Раздел 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Понятие случайной величины. Способы задания случайных величин

До сих пор мы рассматривали случайные события и их вероятности. Случайные события – это, по сути, качественная характеристика случайного результата опыта, но этот результат можно характеризовать и количественно.

Перейдем к рассмотрению *случайных величин* (СВ), т. е. таких величин, которые принимают те или иные числовые значения в зависимости от исхода случайного эксперимента, причем до проведения эксперимента нельзя определить, какое именно значение примет эта величина.

Пример 1. 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) число успехов в n испытаниях в схеме Бернулли – СВ, принимающая значения 0, 1, …, n;

3) число бракованных изделий в данной партии – СВ, принимающая целые значения от 0 до n, где n – объем партии;

4) число промахов до первого попадания – СВ, принимающая целые значения 0, 1, 2, …;

5) если точка брошена наудачу в круг радиуса R, то расстояние от центра круга до этой точки, – СВ, принимающая значения из промежутка $[0; R]$;

6) прирост веса домашнего животного за месяц есть СВ, которая может принять значение из некоторого промежутка;

7) дальность броска мяча – СВ, принимающая неотрицательные значения.•

Случайность величин имеет ту же природу, что и случайность событий, а различаются они лишь математической природой. Случайная величина – это, по сути, числовая функция элементарного события, определенное обобщение понятия случайного события.

Принятие случайной величиной конкретного значения представляет собой некоторое событие, следовательно все теоремы, рассмотренные ранее, можно применять для случайных величин.

Будем обозначать случайные величины греческими буквами ξ, η, ζ и т. д.

Дадим строгое определение случайной величины.

Опр. 1. Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. ***Случайной величиной*** (***СВ***) называется числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, заданная на множестве Ω элементарных событий:

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R},$$

и обладающая тем свойством, что для любого действительного x существует (определена) вероятность

$$P(\xi < x) = P(\text{СВ } \xi \text{ примет значение меньше } x),$$

т. е. событие $A = \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\text{СВ } \xi \text{ примет значение меньше } x\} \in \mathfrak{F}$.

Замечание. Если пространство Ω элементарных событий конечно или счетно, то любая функция, определенная на Ω, будет случайной величиной.

В общем случае необходимо требовать, чтобы функция была *измеримой*, т. е. обладала указанным свойством.

Мы будем рассматривать два основных типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Опр. 2. СВ называется ***дискретной***, если она принимает конечное или счетное множество отдельных изолированных значений.

Непрерывная СВ принимает все значения из некоторого промежутка (конечного или бесконечного) или объединения промежутков. Строгое определение непрерывной СВ будет дано ниже.

Пример 1 (продолжение). СВ в пунктах **1)**, **2)**, **3)**, **4)** – дискретные; в пунктах **5)**, **6)**, **7)** – непрерывные.•

Опр. 3. ***Законом распределения СВ*** называется всякое соответствие между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями. О СВ говорят, что она *распределена* по данному закону или *подчинена* данному закону распределения.

Закон распределения полностью задает СВ.

Функция распределения

Универсальным способом задания закона распределения СВ является функция распределения, поскольку она может быть определена для любой СВ.

Опр. 4. ***Функцией распределения*** СВ ξ называется функция, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$\boxed{F(x) = P(\xi < x),} \tag{1}$$

т. е. при каждом $x \in \mathbb{R}$ значение $F(x)$ выражает вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x.

Геометрически равенство (1) можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что СВ ξ примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, лежащей левее точки x, т. е. случайная точка с абсциссой ξ попадет в интервал $(-\infty;\ x)$ (см. рис. 14).

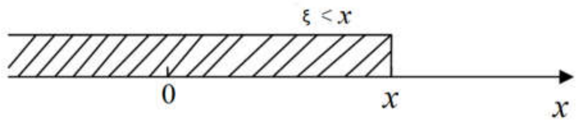


Рис. 14. К понятию функции распределения

Опр. 5. СВ называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна во всех точках и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Основные свойства функции распределения СВ.

1. Функция $F(x)$ ограничена: $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того, что значение $F(x)$ выражает вероятность.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим события $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{x_1 \le \xi < x_2\}$, $C = \{\xi < x_2\}$. Тогда $C = A + B$, причем события A и B несовместны, поэтому $P(C) = P(A) + P(B)$. Поскольку $P(C) = F(x_2)$, $P(A) = F(x_1)$, то $F(x_2) = F(x_1) + P(B)$. Учитывая, что $P(B) \ge 0$, получаем $F(x_1) \le F(x_2)$.

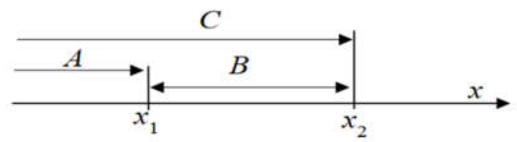


Рис. 15. К доказательству свойств функции распределения

Кроме того, геометрически (рис. 15) очевидно, что при перемещении точки x вправо по числовой оси вероятность попадания случайной точки с абсциссой ξ в интервал $(-\infty;\ x)$ не может уменьшаться. ◁

3. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0;\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1.$

При неограниченном перемещении точки x влево по числовой оси (рис. 14) попадание случайной точки с абсциссой ξ левее x в пределе становится невозможным событием; естественно полагать, что вероятность этого события стремится к 0. Аналогично, при неограниченном перемещении точки x вправо по числовой оси попадание случайной точки с абсциссой ξ левее x в пределе становится достоверным событием, вероятность которого равна 1.

4. Функция $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке x, т. е. $F(x-0)=F(x),\ x\in\mathbb{R}.$

Замечание. Всякая функция $F(x)$, обладающая свойствами 1–4, может быть функцией распределения некоторой СВ.

5. Вероятность попадания СВ ξ в полуинтервал $[x_1;x_2)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах полуинтервала:

$$\boxed{P(x_1\le\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1).} \qquad (2)$$

Доказательство следует из доказательства свойства 2, где было показано, что если $B=\{x_1\le\xi<x_2\}$, то $P(B)=F(x_2)-F(x_1)$. ◁

6. $P(\xi=x_0)=F(x_0+0)-F(x_0).$

Доказательство следует из свойства 5 при $x_1=x_0;\ x_2=x\to x_0+0$:

$$P(\xi=x_0)=\lim_{x\to x_0+0}P(x_0\le\xi<x)=$$

$$=\lim_{x\to x_0+0}(F(x)-F(x_0))=F(x_0+0)-F(x_0). ◁$$

Отметим, что значение этого предела зависит от того, непрерывна ли функция $F(x)$ в точке x_0 или терпит разрыв. Если функция в точке x_0 совершает скачок, то предел равен величине этого скачка. Если же $F(x)$ непрерывна в точке x_0, то вероятность того, что СВ ξ примет значение в точности равное x_0, равна 0. Последнее утверждение не означает, что событие $\{\xi = x_0\}$ невозможно; оно возможно, но с нулевой вероятностью.

Следствие 1. Если СВ ξ непрерывная, то $P(\xi = x_0) = 0$.

Следствие 2. Для непрерывной СВ ξ формула (2) справедлива с любыми знаками неравенств, как со строгими, так и с нестрогими.

Действительно, если ξ – непрерывная СВ, то $P(\xi = x_1) = 0$, $P(\xi = x_2) = 0$ и

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) + P(\xi = x_2) = F(x_2) - F(x_1);$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) - P(\xi = x_1) = F(x_2) - F(x_1);$$

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) - P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Ряд распределения дискретной случайной величины

Для описания дискретных СВ на ряду с функцией распределения $F(x)$ используется ряд распределения вероятностей.

Если СВ ξ принимает конечное или счетное число отдельных значений, т. е. если это дискретная СВ, то для того, чтобы она была полностью задана, достаточно перечислить все ее возможные значения x_k, $k = 1, 2, \ldots$, и указать, с какими вероятностями p_k она их принимает.

Опр. 6. ***Рядом распределения*** дискретной СВ ξ называется таблица, в которой перечислены все возможные значения x_k, $k = 1, 2, \ldots$, этой СВ и соответствующие им вероятности $p_k = P(\xi = x_k)$, причем: 1) $p_k \ge 0$; 2) $p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$.

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

Пример 2. Правильную монету подбросили наудачу 3 раза. Рассмотрим СВ ξ – число выпавших гербов. Найдем ряд распределения и функцию распределения этой СВ.

