

# 基于二阶锥优化的含有载调压变压器主动配电网最优潮流

刘 斌<sup>1,2</sup>, 刘 锋<sup>1,2</sup>, 梅生伟<sup>1,2</sup>, 张雪敏<sup>1,2</sup>

(1. 清华大学电机工程与应用电子技术系, 北京市 100084;

2. 电力系统及发电设备控制和仿真国家重点实验室, 清华大学, 北京市 100084)

**摘要:** 随着分布式电源接入, 配电网变为具有一定可控性的主动配电网, 其优化运行本质上为包含多种离散可调设备的最优潮流问题。因模型的非凸、非线性, 该类问题的高效求解方法仍是研究的热点和难点。有载调压变压器(OLTC)是主动配电网的重要可调设备, 其策略对系统运行特性, 尤其是电压水平会产生显著影响, 故研究含 OLTC 的主动配电网最优潮流及其高效求解方法是十分必要的。基于支路潮流模型, 文中构建了含 OLTC 的主动配电网最优潮流模型, 提出了一种基于分段线性化技术的 OLTC 精确线性化建模方法, 并论证了二阶锥松弛法在求解所构建最优潮流模型上的适用性。基于修订的 IEEE 系统的算例分析验证了所提出 OLTC 建模方法的有效性, 及二阶锥松弛法在求解含 OLTC 的主动配电网最优潮流问题上的高效性。

**关键词:** 主动配电网; 有载调压变压器; 最优潮流; 分段线性化; 二阶锥松弛; 支路潮流模型

## 0 引言

随着分布式电源的接入, 传统配电网未来将变为具有一定可控性的主动配电网<sup>[1]</sup>。考虑到主动配电网的放射状结构及已有的可控无功调节设备, 如有载调压变压器(on-load tap changer, OLTC)、补偿电容器、静止无功发生器(static var generator, SVG)等, 其优化运行本质上是一个同时包含连续、离散决策变量的最优潮流问题。不同于输电网, 主动配电网线路电阻大多不可忽略, 其最优潮流必须基于交流潮流约束才能将系统的电压、无功功率等因素考虑在内。因此, 主动配电网的最优潮流从数学上而言是一个求解困难的混合整数非凸、非线性优化(mixed integer nonconvex nonlinear programming, MINNLP)问题。

含多种可控电源的主动配电网最优潮流问题的研究十分有限, 但若固定分布式电源出力, 主动配电网的最优潮流在数学上与配电网的无功优化均属于 MINNLP 问题。求解配电网无功优化问题的方法可大致分为 3 类。第一类为连续-规整算法, 即首先将离散变量松弛为连续变量, 然后将变量依次规整。例如, 文献[2]基于高斯罚函数实现离散变量的

连续化, 并提出一种结合非线性规划内点法和高斯罚函数参数调整策略的优化算法; 文献[3]提出了一种基于启发搜索和变量校正的两阶段动态无功优化算法。第二类则直接采用非线性原对偶算法求解该类问题。例如, 文献[4]直接构建了非线性原对偶内点法内嵌罚函数的无功优化算法; 文献[5]则通过对离散变量构造罚函数并直接嵌入非线性原对偶内点法中, 实现了离散变量在优化过程中的逐次归整; 文献[6]构建了计及控制设备动作次数约束的动态无功优化算法, 并采用非线性原对偶内点法内嵌罚函数的方法对其求解。第三类算法即智能优化算法, 包括遗传算法、粒子群算法等<sup>[7-12]</sup>。然而, 上述算法仅能保证解的局部最优性, 算法稳定性及计算效率的提高是该类算法的重点研究方向。

近年来, 基于凸松弛求解最优潮流的方法得到了广泛的关注<sup>[13-16]</sup>, 特别是基于二阶锥(second-order cone, SOC)松弛的方法, 为求解放射状电网(包含主动配电网)的最优潮流问题提供了一种新的思路。该方法构建于支路潮流模型<sup>[17]</sup>基础上, 通过松弛二次等式约束为 SOC 约束, 从而将原来非凸、非线性的问题转换为可高效求解的二阶锥优化(second-order cone programming, SOCP)问题(凸优化问题)。若 SOCP 问题与原问题等价, 求解 SOCP 问题可获得原问题的全局最优解。考虑到混合整数二阶锥优化(mixed integer second-order cone programming, MISOCP)求解技术同样十分成

收稿日期: 2015-01-04; 修回日期: 2015-06-10。

国家自然科学基金资助项目(51321005); 中国电力科学研究院院士团队合作项目(5202011304HH); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2013CB2282010)。

熟,这为高效求解包含离散变量的主动配电网最优潮流问题提供了一种可行的方式。文献[18-19]构建了主动配电网(属于典型的放射状电网)的三相无功优化模型,并应用 MISOCP 技术进行求解,验证了该方法的可行性,但上述文献均未将 OLTC 的运行策略作为优化变量考虑在内。

主动配电网中,分布式电源接入会影响系统的电压水平,甚至使电压产生波动。作为一种有效调节手段,将 OLTC 作为决策变量纳入到主动配电网最优潮流中来是十分必要的。然而,引入 OLTC 将带来新的非凸、非线性约束,故研究其高效的求解方法是十分必要的。

基于已有研究工作,本文基于支路潮流模型,构建了含 OLTC 的主动配电网最优潮流(简记为 AOPF)模型,提出了 OLTC 的精确线性化建模方法,并应用 SOC 松弛法实现了对所构建最优潮流模型的高效求解。基于修订后的 IEEE 系统的算例分析验证了所提方法的有效性。

