

І. ПРЕДЕЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятие числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
2. Понятие предела функции в точке. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
4. Теорема о пределе промежуточной функции.
5. Понятие непрерывности функции. Доказать непрерывность функции $\cos x$.
6. Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
7. Понятие бесконечно малой функции. Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.
8. Теорема о сумме бесконечно малых функций.
9. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию.
10. Теорема об отношении бесконечно малой функции к функции, имеющей предел отличный от нуля.
11. Теорема о пределе суммы.
12. Теорема о пределе произведения.
13. Теорема о пределе частного.
14. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.
15. Непрерывность суммы, произведения и частного.
16. Непрерывность сложной функции.
17. Понятие бесконечно большой функции. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми.
18. Сравнение бесконечно малых функций.
19. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными.
20. Условие эквивалентности бесконечно малых функций.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. Вытекает ли из существования $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ существование $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

У к а з а н и е. Доказать и использовать неравенство

$$\|b\| - \|a\| \leq \|b - a\|.$$

2. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходится.

3. Сформулировать на языке « $\epsilon - \delta$ » утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 ».

4. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?

5. Сформулировать на языке « $\epsilon - \delta$ » утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0 , не является непрерывной в этой точке».

6. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} j(x)$ не существует. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)j(x)$ не существует.

У к а з а н и е. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

7. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , а функция $j(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + j(x)]; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)j(x)?$$

Рассмотреть пример: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

8. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, а функция $j(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$. Доказать, что произведение $f(x)j(x)$ является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow x_0$.

9. Является ли бесконечно большой при $x \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$?

10. Пусть $a'(x) \neq 0$ и $b'(x) \neq 0$ при $x \rightarrow x_0$. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a'(x)}{b'(x)}$ не существует, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{b(x)}$ тоже не существует.

Расчетные задания

Задача 1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\epsilon)$).

$$1.1. a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \frac{3}{2}.$$

$$1.3. a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \frac{7}{2}.$$

$$1.5. a_n = \frac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$$

$$1.7. a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.9. a_n = \frac{1-n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.11. a_n = \frac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.13. a_n = \frac{1-n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.15. a_n = \frac{n}{3n-1}, \quad a = \frac{1}{3}.$$

$$1.17. a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$$

$$1.19. a_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.21. a_n = \frac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \frac{3}{5}.$$

$$1.23. a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.25. a_n = \frac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$1.27. a_n = \frac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$$

$$1.29. a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \frac{3}{4}.$$

$$1.31. a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$$

$$1.2. a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$$

$$1.4. a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

$$1.6. a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \frac{4}{3}.$$

$$1.8. a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$$

$$1.10. a_n = -\frac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$$

$$1.12. a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$$

$$1.14. a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$$

$$1.16. a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = -3.$$

$$1.18. a_n = \frac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$$

$$1.20. a_n = \frac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$$

$$1.22. a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$$

$$1.24. a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$1.26. a_n = \frac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$$

$$1.28. a_n = \frac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$$

$$1.30. a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5}.$$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

$$2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

$$2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}.$$

$$2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

$$2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}.$$

$$2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}.$$

$$2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}.$$

$$2.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}.$$

$$2.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}.$$

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}.$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}.$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}.$$

$$2.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}.$$

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}.$$

$$2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}.$$

$$2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}.$$

$$2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

$$2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}.$$

$$2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}.$$

$$2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}.$$

$$2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$2.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$2.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}.$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}.$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 + n^4}.$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$2.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}.$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}.$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}.$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^3}.$$

$$2.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}.$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}.$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}.$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} + \sqrt{n-1}}.$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}} + n + 1 - n}.$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}.$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}.$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt[4]{4n^4 + 1} - \sqrt[3]{n^4 - 1}}.$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4 + 2} + \sqrt{n-2}}.$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}.$$

$$3.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3 + 5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}.$$

$$3.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5 - n + n^2}}.$$

$$3.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt[3]{n^5 - 4} - \sqrt[4]{n^4 + 1}}.$$

$$3.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n-3}}.$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}.$$

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}.$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8 - 1}}{(n + 4\sqrt{n})\sqrt{n^2 - 5}}.$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 7} + \sqrt[3]{n^2 + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 5} + \sqrt{n}}.$$

$$3.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6 + 6} - \sqrt{n-6}}.$$

$$3.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n}.$$

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5 + 5}}.$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}.$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}.$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n - 5}}{\sqrt[7]{n^7 + 5} + \sqrt{n - 5}}.$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}.$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt[7]{n + 2} - \sqrt[5]{n^5 + 2}}.$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}.$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 6} - \sqrt{n^2 - 5}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^3 + 1}}.$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 + 6} - \sqrt{n - 6}}{\sqrt[8]{n^8 + 6} + \sqrt{n - 6}}.$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}.$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[4]{n + 1} - \sqrt[5]{n^5 + 1}}.$$

$$3.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[6]{n} + \sqrt[3]{n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^3 - 1}}.$$

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right).$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n(n - 2)} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 5} \right) n \sqrt{n}.$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right]$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n \sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n \right).$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{4 - n^3} \right).$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n(n + 2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right].$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n + 2)(n + 1)} - \sqrt{(n - 1)(n + 3)} \right].$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right).$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{5 + 8n^3} - 2n \right).$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3} \right).$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right].$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$$

$$4.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} \right).$$

$$4.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}.$$

$$4.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n+5)} - n \right).$$

$$4.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \left(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right).$$

$$4.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}.$$

$$4.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 2)} \right].$$

$$4.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}.$$

$$4.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}.$$

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \sqrt{n(n-1)} \right].$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)} \right).$$

$$4.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right].$$

$$4.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right).$$

$$4.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4} \right).$$

$$4.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2} \right).$$

$$4.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} \left(\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2} \right).$$

$$4.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 5)(n^4 + 2)} - \sqrt{n^6 - 3n^2 + 5}}{n}.$$

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

$$5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}.$$

$$5.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}.$$

$$5.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$$

$$5.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n+1}}.$$

$$5.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}.$$

$$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right].$$

$$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right).$$

$$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$

$$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}.$$

$$5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}.$$

$$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{5+7+12+\dots+(5n-3)}.$$

$$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right).$$

$$5.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$5.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right].$$

$$5.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}.$$

$$5.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}.$$

$$5.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}.$$

$$5.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}.$$

$$5.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right).$$

$$5.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+3} - n \right).$$

Задача 6. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

$$6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$6.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$6.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}.$$

$$6.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}.$$

$$6.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}.$$

$$6.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}.$$

$$6.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}.$$

$$6.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n.$$

$$6.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$6.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 3n + 3} \right)^{n^2}.$$

$$6.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$$

$$6.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 3n - 1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

$$6.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n-n^3}.$$

$$6.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 18n + 9} \right)^{2n+1}.$$

$$6.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}.$$

$$6.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 2n + 7} \right)^{n+1}.$$

$$6.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n+2}.$$

$$6.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n.$$

$$6.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 18n - 15}{7n^2 + 11n + 15} \right)^{n+2}.$$

$$6.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$6.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 2} \right)^{2n^2}.$$

$$6.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}.$$

$$6.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 2n + 1} \right)^{3n^2-7}.$$

$$6.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n/6+1}.$$

$$6.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{1-2n}.$$

Задача 7. Доказать (найти $d(e)$), что:

$$7.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$$

$$7.15. \lim_{x \rightarrow -7/2} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}.$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3.$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19.$$

$$7.31. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8.$$

Задача 8. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $d(e)$).

8.1. $f(x) = 5x^2 - 1, x_0 = 6.$

8.2. $f(x) = 4x^2 - 2, x_0 = 5.$

8.3. $f(x) = 3x^2 - 3, x_0 = 4.$

8.4. $f(x) = 2x^2 - 4, x_0 = 3.$

8.5. $f(x) = -2x^2 - 5, x_0 = 2.$

8.6. $f(x) = -3x^2 - 6, x_0 = 1.$

8.7. $f(x) = -4x^2 - 7, x_0 = 1.$

8.8. $f(x) = -5x^2 - 8, x_0 = 2.$

8.9. $f(x) = -5x^2 - 9, x_0 = 3.$

8.10. $f(x) = -4x^2 + 9, x_0 = 4.$

8.11. $f(x) = -3x^2 + 8, x_0 = 5.$

8.12. $f(x) = -2x^2 + 7, x_0 = 6.$

8.13. $f(x) = 2x^2 + 6, x_0 = 7.$

8.14. $f(x) = 3x^2 + 5, x_0 = 8.$

8.15. $f(x) = 4x^2 + 4, x_0 = 9.$

8.16. $f(x) = 5x^2 + 3, x_0 = 8.$

8.17. $f(x) = 5x^2 + 1, x_0 = 7.$

8.18. $f(x) = 4x^2 - 1, x_0 = 6.$

8.19. $f(x) = 3x^2 - 2, x_0 = 5.$

8.20. $f(x) = 2x^2 - 3, x_0 = 4.$

8.21. $f(x) = -2x^2 - 4, x_0 = 3.$

8.22. $f(x) = -3x^2 - 5, x_0 = 2.$

8.23. $f(x) = -4x^2 - 6, x_0 = 1.$

8.24. $f(x) = -5x^2 - 7, x_0 = 1.$

8.25. $f(x) = -4x^2 - 8, x_0 = 2.$

8.26. $f(x) = -3x^2 - 9, x_0 = 3.$

8.27. $f(x) = -2x^2 + 9, x_0 = 4.$

8.28. $f(x) = 2x^2 + 8, x_0 = 5.$

8.29. $f(x) = 3x^2 + 7, x_0 = 6.$

8.30. $f(x) = 4x^2 + 6, x_0 = 7.$

8.31. $f(x) = 5x^2 + 5, x_0 = 8.$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

9.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}.$

9.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}.$

9.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$

9.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$

$$9.5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}.$$

$$9.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}.$$

$$9.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$9.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}.$$

$$9.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}.$$

$$9.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

$$9.19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

$$9.21. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$9.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$$

$$9.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$9.27. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$9.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$9.31. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}.$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$9.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$$

$$9.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$9.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}.$$

$$9.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

$$9.18. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}.$$

$$9.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}.$$

$$9.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$9.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$9.26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$$

$$9.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5}.$$

$$9.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}.$$

Задача 10. Вычислить пределы функций.

$$10.1 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

$$10.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

$$10.3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$10.4 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

$$10.5 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

$$10.6 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

$$10.7 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$10.8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}.$$

$$10.9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}.$$

$$10.10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$10.11 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

$$10.13 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.14 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}.$$

$$10.15 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.16 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}.$$

$$10.17 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.18 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}.$$

$$10.19 \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.20 \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.21 \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$10.22 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}.$$

$$10.23 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}.$$

$$10.24 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}.$$

$$10.25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$10.26 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$10.27 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 4)^2}}.$$

$$10.28 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3} + 8}.$$

$$10.29 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 16}}.$$

$$10.30 \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$10.31 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}.$$

Задача 11. Вычислить пределы функций.

$$11.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}.$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}.$$

$$11.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}.$$

$$11.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}.$$

$$11.5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(p(2+x))}.$$

$$11.6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}[2p(x+1/2)]}.$$

$$11.7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}.$$

$$11.8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}.$$

$$11.9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$11.10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2p(x+10))}.$$

$$11.11 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(p(x+7))}.$$

$$11.12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+5p/2)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}.$$

$$11.13 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$11.14 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos[p(x+1)/2]}.$$

$$11.15 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + px}.$$

$$11.16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3\operatorname{arctg} x}.$$

$$11.17 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin[p(x+1)]}{\ln(1+2x)}.$$

$$11.18 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}.$$

$$11.19 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin[p(x+2)]}.$$

$$11.20 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5(x+p)]}{e^{3x} - 1}.$$

$$11.21 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}.$$

$$11.23 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(p(x/2 + 1))}.$$

$$11.25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - tg^2 x}{x^4}.$$

$$11.27 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}.$$

$$11.29 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(p(1 + x/2))}{\ln(x + 1)}.$$

$$11.31 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}.$$

$$11.22 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2.$$

$$11.24 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}.$$

$$11.26 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}.$$

$$11.28 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$11.30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{px} - 1)}{3(\sqrt[3]{1 + x} - 1)}.$$

Задача 12. Вычислить пределы функций.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

$$12.3 \lim_{x \rightarrow p} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}.$$

$$12.5 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos px}{tg^2 px}.$$

$$12.7 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x^2 - tg^2 x}{(x - p)^4}.$$

$$12.9 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$12.11 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7px}{\sin 8px}.$$

$$12.13 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin px}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$$

$$12.4 \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \sin 2x}{(p - 4x)^2}.$$

$$12.6 \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{tg 3x}{tg x}.$$

$$12.8 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{tg px}.$$

$$12.10 \lim_{x \rightarrow 2p} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4p^2}}.$$

$$12.12 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}.$$

$$12.14 \lim_{x \rightarrow p} \frac{x^2 - p^2}{\sin x}.$$

$$12.15 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} p x}.$$

$$12.16 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin p x}.$$

$$12.17 \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{\ln 2x - \ln p}{\sin(5x/2) \cos x}.$$

$$12.18 \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$12.19 \lim_{x \rightarrow p} \frac{e^p - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}.$$

$$12.20 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2p x}.$$

$$12.21 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}.$$

$$12.22 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$$

$$12.23 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} p x}{x + 2}.$$

$$12.24 \lim_{x \rightarrow p} \frac{1 - \sin(x/2)}{p - x}.$$

$$12.25 \lim_{x \rightarrow p/3} \frac{1 - 2 \cos x}{p - 3x}.$$

$$12.26 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3p x}.$$

$$12.27 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin p x}.$$

$$12.28 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(p x/2)}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$12.29 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3p x}.$$

$$12.30 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$12.31 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

Задача 13. Вычислить пределы функций.

$$13.1. \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - 1)^2}{e^{\sin p x} - e^{-\sin 3p x}}.$$

$$13.3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x - 3})}{\sin(p x/2) - \sin[(x - 1)p]}.$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x - 1)}.$$

$$13.5. \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}.$$

$$13.6. \lim_{x \rightarrow p/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - p)^2}.$$

$$13.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1 + x})}{\ln(x - 1) - \ln(x + 1) + \ln 2}.$$

$$13.8. \lim_{x \rightarrow 2p} \frac{(x - 2p)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}.$$

$$13.9. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos px}-1}.$$

$$13.11 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin px} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}.$$

$$13.13 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}.$$

$$13.15 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+\ln^2 x} - 1}{1 + \cos px}.$$

$$13.17 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin px} - 1}.$$

$$13.19 \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln(2x/p)}.$$

$$13.21 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{x^3 - 1}.$$

$$13.23 \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x^3 - p^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}.$$

$$13.25 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}.$$

$$13.27 \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2-a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln(x/a)}.$$

$$13.29 \lim_{x \rightarrow ap} \frac{\ln(\cos(x/2) + 2)}{a^{a^2 p^2/x^2 - ap/x} - a^{ap/x-1}}.$$

$$13.31 \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sin(x^2/p)}{2^{\sqrt{\sin x+1}} - 2}.$$

$$13.10 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9}.$$

$$13.12 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\ln \cos 2x}{(1-p/x)^2}.$$

$$13.14 \lim_{x \rightarrow 2p} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}.$$

$$13.16 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cos(x/2)}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}.$$

$$13.18 \lim_{x \rightarrow p/3} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}.$$

$$13.20 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2}.$$

$$13.22 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}.$$

$$13.24 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}} - e}.$$

$$13.26 \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{\ln \sin x}{(2x-p)^2}.$$

$$13.28 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2}} - e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\arctg(x+3)}.$$

$$13.30 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg}(3^{p/x} - 3)}{3^{\cos(3x/2)} - 1}.$$

Задача 14. Вычислить пределы функций.

$$14.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}.$$

$$14.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}.$$

$$14.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}.$$

$$14.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\arctg x + x^3}.$$

$$14.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}.$$

$$14.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}.$$

$$14.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}.$$

$$14.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}.$$

$$14.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \arctg x}.$$

$$14.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}.$$

$$17.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}.$$

$$14.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}.$$

$$14.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}.$$

$$14.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\arctg 2x - 7x}.$$

$$14.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}.$$

$$14.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}.$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}.$$

$$14.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\arctg x - x^2}.$$

$$14.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \arctg x - \sin x}.$$

$$14.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}.$$

$$14.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}.$$

$$14.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}.$$

$$14.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}.$$

$$14.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$14.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}.$$

$$14.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$14.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$14.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}.$$

$$14.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}.$$

$$14.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

$$14.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}.$$

Задача 15. Вычислить пределы функций.

$$15.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}.$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$15.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}.$$

$$15.4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{\ln x - \ln a}.$$

$$15.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

$$15.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}.$$

$$15.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$$

$$15.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x + e^{-x})}{e^{x^3} - e}.$$

$$15.9. \lim_{x \rightarrow p/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(p - 3x)}.$$

$$15.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin px}.$$

$$15.11. \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$15.12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}.$$

$$15.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}.$$

$$15.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}.$$

$$15.15. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2 \ln x}{h^2}, \quad x > 0.$$

$$15.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}.$$

$$15.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$15.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}.$$

$$15.19. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}.$$

$$15.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}.$$

$$15.21. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}.$$

$$15.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$15.23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin px}.$$

$$15.24. \lim_{x \rightarrow p/6} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}.$$

$$15.25. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$15.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}.$$

$$15.29. \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

$$15.31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}.$$

$$15.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}.$$

$$15.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(p/4 + ax))}.$$

$$15.30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} px}.$$

Задача 16. Вычислить пределы функций.

$$16.1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + x^3))^{\frac{3}{x^2 \arcsin x}}.$$

$$16.2. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}.$$

$$16.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{1/x^2}.$$

$$16.4. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}})^{2/\sin x}.$$

$$16.5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos ax}{1 + \sin x \cos bx} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}.$$

$$16.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{1/\sin^2 3x}.$$

$$16.7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x}))^{x/\sin^4 \sqrt[3]{x}}.$$

$$16.8. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}})^{3/x}.$$

$$16.9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos px)^{1/(x \sin px)}.$$

$$16.10. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{1/\ln \cos x}.$$

$$16.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{p}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$16.12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin^2 x)^{1/\ln(1+px^3)}.$$

$$16.13. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{\arcsin x^3})^{(\operatorname{cosec}^2 x)/x}.$$

$$16.14. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}.$$

$$16.15. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} px}.$$

$$16.16. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}.$$

$$16.17. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2(p x/3))}.$$

$$16.18. \lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2 \cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}.$$

$$16.19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - 3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln \cos x}.$$

$$16.20. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x^2]{2 - \cos x}.$$

$$16.21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$16.22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}.$$

$$16.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos 2x}{1 + \sin x \cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}.$$

$$16.24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - e^{x^2}\right)^{1/(1 - \cos px)}.$$

$$16.25. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \ln \frac{1}{3} \operatorname{arctg}^6 \sqrt{x}\right)^{1/x^3}.$$

$$16.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x}\right)^{1/x^3}.$$

$$16.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 3^x}{1 + x \cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$16.28. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln(1+3x^2)}.$$

$$16.29. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$16.30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}.$$

$$16.31. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x^2 \cdot 2^x}{1 + x^2 \cdot 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}.$$

Задача 17. Вычислить пределы функций.

$$17.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

$$17.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x.$$

$$17.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}.$$

$$17.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x}\right)^{\cos^2(p/4+x)}.$$

$$17.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x+3}.$$

$$17.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 2}\right)^{x^2+3}.$$

$$17.7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}.$$

$$17.8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}.$$

$$17.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^3} - 1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}.$$

$$17.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}.$$

$$17.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}.$$

$$17.12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{6/(1+x)}.$$

$$17.13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^{x^2}.$$

$$17.14. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(x+3))^{x+2}.$$

$$17.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x + 10} \right)^{x+2}.$$

$$17.16. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x+2))^{3/(3+x)}.$$

$$17.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{2x} - 1}{x} \right)^{x+1}.$$

$$17.18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + 5}{x + 10} \right)^{4/(x+2)}.$$

$$17.19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}.$$

$$17.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{2/(x+1)}.$$

$$17.21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right)^{3/(x+8)}.$$

$$17.22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{p} \right)^{1+x}.$$

$$17.23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{2/(x+5)}.$$

$$17.24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x}{x} \right)^{x+2}.$$

$$17.25. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\cos x^4}.$$

$$17.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{1/(x+6)}.$$

$$17.27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{p}{4} - x \right) \right)^{(e^x - 1)/x}.$$

$$17.28. \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$17.29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 8x}{2 + 11x} \right)^{1/(x^2+1)}.$$

$$17.30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x} \right)^{2x+1}.$$

$$17.31. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 4}{x^3 + 9} \right)^{1/(x+2)}.$$

Задача 18. Вычислить пределы функций.

$$18.1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

$$18.2. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}.$$

$$18.3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

$$18.4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{1/(x-2)}.$$

$$18.5. \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}.$$

$$18.6. \lim_{x \rightarrow p/4} (\operatorname{tg} x)^{1/\cos(3p/4-x)}.$$

$$18.7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

$$18.8. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{px}{2a}}.$$

$$18.9. \lim_{x \rightarrow 2p} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x/\sin 3x}.$$

$$18.10. \lim_{x \rightarrow 2p} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}.$$

$$18.11. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{px}{6}}.$$

$$18.12. \lim_{x \rightarrow 4p} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x/\sin 4x}.$$

$$18.13. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{px}{2}}.$$

$$18.14. \lim_{x \rightarrow 4p} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}.$$

$$18.15. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{px}{6}}.$$

$$18.16. \lim_{x \rightarrow p/2} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x}.$$

$$18.17. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{x/(x-1)}.$$

$$18.18. \lim_{x \rightarrow p/2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1/(x-p/2)}.$$

$$18.19. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{(3x-1)/(x-1)}.$$

$$18.20. \lim_{x \rightarrow p/2} (1 + \cos 3x)^{\sec x}.$$

$$18.21. \lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{(3x+2)/(x-2)}.$$

$$18.22. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}.$$

$$18.23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}.$$

$$18.24. \lim_{x \rightarrow p/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}.$$

$$18.25. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin(px/2)}{\ln(2-x)}}.$$

$$18.26. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}.$$

$$18.27. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}.$$

$$18.29. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}.$$

$$18.31. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}.$$

$$18.28. \lim_{x \rightarrow p/2} (\sin x)^{\frac{18 \sin}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$18.30. \lim_{x \rightarrow p} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{1/\cos(x/2)}.$$

Задача 19. Вычислить пределы функций.

$$19.1. \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e} \right)^{\sin \frac{p}{2e} x}.$$

$$19.2. \lim_{x \rightarrow p/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$19.3. \lim_{x \rightarrow p/4} \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} \right)^{1/(x+p/4)}.$$

$$19.4. \lim_{x \rightarrow 2} (\sin x)^{3/(1+x)}.$$

$$19.5. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin 3px}{\sin px} \right)^{\sin^2(x-2)}.$$

$$19.6. \lim_{x \rightarrow p/6} (\sin x)^{6x/p}.$$

$$19.7. \lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin px}.$$

$$19.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-x^2)/(1-x)}.$$

$$19.9. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + e^x)^{\frac{\sin px}{1-x}}.$$

$$19.10. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{tg} 9px}{\sin 4px} \right)^{x/(x+1)}.$$

$$19.11. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3px} \right)^{x^2-8}.$$

$$19.12. \lim_{x \rightarrow p/4} (\sin 2x)^{\frac{x^2-p^2/16}{x-p/4}}.$$

$$19.13. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-3/4}{(x-1)^2} \right)^{x+1}.$$

$$19.14. \lim_{x \rightarrow p} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\sin(x-p)}.$$

$$19.15. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x - \sin a}{x - a} \right)^{x^2/a^2}.$$

$$19.16. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \right)^{1/x}.$$

$$19.17. \lim_{x \rightarrow p/4} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{tg} x}.$$

$$19.18. \lim_{x \rightarrow p/8} (\operatorname{tg} 2x)^{\sin(p/8+x)}.$$

$$19.19. \lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$19.21. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}.$$

$$19.23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right)^{1/x^2}.$$

$$19.25. \lim_{x \rightarrow 2} (\cos px)^{\operatorname{tg}(x-2)}.$$

$$19.27. \lim_{x \rightarrow p/2} (\cos x + 1)^{\sin x}.$$

$$19.29. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} \right)^{1/(2-x)}.$$

$$19.31. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{2x} - e^2}{x - 1} \right)^{x+1}.$$

$$19.20. \lim_{x \rightarrow p} (x + \sin x)^{\sin x + x}.$$

$$19.22. \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)^{p/\operatorname{arctg} x}.$$

$$19.24. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{\sin px} - 1}{x - 1} \right)^{x^2+1}.$$

$$19.26. \lim_{x \rightarrow 1/2} (\arcsin x + \arccos x)^{1/x}.$$

$$19.28. \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} + x - 1)^{\sin(px/4)}.$$

$$19.30. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 + \cos px}{\operatorname{tg}^2 px} \right)^{x^2}.$$

Задача 20. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

$$20.1. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos 3x + x \operatorname{arctg}(1/x)}.$$

$$20.2. \lim_{x \rightarrow p/2} \sqrt{3 \sin x + (2x - p) \sin \frac{x}{2x - p}}.$$

$$20.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^3 - 7}}.$$

$$20.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cos(1/x) + \lg(2 + x)}{\lg(4 + x)}.$$

$$20.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} + \sin \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \cos n}{1 + \cos(1/n)}.$$

$$20.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2 + n^5} - \sqrt{2n^3 + 3}}{(n + \sin n) \sqrt{7n}}.$$

$$20.7. \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x - p) \cos \frac{x}{4x - p}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)}.$$

$$20.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{n^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + 1} \right).$$

$$20.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{3n^5 - 7}}{(n^2 - n \cos n + 1) \sqrt{n}}.$$

$$20.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \sin n + \sqrt{n - 1}}{n + \sqrt{n + 1}}.$$

$$20.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos n) \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1} - 1}.$$

$$20.12. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(2 + \sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{1}{x}} \right).$$

$$20.13. \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{1 + \cos px}{4 + (x+2) \sin \frac{x}{x+2}}}.$$

$$20.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^4 - 3} + \sin n}.$$

$$20.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + \cos n} + \sqrt{3n^2 + 2}}{\sqrt[5]{n^6 + 1}}.$$

$$20.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}} + 3}{2 - \lg(1 + \sin x)}.$$

$$20.17. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot \sin^2 \frac{1}{x} + 5 \cos x}.$$

$$20.18. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos x + \sin \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)}.$$

$$20.19. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 \cos^2 x + (e^x - 1) \sin \frac{1}{x}}.$$

$$20.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln \left(e + x \sin \frac{1}{x} \right)}{\cos x + \sin x}.$$

$$20.21. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[\left(e^{x^2} - \cos x \right) \cos \frac{1}{x} + \operatorname{tg} \left(x + \frac{p}{3} \right) \right].$$

$$20.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \ln(1+x) \sqrt{2 + \cos \frac{1}{x}}}{2 + e^x}.$$

$$20.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2px}{2 + (e^{\sqrt{x-1}} - 1) \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-1}}.$$

$$20.24. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1) \cos \frac{1}{x} + 4 \cos x}.$$

$$20.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1+x)}{\left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) + 2}.$$

$$20.26. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\lg(x+2) + \sin \sqrt{4-x^2}} \cos \frac{x+2}{x-2}.$$

$$20.27. \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{2 + \cos x \sin \frac{2}{2x-p}}{3 + 2x \sin x}.$$

$$20.28. \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \left(\cos x + \sin \frac{x-1}{x+1} \cos \frac{x+1}{x-1} \right).$$

$$20.29. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) + 4 \cos x}.$$

$$20.30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x + \sin px \cdot \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}}{1 + \cos x}.$$

20.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt[3]{2n^2 + 1}}{n + 2 \sin n}.$

II. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Теоретические вопросы

1. Понятие производной. Производная функции x^n .
2. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
3. Понятие дифференцируемости функции и дифференциала. Условия дифференцируемости. Связь дифференциала с производной.
4. Геометрический смысл дифференциала.
5. Непрерывность дифференцируемой функции.
6. Дифференцирование постоянной и суммы, произведения и частного.
7. Производная сложной функции.
8. Инвариантность формы дифференциала.
9. Производная обратной функции.
10. Производные обратных тригонометрических функций.
11. Гиперболические функции, их производные.
12. Производные высших порядков, формула Лейбница.
13. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов порядка выше первого.
14. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Теоретические упражнения

1. Исходя из определения производной, доказать, что
 - а. а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;
 - б. б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;
 - в. в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.
2. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $f(0)=0$, то
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$
3. Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

$$4. f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5. Доказать, что производная от функции

$$6. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

7. разрывна в точке $x = 0$.

8. Доказать приближенную формулу

$$a. \sqrt{a^2 + z} \approx a + z/(2a), \quad a > 0, \quad |z| \ll a.$$

9. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x) + g(x)$ в точке $x = x_0$ если в этой точке:

10.а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема;

11.б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы.

12. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0 .

13. Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)g(x)$ в предположениях задачи?

а. Рассмотреть примеры:

б. а) $f(x) = x, \quad g(x) = |x|, \quad x_0 = 0;$

с. $f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

д. б) $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|, \quad x_0 = 0;$

е. $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x| + 1, \quad x_0 = 0.$

14. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\dots(x+1234567)$.

15. Выразить дифференциал $d^3 y$ от сложной функции $y[u(x)]$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

16. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y'' .

Расчетные задания

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.2. f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{9x}\right) + \frac{2}{3}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.3. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.4. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.5. f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.6. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right)} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.7. f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x^2 \sin \frac{5}{x}} - 1\right) + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.8. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.9. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3x} \right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.10. f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos \frac{5}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.11. f(x) = \begin{cases} x + \arcsin \left(x^2 \sin \frac{6}{x} \right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.12. f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \left(2^{x^2 \cos(1/8x)} - 1 + x \right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.13. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.14. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos \frac{1}{9x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.15. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2 \frac{11}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.16. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.17. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.18. f(x) = \begin{cases} 6x + x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.19. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.20. f(x) = \begin{cases} e^{x \sin \frac{5}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.21. f(x) = \begin{cases} 3^{x^2 \sin \frac{2}{x}} - 1 + 2x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.22. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + 3x^2 \cos \frac{2}{x}\right)} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.23. f(x) = \begin{cases} e^{x \sin \frac{3}{5x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.24. f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 2^{\sin x}}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.25. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2} - x^2 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.26. f(x) = \begin{cases} e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2}{x}\right)} - 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.27. f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x^3 \sin \frac{5}{x}} - 1 + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.28. f(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.29. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2 + x^3)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.30. f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.31. f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1 – 2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13 – 2.31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0 .

2.1. $y = (4x - x^2)/4, \quad x_0 = 2.$

2.2. $y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2.$

2.3. $y = x - x^3, \quad x_0 = -1.$

2.4. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4.$

2.5. $y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1.$

2.6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8.$

2.7. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$

2.8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16.$

2.9. $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$

2.10. $y = (x^2 - 3x + 6)/x^2, \quad x_0 = 3.$

2.11. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64.$

2.12. $y = (x^3 + 2)/(x^3 - 2), \quad x_0 = 2.$

2.13. $y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1.$

2.14. $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1.$

2.15. $y = 2x + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$

2.16. $y = -2(x^8 + 2)/(3(x^4 + 1)), \quad x_0 = 1.$

2.17. $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1.$

2.18. $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, \quad x_0 = 1.$

2.19. $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$

2.20. $y = 1/(3x + 2), \quad x_0 = 2.$

2.21. $y = x/(x^2 + 1), \quad x_0 = -2.$

2.22. $y = (x^2 - 3x + 3)/3, \quad x_0 = 3.$

2.23. $y = 2x/(x^2 + 1), \quad x_0 = 1.$

2.24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$

2.25. $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, \quad x_0 = 1.$

2.26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1.$

2.27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$

2.28. $y = (3x - 2x^3)/3, \quad x_0 = 1.$

2.29. $y = x^2/10 + 3, \quad x_0 = 2.$

2.30. $y = (x^2 - 2x - 3)/4, \quad x_0 = 4.$

2.31. $y = 6\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x}/3, \quad x_0 = 1.$

Задача 3. Найти дифференциал dy .

$$3.1. y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad x > 0.$$

$$3.2. y = \operatorname{tg}\left(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2}\right), \quad x > 0.$$

$$3.3. y = \sqrt{1 + 2x} - \ln|x + \sqrt{1 + 2x}|.$$

$$3.4. y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$3.5. y = \arccos\left(1/\sqrt{1 + 2x^2}\right), \quad x > 0.$$

$$3.6. y = x \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}.$$

$$3.7. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \operatorname{lnch} x.$$

$$3.8. y = \arccos\left((x^2 - 1)/(x^2 \sqrt{2})\right).$$

$$3.9. y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right).$$

$$3.10. y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x.$$

$$3.11. y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$3.12. y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \operatorname{arcsine}^x.$$

$$3.13. y = x\sqrt{4 - x^2} + a \arcsin(x/2).$$

$$3.14. y = \operatorname{Intg}(x/2) - x/\sin x.$$

$$3.15. y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|.$$

$$3.16. y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3.$$

$$3.17. y = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x}\right|.$$

$$3.18. y = \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x - 2}}.$$

$$3.19. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}.$$

$$3.20. y = \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}.$$

$$3.21. y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right).$$

$$3.22. y = \ln|2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1|.$$

$$3.23. y = \ln|\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}.$$

$$3.24. y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x).$$

$$3.25. y = x(\sin \ln x - \cos \ln x).$$

$$3.26. y = \left(\sqrt{x - 1} - \frac{1}{2}\right) e^{2\sqrt{x-1}}.$$

$$3.27. y = \cos x \cdot \operatorname{Intg} x - \operatorname{Intg} \frac{x}{2}.$$

$$3.28. y = \sqrt{3 + x^2} - x \ln|x + \sqrt{3 + x^2}|.$$

$$3.29. y = \sqrt{x} - (1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$3.30. y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}.$$

$$3.31. y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|.$$

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

4.1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$

4.2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$

4.3. $y = \left(x + \sqrt{5 - x^2}\right)/2, \quad x = 0,98.$

4.4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$

4.5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$

4.6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97.$

4.7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$

4.8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97.$

4.9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021.$

4.10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$

4.11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998.$

4.12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$

4.13. $y = x^6, \quad x = 2,01.$

4.14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24.$

4.15. $y = x^7, \quad x = 1,996.$

4.16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$

4.17. $y = \sqrt{4x - 1}, \quad x = 2,56.$

4.18. $y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1,016.$

4.19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36.$

4.20. $y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4,16.$

4.21. $y = x^7, \quad x = 2,002.$

4.22. $y = \sqrt{4x - 3}, \quad x = 1,78.$

4.23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98.$

4.24. $y = x^5, \quad x = 2,997.$

4.25. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$

4.26. $y = x^4, \quad x = 3,998.$

4.27. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}, \quad x = 0,01.$

4.28. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0,01.$

4.29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin(px/2)}, \quad x = 1,02.$

4.30. $y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1,97.$

4.31. $y = 1/\sqrt{2x + 1}, \quad x = 1,58.$

Задача 5. Найти производную.

