显示了四个算例中关于离散变量处理的计算情况, 其中离散变量值大于 0.9 的认定为 1, 小于 0.05 的认定为 0。门槛值 γ 从 0.5 递减。从表中可以看出, 随着系统规模的增加, 离散变量解的质量也随着提高, 用于修正非整数解的计算代价因此降低。

表 10 离散变量处理
Tab. 10 Processing discrete variables

算例	离散变量非 0/1 解 / (%)	求整数解 修正次数	修正计算时间 / 总计算时间 / (%)
TEST-6	12.5	1	1.01
IEEE-30	11.1	1	0.52
GX-98	10.7	2	0.13
IEEE-118	2.85	1	0.002

互补间隙是判断是否达到最优解的一个重要标准, 它的变化趋势能反映算法特点。一般来说, 判断一个算法优秀与否的标准是其互补间隙能否快速单调递减至 0。图 4 表明, 内点半定规划法求解 DOPF-UC 问题核心计算的互补间隙在给定误差范围内均能于有限次迭代步快速单调收敛趋于 0。

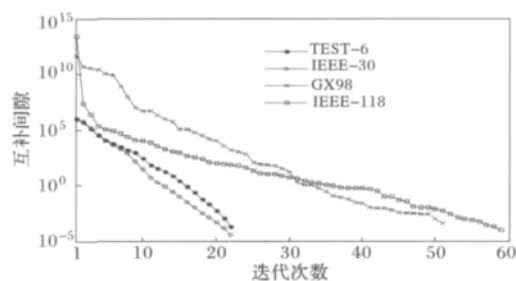


图 4 互补间隙收敛曲线

Fig. 4 Complementary gaps with iterations

5 结语

本文提出了一种基于内点半定规划模型求解考虑机组组合的动态最优潮流问题的新方法, 并系统讨论了如何建立其半定规划模型、相关核心算法步骤和算例仿真分析。仿真结果表明, 所提方法能有效处理离散变量, 不必对原问题模型分层求解,

且算法性能稳定, 研究和应用前景广阔。但该方法目前还无法计算超大规模的系统, 因此, 深入研究相关稀疏技术和并行计算将是以后研究的重点。实际上, 这正是数值最优化领域当前的研究热点。

参考文献:

- [1] 袁贵川, 王建全 (Yuan Guichuan, Wang Jianquan). 考虑了动态约束和稳定约束的最优潮流 (Optimal power flow considering dynamic and stability constraints) [J]. 电力系统及其自动化学报 (Proceedings of the CSU-EPSA), 2003, 15(3): 1-5, 9, 16.
- [2] Yamin H Y, Al-Tallaq Kamel, Shahidehpour S M. New approach for dynamic optimal power flow using Benders decomposition in a deregulated power market [J]. Electric Power Systems Research, 2003, 65 (2): 101-107.
- [3] Yong Fu, Shahidehpour S M, Li Zuyi. AC contingency dispatch based on security-constrained unit commitment [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2006, 21(2): 897-908.
- [4] Abdul-Rahman K H, Shahidehpour S M, Aganagic M, et al. Practical resource scheduling with OPF constraints [J]. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(1): 254-259.
- [5] 丁晓莺, 王锡凡, 张显, 等 (Ding Xiaoying, Wang Xifan, Zhang Xian, et al). 基于内点割平面法的混合整数最优潮流算法 (Mixed integer optimal power flow based on interior point cutting plane method) [J]. 中国电机工程学报 (Proceedings of the CSEE), 2004, 24(2): 1-7.
- [6] Raglend I Jacob, Padhy Narayana P. Solutions to practical unit commitment problems with operational, power flow and environmental constraints [C]// IEEE Power Engineering Society General Meeting, Montreal, Canada; 2006.
- [7] Ragupathi Rajkumar, Das Tapas K. A stochastic game approach for modeling wholesale energy bidding in deregulated power markets [J]. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 2004, 19(2): 849-856.
- [8] Adler I, Alizadeh F. Primal-dual interior point algorithms for convex quadratically constrained and semi-definite optimization problems [R]. New Brunswick: Rutgers University, 1995.
- [9] Todd M J. Semidefinite optimization [J]. Acta Numerica, 2001, 10(1): 515-560.
- [10] Wolkowicz H. Handbook of Applied Optimization [M]. New York: Oxford University Press, 2001.