## 1 AOPF 模型

主动配电网的最优潮流通过优化电网中可调设备(包括补偿电容器、可调分布式电源、OLTC 等)的运行策略,实现主动配电网运行成本最低或网损最小的目的。本节对 AOPF 模型进行研究,首先给出了含 OLTC 的支路潮流建模方法,然后基于此构建了 AOPF 模型。

### 1.1 无 OLTC 的支路潮流模型

放射状电网的支路潮流模型最早由文献[17, 20]提出,其单条线路拓扑结构如图 1 所示。

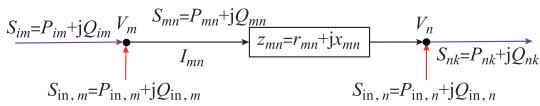


图 1 无 OLTC 的支路潮流模型  
Fig.1 Branch flow model without OLTC

图 1 中, $V_m$  和  $V_n$  分别为节点  $m$  和  $n$  的电压(复数); $I_{mn}$  为线路  $\tau(mn)$  的电流; $r_{mn} + jx_{mn}$  为线路  $\tau(mn)$  的阻抗; $P_{mn} + jQ_{mn}$  为线路  $\tau(mn)$  在节点  $m$  侧的视在功率; $P_{in,n}$  和  $Q_{in,n}$  分别为节点  $n$  的注入有功功率和无功功率。与该线路相关的有功功率、无功功率及电流幅值约束可表示如下:

$$v_m - v_n = 2(r_{mn}P_{mn} + x_{mn}Q_{mn}) - (r_{mn}^2 + x_{mn}^2)l_{mn} \quad (1)$$

$$l_{mn}v_m = P_{mn}^2 + Q_{mn}^2 \quad l_{mn} \geq 0 \quad (2)$$

$$P_{in,n} = \sum_{k:n \rightarrow k} P_{nk} - (P_{mn} - l_{mn}r_{mn}) \quad (3)$$

$$Q_{in,n} = \sum_{k:n \rightarrow k} Q_{nk} - (Q_{mn} - l_{mn}x_{mn}) \quad (4)$$

式中: $v_m$  和  $l_{mn}$  分别为节点  $m$  电压幅值的平方和线路  $\tau(mn)$  电流幅值的平方; $k:n \rightarrow k$  表示节点  $n$  的子节点。

显然,上述模型中仅式(2)具有非凸形式,其他则均为线性形式。

### 1.2 含 OLTC 的支路潮流模型

OLTC 是电网中重要的无功调节设备,包含 OLTC 支路的拓扑结构如图 2 所示。

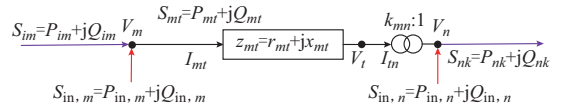


图 2 含 OLTC 的支路潮流模型  
Fig.2 Branch flow model with OLTC

图 2 中, $k_{mn}$  为线路  $\tau(mn)$  中 OLTC 的可调变比。对于  $\tau(mn) \in L_{tf}$ ,其中  $L_{tf}$  为含 OLTC 支路的集合, $k_{mn}$  可建模如下:

$$k_{mn} = k_0 + K_{mn} \Delta k_{mn} \quad (5)$$

$$K_{mn}^{\min} \leq K_{mn} \leq K_{mn}^{\max} \quad K_{mn} \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

式中: $k_0$  和  $\Delta k_{mn}$  分别为支路  $\tau(mn)$  中 OLTC 标准变比和调节步长; $K_{mn}$ 、 $K_{mn}^{\min}$ 、 $K_{mn}^{\max}$  分别为支路  $\tau(mn)$  中 OLTC 的挡位及其可调下限和上限。

引入虚拟节点  $t$ ,线路  $\tau(mt)$  可建模如下:

$$v_m - v_t = 2(r_{mt}P_{mt} + x_{mt}Q_{mt}) - (r_{mt}^2 + x_{mt}^2)l_{mt} \quad (7)$$

$$l_{mt}v_m = P_{mt}^2 + Q_{mt}^2 \quad l_{mt} \geq 0 \quad (8)$$

$$P_{tn} = P_{mt} - l_{mt}r_{mt} \quad (9)$$

$$Q_{tn} = Q_{mt} - l_{mt}x_{mt} \quad (10)$$

式中: $r_{mt} + jx_{mt}$  此时为线路  $\tau(mn)$  阻抗与该线路上 OLTC 阻抗(折算到高压侧)之和。

线路  $\tau(tn)$  可建模如下:

$$v_t = k_{mn}^2 v_n \quad l_{tn} = l_{tn} \quad (11)$$

$$l_{tn}v_t = P_{tn}^2 + Q_{tn}^2 \quad l_{tn} \geq 0 \quad (12)$$

$$P_{in,n} = \sum_{k:n \rightarrow k} P_{nk} - P_{tn} \quad (13)$$

$$Q_{in,n} = \sum_{k:n \rightarrow k} Q_{nk} - Q_{tn} \quad (14)$$

本节首先通过定理 1 给出式(7)至式(14)的等价形式。

定理 1:式(7)至式(14)等价如下形式。

$$\begin{cases} \text{式(2)—式(4)} \\ v_m - z_{mn} = 2(r_{mn}P_{mn} + x_{mn}Q_{mn}) - (r_{mn}^2 + x_{mn}^2)l_{mn} \end{cases} \quad (15)$$

