СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1. **Классическое определение вероятности**
2. **Элементы комбинаторики**
3. **Аксиоматическое построение теории вероятностей**
4. **Геометрическая вероятность**
5. **Теоремы сложения и умножения вероятностей**
6. **Формула полной вероятности и формула Байеса**
7. **Повторение испытаний. Схема Бернулли**
8. **Предельные теоремы в схеме Бернулли**

1. Классическое определение вероятности

В теории вероятностей (ТВ) изучаются математические модели ***случайных испытаний*** (*опытов, экспериментов*, далее кратко - СЭ), т. е. экспериментов, результаты которых нельзя предсказать заранее, а сами испытания можно повторять, хотя бы теоретически, произвольное число раз при неизменном комплексе условий. Случайными испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков – от одного до шести) и т. д.

Результат (исход) испытания называется ***случайным событием*** (или просто: ***событием***). Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры при подбрасывании монеты, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости и т. п.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же случайном испытании, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании. События A и B называются ***совместными***, если они могут появиться вместе в одном испытании.

Например, если случайное испытание – один выстрел по мишени, событие A – попадание в мишень, событие B – промах. События A и B несовместны, поскольку если произошло событие A (стрелок попал в мишень), то событие B (промах во время того же выстрела) уже произойти не может, появление одного события исключает появление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

Например, при однократном бросании игральной кости события $A_1, A_2, ..., A_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. – являются попарно несовместными событиями.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу событий*** для данного испытания, если они попарно несовместны и в результате испытания обязательно появится одно из них.

Так, в примере с однократным бросанием игральной кости события $A_1, A_2, ..., A_6$ образуют полную группу событий, а события $A_1, A_2, ..., A_5$ – нет.

Для одного и того же испытания можно рассматривать различные полные группы событий. Например, при однократном бросании игральной кости полную группу также образуют события B = {выпадение четного числа очков} и C = {выпадение нечетного числа очков}. Другой пример полной группы событий в этом же испытании – события B, A_1, A_3, A_5.

Два события A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Противоположные события A и $\overline{A}$ представляют собой простейший случай полной группы событий.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно обязательно происходит. Событие называется ***невозможным***, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Будем обозначать достоверное событие Ω, а невозможное $\varnothing$.

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A **или** B (в результате СЭ произошло или событие A, или событие B, или события A и B одновременно).

Произведением $A \cdot B = AB$ событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате СЭ произошли **и** событие A, **и** событие B.

Несколько событий в данном испытании называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т.е. если условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед остальными.

Например, при бросании игральной кости события $A_1, A_2, ..., A_6$ являются равновозможными, если кость правильная (однородная и симметричная).

Всякое испытание связано с некоторой совокупностью исходов – результатов испытания, т.е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Пусть проводится испытание с конечным числом попарно несовместных равновозможных исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, образующих полную группу событий. Такие исходы называются элементарными исходами, множество всех элементарных исходов будем обозначать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Элементарный исход ω_i называется благоприятствующим появлению события A, если наступления исхода ω_i влечет за собой наступление события A.

Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A равна

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$$

где $m = m_A$ - число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n - общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Вероятность любого события удовлетворяет условию

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1.}$$

Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$; вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing) = 0$.

2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает, сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества.

Правило произведения: если объект типа X можно выбрать n способами и при каждом таком выборе объект типа Y можно выбрать m способами, то выбор пары (X,Y) в указанном порядке можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Правило суммы: если объект типа X можно выбрать n способами, а объект типа Y – m способами, то выбор объекта типа X или Y можно осуществить $m + n$ способами.

Пример. Из пункта *M.* в пункт *N.* и обратно можно добраться тремя способами: поездом, автобусом или самолетом; из *N.* в *L.* можно доехать автобусом или дойти пешком. Сколько различных по способу передвижения маршрутов можно организовать а) из *M.* в *L.* через *N.*, б) из *N.* в *M.* или из *N.* в *L.*?

Решение. а) Нужные маршруты легко перечислить: 1) из *M.* в *N.* самолетом, далее автобусом; 2) из *M.* в *N.* самолетом, далее пешком; 3) поездом – автобусом; 4) поездом – пешком; 5) автобусом – автобусом; 6) автобусом – пешком.

Число маршрутов можно определить, не перечисляя их. Имеется 3 способа добраться из *M.* в *N.* и 2 способа из *N.* в *L.* На каждый способ добраться из *M.* в *N.* приходится два способа добраться в *L.* По правилу произведения получаем $3 \cdot 2 = 6$ способов.

б) Нужно выбрать либо один из 3 вариантов добраться из *N.* в *M.*, либо один из 2 вариантов путешествия из *N.* в *L.* Применяя правило суммы, получаем всего 3 + 2 = 5 вариантов.

