СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Дискретные случайные величины**
2. **Непрерывные случайные величины**

1. Дискретные случайные величины

Пример 1. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 у. е., 10 выигрышей по 100 у. е. и 100 выигрышей по 1 у. е. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша ξ для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Возможные значения СВ ξ : $x_1 = 0$ у. е., $x_2 = 1$ у. е., $x_3 =$ $= 100$ у. е., $x_4 = 1000$ у. е.. СВ ξ принимает значение 1 с вероятностью $p_2 = P(\xi = x_2) = \dfrac{100}{10\,000} = 0{,}01$ (т. к. выигрыш $x_2 = 1$ у. е. приходится на 100 билетов из 10 000 лотерейных билетов). Аналогично по классическому определению вероятности находим

$$p_3 = P(\xi = x_3) = \frac{10}{10\,000} = 0{,}001,\ p_4 = P(\xi = x_4) = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001.$$

Поскольку число билетов, на которые выигрыши не выпадают, равно 10 000 – 100 – 10 – 1 = 9889, то

$$p_1 = P(\xi = x_1) = \frac{9889}{10\,000} = 0{,}9889\ 1 - 0{,}01 - 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889.$$

Следовательно, закон распределения выигрыша ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	100	1000
P	0,9889	0,01	0,001	0,0001

Заметим, что сумма вероятностей различных значений дискретной СВ ξ равна 0,9889 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 = 1.

Пример 2. Задан закон распределения СВ ξ:

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найти: **а)** математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, среднее квадратическое отклонение σ_ξ; **б)** вероятности $P(\xi = 30)$, $P(\xi = 35)$, $P(\xi < M\xi + 3)$; **в)** функцию распределения и построить ее график.

Решение. **а)** Найдем математическое ожидание $M\xi$:

$$M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 20\cdot 0,1 + 30\cdot 0,6 + 40\cdot 0,1 + 50\cdot 0,2 =$$
$$= 2 + 18 + 4 + 10 = 34.$$

Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения СВ ξ^2. Эта СВ принимает значение $20^2 = 400$ в том случае, когда ξ принимает значение 20, т. е. с вероятностью 0,1; СВ ξ^2 принимает значение $30^2 = 900$, если ξ принимает значение 30, т. е. с вероятностью 0,6, и т. д. Итак, ряд распределения СВ ξ^2 имеет вид

ξ^2	400	900	1600	2500
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M\left(\xi^2\right) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 = 400\cdot 0,1 + 900\cdot 0,6 + 1600\cdot 0,1 + 2500\cdot 0,2 =$$
$$= 40 + 540 + 160 + 500 = 1240.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле:

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2 = 1240 - 34^2 = 1240 - 1156 = 84.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{84} \approx 9,2.$

б) По таблице (ряду распределения) определяем, что СВ ξ принимает значение 30 с вероятностью 0,6, т. е. $P(\xi = 30) = 0,6$.

Поскольку среди возможных значений СВ ξ нет значения 35, то $P(\xi = 35) =0$.

Чтобы найти вероятность $P(\xi < M\xi + 3)$, посмотрим, какие значения СВ попадают в интервал $(-\infty;\ M\xi + 3)$, т. е. в интервал $(-\infty;\ 37)$. Это значения 20 и 30. Поэтому

$$P(\xi < M\xi + 3) = P(\xi < 37) = P(\xi < 20) + P(\xi = 30) = 0,1 + 0,6 = 0,7.$$

в) Найдем значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения в таблице видно, что СВ ξ может принимать значения 20, 30, 40, 50. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_m СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_m < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:
при $x \le 20$ имеем $F(x) = 0$, т. к. ни одно из значений 20, 30, 40, 50 не удовлетворяет указанному неравенству;
при $20 < x \le 30$ получим $F(x) = P(\xi = 20) = 0,1$ (условию $x_m < x$ удовлетворяет только значение $x_m = 20$);
при $30 < x \le 40$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = 0,1 + 0,6 = 0,7$ (значения 20 и 30 удовлетворяют неравенству $x_m < x$);
при $40 < x \le 50$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) = 0,1 + 0,6 + 0,1 = 0,8$;
при $x > 50$: $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) + P(\xi = 50) = 0,1 + 0,6 + 0,1 + 0,2 = 1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 20, \\ 0,1 & \text{при} \quad 20 < x \le 30, \\ 0,7 & \text{при} \quad 30 < x \le 40, \\ 0,8 & \text{при} \quad 40 < x \le 50, \\ 1 & \text{при} \quad x > 50. \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 1.

