ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Глава 1. Векторно-матричное исчисление

Тема 1. Определители квадратных матриц и системы линейных уравнений

§1.1. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

с двумя неизвестными.

Решением этой системы называется пара чисел $x_1 = \alpha, x_2 = \beta,$ которая при подстановке обращает оба уравнения в тождества.

Умножим первое уравнение системы на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и сложим их. Получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}\,.$$

Аналогично, умножив первое уравнение на $-a_{21}$, второе на a_{11} и сложив, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Таким образом, мы получили систему

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{12}, \end{cases} \tag{1.2}$$

которая является следствием системы (1.1).

Рассмотрим теперь квадратную таблицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

составленную из коэффициентов при неизвестных в системе (1.1).

Такие таблицы называются *матрицами*. Элементы матрицы обозначаются буквами с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки (уравнения), в которой находится элемент, второй – номер столбца (неизвестного в системе). Например, a_{21} – элемент 2-й строки и 1-го столбца матрицы. В данном случае мы имеем *квадратную матрицу 2-го порядка*. Диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний, называется *главной*. Диагональ, идущая из правого верхнего угла матрицы в левый нижний, называется *побочной*. Перемножим элементы главной диагонали и вычтем из результата произведение элементов побочной диагонали.

Полученное число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ называется *определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A* (или *определителем матрицы A*) и обозначается

$$\Delta,\ |A| \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель Δ называют *главным определителем* системы.

Заменим теперь 1-й столбец определителя Δ (т. е. столбец коэффициентов при неизвестном x_1) на столбец свободных членов системы (1.1). Получим новый определитель

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

Аналогично, заменив в определителе Δ 2-й столбец (т. е. столбец коэффициентов при x_2) на столбец свободных членов, получим определитель

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

Используя новые обозначения, систему (1.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta x_2 = \Delta_{x_2}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Возможны три случая:

1) $\Delta \neq 0$, тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ – это так называемые *формулы Крамера*[*]. Можно подставить найденные по формулам Крамера значения в систему (1.1) и убедиться, что она обращается в систему тождеств. Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то система (1.1) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера;

2) $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_{x_1}, Δ_{x_2} отличен от нуля. Тогда, очевидно, система (1.3), а значит, и система (1.1), решений не имеет, или, как говорят, *несовместна*;

3) $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ – *особый случай*. В этом случае можно показать, что уравнения системы пропорциональны и, следовательно, система (1.1) имеет бесконечное множество решений.

§1.2. Определители

Запишем квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[*] Г. Крамер (1704 – 1752) – швейцарский математик.

с одинаковым числом n строк и столбцов. Определитель n-го порядка, соответствующий матрице A, обозначается

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 1.1. Пусть a_{ij} элемент матрицы A (определителя $|A|$). *Минором* M_{ij}, соответствующим данному элементу, называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из определителя n-го порядка $|A|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, для матрицы 3-го порядка и ее определителя

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минор M_{32} имеет вид

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Определение 1.2. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком «+», если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, четная, и со знаком «–», если эта сумма нечетная. То есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определение 1.3. *Определителем n-го порядка* называется число

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

где A_{11}, A_{12}, ..., A_{1n} – алгебраические дополнения элементов 1-й строки матрицы A (определителя $|A|$).

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению определителей 2-го порядка, определителей 4-го порядка – к вычислению определителей 3-го порядка и т. д. Поэтому данное определение называют *рекуррентным.*

Кратко определение 1.3 можно записать, используя знак суммирования. Пусть запись $\sum_{k=1}^{n} a_k$ означает сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогда $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$.

Рассмотрим определители 3-го порядка более подробно.

Определитель 3-го порядка можно вычислять, применяя *правило треугольников*, задаваемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Действительно, по определению 1.3 имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Пример 1. Определители 3-го порядка можно вычислить, используя определение 1.3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 0 - 3 - 6 = -11\,,$$

а также, используя правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot0 + 1\cdot1\cdot(-2) + 0\cdot1\cdot0 - 0\cdot4\cdot(-2) - 1\cdot1\cdot2 - 0\cdot1\cdot0 = -4\,.\bullet$$

§1.3. Свойства определителей

Чтобы эффективно вычислить определитель порядка выше 3-го, необходимо знать *свойства определителей*. Применение этих свойств позволяет намного уменьшить объем вычислений. Свойства, которые мы сформулируем, справедливы для определителей любого порядка.

Свойство 1. Определитель не меняется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.

