Раздел 3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Системы двух случайных величин. Способы задания двумерных случайных величин

До сих пор мы рассматривали одну СВ или несколько независимых СВ. В некоторых ситуациях приходится рассматривать случайные явления, которые характеризуются двумя и более параметрами.

Пример 1. 1) Случайно выбранная на плоской области точка характеризуется своими двумя координатами; случайно выбранная в пространстве точка характеризуется уже тремя числами.

2) Пара чисел, характеризующая возраст супружеской пары, представляет собой две зависимые СВ, т. к. значения этих СВ с большой вероятностью будут близки.

3) Погода может быть охарактеризована системой нескольких СВ: температура, влажность, давление, скорость ветра и т. д.•

Мы подробно рассмотрим двумерные СВ (или системы двух СВ).

Опр. 1. Пусть имеется некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. ***Двумерной СВ*** $(\xi; \eta)$ называется совокупность двух числовых функций, заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов Ω, если для любых действительных чисел x, y существует $P(\xi < x, \eta < y)$.

Опр. 2. Двумерная СВ $(\xi; \eta)$ называется ***дискретной***, если обе ее составляющие ξ и η являются дискретными СВ.

Опр. 3. Двумерная СВ $(\xi; \eta)$ называется ***непрерывной***, если обе ее составляющие ξ и η являются непрерывными СВ.

Отметим, что для наглядности значения двумерной СВ $(\xi; \eta)$ могут изображаться точками на плоскости Oxy. Дискретная двумерная СВ принимает конечное или счетное множество отдельных значений. Непрерывная СВ принимает значения из некоторой плоской области или нескольких областей.

Если одна из СВ дискретная, а другая непрерывная, то двумерная СВ относится к смешанному типу.

Совместная функция распределения СВ ξ и η

Универсальным способом задания двумерной СВ является функция распределения.

Опр. 4. ***Функция распределения двумерной СВ*** (ξ; η) – это функция двух действительных переменных x и y, которая определяется с помощью равенства

$$\boxed{F_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=P(\xi<x;\,\eta<y).} \qquad (1)$$

Геометрически (1) означает вероятность попадания значения СВ в четверть плоскости левее и ниже точки с координатами $(x;\,y)$ (рис. 23).

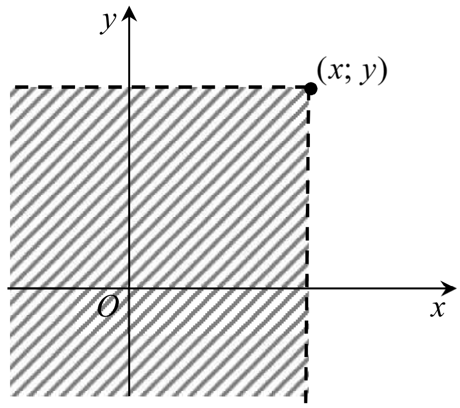


Рис. 23. К понятию функции распределения двумерной СВ

Свойства функции распределения двумерной СВ.

1. $0\le F(x;\,y)\le 1$ при всех $(x;\,y)$.

2. Функция распределения является неубывающей по каждому из своих аргументов:

$$F(x_1;\,y)\le F(x_2;\,y), \text{ если } x_1<x_2;$$

$$F(x;\,y_1)\le F(x;\,y_2), \text{ если } y_1<y_2.$$

3. $F(-\infty;\,y)=F(x;\,-\infty)=F(-\infty;\,-\infty)=0.$

4. $F(+\infty;\,+\infty)=1.$

5. $F_{\xi;\,\eta}(x;\,+\infty)=F_{\xi}(x)$ – функция распределения СВ ξ;

$F_{\xi;\,\eta}(+\infty;\,y)=F_{\eta}(y)$ – функция распределения СВ η.