5.1. $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$

5.2. $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$

5.3. $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}.$

5.4. $y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}.$

$$5.5. y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}.$$

$$5.7. y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}.$$

$$5.9. y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}.$$

$$5.11. y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$5.13. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$5.15. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$$

$$5.17. y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}.$$

$$5.19. y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}.$$

$$5.21. y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}.$$

$$5.23. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

$$5.25. y = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)^2}}.$$

$$5.27. y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}.$$

$$5.6. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}.$$

$$5.8. y = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}.$$

$$5.10. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}.$$

$$5.12. y = \frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}.$$

$$5.14. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}.$$

$$5.16. y = \frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}.$$

$$5.18. y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}.$$

$$5.20. y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}.$$

$$5.22. y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}.$$

$$5.24. y = 3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}.$$

$$5.26. y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}.$$

$$5.28. y = \frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}.$$

$$5.29. y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}.$$

$$5.30. y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$5.31. y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Задача 6. Найти производную.

$$6.1. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$$

$$6.2. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8.$$

$$6.3. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}.$$

$$6.4. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}.$$

$$6.5. y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}.$$

$$6.6. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}.$$

$$6.7. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

$$6.8. y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}.$$

$$6.9. y = \frac{2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1})}{\ln 2}.$$

$$6.10. y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}.$$

$$6.11. y = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

$$6.12. y = \frac{e^{ax}(b \sin bx - a \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

$$6.13. y = e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right].$$

$$6.14. y = x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x).$$

$$6.15. y = x - 3 \ln \left[(1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}} \right] - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6}.$$

$$6.16. y = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}}.$$

$$6.17. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}.$$

$$6.18. y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}).$$

$$6.19. y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2.$$

$$6.20. y = \frac{e^{x^3}}{1 + x^3}.$$

$$6.21. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$$

$$6.22. y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right).$$

$$6.23. y = \ln \frac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1}.$$

$$6.24. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$6.25. y = \frac{e^x}{2} \left[(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x \right].$$

$$6.26. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}).$$

$$6.27. y = 3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120 \right).$$

$$6.28. y = -\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}.$$

$$6.29. y = \arcsin e^{-x} - \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$6.30. y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2).$$

$$6.31. y = \frac{e^{x^2}}{1 + x^2}.$$

Задача 7. Найти производную.

$$7.1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$$

$$7.2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

$$7.3. y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x}).$$

$$7.4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}.$$

$$7.5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$$

$$7.6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}.$$

$$7.7. y = \ln^2(x + \cos x).$$

$$7.8. y = \ln^3(1 + \cos x).$$

$$7.9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$$

$$7.11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

$$7.13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$7.15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x.$$

$$7.17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{x+1}.$$

$$7.19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$7.21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}.$$

$$7.23. y = \ln \left(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \right).$$

$$7.25. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$7.27. y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}.$$

$$7.29. y = \ln \ln \sin(1+1/x).$$

$$7.31. y = \ln \ln^2 \ln^3 x.$$

$$7.10. y = \operatorname{Intg} \left(\frac{p}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$7.12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + a^{p^{\sqrt{2}}}.$$

$$7.14. y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x.$$

$$7.16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2.$$

$$7.18. y = \lg \ln(\operatorname{ctg} x).$$

$$7.20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2 \operatorname{tg}^2 x} \right).$$

$$7.22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}.$$

$$7.24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}.$$

$$7.26. y = \ln \left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}} \right).$$

$$7.28. y = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}.$$

$$7.30. y = \ln \ln^3 \ln^2 x.$$

Задача 8. Найти производную.

$$8.1. y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$$

$$8.3. y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$$

$$8.5. y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}.$$

$$8.2. y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}.$$

$$8.4. y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}.$$

$$8.6. y = \frac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}.$$

$$8.7. y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}.$$

$$8.9. y = \operatorname{ctg}(\cos 2) + \frac{1}{6} \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}.$$

$$8.11. y = \frac{1}{3} \cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10} \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$$

$$8.13. y = 8 \sin(\operatorname{ctg} 3) + \frac{1}{5} \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$$

$$8.15. y = \frac{\cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}.$$

$$8.17. y = \frac{\operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}.$$

$$8.19. y = \frac{\operatorname{tg}(\ln 2) \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}.$$

$$8.21. y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}.$$

$$8.23. y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}.$$

$$8.25. y = \sin \ln 2 + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}.$$

$$8.27. y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}.$$

$$8.29. y = \cos^2 \sin 3 + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}.$$

$$8.31. y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}.$$

$$8.8. y = \cos(\operatorname{ctg} 2) - \frac{1}{16} \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}.$$

$$8.10. y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20} \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}.$$

$$8.12. y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}.$$

$$8.14. y = \frac{\cos(\operatorname{ctg} 3) \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}.$$

$$8.16. y = \frac{\sin\left(\operatorname{tg} \frac{1}{7}\right) \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}.$$

$$8.18. y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}.$$

$$8.20. y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

$$8.22. y = \cos(\ln 13) - \frac{1}{44} \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}.$$

$$8.24. y = \operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{48} \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}.$$

$$8.26. y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1}{52} \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}.$$

$$8.28. y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}.$$

$$8.30. y = \sin^3 \cos 2 - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}.$$

Задача 9. Найти производную.

$$9.1. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$9.2. y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}.$$

$$9.3. y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}.$$

$$9.4. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}.$$

$$9.5. y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}.$$

$$9.6. y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}.$$

$$9.7. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$9.8. y = \frac{1}{2} (x-4) \sqrt{8x-x^2-7} - 9 \arccos \sqrt{\frac{x-1}{6}}.$$

$$9.9. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}.$$

$$9.10. y = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2}.$$

$$9.11. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$9.12. y = \frac{3+x}{2} \sqrt{x(2-x)} + 3 \arccos \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

$$9.13. y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}.$$

$$9.14. y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$9.15. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{\arccos x}{2x^2}.$$

$$9.16. y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}.$$

$$9.17. y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - 1.$$

$$9.18. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}.$$

$$9.19. y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$9.20. y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}}.$$

$$9.21. y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}.$$

$$9.22. y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$$

$$9.23. y = \sqrt{1-x^2} - x \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

$$9.24. y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$9.25. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

$$9.26. y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - x.$$

$$9.27. y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln(1-4x^2).$$

$$9.28. y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$9.29. y = (x + 2\sqrt{x} + 2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \sqrt{x}.$$

$$9.30. y = \sqrt{1+2x-x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x).$$

$$9.31. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2) + 1}{2}.$$

Задача 10. Найти производную.

$$10.1. y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \operatorname{th} x}{2 - \sqrt{5} \operatorname{th} x}.$$

$$10.2. y = \frac{\operatorname{sh} x}{4 \operatorname{ch}^4 x} + \frac{3 \operatorname{sh} x}{8 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$$

$$10.3. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x}.$$

$$10.4. y = \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2 - \operatorname{th}^2 x)}.$$

$$10.5. y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}.$$

$$10.6. y = -\frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$10.7. y = \frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}} \ln \frac{a + \sqrt{1+a^2} \operatorname{th} x}{a - \sqrt{1+a^2} \operatorname{th} x}.$$

$$10.8. y = \frac{1}{18\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{cth} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{cth} x}.$$

$$10.9. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}.$$

$$10.10. y = \frac{1}{6} \ln \frac{1 - \operatorname{sh} 2x}{2 + \operatorname{sh} 2x}.$$

$$10.11. y = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}.$$

$$10.13. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}.$$

$$10.15. y = \frac{1 + 8\operatorname{ch}^2 x \cdot \ln(\operatorname{ch} x)}{2\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$10.17. y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{th} x).$$

$$10.19. y = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln \frac{4 + \sqrt{8} \operatorname{th} \frac{x}{2}}{4 - \sqrt{8} \operatorname{th} \frac{x}{2}}.$$

$$10.21. y = -\frac{1}{4} \arcsin \frac{5 + 3\operatorname{ch} x}{3 + 5\operatorname{ch} x}.$$

$$10.23. y = \frac{2}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$$

$$10.25. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$10.27. y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$$

$$10.29. y = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \right].$$

$$10.31. y = \frac{2}{3} \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^3 x}.$$

$$10.12. y = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}.$$

$$10.14. y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}.$$

$$10.16. y = -\frac{12\operatorname{sh}^2 x + 1}{3\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$10.18. y = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{3 + \operatorname{ch} x}{1 + 3\operatorname{ch} x}.$$

$$10.20. y = \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{3 + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

$$10.22. y = \frac{1 - 8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}.$$

$$10.24. y = \frac{8}{3} \operatorname{cth} 2x - \frac{1}{3\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^3 x}.$$

$$10.26. y = \frac{3}{2} \ln \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) + \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$10.28. y = \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$$

$$10.30. y = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right).$$

Задача 11. Найти производную.

$$11.1. y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg} x)}.$$

$$11.2. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln(\sin \sqrt{x})}.$$

$$11.3. y = (\sin x)^{5e^x}.$$

$$11.4. y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

$$11.5. y = (\ln x)^{3^x}.$$

$$11.6. y = x^{\arcsin x}.$$

$$11.7. y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}.$$

$$11.8. y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$11.9. y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}.$$

$$11.10. y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

$$11.11. y = (x \sin x)^{8\ln(x \sin x)}.$$

$$11.12. y = (x - 5)^{\operatorname{ch} x}.$$

$$11.13. y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$11.14. y = x^{\sin x^3}.$$

$$11.15. y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}.$$

$$11.16. y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$11.17. y = (\sin x)^{5x/2}.$$

$$11.18. y = (x^2 + 1)^{\cos x}.$$

$$11.19. y = 19^{x^{19}} x^{19}.$$

$$11.20. y = x^{3^x} \cdot 2^x.$$

$$11.21. y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}.$$

$$11.22. y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$11.23. y = x^{e^{\cos x}}.$$

$$11.24. y = x^{2^x} \cdot 5^x.$$

$$11.25. y = x^{e^{\sin x}}.$$

$$11.26. y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}.$$

$$11.27. y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$11.28. y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}.$$

$$11.29. y = x^{29^x} \cdot 29^x.$$

$$11.30. y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}.$$

$$11.31. y = x^{e^x} x^9.$$

Задача 12. Найти производную.

$$12.1. y = \frac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^2}{16}\arcsin \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

$$12.2. y = \frac{4x + 1}{16x^2 + 8x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{2}}.$$

$$12.3. y = 2x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}\right) - e^{-2x} \arcsin\left(e^{2x}\right).$$

$$12.4. y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \operatorname{arctg}(3x - 2) - \ln\left(3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5}\right).$$

$$12.5. y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x - x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{2x - x^2}}{x-1}.$$

$$12.6. y = \frac{x^2}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81} (x^2 + 18) \sqrt{x^2 - 9}, \quad x > 0.$$

$$12.7. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2 - 2x + 1}.$$

$$12.8. y = 3x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}\right) - e^{-3x} \arcsin\left(e^{3x}\right).$$

$$12.9. y = \ln\left(4x - 1 + \sqrt{16x^2 - 8x + 2}\right) - \sqrt{16x^2 - 8x + 2} \operatorname{arctg}(4x - 1).$$

$$12.10. y = \ln \frac{1 + 2\sqrt{-x - x^2}}{2x + 1} + \frac{4}{2x + 1} \sqrt{-x - x^2}.$$

$$12.11. y = (2x + 3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x + 3} + \frac{2}{3} (4x^2 + 12x + 11) \sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x + 3 > 0.$$

$$12.12. y = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{2}}.$$

$$12.13. y = 5x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}\right) - e^{-5x} \arcsin\left(e^{5x}\right).$$

$$12.14. y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} \operatorname{arctg}(x - 4) - \ln\left(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17}\right).$$

$$12.15. y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2 - x} + \frac{2}{2 - x} \sqrt{-3 + 4x - x^2}.$$

$$12.16. y = (3x^2 - 4x + 2) \sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \arcsin \frac{1}{3x - 2}, \quad 3x - 2 > 0.$$

$$12.17. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3}.$$

$$12.18. y = \ln\left(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}\right) + \arcsin\left(e^{-5x}\right).$$

$$12.19. y = \ln\left(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10}\right) - \sqrt{4x^2 - 12x + 10} \operatorname{arctg}(2x - 3).$$

$$12.20. y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 - 4x - x^2}}{-x - 2} - \frac{2}{x + 2} \sqrt{-3 - 4x - x^2}.$$

$$12.21. y = \frac{2}{3} (4x^2 - 4x + 3) \sqrt{x^2 - x} + (2x - 1)^4 \arcsin \frac{1}{2x - 1}, \quad 2x - 1 > 0.$$

$$12.22. y = \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{2}}.$$

$$12.23. y = \arcsin(e^{-4x}) + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1}).$$

$$12.24. y = \ln(5x + \sqrt{25x^2 + 1}) - \sqrt{25x^2 + 1} \operatorname{arctg} 5x.$$

$$12.25. y = \frac{2}{3x - 2} \sqrt{-3 + 12x - 9x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 12x - 9x^2}}{3x - 2}.$$

$$12.26. y = (3x + 1)^4 \arcsin \frac{1}{3x + 1} + (3x^2 + 2x + 1) \sqrt{9x^2 + 6x}, \quad 3x + 1 > 0.$$

$$12.27. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + \frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3}.$$

$$12.28. y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}) + \arcsin(e^{-3x}).$$

$$12.29. y = \sqrt{49x^2 + 1} \operatorname{arctg} 7x - \ln(7x + \sqrt{49x^2 + 1}).$$

$$12.30. y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - 4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$$

$$12.31. y = \arcsin(e^{-2x}) + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}).$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \sqrt{1 - x^2}.$$

$$13.2. y = 4 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}.$$

$$13.3. y = x(2x^2 + 5) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$13.4. y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2}.$$

$$13.5. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x+1 > 0.$$

$$13.6. y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$13.7. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}, \quad 3x+4 > 0.$$

$$13.8. y = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$13.9. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}. \quad 13.10. y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}.$$

$$13.11. y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3 \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x}).$$

$$13.12. y = \ln \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$13.13. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$13.14. y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.15. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x+1 > 0.$$

$$13.16. y = (2+3x)\sqrt{x-1} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$13.17. y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1} + 1).$$

$$13.18. y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

$$13.19. y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - 1} \right) \operatorname{arctg} x.$$

$$13.20. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$$

$$13.21. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 13.22. y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2 + 4x - 5}.$$

$$13.23. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{5}}.$$

$$13.24. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$13.25. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$$

$$13.26. y = x^2 \arccos x - \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

$$13.27. y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2}}{x}.$$

$$13.28. y = \frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$13.29. y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.30. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$13.31. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

Задача 14. Найти производную.

$$14.1. y = \frac{1}{\sin a} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} a).$$

$$14.2. y = x \cos a + \sin a \ln \sin(x-a).$$

$$14.3. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sin \ln x - (\sqrt{2} - 1) \cdot \cos \ln x \right] x^{\sqrt{2}+1}.$$

$$14.4. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}} \right).$$

$$14.5. y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}.$$

$$14.6. y = (a^2 + b^2)^{-1/2} \cdot \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b} \right).$$

$$14.7. y = \frac{7^x (3 \sin 3x + \cos 3x \cdot \ln 7)}{9 + \ln^2 7}.$$

$$14.8. y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$14.9. y = \frac{1}{a(1+a^2)} \left[\operatorname{arctg}(a \cos x) + a \operatorname{Intg} \frac{x}{2} \right].$$

$$14.10. y = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

$$14.11. y = (1 + x^2) e^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$14.12. y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}.$$

$$14.13. y = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \frac{a}{2}}{1 - x^2}.$$

$$14.14. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}}{x}, \quad x > 0.$$

$$14.15. y = \frac{6^x (\sin 4x \cdot \ln 6 - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 6}.$$

$$14.16. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

$$14.17. y = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x}{\sqrt{9 \cos^2 x - 4}}.$$

$$14.18. y = \frac{5^x (2 \sin 2x + \cos 2x \cdot \ln 5)}{4 + \ln^2 5}.$$

$$14.19. y = \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x}.$$

$$14.20. y = \frac{3^x (4 \sin 4x + \ln 3 \cdot \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}.$$

$$14.21. y = \frac{4^x (\ln 4 \cdot \sin 4x - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 4}.$$

$$14.22. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \operatorname{Intg} \frac{x}{2}.$$

$$14.23. y = \frac{5^x (\sin 3x \cdot \ln 5 - 3 \cos 3x)}{9 + \ln^2 5}.$$

$$14.24. y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{\frac{x}{2}} \operatorname{arctge}^{\frac{x}{2}}.$$

$$14.25. y = \frac{2^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 2)}{1 + \ln^2 2}.$$

$$14.26. y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} a)}{\sin a}.$$

$$14.27. y = 2 \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$14.28. y = \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}}.$$

$$14.29. y = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \sin 2x - 2 \cos 2x)}{\ln^2 3 + 4}.$$

$$14.30. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}.$$

$$14.31. y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}}.$$

Задача 15. Найти производную y'_x .

$$15.1. \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right). \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1 + t}. \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - t)^2}}. \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln(\operatorname{tge}^t). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = \operatorname{arctge}^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}, \\ y = \arcsin \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{1 - t^2}), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$15.17. \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$15.19. \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$15.21. \begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.23. \begin{cases} x = \ln(1 - t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}}, \\ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$$

$$15.27. \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$15.29. \begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \cdot \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = \ln \frac{1 - t}{1 + t}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$15.18. \begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}. \end{cases}$$

$$15.20. \begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$$

$$15.22. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t + 1}. \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{t + 1}{t - 1}, \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$15.26. \begin{cases} x = \sqrt{t - t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1 - t} \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$$

$$15.58. \begin{cases} x = \frac{t^2 \ln t}{1 - t^2} + \ln \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$15.30. \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$$

$$15.31. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке соответствующей значению параметра $t = t_0$.

$$16.1. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = p/3. \end{cases}$$

$$16.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = p/3. \end{cases}$$

$$16.3. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = p/3. \end{cases}$$

$$16.4. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.5. \begin{cases} x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.6. \begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$16.7. \begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \quad t_0 = p/4. \end{cases}$$

$$16.8. \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.9. \begin{cases} x = 2 \ln(\operatorname{ctg} t) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = p/4. \end{cases}$$

$$16.10. \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.11. \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \quad t_0 = p/2. \end{cases}$$

$$16.12. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = p/6. \end{cases}$$

$$16.13. \begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.14. \begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.15. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.16. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = p/6. \end{cases}$$

$$16.17. \begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t_0 = p/4. \end{cases}$$

$$16.18. \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$16.19. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.20. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.21. \begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.22. \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16.23. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad t_0 = p/4. \end{cases}$$

$$16.24. \begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.25. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$16.26. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -p/3. \end{cases}$$

$$16.27. \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = p/4. \end{cases}$$

$$16.28. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$$

$$16.29. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$16.30. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = p/6. \end{cases}$$

$$16.31. \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Задача 17. Найти производную n -го порядка.

$$17.1. y = x e^{ax}.$$

$$17.2. y = \sin 2x + \cos(x+1).$$

$$17.3. y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}.$$

$$17.5. y = \lg(5x+2).$$

$$17.7. y = \frac{x}{2(3x+2)}.$$

$$17.9. y = \sqrt{x}.$$

$$17.11. y = 2^{3x+5}.$$

$$17.13. y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}.$$

$$17.15. y = \lg(3x+1).$$

$$17.17. y = \frac{x}{9(4x+9)}.$$

$$17.19. y = \frac{4}{x}.$$

$$17.21. y = a^{2x+3}.$$

$$17.23. y = \sqrt{e^{3x+1}}.$$

$$17.25. y = \lg(2x+7).$$

$$17.27. y = \frac{x}{x+1}.$$

$$17.29. y = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$17.31. y = 3^{2x+5}.$$

$$17.4. y = \frac{4x+7}{2x+3}.$$

$$17.6. y = a^{3x}.$$

$$17.8. y = \lg(x+4).$$

$$17.10. y = \frac{2x+5}{13(3x+1)}.$$

$$17.12. y = \sin(x+1) + \cos 2x.$$

$$17.14. y = \frac{4+15x}{5x+1}.$$

$$17.16. y = 7^{5x}.$$

$$17.18. y = \lg(1+x).$$

$$17.20. y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}.$$

$$17.22. y = \sin(3x+1) + \cos 5x.$$

$$17.24. y = \frac{11+12x}{6x+5}.$$

$$17.26. y = 2^{kx}.$$

$$17.28. y = \log_3(x+5).$$

$$17.30. y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}.$$

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

$$18.1. y = (2x^2 - 7)\ln(x-1), \quad y^V = ?$$

$$18.2. y = (3 - x^2)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$$

$$18.3. y = x \cos x^2, \quad y''' = ?$$

$$18.5. y = \frac{\log_2 x}{x^3}, \quad y''' = ?$$

$$18.7. y = x^2 \sin(5x-3), \quad y''' = ?$$

$$18.9. y = (2x+3) \ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$18.11. y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.13. y = e^{1-2x} \cdot \sin(2+3x), \quad y^{IV} = ?$$

$$18.15. y = (2x^3 + 1) \cos x, \quad y^V = ?$$

$$18.17. y = (1-x-x^2) e^{(x-1)/2}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.19. y = (x+7) \ln(x+4), \quad y^V = ?$$

$$18.21. y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}, \quad y''' = ?$$

$$18.23. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y''' = ?$$

$$18.25. y = (x^2 + 3x + 1) e^{3x+2}, \quad y^V = ?$$

$$18.27. y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y^V = ?$$

$$18.29. y = (5x-1) \ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$18.31. y = (x^3 + 3) e^{4x+3}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.4. y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y''' = ?$$

$$18.6. y = (4x^3 + 5) e^{2x+1}, \quad y^V = ?$$

$$18.8. y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.10. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x, \quad y''' = ?$$

$$18.12. y = (4x+3) \cdot 2^{-x}, \quad y^V = ?$$

$$18.14. y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}, \quad y''' = ?$$

$$18.16. y = (x^2 + 3) \ln(x-3), \quad y^{IV} = ?$$

$$18.18. y = \frac{1}{x} \sin 2x, \quad y''' = ?$$

$$18.20. y = (3x-7) \cdot 3^{-x}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.22. y = e^{x/2} \cdot \sin 2x, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.24. y = x \ln(1-3x), \quad y^{IV} = ?$$

$$18.26. y = (5x-8) \cdot 2^{-x}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18.28. y = e^{-x} \cdot (\cos 2x - 3 \sin 2x), \quad y^{IV} = ?$$

$$18.30. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$19.1. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$$

$$19.3. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$19.5. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.7. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

$$19.9. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$$

$$19.11. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

$$19.13. \begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$19.15. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$$

$$19.17. \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$

$$19.19. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

$$19.21. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$19.23. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$19.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$$

$$19.4. \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$$

$$19.6. \begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/(1+t^2). \end{cases}$$

$$19.8. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$$

$$19.10. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

$$19.12. \begin{cases} x = \cos t/(1+2\cos t), \\ y = \sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$$

$$19.14. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

$$19.16. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$19.18. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

$$19.20. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.22. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$19.24. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$$

$$19.25. \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

$$19.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$$

$$19.29. \begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2 + 1). \end{cases}$$

$$19.31. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$19.26. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$$

$$19.28. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$$

$$19.30. \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Задача 20. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению (1).

$$20.1. \begin{cases} y = x e^{-x^2/2}, \\ xy' = (1 - x^2)y. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.3. \begin{cases} y = 5e^{-2x} + e^x/3, \\ y' + 2y = e^x. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.5. \begin{cases} y = x\sqrt{1-x^2}, \\ yy' = x - 2x^3. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.7. \begin{cases} y = -\frac{1}{3x+c}, \\ y' = 3y^2. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.9. \begin{cases} y = \sqrt{x^2 - cx}, \\ (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.11. \begin{cases} y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}, \\ y' \sin x = y \ln y. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.2. \begin{cases} y = \frac{\sin x}{x}, \\ xy' + y = \cos x. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.4. \begin{cases} y = 2 + c\sqrt{1-x^2}, \\ (1-x^2)y' + xy = 2x. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.6. \begin{cases} y = \frac{c}{\cos x}, \\ y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.8. \begin{cases} y = \ln(c + e^x), \\ y' = e^{x-y}. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.10. \begin{cases} y = x(c - \ln x), \\ (x - y)dx + xdy = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.12. \begin{cases} y = \frac{1+x}{1-x}, \\ y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}. \end{cases} \quad (1)$$

$$20.13. \quad y = \frac{b+x}{1+bx}, \\ y - xy' = b(1+x^2y'). \quad (1)$$

$$20.15. \quad y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1}, \\ (1+e^x)yy' = e^x. \quad (1)$$

$$20.17. \quad y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}, \\ 1 + y^2 + xyy' = 0. \quad (1)$$

$$20.19. \quad y = a + \frac{7x}{ax+1}, \\ y - xy' = a(1+x^2y'). \quad (1)$$

$$20.21. \quad y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \\ 8xy' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}. \quad (1)$$

$$20.23. \quad y = \frac{2x}{x^3+1} + \frac{1}{x}, \\ x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}. \quad (1)$$

$$20.25. \quad y = -x\cos x + 3x, \\ xy' = y + x^2\sin x. \quad (1)$$

$$20.27. \quad y = \frac{x}{x-1} + x^2, \\ x(x-1)y' + y = x^2(2x-1). \quad (1)$$

$$20.14. \quad y = \sqrt[3]{2+3x-3x^2}, \\ yy' = \frac{1-2x}{y}. \quad (1)$$

$$20.16. \quad y = \operatorname{tg} \ln 3x, \\ (1+y^2)dx = xdy. \quad (1)$$

$$20.18. \quad y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}, \\ \ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0. \quad (1)$$

$$20.20. \quad y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{x} - 1}, \\ a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}y' = 0. \quad (1)$$

$$20.22. \quad y = (x+1)e^{x^2}, \\ y' - 2xy = 2xe^{x^2}. \quad (1)$$

$$20.24. \quad y = e^{x+x^2} + 2e^x, \\ y' - y = 2xe^{x+x^2}. \quad (1)$$

$$20.26. \quad y = 1/\sqrt{\sin x + x}, \\ 2\sin x \cdot y' + y\cos x = \\ = y^3(x\cos x - \sin x). \quad (1)$$

$$20.28. \quad y = \frac{x}{\cos x}, \\ y' - y \operatorname{tg} x = \sec x. \quad (1)$$

$$20.29. \quad y = (x+1)^n (e^x - 1),$$

$$y' - \frac{ny}{x+1} = e^x (1+x)^n. \quad (1)$$

$$20.31. \quad y = -\sqrt{x^4 - x^2},$$

$$xyy' - y^2 = x^4. \quad (1)$$

$$y = 2 \frac{\sin x}{x} + \cos x,$$

$$20.30. \quad x \sin x \cdot y' + (\sin x - x \cos x) y =$$

$$= \sin x \cdot \cos x - x. \quad (1)$$

III. ГРАФИКИ

Теоретические вопросы

1. Условия возрастания функции на отрезке.
2. Условия убывания функции на отрезке.
3. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
4. Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).
5. Наибольшее и наименьшее значения, функции, непрерывной на отрезке.
6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
7. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
8. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.
9. Асимптоты графика функции.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $[0, 2\pi]$; б) $[0, 4\pi]$ Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2. Доказать теорему: если функции $j(x)$ и $y(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и $j'(x) > y'(x) \forall x \in (a, b)$, а $j(a) = y(a)$, то $j(x) > y(x) \forall x \in (a, b)$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

У к а з а н и е. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x) = j(x) - y(x)$.

3. Доказать неравенство $2x/\pi < \sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x \in \left(0, \arccos \frac{2}{\pi}\right]$;

б) $\forall x \in \left[\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$в) \forall x \in \left(0, \frac{p}{2}\right).$$

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) = (x - x_0)^n j(x)$, считая что производная $j'(x)$ не существует, но функция $j(x)$ непрерывна в точке x_0 и $j(x_0) \neq 0$, n — натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции $x^3 - 3x + q$ и выяснить условия, при которых уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 14$ на отрезке $[0, 3]$, т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

Расчетные задания

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.

1.2. $y = 3x - x^3$.

1.3. $y = x^2(x - 2)^2$.

1.4. $y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9$.

1.5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$.

1.6. $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$.

1.7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

1.8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$.

$$1.9. y = (x-1)^2 (x-3)^2.$$

$$1.11. y = 6x - 8x^3.$$

$$1.13. y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$$

$$1.15. y = (2x+1)^2 (2x-1)^2.$$

$$1.17. y = 12x^2 - 8x^3 - 2.$$

$$1.19. y = 27(x^3 - x^2)/4 - 4.$$

$$1.21. y = x^2 (x-4)^2 / 16.$$

$$1.23. y = (16 - 6x^2 - x^3)/8.$$

$$1.25. y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9.$$

$$1.27. y = -(x-2)^2 (x-6)^2 / 16.$$

$$1.29. y = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)/8.$$

$$1.31. y = 16x^3 + 12x^2 - 5.$$

$$1.10. y = (x^3 + 3x^2)/4 - 5.$$

$$1.12. y = 16x^2 (x-1)^2.$$

$$1.14. y = 2 - 12x^2 - 8x^3.$$

$$1.16. y = 2x^3 + 9x^2 + 12x.$$

$$1.18. y = (2x-1)^2 (2x-3)^2.$$

$$1.20. y = x(12 - x^2)/8.$$

$$1.22. y = 27(x^3 + x^2)/4 - 5.$$

$$1.24. y = -(x^2 - 4)^2 / 16.$$

$$1.26. y = (6x^2 - x^3 - 16)/8.$$

$$1.28. y = 16x^3 - 12x^2 - 4.$$

$$1.30. y = -(x+1)^2 (x-3)^2 / 16.$$

Задача 2. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$$2.1. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$2.3. y = 12\sqrt[3]{6(x-2)^2} / (x^2 + 8).$$

$$2.5. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}.$$

$$2.7. y = 6\sqrt[3]{6(x-3)^2} / (x^2 - 2x + 9).$$

$$2.9. y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6.$$

$$2.11. y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

$$2.13. y = \sqrt[3]{x(x+2)}.$$

$$2.2. y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$$

$$2.4. y = -12\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (x^2 + 2x + 9).$$

$$2.6. y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}.$$

$$2.8. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$$

$$2.10. y = 6\sqrt[3]{6x^2} / (x^2 + 4x + 12).$$

$$2.12. y = 3\sqrt[3]{6(x-4)^2} / (x^2 - 4x + 12).$$

$$2.14. y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$$

$$2.15. y = -3\sqrt[3]{6(x+1)^2} / (x^2 + 6x + 17).$$

$$2.17. y = 3\sqrt[3]{6(x-5)^2} / (x^2 - 6x + 17).$$

$$2.19. y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$2.21. y = \sqrt[3]{4x(x-1)}.$$

$$2.23. y = \sqrt[3]{x(x-2)}.$$

$$2.25. y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x - 6.$$

$$2.27. y = 8x - 16 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

$$2.29. y = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16.$$

$$2.31. y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8.$$

$$2.16. y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8.$$

$$2.18. y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}.$$

$$2.20. y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}.$$

$$2.22. y = -3\sqrt[3]{6(x+2)^2} / (x^2 + 8x + 24).$$

$$2.24. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}.$$

$$2.26. y = 6\sqrt[3]{6(x+3)^2} / (x^2 + 10x + 33).$$

$$2.28. y = -6\sqrt[3]{6(x-6)^2} / (x^2 - 8x + 24).$$

$$2.30. y = 3\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (2(x^2 + 2x + 9)).$$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$3.1. y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1, 4].$$

$$3.2. y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad [1, 4].$$

$$3.3. y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad [0, 6].$$

$$3.4. y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, \quad [-3, 3].$$

$$3.5. y = 2\sqrt{x} - x, \quad [0, 4].$$

$$3.6. y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}, \quad [-1, 5].$$

$$3.7. y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad [1, 9].$$

$$3.8. y = \frac{10x}{1+x^2}, \quad [0, 3].$$

$$3.9. y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2, \quad [-3, 3].$$

$$3.10. y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, \quad [2, 4].$$

$$3.11. y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad [-1, 2].$$

$$3.12. y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}, \quad [-1, 6].$$

$$3.13. y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}, \quad [1, 4].$$

$$3.14. y = x - 4\sqrt{x+2} + 8, \quad [-1, 7].$$

$$3.15. y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}, \quad [1, 5].$$

$$3.16. y = \frac{4x}{4+x^2}, \quad [-4, 2].$$

$$3.17. y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, \quad [-4, -1].$$

$$3.18. y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}, \quad [-2, 4].$$

$$3.19. y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}, \quad [1, 4].$$

$$3.20. y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}, \quad [-5, 1].$$

$$3.21. y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, \quad [0, 4].$$

$$3.22. y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13, \quad [2, 5].$$

$$3.23. y = 2\sqrt{x-1} - x + 2, \quad [1, 5].$$

$$3.24. y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}, \quad [-3, 4].$$

$$3.25. y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5, \quad [-2, 1].$$

$$3.26. y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

$$3.27. y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3, \quad [-4, 2].$$

$$3.28. y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9, \quad [-1, 2].$$

$$3.29. y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15, \quad \left[-2, -\frac{1}{2}\right].$$

$$3.30. y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}, \quad [-2, 5].$$

$$3.31. y = -\frac{10x+10}{x^2+2x+2}, \quad [-1, 2].$$

Задача 4.

Варианты 1 – 10.

Рыбаку нужно переправиться с острова A на остров B (рис. 1). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега MN . Найти кратчайший путь рыбака $s = s_1 + s_2$.

$$4.1. a = 200, \quad b = 300, \quad H = 400, \quad h = 300, \quad L = 700.$$

$$4.2. a = 400, \quad b = 600, \quad H = 800, \quad h = 600, \quad L = 1400.$$

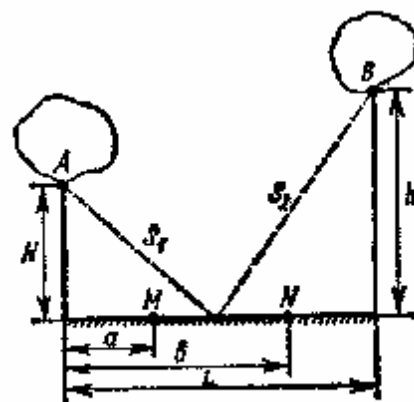


Рис. 1

$$4.3. a = 600, \quad b = 900, \quad H = 1200, \quad h = 900, \quad L = 2100.$$

$$4.4. a = 800, \quad b = 1200, \quad H = 1600, \quad h = 1200, \quad L = 2800.$$

$$4.5. a = 1000, \quad b = 1500, \quad H = 2000, \quad h = 1500, \quad L = 3500.$$

$$4.6. a = 400, \quad b = 500, \quad H = 300, \quad h = 400, \quad L = 700.$$

$$4.7. a = 800, \quad b = 1000, \quad H = 600, \quad h = 800, \quad L = 1400.$$

$$4.8. a = 1200, \quad b = 1500, \quad H = 900, \quad h = 1200, \quad L = 2100.$$

$$4.9. a = 1600, \quad b = 2000, \quad H = 1200, \quad h = 1600, \quad L = 2800.$$

$$4.10. a = 2000, \quad b = 2500, \quad H = 1500, \quad h = 2000, \quad L = 3500.$$

Варианты 11 – 20.

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает

at -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

$$4.11. k = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{49}.$$

$$4.12. k = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{81}.$$

$$4.13. k = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{121}.$$

$$4.14. k = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{169}.$$

$$4.15. k = 1, \quad a = \frac{1}{25}.$$

$$4.16. k = 1, \quad a = \frac{1}{16}.$$

$$4.17. k = 1, \quad a = \frac{1}{36}.$$

$$4.18. k = 1, \quad a = \frac{1}{49}.$$

$$4.19. k = 2, \quad a = \frac{1}{18}.$$

$$4.20. k = 2, \quad a = \frac{2}{49}.$$

Варианты 21 – 31.

Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты H м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с². Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха найти наибольшую кинетическую энергию тела.

$$4.21. H = 500.$$

$$4.22. H = 605.$$

$$4.23. H = 720.$$

$$4.24. H = 845.$$

$$4.25. H = 980.$$

$$4.26. H = 1125.$$

$$4.27. H = 1280.$$

$$4.28. H = 1445.$$

$$4.29. H = 1620.$$

$$4.30. H = 1805.$$

$$4.31. H = 2000.$$

Задача 5. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

5.1. $y = x^2 - 4x - (x - 2)\ln(x - 1), \quad x_0 = 2.$

5.2. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2), \quad x_0 = 2.$

5.3. $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, \quad x_0 = 2.$

5.4. $y = 2\ln(x + 1) - 2x + x^2 + 1, \quad x_0 = 0.$

5.5. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x - 1), \quad x_0 = 1.$

5.6. $y = \cos^2(x + 1) + x^2 + 2x, \quad x_0 = -1.$

5.7. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1.$

5.8. $y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x + 1), \quad x_0 = -1.$

5.9. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}, \quad x_0 = -2.$

5.10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}, \quad x_0 = -1.$

5.11. $y = (x + 1)\sin(x + 1) - 2x - x^2, \quad x_0 = -1.$

5.12. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3, \quad x_0 = 1.$

5.13. $y = 2x + x^2 - (x + 1)\ln(2 + x), \quad x_0 = -1.$

5.14. $y = \sin^2(x + 1) - 2x - x^2, \quad x_0 = -1.$

5.15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x + 2), \quad x_0 = -2.$

5.16. $y = x^2 + 2\ln(x + 2), \quad x_0 = -1.$

5.17. $y = 4x - x^2 + (x - 2)\sin(x - 2), \quad x_0 = 2.$

5.18. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5, \quad x_0 = 0.$

5.19. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}, \quad x_0 = 2.$

5.20. $y = \sin^2(x + 2) - x^2 - 4x - 4, \quad x_0 = -2.$

- 5.21. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.
- 5.22. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x$, $x_0 = 1$.
- 5.23. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.
- 5.24. $y = x^2 - 4x + \cos^2(x-2)$, $x_0 = 2$.
- 5.25. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x+1-e^x)$, $x_0 = 0$.
- 5.26. $y = \sin^2(x-2) - x^2 + 4x - 4$, $x_0 = 2$.
- 5.27. $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16$, $x_0 = -1$.
- 5.28. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x$, $x_0 = 0$.
- 5.29. $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$, $x_0 = 1$.
- 5.30. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$.
- 5.31. $y = x^2 - 2e^{x-1}$, $x_0 = 1$.

Задача 6. Найти асимптоты и построить графики функций.

