

# 基于混合整数半定规划的含分布式电源配电网无功优化

董 雷<sup>1</sup>, 田爱忠<sup>2,3</sup>, 于 汀<sup>2</sup>, 蒲天骄<sup>2</sup>

(1. 华北电力大学电气与电子工程学院, 北京市 102206; 2. 中国电力科学研究院, 北京市 100192;

3. 国网江苏省电力公司, 江苏省南京市 210008)

**摘要:**含分布式电源配电网的无功优化是一个复杂的非凸非线性混合整数规划问题。提出一种求解含分布式电源配电网无功优化问题的新方法。该方法首先将不含离散变量的无功优化原始数学模型转化并松弛为凸的半定规划模型,以保证解的全局最优性,且能在多项式时间内完成;然后,加入离散变量将该模型扩展为混合整数半定规划模型。采用奔德斯分解法将该模型分解为简单的混合整数线性规划主问题和仅含连续变量的半定规划子问题,通过主子问题的交替迭代求得最优解。最后,通过算例系统仿真验证了所提方法具有松弛精确、求解高效、寻优准确等优点。

**关键词:**分布式电源;配电网;无功优化;半定规划;奔德斯分解

## 0 引言

近年来,随着分布式电源(DG)在配电网中的渗透率不断增长,配电网由单电源、辐射状结构变为遍布电源和负荷的复杂网络。这对配电网的运行控制产生了重大的影响<sup>[1-2]</sup>。研究含 DG 配电网无功优化可以保证配电网的电能质量以及安全稳定运行,并提高配电网的运行经济性,具有十分重要的意义。

含分布式电源的配电网的无功优化控制问题既要处理 DG 和静止无功补偿装置(SVC)的无功出力等连续控制变量,又要处理分组投切电容器组挡位等离散控制变量。因此,该问题在数学上可表示为一类复杂的非凸非线性混合整数规划问题,属于非确定多项式(NP)难题,目前尚无较好的处理方法。

对于配电网无功优化方法的研究主要集中在人工智能算法上,如遗传算法<sup>[3]</sup>、粒子群算法<sup>[4]</sup>、免疫算法<sup>[5]</sup>等都取得了一定的成果,体现出良好的鲁棒性和自适应性<sup>[6]</sup>。但是当电力系统的规模比较大时,人工智能算法容易陷入局部最优解并且存在维数灾。凸规划模型能够保证解的全局最优性,具有优良的数学特性。半定规划(SDP)<sup>[7-8]</sup>属于凸规划问题,是当前数值最优化领域的研究热点之一。其理论研究已逐渐成熟,被成功应用到了多个领域。文献[9]首次将 SDP 应用于求解电力系统最优潮流(OPF)问题。文献[10-14]对 OPF 的 SDP 模型进

行深入的理论研究,并分别通过严格的数学推导给出了不同形式的保证半定松弛精确性的充分条件。二阶锥规划(SOCP)具有与 SDP 相类似的数学性质,同样被应用于 OPF 中<sup>[15-16]</sup>。

相比于 OPF,配电网无功优化问题的一个主要难点在于对离散变量的处理。输电网无功优化问题通常将离散变量连续化处理,采用启发式规则<sup>[17-18]</sup>或内嵌罚函数<sup>[19-20]</sup>等方法使离散变量归整。但是配电网中离散变量的数量较多,连续化处理可能会导致解的不精确乃至不可行。文献[21]将三相配电网无功优化模型松弛为一个 SOCP 模型,取得了较好的计算结果,但未深入研究与该模型相对应的离散变量的处理方法。

针对配电网无功优化问题,目前尚缺乏一种能够兼顾求解的高效性和所得解的全局最优性的方法。本文建立了配电网无功优化的数学模型,在不考虑离散变量的情况下将原始模型转化并松弛为一个凸的 SDP 模型,然后加入离散变量将该模型扩展为混合整数半定规划(MISDP)模型。根据模型特点,给出基于奔德斯分解法求解 MISDP 模型的方法。该方法可以高效精确地处理离散变量和连续变量并得到全局最优解。通过 2 个配电系统算例的仿真计算,验证了本文所提方法具有松弛精确、求解高效、寻优准确等优点。

## 1 无功优化的数学模型

### 1.1 目标函数

本文选取配电网有功网损最小作为无功优化的

收稿日期: 2014-12-29; 修回日期: 2015-04-14。

国家高技术研究发展计划(863 计划)资助项目(2015AA050102);国家电网公司科技项目(NY71-14-040)。

目标函数,即

$$\min P_{\text{Loss}} = \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n P_{i,d} \quad (1)$$

式中: $P_{\text{Loss}}$ 为系统有功网损; $n$ 为系统节点数; $P_i$ 为系统每一节点的注入有功功率; $P_{i,d}$ 为系统中节点*i*的有功负荷。