Решение. Чтобы составить ряд распределения СВ ξ, определим, какие значения может принимать эта СВ и с какими вероятностями. При трех бросках монеты герб может выпасть от 0 до 3 раз включительно, это и есть возможные значения СВ ξ.

Для нахождения вероятностей заметим, что мы имеем схему Бернулли с $n = 3$ испытаниями (монета подброшена 3 раза) и $p=\frac{1}{2}$ (вероятность выпадения герба). Тогда $q=1-p=\frac{1}{2}$. Искомые вероятности каждого из возможных значений СВ ξ находим по формуле Бернулли:

$$P(\xi=0)=C_3^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}=0{,}125;$$

$$P(\xi=1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}=0{,}375;$$

$$P(\xi=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}=0{,}375;$$

$$P(\xi=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Следовательно, закон распределения СВ ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Заметим, что сумма вероятностей различных значений дискретной СВ ξ равна $0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}175 = 1$.

Найдем значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения в таблице видно, что СВ ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_k СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_k < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

при $x \le 0$ имеем $F(x) = 0$, так как ни одно из значений 0, 1, 2, 3 не удовлетворяет указанному неравенству;

при $0 < x \le 1$ получим $F(x) = P(\xi = 0) = 0{,}125$ (условию $x_k < x$ удовлетворяет только значение $x_k = 0$);

при $1 < x \le 2$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$ (значения 0 и 1 удовлетворяют неравенству $x_k < x$);

при $2 < x \le 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$;

при $x > 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}125 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}875 & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

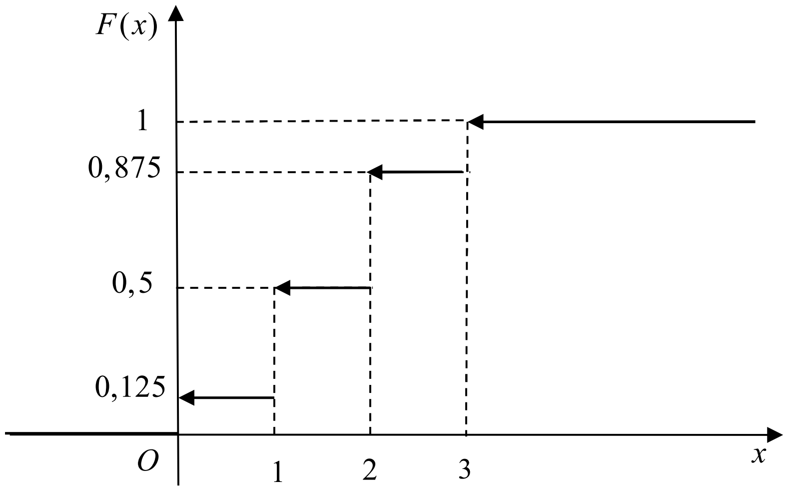


Рис. 16. График функции распределения дискретной СВ

График функции распределения представлен на рис. 16. •

Замечание. График функции распределения любой дискретной СВ имеет ступенчатый вид, причем функция распределения терпит разрывы в точках x_k со скачками $p_k = P(\xi = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для непрерывной СВ, принимающей значения из некоторого интервала, перечислить все ее возможные значения и составить ряд распределения, невозможно.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Закон распределения непрерывной СВ обычно задают функцией распределения или плотностью распределения.

Пусть имеется непрерывная случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$, которую мы предположим непрерывной и дифференцируемой. Для непрерывной функции распределения $F(x)$ вероятность любого отдельного значения случайной величины должна быть равна нулю, т. е. не должно быть скачков ни в одной точке. Такие события – возможные, но с нулевой вероятностью – появляются только при рассмотрении опытов, не сводящихся к схеме случаев. Это аналогично телу, имеющему определенную массу, но ни одна из точек внутри тела конечной массой не обладает. Малый объем обладает конечной массой, но она приближается к нулю по мере уменьшения объема и в пределе равна нулю для точки. То есть при непрерывном распределении вероятностей вероятность попадания на сколь угодно малый участок отлична от нуля, тогда как вероятность попадания в строго определенную точку в точности равна нулю.

Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на участок от x до $x + \Delta x$:

$$P(x \le \xi < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

т. е. эта вероятность равна приращению функции распределения на этом участке. Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка $\dfrac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}$, т. е. *среднюю вероятность*, приходящуюся на единицу длины на этом участке, и будем приближать Δx к 0. В пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Функция $f(x)$ – производная функции распределения – характеризует как бы *плотность*, с которой распределяются значения вероятности СВ в данной точке.

Опр. 7. ***Плотностью распределения*** (или ***плотностью вероятностей***) непрерывной СВ ξ называется производная ее функции распределения:

$$\boxed{f(x) = F'(x).}$$

Утв. 1. Вероятность попадания непрерывной СВ ξ в промежуток $[x_1; x_2)$ равна интегралу от плотности распределения по этому промежутку:

$$\boxed{P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.} \tag{3}$$

Доказательство. Функция распределения является первообразной для плотности распределения, поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1),$$

что, в силу свойства (2) функции распределения, равно вероятности $P(x_1 \le \xi < x_2)$. ◁

Геометрически вероятность попадания СВ ξ на промежуток $[x_1; x_2)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности, осью абсцисс и отрезками прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

Поскольку вероятность того, что непрерывная СВ примет заранее указанное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = x_0) = 0$ (хотя это событие не обязательно невозможное), то для непрерывной СВ

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) =$$

$$= P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Из (3) и свойств функции распределения можно вывести формулу, выражающую функцию распределения через плотность распределения.

Утв. 2. Значение $F(x)$ функции распределения непрерывной СВ ξ равно интегралу от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до x:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.} \tag{4}$$

Функция распределения и плотность распределения выражаются друг через друга и, следовательно, для непрерывной СВ каждая из них является исчерпывающей характеристикой. В отличие от функции распределения, плотность распределения не является универсальным способом задания закона распределения СВ, поскольку она существует только для непрерывных СВ.

Замечание. Иногда функцию $f(x)$ называют также ***дифференциальной функцией распределения***, а $F(x)$ – ***интегральной функцией распределения*** непрерывной СВ ξ.

Основные свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения есть неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Это свойство вытекает из того, что функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Это следует из формулы (3) и из того, что $F(+\infty) = 1$.

Геометрически эти два свойства означают, что график плотности распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна единице.

Пример 3. Плотность распределения СВ ξ задана формулой $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$. Найдем: **а)** значение константы C; **б)** вид функции распределения; **в)** вероятность попадания СВ ξ в интервал $(-1;1)$.

Решение. **а)** Значение константы C найдем из условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Вычисляя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2}dx = C\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\pi = 1,$$

получим $C = \dfrac{1}{\pi}$. Следовательно, плотность распределения СВ ξ имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

б) Учитывая связь между плотностью и функцией распределения, по формуле (4) найдем

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

в) Вероятность попадания СВ ξ в интервал $(-1; 1)$ вычислим по формуле (3):

$$P(-1 < \xi < 1) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}. \bullet$$

§ 2. Числовые характеристики случайных величин

Ряд распределения, функция распределения или плотность вероятностей полностью задают СВ. Однако часто встречаются задачи, когда достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, которые описывают существенные свойства распределения СВ.

Основными числовыми характеристиками СВ являются *математическое ожидание* и *дисперсия*. Математическое ожидание – это в некотором смысле среднее значение СВ (с учетом ее более и менее вероятных значений). Дисперсия характеризует степень разброса значений СВ относительно ее математического ожидания.

Математическое ожидание случайной величины

Опр. 1. ***Математическим ожиданием дискретной СВ*** ξ называется число, равное сумме произведений всех значений СВ ξ на соответствующие им вероятности:

$$\boxed{M\xi = \sum_k x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k + \ldots} \qquad (1)$$

(предполагается, что ряд в правой части этого равенства абсолютно сходится).

Опр. 2. ***Математическим ожиданием непрерывной СВ*** ξ называется число, равное

$$\boxed{M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,} \qquad (2)$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятностей СВ ξ, при условии, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty.$

Математическое ожидание $M\xi$ характеризует среднее значение СВ ξ (с учетом ее более и менее вероятных значений).

Замечание. Существуют СВ, не имеющие математического ожидания, так как интеграл (2) или ряд (1) в случае дискретной СВ, имеющей бесконечное множество значений, могут быть расходящимися.

