Задания к уроку №4

1) Найти области определения функций:
   а) $f(x) = \ln(x+2)$.

2) Построить график функции:
   а) $y = x^2 + 4x + 3$;
   б) $y = -2\sin 3x$;
   в) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$.

   Примечание: $\{x\}$ — https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C

3) Найти пределы:
   1) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$;

   2) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+x+2}{x^3+1}$;

   3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

   4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

   5) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

   6) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[2x]{1+3x}$;

   7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Найти области определения функции:

$f(x) = \ln(x+2)$

Логарифм определён только для положительных чисел. Найдем ОДЗ:

$$\left.\begin{matrix} x+2>0 \\ x>-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = \{x \in R \mid x > -2\}, \text{ т.е. } x \in (-2; +\infty)$$

2. Построить график функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

График ф-ции $y = x^2$ считаем известным. Это парабола, ветви вверх. Найдём её вершину

$(x^2+4x+3)' = 2x+4$

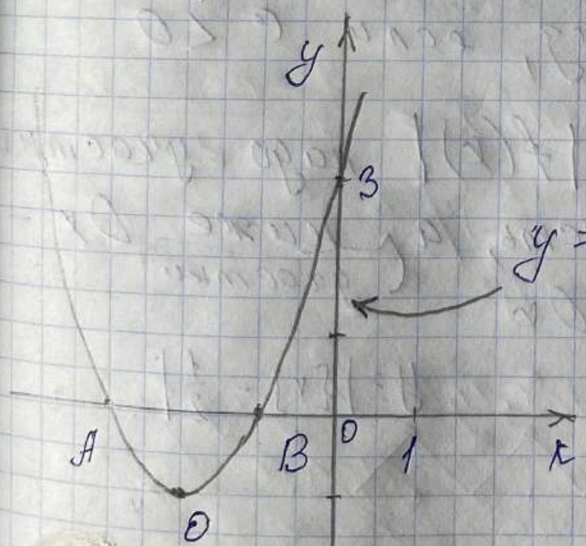
$2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

$y = (3-2)(1-2)$

$y = -1$

$O(-2; -1)$ - вершина параболы

$A(-3; 0)$ и $B(-1; 0)$ - точки пересечения с осью Ox



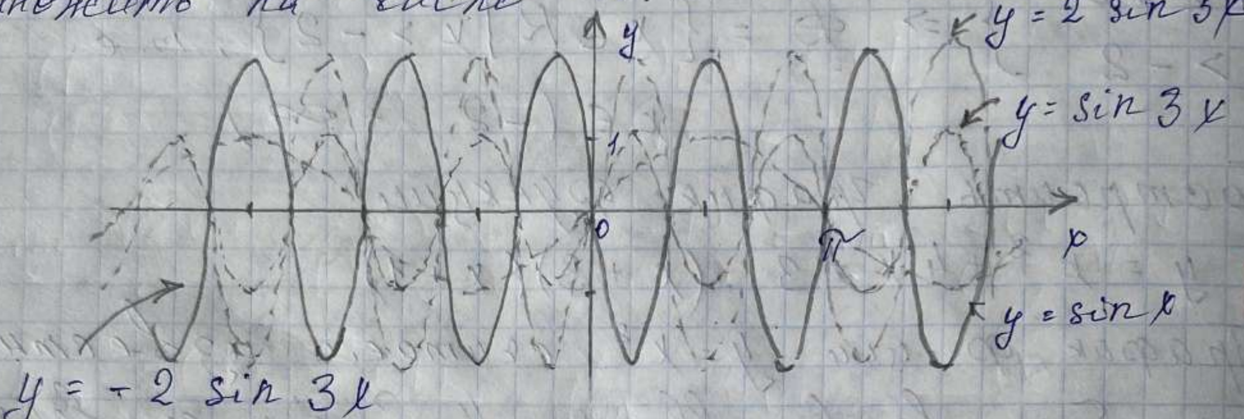
б) $y = -2\sin 3x$

График $y = \sin x$ считаем известным.

Чтобы построить график $y = f(kx)$, надо значения x разделить на число k

График ф-ции $y = -f(x)$ получается из $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно Ox

