Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 2.

Факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите и докажите явную формулу для суммы геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Задача 2. Докажите следующие тождества

(а) $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$; (б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

Задача 3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

(1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

(2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности $\underline{0}01\underline{1}001\ldots$ можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Задача 4. На доске в ряд записан набор чисел. Изначально это два числа (1, 1). Вписываем между каждыми двумя соседними числами их сумму и получим новый набор. С ним поступим так же. Какова будет сумма всех чисел в наборе после ста таких операций?

Задача 5. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. Пример при $n=3$:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Задача 6. Пусть число $x+\dfrac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n.

Задача 7. (а) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

(б) Докажите, что для любого натурального k найдётся такое натуральное n, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\geq k.$$

(в) Существует ли такая последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, что

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\leq 1, \text{ но при этом } a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\geq 1000000?$$

Задача 8. На какое максимальное число частей могут делить плоскость n окружностей?