Раздел 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Теория вероятностей – это раздел современной математики, в котором изучаются закономерности случайных явлений. Под случайным явлением понимают явление с неопределенным исходом, происходящее при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий.

Возникновение теории вероятностей как науки относится к XVII в. Первые работы по теории вероятностей представляли собой попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам.

Так, 1654 годом датируется переписка Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665), в которой обсуждаются некоторые задачи, связанные с азартными играми. В частности, так называемая «задача об очках», которую поставил перед Паскалем известный французский игрок XVII в. шевалье де Мере: *сколько раз нужно бросать две кости, чтобы ставить на одновременное выпадение хотя бы раз двух шестерок было выгодно?*

Под влиянием поднятых в дискуссии Паскаля и Ферма вопросов решением тех же задач занимался и голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1695). Подробностей переписки он не знал, поэтому методику решения изобрел самостоятельно и опубликовал свои результаты в книге «О расчетах в азартных играх» (1657 г.), которую можно считать первым трактатом по теории вероятностей. В предисловии Гюйгенс пишет: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Известны также работа итальянского математика Джероламо Кардано (1501–1576) «Книга об игре в кости», опубликованная в 1563 г., и исследование Галилео Галилея (1564–1642) «Об открытиях, совершенных при игре в кости», написанная между 1613 г. и 1624 г.

Мощным стимулом развития теории вероятностей явились также запросы страхового дела, которое зародилось еще в XIV в. С конца XVII в. на научной основе стало производиться страхование от несчастных случаев и стихийных бедствий. В XVI–XVII вв. во всех странах Западной Европы получило распространение страхование судов и страхование от пожара. В XVIII в. были созданы многочисленные страховые компании и лотереи в Италии, Фландрии, Нидерландах.

В 1713 г. в трактате «Искусство предположений» известного швейцарского математика Якоба Бернулли (1654–1705) была сформулирована и строго доказана первая предельная теорема теории вероятностей – *Закон больших чисел*.

Точное определение вероятности впервые было сформулировано французским математиком Пьером Симоном Лапласом (1749–1827), сейчас оно называется *классическим определением вероятности*.

Построение строгой математической теории вероятностей было осуществлено лишь в XX в. В 1933 г. была издана книга советского академика А.Н. Колмогорова (1903–1987) «Основные понятия теории вероятностей», в которой было дано аксиоматическое построение теории вероятностей, основанное на теории множеств.

§ 1. Множество элементарных событий. Классическое определение вероятности

Опр. 1. ***Достоверным*** называется событие, которое обязательно произойдет при данном комплексе условий (в данном случайном испытании, в данном случайном эксперименте).

Опр. 2. ***Невозможным*** называется событие, которое при данном комплексе условий заведомо не может произойти.

Опр. 3. ***Случайным*** называется событие, которое при данном комплексе условий может как произойти, так и не произойти.

Мера возможности осуществления случайного события – это и есть его вероятность.

Для обозначения случайных событий используются, как правило, большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.; достоверное событие будем обозначать Ω, а невозможное – $\varnothing$.

Опр. 4. События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же случайном испытании, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании. События A и B называются ***совместными***, если они могут появиться вместе в одном испытании.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

Пример 1. Пусть подброшен правильный игральный кубик. Рассмотрим события:

A = {выпало 3 очка};

B = {выпало не более 2 очков};

C = {выпало 2 очка}.

Здесь события A и B несовместны; события A и C несовместны; события B и C совместны.•

Опр. 5. Несколько событий образуют ***полную группу событий*** для данного испытания, если они попарно несовместны и в результате испытания обязательно появится одно из них.

Иными словами, в результате испытания должно произойти одно и только одно из этих событий.

Пример 1 (продолжение). События A, B и C не образуют полную группу событий, поскольку они не являются попарно несовместными и, кроме того, не исчерпывают все возможные исходы испытания.

Введем событие D = {выпало более 3 очков}. Тогда события A, B, D образуют полную группу событий.

Однако события A, B, C и D не являются полной группой событий, так как события B и C совместны. •

Для одного и того же испытания можно рассматривать различные полные группы событий. Частным случаем полной группы событий являются противоположные события.

Опр. 6. Два события называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Опр. 7. Несколько событий в данном испытании называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. если условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед остальными.

Пример 1 (продолжение). При однократном бросании игральной кости события $A_1, A_2, A_3, ..., A_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести – образуют полную группу событий и являются равновозможными событиями.•

Классическое определение вероятности

Всякое случайное испытание связано с некоторой совокупностью исходов – результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях бывает возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Опр. 8. Пусть проводится испытание с конечным числом *попарно несовместных равновозможных* исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, образующих полную группу событий. Такие исходы называются ***элементарными исходами***, или ***элементарными событиями***. При этом говорят, что *испытание сводится к схеме случаев*. Множество всех элементарных исходов (которое называют также ***пространством элементарных исходов***) будем обозначать $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\right\}$.

Опр. 9. Элементарный исход ω_i называется ***благоприятствующим появлению события*** A, если наступление исхода ω_i влечет за собой наступление события A.

Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A равна

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$$

где $m = m_A$ – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n – общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Пример 1 (продолжение). Найдем вероятности событий A, B, C, D.

Решение. Множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$, содержит 6 равновозможных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести, поэтому $n = 6$.

Чтобы найти вероятности событий с помощью классического определения вероятности, определим для каждого события благоприятствующие ему элементарные исходы:

$$A = \{\omega_3\} \quad \Rightarrow \quad m_A = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{6};$$

$$B = \{\omega_1, \omega_2\} \quad \Rightarrow \quad m_B = 2 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$C = \{\omega_2\} \quad \Rightarrow \quad m_C = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{1}{6};$$

$$D = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \quad \Rightarrow \quad m_D = 3 \quad \Rightarrow \quad P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Замечание. Поскольку результаты случайного испытания не всегда образуют конечное множество равновозможных несовместных исходов, то классическое определение вероятности нельзя считать определением в полном смысле этого слова, а можно только использовать как метод вычисления вероятности для испытаний, сводящихся к схеме случаев.

Легко видеть, что из классического определения вероятности вытекают следующие свойства, справедливые и в общем случае.

Вероятность любого события удовлетворяет условию

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1.}$$

Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1;$ вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing) = 0$.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются методы подсчета числа различных комбинаций (сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества).

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух простых правил.

Правило произведения: если объект типа X можно выбрать n способами и при каждом таком выборе объект типа Y можно выбрать m способами, то выбор пары (X, Y) в указанном порядке можно осуществить nm способами.

Правило суммы: если объект типа X можно выбрать n способами, а объект типа Y – m способами, то выбор объекта типа X или Y можно осуществить $n + m$ способами.

Пример 2. Из пункта *M.* в пункт *N.* и обратно можно добраться тремя способами: поездом, автобусом или самолетом; из *N.* в *L.* можно доехать автобусом или дойти пешком. Сколько различных по способу передвижения маршрутов можно организовать: **а)** из *M.* в *L.* через *N.*; **б)** из *N.* либо в *M.*, либо в *L.*?

Решение. **а)** Нужные маршруты легко перечислить: 1) из *M.* в *N.* самолетом, далее автобусом; 2) из *M.* в *N.* самолетом, далее пешком; 3) поездом – автобусом; 4) поездом – пешком; 5) автобусом – автобусом; 6) автобусом – пешком.

Число маршрутов можно определить, не перечисляя их. Имеется 3 способа добраться из *M.* в *N.* и 2 способа из *N.* в *L.* На каждый способ добраться из *M.* в *N.* приходится два способа добраться в *L.* По правилу произведения получаем $3 \cdot 2 = 6$ способов.

б) Нужно выбрать либо один из 3 вариантов добраться из *N.* в *M.*, либо один из 2 вариантов путешествия из *N.* в *L.* Применяя правило суммы, получаем всего 3 + 2 = 5 вариантов. •

Пример 3. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5: **а)** трехзначных чисел, **б)** трехзначных чисел, состоящих из различных цифр?

Решение. **а)** Каждую цифру можно выбрать 5 способами, следовательно, по правилу произведения получаем, что всего таких чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

б) Первую цифру можно выбрать 5 способами; на каждый способ выбора первой цифры приходится 4 способа выбора второй цифры (можно взять любую цифру, кроме той которую выбрали первый раз); на каждый способ выбора первых двух цифр приходится 3 способа выбора третьей цифры. По правилу произведения получаем всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов. •

Опр. 10. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждая *упорядоченная* комбинация, содержащая m элементов из этих n, называется ***размещением*** из n элементов по m. Число размещений (упорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (местам), отличающихся либо самими элементами, либо их порядком, называется ***числом размещений из*** n **по** m и обозначается A_n^m.

