СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. **Понятие случайной величины. Функция распределения**
2. **Дискретные случайные величины**
3. **Основные законы распределения дискретных СВ**
4. **Непрерывные случайные величины**
5. **Основные законы распределения непрерывных СВ**
6. **Числовые характеристики СВ**
7. **Понятие о законе больших чисел**

1. Понятие случайной величины. Функция распределения

Под ***случайной величиной*** (СВ) будем понимать величину, которая в результате случайного эксперимента принимает одно и только одно возможное значение, которое заранее неизвестно и зависит от случайных причин.

Примеры: **а)** число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

б) число успехов в n испытаниях в схеме Бернулли – СВ, принимающая значения $0,1,\ldots, n$;

в) число бракованных изделий в данной партии – СВ, принимающая целые значения от 0 до n, где n – объем партии;

г) прирост веса домашнего животного за месяц есть СВ, которая может принять значение из некоторого промежутка.

Более строго, под **СВ** *понимают действительнозначную функцию* ξ, *определенную на множестве* Ω *элементарных событий, связанных с данным случайным экспериментом, и такую, что для любой системы* B *открытых интервалов,* $B \subset \mathbf{R}$, *существует* $P\left(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\right)$ *– вероятность того, что СВ* ξ *примет значение из множества* B.

Таким образом, для любой СВ ξ определена функция

$$F(x) = P\left(\xi < x\right), x \in \mathbb{R},$$

называемая ее ***функцией распределения*** и выражающая вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x. Под законом распределения СВ будем понимать любое правило, позволяющее найти функцию распределения этой СВ.

Основные свойства функции распределения СВ.

1. $0 \le F(x) \le 1$, $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$ и $F(x-0) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

4. $P(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0)$.

2. Дискретные случайные величины

Случайная величина называется ***дискретной*** (ДСВ), если множество ее возможных значений *конечно* или *счетно* (т. е. если все ее значения можно занумеровать).

Примеры. Дискретными СВ являются: число выпадений герба при n подбрасываниях монеты, число выстрелов до первого попадания в цель, число бракованных изделий в данной партии и т. д.

Для того чтобы задать ДСВ ξ, достаточно перечислить все ее возможные значения x_m, $m = 1, 2, \ldots$, и указать, с какими вероятностями p_m она их принимает.

Закон распределения ДСВ ξ удобно задать в виде таблицы, называемой ***рядом распределения*** этой СВ:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_m	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_m	$\ldots$

(отметим, что $p_m \ge 0$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m + \ldots = 1$ – *условие контроля*). Отсюда получаем ***функцию распределения*** ДСВ:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_i, \; x \in \mathbb{R}.$$

График функции распределения ДСВ имеет ступенчатый вид, причем функция распределения терпит разрывы в точках x_m со скачками $p_m = P(\xi = x_m)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Математическое ожидание дискретной СВ ξ

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m + \ldots$$

(предполагается, что ряд в правой части этого равенства абсолютно сходится) характеризует среднее значение СВ ξ.

Дисперсия СВ ξ – математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2$$

характеризует разброс значений СВ вокруг ее математического ожидания.

Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2.$$

Для ДСВ ξ справедливо $M(\xi^2) = {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + \ldots + {x_m}^2 p_m + \ldots$.

Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ – с***реднее квадратическое отклонение СВ*** от ее математического ожидания.

Из определения следует, что $D\xi \ge 0, \sigma_\xi \ge 0$ для любой СВ.

3. Основные законы распределения дискретных СВ

Приведем некоторые законы распределения дискретных СВ.

1. СВ ξ имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами n и p, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n с вероятностями

$$P\left(\xi = m\right) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0,1,2,\ldots,n, \text{ где } 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$$

Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события A (число успехов) при n независимых испытаниях в схеме Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам: $M\xi = np$, $D\xi = npq$.

2. Дискретная СВ ξ имеет ***распределение Пуассона*** с параметром a, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, … с вероятностями

$$P\left(\xi = m\right) = \frac{a^m}{m!}e^{-a},\ m = 0,1,2,\ldots,n,\ldots$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по закону Пуассона, равны $M\xi = D\xi = a$.

Закон распределения Пуассона (*закон редких явлений*) является хорошим приближением для биномиального распределения при больших значениях n и малых p (или $1-p$).

4. Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется ***непрерывной*** (НСВ), если ее функция распределения $F(x)=P(\xi<x)$ непрерывна на всей числовой оси. НСВ принимает все значения из некоторого интервала или системы интервалов на числовой оси. Вероятность того, что НСВ примет фиксированное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi=x_0)=0$.

Примеры. Непрерывными СВ являются, например, время безотказной работы прибора; дальность полета снаряда; прибыль фирмы; расход электроэнергии на предприятии за месяц; вес новорожденного; ошибка измерения и т. п.

Особый интерес вызывают НСВ, имеющие плотность распределения. Закон распределения такой НСВ обычно задают функцией или плотностью распределения.

Функция $p(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей*** НСВ ξ с функцией распределения $F(x)$, если

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx}, \text{ откуда } \boxed{p(x)=F'(x)}, \; x\in\mathbb{R}.$$

Основные свойства плотности распределения НСВ.

1. $p(x)\geq 0$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1.$

Геометрически это означает, что график плотности распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна единице.

3. Вероятности попадания НСВ ξ в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы и равны

$$P(\alpha\leq\xi\leq\beta)=P(\alpha<\xi\leq\beta)=P(\alpha<\xi<\beta)=$$
$$=P(\alpha\leq\xi<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx=F(\beta)-F(\alpha).$$

Геометрически вероятность $P(\alpha\leq\xi\leq\beta)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности, осью абсцисс и отрезками прямых $x=\alpha$ и $x=\beta$.

Математическое ожидание $M\xi$ ***и дисперсия*** $D\xi$ ***НСВ*** ξ определяются по формулам

$$\boxed{M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)dx,\quad D\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M\xi\right)^2 p(x)dx},$$

где интегралы предполагаются абсолютно сходящимися.

На практике для вычисления дисперсии зачастую удобно использовать формулу $D\xi=M\left(\xi^2\right)-\left(M\xi\right)^2$, при этом

$$M(\xi^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,p(x)dx.$$

5. Основные законы распределения непрерывных СВ

Приведем некоторые законы распределения непрерывных СВ.

1. НСВ ξ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке [*a; b*], если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a;b],\\ 0 & \text{при} \quad x\notin[a;b].\end{cases}$$

Функция распределения равномерно распределенной на [*a*; *b*] СВ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} \quad \text{при} \quad x\in[a;b],\\ 1 \quad \text{при} \quad x>b,\end{cases}$$

а вероятность попадания этой СВ в некоторый интервал, лежащий внутри отрезка [*a; b*], зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}, \quad \text{если} \quad a \le x_1 < x_2 \le b. \; .$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \; D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Примерами равномерно распределенных СВ могут служить: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до ближайшего целого.

2. НСВ ξ имеет ***показательное (экспоненциальное) распределение*** с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Функция показательного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

Показательное распределение является одним из основных в теории массового обслуживания и теории надежности. Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на АТС, продолжительность безотказной работы приборов и т. д.

3. Распределение НСВ ξ называется ***нормальным*** (или ***распределением Гаусса***) с параметрами a и $\sigma > 0$: $\xi \in N(a, \sigma)$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).}$$

Параметры a и σ имеют смысл математического ожидания и среднего квадратического отклонения СВ ξ: $M\xi = a, D\xi = \sigma^2$.

График плотности нормального распределения изображен на рис. 1 и называется кривой Гаусса.

Функция распределения СВ ξ, имеющей нормальное распределением с параметрами a и σ, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

а вероятность попадания СВ ξ на заданный интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