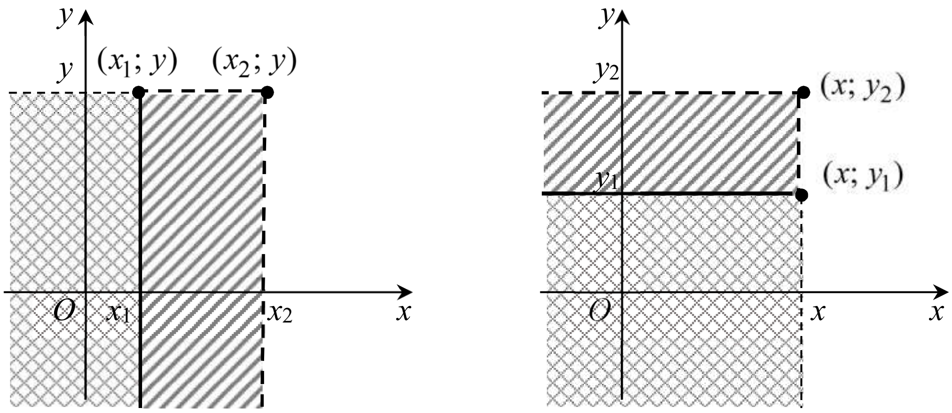
6. Функция распределения непрерывна слева по каждому из своих аргументов.

Несложно видеть, что при фиксированном значении одной из переменных разность значений функции распределения выражает вероятность попадания двумерной СВ (ξ; η) в бесконечную полосу: вероятность попадания в бесконечную вертикальную полосу (рис. 24а)

$$P(x_1 \le \xi < x_2;\, \eta < y) = F(x_2;\, y) - F(x_1;\, y);$$

вероятность попадания в бесконечную вертикальную полосу (рис. 24б)

$$P(\xi < x;\, y_1 \le \eta < y_2) = F(x;\, y_2) - F(x;\, y_1).$$



а б

Рис. 24. К вычислению вероятности попадания двумерной СВ в вертикальную (а) и горизонтальную (б) бесконечную полосу

Следовательно, вероятность попадания СВ (ξ; η) в прямоугольник (рис. 25) равна

$$P(x_1 \le \xi < x_2;\, y_1 \le \eta < y_2) =$$

$$= P(x_1 \le \xi < x_2;\, \eta < y_2) - P(x_1 \le \xi < x_2;\, \eta < y_1) =$$

$$= F(x_2;\, y_2) - F(x_1;\, y_2) - F(x_2;\, y_1) + F(x_1;\, y_1).$$

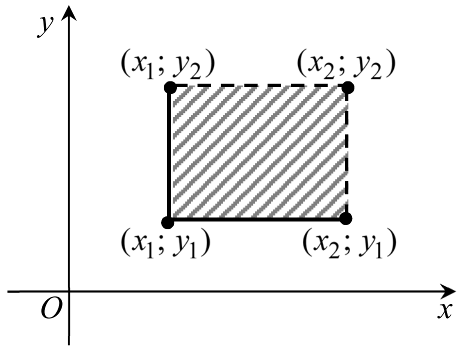


Рис. 25. К вычислению вероятности попадания двумерной СВ в прямоугольник

Таким образом,

$$\boxed{P(x_1 \le \xi < x_2;\, y_1 \le \eta < y_2) = F(x_2; y_2) - F(x_1; y_2) - F(x_2; y_1) + F(x_1; y_1).}$$

Напомним, что две СВ ξ и η называются независимыми, если для любых числовых множеств X и Y события $\{\xi \in X\}$ и $\{\eta \in Y\}$ независимы, т. е. $P(\xi \in X, \eta \in Y) = P(\xi \in X)P(\eta \in Y)$.

Т 1. СВ ξ и η независимы тогда и только тогда, когда

$$\boxed{F_{\xi;\,\eta}(x; y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y).}$$

для всех действительных x и y, т. е. их совместная функция распределения представима в виде произведения функций распределения этих СВ.

