Математические структуры.

Кузнецов Владимир Михайлович, ФКН.

Контрольная работа 1. Вариант 2.

Задача 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ примитивно рекурсивны. Докажите примитивную рекурсивность функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \exists y, z \le x : g(y) = h(z), \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

$\triangleright$ Давайте изначально введём предикат $P(x, y, z)$ такой, что его характеристическая функция $\chi_P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow g(y) = h(z)$. Легко видно, что эта характеристическая функция примитивно рекурсивна, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ примитивно рекурсивны, а так же предикат $=$ примитивно рекурсивен.

Вообще говоря, заметим, что $f(x)$ тоже является предикатом. Так что нам нужно доказать, примитивную рекурсивность следующего: $\exists y, z \le x P(x, y, z)$. Для доказательства этого давайте введём ещё один предикат $R(x, y) \Leftrightarrow \exists z \le x P(x, y, z)$. Он примитивно рекурсивен, так как класс примитивно рекурсивных предикатов замкнут относительно операций ограниченного квантифицирования и $P(x, y, z)$ примитивно рекурсивен.

Теперь можем заметить, что $\exists y, z \le x P(x, y, z) \Leftrightarrow \exists y \le x R(x, y)$. При этом $R(x, y)$ примитивно рекурсивен как было доказано ранее, и повторимся, что класс примитивно рекурсивных предикатов замкнут относительно операций ограниченного квантифицирования, а значит и $f(x)$ примитивно рекурсивна. $\square$

Мем, призванный закрыть пустоту на страничке:

Задача 2. Рассмотрим следующую частично рекурсивную функцию

$$f(x) = \mu y(g(y) = x) = \mu y P(x, y),$$

полученную минимизацией предиката $P(x, y) \Leftrightarrow (g(y) = x)$ по переменной y, где

$$g(y) = \begin{cases} 5 \dot{-} y, & y \neq 3, \\ \uparrow, & y = 3. \end{cases}$$

Опишите функцию $f(x)$ явно, т.е. укажите, в каких точках эта функция определена, и какое значение она принимает в каждой из таких точек.

Изначально давайте явно опишем функцию $g(x)$:

y	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$g(y)$	5	4	3	$\uparrow$	1	0	0

Сразу видно, что $\forall x \in \{0, 1, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$ предикат $P(x, y)$ может принимать значение единицу, а для других натуральных он всегда ноль (или $\uparrow$).

Теперь можем явно описать функцию $f(x)$, но будем помнить, что оператор минимизации начнет по очереди подставлять в функцию y, и на значении 3 он зациклится и дальше ничего не сможет подставлять:

x	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	2	1	0	$\uparrow$

Задача 3. Верно ли, что если вычисление машины Тьюринга M не завершается (т.е. машина M зацикливается), то она обязательно посещает некоторую конфигурацию дважды?

Нет, контрпример:

Рассмотрим $\Gamma = \{\#, 1\}$, где $\#$ $-$ пробельный символ. А также

$$Q := \{q_0\# \to q_0 1R, q_0 1 \to q_f, q_f\}.$$

Такая машина останавливается, если на вход дано какое-то непустое слово. При этом, если на вход она получает пустое слово, и мы считаем, что на ленте нет "мусора", то вычисление зацикливается. При этом, после каждой её итерации мы будем получать новое состояние ленты, а значит, и новую конфигурацию. Давайте распишем несколько первых шагов программы на пустом входе. Нижним подчёркиванием я буду обозначать положение головки:

$$(q_0, \ldots \#\underline{\#}\#\# \ldots) \to (q_0, \ldots \#1\underline{\#}\# \ldots) \to (q_0, \ldots \#11\underline{\#} \ldots) \to \ldots$$

После i-ой итерации (после i-ой стрелочки [нумерация с единицы]) на ленте будет i единичек, при этом побывав на i-ой итерации единожды, второй раз мы на неё вернёмся, а значит, каждое такое состояние уникально и машина никогда не посещает некоторую конфигурацию дважды.

Задача 4. Докажите, что множество всех натуральных чисел, которые представляются в виде разности двух квадратов натуральных чисел рекурсивно перечислимо.