$$z_{mn} = k_{mn}^2 v_n \quad (16)$$

上述定理的证明见附录 A。

显然,式(2)、式(16)为非凸、非线性形式,其他约束则均为线性形式。

### 1.3 基于支路潮流模型的主动配电网最优潮流建模

主动配电网中,系统可控决策变量包含补偿电容器无功出力  $C_p$ , OLTC 的变比  $k$  (离散变量), SVG 出力  $Q_r$ , 可调机组的有功出力  $P_g$  和无功出力  $Q_g$ 。本文记  $z_x = [C_p, k, Q_r, P_g, Q_g]$ 。此外,随着分布式电源的接入,电网中还包含风电等可再生能源。本文仅考虑风电机组,并用  $P_w$  和  $Q_w$  表示其有功出力和无功出力,同时假定风电机组均恒功率因数运行,故有

$$Q_{w,i} = \tan(\arccos \phi_i) P_{w,i} \quad (17)$$

式中:  $\cos \phi_i$  为风电机组  $i$  的功率因数。

综上, AOPF 数学模型可表示如下:

$$\begin{cases} \min_{z_x} \sum_{k \in N} f_k = \sum_{k \in N} (c_{2k} P_{g,k}^2 + c_{1k} P_{g,k} + c_{0k}) \\ \text{式(1)—式(4)} & \forall \tau(mn) \in L \setminus L_{\text{if}} \\ \text{式(2)—式(6), 式(15)—式(16)} & \forall \tau(mn) \in L_{\text{if}} \end{cases} \quad (18)$$

$$P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max} \quad \forall i \in N \quad (19)$$

$$Q_{g,i}^{\min} \leq Q_{g,i} \leq Q_{g,i}^{\max} \quad \forall i \in N \quad (20)$$

$$v_k^{\min} \leq v_k \leq v_k^{\max} \quad \forall k \in N \quad (21)$$

$$P_{mn}^{\min} \leq P_{mn} \leq P_{mn}^{\max} \quad \forall \tau(mn) \in L \quad (22)$$

$$C_{p,n} = C_{p,n}^{\min} + H_n \Delta C_{p,n} \quad H_n \in \mathbf{Z}, \forall n \in N \quad (23)$$

$$H_n^{\min} \leq H_n \leq H_n^{\max} \quad H_n \in \mathbf{Z}, \forall n \in N \quad (24)$$

$$Q_{r,n}^{\min} \leq Q_{r,n} \leq Q_{r,n}^{\max} \quad \forall n \in N \quad (25)$$

$$v_1 = v_{\text{rt}} \quad (26)$$

式中:  $c_{2k}, c_{1k}, c_{0k}$  为机组  $k$  的费用系数;  $L$  为系统线路构成的集合;  $P_{g,i}^{\max}$  和  $P_{g,i}^{\min}$  分别为可调机组  $i$  有功出力的上下限;  $Q_{g,i}^{\max}$  和  $Q_{g,i}^{\min}$  分别为可调机组  $i$  无功出力的上下限;  $N$  为系统节点集合;  $P_{mn}, P_{mn}^{\max}, P_{mn}^{\min}$  分别为线路  $\tau(mn)$  的有功潮流及其潮流约束上下限;  $C_{p,n}^{\min}$  和  $\Delta C_{p,n}$  分别为补偿电容器  $n$  的最小出力及可调容量步长;  $H_n, H_n^{\max}, H_n^{\min}$  分别为补偿电容器  $n$  的挡位及其可调上下限;  $Q_{r,n}^{\max}$  和  $Q_{r,n}^{\min}$  分别为 SVG  $n$  的有功潮流及其潮流约束上下限;  $v_k^{\max}$  和  $v_k^{\min}$  分别为节点  $k$  电压幅值平方的上下限;  $v_{\text{rt}}$  为给定的电网根节点电压幅值平方。

为便于表示,本文假定各节点均接有电源或补偿电容器,但对于纯负荷节点,其出力或挡位上下限均设为零。此外,式(3)、式(4)中节点注入功率  $P_{\text{in},n}$  和  $Q_{\text{in},n}$  的表达式如下:

$$\begin{cases} P_{\text{in},n} = P_{g,n} + P_{w,n} - P_{d,n} \\ Q_{\text{in},n} = Q_{g,n} + Q_{w,n} + C_{p,n} + Q_{r,n} - Q_{d,n} \end{cases} \quad (27)$$

式中:  $P_{d,n}$  和  $Q_{d,n}$  分别为节点  $n$  的有功负荷和无功负荷。

分析可知,模型 AOPF 属于难以求解的混合整数非凸、非线性优化问题,目前尚无公认的系统性求解方法。文献[18-19]验证了 SOC 松弛法在求解主动配电网优化问题上的高效性,但未将 OLTC 作为优化调节手段考虑在内。针对该问题,本文将在下一节提出一种 OLTC 的精确线性化建模方法,从而为后续应用 SOC 松弛法高效求解 AOPF 奠定基础。

## 2 主动配电网最优潮流中 OLTC 的精确线性化建模

OLTC 对应的约束包含式(5)和式(16),且式(16)为非凸形式。为有效利用 SOC 松弛法在求解主动配电网问题上的高效性,本节给出一种基于分段线性化的 OLTC 精确线性化建模方法,即式(16)的精确线性化方法。

分段线性化的核心思想为利用一系列线段或多面体近似原曲线或曲面。限于篇幅,本文在附录 B 中对分段线性化的思想进行了详细阐述,并以单变量函数给出了其精确线性化的例子,此处不再赘述。

对于双变量连续函数而言,分段线性化本质上采用一系列多面体来近似函数所定义的曲面。对双变量函数精确线性化的问题,本节给出如下定理。

定理 2: 设双变量函数为  $z = f(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ 。若  $f(x, y)$  的形式为  $f(x, y) = x^\lambda y$ , 且  $x$  的可行域  $X$  为某一区间内的所有整数构成的离散集合、 $y$  的可行域  $Y$  为盒式集合时,分段线性化可实现对函数  $z = f(x, y)$  的精确线性化。

