

Математические структуры. Домашнее задание 4.

Выполнил: Кузнецов Владимир Михайлович, БПМИ188.

Задача 1. Являются ли общезначимыми следующие формулы:

a) $(\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \rightarrow \exists y \forall x (P(x) \rightarrow Q(y)),$

b) $(\forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))) \rightarrow \forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)).$

a) Изначально заметим, что $(\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \equiv \overline{(\exists x P(x))} \vee \exists y Q(y) \equiv \forall x \exists y (\overline{P(x)} \vee Q(y)).$
А так же $\exists y \forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \equiv \exists y \forall x (\overline{P(x)} \vee Q(y)).$ Тогда перепишем нашу формулу в виде:

$$\forall x \exists y (\overline{P(x)} \vee Q(y)) \rightarrow \exists y \forall x (\overline{P(x)} \vee Q(y)).$$

Для доказательства воспользуемся третьим методом с семинара, а именно, предположим, что существует такая модель $M = (D, P_M, Q_M)$, что вся формула опровергается, т.е. посылка истина, а заключение ложно. Рассмотрим формулу и заметим, что и в посылке часть, которая зависит от x и часть, которая зависит от y не влияют друг на друга. Это значит, что посылка может быть истиной только в двух случаях (или когда выполняются оба одновременно):

1. $\forall x \overline{P(x)}$.
2. $\exists x Q(x)$.

При этом мы получаем истинность заключения при любом случае. Пришли к противоречию, значит, что формула общезначима.

b) Рассмотрим $M = (\mathbb{N}, P(x, y) \Leftrightarrow x \geq y)$, тогда

$$\left. \begin{aligned} \forall x (x \geq x) &\equiv 1 \\ \forall x, y, z ((x \geq y, y \geq z) \Rightarrow x \geq z) &\equiv 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \equiv 1 \left. \begin{aligned} \forall x, y (x \geq y \Rightarrow y \geq x) &\equiv 0 \Rightarrow \forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \equiv 0 \\ 1 \rightarrow 0 &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))) \rightarrow \forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \equiv 0.$$

Значит, формула не является общезначимой.