Пример 1. Дискретная СВ, заданная рядом распределения

ξ	2	4	8	…	2^k	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{2^k}$	…

не имеет математического ожидания, так как соответствующий ряд расходится:

$$M\xi = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^k \cdot \frac{1}{2^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \bullet$$

Пример 2. Непрерывная СВ, заданная плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, не имеет математического ожидания, так как соответствующий интеграл расходится:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_A^B =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{B\to+\infty} \ln(1+B^2) - \lim_{A\to-\infty} \ln(1+A^2) \right),$$

поскольку оба предела равны ∞. •

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т. е. если $P(\xi = c) = 1$, то $M\xi = c$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(c\xi) = cM\xi, \text{ если } c = \mathrm{const}.$$

Упражнение. Доказать свойства 1, 2.

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух СВ ξ и η равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta.$$

4. Математическое ожидание произведения двух *независимых* СВ ξ и η равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi\eta) = M\xi M\eta, \text{ если } \xi \text{ и } \eta - \textit{независимые} \text{ СВ}.$$

Опр. 3. Две СВ ξ и η называются ***независимыми***, если для любых числовых множеств X и Y события $A = \{\xi \in X\}$ и $B = \{\eta \in Y\}$ являются независимыми.

Иными словами, две СВ независимы, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

5. Если $g(x)$ – произвольная числовая функция, то:

$Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k$ для дискретной СВ ξ;

$$Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \text{ для непрерывной СВ } \xi.$$

Дисперсия случайной величины

Опр. 4. ***Дисперсией*** СВ ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения этой СВ от ее математического ожидания:

$$\boxed{D\xi = M(\xi - M\xi)^2.}$$

Дисперсия СВ ξ характеризует разброс (рассеяние) значений СВ ξ вокруг ее математического ожидания.

Для вычисления дисперсии в большинстве случаев удобнее использовать следующую формулу.

Т 1. Дисперсия СВ равна разности математического ожидания квадрата СВ и квадрата математического ожидания СВ:

$$\boxed{D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2.}$$

Доказательство. Обозначим $M\xi = a$. Тогда, используя свойства математического ожидания, получим

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) =$$

$$= M(\xi^2) - 2aM\xi + a^2 = M(\xi^2) - 2a \cdot a + a^2 = M(\xi^2) - a^2. \triangleleft$$

Свойства дисперсии.

1. $D\xi \geq 0.$

2. Дисперсия постоянной величины равна 0: если $P(\xi = c) = 1$, то $D\xi = 0$.

3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате:

$$D(c\xi) = c^2 D\xi, \text{ если } c = \text{const}.$$

4. Дисперсия суммы двух *независимых* СВ ξ и η равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

5. Дисперсия разности двух *независимых* СВ ξ и η равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta.$$

Доказательство.

$$D(\xi - \eta) = D(\xi + (-\eta)) = D\xi + D(-1 \cdot \eta) = D\xi + (-1)^2 D\eta = D\xi + D\eta,$$

если ξ и η – независимые СВ. ◁

Упражнение. Доказать свойства 1–4.

Среднее квадратическое отклонение

Математическое ожидание СВ измеряется в тех же единицах, что и сама СВ, а дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности СВ. Это значит, что если рассматриваемая СВ – дальность прыжка спортсмена, измеряемая в метрах, то ее математическое ожидание будет измеряться в метрах, а дисперсия – в метрах квадратных.

Для того чтобы получить оценку рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама СВ, вводят понятие стандартного или среднего квадратического отклонения.

Опр. 5. ***Средним квадратическим отклонением*** СВ ξ называется квадратный корень из дисперсии этой СВ:

$$\boxed{\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.}$$

Из определения следует, что $\sigma_\xi \geq 0$ для любой СВ.

§ 3. Основные законы распределения дискретных случайных величин

Для того чтобы задать закон распределения дискретной СВ, достаточно задать ее ряд распределения, т. е. перечислить все возможные значения, которые может принимать эта СВ, и соответствующие им вероятности. Некоторые типы распределений встречаются наиболее часто и имеют свои названия.

1. Равномерное дискретное распределение.

Опр. 1. Дискретная СВ ξ ***распределена равномерно*** на множестве $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, если она принимает значения из этого множества с одинаковыми вероятностями, т. е.

$$P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = \ldots = P(\xi = x_n) = \frac{1}{n}.$$

Ряд распределения такой СВ имеет вид:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Проверим *корректность определения*: $\sum_{k=1}^{n} p_k = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Математическое ожидание и дисперсия этой СВ равны

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k; \qquad D\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Пример 1. Число очков, выпавших при одном подбрасывании правильного кубика – СВ, распределенная равномерно на множестве $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.•

2. Бернуллиевские СВ.

Опр. 2. СВ ξ, принимающая только два значения 0 и 1 с вероятностями $P(\xi = 1) = p; P(\xi = 0) = 1 - p = q,$ называется ***бернуллиевской СВ*** с параметром p.

Запишем ряд распределения этой СВ:

ξ	0	1
P	q	p

Очевидно, $\sum_{k=1}^{n} p_k = q + p = 1.$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию этой СВ:

$$M\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$D\xi = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Таким образом, для бернуллиевской СВ

$$M\xi = p; \qquad D\xi = pq.$$

3. Биномиальное распределение (распределение Бернулли).

Опр. 3. СВ ξ имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами n и p, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; n$ с вероятностями

$$\boxed{P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p, k = 0; 1; 2; ...; n.}$$

Ряд распределения биномиальной СВ имеет вид:

ξ	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Корректность определения следует из формулы бинома Ньютона, так как

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = q^n + npq^{n-1} + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + p^n = (q + p)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события A (число успехов) при n независимых испытаниях в схеме Бернулли.

Утв. 1. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p, равны

$$\boxed{M\xi = np; \quad D\xi = npq.}$$

Доказательство. Представим СВ ξ, имеющую биномиальное распределение с параметрами n и p, как сумму СВ:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n,$$

где

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании произошло,} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании не произошло.} \end{cases}$$

Тогда $P(\xi_i = 1) = p; P(\xi_i = 0) = q,$ т. е. ξ_i – бернуллиевские СВ с параметром p. При этом все слагаемые $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ попарно независимы, поэтому

$$M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n = p + p + ... + p = np;$$
$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n = pq + pq + ... + pq = npq.$$

$\lhd$

4. Распределение Пуассона.

Опр. 4. СВ ξ распределена по ***закону Пуассона*** с параметром a, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; k; ...$ с вероятностями

$$\boxed{P(\xi = k) = \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!},\ \text{где}\ k = 0; 1; 2; ....}$$

Ряд распределения пуассоновской СВ имеет вид:

ξ	0	1	2	…	k	...
P	e^{-a}	$a\,\mathrm{e}^{-a}$	$\frac{a^2\,\mathrm{e}^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!}$	…

Докажем *корректность определения*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!} = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{e}^{a} = 1.$$

Утв. 2. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей распределение Пуассона с параметром a, равны

$$\boxed{M\xi = a; \quad D\xi = a.}$$

Доказательство.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{(k-1)!} = a\,\mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= a\,\mathrm{e}^{-a} \left(\frac{a^0}{0!} + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^k}{k!} + ... \right) = a\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{e}^{a} = a;$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!} = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a^k}{(k-1)!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} a^k = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} =$$

$$= a^2\,\mathrm{e}^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} + a = a^2 + a,$$

откуда $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$ ◁

Закон распределения Пуассона является хорошим приближением для биномиального распределения при больших n и малых p (или $1-p$). Поэтому закон распределения Пуассона называют *законом редких явлений*.

По закону Пуассона, например, распределены: число вызовов, регистрируемых в call-центре за определенный промежуток времени; число родившихся за определенный период (день, неделю) близнецов; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной *средней интенсивностью*, характеризующейся параметром $a = np$.

Часто закон Пуассона используется в теории массового обслуживания, так как считается, что число требований на обслуживание, поступивших за единицу времени, распределено по закону Пуассона.

5. Геометрическое распределение.

Пример 2. Составим ряд распределения СВ ξ – числа промахов до первого попадания, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p.

Решение. Рассмотрим события

A_i = {попадание при i-м выстреле}, $i = 1; 2; 3; \ldots$.