上述定理的证明见附录 B。

应用到 OLTC 的建模中,首先将式(5)代入式(16),并结合式(6)可得:

$$\begin{cases} z_{mn} = \Delta k_{mn}^2 K_{mn}^2 v_n + 2k_0 \Delta k_{mn} K_{mn} v_n + k_0^2 v_n \\ K_{mn}^{\min} \leq K_{mn} \leq K_{mn}^{\max} \quad K_{mn} \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (28)$$

显然,式(28)中非线性项  $K_{mn}^2 v_n$  和  $K_{mn} v_n$  均满足应用定理 2 的条件。因此,记  $K_{mn}$  的可行域为  $\{K_{mn,1}, K_{mn,2}, \dots, K_{mn,A}\}$ , 则引入  $2A$  个连续变量和  $A-1$  个 0-1 变量可精确线性化式(28),本节直接给出其数学模型如下:

$$v_n = \sum_{j=1}^A w_{mn,1,j} v_n^{\min} + \sum_{j=1}^A w_{mn,2,j} v_n^{\max} \quad (29)$$

$$K_{mn} = \sum_{j=1}^A (w_{mn,1,j} + w_{mn,2,j}) K_{mn,j} \quad (30)$$

$$\begin{cases} w_{mn,1,j} \geq 0 & \forall j \in \{1, 2, \dots, A\} \\ w_{mn,2,j} \geq 0 & \forall j \in \{1, 2, \dots, A\} \\ d_{mn,j} \in \{0, 1\} & \forall j \in \{1, 2, \dots, A-1\} \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^A (\omega_{mn,1,j} + \omega_{mn,2,j}) = 1 \\ \sum_{j=1}^{A-1} d_{mn,j} = 1 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \omega_{mn,i,1} \leq d_{mn,1} & \forall i \in \{1,2\} \\ \omega_{mn,i,A} \leq d_{mn,A-1} & \forall i \in \{1,2\} \\ \omega_{mn,i,j} \leq d_{mn,j-1} + d_{mn,j} & \forall i \in \{1,2\}, \forall j \in \{2,3,\dots,A-1\} \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} z_{mn} = & \Delta k_{mn}^2 \sum_{j=1}^A (\omega_{mn,1,j} v_n^{\min} + \omega_{mn,2,j} v_n^{\max}) K_{mn,j}^2 + \\ & 2k_0 \Delta k_{mn} \sum_{j=1}^A (\omega_{mn,1,j} v_n^{\min} + \omega_{mn,2,j} v_n^{\max}) K_{mn,j} + \\ & v_n k_0^2 \end{aligned} \quad (34)$$

式中:对应线路  $\tau(mn)$ ,  $\omega_{mn,i,j} (\forall i, \forall j)$  为新引入的连续变量,  $d_{mn,j} (\forall j)$  为新引入的 0-1 变量。

将式(5)、式(6)、式(16)约束替换为式(29)一式(34)之后,可以得到 AOPF 的等价问题(记作 eAOPF)。显然,eAOPF 模型中仅式(2)约束为非凸约束,从而为应用 SOC 松弛法提供了可能,本文在下节将对此作进一步讨论。

### 3 求解方法

由于模型 eAOPF 中仅包含式(2)这一非凸、非线性约束,本文仍采用 SOC 松弛法求解 eAOPF,即将式(2)约束中的二次等式约束松弛为如下 SOC 约束:

$$l_{mn} v_m \geq P_{mn}^2 + Q_{mn}^2 \quad (35)$$

为便于后续分析,本文记松弛后的 eAOPF 模型为 rxAOPF 模型(MISOCP 问题)。

在应用 SOC 松弛法求解放射状电网最优潮流的研究中,何种条件下 SOC 松弛为紧是该领域的研究热点,也是应用该方法的关键。文献[21-22]指出,当系统各个节点允许负荷“过供给”(oversatisfaction)时,可以保证 SOC 松弛为紧,但此时获得的结果可能不具有物理意义。文献[23]的研究进一步表明,当电网中功率无“回流”且节点电压幅值无上限时,也可保证 SOC 松弛为紧。文献[24]则保留了电压幅值约束,指出系统参数在满足一定条件下,通过调整节点电压幅值平方约束的上限也可保证 SOC 松弛为紧。此外,文献[25]则通过实际算例验证了 SOC 松弛为紧。

本文基于文献[24]的方法,对包含 OLTC 的 rxAOPF 模型中 SOC 松弛的紧性进行探讨。为便于后续说明,本文首先阐述无 OLTC 时主动配电网的直流支路潮流模型如下。

忽略电流幅值平方项,且给定节点注入有功功率  $P_{in}$ 、无功功率  $Q_{in}$  时,联立式(3)、式(4)可解得系统线路有功潮流、无功潮流,记为  $\hat{P}_{mn}(P_{in})$ ,  $\hat{Q}_{mn}(Q_{in}) (\forall \tau(mn) \in L)$ 。进一步,当给定 OLTC 变比时,依据式(13)、式(26)以及所解得的支路潮流  $\hat{P}$  和  $\hat{Q}$ ,可进一步得到系统各节点电压幅值的平方,记为  $\hat{v}_k (\forall k \in N)$ 。显然,  $\hat{v}_k$  是节点注入功率  $S_{in,k} = P_{in,k} + jQ_{in,k}$  的函数,记作  $\hat{v}_k(S_{in,k})$ 。

定义  $a^- = \min\{a, 0\}$  以及  $\mathbf{u}_k, \mathbf{A}_k (\forall k \in N^+)$ , 其中  $N^+$  为除根节点外的所有节点集合)如下:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} r_{ik} \\ x_{ik} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_k = \mathbf{I} + \frac{2}{v_k^{\min}} \begin{bmatrix} r_{ik} \\ x_{ik} \end{bmatrix} [\hat{P}_{ik}^-(P_{in}^{\max}) \quad \hat{Q}_{ik}^-(Q_{in}^{\max})] \end{cases} \quad (36)$$