Дискретные двумерные СВ

Распределение *дискретной* двумерной СВ $(\xi; \eta)$ проще задать, перечислив все возможные значения этой СВ, т. е. пары чисел $(x_i; y_j), 1 \le i \le n, 1 \le j \le m,$ и соответствующие им вероятности $P(\xi = x_i; \eta = y_j) = p_{ij}$, причем сумма всех вероятностей есть вероятность достоверного события и, следовательно, равна 1: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$

Распределение двумерной дискретной СВ $(\xi; \eta)$ удобно записывать в виде таблицы.

ξ \ η	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	$P(\xi = x_i)$

x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	p_1^*
x_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{2m}	p_2^*
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	p_n^*
$P(\xi = y_j)$	p_1^{**}	p_2^{**}	…	p_m^{**}	$\sum p_{ij} = 1$

Здесь

$$p_i^* = P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(\xi = x_i; \eta = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij};$$

$$p_j^{**} = P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i; \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Таким образом, чтобы по таблице двумерного распределения найти законы распределения составляющих, нужно просуммировать вероятности по строкам – для одной СВ, по столбцам – для другой СВ.

Т 2. Дискретные СВ ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $\boxed{p_{ij} = p_i^* p_j^{**}}$ для всех i, j.

Пример 2. Задан закон распределения двумерной СВ (ξ; η):

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2	p_i^*
1	0,1	0,25	0,3	0,15	0,8
2	0,1	0,05	0	0,05	0,2
p_j^{**}	0,2	0,3	0,3	0,2	$\sum p_{ij} = 1$

1) Проверим, что эта таблица действительно задает закон распределения некоторой двумерной СВ (ξ; η).

2) Составим ряды распределения СВ ξ и η.

3) Выясним, будут ли СВ ξ и η независимы.

4) Найдем $P(\eta < \xi)$.

Решение. **1)** Найдем сумму вероятностей в заданной таблице:

$$\sum p_{ij} = 0,1 + 0,1 + 0,25 + 0,05 + 0,3 + 0 + 0,15 + 0,05 = 1.$$

Следовательно, данная таблица задает закон распределения некоторой двумерной СВ $(\xi;\ \eta)$.

2) Чтобы получить ряд распределения СВ ξ, вычислим суммы вероятностей по строкам:

$$P(\xi=1)=0{,}1+0{,}25+0{,}3+0{,}15=0{,}8;$$

$$P(\xi=2)=0{,}1+0{,}05+0+0{,}05=0{,}2.$$

Итак, ряд распределения СВ ξ имеет вид:

ξ	1	2
P	0,8	0,2

Аналогично, вычисляя суммы вероятностей в столбцах:

$$P(\eta=-1)=0{,}1+0{,}1=0{,}2;$$

$$P(\eta=0)=0{,}25+0{,}05=0{,}3;$$

$$P(\eta=1)=0{,}3+0=0{,}3;$$

$$P(\eta=2)=0{,}15+0{,}05=0{,}2,$$

получим ряд распределения СВ η:

η	-1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,3	0,2

3) Поскольку

$$P(\xi=1;\ \eta=-1)=0{,}1\neq P(\xi=1)P(\eta=-1)=0{,}8\cdot 0{,}2,$$

то СВ ξ и η не являются независимыми.

4) Вычислим вероятность того, что СВ η примет значение меньше, чем значение СВ ξ:

$$P(\eta<\xi)=P(\xi=1;\ \eta=-1)+P(\xi=1;\ \eta=0)+$$

$$+P(\xi=2;\ \eta=-1)+P(\xi=2;\ \eta=0)+P(\xi=2;\ \eta=1)=$$

$$=0{,}1+0{,}25+0{,}1+0{,}05+0=0{,}5.\bullet$$

Непрерывные двумерные СВ

Распределение непрерывной двумерной случайной величины может быть задано с помощью плотности распределения.