Можно сказать, что число размещений A_n^m – это *число способов разместить m из n элементов по m местам*. С помощью правила произведения легко вычислить

$$\boxed{A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}_{m \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

Опр. 11. Размещения из n элементов по n называются ***перестановками*** (из n элементов). ***Число*** P_n ***перестановок*** из n элементов равно

$$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1 = n!.}$$

Опр. 12. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. *Неупорядоченные* комбинации (порядок не имеет значения), содержащие m элементов из данных n, называются ***сочетаниями*** из n элементов по m. ***Число сочетаний из*** n ***по*** m обозначается C_n^m.

Таким образом, число сочетаний C_n^m – это *число способов выбрать* m элементов из данных n элементов (порядок выбранных элементов не учитывается).

Замечание. Из определения понятий размещения и сочетания следует, что число размещений A_n^m и число сочетаний C_n^m имеют смысл только в случае $0 \le m \le n$.

Пример 4. Пусть дано множество из 4 элементов: $D = \{a, b, c, d\}$.

Перечислим все сочетания из 4 данных элементов по 3. Это все возможные подмножества, содержащие 3 элемента:

$$\{a, b, c\}; \quad \{a, b, d\}; \quad \{a, c, d\}; \quad \{b, c, d\}.$$

Всего имеется 4 сочетания из 4 по 3, так как эти множества должны отличаться составом элементов. Такие комбинации, как, например, *abc* и *acb*, отличающиеся только порядком элементов, представляют собой различные размещения, но одно и то же сочетание.

Выпишем все размещения из 4 по 3. Это можно сделать, переставив всеми возможными способами элементы каждого сочетания. Каждому сочетанию (неупорядоченному множеству элементов) будет соответствовать $3! = 6$ размещений, различающихся между собой порядком элементов, поэтому всего получится $A_4^3 = 4\cdot 6 = 24$ размещений:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb* ●

Аналогично рассмотренному примеру, в общем случае подсчитать число A_n^m всех возможных размещений из n по m можно следующим образом: сперва найти число всех неупорядоченных множеств, содержащих m элементов из данных n (таких множеств будет C_n^m), а затем вычислить число возможных перестановок в каждом неупорядоченном множестве (это число равно P_m). Следовательно, по правилу произведения получаем: $A_n^m = C_n^m P_m = C_n^m m!$. Отсюда

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

Замечание 1. Напомним, что $\boxed{0! = 1.}$

Замечание 2. Числа C_n^m называют также ***биномиальными коэффициентами*** в соответствии с биномом Ньютона:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^m x^m + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m.$$

Свойства чисел C_n^m (биномиальных коэффициентов).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Пример 5. Сколько существует способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования, если: **а)** награды различные; **б)** все награды одинаковые?

Решение. Число способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования равно числу способов выбрать трех участников из десяти и разместить их по трем местам, т. е.

а) числу размещений $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (порядок важен);

б) числу сочетаний $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ (порядок не учитывается).•

Если при выборе *m* элементов из *n* каждый раз выбранный элемент возвращается обратно, то возникают понятия размещения (упорядоченной комбинации) и сочетания (неупорядоченной комбинации) из *n* элементов по *m с повторениями*.

Опр. 13. Если в размещениях из *n* элементов по *m* некоторые элементы могут участвовать несколько раз, то такие комбинации (упорядоченные комбинации с возможными повторениями) называются ***размещениями с повторениями*** из *n* элементов по *m*. ***Число размещений с повторениями из*** *n* ***по*** *m* обозначают $\overline{A}_n^m$.

Таким образом, размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений выбранных элементов.

Несложно видеть, что в силу правила произведения

$$\boxed{\overline{A}_n^m = n^m.}$$

Пример 6. Сколько существует четырехзначных цифровых кодов?

Решение. Каждую цифру, независимо от остальных, можно выбрать 10 способами, следовательно, по правилу произведения получаем, что количество четырехзначных цифровых кодов равно числу размещений с повторениями из 10 цифр по 4 местам, т. е. $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$. •

Опр. 14. Если в сочетаниях из *n* элементов по *m* некоторые элементы могут присутствовать несколько раз, то такие комбинации (неупорядоченные комбинации с возможными повторениями) называются ***сочетаниями с повторениями*** из *n* элементов по *m*. ***Число сочетаний с повторениями из*** *n* ***по*** *m* обозначают $\overline{C}_n^m$.

Замечание. Число размещений с повторениями $\overline{A}_n^m$ и число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^m$, в отличие от числа размещений A_n^m и числа сочетаний C_n^m без повторений, имеют смысл при любых соотношениях между *m* и *n*.

Утв. 1. Число сочетаний с повторениями из *n* по *m* равно

$$\boxed{\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.}$$

Доказательство. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Обозначим их $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Определим количество различных сочетаний с повторениями из этих n элементов по m.

Поскольку в сочетаниях порядок элементов не имеет значения, то запишем каждое сочетание, упорядочив его элементы и разграничив группы одинаковых элементов. Например, сочетание $a_1a_3a_3a_na_na_4a_5a_1$ запишем в виде $a_1a_1 \| a_3a_3 | a_4 | a_5 | \ldots | a_na_n$. В этой записи присутствует m выбранных элементов и $n-1$ разделяющих вертикальных линий, т. е. всего $n+m-1$ элементов. При такой записи разные сочетания с повторениями отличаются друг от друга только позициями разделяющих вертикальных линий, поэтому количество различных сочетаний с повторениями из n по m равно числу способов выбрать из $n+m-1$ позиций $n-1$ мест для разделяющих вертикальных линий, т. е. $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$. ◁

Пример 7. В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на 3 торта. Определим количество возможных вариантов заказа.

Решение. Количество различных вариантов заказов равно числу способов выбрать 3 торта из 10 различных видов, возможно с повторениями, причем порядок тортов в заказе неважен, т. е. числу сочетаний с повторениями из 10 по 3:

$$\overline{C}_{10}^3 = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220. \bullet$$

Пример 8. В гостинице 10 комнат, в каждой из которых можно разместить 4 человека. Сколько существует вариантов размещения прибывших 4 гостей?

Решение. Каждого гостя, независимо от остальных, можно поселить в любой из 10 комнат, следовательно, количество вариантов размещения прибывших 4 гостей равно числу способов выбрать комнату для первого, второго, третьего и четвертого гостя (порядок выбора комнат важен), т. е. числу размещений с повторениями из 10 комнат по 4: $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$. •

Опр. 15. Пусть имеется множество, содержащее n элементов, причем в этом множестве элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент

a_2 – n_2 раз, ..., элемент a_k – n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Число перестановок этих элементов, отличающихся порядком расположения различных элементов, называется ***числом перестановок с повторениями*** и обозначается $P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k)$.

Утв. 2. Число перестановок с повторениями равно

$$\boxed{P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.}$$

Доказательство. Пусть имеется множество из n элементов, причем в нем элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 – n_2 раз, ..., элемент a_k – n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Для перестановки этих элементов выберем сначала n_1 мест для элемента a_1 (это можно сделать $C_n^{n_1}$ способами), затем n_2 мест для элемента a_2 из оставшихся свободными $n - n_1$ мест ($C_{n-n_1}^{n_2}$ способов), n_3 мест для элемента a_3 из оставшихся $n - n_1 - n_2$ мест ($C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способов) и т. д. По правилу произведения получим, что число перестановок с повторениями равно

$$P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \times$$

$$\times \ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \lhd$$

Пример 9. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «КОЛОКОЛ»?

Решение. Здесь $n_1 = 2$ буквы К, $n_2 = 2$ буквы Л и $n_3 = 3$ буквы О, всего $n = n_1 + n_2 + n_3 = 7$ букв. Следовательно, число перестановок с повторениями этих 7 букв равно

$$P_7(2; 2; 3) = \frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \bullet$$

Пример 10. Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?

Решение. 1 способ. Выберем сначала 4 спортсмена в первую группу (это можно сделать C_{11}^4 способами), затем из оставшихся $11-4=7$ спортсменов выберем 5 человек во вторую группу (имеется C_7^5 способов такого выбора), оставшиеся 2 спортсмена попадают в третью группу (выбираем 2 спортсмена из двух C_2^2 способами). По правилу произведения получим, что число способов деления 11 спортсменов на такие 3 группы равно

$$C_{11}^4 C_7^5 C_2^2 = \frac{11!}{4!7!} \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} =$$
$$= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 = 6930.$$

2 способ. Возьмем четыре карточки с номером 1 (первая группа), пять карточек с номером 2 (вторая группа) и две карточки с номером 3 (третья группа). Будем раздавать эти карточки спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом, число способов деления 11 спортсменов на указанные 3 группы равно числу перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3, т. е.

$$P_{11}(4;5;2) = \frac{11!}{4!5!2!} = 6930. \bullet$$

Замечание. Число способов разделить n элементов на группы так, чтобы в первой группе оказалось n_1 элементов, во второй n_2 элементов, …, в последней n_k элементов, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, равно числу перестановок с повторениями $P_n(n_1; n_2; \ldots; n_k)$.