- [11] Parrilo P. Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization[D]. Pasadena: Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, 2000.
- [12] Parrilo P A. Sanjay Lall Semidefinite programming relaxations and algebraic optimization in control[J]. European Journal of Control, 2003, 9(2-3):307-321.
- [13] Alkire B, Vandenberghe L. Convex optimization problems involving finite autocorrelation sequences [R]. Los Angeles: , Electrical Engineering Department of University of California Los Angeles, 2001.
- [14] Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging[R]. USA: Stanford University, 2003.
- [15] Goemans M X, Rendl F. Semidefinite programming in combinatorial optimization[J]. Mathematical Programming, 1997, 79(1):143-161.
- [16] Benson Steven J, Ye Yinyu, Zhang Xiong. Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 10(1):1-20.
- [17] Fujisawa K, Fukuda M, Kojima M, *et al* . Numerical evaluation of SDPA [R] . Tokyo, Japan: Department of Mathematical and Computing Sciences of Tokyo Institute of Technology, 1998.
- [18] Fuentes-Loyola Rodrigo, Quintana Victor H. Medium-term hydrothermal coordination by semidefinite programming[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2003, 18(4):1515-1522.
- [19] Madrigal M, Quintana V H. Semidefinite programming relaxations for {0,1}-Power dispatch problems [C] // IEEE PES Summer Meeting, Edmonton , Canada: 1999.
- [20] 白晓清, 韦化, Katsuki Fujisaw (Bai Xiaoping, Wei Hua, Katsuki Fujisaw). 求解最优潮流问题的内点半定规划法 (Solution of optimal power flow problems by semi-definite programming)[J]. 中国电机工程学报 (Proceedings of the CSEE), 2008, 28(19): 56-64.
- [21] 韦化, 吴阿琴, 白晓清 (Wei Hua, Wu Aqin, Bai Xiaoping). 一种求解机组组合问题的内点半定规划方法 (An interior point semidefinite programming for unit commitment problems)[J]. 中国电机工程学报 (Proceedings of the CSEE), 2008, 28(1): 35-40.
- [22] Fujisawa Katsuki, Kojima Masakazu, Nakata Kazuhide. Exploiting sparsity in primal-dual interior-point methods for semidefinite programming[J]. Mathematical Programming, 1997, 79(1-3):235-253.

作者简介:

白晓清(1969—),女,博士研究生,副教授,研究方向为电力系统最优化。Email:baixq@gxu.edu.cn

韦化(1954—),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为最优化理论及其在电力系统中的应用。

关于量和单位

1. 量的符号一般为单个字母,并一律采用斜体(pH 例外)。必要时,可在量符号上附加角标。
2. 在表达量值时,在公式、图、表和文字叙述中,一律使用单位的国际符号,且均用正体。
3. 不可修饰单位符号,如:加缩写点、角标、复数形式。
4. 在图和表中,特定单位表示量的数值时,用量与单位相比形式,如:L/m, m/kg, cB/(mol · dm⁻³)。
5. 不能把 ppm, pphm, ppb, ppt, rpm 等缩写字作单位使用。
6. 词头不得独立使用,也不能重叠使用。如:μm, 不用 μ; pF, 不用 μμF。
7. 组合单位的分母中般不加词头,也不在分子分母同时加词头。如: kJ/mol 不写成 J/mm, MV/m 不写成 kV/mm。

摘编于《中国高等学校自然科学学报编排规范》(修订版)