Опр. 5. Функция $f_{\xi;\,\eta}(x;\,y)$ называется ***плотностью распределения*** двумерной СВ (ξ; η), если

$$F_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=P(\xi<x;\eta<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\xi;\,\eta}(x;\,y)dxdy.$$

Следовательно, плотность распределения двумерной СВ (ξ; η) может быть найдена по формуле

$$\boxed{f_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=\frac{\partial^2 F_{\xi;\,\eta}(x;\,y)}{\partial x\partial y}.} \qquad (2)$$

Свойства плотности распределения.

1. $f(x;y)\geq 0.$

2. $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dxdy=1.}$

3. Вероятность попадания СВ (ξ; η) в область D равна

$$\boxed{P((\xi;\,\eta)\in D)=\iint\limits_{D}f(x;\,y)dxdy.} \qquad (3)$$

4. Плотности распределения составляющих двумерной СВ $(\xi;\eta)$:

$$f_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi;\,\eta}(x;y)dy; \qquad f_{\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi;\,\eta}(x;y)dx.$$

Т 3. Если двумерная СВ $(\xi;\eta)$ имеет плотность распределения, то СВ ξ и η независимы тогда и только тогда, когда их совместная плотность распределения представима в виде произведения плотностей распределения этих СВ: $\boxed{f_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)}$ для всех x и y.

Пример 3. Найдем $P(\xi>\eta)$, если известна функция распределения двумерной СВ (ξ; η):

$$F_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}) & \text{при } x>0, y>0,\\ 0 \quad \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Решение. Найдем плотность распределения по формуле (2). При $x>0, y>0$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(1-\mathrm{e}^{-2y})\,\mathrm{e}^{-x}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2y},$$

поэтому

$$f_{\xi;\,\eta}(x;\,y)=\begin{cases}2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2y} & \text{при } x>0, y>0,\\ 0 \quad \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Вычислим искомую вероятность по формуле (3):

$$P(\xi>\eta)=P((\xi;\,\eta)\in D)=\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy,$$

где область $D=\{(x;\,y):x>y\}$. Поскольку плотность $f(x;\,y)\ne 0$ только в первой координатной четверти $x>0, y>0,$ то задача сводится к вычислению интеграла по бесконечному сектору $D_1=\{(x;\,y):0<y<x\}$ (рис. 26):

$$P(\xi>\eta)=\iint\limits_{D_1} 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2y}\,dxdy.$$

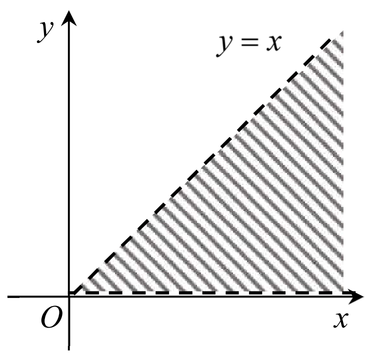


Рис. 26. Бесконечный сектор $D_1=\{(x;\,y):0<y<x\}$

Расставляя пределы интегрирования, вычисляем:

$$P(\xi>\eta)=2\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2y}\,dy=-\frac{2}{2}\int\limits_0^{+\infty}dx\cdot\mathrm{e}^{-x}\int\limits_0^{x}\mathrm{e}^{-2y}\,d(-2y)=$$

$$=-\int\limits_0^{+\infty}dx\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2y}\,\Big|_0^x=-\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-2x}-1)dx=-\int\limits_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-3x}-\mathrm{e}^{-x})dx=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}-\mathrm{e}^{-x}\right)\Bigg|_0^B=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-3B}}{3}-\mathrm{e}^{-B}\right)-\left(\frac{\mathrm{e}^{0}}{3}-\mathrm{e}^{0}\right)=-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}.$$

●

Опр. 6. Говорят, что двумерная СВ $(\xi;\eta)$ ***распределена равномерно в области*** D, если ее плотность распределения постоянна внутри области D и равна 0 вне ее:

$$f_{\xi;\,\eta}(x;y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & \text{если } (x;y)\in D,\\ 0, & \text{если } (x;y)\notin D,\end{cases}$$

где S_D – площадь области D.