Тогда $P(A_i) = p; P(\overline{A_i}) = 1 - p = q.$

СВ ξ может принимать значения $0; 1; 2; \ldots; k; \ldots$. Определим вероятности этих значений:

$$P(\xi = 0) = P(A_1) = p;$$

$$P(\xi = 1) = P(\overline{A_1}A_2) = qp;$$

$$P(\xi = 2) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = q^2 p;$$

$$\ldots;$$

$$P(\xi = k) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_k}A_{k+1}) = q^k p.$$

Следовательно, закон распределения СВ ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	2	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	q^kp	…

Заметим, что сумма вероятностей различных значений СВ ξ равна (в силу формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = p + qp + q^2 p + \ldots + q^k p + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1. \bullet$$

Опр. 5. Дискретная СВ ξ имеет ***геометрическое распределение*** с параметром p, если она принимает значения $0; 1; 2; \ldots; k; \ldots$ с вероятностями

$$P(\xi = k) = q^k p, \text{ где } q = 1 - p, \; k = 0; 1; 2; \ldots.$$

Геометрическое распределение имеет СВ ξ, равная числу испытаний Бернулли до первого успешного.

Название «геометрическое распределение» объясняется тем, что вероятности различных значений этой СВ образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p, q^3p, ...

Утв. 3. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей геометрическое распределение с параметром p, равны

$$M\xi = \frac{q}{p}; \qquad D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Доказательство.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = qp\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = qp\sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'_q = qp\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'_q =$$

$$= qp\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q = qp\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = qp\frac{1}{(1-q)^2} = qp\frac{1}{p^2} = \frac{q}{p};$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k p = qp\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = qp\sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)'_q =$$

$$= qp\left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right)'_q = qp\left(q\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right)'_q = qp\left(q\cdot\frac{1}{(1-q)^2}\right)'_q =$$

$$= qp\left(\frac{1}{(1-q)^2} + q\cdot\frac{2}{(1-q)^3}\right) = qp\cdot\frac{1-q+2q}{(1-q)^3} = qp\frac{1+q}{p^3} = \frac{q+q^2}{p^2},$$

откуда $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \dfrac{q+q^2}{p^2} - \dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$. ⊲

6. Гипергеометрическое распределение.

Пример 3. В урне N шаров, из них K белых. Из урны один за другим извлекают n шаров. Определим вероятность того, что среди них ровно k белых шаров, если выбор производится: **а)** без возвращения; **б)** с возвращением.

Решение. Рассмотрим СВ ξ – число белых шаров среди извлеченных. Найдем вероятность $P(\xi = k)$ в каждом случае.

а) По классическому определению вероятности получим

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

б) Производится n извлечений в одних и тех же условиях, вероятность извлечения белого шара каждый раз одна и та же $p = \dfrac{K}{N}$, т. е. имеет место схема Бернулли, поэтому искомая вероятность

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}. \bullet$$

Опр. 6. Пусть n, K, N – натуральные числа, $K \le N, n \le N, n + K \le N$. СВ ξ имеет ***гипергеометрическое распределение*** с параметрами n, K, N, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; \min\{n; K\}$ с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \text{ где } k = 0; 1; 2; ...; \min\{n; K\}.$$

Утв. 4. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, K, N, равны

$$M\xi = n\frac{K}{N}; \quad D\xi = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Гипергеометрическое распределение является основным в практике статистического приемочного контроля качества продукции и в задачах, связанных с организацией выборочных обследований.

В предельном случае, когда $N \to \infty$, но $p = \dfrac{K}{N}$ и n остаются фиксированными, гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному. Рекомендуется применять биномиального распределение вместо гипергеометрического, если $n < 0{,}1N$.

Пример 3 (продолжение). В урне $N = 100$ шаров, из них $K = 40$ белых. Из урны один за другим извлекают $n = 10$ шаров. Сравним вероятности того, что среди них ровно k белых шаров, если выбор производится: **а)** без возвращения; **б)** с возвращением.

k	0	1	2	3	4	5
а)	0,004	0,034	0,115	0,220	0,264	0,208
б)	0,006	0,040	0,121	0,215	0,251	0,201

k	6	7	8	9	10
а)	0,108	0,037	0,008	0,0009	0,00005
б)	0,111	0,042	0,011	0,0016	0,0001

Таким образом, при таком соотношении параметров задачи законы распределения СВ, имеющих гипергеометрический и биномиальный законы распределения, различаются незначительно.●

§ 4. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Для того чтобы задать закон распределения непрерывной СВ, достаточно задать ее функцию распределения или плотность распределения. Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся непрерывные распределения.

1. Непрерывное равномерное распределение.

Опр. 1. Непрерывная СВ ξ ***распределена равномерно*** на отрезке $[a; b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю.

Таким образом, плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} c & \text{при } x\in[a;b], \\ 0 & \text{при } x\notin[a;b], \end{cases}$$

причем значение константы c можно определить из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Вычисляя

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dx+\int\limits_{a}^{b} cdx+\int\limits_{b}^{+\infty} 0dx=0+c(b-a)+0=c(b-a)=1,$$

получим $c=\dfrac{1}{b-a}$. Следовательно, плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a;b], \\ 0 & \text{при } x\notin[a;b]; \end{cases}}$$

график плотности распределения изображен на рис. 17.

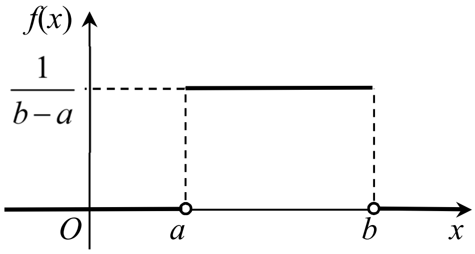


Рис. 17. Плотность равномерного на $[a;b]$ распределения

Для того чтобы СВ подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала и были равновероятны внутри этого интервала. Примером равномерно распределенной СВ может служить время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом, или ошибка округления. Так, ошибка округления числа до ближайшего целого есть СВ, распределенная равномерно на промежутке $[-0,5;\,0,5)$; если мы измеряем некоторую физическую величину, например, длину с точностью до 1 см, то ошибка округления этой величины (длины) будет распределена равномерно на $[-0{,}5 \text{ см}; 0{,}5 \text{ см})$.

Пример 1. Поезда метрополитена идут с интервалом 5 мин. Какова вероятность того, что пассажир, приходя на станцию метро в случайный момент времени, будет ожидать поезд не более 2 мин?

Решение. Пусть ξ – время ожидания. СВ ξ распределена равномерно на промежутке $[0; 5)$. Тогда плотность вероятностей этой СВ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & \text{при } x \in [0; 5), \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 5); \end{cases}$$

вероятность того, что СВ примет значение не более 2, равна

$$P(\xi \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{5} dx = 0{,}4. \bullet$$

Равномерно распределенная на $[a; b]$ СВ характеризуется тем свойством, что вероятность ее попадания в некоторый интервал, *лежащий внутри отрезка* $[a; b]$, зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения:

$$\boxed{P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}, \quad \text{если} \quad a \le x_1 < x_2 \le b.}$$

Найдем функцию распределения равномерно распределенной на $[a; b]$ СВ, используя формулу, выражающую функцию распределения через плотность распределения. Рассмотрим три случая:

1) если $x < a$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

2) при $x \in [a; b]$ получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx = \frac{x-a}{b-a};$$

3) при $x > b$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx + \int_{b}^{x} 0dx = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad x\in[a;b], \\ 1 \quad \text{при} \quad x>b;\end{cases}$$

ее график изображен на рис. 18.

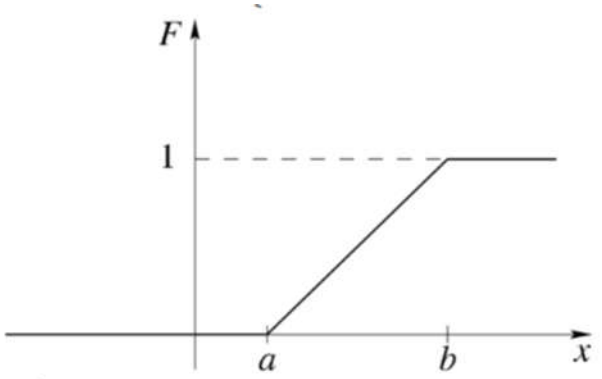


Рис. 18. Функция равномерного на $[a;b]$ распределения

Утв. 1. Числовые характеристики равномерного распределения:

$$\boxed{M\xi=\frac{a+b}{2}; \quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma_\xi=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.}$$

Доказательство.