式中:  $\mathbf{I}$  表示  $2 \times 2$  阶的单位矩阵;  $\mathbf{P}_{in}^{\max}$  和  $\mathbf{Q}_{in}^{\max}$  分别为节点注入有功功率和无功功率最大值构成的向量。

记叶节点集合为  $N_{ed}$ , 且对于每个  $k \in N_{ed}$ , 定义从根节点到节点  $k$  的路径如下:

$$P_k = \{k_{n_1}, k_{n_2}, \dots, k_{n_{k-1}}, k_{n_k}\} \quad (37)$$

式中:  $n_k$  为节点  $k$  的路径所包含的节点个数, 且  $n_1 = 1, n_k = k$ 。

参考文献[24], 本节直接给出保证 rxAOPF 中 SOC 松弛紧性的定理如下。

定理 3: 若 rxAOPF 满足如下 3 个条件, 则 rxAOPF 最优解对应的 SOC 松弛是紧的。

条件 1: rxAOPF 的目标函数中  $f_1$  是节点注入有功功率的严格增函数。

条件 2: 对于  $\forall k \in N_{ed}$  以及任意满足  $1 \leq s \leq t \leq n_k$  的  $s$  和  $t$ , 下列不等式成立。

$$\mathbf{B}_{kst} = \mathbf{A}_{k_s} \mathbf{A}_{k_{s+1}} \cdots \mathbf{A}_{k_{t-1}} \mathbf{u}_{k_t} > \mathbf{0} \quad (38)$$

条件 3: rxAOPF 的最优解  $S_{in,k}$  满足式(39)。

$$\hat{v}_k(S_{in,k}) \leq v_k^{\max} \quad \forall k \in N^+ \quad (39)$$

定理 3 的证明见文献[24]。

模型目标函数一般为机组燃料费用或网损, 均为严格增函数, 条件 1 易于满足。文献[24]指出, 条件 2 是否满足与节点最大注入功率有关, 但 IEEE 配电系统及实际系统均易于满足该条件, 且可在求解优化问题前通过简单计算进行验证。保证条件 3 成立的一种方法为增大  $v_k^{\max} (\forall k)$  的值, 但实际电压幅值上限受规章制度的严格限制, 不能随意调整, 故该方法的工程适用性会受到一定的限制; 另一种方法为添加式(39)约束到 rxAOPF 模型中。本文记包含式(39)约束后的 rxAOPF 模型为 mrxAOPF 模型(MISOCP 问题)。此外, OLTC 的变比为未知



量时,式(39)中的 $\hat{v}_k(\forall k \in N^+)$ 是节点注入功率 $S_{in,k}$ 、变比的函数,这不同于文献[24]中所构建的模型。

由定理 3 可知,条件 1、条件 2 均与 OLTC 变比无关,故同样适用于 AOPF 模型问题。本文在算例分析中首先求解 rxAOPF 模型,仅当 SOC 松弛非紧时再求解 mrxAOPF 模型,这基于如下两点考虑:①实际系统中,求解 rxAOPF 模型往往即可得到一个 SOC 松弛为紧的解;②mrxAOPF 模型的复杂度高于 rxAOPF 模型,求解效率要低于 rxAOPF 模型。

此外,为便于下一节中算例的对比分析,本文记松弛二次等式约束为 SOC 约束后的 AOPF 模型为 hrxAOPF 模型(MINNLP 问题)。前述所有模型均在 MATLAB 环境下通过 YALMIP<sup>[26]</sup>编程实现,并调用 Gurobi 6.0 求解,所采用的系统配置为 IBM X230 Intel(R) Core i5,2.60 GHz,8 GB 内存。

4 算例分析

4.1 算例描述

本节以修订后的 IEEE 33 节点、69 节点系统为例对所提出的方法进行分析。其中,修订后的 IEEE 33 节点系统的拓扑结构如图 3 所示,其参数可由文献[27]获得,各节点电压幅值上、下限(标么值)分别为 1.05 和 0.95。IEEE 33 节点系统中所添加的可调机组、SVG、补偿电容器(CP1 和 CP2)、OLTC 的主要参数见表 1 和表 2。系统包含两个风电机组,分别位于节点 6 和 19,预测有功出力分别为 400 kW 和 600 kW,功率因数均为 0.9。

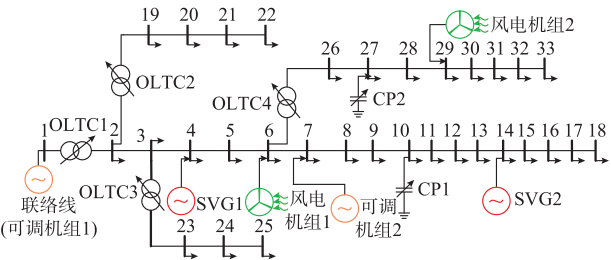


图 3 修订后的 IEEE 33 节点系统拓扑结构  
Fig.3 Topology of modified IEEE 33-bus system

表 1 修订后的 IEEE 33 节点系统参数  
Table 1 Parameters for modified IEEE 33-bus system

可调范围	OLTC1 至 CP1 无功	CP2 无功	SVG1 无	SVG2 无
	OLTC4 出力/ 变比	出力/ kvar	功出力/ kvar	功出力/ kvar
最小值	0.950	0	0	-10
最大值	1.050	450	300	500
调节步长	0.005	50	50	连续