§ 2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Основными *числовыми характеристиками* двумерной СВ $(\xi;\eta)$ являются математические ожидания и дисперсии ее составляющих, т. е. СВ ξ и η, а также корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Запишем формулы для вычисления математических ожиданий и дисперсий СВ ξ и η, если известен закон распределения двумерной СВ $(\xi;\eta)$.

Для *дискретной* двумерной СВ $(\xi;\eta)$ с $p_{ij}=P(\xi=x_i;\eta=y_j)$, $1\le i\le n, 1\le j\le m$, математические ожидания СВ ξ и η равны соответственно

$$\boxed{M\xi=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i^*;}\qquad \boxed{M\eta=\sum_{j=1}^{m}y_jp_j^{**},}$$

где

$$p_i^* = P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}; \quad p_j^{**} = P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Отсюда получим

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}; \quad M\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}.$$

Эти формулы можно обобщить в следующем утверждении.

Утв. 1. Для дискретной двумерной СВ $(\xi; \eta)$ с $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j), 1 \le i \le n, 1 \le j \le m,$ при некоторых ограничениях на функцию $g(x; y)$ для математического ожидания от функции двух дискретных СВ имеет место формула

$$Mg(\xi; \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i; y_j) p_{ij}.$$

Аналогично для непрерывных СВ.

Утв. 2. Для непрерывной двумерной СВ $(\xi; \eta)$ с плотностью распределения $f_{\xi;\eta}(x; y)$ при некоторых ограничениях на функцию $g(x; y)$ для математического ожидания от функции двух непрерывных СВ имеет место формула

$$Mg(\xi; \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x; y) f_{\xi;\eta}(x; y) dxdy.$$

Следовательно,

$$\boxed{M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi;\eta}(x; y) dxdy;} \qquad \boxed{M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi;\eta}(x; y) dxdy.}$$

Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$ можно найти по формулам $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ или $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

Математические ожидания $M\xi$, $M\eta$ и дисперсии $D\xi$, $D\eta$ характеризуют среднее значение и рассеяние каждой из составляющих двумерной СВ.

Для характеристики степени зависимости двух СВ вводится новая числовая характеристика.

Опр. 1. ***Ковариацией*** (или ***корреляционным моментом***) двух СВ ξ и η называется математическое ожидание произведения отклонений этих СВ от их математических ожиданий:

$$\operatorname{cov}(\xi;\eta) = K_{\xi;\eta} = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

Т 1. Ковариация двух СВ равна разности математического ожидания произведения этих СВ и произведения их математических ожиданий:

$$\boxed{\operatorname{cov}(\xi;\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta.}$$

Упражнение 1. Доказать.

Следствие 1. $M(\xi\eta) = M\xi M\eta + \operatorname{cov}(\xi;\eta).$

Следствие 2. $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi;\eta).$

Упражнение 2. Доказать.

Т 2. Если СВ ξ и η независимы, то $\operatorname{cov}(\xi;\eta)=0.$

Доказательство. Если СВ ξ и η независимы, то СВ $\xi - M\xi$ и $\eta - M\eta$ также независимы, а значит, по свойству математического ожидания получим, что

$$\operatorname{cov}(\xi;\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) =$$
$$= (M\xi - M\xi)(M\eta - M\eta) = 0. \triangleleft$$

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно: если $\operatorname{cov}(\xi;\eta)=0,$ то это не означает, что СВ ξ и η независимы.

Опр. 2. Если $\operatorname{cov}(\xi;\eta)=0,$ то СВ ξ и η называются ***некоррелированными***.