▷ Давайте изначально рассмотрим все натуральные числа, которые представимы в виде разности двух натуральных: $n = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При этом, числа $x - y$ и $x + y$ имеют одинаковую чётность, а значит, n делится на 4, либо имеет вид $4k \pm 1$. Теперь докажем, что все натуральные числа таких видов представимы в виде $4k$ или $4k \pm 1$, представимы в виде разности двух натуральных:

1. $n = 4k = x^2 - y^2$.

   Возьмём $x = k - 1, y = k + 1$, тогда $(k - 1 - k - 1)(k - 1 + k + 1) = 4k$. Стоит уточнить, что для $n = 0$ надо взять $x = 0 = y$.
2. $n = 2k + 1 = x^2 - y^2$. (Этот случай покрывает все выражения вида $4k \pm 1$).

   Возьмём $x = k + 1, y = k$, тогда $(k + 1 - k)(k + 1 + k) = 2k + 1$.

Так мы показали включение в обе стороны, а значит, мы показали, что натуральное число представимо в виде разности двух натуральных тогда и только тогда, когда оно не представимо в виде $4k + 2$ для какого-то натурального k.

Уже становится достаточно понятно, что будет происходить далее. Мы помним, что множество натуральных чисел рекурсивно перечислимо, тогда, давайте перечислять его, но не будем выводить те элементы, которые представимы ввиде $4k + 2$. Проверку на принадлежность к таким элементам организуем в виде простого предиката:

$$P(n) \iff \exists k \leq n(4 \cdot k + 2 = n).$$

Тогда, перечислять данное множество можно следующим образом:

```
function printA():
    for n from 0 to inf:
        if P(n) then
            print(n)
        else
            do nothing
```

Домашнее задание 2. Вариант 2.

Задание 1. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальная вычислимая функция. Докажите, что множество всех натуральных чисел x таких, что $f(y) < f(x)$ для некоторого $y > x$, является рекурсивно перечислимым.

$\triangleright$ Давайте переформулируем задачу, чтобы нам не пришлось ломать голову, что от нас хотят: нам нужно перечислить множество

$$A = \{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N}, y > x : f(y) < f(x)\}.$$

Теперь давайте заметим, что

$$y < x \Leftrightarrow \neg(x \dot{-} y = 0).$$

Отрицание, предикат "равенство", усеченное вычитание — рекурсивны, значит и предикат "меньше" такой. Т.е. этот предикат остановится на любых входных данных. Давайте введём вспомогательный "тотально вычислимый" предикат $P(x, y) \Leftrightarrow f(y) < f(x)$. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальная вычислимая функция, как и "меньше", так что предикат определён на любой упорядоченной паре натуральных чисел (x, y).

Когда стало ясней о чём вообще речь, давайте подумаем и сделаем хитрей, чем хочется это сделать изначально. Мы знаем, что множество натуральных чиселок рекурсивно перечислимо. Это нам позволяет пройтись не по x, как хотелось бы, а по y. Поясню псевдокодом, а потом словами:

```
function printA():
    for y from 1 to inf:
        for x from 0 to y - 1:
            if P(x, y) then
                print(x)
            else
                do nothing
```

Тут всё достаточно понятно, но уверен, что стоит пояснить. Мы проходим по всем $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (0 я исключаю, так как $\nexists x \in \mathbb{N} : x < 0$) и для каждого такого y ищем x, который мог бы лежать в A. Если он лежит в A, то мы его печатаем и переходим к следующему числу, если не лежит, то не печатаем и всё равно переходим к следующему числу. И так пока $x \neq y$. Т.е. мы пробегаем по всем $x < y$. Так мы можем перечислить всё множество A, потому что мы пробегаем по всевозможным теоретически подходящим y. $\square$

Задача 2. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ рекурсивно перечислимо, а $B \subseteq \mathbb{N}$ рекурсивно. Докажите, что множество $A \cap B$ рекурсивно перечислимо. Приведите пример рекурсивно перечислимого множества A и рекурсивного множества B, для которых множество $A \cap B$ не рекурсивно.

---

1. $\triangleright$ Будем перечислять A, для каждого его элемента a вызываем $\chi_B(a)$, если характеристическая функция вернула единицу, то a лежит и в B, а значит, надо его напечатать. Если же, характеристическая функция вернула 0, то не печатаем число. В пересечении элементов не из A быть не может, значит мы выведем все элементы из $A \cap B$. $\square$

2. Мы только что доказали, что $A \cap B$ обязательно в таком случае рекурсивно перечислимо. Давайте вспомним, какие мы знаем рекурсивно перечислимые не рекурсивные множества.