Определение 1.4. Операция замены строк матрицы (определителя) ее (его) столбцами того же номера и наоборот называется *транспонированием* и обозначается знаком «*».

Справедливость свойства 1 можно проверить, вычисляя исходный и транспонированный определители.

Упражнение. Доказать это свойство для определителя 3-го порядка.

Данное свойство устанавливает полное равноправие строк и столбцов определителя. Поэтому все дальнейшие свойства определителей можно доказывать только для строк или столбцов. В силу свойства 1 они будут справедливы для столбцов или строк соответственно.

Свойство 2. Если поменять местами два столбца (строки) определителя, то определитель изменит знак.

Например, для определителя 2-го порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Умножение всех элементов некоторого столбца (строки) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число.

Иными словами, общий множитель всех элементов столбца (строки) можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Из определения определителя следует, что общий множитель элементов 1-й строки можно вынести за знак определителя. Пусть λ – общий множитель элементов i-й строки. Поменяем местами i-ю и 1-ю строки, вынесем множитель, а потом поменяем строки обратно.♦

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то он сам равен нулю.

Это свойство вытекает из свойства 3 при $\lambda = 0$.

Свойство 5. Если к элементам некоторой строки (столбца) добавить элементы другой строки (столбца) умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя при этом не изменится.

Например, для определителя 2-го порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

в чем можно убедиться вычислениями.

То же и для определителя 3-го порядка, и т. д.

Свойство 6. Определитель, имеющий две одинаковые или пропорциональные строки (столбца), равен нулю.

Действительно, это непосредственно следует из свойств 5 и 4.

Свойство 7 (теорема Лапласа[*]). Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения. То есть для всех $i = 1, 2,..., n$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

и для всех $j = 1, 2,..., n$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ .$$

Доказательство. Докажем, например, справедливость разложения определителя по 2-й строке:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j}\ .$$

Действительно,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(a_{21}M_{21} - a_{22}M_{22} + \ldots + a_{2n}(-1)^{n+1}M_{2n}\right) =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + \ldots + a_{2n}(-1)^{2+n}M_{2n} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n}\,.♦$$

[*] П.-С. Лаплас (1749 – 1827) – выдающийся французский математик, механик, физик и астроном.

Свойство 8. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Докажем это свойство для столбцов определителя. Пусть

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Построим определитель $\left|A^{j\to k}\right|$, в котором на месте k-го столбца стоит j-й:

$$\left|A^{j\to k}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\left|A^{j\to k}\right| = 0$, поскольку этот определитель имеет два одинаковых столбца. С другой стороны, в силу свойства 7

$$\left|A^{j\to k}\right| = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk}.$$

В итоге получаем

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0. \blacklozenge$$

§1.4. Системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \ = b_n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Определение 1.5. *Решением системы* (1.4) называется набор n значений неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots,\ x_n = \alpha_n$, обращающих все уравнения в тождества. *Матрицей системы* (1.4) и ее *главным определителем* соответственно называются

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы (1.4) на алгебраическое дополнение A_{11}, второе – на $A_{21}, \ldots$, последнее – на A_{n1}, сложим их все. Получим

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.$$

В силу свойств 7, 8 определителей имеем

$$\Delta x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}, \tag{1.5}$$

где $\Delta = |A|$. Правую часть последнего равенства обозначим Δ_{x_1}, т. е.

$$\Delta_{x_1} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.$$

Очевидно, Δ_{x_1} – определитель, получающийся из главного определителя $|A|$ системы (1.4) при замене его 1-го столбца на столбец свободных членов. В правой части равенства (1.5) – разложение Δ_{x_1} по его 1-му столбцу.

Аналогично получаются формулы

$$\begin{cases} \Delta x_2 = \Delta_{x_2} \\ \quad \ldots \\ \Delta x_n = \Delta_{x_n}, \end{cases}$$

где Δ_{x_k} есть определитель, полученный из Δ заменой k-го столбца столбцом свободных членов, $k = 2,\ldots, n$. Объединяя их с (1.5), получаем систему

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_{x_1} \\ \quad \ldots \\ \Delta x_n = \Delta_{x_n}. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Система (1.6) является следствием системы (1.4). Таким образом, мы показали, что если система (1.4) имеет решение, то это решение будет и решением системы (1.6).