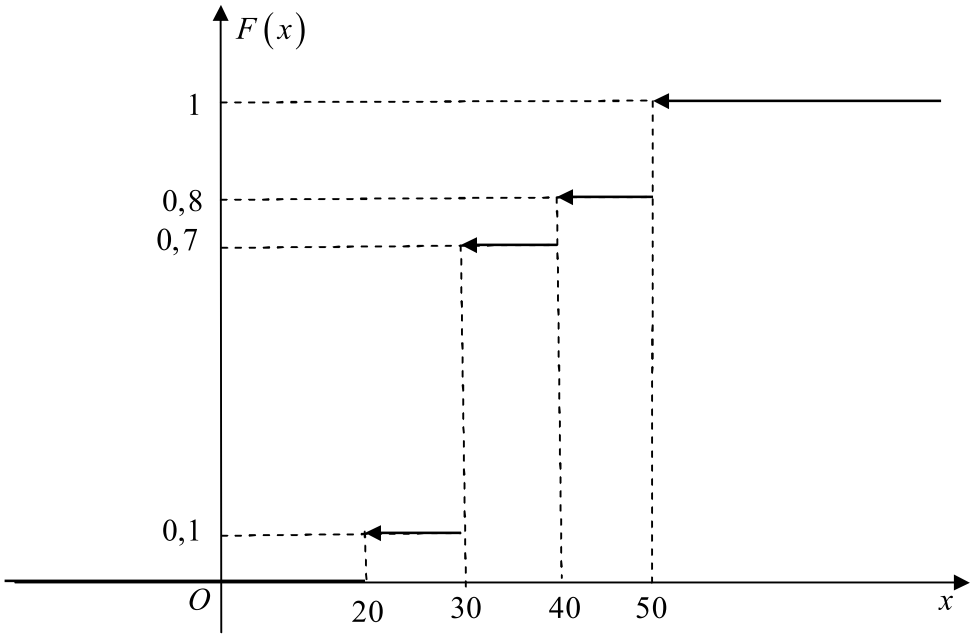

Рис. 1. График функции распределения

2. Непрерывные случайные величины

Пример 1. Дана плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -1,\\ 0{,}2 & \text{при} \quad -1<x\le 1,\\ 0{,}5-0{,}1x & \text{при} \quad 1<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Найти $P(-1<\xi\le 2)$, $P(\xi<1{,}5)$, $\mathrm{P}(\xi=1{,}5)$.

Решение.

$$P(-1<\xi\le 2)=\int_{-1}^{2}p(x)dx=\int_{-1}^{1}0{,}2dx+\int_{1}^{2}(0{,}5-0{,}1x)dx=$$

$$=0{,}2x\Big|_{-1}^{1}+(0{,}5x-0{,}05x^2)\Big|_{1}^{2}=0{,}75;$$

$$P(\xi<1{,}5)=\int_{-\infty}^{1{,}5}p(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}0{,}2dx+\int_{1}^{1{,}5}(0{,}5-0{,}1x)dx=$$

$$=0+0{,}2x\Big|_{-1}^{1}+(0{,}5x-0{,}05x^2)\Big|_{1}^{1{,}5}=0{,}5875.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = 1{,}5) = 0$.

Пример 2. Найти функцию распределения НСВ, если известна ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 0{,}5 - 0{,}1x & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию распределения по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx$. Для этого рассмотрим четыре случая: 1) $x \le -1$; 2) $-1 < x \le 1$; 3) $1 < x \le 3$; 4) $x > 3$.

При $x \le -1$ получим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

при $-1 < x \le 1$ разбиваем интеграл на два:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}2dx = 0 + 0{,}2x\Big|_{-1}^{x} = 0{,}2x + 0{,}2;$$

при $1 < x \le 3$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} 0{,}2dx + \int\limits_{1}^{x} (0{,}5 - 0{,}1x)dx =$

$= 0 + 0{,}2x\Big|_{-1}^{1} + (0{,}5x - 0{,}05x^2)\Big|_{1}^{x} = 0{,}5x - 0{,}05x^2 - 0{,}05;$

при $x > 3$ получим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} 0{,}2dx + \int\limits_{1}^{3} (0{,}5 - 0{,}1x)dx + \int\limits_{3}^{x} 0dx =$$

$$= 0 + 0{,}2x\Big|_{-1}^{1} + (0{,}5x - 0{,}05x^2)\Big|_{1}^{3} + 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0{,}2x + 0{,}2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 0{,}5x - 0{,}05x^2 - 0{,}05 & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Пример 3. Найти a, $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $P(-1 < \xi \le 2{,}5)$, $P(\xi = 3{,}5)$, если дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ a(x^2 - 1) & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Построить графики функции распределения и плотности распределения.