## 1.2 约束条件

### 1) 潮流方程等式约束

为便于把无功优化的模型转化为SDP模型,本节中的潮流方程以矩阵和向量的形式给出。

对于系统中的每一个节点*i*:

$$\begin{aligned} S_i &= \mathbf{e}_i^* \mathbf{U} \mathbf{I}^* \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^* \mathbf{U} \mathbf{U}^* \mathbf{Y}_i^* \mathbf{e}_i = \\ &\text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{U}^* (\mathbf{Y}_i^* \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^*)) = \mathbf{U}^* \mathbf{Y}_i^* \mathbf{U} = \\ &\mathbf{U}^* \frac{\mathbf{Y}_i^* + \mathbf{Y}_i}{2} \mathbf{U} + \mathbf{j} \left( \mathbf{U}^* \frac{\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_i}{2\mathbf{j}} \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $S_i$ 为节点*i*的注入功率; $\mathbf{e}_i$ 为第*i*个元素为1,其他元素全为0的列向量; $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{I}$ 分别为电压列向量和电流列向量; $\mathbf{Y}$ 为系统节点导纳矩阵; $\mathbf{Y}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{Y}$ ;  $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

令 $\Phi_i = (\mathbf{Y}_i^* + \mathbf{Y}_i)/2$ ,  $\Psi_i = (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_i)/2$ ,并将式(2)的实部、虚部分列,可得:

$$\begin{cases} P_i = P_{i,\text{DG}} - P_{i,d} = \mathbf{U}^* \Phi_i \mathbf{U} \\ Q_i = Q_{i,\text{DG}} + Q_{i,\text{SVC}} + k_i q_{i,\text{CP}} - Q_{i,d} = \mathbf{U}^* \Psi_i \mathbf{U} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $Q_i$ 为节点*i*的注入无功功率; $P_{i,\text{DG}}$ 为节点*i*上所连接的DG的有功功率; $Q_{i,\text{DG}}$ 、 $Q_{i,\text{SVC}}$ 、 $Q_{i,d}$ 分别为节点*i*上所连接的DG无功功率、SVC的补偿功率和负荷的无功功率; $k_i$ 为分组投切电容器组的挡位; $q_{i,\text{CP}}$ 为分组投切电容器组单位挡位的补偿功率。

本文采用由不同比例的恒功率模型和恒阻抗模型所构成的组合模型表示配电网中不同种类的负荷。负荷模型表达形式如下:

$$\begin{cases} P_{i,d} = P_{i,0} \left[ a_{i,P} \left( \frac{V_i}{V_{i,0}} \right)^2 + b_{i,P} \right] = b_{i,P} P_{i,0} + \mathbf{U}^* \Phi_i^* \mathbf{U} \\ Q_{i,d} = Q_{i,0} \left[ a_{i,Q} \left( \frac{V_i}{V_{i,0}} \right)^2 + b_{i,Q} \right] = b_{i,Q} Q_{i,0} + \mathbf{U}^* \Psi_i^* \mathbf{U} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $P_{i,0}$ 和 $Q_{i,0}$ 分别为额定电压幅值 $V_{i,0}$ 下的有功负荷和无功负荷; $a_{i,P}$ 和 $b_{i,P}$ 分别为恒阻抗有功负荷和恒功率有功负荷在总有功负荷中所占的比例; $a_{i,Q}$ 和 $b_{i,Q}$ 分别为恒阻抗无功负荷和恒功率无功负荷在总无功负荷中所占的比例; $V_i$ 为电压幅值; $\Phi_i^* = a_{i,P} P_{i,0} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* / V_{i,0}^2$ ;  $\Psi_i^* = a_{i,Q} Q_{i,0} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* / V_{i,0}^2$ 。

### 2) 不等式约束

连续无功补偿装置的不等式约束为:

$$Q_{i,\text{con}} \leq Q_{i,\text{con}} \leq \bar{Q}_{i,\text{con}} \quad (5)$$

式中: $Q_{i,\text{con}}$ 、 $\underline{Q}_{i,\text{con}}$ 、 $\bar{Q}_{i,\text{con}}$ 分别为连续无功补偿装置无功功率及其下限值和上限值。

分组投切电容器组挡位的不等式约束为:

$$k_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_i\} \quad (6)$$

式中: $K_i$ 为节点*i*所连接电容器组的最高挡位。

DG运行约束为:

$$\begin{cases} P_{i,\text{DG}} = P_{i,\text{DG}}^{\text{pre}} \\ 0 \leq Q_{i,\text{DG}} \leq \bar{Q}_{i,\text{DG}} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $P_{i,\text{DG}}^{\text{pre}}$ 为DG有功出力的预测值; $\bar{Q}_{i,\text{DG}}$ 为DG无功出力的上限值。

本文考虑的主要为通过逆变器并网的DG。根据文献[5],直驱式风电机组、燃料电池、光伏系统和微透平机组等发出直流或高频交流电的DG均需通过逆变器与电网并网,且并网功率可以实现有功功率和无功功率独立调节。通过逆变器能够提供无功功率的最大容量为:

$$Q_{\text{DG,max}} = \sqrt{S_{\text{max}}^2 - P_{\text{act}}^2} \quad (8)$$

式中: $S_{\text{max}}$ 为DG并网逆变器能提供的最大视在功率; $P_{\text{act}}$ 为DG并网逆变器提供的有功功率。

因此,在已知DG有功出力预测值的情况下,可以采用式(7)所表示的DG运行约束。

节点电压的不等式约束为:

$$\underline{V}_i^2 \leq V_i^2 \leq \bar{V}_i^2 \quad (9)$$

式中: $\underline{V}_i$ 和 $\bar{V}_i$ 分别为电压幅值的下限值和上限值。

以上所建立的含DG配电网无功优化的数学模型很复杂,目前的商用和开源优化软件很难有效求解该问题<sup>[21]</sup>。考虑到SDP模型具有优良的数学特性,本文将应用到配电网无功优化模型中。

