Майнор "Графы и Топология". Домашнее задание 2.

Выполнил: Кузнецов Володя БПМИ 188

Задача 1. Рассмотрим два треугольника.

а) Докажите, что количество способов склеить из них двумерную поверхность без края равно 120.

б) Сколько из этих склеек ориентируемых, а сколько неориентируемых?

в) Сколько поверхностей каждого рода получается среди всех ориентируемых склеек?

а) ▷ Изначально поймём, что любое разбиение шести сторон двух треугольников на пары – валидная склейка. Теперь поймём, что число разбиений на пары $=$ число рукопожатий $= \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5$.

Далее просто заметим, что каждую пару можно склеить двумя способами (с перекруткой или без перекрутки), а значит склеить три пары $= 2^3$. Итого способов $3 \cdot 5 \cdot 2^3 = 120$.
$\square$

б) Давайте будем рассматривать классы (группы) склеек:

1. Если склеиваются какие-то две смежные стороны, то склеиваются какие-нибудь две из другого треугольника. Оставшаяся пара определяется однозначно. Если хотя бы одна из склеек смежных сторон будет с перекруткой, то в склейке будет лента Мёбиуса, а значит склейка неориентируема.

   Имеем $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$. Число выбрать смежную пару в одном треугольнике · число выбрать смежную пару в другом треугольнике · подойдёт три случая склейки смежных сторон (перекрутка в одном, перекрутка в другом, перекрутка в обоих) · две возможности склеить третью пару.

2. Ещё один случай, когда склеиваются смежные пары, но при этом ни одна из них не перекручивается, таких аналогично $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Тут просто заметить изоморфность сфере, а значит, что склейки будут ориентируемыми.

3. Теперь рассмотрим склейки, которые склеивают пары из разных треугольников, но при этом есть хотя бы одна склейка с перекруткой и есть хотя бы одна без перекрутки. После склейки без перекрутки имеем ленту Мёбиуса, так как есть хотя бы одна склейка с перекруткой, а значит, что такие склейки неориентируемы. Всего их $120 - 54 - 18 - 6 \cdot 2 = 36$ (Всего склеек плоскости без края $-$ п.1 $-$ п.2 $-$ всего разбиений на пары, где все пары из разных треугольников · все с перекруткой

или все без перекрутки).

4. Осталось рассмотреть вариант, который уже затронули в п.3 – когда все с перекруткой или когда все без перекрутки, при этом пары берём из разных треугольников. Таких $6 \cdot 2 = 12$ и такие склейки, конечно, будут ориентируемыми (либо шар, либо тор).

Ответ: 30 ориентируемых склеек и 90 неориентируемых склеек.

в) Имеем 18 сфер из п. б.2, кроме того понятно, что в п. б.4 получаем $3 \cdot 2$ торов и столько же сфер (смежные со смежными будут давать сферу, а наоборот будет получаться тор).

Ответ: 24 рода 0 и 6 рода 1.

Задача 2. Рассмотрим $2n$-угольник. Каков максимальный род ориентируемой поверхности без края, которую можно из него склеить?

Рассмотрим 2 случая:

1. Если $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$, то можно построить стандартную склейку $2n$-угольника с родом k.
2. Иначе ($\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$) можем построить стандартную склейку, но уже $2(n-1)$-угольника с родом k.

По большому счёту мы просто на $4k$-угольники смотрим и радуемся жизни. При этом большего размера (больше k) построить не удастся, потому что у нас во время склейки не может расти число вершин.

Ну, и достаточно взглянуть на числа Харера-Цагира, чтобы понять, что утверждение выше – правда.

Ответ: $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil$.

Задача 3. Придумайте граф, который нельзя уложить в торе.

Воспользуемся эйлеровой характеристикой, знаем, что для тора $V - E + F = 0$, тогда рассмотрим K_9. В нём $V = 9$, $E = 36$. Тогда, если бы он был тороидальным, то $F = 27$, но при этом каждая грань должна иметь 3 ребра, а каждое ребро является общим для двух граней, можем найти нижнюю границу количества рёбер при $F = 27$: $\left\lceil \dfrac{3F}{2} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{3 \cdot 27}{2} \right\rceil = 41 > 36$, но мы точно знаем, что в K_9 36 рёбер, а значит, что

$F \neq 27 \Rightarrow K_9$ нельзя уложить в торе.