- 6.1. $y = (17 - x^2)/(4x - 5)$.
- 6.2. $y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}$.
- 6.3. $y = (x^3 - 4x)/(3x^2 - 4)$.
- 6.4. $y = (4x^2 + 9)/(4x + 8)$.
- 6.5. $y = (4x^3 + 3x^2 - 8x - 2)/(2 - 3x^2)$.
- 6.6. $y = (x^2 - 3)/\sqrt{3x^2 - 2}$.
- 6.7. $y = (2x^2 - 6)/(x - 2)$.
- 6.8. $y = (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)/(2 - 4x^2)$.
- 6.9. $y = (x^3 - 5x)/(5 - 3x^2)$.
- 6.10. $y = (2x^2 - 6x + 4)/(3x - 2)$.
- 6.11. $y = (2 - x^2)/\sqrt{9x^2 - 4}$.
- 6.12. $y = (4x^3 - 3x)/(4x^2 - 1)$.
- 6.13. $y = (3x^2 - 7)/(2x + 1)$.
- 6.14. $y = (x^2 + 16)/\sqrt{9x^2 - 8}$.
- 6.15. $y = (x^3 + 3x^2 - 2x - 2)/(2 - 3x^2)$.
- 6.16. $y = (21 - x^2)/(7x + 9)$.
- 6.17. $y = (2x^2 - 1)/\sqrt{x^2 - 2}$.
- 6.18. $y = (2x^3 - 3x^2 - 2x + 1)/(1 - 3x^2)$.

$$\begin{array}{ll}
6.19. y = (x^2 - 11)/(4x - 3). & 6.20. y = (2x^2 - 9)/\sqrt{x^2 - 1}. \\
6.21. y = (x^3 - 2x^2 - 3x + 2)/(1 - x^2). & 6.22. y = (x^2 + 2x - 1)/(2x + 1). \\
6.23. y = (x^3 + x^2 - 3x - 1)/(2x^2 - 2). & 6.24. y = (x^2 + 6x + 9)/(x + 4). \\
6.25. y = (3x^2 - 10)/\sqrt{4x^2 - 1}. & 6.26. y = (x^2 - 2x + 2)/(x + 3). \\
6.27. y = (2x^3 + 2x^2 - 9x - 3)/(2x^2 - 3). & 6.28. y = (3x^2 - 10)/(3 - 2x). \\
6.29. y = (-x^2 - 4x + 13)/(4x + 3). & 6.30. y = (-8 - x^2)/\sqrt{x^2 - 4}. \\
6.31. y = (9 - 10x^2)/\sqrt{4x^2 - 1}.
\end{array}$$

Задача 7. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$\begin{array}{ll}
7.1. y = (x^3 + 4)/x^2. & 7.2. y = (x^2 - x + 1)/(x - 1). \\
7.3. y = 2/(x^2 + 2x). & 7.4. y = 4x^2/(3 + x^2). \\
7.5. y = 12x/(9 + x^2). & 7.6. y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 1). \\
7.7. y = (4 - x^3)/x^2. & 7.8. y = (x^2 - 4x + 1)/(x - 4). \\
7.9. y = (2x^3 + 1)/x^2. & 7.10. y = (x - 1)^2/x^2. \\
7.11. y = x^2/(x - 1)^2. & 7.12. y = (1 + 1/x)^2. \\
7.13. y = (12 - 3x^2)/(x^2 + 12). & 7.14. y = (9 + 6x - 3x^2)/(x^2 - 2x + 13). \\
7.15. y = -8x/(x^2 + 4). & 7.16. y = ((x - 1)/(x + 1))^2. \\
7.17. y = (3x^4 + 1)/x^3. & 7.18. y = 4x/(x + 1)^2. \\
7.19. y = 8(x - 1)/(x + 1)^2. & 7.20. y = (1 - 2x^3)/x^2. \\
7.21. y = 4/(x^2 + 2x - 3). & 7.22. y = 4/(3 + 2x - x^2). \\
7.23. y = (x^2 + 2x - 7)/(x^2 + 2x - 3). & 7.24. y = 1/(x^4 - 1).
\end{array}$$

$$7.25. y = -\left(x/(x+2)\right)^2.$$

$$7.26. y = (x^3 - 32)/x^2.$$

$$7.27. y = 4(x+1)^2/(x^2 + 2x + 4).$$

$$7.28. y = (3x - 2)/x^3.$$

$$7.29. y = (x^2 - 6x + 9)/(x-1)^2.$$

$$7.30. y = (x^3 - 27x + 54)/x^3.$$

$$7.31. y = (x^3 - 4)/x^2.$$

Задача 8. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$8.1. y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}.$$

$$8.2. y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

$$8.3. y = 3\ln \frac{x}{x-3} - 1.$$

$$8.4. y = (3 - x)e^{x-2}.$$

$$8.5. y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$8.6. y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$8.7. y = (x - 2)e^{3-x}.$$

$$8.8. y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$8.9. y = 3 - 3\ln \frac{x}{x+4}.$$

$$8.10. y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}.$$

$$8.11. y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$8.12. y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

$$8.13. y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}.$$

$$8.14. y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$8.15. y = 2\ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$8.16. y = (4 - x)e^{x-3}.$$

$$8.17. y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$8.18. y = 2\ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$8.19. y = (2x - 1)e^{2(1-x)}.$$

$$8.20. y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

$$8.21. y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3.$$

$$8.23. y = \frac{e^{x+3}}{x+3}.$$

$$8.25. y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$$

$$8.27. y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$$

$$8.29. y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

$$8.31. y = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1.$$

$$8.22. y = -(x+1)e^{x+2}.$$

$$8.24. y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$8.26. y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$8.28. y = (x+4)e^{-(x+3)}.$$

$$8.30. y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

Задача 9. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$9.1. y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}.$$

$$9.3. y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}.$$

$$9.5. y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}.$$

$$9.7. y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}.$$

$$9.9. y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}.$$

$$9.11. y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}.$$

$$9.13. y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$$

$$9.15. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}.$$

$$9.17. y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}.$$

$$9.2. y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}.$$

$$9.4. y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}.$$

$$9.6. y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}.$$

$$9.8. y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}.$$

$$9.10. y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}.$$

$$9.12. y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}.$$

$$9.14. y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}.$$

$$9.16. y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}.$$

$$9.18. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

$$9.19. y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}.$$

$$9.20. y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}.$$

$$9.21. y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}.$$

$$9.22. y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}.$$

$$9.23. y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}.$$

$$9.24. y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$9.25. y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}.$$

$$9.26. y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}.$$

$$9.27. y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}.$$

$$9.28. y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}.$$

$$9.29. y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}.$$

$$9.30. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

$$9.31. y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}.$$

Задача 10. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$10.1. y = e^{\sin x + \cos x}.$$

$$10.2. y = \operatorname{arctg}\left[(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}\right].$$

$$10.3. y = \ln(\sin x + \cos x).$$

$$10.4. y = 1/(\sin x + \cos x).$$

$$10.5. y = e^{\sqrt{2}\sin x}.$$

$$10.6. y = \operatorname{arctg}(\sin x).$$

$$10.7. y = \ln(\sqrt{2}\sin x).$$

$$10.8. y = 1/(\sin x - \cos x).$$

$$10.9. y = e^{\sin x - \cos x}.$$

$$10.10. y = \operatorname{arctg}\left[(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}\right].$$

$$10.11. y = \ln(\sin x - \cos x).$$

$$10.12. y = 1/(\sin x + \cos x)^2.$$

$$10.13. y = e^{-\sqrt{2}\cos x}.$$

$$10.14. y = -\operatorname{arctg}(\cos x).$$

$$10.15. y = \ln(-\sqrt{2}\cos x).$$

$$10.16. y = 1/(\sin x - \cos x)^2.$$

$$10.17. y = e^{-\sin x - \cos x}.$$

$$10.18. y = \sqrt[3]{\sin x}.$$

$$10.19. y = \ln(-\sin x - \cos x).$$

$$10.20. y = \sqrt{(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}}.$$

$$10.21. y = e^{-\sqrt{2}\sin x}.$$

$$10.22. y = \sqrt[3]{\cos x}.$$

$$10.23. \quad y = \ln(-\sqrt{2} \sin x).$$

$$10.25. \quad y = e^{\cos x - \sin x}.$$

$$10.27. \quad y = \ln(\cos x - \sin x).$$

$$10.29. \quad y = e^{\sqrt{2} \cos x}.$$

$$10.31. \quad y = \ln(\sqrt{2} \cos x).$$

$$10.24. \quad y = \sqrt{\cos x}.$$

$$10.26. \quad y = \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}.$$

$$10.28. \quad y = \sqrt{\sin x}.$$

$$10.30. \quad y = \sqrt{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}.$$

IV. ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона - Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x = 0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

2. Какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx ?$$

3. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция, а функции $j(x)$ и $y(x)$ дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{j(x)}^{y(x)} f(t) dt = f[y(x)]y'(x) - f[j(x)]j'(x).$$

4. Найти $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$.

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

6. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{+a} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^{+a} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4} dx$ выражается элементарными функциями.

Расчетные задания

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы.

1.1. $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$

1.2. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$

1.3. $\int (3x+4)e^{3x} dx.$

1.4. $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

1.5. $\int (4-16x)\sin 4x dx.$

1.6. $\int (5x-2)e^{3x} dx.$

1.7. $\int (1-6x)e^{2x} dx.$

1.8. $\int \ln(x^2+4) dx.$

1.9. $\int \ln(4x^2+1) dx.$

1.10. $\int (2-4x)\sin 2x dx.$

1.11. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$

1.12. $\int e^{-2x}(4x-3) dx.$

1.13. $\int e^{-3x}(2-9x) dx.$

1.14. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$

1.15. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$

1.16. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$

1.17. $\int (5x+6)\cos 2x dx.$

1.18. $\int (3x-2)\cos 5x dx.$

1.19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx.$

1.20. $\int (4x+7)\cos 3x dx.$

1.21. $\int (2x-5)\cos 4x dx.$

1.22. $\int (8-3x)\cos 5x dx.$

1.23. $\int (x+5)\sin 3x dx.$

1.24. $\int (2-3x)\sin 2x dx.$

1.25. $\int (4x+3)\sin 5x dx.$

1.26. $\int (7x-10)\sin 4x dx.$

1.27. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x dx.$

1.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

1.30. $\int x \sin^2 x dx.$

1.31. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. $\int_{-2}^0 (x^2+5x+6)\cos 2x dx.$

2.2. $\int_{-2}^0 (x^2-4)\cos 3x dx.$

$$2.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$2.5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$2.7. \int_0^p (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$2.9. \int_0^{2p} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$2.11. \int_0^{2p} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$2.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$2.15. \int_0^p (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$2.19. \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) dx.$$

$$2.4. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$$

$$2.6. \int_0^p (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

$$2.8. \int_0^p (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$2.10. \int_0^{2p} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$2.12. \int_0^{2p} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$2.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$2.16. \int_0^{\frac{p}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$2.18. \int_0^{\frac{p}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$2.20. \int_{\frac{p}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.24. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) dx.$$

$$2.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) dx.$$

$$2.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx.$$

$$2.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$2.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$2.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$2.31. \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

$$3.1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$3.2. \int \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$3.3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3.4. \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$3.5. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$3.6. \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.7. \int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$3.8. \int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$3.9. \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$3.10. \int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3} dx.$$

$$3.11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$3.12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$3.13. \int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$$

$$3.14. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$$

$$3.15. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$3.16. \int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$3.17. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$$

$$3.18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$3.19. \int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$$

$$3.20. \int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$$

$$3.21. \int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$3.22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$3.23. \int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$3.24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

$$3.25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$3.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$3.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$3.29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$3.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$3.31. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

$$4.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$4.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$4.3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$4.5. \int_p^{2p} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$4.6. \int_0^{p/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$4.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$4.8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

$$4.17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$4.21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$4.23. \int_0^{p/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$4.26. \int_p^{2p} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$4.27. \int_0^{p/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$4.28. \int_{p/4}^{p/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$4.29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$4.30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$4.31. \int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

$$5.1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

$$5.3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$5.4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$5.5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$5.6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$5.7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$5.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$5.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$5.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$5.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$5.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$5.21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$5.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$5.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$5.27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$5.29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$5.31. \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

$$5.8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$5.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$5.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$5.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$5.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$5.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$5.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$5.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx.$$

$$5.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$5.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$5.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$5.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

$$6.1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

$$6.3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$6.9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

$$6.11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.15. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$6.17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.19. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.21. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.23. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.25. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.27. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

$$6.29. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.31. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

$$6.12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.14. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

$$6.16. \int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

$$6.18. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.20. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.22. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.24. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.26. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.28. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

$$6.30. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

$$7.1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$7.2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$7.4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$7.5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$7.6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$7.7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

$$7.8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

$$7.9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$7.10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$7.11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx.$$

$$7.12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$7.13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$7.14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$$

$$7.15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$7.16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$7.20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$$

$$7.21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$7.22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$7.23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.28. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.29. \int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$7.31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

$$8.1. \int_{p/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$8.2. \int_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$8.3. \int_{p/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$$

$$8.4. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{p/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$8.5. \int_0^{p/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$8.6. \int_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$$

$$8.7. \int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$8.8. \int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{p/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$8.9. \int_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4\cos x}.$$

$$8.10. \int_0^{2p/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$8.11. \int_{p/3}^{p/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$8.12. \int_0^{p/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.13. \int_0^{p/2} \frac{\sin dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.14. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$8.15. \int_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.17. \int_{-2p/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$$

$$8.19. \int_0^{p/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.21. \int_0^{p/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$8.23. \int_{-p/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.25. \int_0^{p/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.27. \int_{p/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}.$$

$$8.29. \int_0^{p/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$8.31. \int_0^{p/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$8.16. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)}.$$

$$8.18. \int_{-p/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.20. \int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$8.22. \int_0^{p/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.24. \int_{-2p/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.26. \int_0^{2p/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.28. \int_0^{p/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.30. \int_0^{p/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

$$9.1. \int_{p/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$9.3. \int_0^{\arccos(4/\sqrt{17})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$9.5. \int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$9.2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{p/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$9.4. \int_{p/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.6. \int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$9.7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{p/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$9.9. \int_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$9.11. \int_{p/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$9.13. \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$9.15. \int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.17. \int_0^{p/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.19. \int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$$

$$9.21. \int_{p/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$9.23. \int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$$

$$9.25. \int_{p/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$9.27. \int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{p/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$9.29. \int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$9.8. \int_0^{p/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.10. \int_{p/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$9.12. \int_0^{p/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$9.14. \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$9.16. \int_0^{\arcsin \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

$$9.18. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$$

$$9.20. \int_0^{p/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

$$9.22. \int_0^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$9.24. \int_0^{\arcsin 3\sqrt{10}} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$9.26. \int_0^{p/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.28. \int_{p/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin 2x - 7}.$$

$$9.30. \int_0^{p/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$9.31. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5} dx.$$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

$$10.1. \int_{p/2}^p 2^8 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.2. \int_0^p 2^4 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.3. \int_0^{2p} \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.4. \int_0^{2p} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) \, dx.$$

$$10.5. \int_0^p 2^4 \cos^8(x/2) \, dx.$$

$$10.6. \int_{-p/2}^0 2^8 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.7. \int_{p/2}^p 2^4 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.8. \int_0^p 2^4 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.9. \int_0^{2p} \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.10. \int_0^{2p} \cos^8(x/4) \, dx.$$

$$10.11. \int_0^p 2^4 \sin^8(x/2) \, dx.$$

$$10.12. \int_{-p}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.13. \int_{p/2}^{2p} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.14. \int_0^p 2^4 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.15. \int_0^{2p} \cos^8 x \, dx.$$

$$10.16. \int_0^{2p} \sin^8(x/4) \, dx.$$

$$10.17. \int_0^p 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) \, dx.$$

$$10.18. \int_{-p/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.19. \int_{p/2}^p 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.20. \int_0^p 2^4 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.21. \int_0^{2p} \sin^8 x \, dx.$$

$$10.22. \int_0^{2p} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) \, dx.$$

$$10.23. \int_0^p 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) dx.$$

$$10.24. \int_{-p/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$10.25. \int_{p/2}^{2p} 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$10.26. \int_0^p 2^4 \sin^8 x dx.$$

$$10.27. \int_0^{2p} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$10.28. \int_0^{2p} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) dx.$$

$$10.29. \int_0^p 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) dx.$$

$$10.30. \int_{-p/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$10.31. \int_0^{2p} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

$$11.1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$$

$$11.2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$11.3. \int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$11.4. \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$$

$$11.5. \int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$11.6. \int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$$

$$11.7. \int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11.8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx.$$

$$11.9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.10. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$11.11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$$

$$11.12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2})dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$$

$$11.13. \int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$11.14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$11.15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$11.17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$$

$$11.18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}} dx.$$

$$11.19. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$$

$$11.20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$11.21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

$$11.22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$11.24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$$

$$11.25. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$$

$$11.26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx.$$

$$11.27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$$

$$11.28. \int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$11.29. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}.$$

$$11.30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

$$11.31. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2}.$$

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

$$12.1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$12.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$12.3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$12.4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$12.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$12.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$12.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$12.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$12.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$12.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$12.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$12.16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$12.18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$12.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$12.21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$12.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$12.23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$12.24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$12.25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$12.27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$12.28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12.30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$12.31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

$$13.1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$13.3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$13.4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx.$$

$$13.5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$13.6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.7. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx.$$

$$13.8. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.9. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$13.10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$13.11. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.12. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.13. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$$

$$13.14. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$$

$$13.15. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$13.16. \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$$

$$13.17. \int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx.$$

$$13.18. \int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4}}{x^5 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.19. \int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.20. \int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx.$$

$$13.21. \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[25]{x^{11}}} dx.$$

$$13.22. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.23. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$$

$$13.24. \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.25. \int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$$

$$13.26. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.27. \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.28. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.29. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.30. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15} \sqrt{x^4}} dx.$$

$$13.31. \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^5 \sqrt{x^2}} dx.$$

Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$14.1. \begin{aligned} y &= (x-2)^3, \\ y &= 4x-8. \end{aligned}$$

$$14.2. \begin{aligned} y &= x\sqrt{9-x^2}, \quad y=0, \\ (0 \leq x \leq 3). \end{aligned}$$

$$14.3. \quad \begin{aligned} y &= 4 - x^2, \\ y &= x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$14.5. \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ x &= 0, \quad x = 1. \end{aligned}$$

$$14.7. \quad \begin{aligned} y &= \cos x \sin^2 x, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq p/2). \end{aligned}$$

$$14.9. \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0, \\ x &= 1, \quad x = e^3. \end{aligned}$$

$$14.11. \quad \begin{aligned} y &= (x + 1)^2, \\ y^2 &= x + 1. \end{aligned}$$

$$14.13. \quad \begin{aligned} y &= x\sqrt{36 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq 6). \end{aligned}$$

$$14.15. \quad \begin{aligned} y &= \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \\ x &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$14.17. \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \\ y &= \ln 2. \end{aligned}$$

$$14.19. \quad \begin{aligned} y &= \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

$$14.21. \quad \begin{aligned} x &= (y - 2)^3, \\ x &= 4y - 8. \end{aligned}$$

$$14.23. \quad \begin{aligned} y &= \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

$$14.4. \quad \begin{aligned} y &= \sin x \cos^2 x, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq p/2). \end{aligned}$$

$$14.6. \quad \begin{aligned} y &= x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq 2). \end{aligned}$$

$$14.8. \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \\ x &= \ln 2. \end{aligned}$$

$$14.10. \quad \begin{aligned} y &= \arccos x, \quad y = 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

$$14.12. \quad \begin{aligned} y &= 2x - x^2 + 3, \\ y &= x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$

$$14.14. \quad \begin{aligned} x &= \arccos y, \quad x = 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

$$14.16. \quad \begin{aligned} y &= x^2 \sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$14.18. \quad \begin{aligned} y &= x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq 2). \end{aligned}$$

$$14.20. \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \\ x &= p/2, \quad x = -p/2. \end{aligned}$$

$$14.22. \quad \begin{aligned} y &= \cos^5 x \sin 2x, \quad y = 0, \\ (0 &\leq x \leq p/2). \end{aligned}$$

$$14.24. \quad \begin{aligned} x &= 4 - y^2, \\ x &= y^2 - 2y. \end{aligned}$$

$$14.25. \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, & x &= 0, \\ y &= 1, & y &= e^3. \end{aligned}$$

$$14.27. \quad \begin{aligned} y &= x^2\sqrt{16-x^2}, & y &= 0, \\ (0 \leq x &\leq 4). \end{aligned}$$

$$14.29. \quad \begin{aligned} y &= (x-1)^2, \\ y^2 &= x-1. \end{aligned}$$

$$14.31. \quad \begin{aligned} x &= 4 - (y-1)^2, \\ x &= y^2 - 4y + 3. \end{aligned}$$

$$14.26. \quad \begin{aligned} y &= \frac{e^{1/x}}{x^2}, & y &= 0, \\ x &= 2, & x &= 1. \end{aligned}$$

$$14.28. \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{4-y^2}, & x &= 0, \\ y &= 0, & y &= 1. \end{aligned}$$

$$14.30. \quad \begin{aligned} y &= x^2 \cos x, & y &= 0, \\ (0 \leq x &\leq p/2). \end{aligned}$$

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \quad \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \quad \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8p, \quad y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.5. \quad \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.2. \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.4. \quad \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.6. \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4p, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6p, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12p, \quad y \geq 9). \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12p, \quad y \geq 6). \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.17. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20p, \quad y \geq 15). \end{cases}$$

$$15.19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$15.20. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2p, \quad y \geq 1). \end{cases}$$

$$15.22. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
15.23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases} & 15.24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16p, \quad y \geq 12). \end{cases} \\
15.25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases} & 15.26. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases} \\
15.27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4p, \quad y \geq 2). \end{cases} & 15.28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases} \\
15.29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases} & 15.30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8p, \quad y \geq 6). \end{cases} \\
15.31. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}). \end{cases} &
\end{array}$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

$$\begin{array}{ll}
16.1. \quad r = 4 \cos 3j, \quad r = 2 \quad (r \geq 2). & 16.2. \quad r = \cos 2j. \\
16.3. \quad \begin{cases} r = \sqrt{3} \cos j, \quad r = \sin j, \\ (0 \leq j \leq p/2). \end{cases} & 16.4. \quad r = 4 \sin 3j, \quad r = 2 \quad (r \geq 2). \\
16.5. \quad \begin{cases} r = 2 \cos j, \quad r = 2\sqrt{3} \sin j, \\ (0 \leq j \leq p/2). \end{cases} & 16.6. \quad r = \sin 3j.
\end{array}$$

$$16.7. r = 6\sin 3j, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$r = \cos j,$$

$$16.9. r = \sqrt{2} \sin(j - p/4), \\ (-p/4 \leq j \leq p/2).$$

$$16.11. r = 6\cos 3j, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$16.13. r = \cos j, \quad r = \sin j, \\ (0 \leq j \leq p/2).$$

$$16.15. r = \cos j, \quad r = 2\cos j.$$

$$16.17. r = 1 + \sqrt{2} \cos j.$$

$$16.19. r = 1 + \sqrt{2} \sin j.$$

$$16.21. r = (3/2)\cos j, \quad r = (5/2)\cos j.$$

$$16.23. r = \sin 6j.$$

$$16.25. r = \cos j + \sin j.$$

$$16.27. r = 2\cos 6j.$$

$$16.29. r = 3\sin j, \quad r = 5\sin j.$$

$$16.31. r = 6\sin j, \quad r = 4\sin j.$$

$$16.8. r = \cos 3j.$$

$$r = \sin j,$$

$$16.10. r = \sqrt{2} \cos(j - p/4), \\ (0 \leq j \leq 3p/4).$$

$$16.12. r = 1/2 + \sin j.$$

$$r = \sqrt{2} \cos(j - p/4),$$

$$16.14. r = \sqrt{2} \sin(j - p/4), \\ (p/4 \leq j \leq 3p/4).$$

$$16.16. r = \sin j, \quad r = 2\sin j.$$

$$16.18. r = 1/2 + \cos j.$$

$$16.20. r = (5/2)\sin j, \quad r = (3/2)\sin j.$$

$$16.22. r = 4\cos 4j.$$

$$16.24. r = 2\cos j, \quad r = 3\cos j.$$

$$16.26. r = 2\sin 4j.$$

$$16.28. r = \cos j - \sin j.$$

$$16.30. r = 2\sin j, \quad r = 4\sin j.$$

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$17.1. y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$17.2. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

- 17.3. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq 7/9$. 17.3. $y = \ln \frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
- 17.5. $y = -\ln \cos x$, $0 \leq x \leq p/6$. 17.6. $y = e^x + 6$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
- 17.7. $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$, $1/4 \leq x \leq 1$.
- 17.8. $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$.
- 17.9. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq 8/9$. 17.10. $y = \ln(1-x^2)$, $0 \leq x \leq 1/4$.
- 17.11. $y = 2 + \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$. 17.12. $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq p/6$.
- 17.13. $y = e^x + 13$, $\ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
- 17.14. $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$, $0 \leq x \leq 1/4$.
- 17.15. $y = 2 - e^x$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$.
- 17.16. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 15/16$.
- 17.17. $y = 1 - \ln \sin x$, $p/3 \leq x \leq p/2$. 17.18. $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leq x \leq 4$.
- 17.19. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$, $1/9 \leq x \leq 1$.
- 17.20. $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1$, $0 \leq x \leq 9/16$.
- 17.21. $y = \ln \sin x$, $p/3 \leq x \leq p/2$. 17.22. $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
- 17.23. $y = \operatorname{ch} x + 3$, $0 \leq x \leq 1$.
- 17.24. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 3/4$.
- 17.25. $y = \ln \cos x + 2$, $0 \leq x \leq p/6$.
- 17.26. $y = e^x + 26$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$. 17.27. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$.
- 17.28. $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4$, $0 \leq x \leq 1/2$.
- 17.29. $y = \frac{e^x + e^{-x} + 3}{4}$, $0 \leq x \leq 2$. 17.30. $y = e^x + e$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
- 17.31. $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 3$.

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$18.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

$$18.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2p.$$

$$18.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/2.$$

$$18.7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ p \leq t \leq 2p.$$

$$18.9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/3.$$

$$18.11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/3.$$

$$18.13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \\ p/2 \leq t \leq p.$$

$$18.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2p.$$

$$18.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

$$18.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

$$18.8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \\ p/2 \leq t \leq 2p/3.$$

$$18.10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/3.$$

$$18.12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ p/2 \leq t \leq p.$$

$$18.14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/2.$$

$$18.15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

$$18.17. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/6.$$

$$18.19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ p/2 \leq t \leq 2p/3.$$

$$18.21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/4.$$

$$18.23. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ p/6 \leq t \leq p/4.$$

$$18.25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/2.$$

$$18.27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/2.$$

$$18.29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/4.$$

$$18.16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/2.$$

$$18.18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2p.$$

$$18.20. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p/3.$$

$$18.22. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2p.$$

$$18.24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3p/2.$$

$$18.26. \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

$$18.28. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3p.$$

$$18.30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ p/6 \leq t \leq p/4.$$

$$18.31. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq p.$$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$19.1. r = 3e^{3j/4}, \quad -p/2 \leq j \leq p/2.$$

$$19.2. r = 4e^{4j/3}, \quad -p/2 \leq j \leq p/2.$$

$$19.3. r = \sqrt{2}e^j, \quad -p/2 \leq j \leq p/2.$$

$$19.4. r = 5e^{5j/12}, \quad -p/2 \leq j \leq p/2.$$

$$19.5. r = 6e^{12j/5}, \quad -p/2 \leq j \leq p/2.$$

$$19.6. r = 3e^{3j/4}, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.7. r = 4e^{4j/3}, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.8. r = \sqrt{2}e^j, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.9. r = 5e^{5j/12}, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.10. r = 12e^{12j/5}, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.11. r = 1 - \sin j, \quad -p/2 \leq j \leq -p/6.$$

$$19.12. r = 2(1 - \cos j), \quad -p \leq j \leq -p/2.$$

$$19.13. r = 3(1 + \sin j), \quad -p/6 \leq j \leq 0.$$

$$19.14. r = 4(1 - \sin j), \quad 0 \leq j \leq p/6.$$

$$19.15. r = 5(1 - \cos j), \quad -p/3 \leq j \leq 0.$$

$$19.16. r = 6(1 + \sin j), \quad -p/2 \leq j \leq 0.$$

$$19.17. r = 7(1 - \sin j), \quad -p/6 \leq j \leq p/6.$$

$$19.18. r = 8(1 - \cos j), \quad -2p/3 \leq j \leq 0.$$

$$19.19. r = 2j, \quad 0 \leq j \leq 3/4.$$

$$19.20. r = 2j, \quad 0 \leq j \leq 4/3.$$

$$19.21. r = 2j, \quad 0 \leq j \leq 5/12.$$

$$19.22. r = 2j, \quad 0 \leq j \leq 12/5.$$

$$19.23. r = 4j, \quad 0 \leq j \leq 3/4.$$

$$19.24. r = 3j, \quad 0 \leq j \leq 4/3.$$

$$19.25. r = 5j, \quad 0 \leq j \leq 12/5.$$

$$19.26. r = 2 \cos j, \quad 0 \leq j \leq p/6.$$

$$19.27. r = 8 \cos j, \quad 0 \leq j \leq p/4.$$

$$19.28. r = 6 \cos j, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

$$19.29. r = 2 \sin j, \quad 0 \leq j \leq p/6.$$

$$19.30. r = 8 \sin j, \quad 0 \leq j \leq p/4.$$

$$19.31. r = 6 \sin j, \quad 0 \leq j \leq p/3.$$

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

$$20.1. \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.2. z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$$

$$20.3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.4. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$20.5. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$$

$$20.6. x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.7. z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3.$$

$$20.8. \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$$

$$20.10. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0.$$

$$20.11. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.12. z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$$

$$20.13. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

$$20.14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$20.15. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0.$$

$$20.16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.17. z = x^2 + 5y^2, \quad z = 5.$$

$$20.18. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 4.$$

$$20.19. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$$

$$20.20. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, \quad z = 4, \quad z = 0.$$

$$20.21. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.22. z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$$

$$20.23. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$20.24. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$$

$$20.25. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, \quad z = 5, \quad z = 0.$$

$$20.26. \frac{x^2}{27} + y^2 = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$20.27. z = 2x^2 + 18y^2, \quad z = 6.$$

$$20.28. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

$$20.29. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$$

$$20.30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, \quad z = 6, \quad z = 0.$$

$$20.31. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z = 7, \quad z = 0.$$

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox , в вариантах 17–31 ось вращения Oy .

$$21.1. y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$$

$$21.2. 2x - x^2 - y = 0, \quad 2x^2 - 4x + y = 0.$$

$$21.3. y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq p.$$

$$21.4. y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \geq 0.$$

$$21.5. y = \sin^2 x, \quad x = p/2, \quad y = 0.$$

$$21.6. x = \sqrt[3]{y-2}, \quad x = 1, \quad y = 1.$$

$$21.7. y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$21.8. y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$$

$$21.9. y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2.$$

$$21.10. y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

$$21.11. y = x^2, \quad y^2 - x = 0.$$

$$21.12. x^2 + (y-2)^2 = 1.$$

$$21.13. y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y-1}, \quad x = 1.$$

$$21.14. y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$$

$$21.15. y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

$$21.16. y = \sin(px/2), \quad y = x^2.$$

$$21.17. y = \arccos(x/3), \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$$

$$21.18. y = \arcsin(x/5), \quad y = \arcsin x, \quad y = p/2.$$

$$21.19. y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$21.20. y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$21.21. y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0,5.$$

$$21.22. y = \ln x, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$21.23. y = (x-1)^2, \quad y = 1.$$

$$21.24. y^2 = x - 2, \quad y = 0, \quad y = x^3, \quad y = 1.$$

$$21.25. y = x^3, \quad y = x^2.$$

$$21.26. y = \arccos(x/5), \quad y = \arccos(x/3), \quad y = 0.$$

$$21.27. y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$$

$$21.28. y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$21.29. y = x^3, \quad y = x.$$

$$21.30. y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad x = 0.$$

$$21.31. y = (x-1)^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

Задача 22

Варианты 1–10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобоковой трапеции (рис. 2). Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2 .

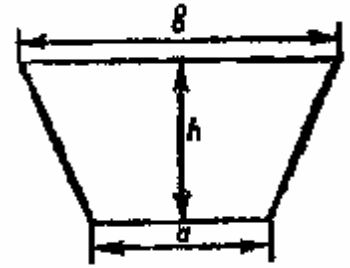


Рис. 2

У к а з а н и е. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

- | | |
|--|---|
| 22.1. $a = 4,5 \text{ м}$, $b = 6,6 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$. | 22.2. $a = 4,8 \text{ м}$, $b = 7,2 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$. |
| 22.3. $a = 5,1 \text{ м}$, $b = 7,8 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$. | 22.4. $a = 5,4 \text{ м}$, $b = 8,4 \text{ м}$, $h = 3,0 \text{ м}$. |
| 22.5. $a = 5,7 \text{ м}$, $b = 9,0 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$. | 22.6. $a = 6,0 \text{ м}$, $b = 9,6 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$. |
| 22.7. $a = 6,3 \text{ м}$, $b = 10,2 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$. | 22.8. $a = 6,6 \text{ м}$, $b = 10,8 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$. |
| 22.9. $a = 6,9 \text{ м}$, $b = 11,4 \text{ м}$, $h = 5,0 \text{ м}$. | 22.10. $a = 7,2 \text{ м}$, $b = 12,0 \text{ м}$, $h = 5,0 \text{ м}$. |

Варианты 11–20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_z = 6380 \text{ км}$. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2 .

- | | |
|---|---|
| 22.11. $m = 7,0 \text{ т}$, $H = 200 \text{ км}$. | 22.12. $m = 7,0 \text{ т}$, $H = 250 \text{ км}$. |
| 22.13. $m = 6,0 \text{ т}$, $H = 300 \text{ км}$. | 22.14. $m = 6,0 \text{ т}$, $H = 350 \text{ км}$. |
| 22.15. $m = 5,0 \text{ т}$, $H = 400 \text{ км}$. | 22.16. $m = 5,0 \text{ т}$, $H = 450 \text{ км}$. |
| 22.17. $m = 4,0 \text{ т}$, $H = 500 \text{ км}$. | 22.18. $m = 4,0 \text{ т}$, $H = 550 \text{ км}$. |
| 22.19. $m = 3,0 \text{ т}$, $H = 600 \text{ км}$. | 22.20. $m = 3,0 \text{ т}$, $H = 650 \text{ км}$. |

Варианты 21–31

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением ($103,3 \text{ кПа}$). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 3).

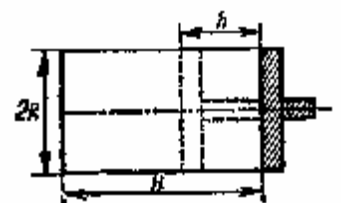


Рис. 3

У к а з а н и е. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p – давление, V – объем.

- 22.21. $H = 0,4$ м, $h = 0,35$ м, $R = 0,1$ м. 22.22. $H = 0,4$ м, $h = 0,3$ м, $R = 0,1$ м.
22.23. $H = 0,4$ м, $h = 0,2$ м, $R = 0,1$ м. 22.24. $H = 0,8$ м, $h = 0,7$ м, $R = 0,2$ м.
22.25. $H = 0,8$ м, $h = 0,6$ м, $R = 0,2$ м. 22.26. $H = 0,8$ м, $h = 0,4$ м, $R = 0,2$ м.
22.27. $H = 1,6$ м, $h = 1,4$ м, $R = 0,3$ м. 22.28. $H = 1,6$ м, $h = 1,2$ м, $R = 0,3$ м.
22.29. $H = 1,6$ м, $h = 0,8$ м, $R = 0,3$ м. 22.30. $H = 2,0$ м, $h = 1,5$ м, $R = 0,4$ м.
22.31. $H = 2,0$ м, $h = 1,0$ м, $R = 0,4$ м.

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теоретические вопросы

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.
3. Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.
6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.
7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
8. Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.
9. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.
10. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
11. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
12. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.
13. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
14. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными

коэффициентами. Метод подбора.

Теоретические упражнения

1. Пусть y_1 — решение дифференциального уравнения $L[y] = 0$. Показать, что введение новой искомой функции $u = y/y_1$ приводит к дифференциальному уравнению допускающему понижение порядка.

2. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$.

3. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$, соответствующие максимумам и минимумам. Как отличить максимум от минимума?

4. Линейное дифференциальное уравнение останется линейным при замене независимой переменной $x = j(t)$, где функция $j(t)$ произвольная, но дифференцируемая достаточное число раз: Доказать это утверждение для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

5. Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции

$$y = a(x)z + b(x).$$

Здесь z — новая искомая функция, $a(x)$ и $b(x)$ — произвольные, но достаточное число раз дифференцируемые функции.

6. Составить общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$, если известно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

7. Показать, что произвольные дважды дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения.

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

8. Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеющее решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Показать, что функции x и x^2 линейно -независимы в интервале $(-\infty, \infty)$.

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке $x = 0$. Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения?

9. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения y_1 , y_2 и y_3 .

10. Доказать, что для того чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

Расчетные задания

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $y(x, y) = C$.)

1.1. $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

1.4. $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

1.5. $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$.

1.6. $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$.

1.7. $(e^{2x} + 5) dy + ye^{2x} dx = 0$.

1.8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

1.9. $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

1.10. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$.

1.11. $y(4 + e^x) dy - e^x dx = 0$.

1.12. $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

1.14. $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.

1.15. $(e^x + 8) dy - ye^x dx = 0$.

1.16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.

1.17. $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$.

1.18. $y \ln y + xy' = 0$.

1.19. $(1 + e^x) y' = ye^x$.