Число P_n всех возможных способов переставить *n* различных элементов – число ***перестановок*** (из *n* различных элементов) равно

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!}$$

Число A_n^m ***размещений*** (упорядоченных комбинаций) из *n* различных элементов по *m* элементам (местам), различающихся либо самими элементами, либо их порядком, равно

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1), \text{ ãäå } m \le n.}$$

Число C_n^m ***сочетаний*** (неупорядоченных комбинаций) из *n* различных элементов по *m* элементам (порядок выбранных элементов не учитывается) равно

$$\boxed{C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}},$$

причем $0! = 1$. Отметим, что $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3. Аксиоматическое построение теории вероятностей

В общем случае вероятностное пространство определяется в аксиоматике Колмогорова как тройка $\{\Omega, \sum, P\}$, где Ω – множество элементарных исходов, $\sum$ – алгебра (или σ-алгебра) событий, P – **вероятность** (вероятностная мера), определенная на классе событий $\sum$. Поясним сказанное.

Пусть рассматривается СЭ и Ω – множество элементарных исходов, связанное с данным СЭ. Говорят, что класс $\sum$ событий образует **алгебру событий**, если выполнены следующие условия (аксиомы):

1) $\Omega \in \sum, \varnothing \in \sum$ (достоверное и невозможное события принадлежат классу $\sum$);
2) $A \in \Sigma, B \in \Sigma \Rightarrow A + B \in \Sigma, AB \in \Sigma$ (если A и B являются событиями, то их сумма $A + B$ и произведение AB также являются событиями);
3) $A \in \Sigma \Rightarrow \overline{A} \in \Sigma$.

Отсюда вытекает, что сумма и произведение конечного числа событий в алгебре событий также является событием, чего нельзя сказать о их бесконечном числе. Если и бесконечная сумма событий является событием, то такая алгебра событий называется ***σ-алгеброй***.

Пример. Класс событий $\sum$, состоящий только из достоверного и невозможного событий, образует алгебру событий, так как $\Omega + \varnothing = \Omega \in \sum, \Omega\varnothing = \varnothing \in \sum$, и все аксиомы алгебры событий выполнены.

На классе событий $\sum$ задается неотрицательная (аддитивная) функция – ***вероятность*** P, удовлетворяющая следующим ***аксиомам вероятности***:

1. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \Sigma$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

В дальнейшем будем считать класс событий $\sum$ σ-алгеброй, и аксиомы вероятности дополняются *расширенной аксиомой сложения*:

4. $A_1, ..., A_k, ... \in \Sigma \Rightarrow P(A_1 + ... + A_k + ...) = P(A_1) + ... + P(A_k) + ...$, если события $A_1, ..., A_k, ...$ попарно несовместны, т. е. $A_i A_k = \varnothing$ для $i \neq k$.

В качестве следствий этих аксиом можно получить следующие ***свойства вероятности***:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого события A.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ для любого события A.

4. Геометрическая вероятность

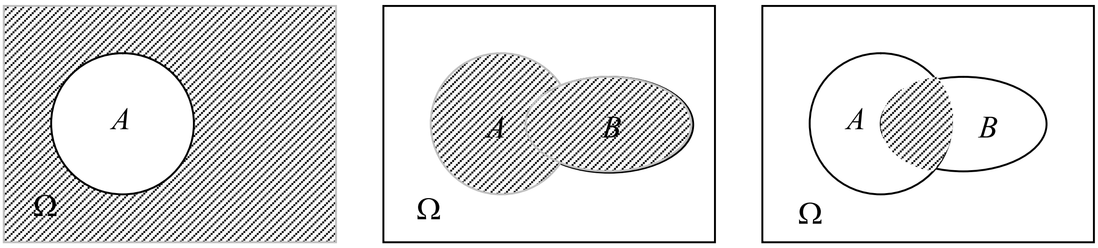
В приложениях ТВ широко используется понятие ***геометрической вероятности***. СЭ заключается в том, что исследуемая точка случайным образом (наудачу) появляется в любой точке заданного измеримого геометрического множества Ω. *Событие A* состоит в том, что исследуемая точка появляется в подмножестве A множества Ω: $A \subset \Omega$. Если S – геометрическая мера (длина, площадь, объем и т.д.) всей области, а S_A – геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует появлению данного события A, то вероятность этого события определяется формулой

$$\boxed{P(A) = \frac{S_A}{S}}.$$

Нетрудно видеть, что так устроенная вероятность удовлетворяет всем аксиомам вероятности, а тройка $\{\Omega, \Sigma, P\}$, где класс событий Σ порождается множеством всех подмножеств множества Ω, является примером вероятностного пространства.