## 2 原始数学模型转化为MISDP模型

### 2.1 不考虑离散变量的SDP模型

SDP原问题的标准形式见文献[9]。

当不考虑无功优化原始数学模型中的离散变量,即认为电容器组的挡位取某一定值时式(6)可用一个等式约束代替:

$$k_i = \xi_i \quad (10)$$

目标函数可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n P_{i,d} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{U}^* \Phi_i \mathbf{U} - \sum_{i=1}^n \mathbf{U}^* \Phi_i^* \mathbf{U} - \\ &\sum_{i=1}^n b_{i,P} P_{i,0} = \mathbf{U}^* \left( \frac{\mathbf{Y}^* + \mathbf{Y}}{2} - \Phi^* \right) \mathbf{U} - \\ &\sum_{i=1}^n b_{i,P} P_{i,0} = \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^*) - \sum_{i=1}^n b_{i,P} P_{i,0} \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $\Phi^* = \sum_{i=1}^n \Phi_i^*$ ;  $\mathbf{M} = (\mathbf{Y}^* + \mathbf{Y})/2 - \Phi^*$ 。

消去  $Q_{i,DG}, Q_{i,SVC}$  和  $k_i$ , 则原问题可改写为:

$$\begin{cases} \min_U \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{U}^*) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}((\Phi_i + \Phi_i^*)\mathbf{U}\mathbf{U}^*) = P_i' \\ \quad \underline{Q}_i \leq \text{tr}((\Psi_i + \Psi_i^*)\mathbf{U}\mathbf{U}^*) \leq \bar{Q}_i \\ \quad \underline{V}_i^2 \leq \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{U}\mathbf{U}^*) \leq \bar{V}_i^2 \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $P_i' = P_{i,DG}^{\text{pre}} - b_{i,P} P_{i,0}$ ;  $\underline{Q}_i = \underline{Q}_{i,DG} + \underline{Q}_{i,SVC} + \xi_i q_{i,CP} - b_{i,Q} Q_{i,0}$ ,  $\bar{Q}_i = \bar{Q}_{i,DG} + \bar{Q}_{i,SVC} + \xi_i q_{i,CP} - b_{i,Q} Q_{i,0}$ , 其中,  $\underline{Q}_{i,DG}$  和  $\bar{Q}_{i,DG}$  分别为  $Q_{i,DG}$  的下限值和上限值,  $\underline{Q}_{i,SVC}$  和  $\bar{Q}_{i,SVC}$  分别为  $Q_{i,SVC}$  的下限值和上限值。

矩阵  $\mathbf{W}$  与  $\mathbf{U}\mathbf{U}^*$  等价的充要条件为  $\mathbf{W} \geq 0$  且  $\mathbf{W}$  的秩  $\text{rank}(\mathbf{W}) = 1$ , 故式(12)等价于:

$$\begin{cases} \min_W \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}((\Phi_i + \Phi_i^*)\mathbf{W}) = P_i' \\ \quad \underline{Q}_i \leq \text{tr}((\Psi_i + \Psi_i^*)\mathbf{W}) \leq \bar{Q}_i \\ \quad \underline{V}_i^2 \leq \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}) \leq \bar{V}_i^2 \\ \quad \mathbf{W} \geq 0 \\ \quad \text{rank}(\mathbf{W}) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)中的最后一个约束条件松弛掉后, 所得模型中除了矩阵变量半正定这一非线性条件外, 目标函数和约束条件都是线性的。至此, 采用半定松弛的方法将原始模型松弛为了一个凸的 SDP 模型, 能够保证解的全局最优性。

松弛后的 SDP 模型可通过原始-对偶内点法求解<sup>[10]</sup>。求得 SDP 最优解  $\mathbf{W}$  后, 还需将其映射回原问题的解空间。考虑到  $\mathbf{W}$  的物理含义是电压列向量与其共轭转置向量的乘积, 写成极坐标形式为:

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} V_1 V_1 \angle \theta_{11} & V_1 V_2 \angle \theta_{12} & \cdots & V_1 V_n \angle \theta_{1n} \\ V_2 V_1 \angle \theta_{21} & V_2 V_2 \angle \theta_{22} & \cdots & V_2 V_n \angle \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_n V_1 \angle \theta_{n1} & V_n V_2 \angle \theta_{n2} & \cdots & V_n V_n \angle \theta_{nn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中:  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ 。

由式(14)可知,  $\mathbf{W}$  中元素的相角均为相对值。设第  $i$  个节点为配电网根节点, 且相角为 0, 则节点电压  $U_i = \sqrt{W_{ii}}$ , 求得  $U_i$  后, 由  $U_j = W_{ji}/U_i$  可求得电压列向量  $\mathbf{U}'$ , 代入式(3)即可得所有 DG 和 SVC 的无功出力。

在上述半定松弛过程中, 原问题的非凸可行域  $\mathbf{C}_{\text{original}}$  被松弛为一个凸的可行域  $\mathbf{C}_{\text{SDP}}$ , 如果在  $\mathbf{C}_{\text{SDP}}$  中所得的最优解  $\mathbf{W}$  满足秩为 1, 说明最优解同样为

