Математические структуры.

Кузнецов Владимир Михайлович, ФКН.

Контрольная работа 2. Вариант 2.

Задача 1. Верно ли, что $K \leq_m P = \{n \in \mathbb{N} | n$ простое$\}$,где $K = \{n \in \mathbb{N} | \varphi_n(n) \downarrow\}$?

Нет, не верно. Знаем, что если существуют два множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$ таких что $A \leq_m B$ и B рекурсивно $\Rightarrow A$ рекурсивно. При этом достаточно просто видно, что множество $P-$ рекурсивно, так как явно можем описать $\chi_P(x) \iff \neg(\exists y \neq x, z \neq x : y \cdot z = x)$, но при этом про нерекурсивность множества K мы знаем с лекций, а значит, если бы существовала такая функция $f(x)$, что $x \in K \iff f(x) \in P$, то мы бы приходили к противоречию.

Задача 2. Расставьте все скобки в следующих λ-термах и выполните подстановку $M[x := N]$, предварительно переименовав связанные переменные (если потребуется) так, чтобы подстановка стала допустимой:

$$M = (\lambda y.\, x(\lambda xz.\, xxz)(yx))(\lambda yz.\, xz(\lambda x.\, x))z, \quad N = x(\lambda z.\, zy).$$

$$\begin{aligned}
M = (\lambda y.\, x(\lambda xz.\, xxz)(yx))(\lambda yz.\, xz(\lambda x.\, x))z = \\
= \Bigg(\bigg(\Big(\lambda y. \Big(\big(x(\lambda x.\, (\lambda z.\, ((xx)z))))(yx)\Big)\Big)\Big(\lambda y.\, (\lambda z.\, ((xz)(\lambda x.\, x)))\Big)\bigg)z\Bigg) = \\
= \Bigg(\bigg(\Big(\lambda u. \Big(\big(x(\lambda x.\, (\lambda v.\, ((xx)v))))(ux)\Big)\Big)\Big(\lambda y.\, (\lambda v.\, ((xv)(\lambda x.\, x)))\Big)\bigg)z\Bigg), \\
N = x(\lambda z.\, zy) \Rightarrow N = \Big(x\big(\lambda z.\, (zy)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку, но будем выполнять поочереди, а то совсем помрём. Зададим

$$P = \bigg(\lambda u. \Big(\big(x(\lambda x.\, (\lambda v.\, ((xx)v))))(ux)\Big)\bigg), \quad Q = \Big(\lambda y.\, (\lambda v.\, ((xv)(\lambda x.\, x)))\Big).$$

Заметим, что $M = ((PQ)z)$, тогда $M[x := N] = ((P[x := N]Q[x := N])z)$.
Теперь отдельно рассмотрим $P[x := N]$ и $Q[x := N]$:

$$
\begin{aligned}
P[x := N] &= \left(\lambda u.\left(\left(x(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\right)(ux)\right)\right)[x := N] = \\
&= \left(\lambda u.\left(\left(x(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\right)(ux)\right)[x := N]\right) = \\
&= \left(\lambda u.\left(\left(x(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\right)[x := N](ux)[x := N]\right)\right) = \\
&= \left(\lambda u.\left(\left(N(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))[x := N]\right)(uN)\right)\right) = \\
&= \left(\lambda u.\left(\left(N(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\right)(uN)\right)\right) = \\
&= \left(\lambda u.\left(\left(\left(x\left(\lambda z.\,(zy)\right)\right)\right)(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\left(u\left(x\left(\lambda z.\,(zy)\right)\right)\right)\right)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q[x := N] &= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,((xv)(\lambda x.\,x)))\right)[x := N] = \\
&= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,((xv)(\lambda x.\,x)))[x := N]\right) = \\
&= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,((xv)(\lambda x.\,x))[x := N])\right) = \\
&= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,((xv)[x := N](\lambda x.\,x)[x := N]))\right) = \\
&= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,((Nv)(\lambda x.\,x)))\right) = \\
&= \left(\lambda y.\,(\lambda v.\,(\left(\left(x\left(\lambda z.\,(zy)\right)\right)v\right)(\lambda x.\,x)))\right).
\end{aligned}
$$

А значит, можем записать итоговый результат в виде:

$$
M[x := N] = \left(\left(\lambda u.\left(\left(\left(x\left(\lambda z.\,(zy)\right)\right)\right)(\lambda x.\,(\lambda v.\,((xx)v)))\left(u\left(x\left(\lambda z.\,(zy)\right)\right)\right)\right)\right)\left(\lambda y.\,(\lambda v.\,(\left(\left(x(\lambda z.\,(zy))\right)v\right)(\lambda x.\,x)))\right)z\right).
$$

Задача 3. Приведите λ-терм $SS(SK)$, где $S = \lambda xyz.\,xz(yz)$ и $K = \lambda xy.\,x$, к β-нормальной форме.