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx+\int_b^{+\infty}0dx=$$

$$=0+\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b+0=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2};$$

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

тогда

$$D\xi=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=$$

$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12},$$

а значит, $\sigma_\xi=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$. ◁

2. Показательное (экспоненциальное) распределение.

Пример 2. Из партии однотипных приборов наугад выбирается один и экспериментально определяется время работы этого прибора. Для СВ ξ – время работы прибора – найдем функцию распределения $F(x)$, предполагая, что:

- СВ ξ принимает значения из промежутка $[0;+\infty)$;

- вероятность $P(x\le\xi<x+\Delta x)$ того, что прибор выйдет из строя в промежуток времени от x до $x+\Delta x$ часов при условии, что он проработал x часов, пропорциональна:

1) интервалу времени Δx (чем больше промежуток, тем больше вероятность того, что СВ ξ попадет в этот промежуток);

2) вероятности $1-F(x)$ того, что прибор будет работать не менее x часов.

Тогда

$$P(x\le\xi<x+\Delta x)=\lambda(1-F(x))\Delta x;$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\lambda(1-F(x))\Delta x;$$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lambda(1-F(x)).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим дифференциальное уравнение для нахождения функции $F(x)$: при $\Delta x\to 0$

$$F'(x)=\lambda(1-F(x)).$$

Решим это дифференциальное уравнение, разделив переменные:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lambda(1-F(x));$$

$$\int\frac{dF(x)}{1-F(x)}=\lambda\int dx;$$

$$-\ln|1-F(x)| = \lambda x - \ln|C|;$$

$$1-F(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x};$$

$$F(x) = 1 - C\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Константу C определим из условия $F(0) = P(\xi < 0) = 0.$ Тогда $F(0) = 1 - C = 0,$ а значит, $C = 1,$ поэтому функция распределения СВ ξ задается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения СВ ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \bullet$$

Опр. 2. Непрерывная СВ ξ имеет ***показательное (экспоненциальное) распределение*** с параметром λ, если ее плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}}$$

Упражнение 1. Доказать корректность определения, т. е. показать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Упражнение 2. Показать, что функция показательного распределения имеет вид

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}}$$

Графики плотности и функции показательного закона распределения приведены на рис. 19.

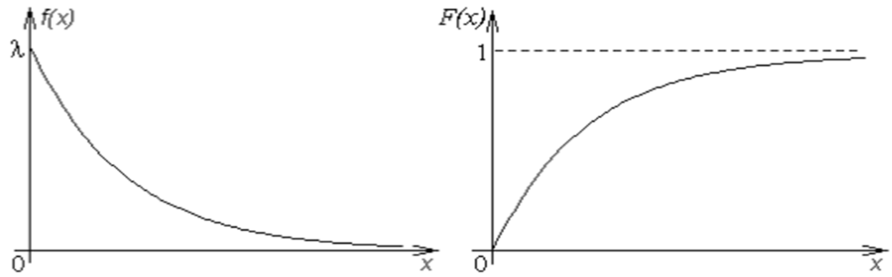


Рис. 19. Плотность и функция показательного распределения

Показательное распределение является одним из основных в теории массового обслуживания и теории надежности. Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на call-центр, продолжительность безотказной работы приборов, время между двумя авариями на дороге в определенном месте, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т. д.

Утв. 2. Числовые характеристики показательного распределения равны

$$\boxed{M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}.}$$

Доказательство. Найдем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx; & v = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{vmatrix} = \lim_{B\to+\infty}\left(-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^B + \int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(-B\,\mathrm{e}^{-\lambda B} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^B \right) = \lim_{B\to+\infty}\left(-B\,\mathrm{e}^{-\lambda B} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda B} + \frac{1}{\lambda} \right) =$$

$$= -\lim_{B\to+\infty}\frac{B}{\mathrm{e}^{\lambda B}} - \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda B}} + \frac{1}{\lambda} = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Упражнение 3. Интегрируя по частям дважды, показать, что $D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$. $\triangleleft$

Пример 2. Установлено, что время горения электрической лампочки является СВ, распределенной по показательному закону. Считая, что среднее значение этой величины равно 6 месяцам, найдем вероятность того, что лампочка будет исправна более года.

Решение. Так как среднее значение, т. е. математическое ожидание СВ, равно 6 месяцев, то $M\xi = \frac{1}{\lambda} = 6$, а значит, $\lambda = \frac{1}{6}$, поэтому функция распределения СВ ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{6}}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}.$$

Тогда

$$P(\xi > 12) = P(12 < \xi < +\infty) = F(+\infty) - F(12) =$$
$$= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{12}{6}}\right) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135. \bullet$$

3. Нормальное распределение (распределение Гаусса).

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения.

Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов распределения СВ, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются, при весьма часто встречающихся типичных условиях, многие другие законы распределения. В частности, при достаточно общих предположениях сумма большого числа независимых СВ имеет распределение, близкое к нормальному.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Впервые нормальное распределение как предел биномиального распределения рассматривалось А. Муавром еще в 1733 г. (теорема Муавра – Лапласа). Некоторое время спустя нормальное распределение было снова открыто и изучено независимо друг от друга К. Гауссом (1809 г.) и П. Лапласом (1812 г.) в связи с работами по теории ошибок наблюдений. Их идея объяснения механизма формирования нормально распределенных СВ заключалась в следующем: постулировалось, что значения исследуемой непрерывной СВ формируются под воздействием очень большого числа независимых случайных факторов, причем сила воздействия каждого отдельного фактора мала и не может превалировать среди остальных, а характер воздействия – аддитивный (суммарный).

Во многих СВ, изучаемых в экономике, технике, медицине, биологии и других областях, естественно видеть суммарный аддитивный эффект большого числа независимых причин. Кроме этого, полнота теоретических исследований, относящихся к нормальному закону, а также сравнительно простые математические свойства делают его наиболее привлекательным и удобным в применении. Даже в случае отклонения исследуемых экспериментальных данных от нормального закона существует по крайней мере два пути его целесообразной эксплуатации: а) использовать его в качестве первого приближения; при этом нередко оказывается, что подобное допущение дает достаточно точные с точки зрения конкретных целей исследования результаты; б) подобрать такое преобразование исследуемой случайной величины ξ, которое видоизменяет исходный закон распределения, превращая его в нормальный. С теоретической точки зрения закон нормального распределения имеет большое значение, поскольку с его помощью выведен целый ряд других важных распределений и построены различные статистические критерии (например, χ^2-, t- и F-распределения и опирающиеся на них критерии).

Существует известное высказывание Липмана (цитируемое А. Пуанкаре в труде «Исчисление вероятностей», 1912 г.): «Каждый уверен в справедливости нормального закона: экспериментаторы – потому, что они думают, что это математическая теорема; математики – потому, что они думают, что это экспериментальный факт». Как отмечает Г. Крамер, «обе стороны совершенно правы, если только это их убеждение не слишком безусловно: математическое доказательство говорит нам, что при некоторых ограничительных условиях мы вправе ожидать нормальное распределение, а статистический опыт показывает, что в действительности распределения являются приближенно нормальными».

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 3. Распределение непрерывной СВ ξ называется ***нормальным*** (или ***распределением Гаусса***) с параметрами a и $\sigma > 0$ (обозначается $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$), если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).}$$

Проверим *корректность определения*, т. е. убедимся, что функция $f(x)$ обладает обоими основными свойствами плотности распределения СВ. Очевидно, $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Для проверки выполнения условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ будем использовать *интеграл Пуассона* $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.}$

Интеграл от функции $f(x)$ сводится к интегралу Пуассона с помощью замены переменных $t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x = a + \sqrt{2}\sigma t \\ dx = \sqrt{2}\sigma\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1,$$

что доказывает корректность использования функции $f(x)$ в качестве плотности распределения.

Параметры a и σ имеют смысл математического ожидания и среднего квадратического отклонения СВ ξ: $M\xi = a,\, D\xi = \sigma^2$.