$\mathbf{C}_{\text{original}}$  中的点, 则称该松弛是严格的<sup>[21]</sup>, 通过 SDP 模型得到的最优解也是原问题的最优解。文献[10-14]分别给出了不同形式的能够保证半定松弛精确的充分但不必要条件, 但是目前尚未有学者能给出保证半定松弛精确的充要条件。

本文给出如下的半定松弛精确性的验证方法: 将求解 SDP 模型所得的最优解  $\mathbf{W}$  与由  $\mathbf{W}$  映射所得的矩阵  $\mathbf{U}'\mathbf{U}'^*$  作差, 如果差矩阵中每一个元素值都足够小, 则说明  $\mathbf{W}$  在数值上非常接近一个秩为 1 的矩阵, 即半定松弛是足够精确的。

2.2 加入离散变量的 MISDP 模型

在 SDP 模型中再加入分组投切电容器组挡位这一离散变量后, SDP 模型扩展为 MISDP 模型。其表达式如下:

$$\begin{cases} \min_W \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}((\Phi_i + \Phi_i^*)\mathbf{W}) = P_i' \\ \quad \underline{Q}_i' \leq \text{tr}((\Psi_i + \Psi_i^*)\mathbf{W}) - k_i q_{i,CP} \leq \bar{Q}_i' \\ \quad \underline{V}_i^2 \leq \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}) \leq \bar{V}_i^2 \\ \quad \mathbf{W} \geq 0 \\ \quad k_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_i\} \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $\underline{Q}_i' = \underline{Q}_{i,DG} + \underline{Q}_{i,SVC} - b_{i,Q} Q_{i,0}$ ;  $\bar{Q}_i' = \bar{Q}_{i,DG} + \bar{Q}_{i,SVC} - b_{i,Q} Q_{i,0}$ 。

通过上述方法, 将含 DG 配电网无功优化的原始数学模型转化为了 MISDP 模型。由于 SDP 模型的凸规划属性, 在 MISDP 模型中, 求解任意一组离散变量的取值情况下的子 SDP 模型, 所得的最优解都是该子模型的全局最优解。因此, 如果能选出离散变量的最优取值, 并使得该离散变量取值下的子 SDP 模型的解最优, 那么就能得到配电网无功优化 MISDP 模型的全局最优解。

3 基于奔德斯分解法求解 MISDP 模型

结合 MISDP 模型的数学特点, 本文采用奔德斯分解法处理该模型中的离散变量。

3.1 奔德斯分解法的主子问题模型

将 MISDP 模型分解为一个简单的混合整数线性规划(MILP)主问题和一个仅含连续变量的 SDP 子问题<sup>[22-23]</sup>。主问题和子问题的目标函数值分别为总问题目标函数值的下界和上界。主问题的目标函数值随着迭代过程而不断增长, 当主子问题的函数值间隙小于某一给定值时算法即收敛。

SDP 子问题即为上文所述的离散变量为某一定值时的 SDP 模型, 表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_w \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}((\Phi_i + \Phi_i^*)\mathbf{W}) = P_i' \\ \underline{Q}_i' \leq \text{tr}((\Psi_i + \Psi_i^*)\mathbf{W}) - k_i q_{i,\text{CP}} \leq \bar{Q}_i' \\ \underline{V}_i^2 \leq \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}) \leq \bar{V}_i^2 \\ \mathbf{W} \geq 0 \\ k_i = \xi_i^{(v)} \end{array} \right. \quad (16)$$

式中:  $\xi_i^{(v)}$  为第  $v$  次迭代过程中节点  $i$  所连接电容器组的挡位取值。

主问题是一个简单的 MILP 模型,求解速度很快。其表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha \\ \text{s.t.} \quad \alpha \geq P_{\text{Loss}}(\xi_i^{(l)}) + \sum \lambda_i^{(l)} (k_i - \xi_i^{(l)}) \\ l = 0, 1, \dots, v \\ k_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_i\} \end{array} \right. \quad (17)$$

式中:  $\lambda_i^{(l)}$  为第  $l$  次迭代过程中对应于  $k_i = \xi_i^{(l)}$  这一约束条件的对偶变量(拉格朗日乘子),物理意义为离散变量值对目标函数值的灵敏度系数,其值在原始对偶内点法解 SDP 模型的过程中可一并求出;  $P_{\text{Loss}}(\xi_i^{(l)})$  为第  $l$  次迭代过程中当  $k_i = \xi_i^{(l)}$  时子问题的目标函数值;  $\alpha$  为求解过程中构造出的变量。

主问题和子问题之间的联系是通过奔德斯割( $P_{\text{Loss}}(\xi_i^{(l)})$ 和 $\lambda_i^{(l)}$ )实现的。

### 3.2 基于奔德斯分解法求解 MISDP 模型的算法流程

基于奔德斯分解法求解配电网无功优化 MISDP 模型的算法流程图<sup>[23]</sup>如图 1 所示。图中:  $P_{\text{Loss}}^{\text{up}}$  和  $P_{\text{Loss}}^{\text{down}}$  分别为求解过程中有功网损的上、下限值;  $\varepsilon$  为误差值;  $T_{\text{ol}}$  为给定限值。