表 2 可调机组参数  
Table 2 Parameters for dispatchable generators

机组名称	有功出力/ MW	无功出力/ Mvar	$c_{2k}/$ (美元·MW <sup>-1</sup> )	$c_{1k}/$ (美元·MW <sup>-1</sup> )	$c_{0k}/$ 美元
可调机组 1	[0,5]	[-1,3]	0	20	0
可调机组 2	[0,1]	[0,1]	0.25	20	0

IEEE 69 节点系统的算例基本数据可由文献[28]获得,无功补偿设备、风电机组的主要参数与 IEEE 33 节点系统相同,各设备并网节点如表 3 所示。不同的是,系统仅在节点 1 添加一个可调机组,其有功出力范围为 0~10 MW、无功出力范围为 -1~10 Mvar,其费用参数与表 2 中的可调机组 1 相同。

表 3 修订后的 IEEE 69 节点系统中无功设备并网位置  
Table 3 Location of reactive power devices in modified IEEE 69-bus system

设备名称	并网节点或线路
CP1 和 CP2	10,17
SVG1 和 SVG2	4,14
OLTC1 至 OLTC4	1,18,22,25

4.2 IEEE 33 节点系统

为保证 SOC 松弛是紧的,首先检验修订后的 IEEE 33 节点系统是否满足定理 3 中的条件 2,结果如图 4 所示。

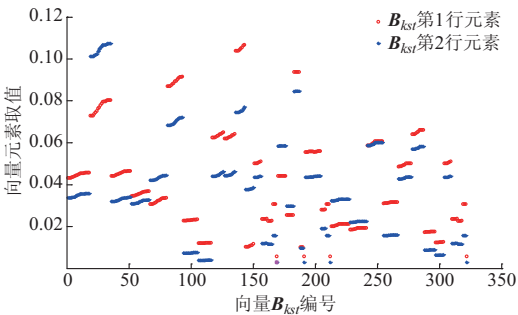


图 4 修订后的 IEEE 33 节点系统的条件 2 充分性检测  
Fig.4 Sufficiency check of condition 2 for modified IEEE 33-bus system

由于 $B_{kst}$ 所有取值中,向量元素最小值为 0.002 9,故满足条件 2。当模型中不考虑式(35)约束时,此时求解 rxAOPF 模型的计算结果如图 5 所示,且 SOC 松弛间隙定义如下: $E_{mn} = |l_{mn} v_m - P_{mn}^2 + Q_{mn}^2|$ 。

图 5 表明,SOC 松弛间隙为  $10^{-9}$  数量级,满足计算精度要求,说明 SOC 松弛是紧的,即求解 rxAOPF 模型可获得 AOPF 模型的全局最优解。

图 5 中同时给出了不包含无功调节设备时,由 Matpower 计算得到的结果。显然,考虑无功调节设备时,系统部分无功功率由 SVG 及补偿电容器提供,减少了无功功率流动,从而有助于降低网损(减小约5.46 kW·h)。此外,由于 OLTC 的作用,系统电压水平整体有所提高。rxAOPF 模型目标函数的最优值为 55.38 美元,比不包含无功调节设备时的目标函数值降低 0.23%。

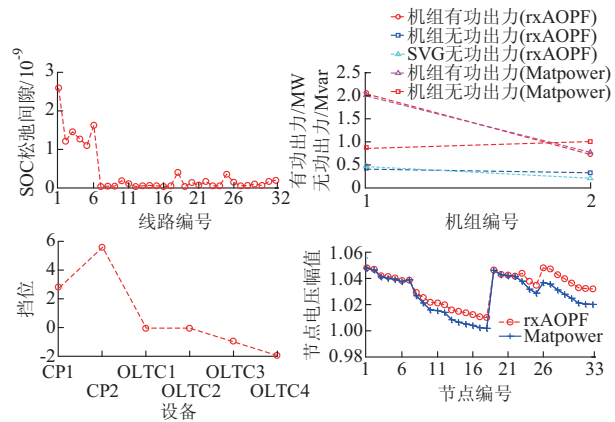


图 5 修订后的 IEEE 33 节点系统计算结果  
Fig.5 Results for modified IEEE 33-bus system

为了进一步说明所提出的方法在求解主动配电网最优潮流问题上的高效性,表 4 给出了采用相应求解器直接求解 AOPF 和 hrxAOPF 模型的计算结果。结果表明,Gurobi 求解 rxAOPF 模型得到的结果与 BNB 求解 AOPF 或 hrxAOPF 模型得到了相同的结果,但其计算效率有了极大的提高。Bonmin 求解 AOPF 模型时则未找到原问题的可行解,在求解 hrxAOPF 模型时尽管找到了一个可行解,但 SOC 松弛间隙为  $10^{-4}$  数量级,且算法所得结果不确定。因此,上述结果验证了 SOC 松弛法求解含 OLTC 主动配电网最优潮流问题的高效性。

表 4 不同方法求解修订后的 IEEE 33 节点系统最优潮流对比

Table 4 Comparison of different methods sloving optimal power flow in modified IEEE 33-bus system			
模型	求解器	计算时间/s	最优值/美元
rxAOPF(MISOCP)	Gurobi	1.20	55.38
AOPF(MINNLNLP)	BNB	61.39	55.38
	Bonmin	19.38	求解失败
hrxAOPF(MINNLNLP)	BNB	87.71	55.38
	Bonmin	20.40	55.38

此外,求解 mrxAOPF 模型得到的最优解对应的 SOC 松弛也为紧,但目标函数值为 55.39 美元,比 rxAOPF 模型的目标函数值略高。可见,对于给定的系统,求解 rxAOPF 模型通常即可获得 AOPF