5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример (*геометрическая интерпретация операций над событиями*). СЭ: точка случайным образом появляется во множестве Ω – достоверное событие, событие A (аналогично B) состоит в том, что точка появляется во множестве A (соответственно B). Ниже приводится геометрическая интерпретация событий $\overline{A}$, $A+B$, AB (см. рис. 1).



$\overline{A}$ $\qquad$ $A+B$ $\qquad$ AB

Рис. 1. Геометрическая интерпретация операций над событиями

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения: для любых событий A и B

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)}.$$

Действительно, это вытекает из представлений событий $A+B$ и B посредством суммы несовместных событий: $A+B=A+\overline{A}B$, $B=AB+\overline{A}B$ и применением аксиомы 3 сложения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\text{, если } A \text{ и } B \text{ – несовместны,}$$

в частности, $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Вероятность $P(A|B)$ появления в СЭ события *A*, если известно, что в этом СЭ произошло событие *B*, – условная вероятность – определяется соотношением: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$. Отсюда следует ***теорема умножения вероятностей:***

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)}.$$

События *A* и *B* называются ***независимыми***, если появление одного из них не зависит от появления другого, точнее, $P(A|B)=P(A), P(B|A)=P(B)$. В противном случае события *A* и *B* называются ***зависимыми.***

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)\text{, если } A \text{ и } B \text{ независимы.}$$

При решении задач с применением теорем сложения и умножения вероятностей полезно выразить событие A, вероятность которого ищется, и противоположное ему событие $\overline{A}$ через события, вероятности которых известны, а затем вычислить $P(A)$ непосредственно или по формуле $P(A)=1-P(\overline{A})$ в зависимости от того, что удобнее.

6. Формула полной вероятности и формула Байеса

События A_1, A_2,…, A_n образуют ***полную группу*** для данного СЭ, если 1) $A_iA_j=\varnothing$ для $i\neq j$ и 2) $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$, т. е. 1) они попарно несовместны и 2) в результате СЭ обязательно появится одно из них.

Отметим, что для одного и того же СЭ можно рассматривать различные полные группы событий, например, события A и $\overline{A}$, где A –

любое событие, связанное с СЭ, всегда образуют полную группу событий.

Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу событий, то вероятность события A можно вычислить по ***формуле полной вероятности***:

$$\boxed{P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)},$$

причем $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

Вероятности гипотез до проведения опыта называются ***априорными вероятностями***. Если известно, что в результате опыта с одной из гипотез (но мы не знаем с какой) наступило событие A, то вероятности каждой гипотезы (***апостериорные вероятности***) можно пересчитать по ***формуле Байеса***: $P(H_k / A) = \dfrac{P(H_k)P(A / H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$.

7. Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть проводится *n независимых в совокупности* испытаний (СЭ), в каждом из которых возможно только два исхода: A – *успех* и $\overline{A}$ – *неуспех*, причем вероятность наступления успеха в каждом испытании постоянна и равна p. Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

В схеме Бернулли вероятность $P_n(m)$ наступления m успехов в n независимых испытаниях – вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз, вычисляется по ***формуле Бернулли***:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $0! = 1$, $q = 1 - p = P(\overline{A})$ – вероятность неуспеха в одном испытании.

Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, равна $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum\limits_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится хотя бы один раз, равна $P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

8. Предельные теоремы в схеме Бернулли

При **больших** значениях n для вычисления вероятностей $P_n(m)$ используются приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний **крайне мала,** а число испытаний n **достаточно велико**, то вероятность $P_n(m)$ вычисляется приближенно по ***формуле Пуассона*** (теорема Пуассона):

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np.$$

Формулу Пуассона применяют, когда событие A является *редким*, но количество испытаний n *велико* и *среднее число успехов* $a=np$ незначительно ($a \leq 10$).

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1**,** а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(m)$ также можно использовать формулу Пуассона (считая успехом событие $\overline{A}$).

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний **существенно отличается от 0 и 1** (близко к $\frac{1}{2}$), а число испытаний n **достаточно велико**, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяют приближенную ***локальную формулу Муавра-Лапласа*** (*локальная теорема Муавра-Лапласа*):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$, на практике обычно полагают $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$.

Если в схеме Бернулли вероятность p **существенно отличается от 0 и 1,** а n **достаточно велико**, то вероятность $P_n(m_1 \leq m < m_2)$, того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 раз, но менее m_2 раз, вычисляется по ***интегральной формуле Муавра-***

Лапласа (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*):

$$P_n(m_1 \le m < m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ – функция Лапласа, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, на практике обычно полагают $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x \ge 5$.

Для функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ составлены таблицы значений. Формулы Муавра-Лапласа, как правило, используются, если $0,1 < p < 0,9$, и дают хорошие результаты, если $npq \ge 20$.