Решение. Для нахождения коэффициента a можно использовать различные свойства плотности и функции распределения.

I способ. Функция распределения непрерывной СВ непрерывна в любой точке, следовательно, $F(x_0 + 0) = F(x_0 - 0)$ в любой точке x_0, в частности в точках, где меняется аналитическое задание функции, т. е. при $x = 1$ и $x = 3$:

$F(1 + 0) = \lim\limits_{x \to 1+0} F(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} a(x^2 - 1) = a \cdot 0 = 0;$

$F(1 - 0) = \lim\limits_{x \to 1-0} F(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} 0 = 0 = F(1+0)$ – верно;

$F(3 + 0) = \lim\limits_{x \to 3+0} F(x) = \lim\limits_{x \to 3+0} 1 = 1;$

$F(3 - 0) = \lim\limits_{x \to 3-0} F(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} a(x^2 - 1) = a \cdot 8 = 8a.$

Из соображений непрерывности $1 = 8a$, поэтому $a = \dfrac{1}{8}$.

II способ. Используем свойство плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Найдем плотность вероятности $p(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 2ax & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Вычислим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{1}^{3} 2axdx = ax^2\Big|_1^3 = 8a$, т. е. $8a = 1$. Следовательно, $a = \dfrac{1}{8}$.

Подставляя найденное a, получим следующие выражения для функции распределения и плотности распределения данной СВ:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{1}{8}(x^2-1) & \text{при} \quad 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3;\end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{1}{4}x & \text{при} \quad 1<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Для того чтобы найти числовые характеристики $M\xi$ и $D\xi$, необходимо знать плотность распределения $p(x)=F'(x)$. Вычисляем:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_1^3 x\cdot\frac{x}{4}\cdot dx=\int_1^3\frac{x^2}{4}\cdot dx=\left.\frac{x^3}{12}\right|_1^3=\frac{27-1}{12}=\frac{13}{6};$$

$$M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\int_1^3 x^2\cdot\frac{x}{4}\cdot dx=\int_1^3\frac{x^3}{4}\cdot dx=\left.\frac{x^4}{16}\right|_1^3=\frac{81-1}{16}=5;$$

$$D\xi=M\left(\xi^2\right)-\left(M\xi\right)^2=5-\frac{169}{36}=\frac{11}{36};$$

среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Вычислим вероятность с помощью функции распределения:

$$P(-1<\xi\le 2{,}5)=F(2{,}5)-F(-1)=\frac{1}{8}\cdot((2{,}5)^2-1)-0=\frac{21}{32}.$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi=3{,}5)=0$.

Графики функции распределения и плотности распределения представлены на рис. 2.

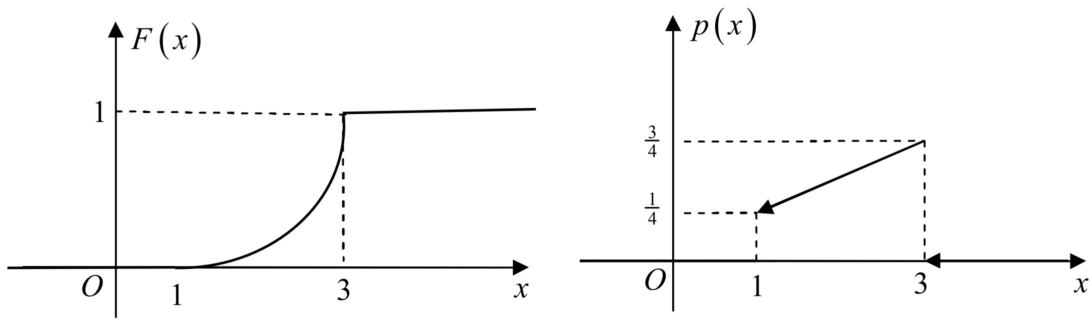

Рис. 2. Графики функции распределения и плотности распределения

Пример 4. Определить, при каком значении параметра a функция

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ ax & \text{при} \quad 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3\end{cases}$$

является плотностью распределения НСВ ξ и найти числовые характеристики этой СВ.