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\xi \text{ и } \eta \text{ независимы } \Rightarrow \ \xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированы } (\operatorname{cov}(\xi;\eta)=0);\\ \xi \text{ и } \eta \text{ зависимы } \Leftarrow \ \xi \text{ и } \eta \text{ коррелированы } (\operatorname{cov}(\xi;\eta)\neq 0).\end{gathered}}$$

Поскольку ковариация имеет размерность, равную произведению размерностей СВ ξ и η, то для удобства анализа степени зависимости двух СВ вводят безразмерную характеристику – коэффициент корреляции.

Опр. 3. ***Коэффициентом корреляции*** двух СВ ξ и η называется число, равное

$$\boxed{r_{\xi;\,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi;\,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.}$$

Свойства коэффициента корреляции.

1. $\boxed{-1 \le r_{\xi;\,\eta} \le 1.}$

Доказательство. Пусть ξ и η – две СВ, не обязательно независимые. Рассмотрим при произвольном постоянном λ дисперсию СВ $\lambda\xi + \eta$:

$$D(\lambda\xi + \eta) = M(\lambda\xi + \eta - M(\lambda\xi + \eta))^2 =$$

$$= M(\lambda\xi + \eta - (\lambda M\xi + M\eta))^2 = M(\lambda(\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 =$$

$$= M(\lambda^2(\xi - M\xi)^2 + 2\lambda(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + (\eta - M\eta)^2) =$$

$$= \lambda^2 M(\xi - M\xi)^2 + 2\lambda M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) + M(\eta - M\eta)^2 =$$

$$= \lambda^2 D\xi + 2\lambda \operatorname{cov}(\xi;\,\eta) + D\eta.$$

Поскольку дисперсия всегда $D(\lambda\xi + \eta) \ge 0,$ то

$$\lambda^2 D\xi + 2\lambda \operatorname{cov}(\xi;\,\eta) + D\eta \ge 0$$

при всех λ.

С другой стороны, выражение в левой части неравенства – это квадратный трехчлен относительно λ с положительным коэффициентом при λ^2, поэтому для того, чтобы неравенство было верно при всех λ, дискриминант квадратного трехчлена должен быть меньше либо равен 0:

$$D = (2\operatorname{cov}(\xi;\,\eta))^2 - 4D\xi D\eta \le 0;$$

$$(\operatorname{cov}(\xi;\,\eta))^2 \le D\xi D\eta;$$

$$r^2_{\xi;\,\eta} = \frac{(\operatorname{cov}(\xi;\,\eta))^2}{D\xi D\eta} \le 1.$$

Следовательно, $\left| r_{\xi;\,\eta} \right| \le 1.$ $\triangleleft$

2. Если СВ ξ и η независимы, то $r_{\xi;\,\eta} = 0.$

Обратное утверждение неверно: если $r_{\xi;\,\eta} = 0,$ то СВ ξ и η *могут быть как зависимыми, так и независимыми*.

3. СВ ξ и η связаны линейной зависимостью в том и только том случае, если $r_{\xi;\eta} = \pm 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\eta = k\xi + b,\ k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{\xi;\eta} = +1; \\ &\eta = k\xi + b,\ k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{\xi;\eta} = -1. \end{aligned}}$$

Доказательство. Докажем утверждение в одну сторону: если СВ ξ и η связаны линейной зависимостью, то $r_{\xi;\eta} = \pm 1$.

Пусть $\eta = k\xi + b$, тогда

$$\operatorname{cov}(\xi;\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)(k\xi + b - kM\xi - b) =$$

$$= M(\xi - M\xi)k(\xi - M\xi) = k\operatorname{cov}(\xi;\xi) = kD\xi;$$

$$D\eta = D(k\xi + b) = D(k\xi) = k^2 D\xi.$$

Таким образом,

$$r_{\xi;\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi;\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{kD\xi}{\sqrt{D\xi k^2 D\xi}} = \frac{kD\xi}{|k| D\xi} = \frac{k}{|k|} = \begin{cases} 1, & \text{если } k > 0, \\ -1, & \text{если } k < 0. \end{cases} \lhd$$

Итак, коэффициент корреляции $r_{\xi;\eta}$ показывает степень *линейной* зависимости между СВ ξ и η.