Утв. 3. Числовые характеристики нормального распределения равны

$$\boxed{M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma_\xi = \sigma.}$$

Доказательство. Найдем

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x = a + \sqrt{2}\sigma t \\ dx = \sqrt{2}\sigma\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2}\, dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} a\sqrt{\pi} + 0 = a.$$

Здесь упростили вычисления с помощью замены переменной, затем использовали интеграл Пуассона и свойство равенства 0 интеграла от нечетной функции по симметричному относительно 0 промежутку. Аналогично, применяя замену переменных, а затем формулу интегрирования по частям,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x = a + \sqrt{2}\sigma t \\ dx = \sqrt{2}\sigma\, dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 t^2\, e^{-t^2}\, dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B t^2\, e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & du = dt \\ dv = t\, e^{-t^2}\, dt; & v = -\dfrac{1}{2} e^{-t^2} \end{array} \right| = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left(-\frac{1}{2} t\, e^{-t^2} \Big|_A^B + \frac{1}{2} \int_A^B e^{-t^2}\, dt \right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\lim_{B\to+\infty} \frac{B}{2e^{B^2}} + \lim_{A\to-\infty} \frac{A}{2e^{A^2}} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(0 + 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right) = \sigma^2. \triangleleft$$

График плотности нормального распределения изображен на рис. 20 и называется ***нормальной кривой***, или ***кривой Гаусса***.

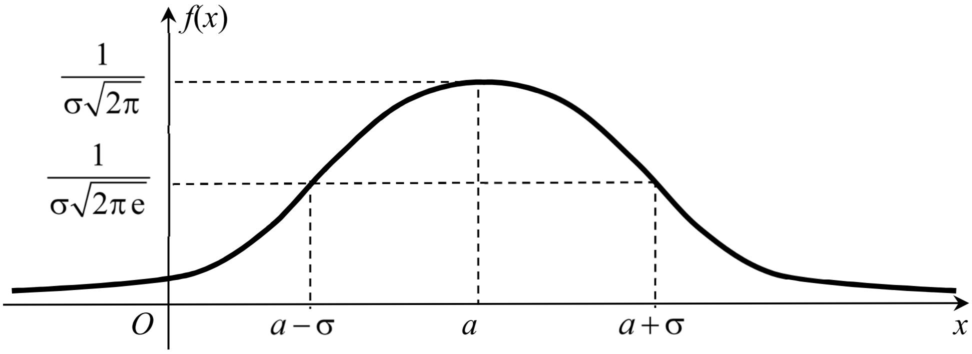


Рис. 20. График плотности нормального распределения $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Кривая Гаусса имеет точку максимума при $x = a$ и две точки перегиба при $x = a \pm \sigma$.

Укажем влияние параметров a и σ на вид кривой нормального распределения:

1) график симметричен относительно прямой $x = a$; при изменении параметра a кривая смещается вдоль оси Ox;

2) при увеличении значения σ график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается (см. рис 21).

При этом площадь под кривой Гаусса всегда равна 1, так как это площадь под графиком плотности распределения.

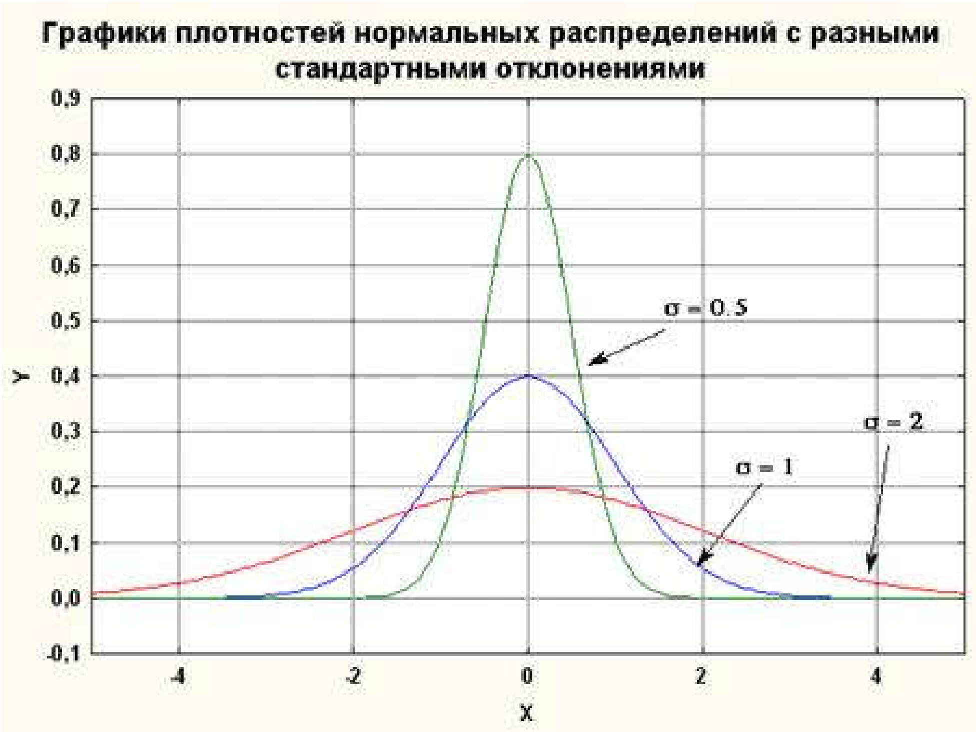


Рис. 21. Влияние параметра σ на вид кривой нормального распределения

Найдем функцию нормального распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-a}{\sigma} \\ x=a+\sigma t \\ dx=\sigma\, dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Здесь первый интеграл сведем к интегралу Пуассона, используя свойство интеграла от четной функции по симметричному относительно 0 промежутку, а затем замену переменной:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left| \begin{aligned} \tau &= \frac{t}{\sqrt{2}} \\ d\tau &= \frac{dt}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{2},$$

а второй интеграл представляет собой значение функции Лапласа в точке $\frac{x-a}{\sigma}$.

Таким образом, функция распределения СВ ξ, имеющей нормальное распределением с параметрами a и σ, имеет вид

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – функция Лапласа.

График функции нормального распределения изображен на рис. 22.

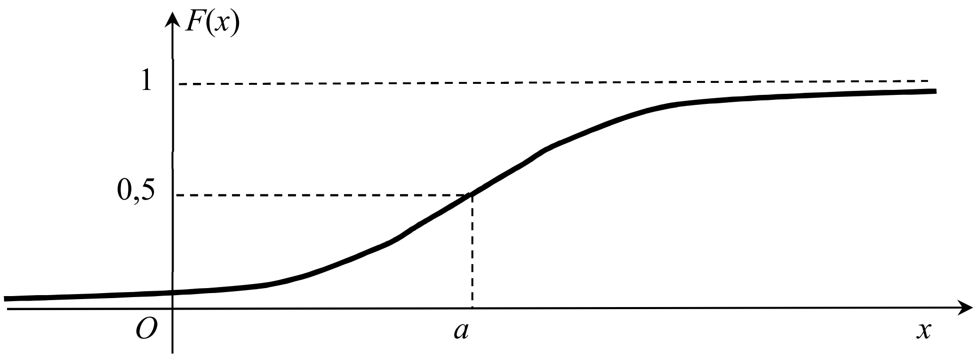


Рис. 22. График функции нормального распределения

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону.

Вероятность попадания СВ $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$ на заданный интервал $(x_1;x_2)$ выражается через значения функции Лапласа следующим образом:

$$\boxed{P(x_1<\xi<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).} \tag{1}$$

Упражнение 4. Показать справедливость формулы (1), используя выражение для функции нормального распределения.

Замечание. В силу непрерывности СВ формула (1) справедлива как со строгими, так и с нестрогими знаками неравенств.

Пример 3. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная СВ ξ с параметрами $a = 173$ см и $\sigma = 6$ см, найдем:

а) выражения для плотности и функции распределения;

б) доли костюмов 3-го роста (170–176 см) и 4-го роста (176–182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Решение. **а)** Запишем выражения для плотности и функции распределения СВ $\xi \sim \mathcal{N}(173;6)$ подставив известные значения параметров распределения:

$$f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-173)^2}{72}};\quad F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

б) По формуле (1) найдем вероятности

$$P(170\le\xi\le176)=\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)-\Phi\left(\frac{170-173}{6}\right)=$$

$$=\Phi(0,5)-\Phi(-0,5)=2\Phi(0,5)\approx 2\cdot 0,1915=0,383;$$

$$P(176\le\xi\le182)=\Phi\left(\frac{182-173}{6}\right)-\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)=$$

$$=\Phi(1,5)-\Phi(0,5)\approx 0,4332-0,1915=0,2417.$$

Таким образом, в общем объеме производства костюмов для данной возрастной группы нужно предусмотреть 38% изделий 3-го роста и 24% – 4-го роста. •

Найдем вероятность того, что СВ $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$ отклонится от своего математического ожидания менее, чем на ε:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким образом,

$$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

При $\varepsilon = \sigma$ имеем

$$P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6827,$$

т. е. 68% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на среднее квадратическое отклонение.