的一个全局最优解。

4.3 IEEE 69 节点系统

与修订后的 IEEE 33 节点系统类似,首先检验其是否满足定理 3 中的条件 2。结果表明, $B_{kst}$  所有取值中,向量元素最小值为  $3.12 \times 10^{-5}$ ,仍满足条件 2。rxAOPF 的求解计算结果如图 6 所示。

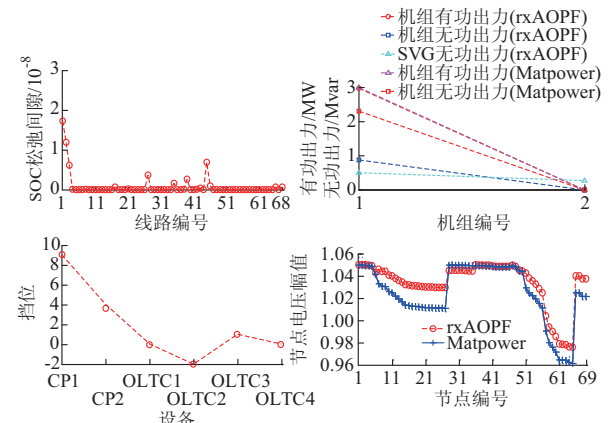


图 6 修订后的 IEEE 69 节点系统计算结果  
Fig.6 Results for modified IEEE 69-bus system

图 6 表明,模型的最优解对应的 SOC 约束同样为紧,且包含无功调节设备时,系统电压水平整体上有一定程度提高,且运行成本降低约 0.67%,同样验证了本文所提方法的有效性。

表 5 仍给出了求解 AOPF 和 hrxAOPF 模型的计算结果。结果表明,所提方法的计算效率依旧远高于直接求解 AOPF 或 hrxAOPF 模型的效率,进一步验证了所提出的 OLTC 建模方法的有效性 & SOC 松弛法求解 AOPF 问题的高效性。

表 5 不同方法求解修订后的 IEEE 69 节点系统最优潮流对比

Table 5 Comparison of different methods sloving optimal power flow in modified IEEE 69-bus system			
模型	求解器	计算时间/s	最优值/美元
rxAOPF(MISOCP)	Gurobi	2.65	59.55
AOPF(MINNLNLP)	BNB	>1 200	59.55
	Bonmin	60.20	59.55
hrxAOPF(MINNLNLP)	BNB	559.30	59.55
	Bonmin	24.21	59.55

5 结语

基于支路潮流模型,本文对 AOPF 问题进行了研究。相比于已有研究,本文基于分段线性化技术,提出了一种 OLTC 的精确线性化建模方法,并论证了 SOC 松弛法在求解含 OLTC 最优潮流问题上的适用性。探索主动配电网最优潮流松弛模型中保证

SOC 松弛紧性的其他充分条件,并在模型中考虑风电等分布式电源出力的不确定性是后续研究的重点。

附录见本刊网络版 (<http://www.aeps-info.com/aeps/ch/index.aspx>)。

参 考 文 献

[1] 范明天,张祖平,苏傲雪,等.主动配电系统可行技术的研究[J].中国电机工程学报,2013,33(22):12-18.  
FAN Mingtian, ZHANG Zuping, SU Aoxue, et al. Enabling technologies for active distribution systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(22): 12-18.

[2] 李志刚,吴文传,张伯明,等.一种基于高斯罚函数的大规模无功优化离散变量处理方法[J].中国电机工程学报,2013,33(4): 68-76.  
LI Zhigang, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. A large-scale reactive power optimization method based on gaussian penalty function with discrete control variables[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(4): 68-76.

[3] 丁涛,郭庆来,柏瑞,等. 松弛 MPEC 和 MIQP 的启发—校正两阶段动态无功优化算法[J].中国电机工程学报,2014,34(13): 2100-2107.  
DING Tao, GUO Qinglai, BO Rui, et al. Two-stage heuristic-correction for dynamic reactive power optimization based on relaxation-MPEC and MIQP [J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(13): 2100-2107.

[4] 程莹,刘明波.求解离散无功优化的非线性原-对偶内点算法[J].电力系统自动化,2001,25(9):23-27.  
CHENG Ying, LIU Mingbo. Nonlinear primal-dual interior point algorithm for discrete reactive poer optimization [J]. Automation of Electric Power Systems, 2001, 25(9): 23-27.

[5] 程莹,刘明波.含离散控制变量的大规模电力系统无功优化[J].中国电机工程学报,2002,22(5):55-61.  
CHENG Ying, LIU Mingbo. Reactive-poewr optimization of large-scale power systems with discrete control variables[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(5): 55-61.

[6] 刘明波,朱春明,钱康龄,等.计及控制设备动作次数约束的动态无功优化算法[J].中国电机工程学报,2004,24(3):39-45.  
LIU Mingbo, ZHU Chunming, QIAN Kangling, et al. Dynamic reactive power optimization algorithm incorporating action number constraints of control devices [J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(3): 39-45.

[7] 姚煜,蔡燕春.离散粒子群与内点法结合的电力系统无功优化[J].电力系统保护与控制,2010,38(3):48-52.  
YAO Yu, CAI Yanchun. A hybrid strategy based on DPSO and IPM for optimal reactive power flow [J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(3): 48-52.

[8] 丁晓群,邓勇,黄伟,等.基于遗传算法的无功优化在福建电网的实用化改进[J].电网技术,2004,28(16):44-47.  
DING Xiaoqun, DENG Yong, HUANG Wei, et al. Practical

improvement of reactive power optimization based on genetic algorithm in Fujian power system [J]. Power System Technology, 2004, 28(16): 44-47.

