Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 1

Факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. Пусть a и b — целые числа, и $b \neq 0$. *Поделить с остатком a на b* означает найти такие целые числа q и r, что
(1) $0 \leq r < |b|$;
(2) $a = bq + r$.

Задача 1. Поделите с остатком
(а) 1024 на 27; (б) -25 на 4.

Задача 2. Запишите в троичной системе счисления числа (а) 999; (б) 998.

Задача 3. Составьте таблицы сложения и умножения для системы счисления с основанием 5.

Определение 2. *Полем из двух элементов* называется множество из двух элементов (обозначаемых 0 и 1) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

,

·	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Задача 4. Проверьте ассоциативность и дистрибутивность сложения и умножения в поле из двух элементов. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

Определение 3. Обозначим через $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ число записанное цифрами a_1, a_2,…, a_n в десятичной системе счисления, то есть
$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Задача 5. Докажите следующие признаки делимости на 3, 9 и 11.
(а) Число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр $a_1 + \ldots + a_n$ делится на 3.
(б) Число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр $a_1 + \ldots + a_n$ делится на 9.
(в) Число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n$ делится на 11.
(г) Придумайте и докажите признак делимости на 3 в двоичной системе счисления.

Задача 6. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{2016}$ делится на 37.

Задача 7. На одной из прямых в конечной проективной плоскости лежит ровно p точек. Сколько всего точек и прямых в этой плоскости?