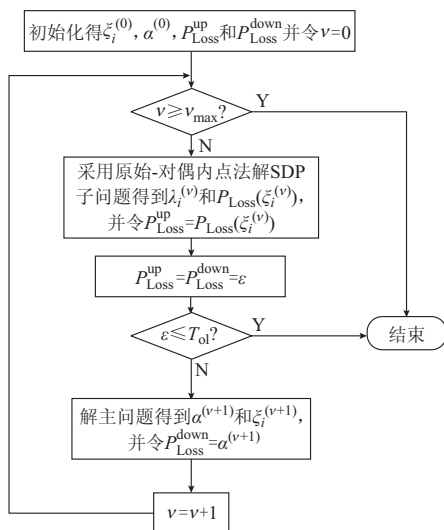


图 1 奔德斯算法流程图

Fig.1 Flow chart of Benders algorithm

收敛性分析:通过上述过程可以看出,奔德斯分解实质上是利用子问题形成奔德斯割不断地切割解空间的超平面来修正主问题的优化空间,从而逐渐逼近问题的最优解。因此,只有当总问题的包络面是凸函数时才能保证算法的可靠收敛。值得一提的是,由于工程实际问题中一般会有约束条件将变量的取值限定在一定范围内,因此总问题的包络面只要满足在最优解附近一定范围内是凸的(即局部凸性)就能保证奔德斯分解的可靠收敛<sup>[22]</sup>。

本节所描述的 MISDP 问题的包络面函数  $g(k_1, k_2, \dots, k_n)$  表达式如式(18)所示,其中  $k_i$  可以随意取值。

$$\left\{ \begin{array}{l} g(k_1, k_2, \dots, k_n) = \min_w \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}((\Phi_i + \Phi_i^*)\mathbf{W}) = P_i' \\ \underline{Q}_i' \leq \text{tr}((\Psi_i + \Psi_i^*)\mathbf{W}) - k_i q_{i,\text{CP}} \leq \bar{Q}_i' \\ \underline{V}_i^2 \leq \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}) \leq \bar{V}_i^2 \\ \mathbf{W} \geq 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

根据凸规划的定义可知式(18)所表示的优化问题依然属于凸规划模型,因此  $g(k_1, k_2, \dots, k_n)$  为凸函数,能够保证奔德斯分解的可靠收敛。

基于奔德斯分解法求解配电网无功优化 MISDP 模型的过程中,主问题模型很简单,求解速度非常快。子问题 SDP 模型也可以在多项式时间内完成求解,故每次迭代所需时间很短。通过离散变量对目标函数值的灵敏度系数构造奔德斯割,可以使迭代过程中离散变量的取值迅速逼近最优点。因此,基于奔德斯分解法求解 MISDP 模型能够保证求解的高效性。

而且 MISDP 模型满足奔德斯分解的收敛条件,可以得到离散变量的最优解,加上 SDP 模型可以保证连续变量解的全局最优性,因此该方法可以取得全局最优解。

## 4 算例分析

### 4.1 测试平台与算例数据

采用 MATLAB-YALMIP 平台在 Lenovo-PC (i5-3210 CPU, 4GB RAM) 上开发上述无功优化程序以验证本文所提方法的效果。操作系统为 Win 7 64 bit, MATLAB 版本为 R2012a, YALMIP 版本为 20140605。分别在改进的 IEEE 33 节点配电系统和美国 PG&E 69 节点配电系统上测试算法的性能。

改进的 IEEE 33 节点配电系统在保持系统原始数据的线路参数不变<sup>[24]</sup>基础上,增加 3 个 DG、



1 个 SVC 及 2 个分组投切电容器组。具体参数如下:节点 3,15,25 分别连接 1 个 DG,有功出力为 0.5 MW,无功补偿容量为 0~250 kvar;节点 7 处连接 1 个 SVC,无功补偿容量为 -600~600 kvar;节点 11 和 29 处连接 2 个分组投切电容器组(分别用 CP1 和 CP2 表示),每组的补偿容量均为 150 kvar,总共有 7 组,即每个电容器组的补偿容量为 0~1 050 kvar。

美国 PG&E 69 节点配电系统原始参数可参见文献[25]。节点 8,32,66 分别连接 1 个 DG,有功出力为 0.5 MW,无功补偿容量为 0~250 kvar;节点 17 和 43 处各连接 1 个 SVC,无功补偿容量为 -600~600 kvar;节点 38 和 50 处各连接 1 个分组投切电容器组(同样用 CP1 和 CP2 表示),每组的补偿容量均为 150 kvar,总共 7 组。

本文将原系统的负荷分成 4 类:IEEE 33 节点系统的节点 1 到节点 5 和 PG&E 69 节点系统的节点 1 到节点 4 为恒功率负荷;IEEE 33 节点系统的节点 6 到节点 17 和 PG&E 69 节点系统节点 5 到节点 35 的负荷为 30%恒阻抗负荷和 70%恒功率负荷,代表住宅区用户负荷;IEEE 33 节点系统的节点 18 到节点 24 和 PG&E 69 节点系统节点 36 到节点 54 的负荷为 20%恒阻抗负荷和 80%恒功率负荷,代表工业负荷;IEEE 33 节点系统的节点 25 到节点 32 和 PG&E 69 节点系统节点 55 到节点 69 的负荷为 50%恒阻抗负荷和 50%恒功率负荷,代表商业负荷[26]。