1.20. $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

- 1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$. 1.22. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$.
- 1.23. $(3 + e^x)yy' = e^x$. 1.24. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}yy' = 0$.
- 1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. 1.26. $\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$.
- 1.27. $(1 + e^x)yy' = e^x$. 1.28. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0$.
- 1.29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. 1.30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$.
- 1.31. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

- 2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. 2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.
- 2.3. $y' = \frac{x + y}{x - y}$. 2.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.
- 2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$. 2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.
- 2.7. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$. 2.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
- 2.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$. 2.10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.
- 2.11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$. 2.12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.
- 2.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$. 2.14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.
- 2.15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$. 2.16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
- 2.17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$. 2.18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

$$2.19. y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$2.20. xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.21. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$2.22. xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$2.23. y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$2.24. xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$2.25. 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$2.26. xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$2.27. y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$2.28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.29. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

$$2.30. xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.31. y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$3.1. y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$$

$$3.2. y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$$

$$3.3. y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$$

$$3.4. y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$$

$$3.5. y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}.$$

$$3.6. y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}.$$

$$3.7. y' = \frac{x + y - 8}{3x - y - 8}.$$

$$3.8. y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}.$$

$$3.9. y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}.$$

$$3.10. y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}.$$

$$3.11. y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}.$$

$$3.12. y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}.$$

$$3.13. y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$$

$$3.14. y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}.$$

$$3.15. y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$$

$$3.16. y' = \frac{y-2x+3}{x-1}.$$

$$3.17. y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$$

$$3.18. y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}.$$

$$3.19. y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$$

$$3.20. y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$$

$$3.21. y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$$

$$3.22. y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$$

$$3.23. y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$$

$$3.24. y' = \frac{y}{2x+2y-2}.$$

$$3.25. y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$$

$$3.26. y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$$

$$3.27. y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$$

$$3.28. y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$$

$$3.29. y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$$

$$3.30. y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$$

$$3.31. y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$$

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

$$4.1. y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$4.2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(p/2) = 0.$$

$$4.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0. \quad 4.4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(p/4) = 1/2.$$

$$4.5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2. \quad 4.6. y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$4.7. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{p}{2}\right) = 1.$$

$$4.8. y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(p) = \frac{1}{p}.$$

$$4.9. y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$4.10. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.11. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$$

$$4.12. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$4.13. y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.14. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$4.15. y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$$

$$4.16. y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$4.17. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3.$$

$$4.18. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

$$4.19. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.20. y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$4.21. y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.22. y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$4.23. y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$4.24. y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$4.25. y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$$

$$4.26. y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$4.27. y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$$

$$4.28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.29. y' - 3x^2 y = x^2 (1+x^3)/3, \quad y(0) = 0.$$

$$4.30. y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

$$4.31. y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$$

Задача 5. Решить задачу Коши.

$$5.1. y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 2.$$

$$5.2. (y^4 e^y + 2x) y' = y, \quad y|_{x=0} = 1.$$

$$5.3. y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, \quad y|_{x=1} = e.$$

$$5.4. 2(4y^2 + 4y - x) y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$5.5. (\cos 2y \cos^2 y - x) y' = \sin y \cos y, \quad y|_{x=1/4} = p/3.$$

$$5.6. (x \cos^2 y - y^2) y' = y \cos^2 y, \quad y|_{x=p} = p/4.$$

$$5.7. e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$5.8. (104y^3 - x) y' = 4y, \quad y|_{x=8} = 1.$$

$$5.9. dx + (xy - y^3) dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$$

$$5.10. (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) y' = y, \quad y|_{x=16} = p/4.$$

$$5.11. 8(4y^3 + xy - y) y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$5.12. (2 \ln y - \ln^2 y) dy = ydx - xdy, \quad y|_{x=4} = e^2.$$

$$5.13. 2(x + y^4) y' = y, \quad y|_{x=-2} = -1.$$

$$5.14. y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \quad y|_{x=1/4} = 2.$$

$$5.15. 2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1.$$

$$5.16. (xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 4.$$

$$5.17. \sin 2ydx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, \quad y|_{x=-1/2} = p/4.$$

$$5.18. (y^2 + 2y - x) y' = 1, \quad y|_{x=2} = 0.$$

$$5.19. 2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, \quad y|_{x=-4} = 1.$$

$$5.20. dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy, \quad y|_{x=e^{p/2}} = p/2.$$

$$5.21. 2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x) y' = \sin 2y, \quad y|_{x=3/2} = 5p/4.$$

$$5.22. \operatorname{ch} ydx = (1 + x \operatorname{sh} x)dy, \quad y|_{x=1} = \ln 2.$$

$$5.23. (13y^3 - x) y' = 4y, \quad y|_{x=5} = 1.$$

$$5.24. y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, \quad y|_{x=p/8} = 2.$$

$$5.25. (x + \ln^2 y - \ln y) y' = y/2, \quad y|_{x=2} = 1.$$

$$5.26. (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 1.$$

$$5.27. ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0, \quad y|_{x=3/2} = p/4.$$

$$5.28. 2(y^3 - y + xy)dy = dx, \quad y|_{x=-2} = 0.$$

$$5.29. (2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy = dx, \quad y|_{x=0} = p.$$

$$5.30. 4y^2dx + (e^{1/(2y)} + x)dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1/2.$$

$$5.31. dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$$

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

$$6.1. y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.2. xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1/2.$$

$$6.3. 2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$$

$$6.4. y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.5. xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$6.6. 2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2.$$

$$6.7. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$$

$$6.8. 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$$

$$6.9. y' + 4x^3y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), \quad y(0) = -1.$$

$$6.10. 3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$$

$$6.11. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}.$$

$$6.12. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$$

$$6.13. 2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

$$6.14. 3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$$

$$6.15. y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 1/2.$$

$$6.16. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = 1/2\sqrt{2}.$$

$$6.17. y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

$$6.18. xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$6.19. 2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}, \quad y(0) = 2.$$

$$6.20. 4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.21. 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$$

$$6.22. 2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$$

$$6.23. y' + xy = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.24. 2y' + 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

$$6.25. y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.26. 2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$$

$$6.27. y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.28. y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$$

$$6.29. 2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2.$$

$$6.30. y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$6.31. xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$$

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$7.1. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

$$7.2. \left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$$

$$7.3. (3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$$

$$7.4. \left(2x - 1 - \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(2y - \frac{1}{x} \right) dy = 0.$$

$$7.5. (y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$$

$$7.6. (3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0.$$

$$7.7. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0.$$

$$7.8. [\sin 2x - 2 \cos(x + y)] dx - 2 \cos(x + y) dy = 0.$$

$$7.9. (xy^2 + x/y^2) dx + (x^2 y - x^2/y^3) dy = 0.$$

$$7.10. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$7.11. \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0.$$

$$7.12. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0.$$

$$7.13. \frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$$

$$7.14. \frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$$

$$7.15. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$$

$$7.16. \left(x e^x + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

$$7.17. \left(10xy - \frac{1}{\sin y} \right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3 \right) dy = 0.$$

$$7.18. \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$7.19. e^y dx + (\cos y + x e^y) dy = 0.$$

$$7.20. (y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0.$$

$$7.21. x e^{y^2} dx + (x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0.$$

$$7.22. (5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0.$$

$$7.23. \left[\cos(x + y^2) + \sin x \right] dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0.$$

$$7.24. (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$$

$$7.25. \left(\sin y + y \sin y + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

$$7.26. \left(1 + \frac{1}{y} e^{x/y} \right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{x/y} \right) dy = 0.$$

$$7.27. \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$7.28. 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2y + y^2) dy = 0.$$

$$7.29. (3x^3 + 6x^2y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2y) dy = 0.$$

$$7.30. xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0.$$

$$7.31. xdx + ydy + (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = 0.$$

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

$$8.1. y' = y - x^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.2. yy' = -2x, \quad M(0, 5).$$

$$8.3. y' = 2 + y^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.4. y' = \frac{2x}{3y}, \quad M(1, 1).$$

$$8.5. y' = (y - 1)x, \quad M(1, 3/2).$$

$$8.6. yy' + x = 0, \quad M(-2, -3).$$

$$8.7. y' = 3 + y^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.8. xy' = 2y, \quad M(2, 3).$$

$$8.9. y'(x^2 + 2) = y, \quad M(2, 2).$$

$$8.10. x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, \quad M(2, 1).$$

$$8.11. y' = y - x, \quad M(9/2, 1).$$

$$8.12. y' = x^2 - y, \quad M(1, 1/2).$$

$$8.13. y' = xy, \quad M(0, -1).$$

$$8.14. y' = xy, \quad M(0, 1).$$

$$8.15. yy' = -\frac{x}{2}, \quad M(4, 2).$$

$$8.16. 2(y + y') = x + 3, \quad M(1, 1/2).$$

8.17. $y' = x + 2y$, $M(3, 0)$.

8.18. $xy' = 2y$, $M(1, 3)$.

8.19. $3yy' = x$, $M(-3, -2)$.

8.20. $y' = y - x^2$, $M(-3, 4)$.

8.21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2, 1)$.

8.22. $y' = x^2 - y$, $M(2, 3/2)$.

8.23. $y' = y - x$, $M(2, 1)$.

8.24. $yy' = -x$, $M(2, 3)$.

8.25. $y' = y - x$, $M(4, 2)$.

8.26. $3yy' = x$, $M(1, 1)$.

8.27. $y' = x^2 - y$, $M(0, 1)$.

8.28. $y' = 3y^{2/3}$, $M(1, 3)$.

8.29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2, -1)$.

8.30. $y' = x(y - 1)$, $M(1, 1/2)$.

8.31. $y' = x + 2y$, $M(1, 2)$.

Задача 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством что в любой ее точке M нормальный вектор \overline{MN} с концом на оси Oy имеет длину равную a , и образует острый угол с положительным направлением оси Oy .

9.1. $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

9.2. $M_0(12, 2)$, $a = 20$.

9.3. $M_0(9, 3)$, $a = 15$.

9.4. $M_0(6, 4)$, $a = 10$.

9.5. $M_0(3, 5)$, $a = 5$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

9.6. $M_0(1, 1)$, $a:b = 1:2$.

9.7. $M_0(-2, 3)$, $a:b = 1:3$.

9.8. $M_0(0, 1)$, $a:b = 2:3$.

9.9. $M_0(1, 0)$, $a:b = 3:2$.

9.10. $M_0(2, -1)$, $a:b = 3:1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

9.11. $M_0(2, -1)$, $a:b = 1:1$.

9.12. $M_0(1, 2)$, $a:b = 2:1$.

9.13. $M_0(-1, 1), \quad a:b=3:1.$

9.14. $M_0(2, 1), \quad a:b=1:2.$

9.15. $M_0(1, -1), \quad a:b=1:3.$

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

9.16. $M_0(1, 2), \quad a:b=1:1.$

9.17. $M_0(2, 1), \quad a:b=1:2.$

9.18. $M_0(1, 3), \quad a:b=2:1.$

9.19. $M_0(2, -3), \quad a:b=3:1.$

9.20. $M_0(3, -1), \quad a:b=3:2.$

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox , обратно пропорциональную абсциссе точки M . Коэффициент пропорциональности равен a .

9.21. $M_0(1, e), \quad a=-1/2.$

9.22. $M_0(2, e), \quad a=-2.$

9.23. $M_0(-1, \sqrt{e}), \quad a=-1.$

9.24. $M_0(2, 1/e), \quad a=2.$

9.25. $M_0(1, 1/e^2), \quad a=1/4.$

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy , равную a .

9.26. $M_0(1, 2), \quad a=-1.$

9.27. $M_0(1, 4), \quad a=2.$

9.28. $M_0(1, 5), \quad a=-2.$

9.29. $M_0(1, 3), \quad a=-4.$

9.30. $M_0(1, 6), \quad a=3.$

9.31. $M_0(1, 1), \quad a=1.$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

10.1. $y'''x \ln x = y''.$

10.2. $xy''' + y'' = 1.$

10.3. $2xy''' = y''.$

10.4. $xy''' + y'' = x + 1.$

$$10.5. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

$$10.6. x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$10.7. y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$10.8. x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$$

$$10.9. \operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

$$10.10. y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''.$$

$$10.11. x^4 y'' + x^3 y' = 1.$$

$$10.12. xy''' + 2y'' = 0.$$

$$10.13. (1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3.$$

$$10.14. x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$$

$$10.15. xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$

$$10.16. xy''' + y'' + x = 0.$$

$$10.17. \operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y'''.$$

$$10.18. xy''' + y'' = \sqrt{x}.$$

$$10.19. y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1.$$

$$10.20. y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$$

$$10.21. y''' \operatorname{th} 7x = 7y''.$$

$$10.22. x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$$

$$10.23. \operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$$

$$10.24. (x+1) y''' + y'' = (x+1).$$

$$10.25. (1 + \sin x) y''' = \cos x \cdot y''.$$

$$10.26. xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$10.27. -xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}.$$

$$10.28. \operatorname{cth} xy'' + y' = \operatorname{ch} x.$$

$$10.29. x^4 y'' + x^3 y' = 4.$$

$$10.30. y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x.$$

$$10.31. (1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x^3.$$

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

$$11.1. 4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/\left(2\sqrt{2}\right).$$

$$11.2. y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$$

$$11.3. y'' y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$$

$$11.4. y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$11.5. y'' = 32 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = p/2, \quad y'(1) = 4.$$

- 11.6. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
- 11.7. $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
- 11.8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}/2$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$.
- 11.9. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
- 11.10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
- 11.11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
- 11.12. $y'' = 18\sin^3 y \cos y$, $y(1) = p/2$, $y'(1) = 3$.
- 11.13. $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$.
- 11.14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
- 11.15. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
- 11.16. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
- 11.17. $y'' = 8\sin^3 y \cos y$, $y(1) = p/2$, $y'(1) = 2$.
- 11.18. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
- 11.19. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
- 11.20. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
- 11.21. $y'' = 50\sin^3 y \cos y$, $y(1) = p/2$, $y'(1) = 5$.
- 11.22. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
- 11.23. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
- 11.24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
- 11.25. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
- 11.26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- 11.27. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
- 11.28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = p/2$, $y'(1) = 1$.

$$11.29. y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

$$11.30. y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$$

$$11.31. y'' y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$$

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$12.1. y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$$

$$12.2. y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$$

$$12.3. y''' - y' = x^2 + x.$$

$$12.4. y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$$

$$12.5. y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2.$$

$$12.6. y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$$

$$12.7. y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$$

$$12.8. y^V - y^{IV} = 2x + 3.$$

$$12.9. 3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$$

$$12.10. y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$$

$$12.11. y''' + y'' = 5x^2 - 1.$$

$$12.12. y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$$

$$12.13. 7y''' - y'' = 12x.$$

$$12.14. y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$$

$$12.15. y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$$

$$12.16. y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$$

$$12.17. y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$$

$$12.18. y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$$

$$12.19. y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$$

$$12.20. y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$$

$$12.21. y''' + y'' = 49 - 24x^2.$$

$$12.22. y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$$

$$12.23. y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$$

$$12.24. y^{IV} + y''' = x.$$

$$12.25. y''' - y'' = 6x + 5.$$

$$12.26. y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$$

$$12.27. y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$$

$$12.28. y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$$

$$12.29. y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$$

$$12.30. y^{IV} + y''' = 12x + 6.$$

$$12.31. y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$$

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$13.1. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

$$13.2. y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

$$13.3. y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$$

$$13.4. y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$$

$$13.5. y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$$

$$13.6. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

$$13.7. y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x.$$

$$13.8. y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$$

$$13.9. y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$$

$$13.10. y''' - 3y' - 2y = -4x \cdot e^x.$$

$$13.11. y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$$

$$13.12. y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x.$$

$$13.13. y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$$

$$13.14. y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x.$$

$$13.15. y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$$

$$13.16. y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x.$$

$$13.17. y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$$

$$13.18. y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}.$$

$$13.19. y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$$

$$13.20. y''' - 4y'' + 3y' = -4x \cdot e^x.$$

$$13.21. y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}.$$

$$13.22. y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^x.$$

$$13.23. y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x.$$

$$13.24. y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x.$$

$$13.25. y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x.$$

$$13.26. y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}.$$

$$13.27. y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x.$$

$$13.28. y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x.$$

$$13.29. y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x.$$

$$13.30. y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}.$$

$$13.31. y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}.$$

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$14.1. y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.2. y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x.$$

$$14.3. y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.4. y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x.$$

$$14.5. y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$$

$$14.6. y'' - 4y' + 8y = e^x (5\sin x - 3\cos x).$$

$$14.7. y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.8. y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x.$$

$$14.9. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x.$$

$$14.10. y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$$

$$14.11. y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$$

$$14.12. y'' - 4y' + 8y = e^x (-3\sin x + 4\cos x).$$

$$14.13. y'' + 2y' = 10e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.14. y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x.$$

$$14.15. y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$$

$$14.16. y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x.$$

$$14.17. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x.$$

$$14.18. y'' - 4y' + 8y = e^x (3\sin x + 5\cos x).$$

$$14.19. y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.20. y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x.$$

$$14.21. y'' + 6y' + 13y = -e^{3x} \cos 5x.$$

$$14.22. y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$$

$$14.23. y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$$

$$14.24. y'' - 4y' + 8y = e^x (2\sin x - \cos x).$$

$$14.25. y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x).$$

$$14.26. y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x.$$

$$14.27. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x.$$

$$14.28. y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$$

$$14.29. y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x.$$

$$14.30. y'' - 4y' + 8y = e^x (-\sin x + 2\cos x).$$

$$14.31. y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x.$$

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

15.1. $y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x$.

15.2. $y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.

15.3. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.

15.4. $y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x$.

15.5. $y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}$.

15.6. $y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x$.

15.7. $y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4x$.

15.8. $y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$.

15.9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x$.

15.10. $y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x$.

15.11. $y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x}$.

15.12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18 \sin 3x - 9 \cos 3x$.

15.13. $y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x$.

15.14. $y'' + 25y = 20 \cos 5x - 10 \sin 5x + 50e^{5x}$.

15.15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64 \cos 4x - 64 \sin 4x$.

15.16. $y'' + 2y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.

15.17. $y'' + 36y = 24 \sin 6x - 12 \cos 6x + 36e^{6x}$.

15.18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.

15.19. $y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x$.

15.20. $y'' + 49y = 14 \sin 7x + 7 \cos 7x - 98e^{7x}$.

15.21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.

15.22. $y'' + 4y' = 16 \operatorname{sh} 4x$.

15.23. $y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}$.

$$15.24. y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x).$$

$$15.25. y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x.$$

$$15.26. y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}.$$

$$15.27. y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}.$$

$$15.28. y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x.$$

$$15.29. y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}.$$

$$15.30. y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x.$$

$$15.31. y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$$

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

$$16.1. y'' + p^2 y = p^2 / \cos px, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.2. y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

$$16.3. y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, \quad y(p/4) = 5, \quad y'(p/4) = 4.$$

$$16.4. y'' - 6y' + 8y = 4 / (1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2.$$

$$16.5. y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} / (1 + e^{-3x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.6. y'' + p^2 y = p^2 / \sin px = 1, \quad y(1/2), \quad y'(1/2) = p^2 / 2.$$

$$16.7. y'' + \frac{1}{p^2} y = \frac{1}{p^2 \cos(x/p)}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.8. y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$$

$$16.9. y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x, \quad y(p/2) = 4, \quad y'(p/2) = 4.$$

$$16.10. y'' - 6y' + 8y = 4 / (2 + e^{-2x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3.$$

$$16.11. y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x} / (2 + e^{2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.12. y'' + 9y = 9 / \sin 3x, \quad y(p/6) = 4, \quad y'(p/6) = 3p/2.$$

$$16.13. y'' + 9y = 9 / \cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.14. y'' - y' = e^{-x} / (2 + e^{-x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$$

$$16.15. y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x, \quad y(p/4) = 3, \quad y'(p/4) = 2.$$

$$16.16. y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8 \ln 2, \quad y'(0) = 14 \ln 2.$$

$$16.17. y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x} / (1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.18. y'' + 16y = 16 / \sin 4x, \quad y(p/8) = 3, \quad y'(p/8) = 2p.$$

$$16.19. y'' + 16y = 16 / \cos 4x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.20. y'' - 2y' = 4e^{-2x} / (1 + e^{-2x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$$

$$16.21. y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}(x/2), \quad y(p) = 2, \quad y'(p) = 1/2.$$

$$16.22. y'' - 3y' + 2y = 1 / (2 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$$

$$16.23. y'' + 3y' + 2y = e^{-x} / (2 + e^x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.24. y'' + 4y = 4 / \sin 2x, \quad y(p/4) = 2, \quad y'(p/4) = p.$$

$$16.25. y'' + 4y = 4 / \cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.26. y'' + y' = e^x / (2 + e^x), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$$

$$16.27. y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, \quad y(p/2) = 1, \quad y'(p/2) = 2.$$

$$16.28. y'' - 3y' + 2y = 1 / (1 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 2 \ln 2, \quad y'(0) = 3 \ln 2.$$

$$16.29. y'' - 3y' + 2y = e^x / (1 + e^{-x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$16.30. y'' + y = 1 / \sin x, \quad y(p/2) = 1, \quad y'(p/2) = p/2.$$

$$16.31. y'' + y = 1 / \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

VI. РЯДЫ

Теоретические вопросы

1. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Теоремы сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши.
4. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
6. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящегося ряда.
7. Понятие равномерной сходимости.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.
12. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
13. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
14. Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.
15. Условие разложимости функции в ряд Тейлора.
16. Разложение по степеням x функций e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$.

Теоретические упражнения.

1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \leq c_n \leq b_n$.

У к а з а н и е. Рассмотреть неравенства $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

3. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |b_n|$ тоже сходится.

У к а з а н и е. Доказать и использовать неравенство $|ab| \leq a^2 + b^2$.

4. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ тоже сходится.

5. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Можно ли утверждать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n ?$$

Рассмотреть пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$.

6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$
 так же сходится равномерно на этом отрезке.

7. Может ли функциональный ряд на отрезке:

а) сходится равномерно и не сходится абсолютно,

б) сходится абсолютно и не сходится равномерно?

Рассмотреть примеры:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, отрезок $[a, b]$ произвольный;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x^2)$, отрезок $[0, 1]$.

8. Показать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}$ всюду непрерывна.

9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty, +\infty)$

Можно ли его дифференцировать в этом интервале?

10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0 , то он сходится

абсолютно $\forall x > x_0$.

Расчетные задания.

Задача 1. Найти сумму ряда.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}.$$

$$1.5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

$$1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

$$1.9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$1.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$$

$$1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}.$$

$$1.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$1.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}.$$

$$1.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}.$$

$$1.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}.$$

$$1.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$$

$$1.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}.$$

$$1.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}.$$

$$1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}.$$

$$1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}.$$

$$1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}.$$

$$1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}.$$

$$1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}.$$

$$1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}.$$

$$1.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}.$$

$$1.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}.$$

$$1.22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$1.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10}.$$

$$1.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}.$$

$$1.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

$$1.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}.$$

$$1.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}.$$

$$1.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}.$$

$$1.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}.$$

Задача 2. Найти сумму ряда.

$$2.1. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$$

$$2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.11. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$$

$$2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.15. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}.$$

$$2.17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$2.19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}.$$

$$2.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}.$$

$$2.6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}.$$

$$2.8. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}.$$

$$2.10. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+1)n}.$$

$$2.14. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}.$$

$$2.16. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}.$$

$$2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$2.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}.$$

$$2.27. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}.$$

$$2.29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$2.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.22. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}.$$

$$2.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$2.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$2.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{(n+3)(n+1)n}.$$

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2+(-1)^n}{n^3}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(np/2)}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

$$3.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n - \ln n}.$$

$$3.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3 + 2}.$$

$$3.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos np)}{2n^2 - 1}.$$

$$3.8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}.$$

$$3.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}.$$

$$3.10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}.$$

$$3.11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2 + 2}.$$

$$3.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}.$$

$$3.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}.$$

$$3.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 (2 + \sin(np/2))}.$$

$$3.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2 + (-1)^n}{6} p.$$

$$3.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}.$$

$$3.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{pn}{2}}{n^2}.$$

$$3.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{pn}{3}}{3^n + 2}.$$

$$3.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos \frac{np}{2}) \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}.$$

$$3.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{np}{4}}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$3.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}.$$

$$3.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}.$$

$$3.23. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}.$$

$$3.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{p} \operatorname{arctg} \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - n}}.$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{p}{2n+1}}{n \left(3 + \sin \frac{pn}{4} \right)}.$$

$$3.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{2p}{3n}}{\sqrt[4]{n^4 - 1}}.$$

$$3.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+2}}.$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} [2 + (-1)^n]}{\ln(1+n)}.$$

$$3.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} (-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}}.$$

$$3.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{3 + (-1)^n}{4}}{2^n + n}.$$

$$3.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2 \sin^2 n}.$$

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}.$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}.$$

$$4.5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

$$4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^5 + \sin 2^n}.$$

$$4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}.$$

$$4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{p}{4\sqrt{n}}.$$

$$4.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{1/\sqrt{n}} - 1 \right).$$

$$4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$$

$$4.19. \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{p}{n}.$$

$$4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{p}{n} \right).$$

$$4.23. \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)} - 1 \right).$$

$$4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2p}{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}.$$

$$4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3)^2}{n^5 + \ln^4 n}.$$

$$4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}.$$

$$4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}.$$

$$4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}.$$

$$4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2}.$$

$$4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}.$$

$$4.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n} - 1 \right) \left(n\sqrt[4]{n^3} - 1 \right)}.$$

$$4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}.$$

$$4.24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}.$$

$$4.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n + n}.$$

$$4.27. \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{1/n} - 1)^2.$$

$$4.28. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$$

$$4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n+5}}.$$

$$4.31. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}.$$

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд.

$$5.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}.$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}.$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}.$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!}.$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!}.$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}.$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$$

$$5.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!}.$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}. \quad ?$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}.$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{p}{2^n}.$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n}.$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}.$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}.$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}.$$

$$5.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n+1} n!}.$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}.$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}}.$$

$$5.28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!}.$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n+1)!}{(3n)!}.$$

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}.$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}.$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3}.$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{p}{4n}.$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$6.4. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3.$$

$$6.8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}.$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$$

$$6.11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}.$$

$$6.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$6.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2.$$

$$6.14. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$$

$$6.15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

$$6.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2}.$$

$$6.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}.$$

$$6.18. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{p}{2n}.$$

$$6.19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

$$6.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$$

$$6.21. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{p}{3n}.$$

$$6.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$6.23. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}.$$

$$6.24. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$$

$$6.25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

$$6.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}.$$

$$6.27. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$$

$$6.28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}.$$

$$6.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}.$$

$$6.30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}.$$

$$6.31. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{p}{4n}.$$

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

$$7.1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}.$$

$$7.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}.$$

$$7.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}.$$

$$7.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}.$$

$$7.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}.$$

$$7.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}.$$

$$7.11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}.$$

$$7.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}.$$

$$7.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}.$$

$$7.17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}.$$

$$7.19. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}.$$

$$7.21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}.$$

$$7.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}.$$

$$7.25. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}.$$

$$7.27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}.$$

$$7.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}.$$

$$7.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}.$$

$$7.8. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}.$$

$$7.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}.$$

$$7.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}.$$

$$7.14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}.$$

$$7.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}.$$

$$7.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$$

$$7.20. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.$$

$$7.22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}.$$

$$7.24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}.$$

$$7.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}.$$

$$7.28. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}.$$

$$7.29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}.$$

$$7.30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$$

$$7.31. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}.$$

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$8.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$8.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

$$8.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n)\ln n}.$$

$$8.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$8.6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}.$$

$$8.7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}.$$

$$8.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt[4]{2n+3}}.$$

$$8.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{p}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$8.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{p}{6n}.$$

$$8.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

$$8.12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$$

$$8.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$8.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$8.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

$$8.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{p}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n + \ln n}}.$$

$$8.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$$

$$8.18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

$$8.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)}.$$

$$8.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$8.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{p}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$$

$$8.22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

$$8.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

$$8.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\left(2/\sqrt{n+4}\right)}.$$

$$8.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{p}{2^n}.$$

$$8.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}.$$

$$8.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

$$8.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

$$8.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$8.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$8.31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

Задача 9. Вычислить сумму ряда с точностью a .

$$9.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}, \quad a = 0,01.$$

$$9.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad a = 0,01.$$

$$9.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \quad a = 0,001.$$

$$9.4. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}, \quad a = 0,001.$$

$$9.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad a = 0,01.$$

$$9.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad a = 0,0001.$$

$$9.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}, \quad a = 0,1.$$

$$9.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}, \quad a = 0,1.$$

$$9.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}, \quad a = 0,001. \quad 9.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad a = 0,0001.$$

$$9.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad a = 0,001.$$

$$9.12. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n, \quad a = 0,01.$$

$$9.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}, \quad a = 0,0001.$$

$$9.14. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad a = 0,1.$$

$$9.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad a = 0,001.$$

$$9.16. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \quad a = 0,01.$$

$$9.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \quad a = 0,00001.$$

$$9.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n)!n!}, \quad a = 0,001.$$

$$9.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}, \quad a = 0,001.$$

$$9.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}, \quad a = 0,001.$$

$$9.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \quad a = 0,00001.$$

$$9.22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos pn}{3^n (n+1)}, \quad a = 0,001.$$

$$9.23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}, \quad a = 0,001.$$

$$9.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(p/2 + pn)}{n^3}, \quad a = 0,01.$$

$$9.25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}, \quad a = 0,001.$$

$$9.26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \quad a = 0,001.$$

$$9.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(p/2 + pn)}{n^3 + 1}, \quad a = 0,01.$$

$$9.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 (n+3)}, \quad a = 0,01.$$

$$9.29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(pn)}{(n^3 + 1)^2}, \quad a = 0,001.$$

$$9.30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}, \quad a = 0,01.$$

$$9.31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(1 + n^3)^2}, \quad a = 0,001.$$

Задача 10. Доказать справедливость равенства. (Ответом служит число Γ получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши.)

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!!}{n^n} = 0.$$

$$10.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2n^2!} = 0.$$

$$10.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0.$$

$$10.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0.$$

$$10.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0.$$

$$10.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$10.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0.$$

$$10.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{n^n} = 0.$$

$$10.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0.$$

$$10.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$10.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

$$10.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{n^n} = 0.$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$10.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

$$10.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$$

$$10.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$10.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$10.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0.$$

$$10.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0.$$

$$10.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$10.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$10.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+1)!]^2} = 0.$$

$$10.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$10.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+3)!} = 0.$$

$$10.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!!}{n^n} = 0.$$

$$10.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$10.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$10.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+2)!]^2} = 0.$$

$$10.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{(2n)!!} = 0.$$

Задача 11. Найти область сходимости функционального ряда.

$$11.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}.$$

$$11.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$11.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}.$$

$$11.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2-4x+6)^n.$$

$$11.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

$$11.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}.$$

$$11.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$11.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}.$$

$$11.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n.$$

$$11.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n (n^2+1)}.$$

$$11.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n+1} \right)^{2x+1}}.$$

$$11.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^3}.$$

$$11.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}.$$

$$11.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n (n^2+5)}.$$

$$11.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n}.$$

$$11.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}.$$

$$11.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

$$11.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}.$$

$$11.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{xn^x}.$$

$$11.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{x^2-1}}.$$

$$11.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2+1)} (25x^2+1)^n.$$

$$11.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}.$$

$$11.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^3+2} \frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}.$$

$$11.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}.$$

$$11.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

$$11.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}.$$

$$11.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+e^x)}.$$

$$11.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-e^x)(n^2+1)}.$$

$$11.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-x)^{1/3}}.$$

$$11.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}.$$

$$11.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}.$$

Задача 12. Найти область сходимости функционального ряда.

$$12.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n} \sin(x+pn).$$

$$12.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n} \sin(2x-pn).$$

$$12.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{4n} \cos(x+pn).$$

$$12.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n} \cos(x-pn).$$

$$12.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}} x^{4n} \sin(3x+pn).$$

$$12.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n} x^{2n} \sin(5x-pn).$$

$$12.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}} x^{2n} \cos(x+pn).$$

$$12.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n} \sin(3x-pn).$$

$$12.9. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \sin \frac{x}{n}.$$

$$12.10. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin \frac{x}{2n}.$$

$$12.11. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin \frac{2x}{n}.$$

$$12.13. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \operatorname{tg} \frac{3x}{n}.$$

$$12.15. \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \operatorname{tg} \frac{2x}{3n}.$$

$$12.17. \sum_{n=1}^{\infty} 16^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$12.19. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \operatorname{arctg} \frac{2x}{n+1}.$$

$$12.21. \sum_{n=1}^{\infty} 27^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2n+3}.$$

$$12.23. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x.$$

$$12.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x.$$

$$12.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x.$$

$$12.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^n x.$$

$$12.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n (2x).$$

$$12.12. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} \sin \frac{3x}{\sqrt{n}}.$$

$$12.14. \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \operatorname{tg} \frac{x}{4\sqrt{n}}.$$

$$12.16. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{3n}.$$

$$12.18. \sum_{n=1}^{\infty} 32^n x^{5n} \arcsin \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$12.20. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}.$$

$$12.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x.$$

$$12.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n} (2x).$$

$$12.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n (3x).$$

$$12.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n (2x).$$

$$12.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x.$$

Задача 13. Найти область сходимости функционального ряда.

$$13.1. \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \sqrt{x-2} \cdot e^{-n^2/(x-1)^3}.$$

$$13.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \cdot 5^{-n/(x+1)^2}.$$

$$13.5. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}.$$

$$13.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n (x+1/n)}{\sqrt{x-e}}.$$

$$13.4. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt{x-1} \cdot e^{-n/x}.$$

$$13.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 3^{n/(x-1)}.$$

$$13.7. \sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n^3 \cdot \sin(x^2+1)/n}.$$

$$13.9. \sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{x}{7^{nx}(x-1)}.$$

$$13.11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \cdot 3^{-n/x^2}.$$

$$13.13. \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \cdot \sin(x^2+1)/n}.$$

$$13.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+1/n) + \ln \ln x)^n}{\sqrt{x - e^{1/e}}}.$$

$$13.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+1/e)}.$$

$$13.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n \sin x}}.$$

$$13.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-n^2 \cdot \ln(1+x/n)}.$$

$$13.23. \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}} \arcsin \frac{x}{3^{nx}}.$$

$$13.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{-n^2 \cdot (\ln n / (x^2+1))}.$$

$$13.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}.$$

$$13.29. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 (\sin 1 / n^2 x^2)}.$$

$$13.31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 4^{-n^2/x}.$$

$$13.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x-1)}.$$

$$13.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+2)}.$$

$$13.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}.$$

$$13.14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n/\cos x}.$$

$$13.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}.$$

$$13.18. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{x \ln n}{x-n}.$$

$$13.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{-n^2 \cdot \arctan(1/(n|x|))}.$$

$$13.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/(x-1))}{e^{n\sqrt{x}}}.$$

$$13.24. \sum_{n=1}^{\infty} n^{2x} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2^{nx}}.$$

$$13.26. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{n/\ln x}.$$

$$13.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{-n(\ln n/x^2)}.$$

$$13.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}.$$

Задача 14. Найти область сходимости функционального ряда.

$$14.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

$$14.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

$$14.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$14.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

$$14.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

$$14.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$14.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}.$$

$$14.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$14.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$14.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

$$14.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$14.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

$$14.13. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}.$$

$$14.14. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

$$14.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}}.$$

$$14.16. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}.$$

$$14.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

$$14.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$$

$$14.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$14.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$14.21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2) (x-3)^{2n}}.$$

$$14.22. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$$

$$14.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

$$14.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}.$$

$$14.25. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

$$14.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

$$14.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}.$$

$$14.28. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (x+4)^n}.$$

$$14.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

$$14.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

$$14.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

Задача 15. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость функционального ряда на отрезке $[0,1]$. При каких n абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит $0.1 \forall x \in [0,1]$?

$$15.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-11}.$$

$$15.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6}.$$

$$15.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-6}.$$

$$15.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-5}}.$$

$$15.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-5}.$$

$$15.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-9}.$$

$$15.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-4}.$$

$$15.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-2}}.$$

$$15.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-11}.$$

$$15.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-7}}.$$

$$15.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-10}.$$

$$15.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-8}.$$

$$15.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-4}}.$$

$$15.14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n-3}.$$

$$15.15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-12}.$$

$$15.16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-7}.$$

$$15.17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-8}.$$

$$15.18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-10}.$$

$$15.19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-7}.$$

$$15.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-7}.$$

$$15.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-13}.$$

$$15.22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-21}}.$$

$$15.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-5}.$$

$$15.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-19}}.$$

$$15.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{8n-11}.$$

$$15.26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-11}}.$$

$$15.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-12}}.$$

$$15.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-3}}.$$

$$15.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{9n-15}.$$

$$15.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{10n-12}.$$

$$15.31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-6}}.$$

Задача 16. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость на указанном отрезке.

$$16.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad [0, 2].$$

$$16.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}, \quad [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}].$$

$$16.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad [-2, 2].$$

$$16.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}].$$

$$16.5. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$16.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}, \quad [-1, 6].$$

$$16.7. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad [2, 4].$$

$$16.8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p-x) \cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, \quad [0, p].$$

$$16.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}, \quad [-1, 3].$$

$$16.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad [-5, -1].$$

$$16.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}, [1, 3].$$

$$16.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, [-3, 3].$$

$$16.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}].$$

$$16.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}, [-2, 2].$$

$$16.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, [-7, -3].$$

$$16.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, [-3, -1].$$

$$16.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$16.18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$16.19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}, [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}].$$

$$16.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, [-6, -4].$$

$$16.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}, [1, 3].$$

$$16.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1) \sin^2 nx}{n \sqrt{n+1}}, [-3, 0].$$

$$16.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, [-1, 1].$$

$$16.24. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}}, [-6, -4].$$

$$16.25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, [-2, 2].$$

$$16.26. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{p}{2^n} \right) (x-2)^n, [1, 3].$$

$$16.27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}, [0, 2].$$

$$16.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n 4^n}, [-1, 0].$$

$$16.29. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(x+2)^n}{(n+1) \sqrt[3]{n+2}}, [-3, -1].$$

$$16.30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n \sqrt{n+1}}, [2, 4].$$

$$16.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)}, [-2, 0].$$

Задача 17. Найти сумму ряда.

$$17.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n-1}.$$

$$17.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

$$17.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+2}.$$

$$17.5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$17.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}.$$

$$17.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$17.11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$17.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$$17.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}.$$

$$17.17. \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n-1}.$$

$$17.19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$17.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$$

$$17.23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$17.25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}.$$

$$17.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

$$17.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$17.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{x^n}.$$

$$17.8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$17.10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{16^n (2n+1)}.$$

$$17.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n.$$

$$17.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

$$17.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] x^{2n}.$$

$$17.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1) x^{n+1}}.$$

$$17.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}.$$

$$17.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n.$$

$$17.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^n + \frac{(-1)^n}{n} \right] x^n.$$

$$17.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

$$17.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}.$$

$$17.29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}}.$$

$$17.31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Задача 18. Найти сумму ряда.

$$18.1. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 9n + 5)x^{n+1}.$$

$$18.3. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^{n+3}.$$

$$18.5. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 3)x^n.$$

$$18.7. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 8n + 5)x^{n+2}.$$

$$18.9. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 7n + 5)x^{n+1}.$$

$$18.11. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)x^{n+2}.$$

$$18.13. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 1)x^n.$$

$$18.15. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 7n + 4)x^n.$$

$$18.17. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 2n + 1)x^n.$$

$$18.19. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 2)x^{n+2}.$$

$$19.21. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4)x^{n+2}.$$

$$18.23. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 1)x^{n+1}.$$

$$17.30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

$$18.2. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 4)x^n.$$

$$18.4. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 4n + 3)x^{n+2}.$$

$$18.6. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 5n + 3)x^{n+1}.$$

$$18.8. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + 8n + 5)x^n.$$

$$18.10. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 7n + 5)x^n.$$

$$18.12. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n.$$

$$18.14. \sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 5n + 4)x^{n+1}.$$

$$18.16. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - n - 2)x^{n+1}.$$

$$18.18. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}.$$

$$18.20. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 3)x^{n+1}.$$

$$18.22. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1)x^n.$$

$$18.24. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n + 2)x^n.$$

$$18.25. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 2) x^{n+1}.$$

$$18.26. \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 6n + 5) x^n.$$

$$18.27. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 6n + 5) x^{n+1}.$$

$$18.28. \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1) x^{n+2}.$$

$$18.29. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n + 1) x^{n+1}.$$

$$18.30. \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n - 1) x^n.$$

$$18.31. \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5) x^{n+1}.$$

Задача 19. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x .

$$19.1. \frac{9}{20 - x - x^2}.$$

$$19.2. \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}.$$

$$19.3. \ln(1 - x - 6x^2).$$

$$19.4. 2x \cos^2(x/2) - x.$$

$$19.5. \frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2.$$

$$19.6. \frac{7}{12 + x - x^2}.$$

$$19.7. \frac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}.$$

$$19.8. \ln(1 + x - 6x^2).$$

$$19.9. (x - 1) \sin 5x.$$

$$19.10. \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}.$$

$$19.11. \frac{6}{8 + 2x - x^2}.$$

$$19.12. \frac{1}{\sqrt[4]{16 - 3x}}.$$

$$19.13. \ln(1 - x - 12x^2).$$

$$19.14. (3 + e^{-x})^2.$$

$$19.15. \frac{\arcsin x}{x} - 1.$$

$$19.16. \frac{7}{12 - x - x^2}.$$

$$19.17. x^2 \sqrt{4 - 3x}.$$

$$19.18. \ln(1 + 2x - 8x^2).$$

$$19.19. 2x \sin^2(x/2) - x.$$

$$19.20. (x - 1) \operatorname{sh} x.$$

$$19.21. \frac{5}{6 + x - x^2}.$$

$$19.22. x \sqrt[3]{27 - 2x}.$$

$$19.23. \ln(1 + x - 12x^2).$$

$$19.24. \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x.$$

$$19.25. \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$19.27. \sqrt[4]{16-5x}.$$

$$19.29. (2-e^x)^2.$$

$$19.31. \frac{3}{2-x-x^2}.$$

$$19.26. \frac{5}{6-x-x^2}.$$

$$19.28. \ln(1-x-20x^2).$$

$$19.30. (x-1)\operatorname{ch} x.$$

Задача 20. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$20.1. \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$$

$$20.3. \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

$$20.5. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$$

$$20.7. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

$$20.9. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx.$$

$$20.11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$$

$$20.13. \int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx.$$

$$20.15. \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$$

$$20.17. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$$

$$20.19. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx.$$

$$20.2. \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$$

$$20.4. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$20.6. \int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx.$$

$$20.8. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$$

$$20.10. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

$$20.12. \int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

$$20.14. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$$

$$20.16. \int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx.$$

$$20.18. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

$$20.20. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

$$20.21. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$$

$$20.23. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

$$20.25. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$$

$$20.27. \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$$

$$20.29. \int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx.$$

$$20.31. \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx.$$

$$20.22. \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$$

$$20.24. \int_0^{0,4} \cos(5x/2)^2 dx.$$

$$20.26. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$20.28. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

$$20.30. \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теоретические вопросы

1. Определение двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах.