Решение. Для нахождения коэффициента a используем свойство плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$. Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int\limits_{0}^{3} axdx=\left.\frac{ax^2}{2}\right|_1^3=\frac{9}{2}a,$$

т. е. $\frac{9}{2}a = 1$. Следовательно, $a = \frac{2}{9}$.

Подставляя найденное a, получим следующее выражение плотности распределения данной СВ:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{2}{9}x & \text{при} \quad 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$:

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int\limits_{0}^{3} x\cdot\frac{2x}{9}\cdot dx=\int\limits_{0}^{3}\frac{2x^2}{9}\cdot dx=\left.\frac{2x^3}{27}\right|_0^3=2;$$

$$M\left(\xi^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\int\limits_{0}^{3} x^2\cdot\frac{2x}{9}\cdot dx=\int\limits_{0}^{3}\frac{2x^3}{9}\cdot dx=\left.\frac{x^4}{18}\right|_0^3=\frac{9}{2};$$

$$D\xi=M\left(\xi^2\right)-\left(M\xi\right)^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2};$$

среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,5А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете сделана ошибка, превышающая 0,1А.

Решение. СВ ξ – разность между показанием амперметра и ближайшим целым его делением – может принимать любые значения между –0,5А и 0,5А. Поскольку все эти значения равновозможны, СВ ξ имеет равномерное распределение на отрезке [–0,5;0,5]. Плотность распределения СВ ξ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}5-(-0{,}5)} & \text{при} \quad x \in [-0{,}5;0{,}5], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [-0{,}5;0{,}5]. \end{cases}$$

Найдем вероятность

$$P(|\xi| > 0{,}1) = 1 - P(|\xi| \le 0{,}1) = 1 - \int_{-0{,}1}^{0{,}1} \frac{1}{0{,}5+0{,}5} dx = 1 - \int_{-0{,}1}^{0{,}1} dx = 0{,}8.$$

Пример 6. Установлено, что время горения электрической лампочки является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Считая, что среднее значение этой величины равно 6 месяцам, найти вероятность того, что лампочка будет исправна более года.

Решение. Так как $M\xi = 1/\lambda = 6$, *то* $\lambda = 1/6$ и функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{(-x/6)}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Поэтому

$$P(\xi > 12) = P(12 < \xi < +\infty) = F(\infty) - F(12) = 1-(1-\mathrm{e}^{(-12/6)}) = \mathrm{e}^{(-2)} \approx 0{,}135 .$$

Пример 7. СВ ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M\xi = 5$; дисперсия $D\xi = 0{,}64$. **а)** Найти вероятность попадания этой СВ в интервал (4;7). **б)** Какова вероятность того, что СВ примет значение, большее чем 3? **в)** Определить вероятность того, что СВ примет значение, равное ее математическому ожиданию.

Решение. **а)** Так как $a = M\xi = 5$; $\sigma = \sqrt{D\xi} = 0{,}8$, то

$$P(4 < \xi < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882.$$

б) Найдем

$$P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty-5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{3-5}{0{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}5 - (-0{,}4938) = 0{,}9938.$$

в) Поскольку нормальное распределение является непрерывным распределением, то вероятность того, что СВ ξ примет конкретное значение, равна 0, т. е. $P(\xi = M\xi) = P(\xi = 5) = 0$.

Пример 8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. **а)** Найти вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед. **б)** С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться цена акции.

Решение. Пусть СВ ξ – текущая цена акции. По условию ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = M\xi = 15$ ден. ед. и $\sigma = \sigma_\xi = 0{,}2$ ден. ед.

а) Найдем вероятность

$$P(\xi \le 15{,}3) = P(-\infty < \xi \le 15{,}3) = \Phi\left(\frac{15{,}3-15}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-15}{0{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(-\infty) \approx 0{,}4332 - (-0{,}5) = 0{,}9332.$$

б) По правилу трех сигм СВ ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, с вероятностью 0,9973 попадает в интервал $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. Следовательно, практически достоверно, что цена акции будет находиться в пределах от $15-3\cdot 0,2=14,4$ ден. ед. до $15+3\cdot 0,2=15,6$ ден. ед.