本文设计算例主要为验证以下几点:求解 SDP 模型能够得到连续变量的全局最优解,且半定松弛是准确的;奔德斯分解法能准确地得到离散变量的最优解;算法能够稳定收敛且求解高效,并且随着系统规模的增大依然能够保证算法的效率。为此,分别对 IEEE 33 节点和 PG&E 69 节点系统进行 SDP 模型和 MISDP 模型的求解计算。

4.2 SDP 模型的计算结果

在 IEEE 33 节点配电系统的 2 个分组投切电容器组 CP1 和 CP2 挡位分别为 1 和 5,PG&E 69 节点配电系统的 2 个分组投切电容器组 CP1 和 CP2 挡位分别为 3 和 6 的情况下,采用 MOSEK 软件求解将配电网无功优化原始模型松弛后的 SDP 模型,并且用原始-对偶内点法求解原始非线性规划(NLP)模型。

表 1 列出了分别采用上述 2 种方法获得的结果。可以看出,2 种方法所得到的解是一致的,这说明半定松弛是精确的,同时说明采用原始-对偶内点法所得到的解也是全局最优解,由此可以推断出

在离散变量取定值时的无功优化模型具有隐凸性[27]。

表 1 SDP 模型和 NLP 模型的计算结果  
Table 1 Calculation results of SDP model and NLP model

系统	模型	网损/MW	网损率/%	求解时间/s
IEEE 33	SDP	0.047 0	1.27	0.29
	NLP	0.047 0	1.27	0.25
PG&E 69	SDP	0.137 7	3.62	0.44
	NLP	0.137 7	3.62	0.38

按照前文所述的半定松弛精确性验证方法,将算例中 SDP 模型的解  $W$  与由  $W$  映射所得的矩阵作差,差矩阵  $\Delta W$  的 1-范数值如式(19)所示,通过该值可以看出差矩阵中的每一个元素都很小, $W$  在数值上非常接近于一个秩为 1 的矩阵,从而再一次验证了半定松弛的精确性。

$$\|\Delta W\|_1 = \begin{cases} 3.83 \times 10^{-5} & \text{IEEE 33} \\ 3.16 \times 10^{-5} & \text{PG\&E 69} \end{cases} \quad (19)$$

图 2 给出了采用 MOSEK 求解 SDP 模型过程中的互补间隙对数变化曲线。一般来说,判断算法优秀与否的标准是其互补间隙能否快速地单调递减至 0<sup>[9]</sup>。通过图 2 可以看出,在求解 SDP 模型的过程中互补间隙在较少的迭代次数内就能够快速单调地收敛于 0,说明 SDP 模型的求解具有良好的收敛性。

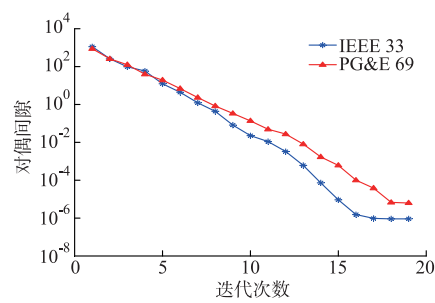


图 2 互补间隙收敛曲线  
Fig.2 Complementary gaps with iterations

4.3 奔德斯分解的计算结果

基于奔德斯分解法求解算例的 MISDP 模型。其中 MILP 主问题采用 Cplex 求解,SDP 子问题采用 MOSEK 求解。2 个系统均以 2 个分组投切电容器组的挡位为 0 作为初始值,并与采用分支定界法+原始-对偶内点法(方法 1)和枚举法+原始-对偶内点法(方法 2)求解原始数学模型的结果进行对比,如表 2 所示。

通过结果可以看出,基于奔德斯分解法求解 MISDP 模型的结果与其他 2 种方法是一致的,但是求解效率要远高于方法 1 和 2。因此采用本文方法

可以高效精确地处理离散变量和连续变量,且能获得全局最优解。这与上文中分析所得的结论一致。同时在较复杂系统中算法依然可以稳定可靠收敛,且具有较高的求解效率。

表 2 求解信息对照表

Table 2 Comparison of solution information

系统	方法	电容器挡位		网损/MW	求解时间/s
		CP1	CP2		
IEEE 33	奔德斯分解	1	5	0.047 0	3.29
	方法 1	1	5	0.047 0	10.15
	方法 2	1	5	0.047 0	31.62
PG&E 69	奔德斯分解	3	6	0.137 7	5.07
	方法 1	3	6	0.137 7	19.53
	方法 2	3	6	0.137 7	49.97

IEEE 33 节点算例中采用奔德斯分解的迭代过程中离散变量的取值变化情况以及主子问题目标函数值的变化情况分别如图 3 和图 4 所示。通过这 2 个图可以看出奔德斯分解法可以不断地逼近最优解,同时在较少的迭代次数内就会收敛。