§ 2. Методы задания вероятностей

1. Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A равна

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$$

где $m = m_A$ – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n – общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Для того, чтобы можно было применить классическое определение вероятности, необходимо, чтобы случайный эксперимент сводился к схеме случаев, т. е.:

1) элементарные исходы эксперимента должны быть равновозможны;

2) элементарные исходы должны образовывать конечное (или счетное) множество.

Пример 1. В урне содержится N шаров, из них M белых, остальные – черные. Наудачу вынимают n шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров m белых?

Решение. Имеет место следующая схема:

Имеем:	M белых	+ $(N - M)$ черных	= N шаров
Извлечь:	m белых	+ $(n - m)$ черных	= n шаров
$P(A)$ =	C_M^m	$\cdot\ C_{N-M}^{n-m}$	/ C_N^n

Число элементарных исходов – это число способов извлечь (выбрать) n шаров из имеющихся N шаров, т. е. C_N^n. Число благоприятствующих исходов – это число способов выбрать m шаров из имеющихся M белых шаров и при каждом этом выборе извлечь $n - m$ шаров из имеющихся $N - M$ черных шаров. В силу правила произведения, число благоприятствующих исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Обозначая через A событие, вероятность которого надо найти, получаем

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \bullet$$

2. Геометрическая вероятность может использоваться, если исходы случайного эксперимента равновозможны, но образуют бесконечное несчетное пространство элементарных исходов, которое можно представить в виде некоторой геометрической фигуры – области на числовой прямой, на плоскости или в пространстве.

Опр. 1. Пусть G – геометрическая фигура (область), представляющая пространство элементарных исходов данного эксперимента; g – область, представляющая все элементарные исходы, благоприятствующие событию A (рис. 1). ***Геометрической вероятностью*** события A называется отношение меры области g к мере области G:

$$\boxed{P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)}.}$$

При этом если G – отрезок или кривая, то $\mu(G)$ – длина отрезка или кривой; если G – плоская область, то $\mu(G)$ – площадь этой области; если G – пространственное тело, то $\mu(G)$ – объем этого тела.

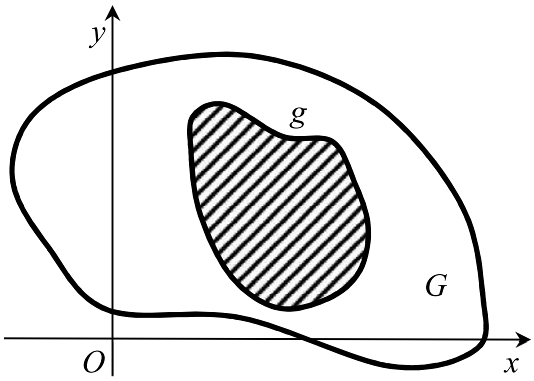


Рис. 1. Геометрическая вероятность.

Пример 2. В квадрат со стороной a наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет на вписанный в квадрат круг?

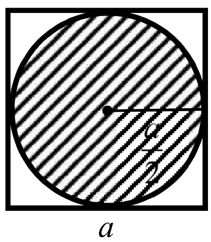


Рис. 2. Круг, вписанный в квадрат со стороной a

Решение. Площадь квадрата равна $S_{кв} = a^2$, площадь круга $S_{кр} = \pi r^2$, где $r = \dfrac{a}{2}$ – радиус круга (см. рис. 2). Применяя геометрическую вероятность, получим

$$P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}. \bullet$$

Пример 3 (задача о встрече). Два лица И. и М. договорились встретиться в течение определенного часа, в пределах которого они приходят случайным образом (наудачу), причем И. ждет 20, а М. – 10 минут. Найдем вероятность того, что они встретятся.

Решение. Пусть x – время прихода И., а y – время прихода М. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Oxy. Областью возможных значений является множество точек (x; y), $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), т. е. множество элементарных исходов эксперимента описывается квадратом Ω со стороной 60 (см. рис. 3), площадь квадрата равна $S_{\Omega} = 60^2 = 3600$.

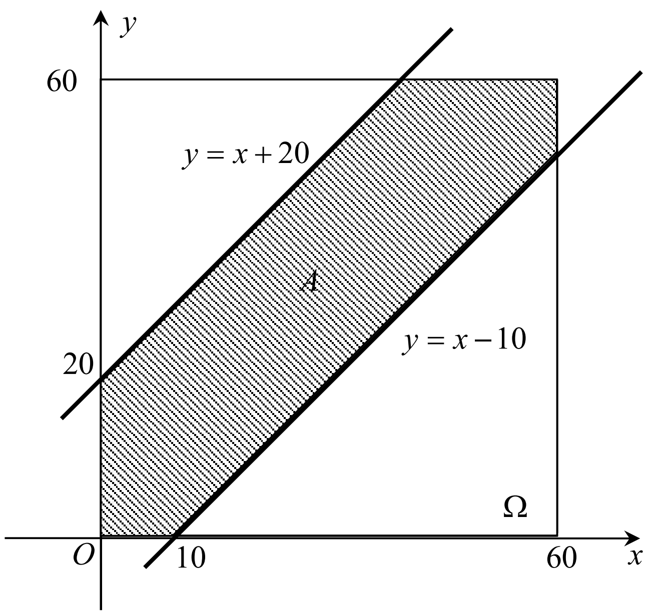


Рис. 3. Задача о встрече

Событие $A = \{$встреча состоится$\}$ произойдет, если каждое лицо придет не позже, чем другое уйдет после ожидания, т. е. $x \le y + 10,\ y \le x + 20.$ Таким образом, исходы, благоприятствующие событию A, расположены в заштрихованной полосе между прямыми $y = x - 10$ и $y = x + 20$ (см. рис. 3), причем площадь S_A благоприятствующей событию A области равна площади S_Ω квадрата Ω за вычетом площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 40 и 50 единиц. Тогда

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3600 - \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40 - \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 50}{3600} = \frac{31}{72} \approx 0,43.\bullet$$

3. Статистическая вероятность.

Классическое определение вероятности неприменимо, если исходы случайного эксперимента не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадения ее различных граней не равновозможны. В таких случаях иногда используют понятие статистической вероятности.

Опр. 2. Пусть при проведении n испытаний событие A появилось в m испытаниях. Отношение $w(A) = \dfrac{m}{n}$ называется ***относительной частотой*** появления события A в данной серии испытаний.

Относительная частота не является величиной постоянной. Если мы проведем еще одну серию из n или n_1 испытаний, то событие A появится m_1 раз, причем $\dfrac{m_1}{n_1} \ne \dfrac{m}{n}$, но если n и n_1 достаточно велики и условия эксперимента достаточно стабильны, то $\dfrac{m_1}{n_1} \approx \dfrac{m}{n}$.

Опр. 3. Если относительная частота события обладает свойством статистической устойчивости, т. е. в различных сериях испытаний изменяется незначительно, в качестве ***статистической вероятности*** события принимают относительную частоту или ее приближенное значение.

Пример 4. Известно, что среди новорожденных больше мальчиков, чем девочек. По официальным статистическим данным, относительная частота рождения девочек в Беларуси в 2003–2018 гг. варьировалась следующим образом:

2003 – 0,485;	2004 – 0,487;	2005 – 0,487;	2006 – 0,485;
2007 – 0,485;	2008 – 0,485;	2009 – 0,485;	2010 – 0,484;
2011 – 0,486;	2012 – 0,485;	2013 – 0,485;	2014 – 0,483;
2015 – 0,484;	2016 – 0,485;	2017 – 0,486;	2018 – 0,487.

Это дает основания считать вероятность рождения девочек приблизительно равной 0,485.•

§ 3. Соотношения между событиями

Случайные события можно рассматривать как подмножества некоторого множества – пространства элементарных исходов Ω. Соотношения между случайными событиями аналогичны соотношениям между множествами. События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера*: достоверное событие Ω изображают прямоугольником; элементарные исходы – точками прямоугольника; случайное событие – областью внутри него.

Опр. 1. Говорят, что событие A ***влечет за собой событие*** B, или что событие A ***входит в*** B, или что событие B ***включает в себя*** событие A, если при наступлении события A обязательно наступает и событие B. Обозначается: $A \subset B$.

На рис. 4 представлена геометрическая интерпретация этого понятия.

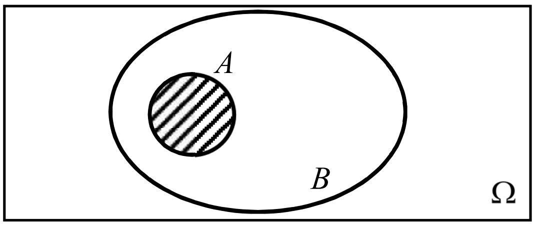


Рис. 4. Событие A влечет за собой событие B: $A \subset B$

Пример 1. Пусть подброшен правильный игральный кубик. Рассмотрим события:

A = {выпало 1 очко};

B = {выпало нечетное число очков}.