Теоретические упражнения

1. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^m y^n dx dy = 0,$$

если m и n - натуральные числа, и, по меньшей мере, одно из них нечетно.

2. С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{pR^2} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ - непрерывная функция.

3. Оценить интеграл

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2,$$

т.е. указать, между какими значениями заключена его величина.

4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

если область D - прямоугольник $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, а $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$.

5. Доказать равенство

$$\iint_D f(x) g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

если область D - прямоугольник $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad a > 0.$$

7. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x) f(x) dx.$$

8. Какой из интегралов больше

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dz \quad \text{или} \quad \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz,$$

если $f(x, y, z) > 0$?

Расчетные задания

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

$$1.1. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f \, dx.$$

$$1.2. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f \, dx.$$

$$1.3. \int_0^1 dy \int_0^y f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f \, dx.$$

$$1.4. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f \, dx.$$

$$1.5. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f \, dy.$$

$$1.6. \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f \, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f \, dx.$$

$$1.7. \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f \, dx.$$

$$1.8. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f \, dx.$$

$$1.9. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f \, dy.$$

$$1.10. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f \, dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f \, dy.$$

$$1.11. \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f \, dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f \, dy.$$

$$1.12. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f \, dx.$$

$$1.13. \int_0^{p/4} dy \int_0^{\sin y} f \, dx + \int_{p/4}^{p/2} dy \int_0^{\cos y} f \, dx.$$

$$1.14. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f \, dy.$$

$$1.15. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f \, dx.$$

$$1.16. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f \, dx.$$

$$1.17. \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f \, dx.$$

$$1.18. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f \, dx.$$

$$1.19. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f \, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f \, dy.$$

$$1.20. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f \, dx.$$

$$1.21. \int_0^1 dy \int_0^y f \, dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f \, dx.$$

$$1.22. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dy.$$

$$1.23. \int_0^{p/4} dx \int_0^{\sin x} f \, dy + \int_{p/4}^{p/2} dx \int_0^{\cos x} f \, dy.$$

$$1.24. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f \, dx.$$

$$1.25. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f \, dy.$$

$$1.26. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f \, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f \, dy.$$

$$1.27. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f \, dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f \, dy.$$

$$1.28. \int_0^1 dx \int_0^x f \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dy.$$

$$1.29. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f \, dx.$$

$$1.30. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f \, dy.$$

$$1.31. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f \, dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f \, dy.$$

Задача 2. Вычислить.

$$2.1. \iint_D (12x^2 y^2 + 16x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.2. \iint_D (9x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.3. \iint_D (36x^2 y^2 - 96x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.4. \iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.5. \iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.6. \iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

$$2.7. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.9. \iint_D (4xy + 3x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.11. \iint_D (8xy + 9x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.13. \iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.15. \iint_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.17. \iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.19. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.21. \iint_D (44xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.23. \iint_D (xy - 4x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.8. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.10. \iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.12. \iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.14. \iint_D (8xy + 18x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

$$2.16. \iint_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.18. \iint_D (6xy + 24x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.20. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.22. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.24. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$2.25. \iint_D \left(6x^2 y^2 + \frac{25}{3} x^4 y^4 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.27. \iint_D \left(3x^2 y^2 + \frac{50}{3} x^4 y^4 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$2.29. \iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.31. \iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$2.26. \iint_D (9x^2 y^2 + 25x^4 y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$2.28. \iint_D (9x^2 y^2 + 25x^4 y^4) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$2.30. \iint_D (xy - 9x^5 y^5) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

Задача 3. Вычислить.

$$3.1. \iint_D y e^{xy/2} dx dy;$$

$$D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4.$$

$$3.3. \iint_D y \cos xy dx dy;$$

$$D: y=p/2, y=p, x=1, x=2.$$

$$3.5. \iint_D y \sin xy dx dy;$$

$$D: y=p/2, y=p, x=1, x=2.$$

$$3.7. \iint_D 4y e^{2xy} dx dy;$$

$$D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1.$$

$$3.2. \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{p}, y=\frac{x}{2}.$$

$$3.4. \iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy;$$

$$D: x=0, y=2, y=x.$$

$$3.6. \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{p/2}, y=x/2.$$

$$3.8. \iint_D 4y^2 \sin xy dx dy;$$

$$D: x=0, y=\sqrt{\frac{p}{2}}, y=x.$$

$$3.9. \iint_D y \cos 2xy \, dx dy;$$

$$D: y = \frac{p}{2}, y = p, x = \frac{1}{2}, x = 1.$$

$$3.11. \iint_D 12y \sin 2xy \, dx dy;$$

$$D: y = \frac{p}{4}, y = \frac{p}{2}, x = 2, x = 3.$$

$$3.13. \iint_D y e^{xy/4} \, dx dy;$$

$$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 4, x = 8.$$

$$3.15. \iint_D 2y \cos 2xy \, dx dy;$$

$$D: y = \frac{p}{4}, y = \frac{p}{2}, x = 1, x = 2.$$

$$3.17. \iint_D y \sin xy \, dx dy;$$

$$D: y = p, y = 2p, x = \frac{1}{2}, x = 1.$$

$$3.19. \iint_D 8y e^{4xy} \, dx dy;$$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}.$$

$$3.21. \iint_D y \cos xy \, dx dy;$$

$$D: y = p, y = 3p, x = 1/2, x = 1.$$

$$3.23. \iint_D y \sin 2xy \, dx dy;$$

$$D: y = p/2, y = 3p/2, x = 1/2, x = 2.$$

$$3.10. \iint_D y^2 e^{-xy/8} \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.12. \iint_D y^2 \cos xy \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{p}, y = x.$$

$$3.14. \iint_D y^2 \sin 2xy \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2p}, y = 2x.$$

$$3.16. \iint_D y^2 e^{-xy/2} \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2}, y = x.$$

$$3.18. \iint_D y^2 \cos 2xy \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\frac{p}{2}}, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.20. \iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{\frac{4p}{3}}, y = \frac{2}{3}x.$$

$$3.22. \iint_D y^2 e^{-xy/2} \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = 1, y = \frac{x}{2}.$$

$$3.24. \iint_D y^2 \cos xy \, dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{p}, y = 2x.$$

$$3.25. \iint_D 6ye^{xy/3} dx dy;$$

$$D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 3, x = 6.$$

$$3.26. \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{p}, y = x.$$

$$3.27. \iint_D y \cos 2xy dx dy;$$

$$D: y = p/2, y = 3p/2, x = 1/2, x = 2.$$

$$3.28. \iint_D y^2 e^{-xy/8} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = 4, y = 2x.$$

$$3.29. \iint_D 3y \sin xy dx dy;$$

$$D: y = p/2, y = 3p, x = 1, x = 3.$$

$$3.30. \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy;$$

$$D: x = 0, y = \sqrt{2p}, y = 2x.$$

$$3.31. \iint_D 12ye^{6xy} dx dy;$$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = 1/6, x = 1/3.$$

Задача 4. Вычислить.

$$4.1. \iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = 0, y = 1, y = x, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$4.2. \iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = 2, y = p, z = 1, \\ x = 0, y = 1, z = 0. \end{cases}$$

$$4.3. \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = 0, y = -2, y = 4x, \\ z = 0, z = 2. \end{cases}$$

$$4.4. \iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = -1, y = 2, z = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$4.5. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = 1, y = 2x, y = 0, \\ z = 0, z = 36. \end{cases}$$

$$4.6. \iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x = 1, y = 2p, z = 2, \\ x = 0, y = 1, z = 0. \end{cases}$$

$$4.7. \iiint_V y^2 \cos\left(\frac{p}{4}xy\right) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x/2, \\ z=0, z=-p^2. \end{cases}$$

$$4.9. \iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-2, y=4x, \\ z=0, z=1. \end{cases}$$

$$4.11. \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=8. \end{cases}$$

$$4.13. \iiint_V y^2 e^{xy/2} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=2, y=2x, \\ z=0, z=-1. \end{cases}$$

$$4.15. \iiint_V y^2 \cos\left(\frac{pxy}{2}\right) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2p^2. \end{cases}$$

$$4.17. \iiint_V y^2 \cos(pxy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=1, y=2x, \\ z=0, z=p^2. \end{cases}$$

$$4.19. \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(2xy) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=-1, y=x, y=0, \\ z=0, z=8. \end{cases}$$

$$4.8. \iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{4} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=2p, z=4, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.10. \iiint_V 2y^2 z e^{2xyz} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.12. \iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.14. \iiint_V y^2 z \cos \frac{xyz}{3} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=3, y=1, z=2p, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.16. \iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=-1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.18. \iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz) dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=1/2, z=1/2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.20. \iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{2} dx dy dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=4, z=p, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.21. \quad \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(xy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2. \end{cases}$$

$$4.23. \quad \iiint_V x^2 \cos\left(\frac{p}{2}xy\right) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=x, y=0, \\ z=0, z=p. \end{cases}$$

$$4.25. \quad \iiint_V x^2 \cos(pxy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=2x, y=0, \\ z=0, z=4p. \end{cases}$$

$$4.27. \quad \iiint_V y^2 \operatorname{ch}(3xy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=0, y=2, y=6x, \\ z=0, z=-3. \end{cases}$$

$$4.29. \quad \iiint_V x^2 \sin(4pxy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=x/2, y=0, \\ z=0, z=8p. \end{cases}$$

$$4.31. \quad \iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=x/2, y=0, \\ z=0, z=1. \end{cases}$$

$$4.22. \quad \iiint_V x^2 z \operatorname{ch}(xyz) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.24. \quad \iiint_V y^2 z \cos\frac{xyz}{9} \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=9, y=1, z=2p, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.26. \quad \iiint_V y^2 z \operatorname{ch}\left(\frac{xyz}{2}\right) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.28. \quad \iiint_V 2y^2 z \operatorname{ch}(2xyz) \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=\frac{1}{2}, y=2, z=-1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

$$4.30. \quad \iiint_V 8y^2 z e^{-xyz} \, dx \, dy \, dz;$$

$$V \begin{cases} x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$$

Задача 5. Вычислить.

$$\iiint_V x \, dx \, dy \, dz;$$

5.1. $V : y = 10x, y = 0, x = 1,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V 15(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz;$$

5.3. $V : z = x + y, x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (1 + 2x^3) \, dx \, dy \, dz;$$

5.5. $V : y = 9x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz;$$

5.7. $V : y = 15x, y = 0, x = 1,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V (3x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz;$$

5.9. $V : z = 10y, x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (4 + 8z^3) \, dx \, dy \, dz;$$

5.11. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4};$$

5.2. $V : 1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (3x + 4y) \, dx \, dy \, dz;$$

5.4. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = 5(x^2 + y^2), z = 0.$

$$\iiint_V (27 + 54y^3) \, dx \, dy \, dz;$$

5.6. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^5};$$

5.8. $V : \frac{x}{16} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (15x + 30z) \, dx \, dy \, dz;$$

5.10. $V : z = x^2 + 3y^2, z = 0,$
 $y = x, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (1 + 2x^3) \, dx \, dy \, dz;$$

5.12. $V : y = 36x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V 21xz \, dx \, dy \, dz;$$

5.13. $V : y = x, y = 0, x = 2,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V (x^2 + 3y^2) \, dx \, dy \, dz;$$

5.15. $V : z = 10x, x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V \left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3} \right) dx \, dy \, dz;$$

5.17. $V : y = 9x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V 3y^2 \, dx \, dy \, dz;$$

5.19. $V : y = 2x, y = 0, x = 2,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz;$$

5.21. $V : z = 10(x + 3y), x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V 63(1 + 2\sqrt{y}) \, dx \, dy \, dz;$$

5.23. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} \right)^6};$$

5.14. $V : \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (60y + 90z) \, dx \, dy \, dz;$$

5.16. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = x^2 + y^2, z = 0.$

$$\iiint_V (9 + 18z) \, dx \, dy \, dz;$$

5.18. $V : y = 4x, y = 0, x = 1,$
 $z = \sqrt{xy}, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} \right)^6};$$

5.20. $V : \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (8y + 12z) \, dx \, dy \, dz;$$

5.22. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = 3x^2 + 2y^2, z = 0.$

$$\iiint_V (x + y) \, dx \, dy \, dz;$$

5.24. $V : y = x, y = 0, x = 1,$
 $z = 30x^2 + 60y^2, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^6};$$

5.25. $V: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz;$$

5.27. $V: z = 10(3x + y), x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V (x^2 + 4y^2) \, dx \, dy \, dz;$$

5.29. $V: z = 20(2x + y), x + y = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

$$\iiint_V x^2 z \, dx \, dy \, dz;$$

5.31. $V: y = 3x, y = 0, x = 2,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz;$$

5.26. $V: y = x, y = 0, x = 2,$
 $z = xy, z = 0.$

$$\iiint_V \left(5x + \frac{3z}{2}\right) dx \, dy \, dz;$$

5.28. $V: y = x, y = 0, x = 2,$
 $z = x^2 + 15y^2, z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)^6};$$

5.30. $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1,$
 $x = 0, y = 0, z = 0.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

6.1. $y = 3/x, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

6.2. $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

6.3. $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 \, (y \leq 0).$

6.4. $x = 8 - y^2, x = -2y.$

$$6.5. y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$$

$$6.6. y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$$

$$6.7. x = 5 - y^2, x = -4y.$$

$$6.8. x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 \ (y \leq 0).$$

$$6.9. y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 \ (x \geq 0).$$

$$6.10. y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 9.$$

$$6.11. y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x = 0 \ (x \geq 0).$$

$$6.12. y = \sin x, y = \cos x, x = 0, \ (x \geq 0).$$

$$6.13. y = 20 - x^2, y = -8x.$$

$$6.14. y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$$

$$6.15. y = 32 - x^2, y = -4x.$$

$$6.16. y = 2/x, y = 5e^x, y = 2, y = 5.$$

$$6.17. x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2 \ (y \geq 0).$$

$$6.18. y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 4.$$

$$6.19. y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0 \ (x \geq 0).$$

$$6.20. y = 25/4 - x^2, y = x - 5/2.$$

$$6.21. y = \sqrt{x}, y = 1/x, x = 16.$$

$$6.22. y = 2/x, y = 7e^x, y = 2, y = 7.$$

$$6.23. x = 27 - y^2, x = -6y.$$

$$6.24. x = \sqrt{72 - y^2}, 6x = y^2, y = 0 \ (y \geq 0).$$

$$6.25. y = \sqrt{6 - x^2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$$

$$6.26. y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4.$$

$$6.27. y = \sin x, y = \cos x, x = 0, \ (x \leq 0).$$

$$6.28. y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6.$$

$$6.29. y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 9.$$

$$6.30. y = 11 - x^2, y = -10x.$$

$$6.31. x^2 + y^2 = 12, x\sqrt{6} = y^2 \ (x \geq 0).$$

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

$$7.1. y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$7.2. x^2 - 8x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, y = x/\sqrt{3}.$$

$$y^2 - 6y + x^2 = 0,$$

$$7.3. y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$7.4. x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, y = x.$$

$$y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

7.5. $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

7.7. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y = x, x = 0.$

$$y^2 - 6y + x^2 = 0,$$

7.9. $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = x, x = 0.$

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

7.11. $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
 $y = \sqrt{3}x, x = 0.$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

7.13. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y = \sqrt{3}x, x = 0.$

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

7.15. $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = 0.$

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

7.17. $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

7.19. $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

7.6. $x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.8. $x^2 - 10x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = \sqrt{3}x.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.10. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.12. $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.14. $x^2 - 8x + y^2 = 0,$
 $y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.16. $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.18. $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

7.20. $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
 $y = 0, y = x.$

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

$$7.21. \quad y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$y = x, \quad x = 0.$$

$$y^2 - 6y + x^2 = 0,$$

$$7.23. \quad y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$y = x, \quad x = 0.$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$7.25. \quad y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$y = x, \quad x = 0.$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$7.27. \quad y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$y = \sqrt{3}x, \quad x = 0.$$

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$

$$7.29. \quad y^2 - 10y + x^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, \quad x = 0.$$

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$7.31. \quad y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, \quad x = 0.$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$7.22. \quad x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$7.24. \quad x^2 - 8x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$7.26. \quad x^2 - 8x + y^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$7.28. \quad x^2 - 6x + y^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0,$$

$$7.30. \quad x^2 - 10x + y^2 = 0,$$

$$y = x/\sqrt{3}, \quad y = \sqrt{3}x.$$

Задача 8. Пластика D задана ограничивающими ее кривыми, m - поверхностная плотность. Найти массу пластины.

$$8.1. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2+y.$$

$$8.2. \quad D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,$$

$$x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m=(x+y)/(x^2+y^2).$$

$$8.3. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/2+5y.$$

$$8.5. \quad D: x=2, y=0, y^2=2x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/8+2y.$$

$$8.7. \quad D: x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/2+6y.$$

$$8.9. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \geq 0);$$

$$m=x+3y^2.$$

$$8.11. \quad D: x=1, y=0, y^2=x \quad (y \geq 0);$$

$$m=3x+6y^2.$$

$$8.13. \quad D: x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y \geq 0);$$

$$m=2x+3y^2.$$

$$8.15. \quad D: x=\frac{1}{2}, y=0, y^2=8x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x+3y^2.$$

$$8.17. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2+2y.$$

$$D: x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16,$$

$$8.4. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m=(2x+5y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=16,$$

$$8.6. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m=(x+y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=25,$$

$$8.8. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \leq 0);$$

$$m=(2x-3y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9,$$

$$8.10. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \leq 0);$$

$$m=(x-y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=25,$$

$$8.12. \quad x=0, y=0 \quad (x \leq 0, y \geq 0);$$

$$m=(2y-x)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16,$$

$$8.14. \quad x=0, y=0 \quad (x \leq 0, y \geq 0);$$

$$m=(2y-3x)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16,$$

$$8.16. \quad x=0, y=0 \quad (x \leq 0, y \geq 0);$$

$$m=(2y-5x)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=16,$$

$$8.18. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m=(x+3y)/(x^2+y^2).$$

$$8.19. \quad D: x=2, y^2=2x, y=0 \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/4+y/2.$$

$$8.21. \quad D: x=2, y=0, y^2=2x \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/4+y.$$

$$8.23. \quad D: x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y \geq 0);$$

$$m=7x^2/2+8y.$$

$$8.25. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \geq 0);$$

$$m=6x+3y^2.$$

$$8.27. \quad D: x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y \geq 0);$$

$$m=4x+6y^2.$$

$$8.29. \quad D: x=\frac{1}{2}, y=0, y^2=2x \quad (y \geq 0);$$

$$m=4x+9y^2.$$

$$8.31. \quad D: x=\frac{1}{4}, y=0, y^2=16x \quad (y \geq 0);$$

$$m=16x+9y^2/2.$$

$$D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,$$

$$8.20. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0);$$

$$m=(x+2y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=9,$$

$$8.22. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \leq 0);$$

$$m=(2x-y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=25,$$

$$8.24. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \leq 0);$$

$$m=(x-4y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16,$$

$$8.26. \quad x=0, y=0 \quad (x \geq 0, y \leq 0);$$

$$m=(3x-y)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9,$$

$$8.28. \quad x=0, y=0 \quad (x \leq 0, y \geq 0);$$

$$m=(y-4x)/(x^2+y^2).$$

$$D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9,$$

$$8.30. \quad x=0, y=0 \quad (x \leq 0, y \geq 0);$$

$$m=(y-2x)/(x^2+y^2).$$

Задача 9. Пластика D задана неравенствами, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластины.

- 9.1. $D: x^2 + y^2/4 \leq 1;$
 $m = y^2.$
- 9.2. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 2;$
 $y \geq 0, y \leq \frac{2}{3}x;$
 $m = y/x.$
- 9.3. $D: x^2/9 + y^2/25 \leq 1;$
 $y \geq 0;$
 $m = x^2 y.$
- 9.4. $D: x^2/9 + y^2/25 \leq 1;$
 $y \geq 0;$
 $m = 7x^2 y/18.$
- 9.5. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 4;$
 $y \geq 0, y \leq x/2;$
 $m = 8y/x^3.$
- 9.6. $D: x^2/9 + y^2 \leq 1;$
 $x \geq 0;$
 $m = 7xy^6.$
- 9.7. $D: x^2/4 + y^2 \leq 1;$
 $m = 4y^4.$
- 9.8. $D: 1 \leq x^2/4 + y^2/9 \leq 4;$
 $x \geq 0, y \leq 3x/2;$
 $m = x/y.$
- 9.9. $D: 1 \leq x^2/16 + y^2/4 \leq 4;$
 $x \geq 0, y \leq x/2;$
 $m = x/y.$
- 9.10. $D: x^2/4 + y^2/9 \leq 1;$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = x^3 y.$
- 9.11. $D: x^2/4 + y^2 \leq 1;$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 6x^3 y^3.$
- 9.12. $D: 1 \leq x^2/4 + y^2 \leq 25;$
 $x \geq 0, y \leq x/2;$
 $m = x/y^3.$
- 9.13. $D: x^2/9 + y^2/4 \leq 1;$
 $m = x^2 y^2.$
- 9.14. $D: x^2/16 + y^2 \leq 1;$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 5xy^7.$
- 9.15. $D: x^2/4 + y^2 \leq 1;$
 $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 30x^3 y^7.$
- 9.16. $D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 3;$
 $y \geq 0, y \leq \frac{2}{3}x;$
 $m = y/x.$

$$D: x^2 + y^2/25 \leq 1;$$

9.17. $y \geq 0;$
 $m = 7x^4 y.$

$$D: x^2/4 + y^2/9 \leq 1;$$

9.19. $m = x^2.$

$$D: x^2/9 + y^2 \leq 1;$$

9.21. $x \geq 0;$
 $m = 11xy^8.$

$$D: 1 \leq x^2/9 + y^2/4 \leq 5;$$

9.23. $x \geq 0, y \leq 2x/3;$
 $m = x/y.$

$$D: x^2/4 + y^2/25 \leq 1;$$

9.25. $m = x^4.$

$$D: 1 \leq x^2/4 + y^2/9 \leq 36;$$

9.27. $x \geq 0, y \geq \frac{3}{2}x;$
 $m = 9x/y^3.$

$$D: x^2/16 + y^2 \leq 1;$$

9.29. $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 105x^3 y^9.$

$$D: 1 \leq x^2/16 + y^2 \leq 3;$$

9.31. $x \geq 0, y \geq x/4;$
 $m = x/y^5.$

$$D: x^2 + y^2/9 \leq 1;$$

9.18. $y \geq 0;$
 $m = 35x^4 y^3.$

$$D: 1 \leq x^2 + y^2/16 \leq 9;$$

9.20. $y \geq 0, y \leq 4x;$
 $m = y/x^3.$

$$D: 1 \leq x^2/4 + y^2/16 \leq 5;$$

9.22. $x \geq 0, y \leq 2x;$
 $m = x/y.$

$$D: x^2/4 + y^2/9 \leq 1;$$

9.24. $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = x^5 y.$

$$D: x^2 + y^2/4 \leq 1;$$

9.26. $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 15x^5 y^3.$

$$D: x^2/100 + y^2 \leq 1;$$

9.28. $x \geq 0, y \geq 0;$
 $m = 6xy^9.$

$$D: 1 \leq x^2/9 + y^2/16 \leq 2;$$

9.30. $y \geq 0, y \leq \frac{4}{3}x;$
 $m = 27y/x^5.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$10.1. \quad y = 16\sqrt{2x}, \quad y = \sqrt{2x}, \\ z = 0, \quad x + z = 2.$$

$$10.2. \quad y = 5\sqrt{x}, \quad y = 5x/3, \\ z = 0, \quad z = 5 + 5\sqrt{x}/3.$$

$$10.3. \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \\ z = 0, \quad z = 15x.$$

$$10.4. \quad x + y = 2, \quad y = \sqrt{x}, \\ z = 12y, \quad z = 0.$$

$$10.5. \quad x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \\ z = 0, \quad z + y = 1/2.$$

$$10.6. \quad x = 5\sqrt{y}/2, \quad x = 5y/6, \\ z = 0, \quad z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$$

$$10.7. \quad x^2 + y^2 = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \\ z = 0, \quad z = 30y.$$

$$10.8. \quad x + y = 2, \quad x = \sqrt{y}, \\ z = 12x/5, \quad z = 0.$$

$$10.9. \quad y = 17\sqrt{2x}, \quad y = 2\sqrt{2x}, \\ z = 0, \quad x + z = 1/2.$$

$$10.10. \quad y = 5\sqrt{x}/3, \quad y = 5x/9, \\ z = 0, \quad z = 5(3 + \sqrt{x})/9.$$

$$10.11. \quad x^2 + y^2 = 8, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = 0, \\ z = 0, \quad z = 15x/11.$$

$$10.12. \quad x + y = 4, \quad y = \sqrt{2x}, \\ z = 3y, \quad z = 0.$$

$$10.13. \quad x = \frac{5}{6}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{18}y, \\ z = 0, \quad z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{y}).$$

$$10.14. \quad x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \\ z = 0, \quad z + y = 2.$$

$$10.15. \quad x^2 + y^2 = 8, \quad x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \\ z = 30y/11, \quad z = 0.$$

$$10.16. \quad x + y = 4, \quad x = \sqrt{2y}, \\ z = 3x/5, \quad z = 0.$$

$$10.17. \quad y = 6\sqrt{3x}, \quad y = \sqrt{3x}, \\ z = 0, \quad x + z = 3.$$

$$10.18. \quad y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, \quad y = \frac{5}{18}x, \\ z = 0, \quad z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x}).$$

$$10.19. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 18, \quad y = \sqrt{3x}, \quad y = 0, \\ z &= 0, \quad z = 5x/11. \end{aligned}$$

$$10.20. \quad \begin{aligned} x + y &= 6, \quad y = \sqrt{3x}, \\ z &= 4y, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$10.21. \quad \begin{aligned} x &= 7\sqrt{3y}, \quad x = 2\sqrt{3y}, \\ z &= 0, \quad z + y = 3. \end{aligned}$$

$$10.22. \quad \begin{aligned} x &= 5\sqrt{y}/3, \quad x = 5y/9, \\ z &= 0, \quad z = 5(3 + \sqrt{y})/9. \end{aligned}$$

$$10.23. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 18, \quad x = \sqrt{3y}, \quad x = 0, \\ z &= 0, \quad z = 10y/11. \end{aligned}$$

$$10.24. \quad \begin{aligned} x + y &= 6, \quad x = \sqrt{3y}, \\ z &= 4x/5, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$10.25. \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{15x}, \quad y = \sqrt{15x}, \\ z &= 0, \quad z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}). \end{aligned}$$

$$10.26. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 50, \quad y = \sqrt{5x}, \\ y &= 0, \quad z = 0, \quad z = 3x/11. \end{aligned}$$

$$10.27. \quad \begin{aligned} x + y &= 8, \quad y = \sqrt{4x}, \\ z &= 3y, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$10.28. \quad \begin{aligned} x &= 16\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \\ z + y &= 2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$10.29. \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{y}, \quad x = 15y, \\ z &= 0, \quad z = 15(1 + \sqrt{y}). \end{aligned}$$

$$10.30. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 50, \quad x = \sqrt{5y}, \\ x &= 0, \quad z = 0, \quad z = 6y/11. \end{aligned}$$

$$10.31. \quad \begin{aligned} x &= 17\sqrt{2y}, \quad x = 2\sqrt{2y}, \\ z &= 0, \quad z + y = 1/2. \end{aligned}$$

Задача 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$11.1. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2y, \\ z &= 5/4 - x^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.2. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.3. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8\sqrt{2}x, \\ z &= x^2 + y^2 - 64, \\ z &= 0 \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

$$11.4. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x &= 0, \\ z &= 8 - y^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 9x,$$

11.5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0,$
 $y = 0 \quad (y \leq 0)$

11.7. $x^2 + y^2 = 2y,$
 $z = 9/4 - x^2, \quad z = 0.$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0,$$

11.9. $z = x^2 + y^2 - 4,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

$$x^2 + y^2 = 7x, \quad x^2 + y^2 = 9x,$$

11.11. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0,$
 $y = 0 \quad (y \leq 0)$

11.13. $x^2 + y^2 = 2y,$
 $z = 13/4 - x^2, \quad z = 0.$

$$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x,$$

11.15. $z = x^2 + y^2 - 36,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

11.17. $x^2 + y^2 = 4x,$
 $z = 12 - y^2, \quad z = 0.$

$$x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x,$$

11.19. $z = x^2 + y^2 - 16,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

$$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y,$$

11.6. $z = x^2 + y^2 - 36,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

11.8. $x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 5y,$
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$

11.10. $x^2 + y^2 = 4x,$
 $z = 10 - y^2, \quad z = 0.$

$$x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y,$$

11.12. $z = x^2 + y^2 - 64,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

11.14. $x^2 + y^2 = 3y, \quad x^2 + y^2 = 6y,$
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y,$$

11.16. $z = x^2 + y^2 - 4,$
 $z = 0 \quad (z \geq 0).$

$$x^2 + y^2 = 8x, \quad x^2 + y^2 = 11x,$$

11.18. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0,$
 $y = 0 \quad (y \leq 0)$

11.20. $x^2 + y^2 = 4y,$
 $z = 4 - x^2, \quad z = 0.$

$$11.21. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4y, \quad x^2 + y^2 = 7y, \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.23. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &= 0, \\ z &= 17/4 - y^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.25. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x &= 0, \\ z &= x^2 + y^2 - 4, \\ z &= 0 \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

$$11.27. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10x, \quad x^2 + y^2 = 13x, \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \\ y &= 0 \quad (y \geq 0) \end{aligned}$$

$$11.29. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x, \\ z &= 21/4 - y^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.31. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &= 0, \\ z &= 25/4 - y^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.22. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4\sqrt{2}y, \\ z &= x^2 + y^2 - 16, \\ z &= 0 \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

$$11.24. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9x, \quad x^2 + y^2 = 12x, \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \\ y &= 0 \quad (y \geq 0) \end{aligned}$$

$$11.26. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4y, \\ z &= 6 - x^2, \quad z = 0. \end{aligned}$$

$$11.28. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\sqrt{2}x, \\ z &= x^2 + y^2 - 4, \\ z &= 0 \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

$$11.30. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5y, \quad x^2 + y^2 = 8y, \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0. \end{aligned}$$