Особое место среди законов распределения двумерных СВ занимает двумерное нормально распределение.

Пример 1. Пусть $M\xi = 3;\ D\xi = 4;\ M\eta = 5;\ D\eta = 6;\ \operatorname{cov}(\xi;\eta) = -2.$ Найдем числовые характеристики СВ $\zeta = 2\xi - 3\eta$ и коэффициент корреляции СВ ζ и ξ.

Решение. Используя свойства математического ожидания, находим

$$M\zeta = M(2\xi - 3\eta) = 2M\xi - 3M\eta = 2\cdot 3 - 3\cdot 5 = -9.$$

Поскольку СВ ξ и η не являются независимыми, используем определение дисперсии, а затем свойства математического ожидания:

$$D\zeta = M(\zeta - M\zeta)^2 = M((2\xi - 3\eta) - M(2\xi - 3\eta))^2 =$$

$$= M(2(\xi - M\xi) - 3(\eta - M\eta))^2 =$$

$$= M(4(\xi - M\xi)^2 + 9(\eta - M\eta)^2 - 12(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) =$$

$$= 4D\xi + 9D\eta - 12\operatorname{cov}(\xi;\eta) = 4\cdot 4 + 9\cdot 6 - 12\cdot(-2) = 16 + 54 + 24 = 94.$$

Для вычисления коэффициента корреляции $r_{\zeta;\,\xi} = \dfrac{\operatorname{cov}(\zeta;\xi)}{\sqrt{D\zeta D\xi}}$ найдем ковариацию

$$\operatorname{cov}(\zeta;\xi) = M(\zeta - M\zeta)(\xi - M\xi) = M(2\xi - 3\eta - M(2\xi - 3\eta))(\xi - M\xi) =$$

$$= M(2(\xi - M\xi) - 3(\eta - M\eta))(\xi - M\xi) =$$

$$= M(2(\xi - M\xi)^2 - 3(\eta - M\eta)(\xi - M\xi)) =$$

$$= 2D\xi - 3\operatorname{cov}(\eta;\xi) = 2\cdot 4 - 3\cdot(-2) = 14.$$

Следовательно, $r_{\zeta;\,\xi} = \dfrac{14}{\sqrt{94\cdot 4}} = \dfrac{7}{\sqrt{94}} = \dfrac{7\sqrt{94}}{94} \approx 0{,}722.$ •

Упражнение 3. В условиях примера 1 найти $r_{\zeta;\,\eta}$.

Опр. 4. Двумерная СВ $(\xi;\eta)$ имеет ***нормальный (гауссовский) закон распределения***, если ее плотность распределения

$$f_{\xi;\,\eta}(x;y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Параметры двумерного нормального распределения имеют следующий смысл:

$$a_1 = M\xi;\ a_2 = M\eta;\ \sigma_1^2 = D\xi;\ \sigma_2^2 = D\eta;\ r = r_{\xi;\,\eta}.$$

Пример 2. Найдем числовые характеристики двумерной нормальной СВ $(\xi;\eta)$ с плотностью распределения

$$f_{\xi;\,\eta}(x;y) = \frac{1}{90\pi}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{162} - \frac{(x-1)(y+2)}{33{,}75} - \frac{(y+2)^2}{18}\right\}.$$

Решение. Несложно видеть, что $M\xi = a_1 = 1;\ M\eta = a_2 = -2.$ Чтобы определить значения остальных параметров распределения, запишем соотношения, которым эти значения должны удовлетворять:

$$\begin{cases} 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2} = 90\pi, \\ 2(1-r^2)\sigma_1^2 = 162, \\ \dfrac{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2}{r} = -33,75, \\ 2(1-r^2)\sigma_2^2 = 18. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на четвертое, получим

$$\frac{2(1-r^2)\sigma_1^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2} = \frac{162}{18}; \qquad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 9,$$

поэтому $\sigma_1^2 = 9\sigma_2^2$.

