

Математические структуры. Домашнее задание 2.

Выполнил: Кузнецов Владимир Михайлович, БПМИ188.

Задача 1. Постройте вывод секвенции $\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$.

$$\frac{\frac{\frac{p \rightarrow q, q \Rightarrow q}{p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \Rightarrow q} (\rightarrow R)}{p \rightarrow q \Rightarrow (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q} (\rightarrow R)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)}$$

Будем рассматривать вершины отдельно:

$$\frac{q, q \Rightarrow q}{q, p \rightarrow q \Rightarrow q} (\rightarrow L); \quad \frac{\frac{p, q \Rightarrow q}{p \rightarrow q, p \Rightarrow q} (\rightarrow R)}{p \rightarrow q \Rightarrow q, \neg p} (\neg R).$$

Получили четыре аксиомы, значит вывод построен.

Задача 2. Докажите, что следующая секвенция невыводима $\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$.

▷ Изначально имеем только один шаг:

$$\frac{p \rightarrow q \Rightarrow \neg q}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p} (\rightarrow R).$$

Теперь рассмотрим разветвление:

$$\frac{q \Rightarrow \neg q}{p \rightarrow q \Rightarrow \neg q} (\rightarrow L); \quad \frac{p \rightarrow q, q \Rightarrow}{p \rightarrow q \Rightarrow \neg q} (\neg R).$$

Как нам известно с семинара, $q \Rightarrow \neg q$ — невыводима, значит левый вариант мы не рассматриваем. Продолжим рассматривать правый:

$$\frac{q, q \Rightarrow}{p \rightarrow q, q \Rightarrow} \frac{q \Rightarrow p}{(\rightarrow L)}.$$

Дальше раскладывать некуда, а аксиом не вышло. \square