Задача 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$12.1. \quad \begin{aligned} y &= 5x^2 + 2, \quad y = 7, \\ z &= 3y^2 - 7x^2 - 2, \\ z &= 3y^2 - 7x^2 - 5. \end{aligned}$$

$$12.3. \quad \begin{aligned} x &= -5y^2 + 2, \quad x = -3, \\ z &= 3x^2 + y^2 + 1, \\ z &= 3x^2 + y^2 - 5. \end{aligned}$$

$$12.2. \quad \begin{aligned} y &= 5x^2 - 2, \quad y = -4x^2 + 7, \\ z &= 4 + 9x^2 + 5y^2, \\ z &= -1 + 9x^2 + 5y^2. \end{aligned}$$

$$12.4. \quad \begin{aligned} x &= 2y^2 - 3, \quad x = -7y^2 + 6, \\ z &= 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2}, \\ z &= -3 + \sqrt{x^2 + 16y^2}. \end{aligned}$$

$$y = -6x^2 + 8, \quad y = 2,$$

$$12.5. \quad z = x - x^2 - y^2 - 1,$$

$$z = x - x^2 - y^2 - 5.$$

$$x = 5y^2 - 9, \quad x = -4,$$

$$12.7. \quad z = x^2 + 4x - y^2 - 4,$$

$$z = x^2 + 4x - y^2 + 2.$$

$$x = 5y^2 - 1, \quad x = -3y^2 + 1,$$

$$12.9. \quad z = 2 - \sqrt{x^2 + 6y^2},$$

$$z = -1 - \sqrt{x^2 + 6y^2}.$$

$$y = -5x^2 + 3, \quad y = -2,$$

$$12.11. \quad z = 2x^2 - 3y - 6y^2 - 1,$$

$$z = 2x^2 - 3y - 6y^2 + 2.$$

$$x = 3y^2 - 5, \quad x = -2,$$

$$12.13. \quad z = 2 - \sqrt{x^2 + 16y^2},$$

$$z = 8 - \sqrt{x^2 + 16y^2}.$$

$$y = 2x^2 - 1, \quad y = 1,$$

$$12.15. \quad z = x^2 - 5y^2 - 3,$$

$$z = x^2 - 5y^2 - 6.$$

$$x = -4y^2 + 1, \quad x = -3,$$

$$12.17. \quad z = x^2 - 7y^2 - 1,$$

$$z = x^2 - 7y^2 + 2.$$

$$y = 1 - 2x^2, \quad y = -1,$$

$$12.19. \quad z = x^2 + 2y + y^2 - 2,$$

$$z = x^2 + 2y + y^2 + 1.$$

$$y = 5x^2 - 1, \quad y = -3x^2 + 1,$$

$$12.6. \quad z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2},$$

$$z = -5 + \sqrt{3x^2 + y^2}.$$

$$y = 6x^2 - 1, \quad y = 5,$$

$$12.8. \quad z = 2x^2 + x - y^2,$$

$$z = 2x^2 + x - y^2 + 4.$$

$$x = -3y^2 + 7, \quad x = 4,$$

$$12.10. \quad z = 2 + \sqrt{6x^2 + y^2},$$

$$z = 3 + \sqrt{6x^2 + y^2}.$$

$$y = x^2 - 5, \quad y = -x^2 + 3,$$

$$12.12. \quad z = 4 + \sqrt{5x^2 + 8y^2},$$

$$z = 1 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}.$$

$$x = y^2 - 2, \quad x = -4y^2 + 3,$$

$$12.14. \quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2,$$

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - 1.$$

$$y = x^2 - 2, \quad y = -4x^2 + 3,$$

$$12.16. \quad z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$x = 7y^2 - 6, \quad x = -2y^2 + 3,$$

$$12.18. \quad z = 3 - 12y^2 + 5x^2,$$

$$z = -2 - 12y^2 + 5x^2.$$

$$y = x^2 - 7, \quad y = -8x^2 + 2,$$

$$12.20. \quad z = 3 - 12y^2 + 5x^2,$$

$$z = -2 - 12y^2 + 5x^2.$$

$$x = 2y^2 + 3, \quad x = 5,$$

$$12.21. \quad z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}, \\ z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}.$$

$$x = 5y^2 - 2, \quad x = -4y^2 + 7,$$

$$12.23. \quad z = 4 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}, \\ z = -1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}.$$

$$y = -3x^2 + 5, \quad y = 2,$$

$$12.25. \quad z = 3 + \sqrt{5x^2 + y^2}, \\ z = -1 + \sqrt{5x^2 + y^2}.$$

$$x = 4y^2 + 2, \quad x = 6,$$

$$12.27. \quad z = x^2 + 4y^2 + y + 1, \\ z = x^2 + 4y^2 + y + 4.$$

$$y = 2x^2 - 5, \quad y = -3,$$

$$12.29. \quad z = 2 + \sqrt{x^2 + 4y^2}, \\ z = -1 + \sqrt{x^2 + 4y^2}.$$

$$y = -2x^2 + 7, \quad y = 5,$$

$$12.31. \quad z = 1 - 2x^2 + 3y^2, \\ z = 4 - 2x^2 + 3y^2.$$

$$y = 3x^2 + 4, \quad y = 7,$$

$$12.22. \quad z = 5 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}, \\ z = 1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}.$$

$$x = -2y^2 + 5, \quad x = 3,$$

$$12.24. \quad z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2}, \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + 25y^2}.$$

$$y = 3x^2 - 5, \quad y = -6x^2 + 4,$$

$$12.26. \quad z = 2 + 10x^2 - y^2, \\ z = -2 + 10y^2 - y^2.$$

$$x = 3y^2 - 2, \quad x = -4y^2 + 5,$$

$$12.28. \quad z = 4 - 7x^2 - 9y^2, \\ z = 1 - 7x^2 - 9y^2.$$

$$y = 2x^2 - 3, \quad y = -7x^2 + 6,$$

$$12.30. \quad z = 1 - 5x^2 - 6y^2, \\ z = -3 - 5x^2 - 6y^2.$$

Задача 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$13.1. \quad z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ 9z/2 = x^2 + y^2.$$

$$13.2. \quad z = 15\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z = 17/2 - x^2 - y^2.$$

$$13.3. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/255}. \end{aligned}$$

$$13.5. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}, \\ 2z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.7. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/99}. \end{aligned}$$

$$13.9. \quad \begin{aligned} z &= 21\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z &= 23/2 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.11. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/80}. \end{aligned}$$

$$13.13. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ 3z/2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.15. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/63}. \end{aligned}$$

$$13.17. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{144 - x^2 - y^2}, \\ 18z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.19. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/35}. \end{aligned}$$

$$13.4. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \\ x^2 + y^2 &= 60 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.6. \quad \begin{aligned} z &= 3\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z &= 10 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.8. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{100 - x^2 - y^2}, \quad z = 6, \\ x^2 + y^2 &= 51 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.10. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \\ 6z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.12. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \quad z = 5, \\ x^2 + y^2 &= 45 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.14. \quad \begin{aligned} z &= 6\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z &= 16 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.16. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad z = 4, \\ x^2 + y^2 &= 39 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.18. \quad \begin{aligned} z &= 3\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z &= 5/2 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.20. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \quad z = 3, \\ x^2 + y^2 &= 33 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.21. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ 9z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.23. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/15}. \end{aligned}$$

$$13.25. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{4/9 - x^2 - y^2}, \\ z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.27. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/8}. \end{aligned}$$

$$13.29. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \\ 12z &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$13.31. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z &= \sqrt{(x^2 + y^2)/3}. \end{aligned}$$

$$13.22. \quad \begin{aligned} z &= 9\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z &= 22 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.24. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = 2, \\ x^2 + y^2 &= 27 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.26. \quad \begin{aligned} z &= 12\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z &= 28 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$$13.28. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \\ x^2 + y^2 &= 21 \\ &(\text{внутри цилиндра}). \end{aligned}$$

$$13.30. \quad \begin{aligned} z &= 9\sqrt{x^2 + y^2}/2, \\ z &= 11/2 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Задача 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$14.1. \quad \begin{aligned} z &= 2 - 12(x^2 + y^2), \\ z &= 24x + 2. \end{aligned}$$

$$14.3. \quad \begin{aligned} z &= 8(x^2 + y^2) + 3, \\ z &= 16x + 3. \end{aligned}$$

$$14.5. \quad \begin{aligned} z &= 4 - 14(x^2 + y^2), \\ z &= 4 - 28x. \end{aligned}$$

$$14.2. \quad \begin{aligned} z &= 10[(x-1)^2 + y^2] + 1, \\ z &= 21 - 20x. \end{aligned}$$

$$14.4. \quad \begin{aligned} z &= 2 - 20[(x+1)^2 + y^2], \\ z &= -40 - 38x. \end{aligned}$$

$$14.6. \quad \begin{aligned} z &= 28[(x+1)^2 + y^2] + 3, \\ z &= 56x + 59. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.7. \quad z &= 32(x^2 + y^2) + 3, \\ z &= 3 - 64x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.9. \quad z &= 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z &= 8x + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.11. \quad z &= 24(x^2 + y^2) + 1, \\ z &= 48x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.13. \quad z &= -16(x^2 + y^2) - 1, \\ z &= -32x - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.15. \quad z &= 26(x^2 + y^2) - 2, \\ z &= -52x - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.17. \quad z &= -2(x^2 + y^2) - 1, \\ z &= 4y - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.19. \quad z &= 30(x^2 + y^2) + 1, \\ z &= 60y + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.21. \quad z &= 2 - 18(x^2 + y^2), \\ z &= 2 - 36y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.23. \quad z &= 22(x^2 + y^2) + 3, \\ z &= 3 - 44y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.25. \quad z &= 4 - 6(x^2 + y^2), \\ z &= 12y + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.27. \quad z &= 28(x^2 + y^2) + 3, \\ z &= 56y + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.8. \quad z &= 4 - 6[(x-1)^2 + y^2], \\ z &= 12x - 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.10. \quad z &= 22[(x-1)^2 + y^2] + 3, \\ z &= 47 - 44x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.12. \quad z &= 2 - 18[(x+1)^2 + y^2], \\ z &= -36x - 34. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.14. \quad z &= 30[(x+1)^2 + y^2] + 1, \\ z &= 60x + 61. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.16. \quad z &= -2[(x-1)^2 + y^2] - 1, \\ z &= 4x - 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.18. \quad z &= 26[(x-1)^2 + y^2] - 2, \\ z &= 50 - 52x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.20. \quad z &= -16[(x+1)^2 + y^2] - 1, \\ z &= -32x - 33. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.22. \quad z &= 24[(x+1)^2 + y^2] + 1, \\ z &= 48x + 49. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.24. \quad z &= 2 - 4[(x-1)^2 + y^2], \\ z &= 8x - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.26. \quad z &= 32[(x-1)^2 + y^2] + 3, \\ z &= 67 - 64x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.28. \quad z &= 4 - 14[(x+1)^2 + y^2], \\ z &= -28x - 24. \end{aligned}$$

$$14.29. \quad \begin{aligned} z &= 2 - 20(x^2 + y^2), \\ z &= 2 - 40y. \end{aligned}$$

$$14.30. \quad \begin{aligned} z &= 8[(x+1)^2 + y^2] + 3, \\ z &= 16x + 19. \end{aligned}$$

$$14.31. \quad \begin{aligned} z &= 10(x^2 + y^2) + 1, \\ z &= 1 - 20y. \end{aligned}$$

Задача 15. Найти объем тела, заданного неравенствами.

$$15.1. \quad \begin{aligned} 1 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ -x &\leq y \leq 0. \end{aligned}$$

$$15.2. \quad \begin{aligned} 1 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ -\sqrt{3}x &\leq y \leq 0. \end{aligned}$$

$$15.3. \quad \begin{aligned} 4 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ z &\leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0. \end{aligned}$$

$$15.4. \quad \begin{aligned} 4 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ z &\geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$15.5. \quad \begin{aligned} 1 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ z &\geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$15.6. \quad \begin{aligned} 25 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \\ z &\leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \quad \sqrt{3}x \leq y \leq -\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$15.7. \quad \begin{aligned} 1 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}, \\ y &\leq -\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \leq -\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$15.8. \quad \begin{aligned} 25 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} &\leq z \leq 0, \\ y &\geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \geq -\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$15.9. \quad \begin{aligned} 4 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ x &\leq y \leq 0. \end{aligned}$$

$$15.10. \quad \begin{aligned} 16 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \\ \sqrt{3}x &\leq y \leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, & 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, \\
15.11. \quad z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}. & 15.12. \quad z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \\
& -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\sqrt{3}x. \\
\\
4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, & 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121, \\
15.13. \quad z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \quad y \leq 0, \quad y \leq \sqrt{3}x. & 15.14. \quad z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \quad y \geq 0, \quad y \geq \sqrt{3}x. \\
\\
4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, & 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144, \\
15.15. \quad 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}, & 15.16. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0, \\
y \leq \sqrt{3}x, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. & y \geq \sqrt{3}x, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}. \\
\\
9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, & 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144, \\
15.17. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}, & 15.18. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}, \\
0 \leq y \leq -x. & 0 \leq y \leq -\sqrt{3}x. \\
\\
36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144, & 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \\
15.19. \quad z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}. & 15.20. \quad z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \\
& \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x. \\
\\
9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, & 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144, \\
15.21. \quad z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, & 15.22. \quad z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}, \\
y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}. & y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}.
\end{array}$$

$$9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81,$$

$$15.23. \quad 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}},$$

$$y \leq 0, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,$$

$$15.25. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}},$$

$$0 \leq y \leq x.$$

$$64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196,$$

$$15.27. \quad z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0.$$

$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81,$$

$$15.29. \quad z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}},$$

$$y \leq 0, \quad y \leq -\sqrt{3}x.$$

$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,$$

$$15.31. \quad 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}},$$

$$y \leq 0, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81,$$

$$15.24. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0,$$

$$y \geq 0, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196,$$

$$15.26. \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}},$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{3}x.$$

$$64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144,$$

$$15.28. \quad z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 169,$$

$$15.30. \quad z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}},$$

$$y \geq 0, \quad y \geq -\sqrt{3}x.$$

Задача 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность.

Найти массу тела.

$$64(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.1. \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (y \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$m = 5(x^2 + y^2)/4.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$16.2. \quad (x^2 + y^2 \leq 1), \quad x = 0 \quad (x \geq 0);$$

$$m = 4|z|.$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z,$$

$$16.3. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 10x.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z,$$

$$16.4. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 80yz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2,$$

$$16.5. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$m = 20z.$$

$$36(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$16.6. \quad x = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$m = \frac{5}{6}(x^2 + y^2).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.7. \quad (x^2 + y^2 \leq 4);$$

$$m = 2|z|.$$

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 8z,$$

$$16.8. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 5x.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z,$$

$$16.9. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 28xz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

$$16.10. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$m = 6z.$$

$$25(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.11. \quad \begin{aligned} &x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ &(x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0), \end{aligned}$$

$$m = 2(x^2 + y^2).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.12. \quad (x^2 + y^2 \leq 4), \quad y = 0 \quad (y \geq 0);$$

$$m = |z|.$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 6z,$$

$$16.13. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 90y.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{25}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{5}z,$$

$$16.14. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 14yz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9z^2,$$

$$16.15. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$m = 10z.$$

$$9(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.16. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$m = 5(x^2 + y^2)/3.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

$$16.17. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (x^2 + y^2 \leq 1);$$

$$m = |z|.$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z,$$

$$16.18. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 10y.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{7}z,$$

$$16.19. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 10xz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z^2,$$

$$16.20. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$m = 10z.$$

$$16(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$16.21. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$m = 5(x^2 + y^2).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16,$$

$$16.22. \quad x^2 + y^2 = 4 \quad (x^2 + y^2 \leq 4);$$

$$m = |z|.$$

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z,$$

$$16.23. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 5y.$$

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = z,$$

$$16.24. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 35yz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

$$16.25. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$m = 32z.$$

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$16.26. \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$m = 5(x^2 + y^2)/2.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

$$16.27. \quad (x^2 + y^2 \leq 4), \quad z = 0 \quad (z \geq 0);$$

$$m = 2z.$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 3z,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$16.28. \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$m = 15x.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{7}z,$$

$$16.29. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0);$$

$$\mathbf{m} = 20xz.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 9z^2,$$

$$16.30. \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0);$$

$$\mathbf{m} = 5z.$$

$$4(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$16.31. \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (y \geq 0, \quad z \geq 0),$$

$$\mathbf{m} = 10(x^2 + y^2).$$

VIII. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Теоретические вопросы

1. Скалярное поле. Производная по направлению.
2. Градиент, его свойства. Инвариантное определение градиента.
3. Векторное поле. Поток векторного поля через поверхность, его физический смысл.
4. Формула Остроградского.
5. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Инвариантное определение дивергенции. Свойства дивергенции.
6. Соленоидальное поле, его основные свойства.
7. Линейный интеграл в векторном поле, его свойства и физический смысл.
8. Циркуляция векторного поля, ее гидродинамический смысл.
9. Формула Стокса.
10. Ротор векторного поля, его свойства. Инвариантное определение ротора.
11. Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования.
12. Потенциальное поле. Условия потенциальности.

Теоретические упражнения

1. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $u = u(x, y, z)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = \mathbf{C}\mathbf{r}$, где \mathbf{C} — постоянный вектор, а \mathbf{r} — радиус-вектор. Каковы поверхности уровня этого поля и как они расположены по отношению к вектору \mathbf{C} ?

3. Доказать, что если S — замкнутая кусочно-гладкая поверхность и \mathbf{C} — ненулевой постоянный вектор, то

$$\oiint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{C}) dS = 0,$$

где \mathbf{n} — вектор, нормальный к поверхности S .

4. Доказать формулу

$$\oiint_S j \mathbf{a} \mathbf{n}^0 dS = \iiint_V (j \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} j) dV,$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$; S — поверхность, ограничивающая объем V ; \mathbf{n}^0 — орт внешней нормали к поверхности S . Установить условия применимости формулы.

5. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ то } \iiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к кусочно-гладкой замкнутой поверхности S .

6. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$\iiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

пропорционален объему, ограниченному поверхностью S .

7. Пусть $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, где P, Q, R — линейные функции от x, y, z и пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint_{\Gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади

фигуры, ограниченной контуром Γ .

8. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$. Определить ротор и дивергенцию поля линейных скоростей $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ точек тела (здесь \mathbf{r} — радиус-вектор).

Расчетные задания

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

1.1. $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$, $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$.

1.2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0$, $M(2, 4, 4)$.

$$1.3. u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz, \quad S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \quad M(1, 1, 1).$$

$$1.4. u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}, \quad S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, \quad M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$1.5. u = xz^2 - \sqrt{x^3y}, \quad S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, \quad M(2, 2, 4).$$

$$1.6. u = x\sqrt{y} - yz^2, \quad S: x^2 + y^2 = 4z, \quad M(2, 1, -1).$$

$$1.7. u = 7\ln(1/13 + x^2) - 4xyz, \quad S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \quad M(1, 1, 1).$$

$$1.8. u = \operatorname{arctg}(y/x) - 8xyz, \quad S: x^2 + y^2 - 2z^2 = 10, \quad M(2, 2, -1).$$

$$1.9. u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}, \quad S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, \quad M(1, -2, 4).$$

$$1.10. u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, \quad S: x^2 + y^2 = 24z, \quad M(3, 4, 1).$$

$$1.11. u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}, \quad S: x^2 - y^2 + z^2 = 4, \quad M(1, 1, -2).$$

$$1.12. u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, \quad S: z = x^2 - y^2, \quad M(1, 1, 0).$$

$$1.13. u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, \quad S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad M(0, -3, 4).$$

$$1.14. u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}, \quad S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4, \quad M(3, 0, -4).$$

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора \mathbf{l} .

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$$

$$u = x + \ln(z^2 + y^2),$$

$$1.15. \mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$1.16. \mathbf{l} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$M(1, 1, 1).$$

$$M(2, 1, 1).$$

$$u = x^2y - \sqrt{xy + z^2},$$

$$u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z,$$

$$1.17. \mathbf{l} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$1.18. \mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$M(1, 5, -2).$$

$$M(0, 1, 1).$$

$$u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z),$$

$$1.19. \mathbf{l} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k},$$

$$M(-2, 1, -1).$$

$$u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz},$$

$$1.21. \mathbf{l} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

$$M(p/2, 3p/2, 3).$$

$$u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2},$$

$$1.23. \mathbf{l} = \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$M(1, -3, 4).$$

$$u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2},$$

$$1.25. \mathbf{l} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$M(1, 1, 0).$$

$$u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y),$$

$$1.27. \mathbf{l} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$M(1, 2, -1).$$

$$u = xy - \frac{x}{z},$$

$$1.29. \mathbf{l} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$M(-4, 3, -1).$$

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z),$$

$$1.31. \mathbf{l} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

$$M(2, 1, 1).$$

$$u = \ln(3 - x^2) + xy^2z,$$

$$1.20. \mathbf{l} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$M(1, 3, 2).$$

$$u = x^2y^2z - \ln(z - 1),$$

$$1.22. \mathbf{l} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\sqrt{5}\mathbf{k},$$

$$M(1, 1, 2).$$

$$u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}},$$

$$1.24. \mathbf{l} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k},$$

$$M(4, 1, -2).$$

$$u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} z,$$

$$1.26. \mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k},$$

$$M(3, 2, -1).$$

$$u = \ln(x^2 + y^2) + xyz,$$

$$1.28. \mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

$$M(1, -1, 2).$$

$$u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right),$$

$$1.30. \mathbf{l} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$M(1, -3, 4).$$

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке M .

$$2.1. u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad v = \frac{yz^2}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.2. u = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}, \quad v = x^2yz^3, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.3. u = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad v = \frac{z^3}{xy^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.4. u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad v = \frac{z}{x^3y^2}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.5. u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad v = \frac{x^2}{yz^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.6. u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}z^3, \quad v = \frac{z^2}{xy^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$2.7. u = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, \quad v = \frac{xz^2}{y}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$$

$$2.8. u = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}, \quad v = \frac{yz^2}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.9. u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2, \quad v = \frac{xy^2}{z^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$2.10. u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad v = \frac{x^3y^2}{z}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.11. u = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, \quad v = \frac{1}{x^2yz}, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.12. u = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \quad v = \frac{x^2}{y^2z^3}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.13. \mathbf{u} = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad u = xyz, \quad M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.14. \mathbf{u} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}, \quad u = \frac{y^3}{x^2z}, \quad M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

$$2.15. \mathbf{u} = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, \quad u = xy^2z, \quad M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.16. \mathbf{u} = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}, \quad u = \frac{x}{yz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.17. \mathbf{u} = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.18. \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.19. \mathbf{u} = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, \quad u = \frac{y}{xz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, ?\right).$$

$$2.20. \mathbf{u} = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad u = \frac{yz^2}{x}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.21. \mathbf{u} = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$2.22. \mathbf{u} = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{x^2}{y^2z^3}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.23. \mathbf{u} = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2, \quad u = x^2yz^3, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.24. \mathbf{u} = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{xy^2}{z^3}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.25. \mathbf{u} = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{1}{xy^2z}, \quad M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.26. \mathbf{u} = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad u = \frac{1}{xyz}, \quad M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.27. \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \quad u = \frac{x}{y^2z^3}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.28. \mathbf{u} = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, \quad u = x^2yz, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.29. \mathbf{u} = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$2.30. \mathbf{u} = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3, \quad u = \frac{x^2z}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

$$2.31. \mathbf{u} = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad u = \frac{x}{yz^2}, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле \mathbf{a} .

$$3.1. \mathbf{a} = 4y\mathbf{i} - 9x\mathbf{j}.$$

$$3.2. \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}.$$

$$3.3. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}.$$

$$3.4. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}.$$

$$3.5. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}.$$

$$3.6. \mathbf{a} = 3x\mathbf{i} + 6z\mathbf{k}.$$

$$3.7. \mathbf{a} = 4z\mathbf{i} - 9x\mathbf{k}.$$

$$3.8. \mathbf{a} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{k}.$$

$$3.9. \mathbf{a} = 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}.$$

$$3.10. \mathbf{a} = y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}.$$

$$3.11. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 8z\mathbf{k}.$$

$$3.12. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3z\mathbf{k}.$$

$$3.13. \mathbf{a} = 4z\mathbf{j} - 9y\mathbf{k}.$$

$$3.14. \mathbf{a} = 2z\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}.$$

$$3.15. \mathbf{a} = 5x\mathbf{i} + 10y\mathbf{j}.$$

$$3.16. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j}.$$

$$3.17. \mathbf{a} = y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}.$$

$$3.18. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

$$3.19. \mathbf{a} = 9y\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}.$$

$$3.20. \mathbf{a} = 5y\mathbf{i} + 7x\mathbf{j}.$$

$$3.21. \mathbf{a} = 6x\mathbf{i} + 12z\mathbf{k}.$$

$$3.22. \mathbf{a} = 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}.$$

$$3.23. \mathbf{a} = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

$$3.24. \mathbf{a} = 9z\mathbf{i} - 4x\mathbf{k}.$$

$$3.25. \mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}.$$

$$3.26. \mathbf{a} = 5z\mathbf{i} + 7x\mathbf{k}.$$

$$3.27. \mathbf{a} = 7y\mathbf{j} + 14z\mathbf{k}.$$

$$3.28. \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 6z\mathbf{k}.$$

$$3.29. \mathbf{a} = 4x\mathbf{i} + z\mathbf{k}.$$

$$3.30. \mathbf{a} = 5z\mathbf{j} + 7y\mathbf{k}.$$

$$3.31. \mathbf{a} = 9z\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}.$$

Задача 4. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть поверхности S , вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

$$4.1. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 2.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

$$4.2. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 4.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

$$4.3. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 3.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}.$$

$$4.4. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 1.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

$$4.5. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 5.$$

$$\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

$$4.6. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 2.$$

$$\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} - (x - y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

$$4.7. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 4.$$

$$\mathbf{a} = (x^3 + xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + x^2y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

$$4.8. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 3.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sin z\mathbf{k}.$$

$$4.9. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 5.$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$4.10. S : x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1 : z = 0, P_2 : z = 2.$$

Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть поверхности S , вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

$$4.11. \mathbf{a} = (x + xy^2)\mathbf{i} + (y - yx^2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}, \quad S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0), \quad P : z = 1.$$

$$4.12. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0), \quad P : z = 4.$$

$$4.13. \mathbf{a} = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0), \quad P : z = 1.$$

- 4.14. $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (z^2 - 1)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 4$.
- 4.15. $\mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} - yx^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 5$.
- 4.16. $\mathbf{a} = (xz + y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (z^2 - 2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 3$.
- 4.17. $\mathbf{a} = xyz\mathbf{i} - x^2z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 2$.
- 4.18. $\mathbf{a} = (x + xy)\mathbf{i} + (y - x^2)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 3$.
- 4.19. $\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (z - 2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 2$.
- 4.20. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), $P: z = 1$.
- 4.21. $\mathbf{a} = (x + xz)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$), $P: z = 0$.
- 4.22. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y + yz^2)\mathbf{j} + (z - zy^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.23. $\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z - x - y)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.24. $\mathbf{a} = (x + xy)\mathbf{i} + (y - x^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.25. $\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.26. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} + (z - y^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.27. $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.28. $\mathbf{a} = (x + xz^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - zx^2)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.29. $\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.30. $\mathbf{a} = (x + xy^2)\mathbf{i} + (y - yx^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).
- 4.31. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P: z = 0$ ($z \geq 0$).

Задача 5. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть плоскости P , расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

5.1. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $P: x + y + z = 1$.

5.2. $\mathbf{a} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $P: x + y + z = 1$.

$$5.3. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x + y + z = 1.$$

$$5.5. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} \\ P: x + y + z = 1.$$

$$5.7. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x/2 + y + z = 1.$$

$$5.9. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$5.11. \quad \mathbf{a} = 3x\mathbf{i} + 2z\mathbf{k} \\ P: x + y/2 + z/2 = 1.$$

$$5.13. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \\ P: x/3 + y + z/2 = 1.$$

$$5.15. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \\ P: x/2 + y/3 + z = 1.$$

$$5.17. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: 2x + y/2 + z = 1.$$

$$5.19. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ P: 2x + y/2 + z = 1.$$

$$5.21. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + z/2 = 1.$$

$$5.23. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$5.25. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$5.27. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$5.29. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 9y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + 3z = 1.$$

$$5.4. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ P: x + y + z = 1.$$

$$5.6. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x/2 + y + z = 1.$$

$$5.8. \quad \mathbf{a} = y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \\ P: x/2 + y + z = 1.$$

$$5.10. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$5.12. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x/3 + y + z/2 = 1.$$

$$5.14. \quad \mathbf{a} = -2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} \\ P: x/3 + y + z/2 = 1.$$

$$5.16. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k} \\ P: x/2 + y/3 + z = 1.$$

$$5.18. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} \\ P: 2x + y/2 + z = 1.$$

$$5.20. \quad \mathbf{a} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 12z\mathbf{k} \\ P: 2x + y/2 + z = 1.$$

$$5.22. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + z/2 = 1.$$

$$5.24. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$5.26. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$5.28. \quad \mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} \\ P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$5.30. \quad \mathbf{a} = 8x\mathbf{i} + 11y\mathbf{j} + 17z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + 3z = 1.$$

$$5.31. \quad \mathbf{a} = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ P: x + 2y + 3z = 1.$$

Задача 6. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через часть плоскости P , расположенную в 1 октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

$$6.1. \quad \mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + (5py + 2)\mathbf{j} + 4pz\mathbf{k}, \quad 6.2. \quad \mathbf{a} = 2px\mathbf{i} + (7y + 2)\mathbf{j} + 7pz\mathbf{k}, \\ P: x + y/2 + 4z = 1. \quad P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$6.3. \quad \mathbf{a} = 9px\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3z\mathbf{k}, \quad 6.4. \quad \mathbf{a} = (2x + 1)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3pz\mathbf{k}, \\ P: x/3 + y + z = 1. \quad P: x/3 + y + 2z = 1.$$

$$6.5. \quad \mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + 9py\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 6.6. \quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + 1pz\mathbf{k}, \\ P: x + y/3 + z = 1. \quad P: x + y + z/3 = 1.$$

$$6.7. \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} + (pz - 1)\mathbf{k}, \quad 6.8. \quad \mathbf{a} = 5px\mathbf{i} + (9y + 1)\mathbf{j} + 4pz\mathbf{k}, \\ P: 2x + y/2 + z/3 = 1. \quad P: x/2 + y/3 + z/2 = 1.$$

$$6.9. \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \frac{3p}{2}z\mathbf{k}, \quad 6.10. \quad \mathbf{a} = 9px\mathbf{i} + (5y + 1)\mathbf{j} + 2pz\mathbf{k}, \\ P: x/3 + y + z/4 = 1. \quad P: 3x + y + z/9 = 1.$$

$$6.11. \quad \mathbf{a} = 7px\mathbf{i} + 2py\mathbf{j} + (7z + 2)\mathbf{k}, \quad 6.12. \quad \mathbf{a} = py\mathbf{i} + (4 - 2z)\mathbf{k}, \\ P: x + y + z/2 = 1. \quad P: 2x + y/3 + z/4 = 1.$$

$$6.13. \quad \mathbf{a} = (3p - 1)x\mathbf{i} + (9py + 1)\mathbf{j} + 6pz\mathbf{k}, \\ P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1.$$

$$6.14. \quad \mathbf{a} = px\mathbf{i} + \frac{p}{2}y\mathbf{j} + (4 - 2z)\mathbf{k}, \\ P: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

$$6.15. \quad \mathbf{a} = (5y + 3)\mathbf{j} + 1pz\mathbf{k}, \quad 6.16. \quad \mathbf{a} = 9py\mathbf{j} + (7z + 1)\mathbf{k}, \\ P: x + y/3 + 4z = 1. \quad P: x + y + z = 1.$$

$$6.17. \quad \mathbf{a} = py\mathbf{j} + (1 - 2z)\mathbf{k}, \\ P: x/4 + y/2 + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = (27p - 1)\mathbf{i} + (34p y + 3)\mathbf{j} + 20p z\mathbf{k},$$

$$6.18. \quad P: 3x + \frac{y}{9} + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = p x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2p z\mathbf{k},$$

$$6.19. \quad P: x/2 + y/3 + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = 4p x\mathbf{i} + 7p y\mathbf{j} + (2z + 1)\mathbf{k},$$

$$6.20. \quad P: 2x + y/3 + 2z = 1.$$

$$\mathbf{a} = 3p x\mathbf{i} + 6p y\mathbf{j} + 10\mathbf{k},$$

$$6.21. \quad P: 2x + y + z/3 = 1.$$

$$\mathbf{a} = p x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$6.22. \quad P: 2x + y/6 + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = (21p - 1)x\mathbf{i} + 62p y\mathbf{j} + (1 - 2p z)\mathbf{k},$$

$$6.23. \quad P: 8x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$\mathbf{a} = p x\mathbf{i} + 2p y\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$6.24. \quad P: x/2 + y/4 + z/3 = 1.$$

$$\mathbf{a} = 9p x\mathbf{i} + 2p y\mathbf{j} + 8\mathbf{k},$$

$$6.25. \quad P: 2x + 8y + z/3 = 1.$$

$$\mathbf{a} = 7p x\mathbf{i} + (4y + 1)\mathbf{j} + 2p z\mathbf{k},$$

$$6.26. \quad P: x/3 + 2y + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = 6p x\mathbf{i} + 3p y\mathbf{j} + 10\mathbf{k},$$

$$6.27. \quad P: 2x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$\mathbf{a} = (p - 1)x\mathbf{i} + 2p y\mathbf{j} + (1 - p z)\mathbf{k},$$

$$6.28. \quad P: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

$$\mathbf{a} = \frac{p}{2}x\mathbf{i} + p y\mathbf{j} + (4 - 2z)\mathbf{k},$$

$$6.29. \quad P: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

$$\mathbf{a} = 7p x\mathbf{i} + 4p y\mathbf{j} + 2(z + 1)\mathbf{k},$$

$$6.30. \quad P: x/3 + y/4 + z = 1.$$

$$\mathbf{a} = 5p x\mathbf{i} + (1 - 2y)\mathbf{j} + 4p z\mathbf{k},$$

$$6.31. \quad P: x/2 + 4y + z/3 = 1.$$

Задача 7. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормали внешняя).

7.1. $\mathbf{a} = (e^z + 2x)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}$, $S: x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.2. $\mathbf{a} = (3z^2 + x)\mathbf{i} + (e^x - 2y)\mathbf{j} + (2z - xy)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 4$.

7.3. $\mathbf{a} = (\ln y + 7x)\mathbf{i} + (\sin z - 2y)\mathbf{j} + (e^y - 2z)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$.

7.4. $\mathbf{a} = (\cos z + 3x)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j} + (3z + y^2)\mathbf{k}$, $S: z^2 = 36(x^2 + y^2)$, $z = 6$.

7.5. $\mathbf{a} = (e^{-z} - x)\mathbf{i} + (xz + 3y)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$, $S: 2x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.6. $\mathbf{a} = (6x - \cos y)\mathbf{i} - (e^x + z)\mathbf{j} - (2y + 3z)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 2$.

7.7. $\mathbf{a} = (4x - 2y^2)\mathbf{i} + (\ln z - 4y)\mathbf{j} + (x + 3z/4)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$.

7.8. $\mathbf{a} = (1 + \sqrt{z})\mathbf{i} + (4y - \sqrt{x})\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, $S: z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 3$.

7.9. $\mathbf{a} = (\sqrt{z} - x)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (y^2 - z)\mathbf{k}$, $S: 3x - 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.10. $\mathbf{a} = (yz + x)\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j} + (xy^2 + z)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

7.11. $\mathbf{a} = (e^{2y} + x)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j} + (y^2 + 3z)\mathbf{k}$, $S: x - y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.12. $\mathbf{a} = (\sqrt{z} - 2x)\mathbf{i} + (e^x + 3y)\mathbf{j} + \sqrt{y + x}\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 5$.

7.13. $\mathbf{a} = (e^z + x/4)\mathbf{i} + (\ln x + y/4)\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2$.

7.14. $\mathbf{a} = (3x - 2z)\mathbf{i} + (z - 2y)\mathbf{j} + (1 + 2z)\mathbf{k}$, $S: z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 2$.

7.15. $\mathbf{a} = (e^y + 2x)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (2z - 1)\mathbf{k}$, $S: x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.16. $\mathbf{a} = (x + y^2)\mathbf{i} + (xz + y)\mathbf{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 3$.

7.17. $\mathbf{a} = (e^y + 2x)\mathbf{i} + (xz - y)\mathbf{j} + (1/4)(e^{xy} - z)\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$.

7.18. $\mathbf{a} = (\sqrt{z} + y)\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (3z + 5x)\mathbf{k}$, $S: z^2 = 8(x^2 + y^2)$, $z = 2$.

7.19. $\mathbf{a} = (8yz - x)\mathbf{i} + (x^2 - 1)\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}$, $S: 2x + 3y - z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$7.20. \mathbf{a} = (y + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$$

$$7.21. \mathbf{a} = (2yz - x)\mathbf{i} + (xz + 2y)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}, S: y - x + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$7.22. \mathbf{a} = (\sin z + 2x)\mathbf{i} + (\sin x - 3y)\mathbf{j} + (\sin y + 2z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 = z^2, z = 3, z = 6.$$

$$7.23. \mathbf{a} = (\cos z + x/4)\mathbf{i} + (e^x + y/4)\mathbf{j} + \left(\frac{z}{4} - 1\right)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$$

$$7.24. \mathbf{a} = (\sqrt{z} + 1 + x)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + (\sin x + z)\mathbf{k}, S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$7.25. \mathbf{a} = (5x - 6y)\mathbf{i} + (11x^2 + 2y)\mathbf{j} + (x^2 - 4z)\mathbf{k}, S: \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$7.26. \mathbf{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\mathbf{i} + (e^z - 2y + x)\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}, S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, z = 3. \end{cases}$$

$$7.27. \mathbf{a} = \frac{1}{2}(x + z)\mathbf{i} + \frac{1}{4}(x \cdot z + y)\mathbf{j} + (xy - 2)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$$

$$7.28. \mathbf{a} = (3yz - x)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (6z - 1)\mathbf{k}, S: \begin{cases} z^2 = 9(x^2 + y^2), \\ z = 3. \end{cases}$$

$$7.29. \mathbf{a} = (yz - 2x)\mathbf{i} + (\sin x + y)\mathbf{j} + (x - 2z)\mathbf{k}, S: \begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$7.30. \mathbf{a} = (8x + 1)\mathbf{i} + (zx - 4y)\mathbf{j} + (e^x - z)\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$$

$$7.31. \mathbf{a} = (2y - 5x)\mathbf{i} + (x - 1)\mathbf{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\mathbf{k}, S: \begin{cases} 2x + 2y - z = 4, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

Задача 8. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормали внешняя).

$$\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + (z + y)\mathbf{k},$$

$$8.1. S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0 \ (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + z\mathbf{k},$$

$$8.2. S: \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$8.3. \quad S: \begin{cases} y = x^2, y = 4x^2, y = 1 \quad (x \geq 0) \\ z = y, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (z + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$8.5. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2(z - y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k},$$

$$8.7. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k},$$

$$8.9. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$8.11. \quad S: \begin{cases} x + y = 1, x = 0, y = 0, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 6x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$8.13. \quad S: \begin{cases} z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y + 2z)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3x\mathbf{k},$$

$$8.15. \quad S: \begin{cases} 3z = 27 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2, (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$8.17. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} - z\mathbf{j},$$

$$8.4. \quad S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - (x + 2y)\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$8.6. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - y\mathbf{k},$$

$$8.8. \quad S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$8.10. \quad S: \begin{cases} 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, \\ x + y + z = 6, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$8.12. \quad S: \begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (z + y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$8.14. \quad S: \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y + 6x)\mathbf{i} + 5(x + z)\mathbf{j} + 4y\mathbf{k},$$

$$8.16. \quad S: \begin{cases} y = x, y = 2x, y = 2, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + (3y - x)\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$8.18. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2 + 2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$8.19. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x + y + z)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j} + (3z + y)\mathbf{k},$$

$$8.20. \quad S: \begin{cases} y = x, y = 2x, x = 1, \\ z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 7x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x - y + 5z)\mathbf{k},$$

$$8.21. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + 2y^2, \\ y = x, y = 2x, x = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 17x\mathbf{i} + 7y\mathbf{j} + 11z\mathbf{k},$$

$$8.22. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2(x^2 + y^2), \\ y = x^2, y = x. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k},$$

$$8.23. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (2x + y)\mathbf{i} + (y + 2z)\mathbf{k},$$

$$8.24. \quad S: \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 4(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (2y - 3z)\mathbf{i} + (3x + 2z)\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k},$$

$$8.25. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -2x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k},$$

$$8.26. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (2y - 15x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} - (x - 3y)\mathbf{k},$$

$$8.27. \quad S: \begin{cases} z = 3x^2 + y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x - 2y + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$8.28. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (3x - y - z)\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$8.29. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2y. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k},$$

$$8.30. \quad S: \begin{cases} y = 2x, y = 4x, x = 1, \\ z = y^2, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + y\mathbf{k},$$

$$8.31. \quad S: \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Задача 9. Найти поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S (нормали внешняя).

