

## Контрольная работа 1. Вариант 2.

1. В этой задаче можно пользоваться функциями, примитивная рекурсивность которых была доказана на семинарах или в конспекте. Пусть функции  $g(x)$  и  $h(x)$  примитивно рекурсивны. Докажите примитивную рекурсивность функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(y) = h(z) \text{ для некоторых } y, z \leq x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Рассмотрим следующую частично рекурсивную функцию

$$f(x) = \mu y (g(y) = x) = \mu y P(x, y),$$

полученную минимизацией предиката  $P(x, y) \iff (g(y) = x)$  по переменной  $y$ , где

$$g(y) = \begin{cases} 5 \div y, & \text{если } y \neq 3, \\ \uparrow, & \text{если } y = 3. \end{cases}$$

Опишите функцию  $f(x)$  явно, т.е. укажите, в каких точках эта функция определена, и какое значение она принимает в каждой из таких точек.

3. Верно ли, что если вычисление машины Тьюринга  $\mathcal{M}$  не завершается (т.е. машина  $\mathcal{M}$  заиклиивается), то она обязательно посещает некоторую конфигурацию дважды? Если да — объясните, если нет — приведите контрпример.

4. Докажите, что множество всех натуральных чисел, которые представляются в виде разности двух квадратов натуральных чисел (например,  $3 = 2^2 - 1^2$ ,  $4 = 2^2 - 0^2$ ,  $8 = 3^2 - 1^2$ ,  $5 = 3^2 - 2^2$  и т. п.), рекурсивно перечислимо.

## Домашнее задание 2. Вариант 2.

1. Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  тотальная вычислимая функция. Докажите, что множество всех натуральных чисел  $x$  таких, что  $f(y) < f(x)$  для некоторого  $y > x$ , является рекурсивно перечислимым.

2. Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$  рекурсивно перечислимо, а  $B \subseteq \mathbb{N}$  рекурсивно. Докажите, что множество  $A \cap B$  рекурсивно перечислимо. Приведите пример рекурсивно перечислимого множества  $A$  и рекурсивного множества  $B$ , для которых множество  $A \cap B$  не рекурсивно.

3. Функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется строго возрастающей на множестве  $B \subseteq \mathbb{N}$ , если  $f$  определена на множестве  $B$  (т.е. для любого  $x \in B$  значение  $f(x)$  определено) и для любых  $x, y \in B$ , если  $x < y$ , то  $f(x) < f(y)$ . Докажите, что множество

$$A = \{x \mid \varphi_x \text{ не является строго возрастающей на } W_x\},$$

где  $W_x = \text{dom } \varphi_x = \{y \mid \varphi_x(y) \downarrow\}$ , рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

4. Докажите, что множество  $A = \{\langle x, y \rangle \mid W_x \cup W_y \neq \emptyset\}$  рекурсивно перечислимо и  $K \leq_m A$ , где  $K = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\}$ .