Если $\varepsilon = 2\sigma$, то

$$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545,$$

а значит, 95% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на 2σ.

Полагая $\varepsilon = 3\sigma$, получим

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973,$$

т. е. 99,7% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на 3σ. Это свойство нормального распределения имеет специальное название.

***Правило трех сигм*:** Если СВ ξ распределена нормально с параметрами a и σ, то попадание ее в интервал $(a$ - 3σ; a - $3\sigma)$ является практически достоверным событием, а значит, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.

Отметим еще некоторые свойства нормального распределения.

Т 1. Если $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$, то $\dfrac{\xi - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Опр. 4. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется ***стандартным нормальным распределением***.

Теорема 1 утверждает, что любую нормальную СВ можно преобразовать к стандартной нормальной СВ.

Более того, линейная комбинация *независимых* нормальных СВ также является нормальной СВ.

Т 2. Если ξ_1 и ξ_2 – независимые СВ, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1; \sigma_1)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2; \sigma_2)$, c_0, c_1, c_2 – некоторые числа, то

$$c_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \sim \mathcal{N}(c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2; \sqrt{c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2}).$$

§ 5. Простейший поток событий

Опр. 1. ***Потоком событий*** называется последовательность однородных событий, которые следуют одно за другим в случайные моменты времени.

Пример 1. Примеры потоков событий: поток вызовов в call-центре; поток вызовов, поступающих на станцию скорой помощи; поток прибытия грузовых судов в порт; поток отказов прибора; поток покупателей и т. д. •

Расчет многих предприятий бытового обслуживания – количества касс в магазинах, коек в больницах, общественного транспорта – тесно связан с изучением такого рода потоков.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Теория массового обслуживания, или ***теория очередей***, – раздел теории вероятностей, целью исследований которого является рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из нее, длительности ожидания и длины очередей.

Первые задачи теории массового обслуживания были рассмотрены сотрудником Копенгагенской телефонной компании, математиком и инженером А. Эрлангом (1878–1929), опубликовавшим в 1909 г. статью «Теория вероятностей и телефонные разговоры». А. Эрланг изучал проблему, как упорядочить работу телефонной станции и заранее рассчитать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств.

Впоследствии оказалось, что в модели систем массового обслуживания вписываются многие реальные явления: торговля, общественное питание, транспорт, бани, банки, страховые компании, налоговая инспекция, парикмахерские, индустрия развлечений, ремонтные мастерские, здравоохранение, образование и т. д.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 2. ***Интенсивностью потока*** λ называется среднее число событий, наступающих в единицу времени.

Опр. 3. Поток событий называется ***стационарным***, если его интенсивность λ не зависит от времени, т. е. вероятность появления k событий в промежутке времени $(0;\ t)$ равна вероятности появления k событий в промежутке времени $(t_0;\ t_0 + t)$ для любого t_0.

Пример 2. Пример стационарного потока – поток автомобилей на данной улице в данное время суток.•

Опр. 4. Поток событий называется ***потоком без последействия***, если имеет место взаимная независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Опр. 5. Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события за этот промежуток времени. Иными словами, события появляются поодиночке, а не группами.

Пример 3. Поток поездов ординарен, а поток вагонов – не ординарен.•

Опр. 6. Поток событий называется ***простейшим*** (или ***стационарным пуассоновским***), если он обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Название «простейший» объясняется тем, что простейший поток имеет наиболее простое математическое описание.

Утв. 1. Если интенсивность простейшего потока, т. е. среднее число событий, наступающих в единицу времени, равна λ, то вероятность того, что за время длительностью t появится k событий, равна

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

т. е. *число событий, появляющихся за время длительностью t, имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda t$.*

Пусть СВ ξ – время между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока. Тогда ξ – непрерывная СВ, принимающая значения из промежутка $[0; +\infty)$, причем

$$P(\xi \geq t) = P(\text{за время } t \text{ не произойдет ни одного события}) =$$

$$= P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, функция распределения СВ ξ равна

$$F(t) = P(\xi < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{при} \quad t \ge 0,$$

т. е. *время ожидания между двумя событиями простейшего потока имеет показательное распределение с параметром* λ. Соответственно, среднее время ожидания между двумя событиями простейшего потока равно $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$.

Пример 4. Среднее время ожидания между двумя вызовами, поступающими на пункт скорой помощи, равно 12 с. Найдем вероятность того, что за две минуты поступит более одного вызова, считая, что поток вызовов простейшим пуассоновским.

Решение. Пусть СВ ξ – время ожидания между двумя вызовами. По условию, $M\xi = \dfrac{1}{\lambda} = 12$ с. Тогда $\lambda = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{\text{с}}\right)$.

Пусть СВ ξ_t – количество вызовов, поступающих за t секунд. Если поток вызовов – простейший пуассоновский, то СВ ξ_t имеет распределение Пуассона с параметром $a_t = \lambda t$. Для $t = 2$ мин = 120 с имеем $a_{120} = 120 \cdot \dfrac{1}{12} = 10$. Искомая вероятность равна

$$P(\xi_{120} > 1) = 1 - P(\xi_{120} = 0) - P(\xi_{120} = 1) =$$

$$= 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} - \frac{10^1}{1!} e^{-10} = 1 - 11e^{-10} \approx 0{,}9995. \bullet$$

§ 6. Закон больших чисел и центральная предельная теорема

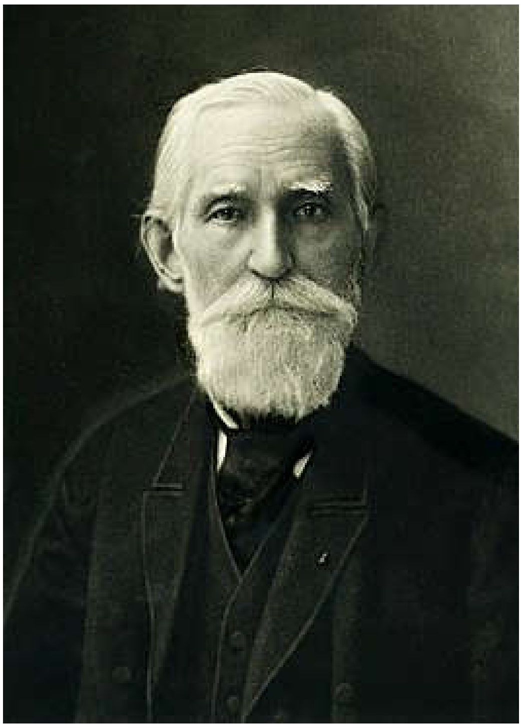
Группа теорем, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками СВ при большом числе испытаний над ними, а также теорем о предельных законах распределения, объединяется под общим названием *предельных теорем теории вероятностей*. Эти теоремы составляют основу математической статистики. Предельные теоремы условно делят на две группы: законы больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ).

Под ***законом больших чисел*** (ЗБЧ) понимают общий принцип, согласно которому совместное действие большого числа случайных факторов приводит (при некоторых весьма общих условиях) к результату, почти не зависящему от случая.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа СВ неограниченно приближается к нормальному закону распределения.

Неравенство Чебышева

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Пафну́тий Льво́вич Чебышёв
(1821–1894)

русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и еще 24 академий мира. Величайший, наряду с Н.И. Лобачевским, русский математик XIX в.

Получил фундаментальные результаты в теории чисел, теории вероятностей, математическом анализе, прикладной математике. Чебышева отличало стремление к увязке проблем математики с вопросами естествознания и техники и к соединению абстрактной теории с практикой. Он основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Рассмотрим сначала вспомогательную теорему – неравенство Чебышева, с помощью которого легко доказывается закон больших чисел в форме Чебышева.

Т 1 (неравенство Чебышева). Для любой СВ ξ, имеющей конечные математическое ожидание и дисперсию, вероятность того, что отклонение СВ ξ от ее математического ожидания превзойдет по абсолютной величине положительное число ε, не больше дисперсии этой СВ, деленной на ε^2:

$$P\left(\left|\xi - M\xi\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство (для случая непрерывной СВ ξ). Пусть $f(x)$ – плотность распределения непрерывной СВ ξ. Тогда, разбивая область интегрирования на две области и отбрасывая один из интегралов как неотрицательный (за счет неотрицательности подынтегральной функции), получим следующую оценку дисперсии:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{|x-M\xi|\le\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx + \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx \ge$$

$$\ge 0 + \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx \ge \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\,dx = \varepsilon^2 P(|\xi - M\xi| > \varepsilon).$$

Выражая вероятность, получим требуемое неравенство.