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$9.1. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, z = 1, \\ x = 0, y = 0 \text{ (1 октант)}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$9.2. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$9.3. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \text{ (} z \geq 0 \text{)}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$9.4. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \text{ (} z \geq 0 \text{)}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$9.5. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3xz\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$9.6. \quad S: \begin{cases} x + y + z = 2, x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$9.7. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} + (zy - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$9.9. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$9.10. \quad \mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} + z^2y\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}, \\ S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$9.11. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ (1 \text{ ОКТАНТ}). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k},$$

$$9.12. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} + (xy - z)\mathbf{j} + (x^2 + yz)\mathbf{k},$$

$$9.13. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$9.14. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1, \\ x = 0, y = 0 \\ (1 \text{ ОКТАНТ}). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

$$9.15. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3x^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j} + (2x - 1)z\mathbf{k},$$

$$9.16. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$9.17. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ z = 0, z = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$9.18. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k},$$

$$9.19. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0 \\ (1 \text{ октант}). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k},$$

$$9.20. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (zx + y)\mathbf{i} - (2y - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$9.21. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x^2 + xy)\mathbf{i} + (y^2 + yz)\mathbf{j} + (z^2 + xz)\mathbf{k},$$

$$9.22. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3x^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j} - (1 - 2x)\mathbf{k},$$

$$9.23. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i},$$

$$9.24. \quad S: \begin{cases} z = 1 - x - y, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y^2 + xz)\mathbf{i} + (yx - z)\mathbf{j} + (yz + x)\mathbf{k},$$

$$9.25. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

$$9.26. \quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, z = 1, \\ x = 0, y = 0 \\ (1 \text{ октант}). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + 2zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k},$$

$$9.27. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$9.28. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}/3,$$

$$9.29. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0, \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

$$9.30. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (xy + y^2)\mathbf{j} + (xz + z)\mathbf{k},$$

$$9.31. \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

Задача 10. Найти работу силы \mathbf{F} при перемещении вдоль линии L от точки M в точку N .

$$\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j},$$

$$10.1. \quad L: \text{отрезок } MN, \\ M(-4, 0), N(0, 2).$$

$$\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j},$$

$$10.2. \quad L: \text{отрезок } MN, \\ M(-4, 0), N(0, 2).$$

$$\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j},$$

$$10.3. \quad L: 2 - \frac{x^2}{8} = y, \\ M(-4, 0), N(0, 2).$$

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j},$$

$$10.4. \quad L: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0), \\ M(2, 0), N(-2, 0).$$

$$\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j},$$

$$10.5. \quad L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ M(2, 0), N(0, 2).$$

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j},$$

$$10.6. \quad L: y = x^2, \\ M(-1, 1), N(1, 1).$$

$$\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} - y\mathbf{j},$$

$$10.7. \quad L: \text{отрезок } MN, \\ M(-1, 0), N(0, 1).$$

$$\mathbf{F} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j},$$

$$10.8. \quad L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0), \\ M(3, 0), N(-3, 0).$$

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j},$$

$$10.9. \quad L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ M(1, 0), N(0, 3).$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

$$10.10. \quad L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0), \\ M(1, 0), N(-1, 0).$$

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j},$$

$$10.11. L: \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$M(2,0), N(0,0).$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

$$10.12. L: x^2 + y^2 = 2 \quad (y \geq 0),$$

$$M(\sqrt{2},0), N(-\sqrt{2},0).$$

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

$$10.13. L: x^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(1,0), N(0,1).$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

$$10.14. L: 2x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0),$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}),$$

$$10.15. L: x^2 + y^2 = R^2 \quad (y \geq 0),$$

$$M(R,0), N(-R,0).$$

$$\mathbf{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j},$$

$$10.16. L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0),$$

$$M(1,0), N(-1,0).$$

$$\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j},$$

$$10.17. L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(2,0), N(0,2).$$

$$\mathbf{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j},$$

$$10.18. L: x^2 + y^2 = 16 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(4,0), N(0,4).$$

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j},$$

$$10.19. L: x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(3,0), N(0,3).$$

$$\mathbf{F} = (x + y)^2\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j},$$

$$10.20. L: \text{отрезок } MN,$$

$$M(1,0), N(0,1).$$

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j},$$

10.21. L : отрезок MN ,
 $M(2,0), N(0,2)$.

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{j},$$

10.22. L : $x^2 + y^2 = 9$ ($x \geq 0, y \geq 0$),
 $M(3,0), N(0,3)$.

$$\mathbf{F} = (y^2 - y)\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j},$$

10.23. L : $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$),
 $M(3,0), N(-3,0)$.

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i},$$

10.24. L : $y = \sin x$,
 $M(p,0), N(0,0)$.

$$\mathbf{F} = (xy - y^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j},$$

10.25. L : $y = 2x^2$,
 $M(0,0), N(1,2)$.

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

10.26. L : отрезок MN ,
 $M(1,0), N(0,3)$.

$$\mathbf{F} = (xy - x)\mathbf{i} + \frac{x^2}{2}\mathbf{j},$$

10.27. L : $y = 2\sqrt{x}$,
 $M(0,0), N(1,2)$.

$$\mathbf{F} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

10.28. L : $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$),
 $M(1,0), N(0,3)$.

$$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j},$$

10.29. L : $y = x^3$,
 $M(0,0), N(2,8)$.

$$\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j},$$

10.30. L : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y \geq 0$),
 $M(3,0), N(-3,0)$.

$$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

10.31. L : $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$),
 $M(2,0), N(-2,0)$.

Задача 11. Найти циркуляцию векторного поля \mathbf{a} вдоль контура Γ (в направлении соответствующем возрастанию параметра t).

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$11.1. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, & y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -x^2 y^3 \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$11.2. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos t, & y = \sqrt[3]{4} \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

$$11.3. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$11.4. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = (\sqrt{2} \sin t)/2, \\ z = (\sqrt{2} \cos t)/2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

$$11.5. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 4 \cos t, & y = 4 \sin t, \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.6. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 2 - 2 \cos t - 2 \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.7. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$11.8. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.9. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.10. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -x^2 y^3 \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$11.11. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, & y = \sqrt{2} \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 6z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$11.12. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$11.13. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, & y = 2 \sin t, \\ z = \sqrt{2} \cos t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.14. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = 3 \sin t, \\ z = 2 \cos t - 3 \sin t - 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - \frac{1}{3} z^2 \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.15. \quad \Gamma: \begin{cases} x = (\cos t)/2, & y = (\sin t)/3, \\ z = \cos t - (\sin t)/3 - 1/4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 4y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.16. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 4 \cos t, & y = 4 \sin t, \\ z = 4 - 4 \cos t - 4 \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$11.17. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 5\cos t, & y = 5\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

$$11.19. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, & y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$11.21. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 7z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k},$$

$$11.23. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 6\cos t, & y = 6\sin t, \\ z = 1/3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.25. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, & y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -2z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k},$$

$$11.27. \quad \Gamma: \begin{cases} x = (\cos t)/3, & y = (\sin t)/3, \\ z = 8. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.29. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, & y = 4\sin t, \\ z = 6\cos t - 4\sin t + 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i}/3 - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.31. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, & y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.18. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, & y = 2\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.20. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.22. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = 5. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

$$11.24. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

$$11.26. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, & y = 2\sin t, \\ z = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 3z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$11.28. \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, & y = 4\sin t, \\ z = 2\cos t - 4\sin t + 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$11.30. \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, & y = 2\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$$

Задача 12. Найти модуль циркуляции векторного поля \mathbf{a} вдоль контура Γ .

$$\mathbf{a} = (x^2 - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$12.1. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$12.3. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$12.5. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

$$12.7. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + (1 - x)\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$12.9. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 4x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - xy\mathbf{k},$$

$$12.11. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -3z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2y\mathbf{k},$$

$$12.13. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2yz\mathbf{k},$$

$$12.15. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$12.2. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$12.4. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.6. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

$$12.8. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.10. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.12. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 5z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k},$$

$$12.14. \quad \Gamma: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.16. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$12.17. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 4x\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

$$12.19. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.21. \quad \Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (2 - xy)\mathbf{i} - yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k},$$

$$12.23. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$12.25. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

$$12.27. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

$$12.29. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$12.31. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k},$$

$$12.18. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$12.20. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

$$12.22. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k},$$

$$12.24. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

$$12.26. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 3z\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 2y\mathbf{k},$$

$$12.28. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k},$$

$$12.30. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

IX. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные, операции над векторами.
2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.
3. Определители, их свойства.
4. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.
5. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
6. Плоскость: Уравнение плоскости.
7. Расстояние от точки до плоскости.
8. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

Теоретические упражнения

1. Пусть векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны и $\overrightarrow{AB} = a\mathbf{a}/2$, $\overrightarrow{BC} = 4(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{CD} = -4\mathbf{b}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b}$. Найти a и b и доказать коллинеарность векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} .
2. Разложить вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.
3. Найти угол между единичными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , если известно, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны.
4. Доказать компланарность векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} зная, что
$$[\mathbf{ab}] + [\mathbf{bc}] + [\mathbf{ca}] = 0.$$
5. Доказать, что уравнение плоскости; проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1)

параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор \mathbf{S} , определяется формулой $d = \left| \left[\mathbf{S}, \overrightarrow{AB} \right] \right| / |\mathbf{S}|$.

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Их направляющие векторы \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой $d = \left| \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \overline{AB} \right| / \left| [\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2] \right|$.

Расчетные задания

Задача 1. Написать разложение вектора \mathbf{x} по векторам \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} .

- 1.1. $\mathbf{x} = \{-2, 4, 7\}$, $\mathbf{p} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{q} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 2, 4\}$.
- 1.2. $\mathbf{x} = \{6, 12, -1\}$, $\mathbf{p} = \{1, 3, 0\}$, $\mathbf{q} = \{2, -1, 1\}$, $\mathbf{r} = \{0, -1, 2\}$.
- 1.3. $\mathbf{x} = \{1, -4, 4\}$, $\mathbf{p} = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{q} = \{0, 3, 2\}$, $\mathbf{r} = \{1, -1, 1\}$.
- 1.4. $\mathbf{x} = \{-9, 5, 5\}$, $\mathbf{p} = \{4, 1, 1\}$, $\mathbf{q} = \{2, 0, -3\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 2, 1\}$.
- 1.5. $\mathbf{x} = \{-5, -5, 5\}$, $\mathbf{p} = \{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{q} = \{1, 3, -1\}$, $\mathbf{r} = \{0, 4, 1\}$.
- 1.6. $\mathbf{x} = \{13, 2, 7\}$, $\mathbf{p} = \{5, 1, 0\}$, $\mathbf{q} = \{2, -1, 3\}$, $\mathbf{r} = \{1, 0, -1\}$.
- 1.7. $\mathbf{x} = \{-19, -1, 7\}$, $\mathbf{p} = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{q} = \{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{r} = \{3, 1, 0\}$.
- 1.8. $\mathbf{x} = \{3, -3, 4\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 2\}$, $\mathbf{q} = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{r} = \{2, -1, 4\}$.
- 1.9. $\mathbf{x} = \{3, 3, -1\}$, $\mathbf{p} = \{3, 1, 0\}$, $\mathbf{q} = \{-1, 2, 1\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 0, 2\}$.
- 1.10. $\mathbf{x} = \{-1, 7, -4\}$, $\mathbf{p} = \{-1, 2, 1\}$, $\mathbf{q} = \{2, 0, 3\}$, $\mathbf{r} = \{1, 1, -1\}$.
- 1.11. $\mathbf{x} = \{6, 5, -14\}$, $\mathbf{p} = \{1, 1, 4\}$, $\mathbf{q} = \{0, -3, 2\}$, $\mathbf{r} = \{2, 1, -1\}$.
- 1.12. $\mathbf{x} = \{6, -1, 7\}$, $\mathbf{p} = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{q} = \{-1, 1, 3\}$, $\mathbf{r} = \{1, 0, 4\}$.
- 1.13. $\mathbf{x} = \{5, 15, 0\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 5\}$, $\mathbf{q} = \{-1, 3, 2\}$, $\mathbf{r} = \{0, -1, 1\}$.
- 1.14. $\mathbf{x} = \{2, -1, 11\}$, $\mathbf{p} = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{q} = \{0, 1, -2\}$, $\mathbf{r} = \{1, 0, 3\}$.
- 1.15. $\mathbf{x} = \{11, 5, -3\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 2\}$, $\mathbf{q} = \{-1, 0, 1\}$, $\mathbf{r} = \{2, 5, -3\}$.
- 1.16. $\mathbf{x} = \{8, 0, 5\}$, $\mathbf{p} = \{2, 0, 1\}$, $\mathbf{q} = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{r} = \{4, 1, 2\}$.
- 1.17. $\mathbf{x} = \{3, 1, 8\}$, $\mathbf{p} = \{0, 1, 3\}$, $\mathbf{q} = \{1, 2, -1\}$, $\mathbf{r} = \{2, 0, -1\}$.

- 1.18. $\mathbf{x} = \{8, 1, 2\}$, $\mathbf{p} = \{1, 2, -1\}$, $\mathbf{q} = \{3, 0, 2\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 1, 1\}$.
- 1.19. $\mathbf{x} = \{-9, -8, -3\}$, $\mathbf{p} = \{1, 4, 1\}$, $\mathbf{q} = \{-3, 2, 0\}$, $\mathbf{r} = \{1, -1, 2\}$.
- 1.20. $\mathbf{x} = \{-5, 9, -13\}$, $\mathbf{p} = \{0, 1, -2\}$, $\mathbf{q} = \{3, -1, 1\}$, $\mathbf{r} = \{4, 1, 0\}$.
- 1.21. $\mathbf{x} = \{-15, 5, 6\}$, $\mathbf{p} = \{0, 5, 1\}$, $\mathbf{q} = \{3, 2, -1\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 1, 0\}$.
- 1.22. $\mathbf{x} = \{8, 9, 4\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{q} = \{0, -2, 1\}$, $\mathbf{r} = \{1, 3, 0\}$.
- 1.23. $\mathbf{x} = \{23, -14, -30\}$, $\mathbf{p} = \{2, 1, 0\}$, $\mathbf{q} = \{1, -1, 0\}$, $\mathbf{r} = \{-3, 2, 5\}$.
- 1.24. $\mathbf{x} = \{3, 1, 3\}$, $\mathbf{p} = \{2, 1, 0\}$, $\mathbf{q} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{r} = \{4, 2, 1\}$.
- 1.25. $\mathbf{x} = \{-1, 7, 0\}$, $\mathbf{p} = \{0, 3, 1\}$, $\mathbf{q} = \{1, -1, 2\}$, $\mathbf{r} = \{2, -1, 0\}$.
- 1.26. $\mathbf{x} = \{11, -1, 4\}$, $\mathbf{p} = \{1, -1, 2\}$, $\mathbf{q} = \{3, 2, 0\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 1, 1\}$.
- 1.27. $\mathbf{x} = \{-13, 2, 18\}$, $\mathbf{p} = \{1, 1, 4\}$, $\mathbf{q} = \{-3, 0, 2\}$, $\mathbf{r} = \{1, 2, -1\}$.
- 1.28. $\mathbf{x} = \{0, -8, 9\}$, $\mathbf{p} = \{0, -2, 1\}$, $\mathbf{q} = \{3, 1, -1\}$, $\mathbf{r} = \{4, 0, 1\}$.
- 1.29. $\mathbf{x} = \{8, -7, -13\}$, $\mathbf{p} = \{0, 1, 5\}$, $\mathbf{q} = \{3, -1, 2\}$, $\mathbf{r} = \{-1, 0, 1\}$.
- 1.30. $\mathbf{x} = \{2, 7, 5\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{q} = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{r} = \{0, 3, 1\}$.
- 1.31. $\mathbf{x} = \{15, -20, -1\}$, $\mathbf{p} = \{0, 2, 1\}$, $\mathbf{q} = \{0, 1, -1\}$, $\mathbf{r} = \{5, -3, 2\}$.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 , построенные по векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} ?

- 2.1. $\mathbf{a} = \{1, -2, 3\}$, $\mathbf{b} = \{3, 0, -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
- 2.2. $\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 3, 5\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- 2.3. $\mathbf{a} = \{-2, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- 2.4. $\mathbf{a} = \{1, 2, -3\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 8\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
- 2.5. $\mathbf{a} = \{3, 5, 4\}$, $\mathbf{b} = \{5, 9, 7\}$, $\mathbf{c}_1 = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
- 2.6. $\mathbf{a} = \{1, 4, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 1, -1\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.
- 2.7. $\mathbf{a} = \{1, -2, 5\}$, $\mathbf{b} = \{3, -1, 0\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
- 2.8. $\mathbf{a} = \{3, 4, -1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.

- 2.9. $\mathbf{a} = \{-2, -3, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 0, 5\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} + 9\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
- 2.10. $\mathbf{a} = \{-1, 4, 2\}$, $\mathbf{b} = \{3, -2, 6\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
- 2.11. $\mathbf{a} = \{5, 0, -1\}$, $\mathbf{b} = \{7, 2, 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
- 2.12. $\mathbf{a} = \{0, 3, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.
- 2.13. $\mathbf{a} = \{-2, 7, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-3, 5, 2\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.
- 2.14. $\mathbf{a} = \{3, 7, 0\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, 4\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
- 2.15. $\mathbf{a} = \{-1, 2, -1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -7, 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$.
- 2.16. $\mathbf{a} = \{7, 9, -2\}$, $\mathbf{b} = \{5, 4, 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
- 2.17. $\mathbf{a} = \{5, 0, -2\}$, $\mathbf{b} = \{6, 4, 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 6\mathbf{b} - 10\mathbf{a}$.
- 2.18. $\mathbf{a} = \{8, 3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{4, 1, 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$.
- 2.19. $\mathbf{a} = \{3, -1, 6\}$, $\mathbf{b} = \{5, 7, 10\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
- 2.20. $\mathbf{a} = \{1, -2, 4\}$, $\mathbf{b} = \{7, 3, 5\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
- 2.21. $\mathbf{a} = \{3, 7, 0\}$, $\mathbf{b} = \{4, 6, -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 5\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$.
- 2.22. $\mathbf{a} = \{2, -1, 4\}$, $\mathbf{b} = \{3, -7, -6\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
- 2.23. $\mathbf{a} = \{5, -1, -2\}$, $\mathbf{b} = \{6, 0, 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$.
- 2.24. $\mathbf{a} = \{-9, 5, 3\}$, $\mathbf{b} = \{7, 1, -2\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.
- 2.25. $\mathbf{a} = \{4, 2, 9\}$, $\mathbf{b} = \{0, -1, 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
- 2.26. $\mathbf{a} = \{2, -1, 6\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 3, 8\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.
- 2.27. $\mathbf{a} = \{5, 0, 8\}$, $\mathbf{b} = \{-3, 1, 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 12\mathbf{b} - 9\mathbf{a}$.
- 2.28. $\mathbf{a} = \{-1, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 0\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$.
- 2.29. $\mathbf{a} = \{4, 2, -7\}$, $\mathbf{b} = \{5, 0, -3\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 6\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$.
- 2.30. $\mathbf{a} = \{2, 0, -5\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, 4\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
- 2.31. $\mathbf{a} = \{-1, 2, 8\}$, $\mathbf{b} = \{3, 7, -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 9\mathbf{b} - 12\mathbf{a}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

3.1. $A(1, -2, 3), B(0, -1, 2), C(3, -4, 5)$.

3.2. $A(0, -3, 6), B(-12, -3, -3), C(-9, -3, -6)$.

3.3. $A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1)$.

3.4. $A(-1, 2, -3), B(3, 4, -6), C(1, 1, -1)$.

3.5. $A(-4, -2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 1)$.

3.6. $A(5, 3, -1), B(5, 2, 0), C(6, 4, -1)$.

3.7. $A(-3, -7, -5), B(0, -1, -2), C(2, 3, 0)$.

3.8. $A(2, -4, 6), B(0, -2, 4), C(6, -8, 10)$.

3.9. $A(0, 1, -2), B(3, 1, 2), C(4, 1, 1)$.

3.10. $A(3, 3, -1), B(1, 5, -2), C(4, 1, 1)$.

3.11. $A(2, 1, -1), B(6, -1, -4), C(4, 2, 1)$.

3.12. $A(-1, -2, 1), B(-4, -2, 5), C(-8, -2, 2)$.

3.13. $A(6, 2, -3), B(6, 3, -2), C(7, 3, -3)$.

3.14. $A(0, 0, 4), B(-3, -6, 1), C(-5, -10, -1)$.

3.15. $A(2, -8, -1), B(4, -6, 0), C(-2, -5, -1)$.

3.16. $A(3, -6, 9), B(0, -3, 6), C(9, -12, 15)$.

3.17. $A(0, 2, -4), B(8, 2, 2), C(6, 2, 4)$.

3.18. $A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, 1)$.

3.19. $A(-4, 3, 0), B(0, 1, 3), C(-2, 4, -2)$.

3.20. $A(1, -1, 0), B(-2, -1, 4), C(8, -1, -1)$.

3.21. $A(7, 0, 2), B(7, 1, 3), C(8, -1, 2)$.

3.22. $A(2, 3, 2), B(-1, -3, -1), C(-3, -7, -3)$.

3.23. $A(2, 2, 7), B(0, 0, 6), C(-2, 5, 7)$.

$$3.24. A(-1, 2, -3), B(0, 1, -2), C(-3, 4, -5).$$

$$3.25. A(0, 3, -6), B(9, 3, 6), C(12, 3, 3).$$

$$3.26. A(3, 3, -1), B(5, 1, -2), C(4, 1, -3).$$

$$3.27. A(-2, 1, 1), B(2, 3, -2), C(0, 0, 3).$$

$$3.28. A(1, 4, -1), B(-2, 4, -5), C(8, 4, 0).$$

$$3.29. A(0, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 2, 0).$$

$$3.30. A(-4, 0, 4), B(-1, 6, 7), C(1, 10, 9).$$

$$3.31. A(-2, 4, -6), B(0, 2, -4), C(6, 8, -10).$$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

$$4.1. \mathbf{a} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 1, |\mathbf{q}| = 2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/6.$$

$$4.2. \mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 4, |\mathbf{q}| = 1, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4.$$

$$4.3. \mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 1/5, |\mathbf{q}| = 1, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2.$$

$$4.4. \mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 4, |\mathbf{q}| = 1/2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 5p/6.$$

$$4.5. \mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}, \mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 2, |\mathbf{q}| = 3, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 3p/4.$$

$$4.6. \mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 2, |\mathbf{q}| = 3, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3.$$

$$4.7. \mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 3, |\mathbf{q}| = 2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2.$$

$$4.8. \mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 7, |\mathbf{q}| = 2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4.$$

$$4.9. \mathbf{a} = \mathbf{p} - 4\mathbf{q}, \mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 1, |\mathbf{q}| = 2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/6.$$

$$4.10. \mathbf{a} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}, \mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 7, |\mathbf{q}| = 2, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3.$$

$$4.11. \mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 10, |\mathbf{q}| = 1, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2.$$

$$4.12. \mathbf{a} = 4\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}; |\mathbf{p}| = 5, |\mathbf{q}| = 4, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4.$$

- 4.13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 6$, $|\mathbf{q}| = 7$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3$.
- 4.14. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3$.
- 4.15. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4$.
- 4.16. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/6$.
- 4.17. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3$.
- 4.18. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1/2$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2$.
- 4.19. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4$.
- 4.20. $\mathbf{a} = 10\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/6$.
- 4.21. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 8$, $|\mathbf{q}| = 1/2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3$.
- 4.22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$; $|\mathbf{p}| = 2,5$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2$.
- 4.23. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 3p/4$.
- 4.24. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 5$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 2p/3$.
- 4.25. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4$.
- 4.26. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 5$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 5p/6$.
- 4.27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/4$.
- 4.28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{q} + \mathbf{p}$; $|\mathbf{p}| = 1/2$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 5p/6$.
- 4.29. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/3$.
- 4.30. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = p/2$.
- 4.31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 3p/4$.

Задача 5. Компланарны ли векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} ?

5.1. $\mathbf{a} = \{2, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 2\}$.

- 5.2. $\mathbf{a} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{c} = \{3, 1, -1\}$.
- 5.3. $\mathbf{a} = \{1, 5, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$.
- 5.4. $\mathbf{a} = \{1, -1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 3, 4\}$.
- 5.5. $\mathbf{a} = \{3, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$.
- 5.6. $\mathbf{a} = \{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-2, -1, 0\}$, $\mathbf{c} = \{5, 2, -1\}$.
- 5.7. $\mathbf{a} = \{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 2\}$.
- 5.8. $\mathbf{a} = \{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{6, 7, 4\}$, $\mathbf{c} = \{2, 0, -1\}$.
- 5.9. $\mathbf{a} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, -7\}$, $\mathbf{c} = \{1, 2, 3\}$.
- 5.10. $\mathbf{a} = \{3, 7, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 1\}$.
- 5.11. $\mathbf{a} = \{1, -2, 6\}$, $\mathbf{b} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, -6, 17\}$.
- 5.12. $\mathbf{a} = \{6, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1, -2, -1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 1, 2\}$.
- 5.13. $\mathbf{a} = \{7, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1, -2, -1\}$, $\mathbf{c} = \{4, 2, 4\}$.
- 5.14. $\mathbf{a} = \{2, 3, 2\}$, $\mathbf{b} = \{4, 7, 5\}$, $\mathbf{c} = \{2, 0, -1\}$.
- 5.15. $\mathbf{a} = \{5, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{4, 2, 4\}$.
- 5.16. $\mathbf{a} = \{3, 10, 5\}$, $\mathbf{b} = \{-2, -2, -3\}$, $\mathbf{c} = \{2, 4, 3\}$.
- 5.17. $\mathbf{a} = \{-2, -4, -3\}$, $\mathbf{b} = \{4, 3, 1\}$, $\mathbf{c} = \{6, 7, 4\}$.
- 5.18. $\mathbf{a} = \{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{8, 3, -2\}$.
- 5.19. $\mathbf{a} = \{4, 2, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-3, -3, -3\}$, $\mathbf{c} = \{2, 1, 2\}$.
- 5.20. $\mathbf{a} = \{4, 1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{9, 2, 5\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, -1\}$.
- 5.21. $\mathbf{a} = \{5, 3, 4\}$, $\mathbf{b} = \{4, 3, 3\}$, $\mathbf{c} = \{9, 5, 8\}$.
- 5.22. $\mathbf{a} = \{3, 4, 2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{c} = \{8, 11, 6\}$.
- 5.23. $\mathbf{a} = \{4, -1, -6\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, -7\}$, $\mathbf{c} = \{2, -1, -4\}$.
- 5.24. $\mathbf{a} = \{3, 1, 0\}$, $\mathbf{b} = \{-5, -4, -5\}$, $\mathbf{c} = \{4, 2, 4\}$.
- 5.25. $\mathbf{a} = \{3, 0, 3\}$, $\mathbf{b} = \{8, 1, 6\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, -1\}$.

$$5.26. \mathbf{a} = \{1, -1, 4\}, \mathbf{b} = \{1, 0, 3\}, \mathbf{c} = \{1, -3, 8\}.$$

$$5.27. \mathbf{a} = \{6, 3, 4\}, \mathbf{b} = \{-1, -2, -1\}, \mathbf{c} = \{2, 1, 2\}.$$

$$5.28. \mathbf{a} = \{4, 1, 1\}, \mathbf{b} = \{-9, -4, -9\}, \mathbf{c} = \{6, 2, 6\}.$$

$$5.29. \mathbf{a} = \{-3, 3, 3\}, \mathbf{b} = \{-4, 7, 6\}, \mathbf{c} = \{3, 0, -1\}.$$

$$5.30. \mathbf{a} = \{-7, 10, -5\}, \mathbf{b} = \{0, -2, -1\}, \mathbf{c} = \{-2, 4, -1\}.$$

$$5.31. \mathbf{a} = \{7, 4, 6\}, \mathbf{b} = \{2, 1, 1\}, \mathbf{c} = \{19, 11, 17\}.$$

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$6.1. A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3).$$

$$6.2. A_1(-4, 2, 6), A_2(2, -3, 0), A_3(-10, 5, 8), A_4(-5, 2, -4).$$

$$6.3. A_1(7, 2, 4), A_2(7, -1, -2), A_3(3, 3, 1), A_4(-4, 2, 1).$$

$$6.4. A_1(2, 1, 4), A_2(-1, 5, -2), A_3(-7, -3, 2), A_4(-6, -3, 6).$$

$$6.5. A_1(-1, -5, 2), A_2(-6, 0, -3), A_3(3, 6, -3), A_4(-10, 6, 7).$$

$$6.6. A_1(0, -1, -1), A_2(-2, 3, 5), A_3(1, -5, -9), A_4(-1, -6, 3).$$

$$6.7. A_1(5, 2, 0), A_2(2, 5, 0), A_3(1, 2, 4), A_4(-1, 1, 1).$$

$$6.8. A_1(2, -1, -2), A_2(1, 2, 1), A_3(5, 0, -6), A_4(-10, 9, -7).$$

$$6.9. A_1(-2, 0, -4), A_2(-1, 7, 1), A_3(4, -8, -4), A_4(1, -4, 6).$$

$$6.10. A_1(14, 4, 5), A_2(-5, -3, 2), A_3(-2, -6, -3), A_4(-2, 2, -1).$$

$$6.11. A_1(1, 2, 0), A_2(3, 0, -3), A_3(5, 2, 6), A_4(8, 4, -9).$$

$$6.12. A_1(2, -1, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(3, 2, 1), A_4(-4, 2, 5).$$

$$6.13. A_1(1, 1, 2), A_2(-1, 1, 3), A_3(2, -2, 4), A_4(-1, 0, -2).$$

$$6.14. A_1(2, 3, 1), A_2(4, 1, -2), A_3(6, 3, 7), A_4(7, 5, -3).$$

$$6.15. A_1(1, 1, -1), A_2(2, 3, 1), A_3(3, 2, 1), A_4(5, 9, -8).$$

- 6.16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$.
- 6.17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$.
- 6.18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$.
- 6.19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$.
- 6.20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.
- 6.21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$.
- 6.22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$.
- 6.23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$.
- 6.24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, -5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$.
- 6.25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$.
- 6.26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$.
- 6.27. $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$.
- 6.28. $A_1(-2, -1, -1)$, $A_2(0, 3, 2)$, $A_3(3, 1, -4)$, $A_4(-4, 7, 3)$.
- 6.29. $A_1(-3, -5, 6)$, $A_2(2, 1, -4)$, $A_3(0, -3, -1)$, $A_4(-5, 2, -8)$.
- 6.30. $A_1(2, -4, -3)$, $A_2(5, -6, 0)$, $A_3(-1, 3, -3)$, $A_4(-10, -8, 7)$.
- 6.31. $A_1(1, -1, 2)$, $A_2(2, 1, 2)$, $A_3(1, 1, 4)$, $A_4(6, -3, 8)$.

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1 , M_2 , M_3 .

- 7.1. $M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$, $M_0(-12, 7, -1)$.
- 7.2. $M_1(-1, 2, -3)$, $M_2(4, -1, 0)$, $M_3(2, 1, -2)$, $M_0(1, -6, -5)$.
- 7.3. $M_1(-3, -1, 1)$, $M_2(-9, 1, -2)$, $M_3(3, -5, 4)$, $M_0(-7, 0, -1)$.
- 7.4. $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 0, 3)$, $M_3(2, 1, -1)$, $M_0(-2, 4, 2)$.
- 7.5. $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(1, -1, 2)$, $M_3(0, 1, -1)$, $M_0(2, -1, 4)$.

- 7.6. $M_1(1, 0, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(2, -2, 1), M_0(-5, -9, 1)$.
- 7.7. $M_1(1, 2, -3), M_2(1, 0, 1), M_3(-2, -1, 6), M_0(3, -2, -9)$.
- 7.8. $M_1(3, 10, -1), M_2(-2, 3, -5), M_3(-6, 0, -3), M_0(-6, 7, -10)$.
- 7.9. $M_1(-1, 2, 4), M_2(-1, -2, -4), M_3(3, 0, -1), M_0(-2, 3, 5)$.
- 7.10. $M_1(0, -3, 1), M_2(-4, 1, 2), M_3(2, -1, 5), M_0(-3, 4, -5)$.
- 7.11. $M_1(1, 3, 0), M_2(4, -1, 2), M_3(3, 0, 1), M_0(4, 3, 0)$.
- 7.12. $M_1(-2, -1, -1), M_2(0, 3, 2), M_3(3, 1, -4), M_0(-21, 20, -16)$.
- 7.13. $M_1(-3, -5, 6), M_2(2, 1, -4), M_3(0, -3, -1), M_0(3, 6, 68)$.
- 7.14. $M_1(2, -4, -3), M_2(5, -6, 0), M_3(-1, 3, -3), M_0(2, -10, 8)$.
- 7.15. $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 1, 2), M_3(1, 1, 4), M_0(-3, 2, 7)$.
- 7.16. $M_1(1, 3, 6), M_2(2, 2, 1), M_3(-1, 0, 1), M_0(5, -4, 5)$.
- 7.17. $M_1(-4, 2, 6), M_2(2, -3, 0), M_3(-10, 5, 8), M_0(-12, 1, 8)$.
- 7.18. $M_1(7, 2, 4), M_2(7, -1, -2), M_3(-5, -2, -1), M_0(10, 1, 8)$.
- 7.19. $M_1(2, 1, 4), M_2(3, 5, -2), M_3(-7, -3, 2), M_0(-3, 1, 8)$.
- 7.20. $M_1(-1, -5, 2), M_2(-6, 0, 3), M_3(3, 6, -3), M_0(10, -8, -7)$.
- 7.21. $M_1(0, -1, -1), M_2(-2, 3, 5), M_3(1, -5, -9), M_0(-4, -13, 6)$.
- 7.22. $M_1(5, 2, 0), M_2(2, 5, 0), M_3(1, 2, 4), M_0(-3, -6, -8)$.
- 7.23. $M_1(2, -1, -2), M_2(1, 2, 1), M_3(5, 0, -6), M_0(14, -3, 7)$.
- 7.24. $M_1(-2, 0, -4), M_2(-1, 7, 1), M_3(4, -8, -4), M_0(-6, 5, 5)$.
- 7.25. $M_1(14, 4, 5), M_2(-5, -3, 2), M_3(-2, -6, -3), M_0(-1, -8, 7)$.
- 7.26. $M_1(1, 2, 0), M_2(3, 0, -3), M_3(5, 2, 6), M_0(-13, -8, 16)$.
- 7.27. $M_1(2, -1, 2), M_2(1, 2, -1), M_3(3, 2, 1), M_0(-5, 3, 7)$.
- 7.28. $M_1(1, 1, 2), M_2(-1, 1, 3), M_3(2, -2, 4), M_0(2, 3, 8)$.
- 7.29. $M_1(2, 3, 1), M_2(4, 1, -2), M_3(6, 3, 7), M_0(-5, -4, 8)$.

$$7.30. M_1(1, 1, -1), M_2(2, 3, 1), M_3(3, 2, 1), M_0(-3, -7, 6).$$

$$7.31. M_1(1, 5, -7), M_2(-3, 6, 3), M_3(-2, 7, 3), M_0(1, -1, 2).$$

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} .

$$8.1. A(1, 0, -2), B(2, -1, 3), C(0, -3, 2).$$

$$8.2. A(-1, 3, 4), B(-1, 5, 0), C(2, 6, 1).$$

$$8.3. A(4, -2, 0), B(1, -1, -5), C(-2, 1, -3).$$

$$8.4. A(-8, 0, 7), B(-3, 2, 4), C(-1, 4, 5).$$

$$8.5. A(7, -5, 1), B(5, -1, -3), C(3, 0, -4).$$

$$8.6. A(-3, 5, -2), B(-4, 0, 3), C(-3, 2, 5).$$

$$8.7. A(1, -1, 8), B(-4, -3, 10), C(-1, -1, 7).$$

$$8.8. A(-2, 0, -5), B(2, 7, -3), C(1, 10, -1).$$

$$8.9. A(1, 9, -4), B(5, 7, 1), C(3, 5, 0).$$

$$8.10. A(-7, 0, 3), B(1, -5, -4), C(2, -3, 0).$$

$$8.11. A(0, -3, 5), B(-7, 2, 6), C(-3, 2, 4).$$

$$8.12. A(5, -1, 2), B(2, -4, 3), C(4, -1, 3).$$

$$8.13. A(-3, 7, 2), B(3, 5, 1), C(4, 5, 3).$$

$$8.14. A(0, -2, 8), B(4, 3, 2), C(1, 4, 3).$$

$$8.15. A(1, -1, 5), B(0, 7, 8), C(-1, 3, 8).$$

$$8.16. A(-10, 0, 9), B(12, 4, 11), C(8, 5, 15).$$

$$8.17. A(3, -3, -6), B(1, 9, -5), C(6, 6, -4).$$

$$8.18. A(2, 1, 7), B(9, 0, 2), C(9, 2, 3).$$

$$8.19. A(-7, 1, -4), B(8, 11, -3), C(9, 9, -1).$$

- 8.20. $A(1, 0, -6)$, $B(-7, 2, 1)$, $C(-9, 6, 1)$.
- 8.21. $A(-3, 1, 0)$, $B(6, 3, 3)$, $C(9, 4, -2)$.
- 8.22. $A(-4, -2, 5)$, $B(3, -3, -7)$, $C(9, 3, -7)$.
- 8.23. $A(0, -8, 10)$, $B(-5, 5, 7)$, $C(-8, 0, 4)$.
- 8.24. $A(1, -5, -2)$, $B(6, -2, 1)$, $C(2, -2, -2)$.
- 8.25. $A(0, 7, -9)$, $B(-1, 8, -11)$, $C(-4, 3, -12)$.
- 8.26. $A(-3, -1, 7)$, $B(0, 2, -6)$, $C(2, 3, -5)$.
- 8.27. $A(5, 3, -1)$, $B(0, 0, -3)$, $C(5, -1, 0)$.
- 8.28. $A(-1, 2, -2)$, $B(13, 14, 1)$, $C(14, 15, 2)$.
- 8.29. $A(7, -5, 0)$, $B(8, 3, -1)$, $C(8, 5, 1)$.
- 8.30. $A(-3, 6, 4)$, $B(8, -3, 5)$, $C(10, -3, 7)$.
- 8.31. $A(2, 5, -3)$, $B(7, 8, -1)$, $C(9, 7, 4)$.