Выразим r. Для этого перемножим второе и четвертое уравнения, а затем разделим на третье, возведенное в квадрат:

$$\frac{2(1-r^2)\sigma_1^2 2(1-r^2)\sigma_2^2}{(1-r^2)^2\sigma_1^2\sigma_2^2} r^2 = \frac{162\cdot 18}{(-33,75)^2}; \qquad 4r^2 = 2,56; \quad r^2 = 0,64.$$

Учитывая знак в третьем уравнении, получаем $r = -0,8$.

Тогда из третьего уравнения найдем значение σ_2^2:

$$2\cdot(1-0,64)\sigma_2^2 = 18; \qquad 0,72\sigma_2^2 = 18; \qquad \sigma_2^2 = 25.$$

Отсюда $\sigma_1^2 = 9\sigma_2^2 = 225$.

Итак, мы определили значения параметров, используя только три уравнения из имеющихся четырех. Проверим, что найденные значения не противоречат первому уравнению:

$$2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2} = 2\pi\cdot 15\cdot 5\cdot\sqrt{1-0,8^2} = 90\pi.$$

Таким образом, найдены числовые характеристики заданной двумерной нормальной СВ (ξ; η):

$$M\xi = 1;\ M\eta = -2;\ D\xi = 225;\ D\eta = 25;\ r_{\xi;\,\eta} = -0,8. \bullet$$

Свойства двумерного нормального распределения.

1. Если СВ (ξ; η) имеет двумерное нормальное распределение, то $\xi \sim \mathcal{N}(a_1;\sigma_1)$, $\eta \sim \mathcal{N}(a_2;\sigma_2)$.

2. Если СВ $(\xi;\eta)$ имеет двумерное нормальное распределение, то СВ ξ и η независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированы, т. е. $r_{\xi;\eta}=0$.

Доказательство. Согласно свойствам коэффициента корреляции, если СВ ξ и η независимы, то они некоррелированы, т. е. $r_{\xi;\eta}=0$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Докажем обратное утверждение для случая нормальной двумерной СВ $(\xi;\eta)$. Пусть $r_{\xi;\eta}=0$, тогда плотность двумерной нормальной СВ $(\xi;\eta)$ примет вид

$$f_{\xi;\eta}(x;y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}=f_\xi(x)f_\eta(y).$$

Таким образом, $f_{\xi;\eta}(x;y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$, а значит, СВ ξ и η независимы. ◁

3. Если СВ $(\xi;\eta)$ имеет двумерное нормальное распределение, то условное распределение одной компоненты при фиксированном значении другой также является нормальным:

распределение СВ ξ при условии $\eta=y$ является нормальным с

$$M(\xi\,|\,\eta=y)=a_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2),\qquad D(\xi\,|\,\eta=y)=\sigma_1^2(1-r^2);$$

распределение СВ η при условии $\xi=x$ является нормальным с

$$M(\eta\,|\,\xi=x)=a_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1),\qquad D(\eta\,|\,\xi=x)=\sigma_2^2(1-r^2).$$

Опр. 5. Зависимость между значениями одной СВ и условным математическим ожиданием другой СВ называется ***регрессионной***, а функции, выражающие эту зависимость, называются ***функциями регрессии***:

$M(\xi\,|\,\eta=y)=\psi(y)$ – функция регрессии ξ на η;

$M(\eta\,|\,\xi=x)=\varphi(x)$ – функция регрессии η на ξ.

Таким образом, если СВ $(\xi;\eta)$ имеет двумерное нормальное распределение, то обе функции регрессии (ξ на η и η на ξ) являются линейными.