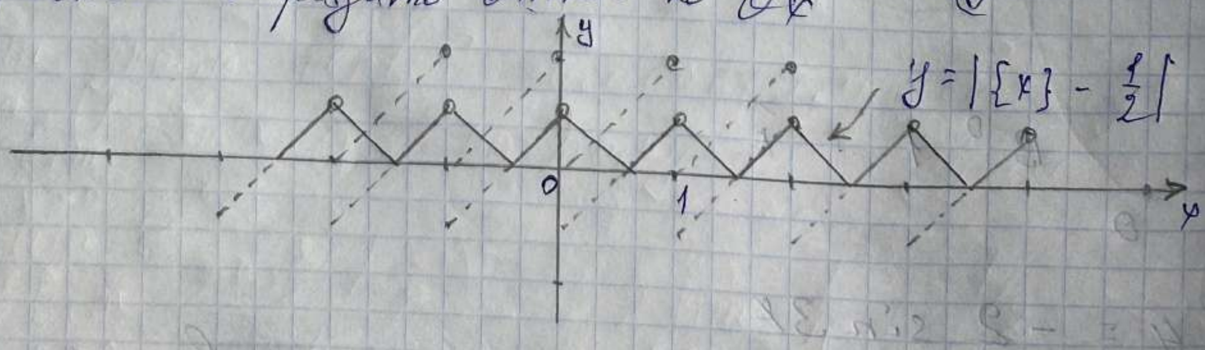
Чтобы получить ординату г.ф. $y = kf(x)$ в точке x, нужно значение ординаты $f(x)$ умножить на число k.



в) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$ 1. График ф-ции $y = \{x\}$ - дробная часть числа - считаем известным.

2. Чтобы получить ординату $y = f(x) + C$ в точке x из $y = f(x)$ в x, нужно $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Oy на $|C|$ вниз, если $C < 0$

3. Чтобы получить график $y = |f(x)|$ надо участки выше Ox оставить, как есть, а $\underbrace{\text{ниже}}_{\text{участки}}$ Ox - зеркально отразить относ-но Ox



3. а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=$ $\boxed{\text{Найти пределы}}$

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-1}{x+5}$; При $x\to5$ числитель $5-1=4$ знаменат. $5+5=10$

Значит $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}=0,4$. Ответ: 0,4

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$

Предел числителя

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+x+2)=\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x+\lim\limits_{x\to-1}x+2=$

$=-1\cdot(-1)\cdot(-1)-1+2=-1-1+2=0$

Предел знаменателя:

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+1)=\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x+1=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)+$

$+1=-1+1=0$.

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3+1)+(x+1)}{x^3+1}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\cancel{(x+1)(x^2-6}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x+1}=$

$=\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3}\approx1,(3)$ Ответ: 1,(3) в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$ Подставим значение $x=3$ в выражение

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2\cdot 3+3}-3}{\sqrt{3-2}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{9}-3}{\sqrt{1}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{0}{0}$$ — неопределенность

Домножаем на сопряженное для числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x-2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+3-9)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2-1)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}(\sqrt{x-2}+1)}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{2x+3}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(\sqrt{x-2}+1)}{\sqrt{2x+3}+3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(\sqrt{3-2}+1)}{\sqrt{2\cdot 3+3}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Ответ: $2/3$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Подставим предельную точку:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{0}{0}$$ имеем неопределённость.

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x \iff \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)/\frac{x}{2}\right)^2}{4}$$

Мы знаем первый замечательный предел:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ Поэтому предыдущее выражение равно:

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}/\frac{x}{2}\right)^2}{4}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}=1/2$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

д) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ctg\, x$ Подставляем значение 0

$ctg\, 0 = \varnothing$. Имеем неопредел-ть вида $0 \cdot \infty$

$ctg\, \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}$$ Есть I замечател. предел.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (п.з.п), поэтому

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Ответ: 1.

е) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[2x]{1+3x} = \lim\limits_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ Подставим 0 и получим неопред-ть:

$$\lim_{x \to 0} (1+3 \cdot 0)^{\frac{1}{2 \cdot 0}} = 1^{\infty}$$ Раскрываем неопр-ть

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2x} = \frac{1}{3x} \cdot \frac{3}{2}}$$

Знаем второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z} = e \text{ при } \frac{1}{z} \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \text{ при } 3x \to 0$$

Ответ: $e\sqrt{e}$

Пояснение:

В нашем случае $z = \frac{1}{3x}$

$$e^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{e^3} = e\sqrt{e}$$

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ Подставив в x предельную точку, получим неопределённость вида 1^{∞}

У дроби оставим x в знаменателе.

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{4(5x+3)}{4(2x+3)} = \frac{20x+12}{4(2x+3)} = \frac{20x+30-18}{4(2x+3)} =$$

$$= \frac{10(2x+3)-18}{4(2x+3)} = \frac{10(2x+3)}{4(2x+3)} - \frac{18}{4(2x+3)} =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{9}{2(2x+3)}$$ Получаем предел

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2(2x+3)} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Дальше считал компьютер.

Перепишем предел, используя трёхэтажную степень :)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)}} \cdot \frac{3}{2x+3}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)} \right)^{\frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)}} \cdot \frac{3}{2x+3}}$$

Знаем второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e \text{ при } \frac{1}{x} \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)} \right)^{\frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)}} \cdot \frac{3}{2x+3}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{2x+3}}, \quad \frac{3}{2} - \frac{9}{2(2x+3)} \to 0$$ Подставляем предельное значение

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{2 \cdot 0 + 3}} = e$$ Ответ: e.