Майнор "Графы и Топология". Домашнее задание 3.

Выполнил: Кузнецов Володя БПМИ 188

Задача 1. Докажите, что множество $X = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, \sin(\frac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (с индуцированной топологией) является связным, но не линейно связным топологическим пространством.

$\triangleright$ Имеем множество $(0 \times [-1;1])$ и график функции $y = \sin(\frac{1}{x}), x > 0$.

Изначально докажем, что X – не линейно связное пространство. Очевидно, что $(0,0) \in X$, так что видно, что $(\pi, \sin(1/\pi)) \in X$, но отметим, что не существует "след", который лежит в X, который мог бы соединить эти две точки, так как $\sin(\frac{1}{x})$ имеет разрыв в нуле (это так же просто увидеть из графика).

Теперь докажем, что X вообще говоря связное, знаем, что замыкание связного множества связно. Понятно, что $\sin(\frac{1}{x})$ связно (просто непрерывная линия при $x > 0$). Поймём, что является замыканием графика синуса. Ясно, что $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, так как $\sin(1/x) = 1, x > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\pi(4n+1)}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Аналогично находится $\sin(1/x) = -1 \Rightarrow x = \frac{2}{\pi(4n-1)}, n \in Z^+, x = \frac{2}{\pi(4n+3)}, n \in Z^+ \cup \{0\}$. Заметим, что при $n \to \infty$ x принимает значения близкие к нулю $\Rightarrow$ в некоторой положительной окрестности нуля $\sin(1/x)$ принимает все значения из $[-1;1]$. **Грубо** говоря, можем сделать следующую запись: $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x) = [-1;1]$. Отсюда следует, что замыкание синуса – множество X. $\square$

Задача 2. Рассмотрим множество X всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Для двух непрерывных функций $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ определим $d(f,g) = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.

a) Докажите, что функция d наделяет множество X структурой метрического пространства.

---

a) $\triangleright$ Изначально отметим, что $\forall t \in [0,1]$ $f(t) - g(t) \in \mathbb{R}$, тогда $d \in \mathbb{R} \geq 0$. Теперь проверим все три аксиомы:

1. Аксиома тождества: $d(f,g) = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)| \Rightarrow$ если значения функций не различаются на $[0,1]$, то модуль их разности будет всегда равен нулю, а значит, что $f = g \Rightarrow d = 0$.

Докажем, что $d = 0 \Rightarrow f = g$. Предположим, что это не так, тогда $\exists t \in [0, 1] : f(t) \neq g(t) \Rightarrow f(t) - g(t) \neq 0 \Rightarrow |f(t) - g(t)| > 0$. Противоречие, а значит, аксиома тождества доказана в обе стороны.

2. Аксиома симметрии: $d(f, g) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |g(t) - f(t)| = d(g, f)$.

3. Аксиома треугольника: Нужно доказать: $\max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)| \le \max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t) - k(t)| + \max\limits_{0 \le t \le 1} |k(t) - g(t)|$, где $f, g, k \in X$.

   Легко понятно, что "меньше" и "равно" выполняется. Осталось понять, почему не выполняется "больше". Предположим, что $\max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)|$ достигается в точке m, тогда обозначим $A = f(m), B = g(m)$. Если k проходит не через AB, то имеем знак "меньше". Если же k проходит через A, то $\max\limits_{0 \le t \le 1} |k(t) - g(t)| \ge |AB|$, аналогичные рассуждения про точку B и $d(f, k)$(а значит, что имеем знак "не меньше"). Рассмотрим, когда k проходит через AB. Обозначим $C = k(m)$, получаем, что $|AB|$ точно содержится в правой сумме, ведь $|AC| + |CB| = |AB|$, а $d(f, k) \ge |AC|$ в силу того, что AC содержится между f и k, и аналогично $d(k, g) \ge |CB|$. Получаем $d(f, k) + d(k, g) \ge |AB| = d(f, g)$. $\quad\square$

Задача 4. Склеим из диска $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$ топологическое пространство отождествив точки $(\sqrt{1 - t^2}, t)$ и $(-\sqrt{1 - t^2}, t)$ для $-1 \le t \le 1$. **Строго** докажите, что получающееся топологическое пространство гомеоморфно сфере $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

▷ Давайте построим отображение из всех точек диска единичного диска во все точки единичной сферы. Кажется, что нет смысла обсуждать, а действительно ли из диска при склейке таким образом получается сфера, ибо мы просто склеиваем края диска по y координате.

Теперь можем построить гомеоморфизм. Давайте я опишу, как $1/4$ диска переводится в $1/4$ сферы, а дальше скажу "аналогично" (там правда аналогично). Разобъём диск на 4 равные части (по четвертям координатной плоскости), рассмотрим первую четверть. В ней имеем $1/4$ диска, давайте разобъём его на две равные по площади части: $A = \{(x, y) \in D | x^2 + y^2 \le \sqrt{2}/2, x > 0, y > 0\}$ (диск радиусом $\sqrt{2}/2$) и остаток – $B = \{(x, y) \in D | x^2 + y^2 > \sqrt{2}/2, x > 0, y > 0\}$.
Дальше всё очень просто, поймём, что $\forall (x, y, z) \in X$ выполняется $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Давайте первую и вторую четверть диска переводить в $z \ge 0$, а третью и четвёртую в $z < 0$. Переводить будем так (на примере A и B):
$(x, y) \in A \to (2x/\sqrt{2}, 2y/\sqrt{2}, \sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}) \in X$. B переводится чуть сложнее: для каждой точки из B проведём прямую через центр диска, пусть она пересекает центр в

точке O, а диск в точке P, маленький (с радиусом $\sqrt{2}/2$) диск в точке Q. Тогда видно, что $(QP] \sim (OQ]$ для любых $(x, y) \in B$ (признаюсь честно, что явный гомеоморфизм я тут не придумал (я не очень люблю возиться с тригонометрией и углами), но ясно, что он есть, так как по факту мы переводим $(\sqrt{2}/2; 1]$ в $(0; \sqrt{2}/2])$. А дальше понятно, что точки из B переводим аналогично множеству A.

Разобьём X на 8 частей: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \ldots, x < 0, y < 0, z < 0$. Знак сопоставим с 0 ($\geq$) или 1 ($<$). Обозначим A_k – маленький диск четверти k, B_k – внешняя часть диска четверти k. Дальше переводим: $A_I \to 000, B_I \to 010$, $A_{II} \to 100, B_{II} \to 110$, $A_{III} \to 101, B_{III} \to 111$, $A_{IV} \to 001, B_{IV} \to 011$. $\quad\square$