Имеем $SS(SK) = ((SS)(SK))$, где $S = (\lambda x.\,(\lambda y.\,(\lambda z.\,((xz)(yz)))))$ и $K = (\lambda x.\,(\lambda y.\,x))$.

Давайте изначально отдельно рассмотрим SS, потом SK, а потом $((SS)(SK))$.

$$
SS = (\lambda x.\,\underbrace{(\lambda yz.\,xz(yz)))}_{M}\underbrace{(\lambda xyz.\,xz(yz))}_{N} \to_\beta (\lambda uv.\,xv(uv))[x := \lambda xyz.\,xz(yz)] =
$$

$$
= \lambda uv.\,((\lambda x.\,\underbrace{(\lambda yz.\,xz(yz)))}_{M}\underbrace{v}_{N})(uv) \to_\beta \lambda uv.\left((\lambda y.\,\underbrace{(\lambda z.\,vz(yz)))}_{M}\underbrace{(uv)}_{N}\right) \to_\beta \lambda uvz.\,vz(uvz),
$$

$$
SK = (\lambda x.\,\underbrace{(\lambda yz.\,xz(yz)))}_{M}\underbrace{(\lambda xy.\,x)}_{N} \to_\beta (\lambda uz.\,xz(uz))[x := \lambda xy.\,x] =
$$

$$
= \lambda uz.\,((\lambda x.\,\underbrace{(\lambda y.\,x))}_{M}\underbrace{z}_{N}(uz)) \to_\beta \lambda uz.\,(\lambda y.\,\underbrace{z}_{M})\underbrace{(uz)}_{N} \to_\beta \lambda uz.\,z.
$$

А это значит, что

$$SS(SK) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda u.\, \underbrace{(\lambda vz.\, vz(uvz))}_{M})\underbrace{(\lambda uz.\, z)}_{N} \to_\beta \lambda va.\, va(((\lambda u.\, \underbrace{(\lambda z.\, z)}_{M})\underbrace{v}_{N})a) \to_\beta$$
$$\to_\beta \lambda va.\, va((\lambda z.\, \underbrace{z}_{M})\underbrace{a}_{N}) \to_\beta \lambda va.\, vaa = (\lambda v.\, (\lambda a.\, ((va)a))).$$

Задача 4. Докажите, что λ-терм $\lambda xy.\, (M(Nxy))$, где $M = \lambda zxy.\, zyx$ и $N = \lambda xy.\, xyx$, представляет булеву функцию $f(x, y) = \neg(x \wedge y)$.

$\triangleright$ Тактика в этом номере проста. Изначально введём два комбинатора $\mathrm{F} = \lambda xy.\, y = (0)^*$ и $\mathrm{T} = \lambda xy.\, x = (1)^*$. Теперь рассмотрим $((Nx)y)$, приведём его к β-нормальной форме, а дальше продолжим работу с $\lambda xy.\, (M(Nxy))$.

$$Nxy = ((\lambda x.\, (\lambda y.\, xyx))x)y) \to_\beta (\lambda y.\, xyx)y \to_\beta xyx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(Nxy) \twoheadrightarrow_\beta M(xyx) = (\lambda z.\, (\lambda xy.\, zyx))(xyx) \to_\beta \lambda uv.\, xyxvu.$$

Теперь нам надо исследовать термы вида $(\lambda xyuv.\, (xyxvu))PQ \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, PQPvu$, где $P, Q \in \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$. Теперь давайте рассмотрим все четыре случая, но изначально выполним подгоовительную работу:

$$\mathrm{TTT} = (\lambda xy.\, x)\mathrm{TT} \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{T}, \quad \mathrm{FFF} = (\lambda xy.\, y)\mathrm{FF} \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{F},$$
$$\mathrm{TFT} = (\lambda xy.\, x)\mathrm{FT} \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{F}, \quad \mathrm{FTF} = (\lambda xy.\, y)\mathrm{TF} \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{F}.$$

Наконец-то, мы готовы осуществить финальное доказательство!

$$\lambda xy.\, M(Nxy)\mathrm{TT} \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{TTT}vu \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{T}vu = \lambda uv.\, ((\lambda xy.\, x)v)u \to_\beta \lambda uv(\lambda y.\, v)u \to_\beta \lambda uv.\, v = \mathrm{F} = (0)^*,$$
$$\lambda xy.\, M(Nxy)\mathrm{TF} \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{TFT}vu \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{F}vu = \lambda uv.\, (\lambda xy.\, y)vu \to_\beta \lambda uv.\, (\lambda y.\, y)u \to_\beta \lambda uv.\, u = \mathrm{T} = (1)^*,$$
$$\lambda xy.\, M(Nxy)\mathrm{FT} \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{FTF}vu \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{F}vu \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{T} = (1)^*,$$
$$\lambda xy.\, M(Nxy)\mathrm{FF} \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{FFF}vu \twoheadrightarrow_\beta \lambda uv.\, \mathrm{F}vu \twoheadrightarrow_\beta \mathrm{T} = (1)^*.$$

Мы получили таблицу истинности функции f. $\square$