Здесь событие A влечет за собой событие B (событие A входит в B): $A \subset B$.•

Опр. 2. События A и B называются ***равносильными*** (***равными***), если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Опр. 3. ***Суммой*** (***объединением***) событий A и B называется событие $C = A + B$ ($C = A \cup B$), состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A *или* B. Иными словами, событие C состоит в том, что произошло или событие A, или событие B, или события A и B одновременно (рис. 5).

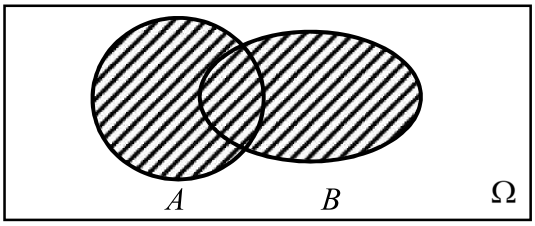


Рис. 5. Сумма $A + B$ событий A и B

Опр. 4. ***Произведением*** (***пересечением***) событий A и B называется событие $C = AB$ ($C = A \cap B$), которое наступает, когда происходят оба события A *и* B (рис. 6).

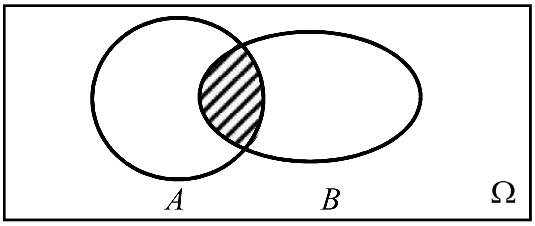


Рис. 6. Произведение AB событий A и B

Пример 1 (продолжение). Найдем сумму и произведение событий D = {выпало не более 3 очков}; K = {выпало не менее 3 очков}.

Множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$ содержит 6 элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести. Перечислим элементарные исходы, благоприятствующие каждому из событий:

$$D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}; \qquad K = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Тогда сумма событий включает все исходы, которые благоприятствуют либо одному событию, либо второму, либо обоим событиям одновременно, поэтому

$$D + K = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega;$$

произведение событий включает только те исходы, которые благоприятствуют обоим событиям одновременно, т. е.

$$DK = \{\omega_3\}.$$

Заметим, что для событий $A = \{\text{выпало 1 очко}\} = \{\omega_1\}$ и $B = \{\text{выпало нечетное число очков}\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ получим $A + B = B$, $AB = A$.•

Замечание. Раньше мы ввели понятие несовместных событий: события A и B называются несовместными, если они не могут произойти вместе в одном испытании. Таким образом, события A и B являются несовместными тогда и только тогда, когда их произведение является невозможным событием: $AB = \varnothing$.

Опр. 5. ***Разностью*** событий A и B называется событие $C = A \backslash B$ ($C = A - B$), которое произойдет, если произойдет событие A, но не произойдет событие B (рис. 7).

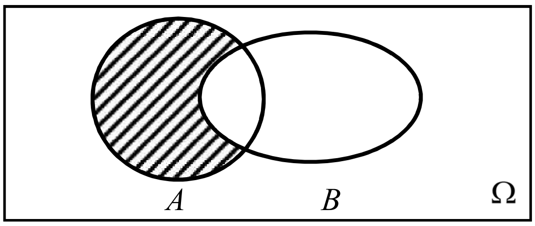


Рис. 7. Разность $C = A \backslash B$ событий A и B

Пример 1 (продолжение). Для введенных выше событий A, B, D, K получим:

$$A \backslash B = \varnothing; \quad B \backslash A = \{\omega_3, \omega_5\}; \quad D \backslash K = \{\omega_1, \omega_2\}; \quad K \backslash D = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}. \bullet$$

Понятие разности событий позволяет представить событие $\overline{A}$, противоположное событию A, в виде $\overline{A} = \Omega \backslash A$ (рис. 8).

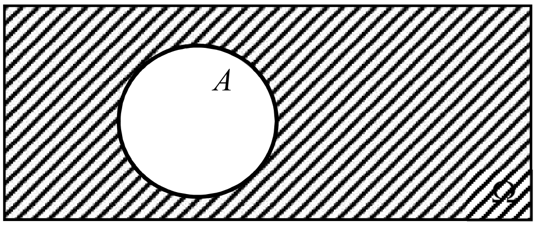


Рис. 8. Событие $\overline{A} = \Omega \backslash A,$ противоположное событию A

§ 4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Элементарная теория вероятностей – та часть теории вероятностей, в которой приходится иметь дело с вероятностями лишь конечного числа событий. В общем случае теория вероятностей как математическая дисциплина базируется на системе аксиом. Это означает, что, после того как даны названия изучаемым объектам и их основным отношениям, а также аксиомы, которым эти отношения должны подчиняться, все дальнейшее изложение теории должно основываться исключительно лишь на этих аксиомах, не опираясь на обычное конкретное значение этих объектов и их отношений.

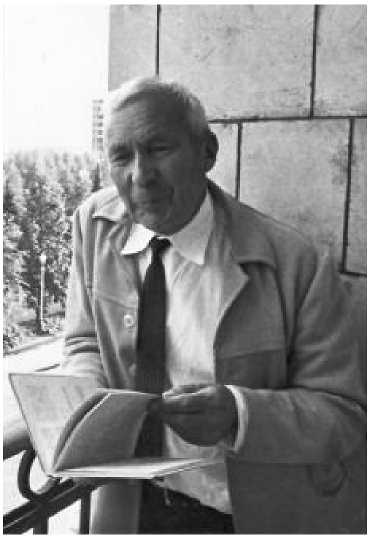
Задача аксиоматизации теории вероятностей была сформулирована в 1900 г. на II Международном математическом конгрессе как часть одной из знаменитых *проблем Гильберта*. Немецкий математик Д. Гильберт (1862–1943) в своем докладе представил список двадцати трех нерешенных проблем, послуживший направляющим указателем приложения усилий математиков на протяжении всего XX в.

Аксиоматизация теории вероятностей может быть проведена различными способами как в отношении выбора аксиом, так и выбора основных понятий и основных соотношений. Если преследовать цель возможной простоты как самой системы аксиом, так и построения на ней дальнейшей теории, то представляется наиболее целесообразным ввести в качестве базовых понятия случайного события и его вероятности.

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной А. Н. Колмогоровым в монографии «Основные понятия теории вероятностей», первое издание которой опубликовано в 1933 г. на немецком языке. В этой работе А. Н. Колмогоров заложил фундамент современной теории вероятностей, основанной на теории множеств и теории меры. Аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность события обладала основными свойствами статистической вероятности, характеризующей ее практический смысл. Сформулированная А. Н. Колмогоровым простая система аксиом позволила описать уже существовавшие к тому времени классические разделы теории вероятностей и дать толчок развитию ее новых разделов, например, теории случайных процессов.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Андре́й Никола́евич Колмого́ров
(1903–1987)

русский советский математик, один из крупнейших математиков XX в.

Один из основоположников современной теории вероятностей, им получены фундаментальные результаты во многих областях математики и ее приложений, в том числе в геометрии, математической логике, классической механике, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории тригонометрических рядов, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе. Автор новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики.

Академик Академии наук СССР, президент Московского математического общества в 1964–1966 гг. и 1974–1985 гг. Иностранный член Национальной академии наук США, Лондонского королевского общества, Французской (Парижской), Венгерской и Польской академий наук, Нидерландской королевской академии наук, Академий наук ГДР и Финляндии, Румынской академии, член Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина», почетный член Американской академии искусств и наук, член Лондонского математического общества, Индийского математического общества, иностранный член Американского философского общества.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Пусть задано некоторое множество Ω исходов эксперимента, которое мы будем называть ***пространством элементарных исходов***. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс (система, множество) случайных событий, т. е. подмножеств множества Ω.

Опр. 1. Класс событий $\mathfrak{F}$ называется σ***-алгеброй*** событий, если:

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$ (достоверное событие принадлежат классу $\mathfrak{F}$);

2) если $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A + B$, AB, $A \backslash B \in \mathfrak{F}$ (если A и B являются событиями, то их сумма $A + B$, произведение AB и разность $A \backslash B$ также являются событиями);

3) если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathfrak{F}$, то $A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in \mathfrak{F}$; $A_1 A_2 ... A_n ... \in \mathfrak{F}$ (сумма и произведение счетного числа событий также являются событиями).