[9] 王建党,王锡凡,陈皓勇,等.基于协同进化法的电力系统无功优化[J].中国电机工程学报,2004,24(9):128-133.  
WANG Jianxue, WANG Xifan, CHEN Haoyong, et al. Reactive power optimization based on cooperative coevolutionary approach[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 128-133.

[10] 苏辛一,何光宇,张雪敏,等.配电网无功优化逐层筛选寻优算法[J].电力系统自动化,2010,34(21):40-45.  
SU Xinyi, HE Guangyu, ZHANG Xuemin, et al. A hierarchical screening algorithm for reactive power optimization in distribution networks [J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(21): 40-45.

[11] NIU Ming, WAN Can, XU Zhao. A review on applications of heuristic optimization algorithms for optimal power flow in modern power systems[J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2014, 2(4): 289-297.

[12] LI Yuanzheng, LI Mengshi, WU Qinghua. Optimal reactive power dispatch with wind power integrated using group search optimizer with intraspecific competition and lévy walk [J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2014, 2(4): 308-318.

[13] BAI Xiaoqing, HUANG Weihua, FUJISAWA K, et al. Semidefinite programming for optimal power flow problems [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2008, 30(6): 383-392.

[14] LAVAEI J, LOW S. Zero duality gap in optimal power flow problem[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2012, 15(1): 92-107.

[15] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification—Part I [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2013, 28(3): 2554-2564.

[16] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification—Part II [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2013, 28(3): 2565-2572.

[17] BARAN M E, WU F F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1989, 4(1): 725-734.

[18] 刘一兵,吴文传,张伯明,等.基于混合整数二阶锥规划的主动配电网有功—无功协调多时段优化运行[J].中国电机工程学报,2014,34(16):2575-2583.  
LIU Yibing, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. A mixed integer second-order cone programming based active and reactive power coordinated multi-period optimization for active distribution network [J]. Proceodings of the CSEE, 2014, 34(16): 2575-2583.

[19] 刘一兵,吴文传,张伯明,等.基于混合整数二阶锥规划的三相有源配电网无功优化[J].电力系统自动化,2014,38(15): 58-64.  
LIU Yibing, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. Reactive

- power optimization for three-phase distribution networks with distributed generators based on mixed integer second-order cone programming[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(15): 58-64.
- [20] BARAN M E, WU F F. Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution system [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1989, 4(1): 735-743.
- [21] LOW S H. Convex relaxation of optimal power flow: Part I formulations and equivalence[J]. IEEE Trans on Control of Network Systems, 2014, 1(1): 15-27.
- [22] LOW S H. Convex relaxation of optimal power flow: Part II exactness[J]. IEEE Trans on Control of Network Systems, 2014, 1(2): 177-189.
- [23] LI Na, CHEN Lijun, LOW S H. Exact convex relaxation of OPF for radial networks using branch flow model[C]// IEEE Third International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm), November 5-8, 2012, Tainan, China: 7-12.
- [24] GAN Lingwen, LI Na, TOPCU U, et al. Exact convex relaxation of optimal power flow in radial networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 60(1): 72-87.
- [25] BARADAR M, HESAMZADEH M R. Calculating negative LMPs from SOCP-OPF [C]// IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), May 13-16, 2014, Cavtat, Croatia: 1461-1466.
- [26] LOFBERG J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB [C]// IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, September 4, 2004, Taipei, China: 284-289.
- [27] BARAN M E, WU F F. Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1989, 4(2): 1401-1407.
- [28] 欧阳武.含分布式发电的配电网规划研究[D].成都:西南交通大学,2009.
- 刘 斌(1987—),男,博士研究生,主要研究方向:新能源接入下的电力系统优化调度。E-mail: eeliubin@gmail.com
- 刘 锋(1977—),男,通信作者,副教授,博士生导师,主要研究方向:电力系统稳定和控制、博弈论及其在电力系统中的应用。E-mail: lfeng@mail.tsinghua.edu.cn
- 梅生伟(1964—),男,教授,博士生导师,主要研究方向:电力系统分析与控制。E-mail: meishengwei@mail.tsinghua.edu.cn

(编辑 蔡静雯)

## Optimal Power Flow in Active Distribution Networks with On-load Tap Changer Based on Second-order Cone Programming

LIU Bin<sup>1,2</sup>, LIU Feng<sup>1,2</sup>, MEI Shengwei<sup>1,2</sup>, ZHANG Xuemin<sup>1,2</sup>

(1. Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. State Key Laboratory of Control and Simulation of Power Systems and Generation Equipments, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** With increasing distribution generation resources integrated, the power distribution network has become an active distribution network (ADN) with definite controllability and its optimal operation is essentially an optimal power flow (OPF) problem with various discrete controllable devices. However, owing to the nonconvexity and nonlinearity of the model, a highly efficient method of solving this kind of problem is the focus of this area. Since the on-load tap changer (OLTC) is an important controllable device in ADN, its strategy has a significant influence on power system operation, especially at the voltage level. Therefore, developing highly efficient methods to solve OPF problems in ADN with OLTC is exceedingly necessary. Based on the branch flow model, an OPF model with OLTC in ADN is developed. An exact linearization modeling method for OLTC using piecewise linear technique is proposed, and the applicability of a second-order cone relaxation method for solving the corresponding OPF problem is demonstrated. A case study based on the modified IEEE system shows the effectiveness of the proposed modeling method of OLTC and the high efficiency of the second-order cone relaxation method in solving the OPF problem in ADN with OLTC.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51321005), Special Grant Program of China Electric Power Research Institute (No. 5202011304HH), and National Basic Research Program of China (973 Program) (No. 2013CB2282010).

**Key words:** active distribution network; on-load tap changer (OLTC); optimal power flow (OPF); piecewise linearization; second-order cone relaxation; branch flow model