Вычислимость и сложность 2020, матфак ВШЭ

https://sites.google.com/view/computabilityandcomplexity2020

Домашнее задание 1. Вариант 39.

1. В этой задаче нельзя пользоваться функциями, примитивная рекурсивность которых была доказана на семинарах или в конспекте. Докажите примитивную рекурсивность функции $f(x, y) = x \dot{-} (3y + 2)$ непосредственно из определения (т.е. постройте задающую её примитивно рекурсивную схему).

2. В этой задаче можно пользоваться функциями, примитивная рекурсивность которых была доказана на семинарах или в конспекте. Докажите примитивную рекурсивность
- функции $f(x)$, равной номеру (начиная с нуля) наибольшего простого числа, делящего число x;
- функции $g(x)$, равной числу $p_0^{\alpha_n} \cdot p_1^{\alpha_{n-1}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_0}$, где $x = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $\alpha_n \neq 0$ и p_i есть i-ое (по порядку) простое число.

Например, $f(84) = f(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1) = f(p_0^2 \cdot p_1^1 \cdot p_2^0 \cdot p_3^1) = 3$ и $g(84) = g(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 490$.

3. В этой задаче можно пользоваться функциями, частичная рекурсивность которых была доказана на семинарах или в конспекте. Докажите частичную рекурсивность функции

$$f(x) = \begin{cases} x \dot{-} 1, & \text{если целая часть от деления } x \text{ на 3 чётна,} \\ \text{не определено,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Постройте машину Тьюринга $\mathcal{M}$ с входным алфавитом $\Sigma = \{1\}$, которая вычисляет функцию $f(x) =$ “остаток от деления x на 3” в унарном коде (натуральное число n кодируется строкой $w \in \Sigma^*$, состоящей из $n+1$ единиц, т.е. $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 11, 2 \mapsto 111, 3 \mapsto 1111, \ldots$), то есть $\mathcal{M}$ приходит в заключительное состояние на всех словах $w \in \Sigma^*$, являющихся кодами натуральных чисел, и результатом вычисления является унарная запись числа $f(x)$. Выпишите последовательность конфигураций, возникающих в результате вычисления построенной машины на входе 111111.

5. Постройте машину Тьюринга $\mathcal{M}$ с входным алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$, которая принимает язык $L = \{0^n 1^m 0^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}, k \leqslant m \leqslant n\}$, то есть $\mathcal{M}$ приходит в заключительное состояние на всех словах $w \in L$ (содержимое ленты после остановки может быть произвольным) и зацикливается (не приходит заключительное состояние) на всех словах $w \in \Sigma^* \setminus L$. Предварительно опишите алгоритм работы машины $\mathcal{M}$ на русском языке (или добавьте комментарии в программу).

6. Постройте машину Тьюринга $\mathcal{M}$ с входным алфавитом $\Sigma = \{0, 1\}$, которая вычисляет следующую функцию $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$,

$$f(w) = \begin{cases} w, & \text{если в строке } w \text{ равное количество 0 и 1,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Например, $f(011001) = 011001$ и $f(01010) = 0$. Предварительно опишите алгоритм работы машины $\mathcal{M}$ на русском языке (или добавьте комментарии в программу).