Доказательство для дискретных СВ проводится аналогично. $\triangleleft$

Пример 1. а) Предполагая, что дневная выручка магазина шаговой доступности является случайной величиной со средним значением 25 т. р. и средним квадратическим отклонением 3 т. р., оценим с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что дневная выручка этого магазина будет отличаться от среднего значения не более чем на 4 т. р.

б) Найдем ту же вероятность, считая дневную выручку магазина распределенной по нормальному закону.

Решение. Пусть СВ ξ – дневная выручка магазина шаговой доступности. По условию, $M\xi = 25$ т. р., $\sigma = 3$ т. р. Тогда $D\xi = 9\left(\text{т. р.}^2\right)$. Отклонение задается величиной $\varepsilon = 4$ т. р.

а) В силу неравенства Чебышева,

$$P\left(\left|\xi-25\right|>4\right)\leq\frac{9}{16}=0,5625,$$

а значит, искомая вероятность

$$P\left(\left|\xi-25\right|\leq4\right)\geq1-0,5625=0,4375.$$

б) Предполагая дополнительно, что СВ ξ распределена по нормальному закону, получим

$$P\left(\left|\xi-25\right|\leq4\right)=2\Phi\left(\frac{4}{3}\right)=2\Phi(1,33)\approx0,5468.$$

Полученный результат $P\approx0,5468$ не противоречит оценке $P\geq0,4375,$ найденной с помощью неравенства Чебышева. Различие результатов объясняется тем, что неравенство Чебышева дает лишь нижнюю границу оценки искомой вероятности для *любой* СВ, *не используя дополнительную информацию* о виде распределения.•

Пример 2. Согласно правилу трех сигм, вероятность того, что нормально распределенная СВ отклонится от математического ожидания не более, чем на 3σ (на утроенное среднее квадратическое отклонение), равна 0,9973. Оценим указанную вероятность для произвольной СВ ξ, используя неравенство Чебышева:

$$P(\left|\xi-M\xi\right|<3\sigma)\geq1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}\approx0,889.$$

т. е. 88,9% значений *любой* СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на 3σ.•

Упражнение 1. Найти $P(\left|\xi-M\xi\right|<3\sigma)$ для СВ ξ, имеющей непрерывное равномерное распределение.

Упражнение 2. Найти $P(\left|\xi-M\xi\right|<3\sigma)$ для СВ ξ, имеющей показательное распределение.

Неравенство Чебышева лежит в основе качественных и количественных утверждений закона больших чисел. Замечательно, что неравенство Чебышева дает оценку вероятности события для СВ, распределение которой может быть неизвестно, известны лишь ее математическое ожидание и дисперсия. Неравенство Чебышева дает довольно слабую оценку вероятности, но этот недостаток теоремы связан с ее общностью: добиться лучшей оценки сразу для всех СВ невозможно.

Понятие сходимости по вероятности

Опр. 1. Последовательность СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***сходится по вероятности*** к СВ ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что отклонение СВ ξ_n от СВ ξ превзойдет по абсолютной величине ε, стремится к 0:

$$P\left(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Сходимость по вероятности отличается от обычного понятия предела в математическом анализе, где $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда когда для любого $\varepsilon > 0$ для *всех n*, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$. Если же $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, то это означает, что неравенство $\left|\xi_n - \xi\right| \le \varepsilon$ в *отдельных* случаях может не выполняться, однако вероятность его выполнения стремится к 1, т. е. выполнение этого неравенства является *практически достоверным* событием.

Закон больших чисел

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ. Обозначим

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Т 2 [Чебышев, 1866] (ЗБЧ в форме Чебышева). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ, причем существует такое число *C*, что $D\xi_i \le C$ для всех *i* (т. е. дисперсии этих СВ ограничены одной и той же постоянной). Тогда среднее арифметическое этих СВ сходится по вероятности к среднему их математических ожиданий, т. е.

$$S_n - MS_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|S_n - MS_n\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Применяя неравенство Чебышева и используя свойства дисперсий, в силу независимости СВ, получим

$$P\left(\left|S_n - MS_n\right| > \varepsilon\right) \le \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} D \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(C + C + \ldots + C) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} nC = \frac{C}{\varepsilon^2 n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. ◁

Следствие. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ с одинаковыми математическими ожиданиями: $M\xi_i = a$ и одинаково ограниченными дисперсиями: $D\xi_i \le C$ для всех i при некотором $C > 0.$ Тогда среднее арифметическое этих СВ сходится по вероятности к их общему математическому ожиданию a:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a.$$

Теорема 2 и ее следствие являются теоретическим обоснованием принципа среднего арифметического в теории измерений.

Пусть производится n измерений некоторой величины, истинное значение a которой неизвестно. Результат каждого измерения – это некоторая СВ ξ_i, вызванная случайными погрешностями (прибора и человека). Если измерения выполняются без систематической ошибки (т. е. не происходит искажения результата в одну и ту же сторону), то можно считать, что $M\xi_i = a$ (математическое ожидание каждого измерения есть истинное значение измеряемой величины).

Согласно ЗБЧ в форме Чебышева, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины, поэтому в качестве оценки для величины a можно взять среднее арифметическое результатов всех измерений:

$$a \approx \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Еще одним следствием ЗБЧ в форме Чебышева является следующая теорема.

Т 3 [Я. Бернулли, 1713] (ЗБЧ в форме Я. Бернулли). Относительная частота появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых это событие появляется с одной и той же вероятностью p, при неограниченном увеличении числа испытаний n сходится по вероятности к вероятности p этого события:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p.$$

Эта теорема является теоретическим обоснованием статистического метода задания вероятности, согласно которому в качестве приближенного значения вероятности события можно взять относительную частоту $\frac{m}{n}$ появления этого события при достаточно большом числе n независимых испытаний.

Доказательство. Рассмотрим СВ

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании произошло,} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании не произошло.} \end{cases}$$

Тогда $P(\xi_i = 1) = p$; $P(\xi_i = 0) = q$, т. е. ξ_i – попарно независимые бернуллиевские СВ с $M\xi_i = p$, $D\xi_i = pq$.

Поскольку относительную частоту появления события A в n независимых испытаниях можно представить в виде среднего арифметического этих СВ: $\frac{m}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$, то утверждение теоремы Бернулли следует из теоремы Чебышева. ◁

Центральная предельная теорема

ЗБЧ устанавливает факт приближения среднего арифметического СВ к определенному числу. Оказывается, что при определенных условиях, а именно, если суммируемые СВ равноправны, никакая из них не является доминирующей, распределение среднего арифметического этих СВ сходится к нормальному распределению независимо от того, каков закон распределения слагаемых. В этом заключается смысл ЦПТ, и в этом – причина важности нормального распределения.

Сформулируем ЦПТ для частного случая – независимых одинаково распределенных СВ.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – взаимно независимые одинаково распределенные СВ, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ для всех i. Найдем числовые характеристики СВ $S_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$:

$$MS_n = \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n}{n} = \frac{a + a + \ldots + a}{n} = a;$$

$$DS_n = \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n}{n^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Т 4 (ЦПТ для независимых одинаково распределенных СВ). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – взаимно независимые одинаково распределенные СВ, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ для всех i. Тогда функция распределения СВ $\dfrac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$ сходится при $n \to \infty$ к функции стандартного нормального распределения, т. е. при любом значении x

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \to \frac{1}{2} + \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Иными словами, среднее арифметическое $S_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ независимых одинаково распределенных СВ с $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ имеет приближенно нормальное распределение с параметрами a и $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Нормальный закон возникает во всех случаях, когда исследуемая СВ может быть представлена в виде суммы достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) элементарных слагаемых, каждое из которых в отдельности сравнительно мало влияет на сумму. Поэтому нормальный закон является самым распространенным из законов распределения.

Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает приближенное значение, так как на результат измерения влияют очень многие независимые факторы:

температура, влажность, колебания прибора и т.д. Каждый из факторов порождает ничтожно малую ошибку. Так как число факторов велико, то их совокупное действие порождает уже заметную «суммарную ошибку», которая имеет распределение близкое к нормальному распределению.

Следствиями ЦПТ являются рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Опыт показывает, что ЦПТ можно пользоваться и для суммы сравнительно небольшого числа СВ.