Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 12

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (a) Задайте уравнением касательную в точке p к единичной окружности на комплексной плоскости. (b) Докажите, что прямые, касающихся единичной окружности в точках p и q, пересекаются в точке $\frac{2}{1/p+1/q}$ (если пересекаются).
(c) Докажите, что для описанного около окружности четырехугольника прямая, соединяющая середины диагоналей, проходит через центр окружности.

Дополним плоскость $\mathbb{C}$ бесконечно удаленной точкой ∞ и отождествим то, что получится, со сферой при помощи стереографической проекции и с $\mathbb{C}P^1$ следующим образом: в $\mathbb{C}^2 = \{(z,w)\}$ отождествим комплексную прямую $\{(z,w) \mid w = 0\}$ с ∞, а любую другую проходящую через начало координат комплексную прямую (вида $az + bw = 0$) — с точкой ее пересечения с комплексной прямой $w = 1$. Дополненную плоскость будем называть сферой Римана и обозначать $\overline{\mathbb{C}}$. *Дробно-линейным преобразованием* сферы Римана называется отображение $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, имеющее на $\mathbb{C}$ вид $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, и т.ч. $f(\infty) = \frac{a}{c}$, а $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Задача 2. (a) Любое дробно-линейное преобразование представляется в виде композиции преобразований вида $z \mapsto z + c,\ z \mapsto az,\ z \mapsto \frac{1}{z}$.

(b) Дробно-линейные преобразования образуют группу (с операцией композиции).

(c) ДЛП сохраняют двойное отношение $[x, y, z, w] = \frac{z-x}{z-y} : \frac{w-x}{w-y}$.

(d) *Обобщенной окружностью* на $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть окружность на $\mathbb{C}$ или прямую на $\mathbb{C}$, к которой добавлена точка ∞. ДЛП переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность.

(e) ДЛП сохраняют углы между обобщенными окружностями.

(f) Найдите ДЛП, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный диск.

(g) ДЛП сохраняет верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0$. Группу таких преобразований будем называть $PSL(2,\mathbb{R})$ по причинам, которые прояснятся в процессе решения следующего пункта.

(h) Постройте гомоморфизм из $SL(2,\mathbb{R})$ в группу ДЛП, сохраняющих верхнюю полуплоскость, с ядром $\{\pm E\}$.

Задача 3. (a) Любую точку верхней полуплоскости можно перевести в любую другую преобразованием из $PSL(2,\mathbb{R})$.

(b) Любой луч модели геометрии Лобачевского в диске (или в верхней полуплоскости) можно перевести в любой другой луч движением плоскости Лобачевского.

(c) Любые три точки абсолюта можно перевести в любые три точки абсолюта с тем же циклическим порядком движениями плоскости Лобачевского, продолженными на абсолют.

Задача 4. (a) Докажите, что в любом треугольнике на плоскости Лобачевского сумма углов меньше π.

(b) Докажите признак равенства треугольников по трем углам.

(c) Убедитесь, что на стороне любого острого угла можно можно взять точку так, чтобы в ней перпендикуляр к стороне был (сверх)параллелен другой стороне.

(d) Убедитесь, что у тупоугольного треугольника высоты могут быть (сверх)параллельны.