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

- 9.1. $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - 16 = 0$.
- 9.2. $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.
- 9.3. $4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $x - 4y - z + 9 = 0$.
- 9.4. $3x - y + 2z + 15 = 0$, $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.
- 9.5. $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
- 9.6. $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.
- 9.7. $3y - z = 0$, $2y + z = 0$.
- 9.8. $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.
- 9.9. $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.
- 9.10. $2x - y + 5z + 16 = 0$, $x + 2y + 3z + 8 = 0$.
- 9.11. $2x + 2y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.
- 9.12. $3x + y + z - 4 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
- 9.13. $3x - 2y - 2z - 16 = 0$, $x + y - 3z - 7 = 0$.

- 9.14. $2x + 2y + z + 9 = 0$, $x - y + 3z - 1 = 0$.
 9.15. $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$.
 9.16. $3x + 2y - 3z - 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$.
 9.17. $x - 3y - 2z - 8 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$.
 9.18. $3x - 2y + 3z + 23 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
 9.19. $x + y + 3z - 7 = 0$, $y + z - 1 = 0$.
 9.20. $x - 2y + 2z + 17 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$.
 9.21. $x + 2y - 1 = 0$, $x + y + 6 = 0$.
 9.22. $2x - z + 5 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.
 9.23. $5x + 3y + z - 18 = 0$, $2y + z - 9 = 0$.
 9.24. $4x + 3z - 2 = 0$, $x + 2y + 2z + 5 = 0$.
 9.25. $x + 4y - z + 1 = 0$, $2x + y + 4z - 3 = 0$.
 9.26. $2y + z - 9 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$.
 9.27. $2x - 6y + 14z - 1 = 0$, $5x - 15y + 35z - 3 = 0$.
 9.28. $x - y + 7z - 1 = 0$, $2x - 2y - 5 = 0$.
 9.29. $3x - y - 5 = 0$, $2x + y - 3 = 0$.
 9.30. $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$, $x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$.
 9.31. $x + 2y - 2z - 7 = 0$, $x + y - 35 = 0$.

Задача 10. Найти координаты точки A , равноудаленной от точек B и C .

- 10.1. $A(0, 0, z)$, $B(5, 1, 0)$, $C(0, 2, 3)$.
 10.2. $A(0, 0, z)$, $B(3, 3, 1)$, $C(4, 1, 2)$.
 10.3. $A(0, 0, z)$, $B(3, 1, 3)$, $C(1, 4, 2)$.
 10.4. $A(0, 0, z)$, $B(-1, -1, -6)$, $C(2, 3, 5)$.
 10.5. $A(0, 0, z)$, $B(-13, 4, 6)$, $C(10, -9, 5)$.
 10.6. $A(0, 0, z)$, $B(-5, -5, 6)$, $C(-7, 6, 2)$.
 10.7. $A(0, 0, z)$, $B(-18, 1, 0)$, $C(15, -10, 2)$.
 10.8. $A(0, 0, z)$, $B(10, 0, -2)$, $C(9, -2, 1)$.
 10.9. $A(0, 0, z)$, $B(-6, 7, 5)$, $C(8, -4, 3)$.

- 10.10. $A(0, 0, z), B(6, -7, 1), C(-1, 2, 5)$.
- 10.11. $A(0, 0, z), B(7, 0, -15), C(2, 10, -12)$.
- 10.12. $A(0, y, 0), B(3, 0, 3), C(0, 2, 4)$.
- 10.13. $A(0, y, 0), B(1, 6, 4), C(5, 7, 1)$.
- 10.14. $A(0, y, 0), B(-2, 8, 10), C(6, 11, -2)$.
- 10.15. $A(0, y, 0), B(-2, -4, 6), C(7, 2, 5)$.
- 10.16. $A(0, y, 0), B(2, 2, 4), C(0, 4, 2)$.
- 10.17. $A(0, y, 0), B(0, -4, 1), C(1, -3, 5)$.
- 10.18. $A(0, y, 0), B(0, 5, -9), C(-1, 0, 5)$.
- 10.19. $A(0, y, 0), B(-2, 4, -6), C(8, 5, 1)$.
- 10.20. $A(0, y, 0), B(7, 3, -4), C(1, 5, 7)$.
- 10.21. $A(0, y, 0), B(0, -2, 4), C(-4, 0, 4)$.
- 10.22. $A(x, 0, 0), B(0, 1, 3), C(2, 0, 4)$.
- 10.23. $A(x, 0, 0), B(4, 0, 5), C(5, 4, 2)$.
- 10.24. $A(x, 0, 0), B(8, 1, -7), C(10, -2, 1)$.
- 10.25. $A(x, 0, 0), B(3, 5, 6), C(1, 2, 3)$.
- 10.26. $A(x, 0, 0), B(4, 5, -2), C(2, 3, 4)$.
- 10.27. $A(x, 0, 0), B(-2, 0, 6), C(0, -2, -4)$.
- 10.28. $A(x, 0, 0), B(1, 5, 9), C(3, 7, 11)$.
- 10.29. $A(x, 0, 0), B(4, 6, 8), C(2, 4, 6)$.
- 10.30. $A(x, 0, 0), B(1, 2, 3), C(2, 6, 10)$.
- 10.31. $A(x, 0, 0), B(-2, -4, -6), C(-1, -2, -3)$.

Задача 11. Пусть k – коэффициент преобразования подобия с центром в начале координат. Верно ли, что точка A принадлежит образу плоскости a ?

11.1. $A(1, 2, -1)$, $a: 2x + 3y + z - 1 = 0$, $k = 2$.

11.2. $A(2, 1, 2)$, $a: x - 2y + z + 1 = 0$, $k = -2$.

11.3. $A(-1, 1, 1)$, $a: 3x - y + 2z + 4 = 0$, $k = 1/2$.

11.4. $A(-2, 4, 1)$, $a: 3x + y + 2z + 2 = 0$, $k = 3$.

11.5. $A(1, 1/3, -2)$, $a: x - 3y + z + 6 = 0$, $k = 1/3$.

11.6. $A(1/2, 1/3, 1)$, $a: 2x - 3y + 3z - 2 = 0$, $k = 1,5$.

11.7. $A(2, 0, -1)$, $a: x - 3y + 5z - 1 = 0$, $k = -1$.

11.8. $A(1, -2, 1)$, $a: 5x + y - z + 6 = 0$, $k = 2/3$.

11.9. $A(2, -5, 4)$, $a: 5x + 2y - z + 3 = 0$, $k = 4/3$.

11.10. $A(2, -3, 1)$, $a: x + y - 2z + 2 = 0$, $k = 5/2$.

11.11. $A(-2, 3, -3)$, $a: 3x + 2y - z - 2 = 0$, $k = 3/2$.

11.12. $A(1/4, 1/3, 1)$, $a: 4x - 3y + 5z - 10 = 0$, $k = 1/2$.

11.13. $A(0, 1, -1)$, $a: 6x - 5y + 3z - 4 = 0$, $k = -3/4$.

11.14. $A(2, 3, -2)$, $a: 3x - 2y + 4z - 6 = 0$, $k = -4/3$.

11.15. $A(-2, -1, 1)$, $a: x - 2y + 6z - 10 = 0$, $k = 3/5$.

11.16. $A(5, 0, -1)$, $a: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $k = 3$.

11.17. $A(1, 1, 1)$, $a: 7x - 6y + z - 5 = 0$, $k = -2$.

11.18. $A(1/3, 1, 1)$, $a: 3x - y + 5z - 6 = 0$, $k = 5/6$.

11.19. $A(2, 5, 1)$, $a: 5x - 2y + z - 3 = 0$, $k = 1/3$.

11.20. $A(-1, 2, 3)$, $a: x - 3y + z + 2 = 0$, $k = 2,5$.

11.21. $A(4, 3, 1)$, $a: 3x - 4y + 5z - 6 = 0$, $k = 5/6$.

11.22. $A(3, 5, 2)$, $a: 5x - 3y + z - 4 = 0$, $k = 1/2$.

$$11.23. A(4, 0, -3), \quad a: 7x - y + 3z - 1 = 0, \quad k = 3.$$

$$11.24. A(-1, 1, -2), \quad a: 4x - y + 3z - 6 = 0, \quad k = -5/3.$$

$$11.25. A(2, -5, -1), \quad a: 5x + 2y - 3z - 9 = 0, \quad k = 1/3.$$

$$11.26. A(-3, -2, 4), \quad a: 2x - 3y + z - 5 = 0, \quad k = -4/5.$$

$$11.27. A(5, 0, -6), \quad a: 6x - y - z + 7 = 0, \quad k = 2/7.$$

$$11.28. A(1, 2, 2), \quad a: 3x - z + 5 = 0, \quad k = -1/5.$$

$$11.29. A(3, 2, 4), \quad a: 2x - 3y + z - 6 = 0, \quad k = 2/3.$$

$$11.30. A(7, 0, -1), \quad a: x - y - z - 1 = 0, \quad k = 4.$$

$$11.31. A(0, 3, -1), \quad a: 2x - y + 3z - 1 = 0, \quad k = 2.$$

Задача 12. Написать канонические уравнения прямой.

$$12.1. 2x + y + z - 2 = 0, \quad 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

$$12.2. x - 3y + 2z + 2 = 0, \quad x + 3y + z + 14 = 0.$$

$$12.3. x - 2y + z - 4 = 0, \quad 2x + 2y - z - 8 = 0.$$

$$12.4. x + y + z - 2 = 0, \quad x - y - 2z + 2 = 0.$$

$$12.5. 2x + 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

$$12.6. 3x + y - z - 6 = 0, \quad 3x - y + 2z = 0.$$

$$12.7. x + 5y + 2z + 11 = 0, \quad x - y - z - 1 = 0.$$

$$12.8. 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \quad 2x - 4y + 3z + 4 = 0.$$

$$12.9. 5x + y - 3z + 4 = 0, \quad x - y + 2z + 2 = 0.$$

$$12.10. x - y - z - 2 = 0, \quad x - 2y + z + 4 = 0.$$

$$12.11. 4x + y - 3z + 2 = 0, \quad 2x - y + z - 8 = 0.$$

$$12.12. 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \quad 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

$$12.13. 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \quad x + 7y - z - 5 = 0.$$

$$12.14. 8x - y - 3z - 1 = 0, \quad x + y + z + 10 = 0.$$

$$12.15. 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \quad 6x + 5y + 3z + 4 = 0.$$

$$12.16. x + 5y - z - 5 = 0, \quad 2x - 5y + 2z + 5 = 0.$$

$$12.17. 2x - 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

$$12.18. 5x + y + 2z + 4 = 0, \quad x - y - 3z + 2 = 0.$$

$$12.19. 4x + y + z + 2 = 0, \quad 2x - y - 3z - 8 = 0.$$

$$12.20. 2x + y - 3z - 2 = 0, \quad 2x - y + z + 6 = 0.$$

$$12.21. x + y - 2z - 2 = 0, \quad x - y + z + 2 = 0.$$

$$12.22. x + 5y - z + 11 = 0, \quad x - y + 2z - 1 = 0.$$

$$12.23. x - y + z - 2 = 0, \quad x - 2y - z + 4 = 0.$$

$$12.24. 6x - 7y - z - 2 = 0, \quad x + 7y - 4z - 5 = 0.$$

$$12.25. x + 5y + 2z - 5 = 0, \quad 2x - 5y - z + 5 = 0.$$

$$12.26. x - 3y + z + 2 = 0, \quad x + 3y + 2z + 14 = 0.$$

$$12.27. 2x + 3y - 2z + 6 = 0, \quad x - 3y + z + 3 = 0.$$

$$12.28. 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \quad 2x - 4y - 2z + 4 = 0.$$

$$12.29. 3x + 3y + z - 1 = 0, \quad 2x - 3y - 2z + 6 = 0.$$

$$12.30. 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \quad 6x + 5y - 4z + 4 = 0.$$

$$12.31. 2x - 3y - 2z + 6 = 0, \quad x - 3y + z + 3 = 0.$$

Задача 13. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$13.1. \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

$$13.2. \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

$$13.3. \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad x - 3y + 7z - 24 = 0.$$

$$13.4. \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, \quad 2x - y + 4z = 0.$$

$$13.5. \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad 3x + y - 5z - 12 = 0.$$

$$13.6. \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 3y - 5z + 9 = 0.$$

$$13.7. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad x-2y+5z+17=0.$$

$$13.8. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}, \quad x-2y+4z-19=0.$$

$$13.9. \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x-y+3z+23=0.$$

$$13.10. \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, \quad 2x-3y-5z-7=0.$$

$$13.11. \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad 4x+2y-z-11=0.$$

$$13.12. \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, \quad 3x-2y-4z-8=0.$$

$$13.13. \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x+2y-z-2=0.$$

$$13.14. \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, \quad 5x-y+4z+3=0.$$

$$13.15. \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \quad x+3y+5z-42=0.$$

$$13.16. \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, \quad 7x+y+4z-47=0.$$

$$13.17. \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad 2x+3y+7z-52=0.$$

$$13.18. \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad 3x+4y+7z-16=0.$$

$$13.19. \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x-5y+4z+24=0.$$

$$13.20. \frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, \quad x-2y-3z+18=0.$$

$$13.21. \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad x+7y+3z+11=0.$$

$$13.22. \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, \quad 3x+7y-5z-11=0.$$

$$13.23. \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, \quad 4x + y - 6z - 5 = 0.$$

$$13.24. \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, \quad 5x + 9y + 4z - 25 = 0.$$

$$13.25. \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad x + 4y + 13z - 23 = 0.$$

$$13.26. \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, \quad 3x - 2y + 5z - 3 = 0.$$

$$13.27. \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, \quad 3x - y + 4z = 0.$$

$$13.28. \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 2y - 5z + 16 = 0.$$

$$13.29. \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, \quad 3x - 7y - 2z + 7 = 0.$$

$$13.30. \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, \quad 5x + 7y + 9z - 32 = 0.$$

$$13.31. \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad 2x + y + 7z - 3 = 0.$$

Задача 14. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1 – 15) или плоскости (для вариантов 16 – 31).

$$14.1. M(0, -3, -2), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

$$14.2. M(2, -1, 1), \quad \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

$$14.3. M(1, 1, 1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$14.4. M(1, 2, 3), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

$$14.5. M(1, 0, -1), \quad \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

- 14.6. $M(2, 1, 0), \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$
- 14.7. $M(-2, -3, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{1} = \frac{z-0,5}{1}.$
- 14.8. $M(-1, 0, -1), \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$
- 14.9. $M(0, 2, 1), \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$
- 14.10. $M(3, -3, -1), \frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$
- 14.11. $M(3, 3, 3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$
- 14.12. $M(-1, 2, 0), \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$
- 14.13. $M(2, -2, -3), \frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$
- 14.14. $M(-1, 0, 1), \frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$
- 14.15. $M(0, -3, -2), \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$
- 14.16. $M(1, 0, 1), 4x+6y+4z-25=0.$
- 14.17. $M(-1, 0, -1), 2x+6y-2z+11=0.$
- 14.18. $M(0, 2, 1), 2x+4y-3=0.$
- 14.19. $M(2, 1, 0), y+z+2=0.$
- 14.20. $M(-1, 2, 0), 4x-5y-z-7=0.$
- 14.21. $M(2, -1, 1), x-y+2z-2=0.$
- 14.22. $M(1, 1, 1), x+4y+3z+5=0.$
- 14.23. $M(1, 2, 3), 2x+10y+10z-1=0.$
- 14.24. $M(0, -3, -2), 2x+10y+10z-1=0.$

14.25. $M(1, 0, -1), 2y + 4z - 1 = 0.$

14.26. $M(3, -3, -1), 2x - 4y - 4z - 13 = 0.$

14.27. $M(-2, -3, 0), x + 5y + 4 = 0.$

14.28. $M(2, -2, -3), y + z + 2 = 0.$

14.29. $M(-1, 0, 1), 2x + 4y - 3 = 0.$

14.30. $M(3, 3, 3), 8x + 6y + 8z - 25 = 0.$

14.31. $M(-2, 0, 3), 2x - 2y + 10z + 1 = 0.$

Х. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Теоретические вопросы

1. Линейное пространство. Базис. Координаты.
2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
3. Линейный оператор. Матрица оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
5. Действия над линейными операторами.
6. Собственные векторы и собственные значения.
7. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
8. Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.
9. Ортогональное преобразование; свойства; матрица.
10. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Теоретические упражнения

1. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3 если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.
2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерности этого подпространства.
3. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.
4. Линейный оператор A в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу
$$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$
Найти матрицу этого же оператора в базисе $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$.
5. Найти ядро и область значений оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть \mathbf{x} и \mathbf{y} — собственные векторы оператора A , относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ не является собственным вектором оператора A .

7. Пусть $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Ax = \{a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3\}$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

Расчетные задания

Задача 1. Образуется ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое число α ?

1.1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых — целые числа;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

1.2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

1.3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

1.4. Множество всех векторов трехмерного пространства;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

1.5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot |a|$.

1.6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x , y , z ;

сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.

1.7. Множество всех функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, принимающих положительные значения;

сумма $f(t) \cdot g(t)$, произведение $f^a(t)$.

1.8. Множество всех непрерывных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[0, 1]$;

сумма $f(t) + g(t)$, произведение $a \cdot f(t)$.

1.9. Множество всех четных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[-1, +1]$;

сумма $f(t) \cdot g(t)$, произведение $f^a(t)$.

1.10. Множество всех нечетных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[-1, +1]$;

сумма $f(t) + g(t)$, произведение $a \cdot f(t)$.

1.11. Множество всех линейных функций $a = f(x_1, x_2)$, $b = g(x_1, x_2)$;

сумма $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, произведение $a \cdot f(x_1, x_2)$.

1.12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x ;

сумма $a + b$, произведение $a \cdot a$.

1.13. Множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем от переменных x, y ;

сумма $a + b$, произведение $a \cdot a$.

1.14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел

$$a = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad b = \{y_1, y_2, \dots, y_n\};$$

сумма $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}$, произведение $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_n\}$.

1.15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел

$$a = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad b = \{y_1, y_2, \dots, y_n\};$$

сумма $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\}$, произведение $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_n\}$.

1.16. Множество всех сходящихся последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{u_n\}$;

сумма $\{u_n + u_n\}$, произведение $\{au_n\}$.

1.17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n ;

сумма $a + b$, произведение $a \cdot a$.

1.18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n ;

сумма $a + b$, произведение $a \cdot a$.

1.19. Множество всех диагональных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.20. Множество всех невырожденных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

сумма $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.21. Множество всех квадратных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.22. Множество всех диагональных матриц $a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$ размера $n \times n$;

сумма $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.23. Множество всех квадратных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.24. Множество всех симметричных матриц

$$a = \|a_{ik}\| \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad b = \|b_{ik}\| \quad (b_{ik} = b_{ki}), \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|aa_{ik}\|$.

1.25. Множество всех целых чисел;

сумма $a + b$, произведение $[a \cdot a]$.

1.26. Множество всех действительных чисел;

сумма $a + b$, произведение $a \cdot a$.

1.27. Множество всех положительных чисел;

сумма $a \cdot b$, произведение a^a .

1.28. Множество всех отрицательных чисел;

сумма $-|a| \cdot |b|$, произведение $-|a|^a$.

1.29. Множество всех действительных чисел;

сумма $a \cdot b$, произведение $a \cdot a$.

1.30. Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$;

сумма $f(t) + g(t)$, произведение $a \cdot f(t)$.

1.31. Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$;

сумма $f(t) \cdot g(t)$, произведение $a \cdot f(t)$.

Задача 2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

2.1. $a = \{1, 4, 6\}$, $b = \{1, -1, 1\}$, $c = \{1, 1, 3\}$.

2.2. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ на $(-p/2, p/2)$.

2.3. $a = \{2, -3, 1\}$, $b = \{3, -1, 5\}$, $c = \{1, -4, 3\}$.

2.4. 2 , $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.5. $a = \{5, 4, 3\}$, $b = \{3, 3, 2\}$, $c = \{8, 1, 3\}$.

2.6. 1 , x , $\sin x$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.7. $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{0, 1, 1\}$, $c = \{0, 0, 1\}$.

2.8. e^x , e^{2x} , e^{3x} на $(-\infty, +\infty)$.

2.9. $a = \{1, -1, 2\}$, $b = \{-1, 1, -1\}$, $c = \{2, -1, 1\}$.

2.10. x , x^2 , $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.11. $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{4, 5, 6\}$, $c = \{7, 8, 9\}$.

2.12. 1 , x , x^2 , $(1+x)^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

2.13. $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{1, 2, 3\}$, $c = \{1, 3, 6\}$.

2.14. $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$ на $(-p/2, p/2)$.

2.15. $a = \{3, 4, -5\}$, $b = \{8, 7, -2\}$, $c = \{2, 1, -8\}$.

2.16. e^x , e^{-x} , e^{2x} на $(-\infty, +\infty)$.

$$2.17. a = \{3, 2, -4\}, b = \{4, 1, -2\}, c = \{5, 2, -3\}.$$

$$2.18. 1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2, 1 + 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2, 1 + 3\mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.19. a = \{0, 1, 1\}, b = \{1, 0, 1\}, c = \{1, 1, 0\}.$$

$$2.20. 1, e^{\mathbf{x}}, \operatorname{ch} \mathbf{x} \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.21. a = \{5, -6, 1\}, b = \{3, -5, -2\}, c = \{2, -1, 3\}.$$

$$2.22. 1/x, \mathbf{x}, 1 \text{ на } (0, 1).$$

$$2.23. a = \{7, 1, -3\}, b = \{2, 2, -4\}, c = \{3, -3, 5\}.$$

$$2.24. 1, \operatorname{tg} \mathbf{x}, \operatorname{ctg} \mathbf{x} \text{ на } (0, p/2).$$

$$2.25. a = \{1, 2, 3\}, b = \{6, 5, 9\}, c = \{7, 8, 9\}.$$

$$2.26. \mathbf{x}, 1 + \mathbf{x}, (1 + \mathbf{x})^2 \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.27. a = \{2, 1, 0\}, b = \{-5, 0, 3\}, c = \{3, 4, 3\}.$$

$$2.28. e^{\mathbf{x}}, \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{x}} \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.29. a = \{2, 0, 2\}, b = \{1, -1, 0\}, c = \{0, -1, -2\}.$$

$$2.30. e^{\mathbf{x}}, \operatorname{sh} \mathbf{x}, \operatorname{ch} \mathbf{x} \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

$$2.31. a = \{-2, 1, 5\}, b = \{4, -3, 0\}, c = \{0, -1, 10\}.$$

Задача 3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

$$3.1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \quad 3.2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases} \quad 3.4. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3.31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Найти координаты вектора \mathbf{x} в базисе $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$4.1. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{6, -1, 3\}. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, 2, 4\}. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (4/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, 3, 6\}. \end{cases} \quad 4.4. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{2, 4, 1\}. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{6, 3, 1\}. \end{cases} \quad 4.6. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (5/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, 4, 8\}. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/4)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{8, 4, 1\}. \end{cases} \quad 4.8. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (6/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{2, 5, 10\}. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{10, 5, 1\}. \end{cases} \quad 4.10. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (7/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, 6, 12\}. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (7/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{-12, 6, 1\}. \end{cases} \quad 4.12. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (8/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{-1, 7, 14\}. \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (1/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{-3, 2, 4\}. \end{cases} \quad 4.14. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (1/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{2, 4, 3\}. \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{2, \quad 6, \quad -3\}. \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \quad -4, \quad 8\}. \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (4/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{7, \quad -5, \quad 10\}. \end{cases}$$

$$4.21. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (5/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \quad -6, \quad 6\}. \end{cases}$$

$$4.23. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (6/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \quad 7, \quad -7\}. \end{cases}$$

$$4.25. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (7/8)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{3, \quad -8, \quad 8\}. \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (2/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{12, \quad 3, \quad -1\}. \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \quad 4, \quad -8\}. \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{5, \quad -5, \quad -4\}. \end{cases}$$

$$4.22. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{6, \quad 6, \quad 2\}. \end{cases}$$

$$4.24. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/7)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{7, \quad 7, \quad 2\}. \end{cases}$$

$$4.26. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (8/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \quad -9, \quad 9\}. \end{cases}$$

$$4.27. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{9, \ 9, \ 2\}. \end{cases}$$

$$4.28. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (9/10)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{3, \ -10, \ 10\}. \end{cases}$$

$$4.29. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (9/10)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{10, \ 10, \ 7\}. \end{cases}$$

$$4.30. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (10/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \ 9, \ 18\}. \end{cases}$$

$$4.31. \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (11/10)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} = \{1, \ 10, \ 10\}. \end{cases}$$

Задача 5. Пусть $x = (x_1, \ x_2, \ x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \ -3x_1 - 2x_2 - x_3, \ x_2 + 2x_3),$$

$$5.1. \ Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, \ 3x_1 - 2x_2 - x_3, \ x_2 + 2),$$

$$Cx = (x_3^4, \ 3x_1 - 2x_2 - x_3, \ x_2 + 2x_3).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \ 2x_1 - x_2, \ x_2 + 2),$$

$$5.2. \ Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \ 0, \ x_2^4 + 2x_3),$$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \ 2x_1 - x_2, \ x_2 + 2x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3),$$

$$5.3. \quad Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

$$5.4. \quad Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 1, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4),$$

$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3).$$

$$Ax = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6),$$

$$5.5. \quad Bx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3),$$

$$Cx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$$

$$Ax = (2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3),$$

$$5.6. \quad Bx = (2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3),$$

$$Cx = (2x_1 + x_2, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5).$$

$$Ax = (x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

$$5.7. \quad Bx = (x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6),$$

$$Cx = (x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 1, \quad x_1 + 2x_2 + 3),$$

$$5.8. \quad Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 0, \quad x_1^3 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_3, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (2x_1 - x_2, \quad x_3, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3^4),$$

$$5.9. \quad Bx = (2x_1 - x_2, \quad x_3, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

$$Cx = (2x_1 - x_2, \quad 1, \quad x_1 + 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$$

5.10. $Bx = (x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7),$

$$Cx = (x_3, \quad 0, \quad 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3).$$

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 0),$$

5.11. $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 0),$

$$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, \quad 0).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_3^2),$$

5.12. $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad 1),$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1^2, \quad x_2 + 2x_3),$$

5.13. $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_2 + 2x_3),$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, \quad x_1, \quad x_2 + 2).$$

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 0, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3),$$

5.14. $Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1, \quad 0, \quad x_1 - 2x_2 - 3),$

$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 0, \quad x_1^2 - 2x_2 - 3x_3).$$

$$Ax = (x_1, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5),$$

5.15. $Bx = (x_1, \quad x_2^2, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5),$

$$Cx = (x_1, \quad x_2 - 2x_3, \quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3).$$

$$Ax = (2x_1 + x_2, \quad x_3^2, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

5.16. $Bx = (2x_1 + x_2, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$

$$Cx = (2x_1 + x_2, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4).$$

$$Ax = (x_1, \quad x_2 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$$

5.17. $Bx = (x_1, \quad x_2 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5),$

$$Cx = (x_1, \quad x_2^2 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1, \quad 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

5.18. $Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, \quad 0, \quad 0),$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (2x_1^2 - x_2, \quad x_3, \quad 2x_2 + 3x_3),$$

5.19. $Bx = (2x_1 - x_2, \quad x_3, \quad 2x_2 + 3x_3),$

$$Cx = (2x_1 - x_2, \quad x_3, \quad 2x_2 + 3).$$

$$Ax = (0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

5.20. $Bx = (0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6),$

$$Cx = (0, \quad x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2),$$

5.21. $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2),$

$$Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad 0).$$

$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$

5.22. $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$

$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

$$Ax = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3, \quad x_1 + x_3, \quad 0),$$

5.23. $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1 + x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$

$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, \quad x_1 + x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$$

$$Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, \quad 9x_1 + x_3),$$

5.24. $Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8, \quad 9x_1 + x_3),$

$$Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, \quad 0).$$

$$Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7, \quad 8x_1 + x_3),$$

5.25. $Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, \quad 0),$

$$Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, \quad 8x_1 + x_3).$$

$$Ax = (x_1^3 + x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \quad 0),$$

5.26. $Bx = (x_1 + x_3, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$

$$Cx = (x_1 + 1, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4, \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3).$$

$$Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$$

5.27. $Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1, \quad x_2 + 2, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$

$$Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^3, \quad x_2 + 2x_3, \quad 0).$$

$$Ax = (2x_1 - x_2, \quad x_1 + 2x_2 + 3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$$

5.28. $Bx = (2x_1 - x_2^3, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 0),$

$$Cx = (2x_1 - x_2, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

$$Ax = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, \quad 7x_1 + 8x_2),$$

5.29. $Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, \quad 7x_1 + 8x_2),$

$$Cx = (x_1 + 2x_2 + 3, \quad 4x_1 + 5x_2 + 6, \quad 7x_1 + 8x_2).$$

$$Ax = (x_2 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$$

5.30. $Bx = (x_2 + 2, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3),$

$$Cx = (x_2^3 + 2x_3, \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3, \quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3).$$

$$Ax = (x_1^2, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3),$$

$$5.31. \quad Bx = (1, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3),$$

$$Cx = (x_1, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3).$$

Задача 6. Пусть $x = \{x_1, \quad x_2, \quad x_3\}$, $Ax = \{x_2 - x_3, \quad x_1, \quad x_1 + x_3\}$,

$Bx = \{x_2, \quad 2x_3, \quad x_1\}$. Найти:

$$6.1. \quad ABx.$$

$$6.2. \quad A^2x.$$

$$6.3. \quad (A^2 - B)x.$$

$$6.4. \quad B^4x.$$

$$6.5. \quad B^2x.$$

$$6.6. \quad (2A + 3B^2)x.$$

$$6.7. \quad (A^2 + B^2)x.$$

$$6.8. \quad (B^2 + A)x.$$

$$6.9. \quad BAx.$$

$$6.10. \quad B(2A - B)x.$$

$$6.11. \quad A(2B - A)x.$$

$$6.12. \quad 2(AB + 2A)x.$$

$$6.13. \quad (A - B)^2x.$$

$$6.14. \quad (B - 2A^2)x.$$

$$6.15. \quad BA^2x.$$

$$6.16. \quad (3A^2 + B)x.$$

$$6.17. \quad (A^2 + B)x.$$

$$6.18. \quad (A^2 - B^2)x.$$

$$6.19. \quad (2B - A^2)x.$$

$$6.20. \quad B^3x.$$

$$6.21. \quad (B^2 - 2Ax).$$

$$6.22. \quad (A(B + A))x.$$

$$6.23. \quad (AB^2)x.$$

$$6.24. \quad (A(B - A))x.$$

$$6.25. \quad 2(B + 2A^2 + B^2)x.$$

$$6.26. \quad (B(A - B))x.$$

$$6.27. \quad (B - A + B^2)x.$$

$$6.28. \quad (B(A + B))x.$$

$$6.29. \quad (A + BA - B)x.$$

$$6.30. \quad (3B + 2A^2)x.$$

$$6.31. \quad (B(2A + B))x.$$

Задача 7. Найти матрицу в базисе $(e'_1, \quad e'_2, \quad e'_3)$, где

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3, \quad e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$

если она задана в базисе $(e_1, \quad e_2, \quad e_3)$.

$$7.1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$7.2. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7.3. \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$7.4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.5. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7.6. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7.7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.8. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.9. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.10. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.11. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.12. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.13. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.14. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.15. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.16. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.17. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.18. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.19. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.20. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.21. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.22. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.23. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.24. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.25. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.26. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.27. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.29. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.30. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.31. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора:

- 8.1. проектирования на ось Ox ;
- 8.2. проектирования на плоскость $z = 0$;
- 8.3. проектирования на ось Oz ;
- 8.4. зеркального отражения относительно плоскости Oyz ;
- 8.5. проектирования на ось Oy ;
- 8.6. проектирования на плоскость $y = 0$;
- 8.7. зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$;
- 8.8. зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$;
- 8.9. проектирования на плоскость $y - z = 0$;
- 8.10. проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}x$;
- 8.11. проектирования на плоскость Oyz ;
- 8.12. зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$;
- 8.13. зеркального отражения относительно плоскости Oxy ;
- 8.14. поворота относительно оси Ox на угол $p/2$ в положительном направлении;
- 8.15. проектирования на плоскость $x - y = 0$;
- 8.16. проектирования на плоскость $y + z = 0$;
- 8.17. зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$;
- 8.18. зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$;
- 8.19. проектирования на плоскость $x + y = 0$;
- 8.20. проектирования на плоскость $x - z = 0$;
- 8.21. зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$;
- 8.22. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $p/2$;
- 8.23. проектирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$;

8.24. зеркального отражения относительно плоскости Oxz ;

8.25. поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $p/2$;

8.26. проектирования на плоскость $x + z = 0$;

8.27. проектирования на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$;

8.28. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$;

8.29. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$;

8.30. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $p/4$;

8.31. проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$;

Задача 9. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

9.1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9.6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9.8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9.9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9.11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

9.16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{lll}
9.19. \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 9.20. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} & 9.21. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{?}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \\
9.22. \begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix} & 9.23. \begin{pmatrix} 4 & ? & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 9.24. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
9.25. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 9.26. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & 9.27. \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
9.28. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{pmatrix} & 9.29. \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix} & \\
9.30. \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & 9.31. \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Задача 10. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

10.1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$.

10.2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$.

10.3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

10.4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$.

10.5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

10.6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

10.7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$.

10.8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

- 10.9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.
- 10.11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.
- 10.14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.
- 10.16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$.
- 10.17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.
- 10.19. $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.
- 10.20. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.
- 10.21. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.
- 10.22. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$.
- 10.23. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.
- 10.24. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.
- 10.25. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$.
- 10.26. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$.
- 10.27. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$.
- 10.28. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$.
- 10.29. $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.
- 10.30. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$.
- 10.31. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

Задача 11. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

11.1. $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

11.2. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$.

11.3. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

11.4. $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

11.5. $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

11.6. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$.

11.7. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

11.8. $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.

11.9. $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

11.10. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

11.11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

11.12. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

11.13. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

11.14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

11.15. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

11.16. $-(1/2)x_1^2 + 5x_2^2 - (1/2)x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.

11.17. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

11.18. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

11.19. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

11.20. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$$11.21. 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$11.22. (3/2)x_1^2 - 5x_2^2 + (3/2)x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

$$11.23. x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$11.24. 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3.$$

$$11.25. x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$$

$$11.26. x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$11.27. 5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

$$11.28. 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$$

$$11.29. 5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3.$$

$$11.30. -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$11.31. -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 12. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

$$12.1. -x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0.$$

$$12.2. 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$12.3. 4xy + 4x - 4y = 0.$$

$$12.4. -2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0.$$

$$12.5. -3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0.$$

$$12.6. -2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$12.7. -x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0.$$

$$12.8. -4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0.$$

$$12.9. 4xy + 4x - 4y - 2 = 0.$$

$$12.10. x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0.$$

- 12.11. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$.
- 12.12. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$.
- 12.13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$.
- 12.14. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$.
- 12.15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$.
- 12.16. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$.
- 12.17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$.
- 12.18. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
- 12.19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$.
- 12.20. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$.
- 12.21. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$.
- 12.22. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
- 12.23. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$.
- 12.24. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$.
- 12.25. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$.
- 12.26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
- 12.27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$.
- 12.28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.
- 12.29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$.
- 12.30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
- 12.31. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$.