Пример 1. Наиболее простыми примерами σ-алгебр являются:

1) $\mathfrak{F}$ – множество всех подмножеств множества Ω;

2) $\mathfrak{F} = \{\varnothing; \Omega\}$;

3) $\mathfrak{F} = \{\varnothing; A; \overline{A}; \Omega\}$, где A – некоторое подмножество множества Ω. •

Опр. 2. ***Вероятностью*** (или ***вероятностной мерой***) называется числовая функция $P: \mathfrak{F} \to [0;1]$, определенная для каждого события $A \in \mathfrak{F}$ и удовлетворяющая следующим условиям (*аксиомам вероятности*):

А1. *Аксиома неотрицательности*: вероятность любого события неотрицательна, т. е. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \mathfrak{F}$;

А2. *Аксиома нормированности*: вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$;

А3. *Аксиома аддитивности*: вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е. если события $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathfrak{F}$ попарно несовместны ($A_i A_k = \varnothing$ при всех $i \neq k$), то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

Опр. 3. Тройка объектов $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω – некоторое множество, называемое пространством элементарных исходов; $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра событий (подмножеств множества Ω); P – вероятность (вероятностная мера), определенная на классе событий $\mathfrak{F}$, называется ***вероятностным пространством***.

§ 5. Основные теоремы о вероятности

В качестве следствий аксиом вероятности можно получить следующие основные свойства вероятности.

Свойства вероятности

1. Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing) = 0$.

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

для любого события A.

3. Вероятность любого события не меньше 0 и не больше 1:

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

для любого события A.

Упражнение 1. Вывести свойства 1, 2, 3 из аксиом вероятности.

Теорема сложения вероятностей

Т 1 (теорема сложения вероятностей). Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения: для любых событий A и B

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Доказательство. Действительно, это вытекает из представления событий $A+B$ и B посредством суммы несовместных событий: $A+B = A + B\overline{A}$, $B = B\overline{A} + AB$ (см. рис. 9).

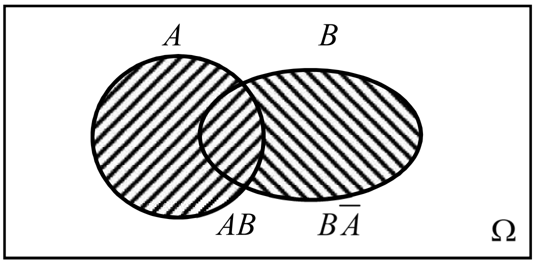


Рис. 9. К доказательству теоремы сложения вероятностей

Тогда в силу аксиомы А3 аддитивности вероятности получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B\overline{A});$$

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(AB).$$

Следовательно,

$$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB);$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \triangleleft$$

Упражнение 2. Показать, что

$$P(A+B+C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Замечание. При нахождении вероятности суммы нескольких совместных событий, как правило, удобнее перейти к противоположному событию. Действительно, поскольку

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \left\{ \begin{matrix} \text{произойдет хотя бы одно} \\ \text{из событий } A_1, A_2, ..., A_n \end{matrix} \right\},$$

то

$$\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \left\{ \begin{matrix} \text{не произойдет ни одно} \\ \text{из событий } A_1, A_2, ..., A_n \end{matrix} \right\},$$

т. е.

$$\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_n},$$

поэтому

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_n}).} \qquad (1)$$

В случае несовместных событий A и B имеем $AB = \varnothing$, поэтому формула для вероятности суммы событий упрощается.

Следствие 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: если события A и B *несовместны*, то

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B).}$$

Отметим, что это утверждение является частным случаем аксиомы А3 аддитивности вероятности.

Следствие 2 (свойство полной группы событий). Сумма вероятностей событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, равна 1:

$$\boxed{P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.}$$

Упражнение 3. Доказать следствие 2.

Условная вероятность

Пример 1. Подброшен правильный игральный кубик. Обозначим элементарные исходы опыта через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести.

Рассмотрим события:

A = {выпало нечетное число очков} $= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

B = {выпало не более 3 очков} $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Несложно видеть, что $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Найдем вероятность события A *при условии*, что произошло событие B. Такая вероятность обозначается

$$P(A \mid B) = P\left\{\begin{matrix}\text{выпало нечетное число очков, если известно,}\\ \text{что выпало не более 3 очков}\end{matrix}\right\}.$$

Для вычисления этой вероятности применим классическое определение вероятности: $P(A \mid B) = \frac{m'}{n'}$, где m' – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n' – общее число равновозможных элементарных исходов испытания. При этом множество элементарных исходов совпадает со множеством исходов, благоприятствующих событию B, т. е.

$$\Omega' = B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \quad \Rightarrow \quad n' = 3;$$

$$A' = \{\omega_1, \omega_3\} \quad \Rightarrow \quad m' = 2,$$

поэтому $P(A \mid B) = \frac{2}{3}$. •

Пример 2. В области Ω наудачу выбирается точка (рис. 10). Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка принадлежит области A. В силу геометрического определения вероятности, вероятность события A равна отношению площадей этих областей, т. е. $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$.

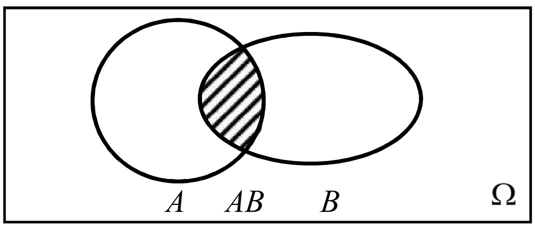


Рис. 10. К понятию условной вероятности

Применяя геометрическое определение вероятности для нахождения условной вероятности $P(A\,|\,B)$ того, что точка принадлежит области *A*, если известно, что она принадлежит области *B*, получим

$$P(A\,|\,B)=\frac{S_{AB}}{S_B}=\frac{S_{AB}/S_\Omega}{S_B/S_\Omega}=\frac{P(AB)}{P(B)}.\bullet$$

Полученное в примере 2 соотношение принимается за определение условной вероятности.

Опр. 1. ***Условной вероятностью*** $P(A\,|\,B)$ события *A* при условии, что произошло событие *B* $(P(B)\neq 0),$ называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события *B*:

$$\boxed{P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.}$$

Упражнение 4. Применить эту формулу для нахождения условной вероятности в примере 1.

Теорема умножения вероятностей

Из определения условной вероятности вытекает следующее утверждение.

Т 2 (теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B\,|\,A).}$$

Следствие 1. $P(ABC)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB).$

Пример 3. Студент знает ответы на 15 вопросов из 20. Какова вероятность того, что он ответит на три предложенных ему вопроса?

Решение. Рассмотрим событие

A = {студент ответит на три предложенных ему вопроса}.

Введем более простые события

A_i = {студент ответит на *i*-й вопрос}, где *i* = 1; 2; 3.

Тогда $A = A_1A_2A_3$. По теореме умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

Используя классическое определение вероятности, вычислим: $P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $P(A_2 \mid A_1) = \frac{14}{19}$, так как после первого вопроса остается $n = 19$ вопросов, из которых студент знает ответы (при условии, что произошло событие A_1) на $m = 14$ вопросов; $P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{13}{18}$, так как после второго вопроса остается $n = 18$ вопросов, из которых студент знает ответы (при условии, что произошли события A_1 и A_2) на $m = 13$ вопросов.

Следовательно, $P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} \approx 0,4.$ •

Упражнение 5. Решить эту задачу, используя только классическое определение вероятности.

Опр. 2. Событие A называется ***независимым*** от события B, если $P(A \mid B) = P(A)$.

Иными словами, событие A не зависит от события B, если вероятность его появления не зависит от того, произошло или не произошло событие B.

Упражнение 6. Показать, что если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от A, т. е. если $P(A \mid B) = P(A)$, то $P(B \mid A) = P(B)$.

Таким образом, зависимость или независимость событий всегда взаимны, поэтому мы можем говорить, что события A и B независимы.

Для независимых событий теорема умножения вероятностей принимает особенно простой вид.

Следствие 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий). Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: если события A и B *независимы*, то

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

Замечание. При решении задач о независимости событий судят по смыслу условия задачи.

Пример 4. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Рассмотрим события

A_1 = {первый стрелок попал в мишень};

A_2 = {второй стрелок попал в мишень}.

Пусть $P(A_1) = 0,8; P(A_2) = 0,6.$ Найдем $P(A_1 + A_2).$

Решение. 1 способ. По теореме сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92,$$

поскольку по смыслу задачи события A_1 и A_2 независимы.

2 способ. Во многих случаях бывает полезно представить событие, вероятность которого требуется найти, в виде суммы несовместных событий. Запишем событие

$A = A_1 + A_2$ = {хотя бы один стрелок попал в мишень}

как сумму несовместных событий: $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + A_1 A_2.$ Тогда, применяя теорему сложения вероятностей *несовместных* событий и теорему умножения вероятностей *независимых* событий, получаем

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + A_1 A_2) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) =$$

$$= 0,8 \cdot (1 - 0,6) + (1 - 0,8) \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,92.$$

3 способ. Для вычисления вероятности события

A = {хотя бы один стрелок попал в мишень}

удобно перейти к противоположному событию

$\overline{A}$ = {ни один стрелок не попал в мишень}.