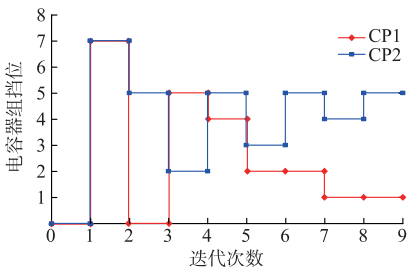


图 3 离散变量变化情况  
Fig.3 Variation of discrete variables

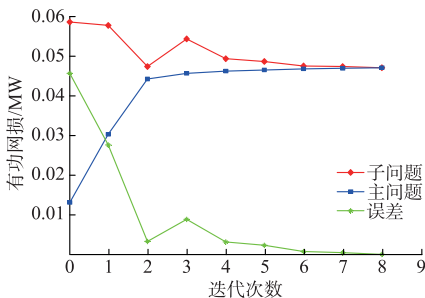


图 4 目标函数变化情况  
Fig.4 Variation of objectives functions

将 IEEE 33 节点算例中采用枚举法计算所得的每一组电容器组的取值情况下的优化结果用 MATLAB 的样条插值法进行曲面拟合,得到对应于任意电容器组取值下的网损值函数(即 MISDP 模型的包络面)如图 5 所示。

通过图 5 可以看出,在电容器组的取值范围内,MISDP 模型的包络面是凸函数,可以保证奔德斯分

解法的可靠收敛。

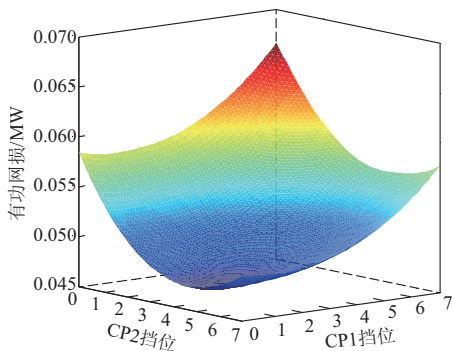


图 5 有功网损与电容器投切挡位关系  
Fig.5 Relationship between active power losses and different capacitor banks

5 结语

本文给出了一种求解含分布式电源的配电网无功优化的方法:将配电网无功优化原始数学模型转化为 MISDP 模型,采用基于奔德斯分解法的方法求解该 MISDP 模型。该方法能够高效精确地处理离散变量和连续变量,保证得到全局最优解。通过仿真算例验证了所提方法具有松弛精确、求解高效、寻优准确等优点。

考虑到中低压配电网中普遍存在的三相不平衡特点,将本文方法扩展为三相模型将会更加符合电网的实际运行情况。此外,DG 的高渗透率下输电网和配电网的耦合关系不断增强,基于当前成果研究主网和配电网协调控制的无功电压优化方法也是下一步的研究方向。

参考文献

[1] 王志群,朱守真,周双喜,等.分布式发电对配电网电压分布的影响[J].电力系统自动化,2004,28(16):56-60.  
WANG Zhiqun, ZHU Shouzhen, ZHOU Shuangxi, et al. Impacts of distributed generation on distribution system voltage profile[J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(16): 56-60.

[2] 裴玮,盛鹏,孔力,等.分布式电源对配网供电电压质量的影响与改善[J].中国电机工程学报,2008,28(13):152-157.  
PEI Wei, SHENG Kun, KONG Li, et al. Impact and improvement of distributed generation on distribution network voltage quality[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(13): 152-157.

[3] 陈海焱,陈金富,段献忠.含风电机组的配网无功优化[J].中国电机工程学报,2008,28(7):40-45.  
CHEN Haiyan, CHEN Jinfu, DUAN Xianzhong. Reactive power optimization in distribution system with wind power generators[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(7): 40-45.

[4] 赵晶晶,符杨,李东东.考虑双馈电机风电场无功调节能力的配

电网无功优化[J].电力系统自动化,2011,35(11):33-38.

ZHAO Jingjing, FU Yang, LI Dongdong. Reactive power optimization in distribution network considering reactive power regulation capability of DFIG wind farm [J]. Automation of Electric Power Systems, 2011, 35(11): 33-38.

[5] 张丽,徐玉琴,王增平,等.包含分布式电源的配电网无功优化[J].电工技术学报,2011,26(3):168-174.

ZHANG Li, XU Yuqin, WANG Zengping, et al. Reactive power optimization for distribution system with distributed generators[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2011, 26(3): 168-174.

[6] BOND A H, GASSER L. Reading in distributed artificial intelligence [M]. San Mateo, California, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 1988.

[7] TODD M J. Semidefinite optimization [J]. Acta Numerica, 2001, 10(1): 515-560.

[8] WOLKOWICZ H. Handbook of applied optimization[M]. New York, USA: Oxford University Press, 2001.

[9] 白晓清,韦化,KATSUKI F.求解最优潮流问题的内点半定规划法[J].中国电机工程学报,2008,28(19):56-64.

BAI Xiaoqing, WEI Hua, KATSUKI F. Solution of optimal power flow problems by semi-definite programming [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(19): 56-64.

[10] SOJOUDI S, LAVAEI J. Network topologies guaranteeing zero duality gap for optimal power flow problem[EB/OL]. [2014-11-15]. [http://www.ee.columbia.edu/~lavaei/Net\\_Top.pdf](http://www.ee.columbia.edu/~lavaei/Net_Top.pdf).