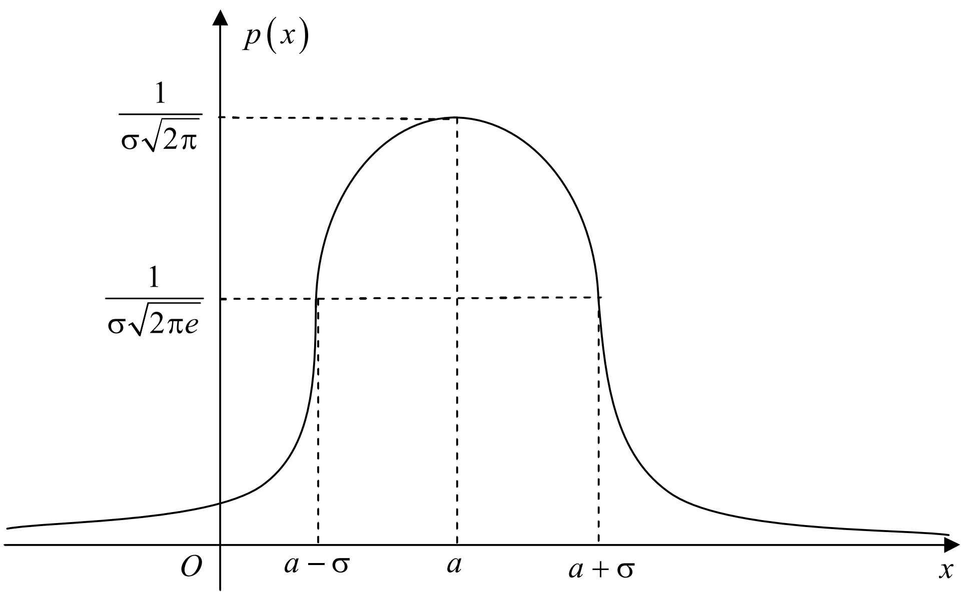

Рис. 1. График плотности нормального распределения

В силу непрерывности СВ эта формула справедлива как со строгими, так и с нестрогими знаками неравенств.

Вероятность того, что СВ ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, отклонится от своего математического ожидания менее, чем на δ, определяется соотношением

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Полагая $\delta=3\sigma$, получим

$$P\left(|\xi - a| < 3\sigma\right) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973 \approx 1.$$

Правило «трех сигм» для нормального распределения. Если СВ ξ распределена нормально с параметрами a и σ, то попадание ее в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ является практически достоверным событием и, стало быть, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону. Кроме того, нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях, что делает нормальное распределение исключительным в ТВ и ее приложениях.

6. Числовые характеристики СВ

Наиболее используемыми числовыми характеристиками СВ являются:

1) математическое ожидание $M\xi$, определенное выше, которое характеризует среднее значение (центр рассеивания) СВ ξ;

2) дисперсия $D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2$, которая характеризует величину рассеивания значений СВ вокруг ее математического ожидания;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$, которое (в отличие от дисперсии) имеет размерность СВ ξ, что оказывается более удобным в приложениях ТВ, например, в математической статистике.

Приведем основные свойства.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: $Mc=c$, если $c=\text{const}$.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $M(c\xi) = cM\xi$.

3. Математическое ожидание суммы СВ равно сумме их матема-

тических ожиданий: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

4. Математическое ожидание произведения *независимых* СВ равно произведению их математических ожиданий: $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$. (СВ ξ и η называются *независимыми*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ события $\{\xi < x\}$и $\{\eta < y\}$ независимы.)

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю: $Dc=0$, если $c=\text{const}$.
2. Дисперсия неотрицательна: $D\xi \geq 0$.
3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате: $D(c\xi) = c^2 D\xi$.
4. Дисперсия суммы *независимых* СВ равна сумме их дисперсий: $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.
5. Дисперсия разности *независимых* СВ равна *сумме* их дисперсий: $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$.

Из других числовых характеристик СВ отметим:

$M\xi^k$ – начальные моменты k-го порядка,

$M(\xi - M\xi)^k$ – центральные моменты k-го порядка.

Таким образом, математическое ожидание является начальным моментом первого, а дисперсия – центральным моментом второго порядков.

В заключение приведем важнейшие числовые характеристики для основных законов распределения.

Числовые характеристики основных законов распределения

№ п/п	Распределение	$M\xi$	$D\xi$	σ_ξ
1.	Биномиальное (с параметрами n и p)	np	npq	$\sqrt{npq}$
2.	Пуассона (с параметром a)	a	a	a
3.	Равномерное на $[a; b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
4.	Показательное (с параметром λ)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
5.	Нормальное (Гаусса) с параметрами a и σ	a	σ^2	σ

7. Понятие о законе больших чисел

Последовательность СВ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ сходится по вероятности к числу a: $\xi_n \xrightarrow{P} a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|\xi_n - a| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\xi_n - a| < \varepsilon\right) = 1$.

Закон больших чисел в форме Я. Бернулли. Относительная частота появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых это событие появляется с одной и той же вероятностью p, при неограниченном увеличении числа испытаний n сходится по вероятности к вероятности p этого события: $\frac{m}{n} \xrightarrow{P} p$ при $n \to \infty$.

Закон больших чисел в форме Бернулли является теоретическим обоснованием статистического метода задания вероятности, согласно которому вероятность события можно оценить относительной частотой $\frac{m}{n}$ появления этого события при достаточно большом числе n независимых испытаний.