Тогда $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2,$ поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,6) = 0,92. \bullet$$

Пример 5. Три стрелка, вероятности попадания которых в мишень соответственно равны 0,7, 0,8 и 0,9, произвели по одному выстрелу (независимо друг от друга). Найдем вероятности следующих событий:

A = {только один стрелок попал в мишень},

B = {хотя бы один стрелок попал в мишень}.

Решение. По условию известны вероятности событий

A_i = {i-й стрелок попал} (i = 1, 2, 3):

$$P(A_1) = 0{,}7,\ P(A_2) = 0{,}8,\ P(A_3) = 0{,}9.$$

Выразим события, вероятности которых нужно найти, через эти события.

Событие A означает, что один стрелок попал, а два не попали в мишень, представим его в виде суммы несовместных событий:

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

(либо попал только первый стрелок (произошло событие $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо попал только второй стрелок (событие $\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$), либо попал только третий стрелок (событие $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$)). Поскольку слагаемые попарно несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$$P(A) = 0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

Для вычисления вероятности события B удобнее перейти к противоположному событию

$\overline{B}$ = {ни один стрелок не попал в мишень}.

Тогда $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, поэтому

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}994.$ •

Пример 6. Имеется три независимо работающих элемента, соединенных в цепь. Вероятность отказа каждого из них равна $q = 0{,}1$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Определим вероятность того, что цепь будет работать, если элементы соединены: **а)** последовательно; **б)** параллельно.

Решение. Введем события:

A = {цепь работает},

A_i = {i-й элемент работает} (i = 1, 2, 3).

По условию, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}9$.

а) Если элементы соединены в цепь последовательно (рис. 11), то для работы цепи необходимо, чтобы работали *все* ее элементы, т. е. $A = A_1A_2A_3$. Поскольку события A_1, A_2, A_3 независимы, то вероятность безотказной работы цепи равна

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9^3 = 0{,}729.$$

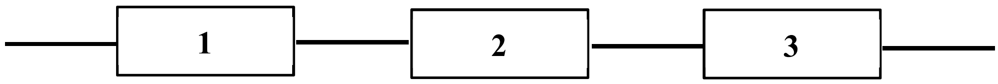


Рис. 11. Последовательное соединение элементов

б) При параллельном соединении элементов (рис. 12) цепь работает, если работает *хотя бы один* из элементов, т. е. $A = A_1 + A_2 + A_3$. Для вычисления суммы совместных событий перейдем к противоположному событию и используем формулу (1). Поскольку события A_1, A_2, A_3 независимы, то вероятность безотказной работы цепи равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}1^3 = 0{,}999. \bullet$$

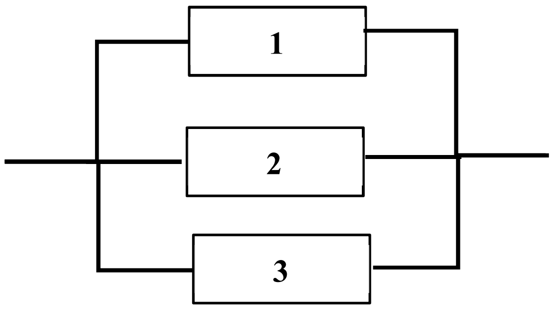
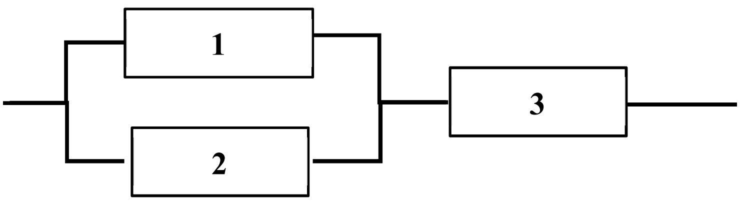
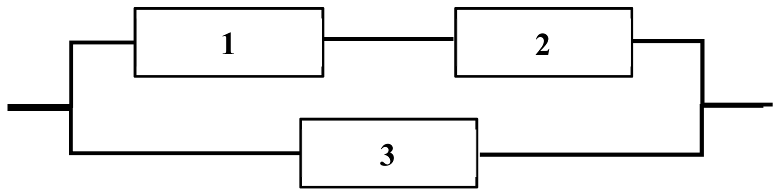


Рис. 12. Параллельное соединение элементов

Пример 7. Имеется три независимо работающих элемента, соединенных в цепь по схеме, изображенной: **а)** на рис. 13а; **б)** на рис. 13б. Вероятность отказа каждого из них равна $q = 0{,}1$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Определим вероятность работы цепи в каждом из случаев.



а



б

Рис. 13. Цепь из трех независимых элементов

Решение. Введем события:

A = {цепь работает},

A_i = {i-й элемент работает} ($i = 1, 2, 3$).

По условию, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}9$.

а) Введем дополнительно событие

B = {работает участок цепи, включающий элементы 1 и 2}.

Тогда $A = BA_3$, поскольку для работы цепи, изображенной на рис. 13а, необходимо, чтобы работали и элемент 3, и участок цепи с элементами 1 и 2. Поэтому

$$P(A) = P(B)P(A_3).$$

Рассмотрим событие B. Элементы 1 и 2 на рис. 13а соединены параллельно, поэтому $B = A_1 + A_2$ и

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}1^2 = 0{,}99.$$

Следовательно,

$$P(A) = P(B)P(A_3) = 0{,}99 \cdot 0{,}9 = 0{,}891.$$

б) Как и в пункте а), введем событие

B = {работает участок цепи, включающий элементы 1 и 2}.

В данном случае $A = B + A_3$, поскольку для работы цепи, приведенной на рис. 13б, достаточно, чтобы был исправен по крайней мере один из участков: либо участок цепи с элементами 1 и 2, либо элемент 3. Поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{B})P(\overline{A_3}).$$

Рассматривая событие B, видим, что на рис. 13б элементы 1 и 2 соединены последовательно, поэтому $B = A_1A_2$ и

$$P(B) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}9^2 = 0{,}81.$$

Следовательно,

$$P(A)=1-P(\overline{B})P(\overline{A_3})=1-0{,}19\cdot 0{,}1=0{,}981. \bullet$$

Формула полной вероятности

Т 3 (формула полной вероятности). Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (***гипотез***) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$\boxed{P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)+...+P(H_n)P(A\,|\,H_n).}$$

Доказательство. Гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, т. е. они попарно несовместны и $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega.$ Тогда событие A можно представить в виде $A=\Omega A=H_1A+H_2A+\ldots+H_nA,$ причем слагаемые попарно несовместны. Следовательно, применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, а затем теорему умножения вероятностей, получим

$$P(A)=P(H_1A)+P(H_2A)+\ldots+P(H_nA)=$$
$$=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)+...+P(H_n)P(A\,|\,H_n). \lhd$$

Пример 8. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что среди телевизоров, поступающих от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, соответственно 98%, 88% и 92% не требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найдем вероятность того, что проданный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. Пусть событие A = {проданный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока}. По условию известен для каждого поставщика процент телевизоров, выдерживающих гарантийный срок без ремонта, т. е. известны условные вероятности события A при условии осуществления гипотез H_i = {проданный телевизор поступил от i-го поставщика} (i = 1; 2; 3):

$$P(A|H_1) = 0{,}98;\ P(A|H_2) = 0{,}88;\ P(A|H_3) = 0{,}92.$$

Чтобы найти $P(A)$ по формуле полной вероятности, найдем вероятности гипотез. Пусть от 1-го поставщика поступило k телевизоров, тогда от 2-го – $4k$, от 3-го – $5k$, всего – $10k$ телевизоров. Применяя классическое определение вероятности, получим:

$$P(H_1) = \frac{k}{10k} = 0{,}1; \quad P(H_2) = \frac{4k}{10k} = 0{,}4; \quad P(H_3) = \frac{5k}{10k} = 0{,}5.$$

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$ (сумма вероятностей гипотез должна быть равна 1).

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91. \bullet$$

Формула Байеса

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

То́мас Ба́йес

(англ. *Thomas Bayes*)

(1702–1761)

британский математик, пресвитерианский священник.

Опубликовал при жизни всего две работы, одна из них богословская, другая – математическая. «Эссе о решении проблем в теории случайных событий», в котором изложена формула Байеса, опубликовано в 1764 г. после смерти автора.

Теорема Байеса, имеющая ныне сильнейшее влияние на разработки софтверных компаний, рассчитывает вероятность верности гипотезы в условиях, когда на основе наблюдений известна лишь некоторая частичная информация о событиях.

Пионером была британская интернет-компания Autonomy, использовавшая байесовскиеие оценки для интеллектуального поиска информации.

Корпорация Oracle в своем ПО для баз данных с помощью теории Байеса выявляет характерные тенденции в сложных массивах данных.

В компании Microsoft байесовский подход использовался, например, в программах выявления неполадок в новых ОС, а еще ранее – при создании для MS Office "мистера Скрепки" (Mr Clippy).