[11] BOSE S, GAYME D F, LOW S, et al. Optimal power flow over tree networks[C]// 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, September 28-30, 2011, Monticello, IL, USA: 1342-1348.

[12] BAOPEN Z, TSE D. Geometry of the injection region of power networks[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2013, 28(2): 788-797.

[13] LAVAEI J, TSE D, ZHANG Baosen. Geometry of power flows and optimization in distribution networks [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2014, 29(2): 572-583.

[14] LOW S H. Convex relaxation of optimal power flow: a tutorial [C]// 2013 IREP Symposium Bulk Power System Dynamics and Control, August 25-30, 2013, Rethymnon, Greece: 15p.

[15] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification—part I and II [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2013, 28(3): 2554-2572.

[16] FARIVAR M, NEAL R, CLARKE C, et al. Optimal inverter VAR control in distribution systems with high PV penetration [C]// IEEE Power and Energy Society General Meeting, July 22-26, 2012, San Diego, CA, USA: 7p.

[17] MACFIE P J, TAYLOR G A, IRVING M R. Proposed shunt rounding technique for large-scale security constrained loss minimization [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2010, 25(3): 1478-1485.

[18] CAPITANESCU F, WEHENKEL L. Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2010, 25(4): 1780-1789.

[19] 赵晋泉,侯志俭,吴际舜.牛顿最优潮流算法中离散控制量的新处理方法[J].电力系统自动化,1999,23(23):37-40.

ZHAO Jinqun, HOU Zhijian, WU Jishun. A novel quadratic penalty function based discretization algorithm for Newton optimal power flow [J]. Automation of Electric Power Systems, 1999, 23(23): 37-40.

[20] 李志刚,吴文传,张伯明,等.一种基于高斯罚函数的大规模无功优化离散变量处理方法[J].中国电机工程学报,2013, 33(4):68-76.

LI Zhigang, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. A large-scale reactive power optimization method based on Gaussian penalty function with discrete control variables[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(4): 68-76.

[21] 刘一兵,吴文传,张伯明,等.基于混合整数二阶锥规划的三相有源配电网无功优化[J].电力系统自动化,2014, 38(15): 58-64.

LIU Yibing, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. Reactive power optimization for three-phase distribution networks with distributed generators based on mixed integer second-order cone programming[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(15): 58-64.

[22] CONEJO A J, CASTILLO E, MINGUEZ R, et al. Decomposition techniques in mathematical programming[M]. Berlin, Germany: Springer, 2006.

[23] TOURES, CAIRE R, BESANGER Y, et al. Benders' decomposition for voltage profile management of distribution network with distributed generators[C]// 2013 IEEE Grenoble PowerTech, June 16-20, 2013, Grenoble, France: 6p.

[24] 刘健,毕鹏翔,董海鹏.复杂配电网简化分析与优化[M].北京:中国电力出版社,2002.

[25] BARAN M E, WU F F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1989, 4(1): 725-734.

[26] SHAH B, BOSE A, SRIVASTAVA A. Load modeling and voltage optimization using smart meter infrastructure [C]// 2013 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies, February 24-27, 2013, Washington, DC, USA: 6p.

[27] LI D, WU Z Y, LEE H W J, et al. Hidden convex minimization [J]. Journal of Global Optimization, 2005, 31(2): 211-233.

董 雷(1967—),女,副教授,主要研究方向:电力系统分析与控制。E-mail: hbdldl@126.com

田爱忠(1991—),男,通信作者,硕士,主要研究方向:含分布式电源的配电网优化运行与控制。E-mail: tian aiz@126.com

于 汀(1984—),男,博士研究生,高级工程师,主要研究方向:智能电网调度控制。E-mail: yuting@epri.sgcc.com.cn

(编辑 万志超)

(下转第 125 页 continued on page 125)

## Reactive Power Optimization for Distribution Network with Distributed Generators Based on Mixed Integer Semi-definite Programming

*DONG Lei<sup>1</sup>, TIAN Aizhong<sup>2,3</sup>, YU Ting<sup>2</sup>, PU Tianjiao<sup>2</sup>*

(1. School of Electrical and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. China Electric Power Research Institute, Beijing 100192, China;

3. State Grid Jiangsu Electric Power Company, Nanjing 210008, China)

**Abstract:** Reactive power optimization for distribution network with distributed generators is a complicated nonconvex nonlinear mixed integer programming problem. A new method is proposed to solve the reactive power optimization problem for distribution network. The original mathematical model of reactive power optimization ignoring discrete variables is transformed and relaxed into a convex semi-definite programming (SDP) model by this method to guarantee global optimality of the solution and the problem solved within polynomial time. Then the model is extended into a mixed integer semi-definite programming (MISDP) model with discrete variables. Benders' decomposition is used to decompose the MISDP model into a simple mixed integer linear programming (MILP) master problem and an SDP sub-problem without discrete variables. The optimal solution is obtained by alternately iterating the master problem and the sub-problem. Numerical tests on a modified IEEE 33-bus system show that the method has the advantages of accurate relaxation, high efficiency and global optimality.

This work is supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (No. 2015AA050102) and State Grid Corporation of China (No. NY71-14-040).

**Key words:** distributed generator; distribution network; reactive power optimization; semi-definite programming; Benders' decomposition