   Зададим $A = \{x \in \mathbb{N} | \varphi_x(2x) \downarrow\} \subseteq \mathbb{N}$, это множество рекурсивно перечислимо и не рекурсивно (с конспектов лекций). А так же зададим множество $B = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Это множество, очевидно, рекурсивно, так как явно можем описать $\chi_B(x) \iff 1$. Тогда, обратим внимание на пересечение этих двух множеств:

   $$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | \varphi_x(2x) \downarrow\} = A.$$

   Получили исходное множество A, про которое мы знаем, что оно не рекурсивно, а значит, A и B — искомые множества.

Задача 3. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется строго возрастающей на множестве $B \subseteq \mathbb{N}$, если f определена на множестве B и для любых $x, y \in B$, если $x < y$, то $f(x) < f(y)$. Докажите, что множество $A = \{x | \varphi_x$ не является строго возрастающей на $W_x\}$, где $W_x = \mathrm{dom}\varphi_x$, рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

$\triangleright$ Для доказательства р.п. множества A воспользуюсь эквивалентным определением р.п. и покажу, что A является проекцией рекурсивного множества:

$x \in A \iff \exists y, z, k$ ($y < z$ и вычисления $\varphi_x(y)$ и $\varphi_x(z)$ завершаются (не более чем) за k шагов с результатом $\varphi_x(y) \geq \varphi_x(z)$). Иными словами:

$$x \in A \iff \exists y, z \in W_x, y < z : \varphi_x(z) \leq \varphi_x(y).$$

Теперь предположим, что это множество рекурсивно, тогда существует $\chi_A(x)$, которая определена на всех входах. Достаточно ясно, что это ложь и провокация, но давайте немного скажем слов (не доказывать же m-сводимость к K :)). Пусть у меня есть функция $f(x)$, которая делает следующее, она на всех входах (кроме $f(1)$) возращает само число x. При этом, на входе 1 она с вероятностью $1/2$ возвращает число 2 (за какое-то большое число шагов), а с вероятностью $1/2$ зацикливается. Отмечу, что она запоминает какие числа ей уже давались и на одном и том же входе ведёт себя одинаково. У этой функции есть номер в главной нумерации, при этом, если она является строго возрастающей (т.е. всё же зацикливается на единице), то мы об этом никогда не узнаем, т.е. не сможем сделать вывод о её принадлежности к A. $\square$

Задача 4. Докажите, что множество $A = \{\langle x, y\rangle | W_x \cup W_y \neq \varnothing\}$ рекурсивно перечислимо и $K \leq_m A$, где $K = \{x | \varphi_x(x) \downarrow\}$.

$\triangleright$ Для доказательства р.п. множества A воспользуюсь эквивалентным определением р.п. и покажу, что A является проекцией рекурсивного множества:

$$\langle x, y\rangle \in A \iff \exists z, k \text{ (вычисления } \varphi_x(z) \text{ или } \varphi_y(z) \text{ завершаются (не более чем) за } k \text{ шагов).}$$

Теперь давайте докажем m-сводимость:

$$K \leq_m A \iff (\exists f(x) : x \in K \iff f(x) \in A).$$

Определим $f(x)$ как $f(x) = \langle \mathrm{id}(g), \mathrm{id}(g)\rangle$, где

```
function g(t):
    if t != x then
        while true
            do nothing
    else
        return \varphi_x(x)
```

"По-питоновски" функции f и g можно записать примерно так:

```
def g(x: int, t: int) -> int:
    if x != t:
        while True:
            pass
    return varphi_x(x)

def f(x: int) -> int:
    return < id(lambda t : g(x, t)), id(lambda t : g(x, t)) >
```

$$x \in K \Rightarrow \varphi_x(x) \downarrow \Rightarrow \text{функция } g(t) \text{ определена на входе } x \Rightarrow W_{\mathrm{id}(g)} \neq \varnothing \Rightarrow f(x) \in A,$$
$$x \notin K \Rightarrow \varphi_x(x) \uparrow \Rightarrow \text{функция } g(t) \text{ нигде не определена} \Rightarrow W_{\mathrm{id}(g)} = \varnothing \Rightarrow f(x) \notin A. \quad \square$$
