Урок 11. Интеграл. Ряды. Часть 2

Бердюгин А.А. – решал сам, только оформил в Word и MathType

1. Решить уравнения:

а) $y' - y = 2x - 3$

Уединим производную: $y' = y + 2x - 3$.

Пусть $u = y + 2x - 3 \Leftrightarrow y = -2x + u + 3$. Тогда $u' = y' + 2 \Leftrightarrow y' = u' - 2$. То есть

$u' - 2 = u \Leftrightarrow u' = u + 2$. Перепишем производную $u'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u + 2 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{u+2} = \partial x$$

$$x = \ln|u + 2| + C$$

$$u = Ce^x - 2$$

Делая обратную замену, получим

$$y + 2x - 3 = Ce^x - 2$$

$$y = Ce^x - 2x + 1$$

б) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

Решаем однородное уравнение:

$$x^2 y' + xy = 0 \ \Big| : x$$

$$x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -y$$

$$x \cdot \partial y = -y \cdot \partial x$$

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial x}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

$y = \frac{C}{x}$. Производная дроби $y' = \frac{C'x - Cx'}{x^2}$.

Подставляем решение однородного уравнения в неоднородное:

$$x^2y' + xy + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{C'x - Cx'}{x^2} + x \cdot \frac{C}{x} + 1 = 0$$

$$C'x - C + C + 1 = 0$$

$$C'x = -1$$

$$C' = -\frac{1}{x}$$

$$C = -\ln|x| + C_1$$

$$y = \frac{-\ln|x| + C}{x}$$

$$xy = C - \ln|x|$$

$$y = \frac{C - \ln|x|}{x}$$

2. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$

Применим сравнительный признак. Рассмотрим ряд:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Поскольку $\alpha = 1 \leq 1$, то ряд расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$ расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Проверим необходимое условие сходимости ряда (равенства предела нулю): $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

Предел не равен нулю, поэтому ряд расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

В силу свойств второго замечательного предела, исходное выражение можно упростить:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{b\cdot n}=e^{a\cdot b}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}$$

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$$

То получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{-1}$$

Т.к. полученное значение меньше единицы, то ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ сходится.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$

Коэффициент общего члена не влияет на сходимость или расходимость ряда, поэтому выносим его за пределы суммы:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-\ln n}$$

Рассмотрим первые три члена ряда:

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{4-\ln 2},-\frac{1}{6-\ln 3}$$

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\ln n}$$

- по первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по модулю должен быть меньше предыдущего, т.е. для нашего ряда это условие выполняется

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4-\ln 2} > \frac{1}{6-\ln 3}$$

- по второму признаку Лейбница предел ряда должен стремится к 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\ln n}=0$$

Второе условие Лейбница выполняется.

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится.

Чтобы говорить об абсолютной или условной сходимости, необходимо исследовать ряд по одному из признаков сходимости рядов.

По определению этот ряд расходится, здесь $\alpha=1$

Поскольку $\alpha=1\le 1$, то ряд расходится.

Признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

При $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ получаем неопределённость (дополнительные исследования).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Поскольку $q=1$, то получаем неопределённость.

Следовательно, ряд сходится условно.

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$

Проверим необходимое условие сходимости ряда (равенства предела 0):

$$\lim_{n\to\infty}(n-2)\cdot\frac{(n-2)^n}{3^n\cdot(n+2)}=\infty$$

Предел не равен 0, поэтому ряд расходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)\cdot\frac{(n-2)^n}{3^n(n+2)}$ расходится.