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Формула Байеса применяется, если событие *A произошло* и требуется *переоценить* вероятности гипотез, т. е. найти $P(H_k|A)$.

Т 4 (формула Байеса). Если события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то

$$\boxed{P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}.}$$

Доказательство. Используя определение условной вероятности, теорему умножения вероятностей и формулу полной вероятности, имеем

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}. \triangleleft$$

Вероятности $P(H_k)$, известные до проведения опыта, называются ***априорными*** (лат. *a priori* – буквально «от предшествующего») вероятностями гипотез, вероятности $P(H_k|A)$ называются ***апостериорными*** (лат. *a posteriori* – от последующего).

Пример 8 (продолжение). Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Решение. Найдем апостериорные вероятности гипотез $P(H_k \mid \overline{A})$, где $\overline{A} = \{$проданный телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока$\}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}09$.

По формуле Байеса получим:

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}09} \approx 0{,}022;$$

$$P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_2)P(\overline{A} \mid H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}12}{0{,}09} \approx 0{,}533;$$

$$P(H_3 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_3)P(\overline{A} \mid H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}09} \approx 0{,}445.$$

Следовательно, наиболее вероятно, что данный телевизор поступил от 2-го поставщика.•

§ 6. Схема Бернулли

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Я́коб Берну́лли
(нем. *Jakob Bernoulli*)
(1654–1705)

швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа, внес огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления.

Ввел значительную часть современных понятий теории вероятностей, сформулировал первый вариант закона больших чисел. В 1713 г. посмертно был издан его трактат «Искусство предположений» (*Ars conjectandi*) – монография по теории вероятностей, статистике и их практическому применению, итог комбинаторики и теории вероятностей XVII в.

Якоб Бернулли является родоначальником известной научной династии, многие члены которой в XVII-XVIII вв. внесли существенный вклад в науку. В частности, к этой династии принадлежат 9 крупных математиков и физиков (из них 3 великих), а также известные историки, искусствоведы, архитекторы, юристы и др. Историки насчитали в науке и культуре не менее 30 знаменитых представителей семьи Бернулли.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 1. Пусть проводится n *независимых в совокупности* испытаний, в каждом из которых возможно только два исхода: появление некоторого события A – *успех* и его непоявление $\overline{A}$ – *неуспех*, причем вероятность наступления успеха в каждом испытании постоянна и равна p. Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Итак, вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна $P(A)=p$; следовательно, вероятность неудачи (неуспеха) во всех испытаниях тоже постоянна и равна $P(\overline{A})=1-p=q$.

Пример 1. 1) Несколько последовательных бросаний монеты представляют собой независимые испытания.

2) Несколько последовательных выниманий карты из колоды представляют собой независимые опыты при условии, что вынутая карта каждый раз возвращается в колоду и карты перемешиваются; в противном случае это – зависимые опыты.

3) Несколько выстрелов представляют собой независимые опыты только в случае, если прицеливание производится заново перед каждым выстрелом; в случае, когда прицеливание производится один раз перед всей стрельбой или непрерывно осуществляется в процессе стрельбы (стрельба очередью, бомбометание серией), выстрелы представляют собой зависимые опыты. •

Т 1. В схеме Бернулли вероятность $P_n(k)$ наступления k успехов в n независимых испытаниях – вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз, вычисляется по ***формуле Бернулли***:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},} \tag{1}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $p = P(A)$ – вероятность успеха в одном испытании; $q = 1 - p$ – вероятность неуспеха в одном испытании.

Доказательство. Если в результате n независимых испытаний по схеме Бернулли событие A произошло k раз (неважно в каком порядке), то это означает, что совместно наступили k событий A и $(n-k)$ событий $\overline{A}$. Так как все n событий независимы, то по теореме умножения вероятность появления в определенной последовательности k раз события A и $(n-k)$ раз события $\overline{A}$ равна $p^k q^{n-k}$.

Однако событие A может появляться ровно k раз в n опытах совершенно в разных последовательностях (комбинациях), чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Число таких возможных последовательностей совпадает с числом способов, которыми можно выбрать k мест из имеющихся n, не учитывая их порядка. Поэтому это число равно числу сочетаний из n по k, т. е. C_n^k.

Все C_n^k вариантов появления ровно k раз события A представляют собой несовместные события, вероятность каждого из которых равна $p^k q^{n-k}$. Поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность $P_n(k)$ равна сумме вероятностей всех указанных несовместных событий, т. е. $C_n^k p^k q^{n-k}$, в результате получаем формулу Бернулли (1). ◁

Пример 2. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдем вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: **а)** ровно четыре; **б)** не менее четырех.

Решение. **а)** Мы имеем схему Бернулли с $n = 5$ испытаниями (посеяно пять семян). Событие $A = \{$семя взошло$\}$. По условию задачи $p = P(A) = 0{,}9$, тогда $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомую вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}32805.$$

б) Искомое событие состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое найдено. Для вычисления второго слагаемого применяем снова формулу Бернулли:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 1 \cdot 0{,}9^5 \cdot 1 = 0{,}59049.$$

Следовательно, $P_5(k \geq 4) = 0{,}32805 + 0{,}59049 = 0{,}91854$. •

Пример 3. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найдем вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Пусть событие B – хотя бы одно попадание. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, т. е. события $\overline{B}$ – ни одного попадания в мишень. В данном примере $n = 6$; $p = 0{,}4$; $q = 1 - p = 0{,}6$. Применяя формулу Бернулли, получаем

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) = 1 - 0{,}6^6 \approx 0{,}953. \bullet$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

Пример 3 (продолжение). Найдем наиболее вероятное число попаданий в мишень при 6 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность, если вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4.

Непосредственные вычисления по формуле Бернулли дают следующие значения для вероятностей k попаданий при 6 выстрелах.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_n(k)$	0,046656	0,186624	0,31104	0,27648	0,13824	0,036864	0,004096

Следовательно, наибольшую вероятность $P_n(2) = 0{,}31104$ имеет осуществление ровно 2 попаданий в мишень.•

Число k_0, которому соответствует максимальная вероятность $P_n(k)$, называют ***наивероятнейшим числом успехов*** в серии n независимых испытаний Бернулли.

Решим задачу нахождения числа k_0 в общем виде.

Согласно определению, для числа k_0 имеет место

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1), \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1). \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство:

$$C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq C_n^{k_0+1} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1};$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1};$$

$$\frac{1}{n-k_0} q \geq \frac{1}{k_0+1} p;$$

$$(k_0+1)q \geq (n-k_0)p;$$

$$k_0 \geq np-q.$$

Аналогично для второго неравенства:

$$C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq C_n^{k_0-1} p^{k_0-1} q^{n-k_0+1};$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!} p^{k_0-1} q^{n-k_0+1};$$

$$\frac{1}{k_0} p \geq \frac{1}{n-k_0+1} q;$$

$$(n-k_0+1)p \geq k_0 q;$$

$$k_0 \leq np+p.$$

Итак, наивероятнейшее число k_0 успехов в серии n независимых испытаний Бернулли удовлетворяет условию

$$\boxed{np-q \leq k_0 \leq np+p.} \qquad (2)$$

Отметим, что длина интервала в оценке (2) равна $np + p - (np - q) = p + q = 1$, поэтому всегда существует целое число k_0, удовлетворяющее условию (2).

Если $np + p$ − целое число, то $np - q$ − следующее целое число. В этом случае будет два наивероятнейших числа.

Пример 4. Всхожесть семян данного растения в среднем составляет 80%. Найдем наивероятнейшее число всхожих семян из 9 посеянных.

Решение. По формуле (2) получим

$$9 \cdot 0,8 - 0,2 \le k_0 \le 9 \cdot 0,8 + 0,2;$$

$$7 \le k_0 \le 8.$$

Следовательно, имеем два наивероятнейших числа успехов: 7 и 8. Действительно,

$$P_9(7) = C_9^7 \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^2 = 36 \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^2 \approx 0,302;$$

$$P_9(8) = C_9^8 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^1 = 9 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^1 \approx 0,302. \bullet$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Точная формула Бернулли используется при сравнительно небольших сериях испытаний ($n < 20$). При *больших* значениях числа испытаний n для вычисления вероятностей $P_n(k)$ используются асимптотические (приближенные) формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

1. Формула Пуассона.

Симео́н Дени́ Пуассо́н
(фр. *Siméon Denis Poisson*)
(1781–1840)

французский математик, механик и физик.
В 1800 г., не достигнув еще возраста 20 лет, опубликовал две статьи, которые сделали его известным в ученом мире. В одной из них было дано новое, простое доказательство теоремы Безу.
В 1820 г. Пуассону было поручено высшее наблюдение над преподаванием математики во всех коллежах Франции.
При Наполеоне был произведен в бароны, впоследствии стал пэром Франции.

Т. 2 [Пуассон]. Если $n \to \infty$ и $p = p_n \to 0$ так, что $np_n \to a$, то при любом постоянном значении $k = 0; 1; 2; \ldots$

$$P_n(k) \to \frac{a^k \mathrm{e}^{-a}}{k!} \text{ при } n \to \infty.$$

Из этой теоремы вытекает ***формула Пуассона***: если в схеме Бернулли число испытаний *n велико*, а вероятность *p* появления события *A* в каждом из *n* независимых испытаний *очень мала*, то

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{a^k \mathrm{e}^{-a}}{k!}, \quad a = np.}$$

Замечание 1. Формулу Пуассона применяют, когда событие *A* является *редким*, т. е. вероятность p *очень мала* (как правило, $p < 0{,}1$), но количество испытаний *n велико* и *среднее число успехов* $a = np$ незначительно ($a \le 10$).

Замечание 2. Если в схеме Бернулли вероятность p появления события *A* близка к 1, а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(k)$ также можно использовать формулу Пуассона (считая успехом событие $\overline{A}$).

Пример 4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найдем вероятность попадания в цель хотя бы двумя пулями, если число выстрелов равно 5000.

Решение. По условию n = 5000, p = 0,001. Поскольку число n велико, вероятность p мала, рассматриваемые события (попадания в цель при разных выстрелах) независимы, то применима формула Пуассона. Найдем $a = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$.

В Великой Отечественной войне реальное осуществление условий этого примера имело место при обстреливании самолета из пехотного оружия. Пулей самолет может быть подбит лишь при попадании в немногие уязвимые места – мотор, летчик, бензобаки и проч. Вероятность попадания в эти уязвимые места отдельным выстрелом весьма мала, но, как правило, по самолету вело огонь целое подразделение, и общее количество выстрелов, выпущенных по самолету, было значительным. В результате вероятность попадания хотя бы одной или двумя пулями имела заметную величину. Это обстоятельство было подмечено и практически.

Найдем вероятность $P_{5000}(k \geq 2)$ попадания в цель хотя бы 2 пулями. События $\{k \geq 2\}$ = {не менее 2 попаданий в цель} и $\{k < 2\}$ = {менее 2 попаданий в цель} – противоположные, поэтому $P_{5000}(k \geq 2) = 1 - P_{5000}(k < 2)$.

Вычислим вероятность того, что будет менее двух попаданий, т. е. либо ровно одно, либо ни одного:

$$P_{5000}(k < 2) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) \approx \frac{5^0 \cdot \mathrm{e}^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \cdot \mathrm{e}^{-5}}{1!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-5} + 5\mathrm{e}^{-5} = 6\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}0404.$$

Следовательно, $P_{5000}(k \geq 2) \approx 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596.$ •

Оценка погрешности формулы Пуассона:

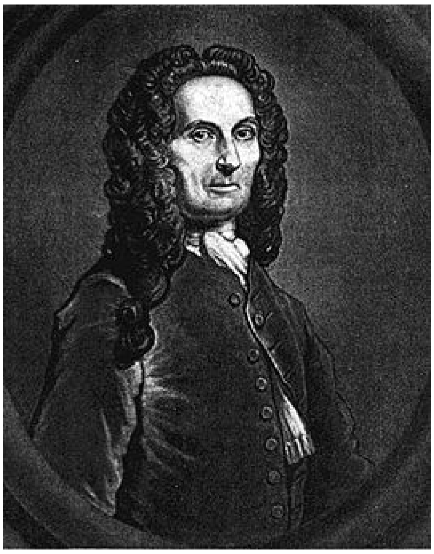
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P_n(k) - \frac{a^k e^{-a}}{k!} \right| \leq \frac{2a}{n} \min\{a; 2\}.$$

2. Локальная формула Муавра – Лапласа используется, если в схеме Бернулли число испытаний n *велико*, а вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний *значительно отличается от* 0 *и* 1 (*не очень мала и не очень велика*, $0{,}1 < p < 0{,}9$). Тогда

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ – ***функция Гаусса***.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Абраха́м де Муа́вр

(фр. и англ. *Abraham de Moivre*)

(1667–1754)

английский математик французского происхождения. Внес большой вклад в теорию вероятностей.

Вынужден был покинуть Францию из-за гонений на протестантов. Жил в Лондоне, на жизнь зарабатывал частным преподаванием и шахматной игрой. Был известен как талантливый математик, однако как иностранец не имел шансов на кафедру в английском учебном заведении. Ученик и помощник Исаака Ньютона.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с

(фр. *Pierre-Simon de Laplace*)

(1749–1827)

французский математик, механик, физик, астроном, почетный член Петербургской АН.

Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики, а особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук. Является одним из создателей теории вероятностей.

Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс
(нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*)
(1777–1855)

немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков».

Отличительными чертами его исследований являются необычайная широта проблематики, глубокая органическая связь между теоретической и прикладной математикой.

Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма.

Внес фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию; разработал вычислительные методы, приведшие к созданию нового научного направления — высшей геодезии.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу длины – *сантиметр*, единицу массы – *грамм*, единицу времени – *секунду*.

Гаусс чрезвычайно строго относился к своим печатным трудам и никогда не публиковал даже выдающиеся результаты, если считал свою работу над этой темой незавершенной. На его личной печати было изображено дерево с несколькими плодами, под девизом «Pauca sed matura» («Немного, но зрело»).

Гаусс на 10 лет раньше Лобачевского пришел к идее неевклидовой геометрии, но не стал заниматься этой темой глубже. Узнав о работе Лобачевского, начал в 62 года изучать русский язык, чтобы прочитать эти работы в оригинале.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Замечание 1. Существуют таблицы значений этой функции. При использовании этих таблиц следует иметь в виду следующие свойства функции Гаусса:

1) $\varphi(x)$ – четная функция, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) $\varphi(x)$ непрерывна и монотонно убывает при $x \geq 0$;

3) $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

В силу последнего свойства на практике обычно полагают $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$.

Замечание 2. Для того чтобы локальная формула Муавра – Лапласа давала хороший результат (довольно точное значение вероятности), нужно чтобы $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ было достаточно мало по абсолютной величине.

3. Интегральная формула Муавра – Лапласа используется при тех же предположениях, что и локальная (в схеме Бернулли *n велико, p не очень мало и не очень велико*). Тогда вероятность того, что число успехов (т. е. появлений события A) в n независимых испытаниях будет заключено в пределах от k_1 до k_2, может быть вычислена по формуле

$$\boxed{P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$ – ***функция Лапласа***.

Замечание 1. Существуют таблицы значений функции Лапласа, поскольку интеграл $\int \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$ – неберущийся. При использовании таблиц следует иметь в виду следующие свойства функции Лапласа:

1) $\Phi(x)$ – нечетная функция, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) $\Phi(x)$ непрерывна и монотонно возрастает при $x \in \mathbb{R}$;

3) $\Phi(x) \to 0{,}5$ при $x \to +\infty$.

В силу последнего свойства на практике обычно полагают $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \ge 5$.

Замечание 2. Более точное значение искомой вероятности получается по формуле

$$P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Замечание 3. При использовании таблиц необходимо следить за тем, какая именно функция затабулирована и какие свойства имеет эта функция. В некоторых учебниках функция Лапласа определяется иначе, например,

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2} + \Phi(x);$$

$$\Phi_2(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt = 2\Phi(x)$$

и т. д. Тогда интегральная формула Муавра – Лапласа может изменить свой вид. Например,

$$P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi_2\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi_2\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) \right),$$

в случае функции $\Phi_1(x)$ вид формулы не изменяется.

Пример 5. Какова вероятность того, что при 400 независимых подбрасываниях правильной монеты герб выпадет: **а)** ровно 195 раз; **б)** не менее 195 раз?

Решение. **а)** По условию задачи n = 400 – велико; p = 0,5 – не очень мало; $q = 1 - p = 0{,}5$; k = 195. Применим локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(195) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \varphi\left(\frac{195 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) = \frac{1}{10} \varphi(-0{,}5).$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(-0{,}5) = \varphi(0{,}5) \approx 0{,}3521.$ Следовательно,

$$P_{400}(195) \approx \frac{1}{10} \cdot 0{,}3521 = 0{,}03521.$$

б) В этом случае применима интегральная формула Муавра-Лапласа, так как требуется найти $P_{400}(k \ge 195) = P_{400}(195 \le k \le 400).$ По условию задачи n = 400; p = 0,5; k_1 = 195; k_2 = 400. Учитывая свойства функции Лапласа, получим

$$P_{400}(195 \le k \le 400) \approx \Phi\left(\frac{400 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) - \Phi\left(\frac{195 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) =$$

$$= \Phi(20) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(20) + \Phi(0{,}5) \approx 0{,}5 + 0{,}1915 = 0{,}6915. \bullet$$

Оценка погрешности интегральной формулы Муавра – Лапласа следует из теоремы Берри – Эссеена:

$$\max_{x>0} \left| P_n(k < x) - \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}} \right) + \frac{1}{2} \right| \le \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}.$$