Если $\Delta \neq 0$, то из (1.6) получаем

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}, \; k = 1, 2,\ldots, n. \qquad (1.7)$$

Непосредственной подстановкой этих значений в систему (1.4) можно убедиться, что они действительно являются ее решением. Формулы (1.7) называются *формулами Крамера*.

Анализируя систему (1.6), мы можем сделать следующие выводы.

1. Если $\Delta \neq 0$, то система (1.4) имеет единственное решение, которое может быть вычислено по формулам Крамера.

2. Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из вспомогательных определителей Δ_{x_k} не равен нулю, то система (1.6), а значит, и система (1.4), решений не имеет.

3. Если $\Delta = \Delta_{x_1} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$, то случай называется *особым*. В этом случае нужно дополнительное исследование. В дальнейшем мы покажем, что в данном случае система либо имеет бесконечно много решений, либо их не имеет вовсе.

Определение 1.6. Если все свободные члены в системе (1.4) равны нулю, т. е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система называется *однородной*. Очевидно, однородная система всегда имеет *нулевое решение* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что это решение будет единственным тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$.

Тема 2. Векторы и операции над ними

§2.1. Определение вектора. Линейные операции над векторами

Определение 2.1. *Вектором* будем называть направленный отрезок или, что то же самое, упорядоченную пару точек. Обозначают вектор $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Длина вектора обозначается $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 2.2. Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны некоторой прямой. Если векторы параллельны некоторой плоскости, то их называют *компланарными*.

Определение 2.3. Векторы называются *равными*, если они равны по длине, коллинеарны и одинаково направлены.

Из последнего определения вытекает, что векторы можно свободно перемещать в пространстве.

Определение 2.4. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* α называется вектор $\vec{b}$, такой, что:

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$,

2) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$,

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Вектор $(-1)\vec{a}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Определение 2.5. *Суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, который строится по *правилу треугольника* или *параллелограмма* (рис. 2.1, а и 2.1, б соответственно).

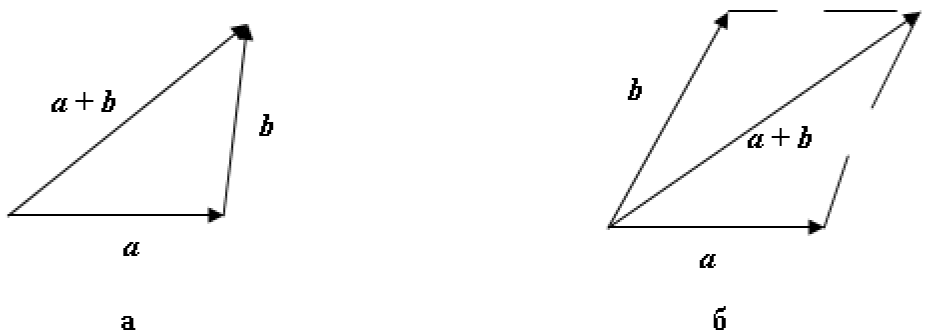

Рис. 2.1

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Геометрически это представлено на рис. 2.2.

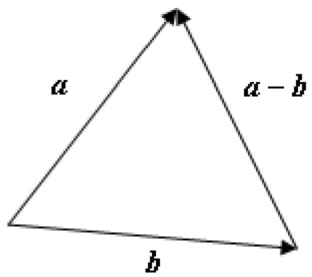

Рис. 2.2

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами, вытекающими непосредственно из их определения:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$;

3) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$;

4) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

5) $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Кроме того, справедливо свойство

6) если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то для любого вектора $\vec{b}$, коллинеарного $\vec{a}$, существует единственное число λ, такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

§2.2. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис

Определение 2.6. Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}. \tag{2.1}$$

Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ *линейно независимы*, если данное равенство может иметь место только при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называется выражение

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}.$$

Очевидно, что если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Справедливо и обратное: если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных, то все эти векторы линейно зависимы.

Пример 1. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и любые два неколлинеарных вектора линейно независимы. Действительно,

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Rightarrow\vec{b}-\lambda\vec{a}=\vec{0};$$

$$\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{a}=\bar{0},\ \lambda_1\neq 0,\ \vec{b}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}.\bullet$$

Можно также показать, что тройка компланарных векторов линейно зависима, а три некомпланарных вектора всегда линейно независимы.

Теорема 2.1. Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум, а в трехмерном пространстве – трем.

Определение 2.7. *Базисом на плоскости* называют два любых линейно независимых вектора. *Базисом в трехмерном пространстве* называют любую тройку линейно независимых векторов.

Таким образом, любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости и любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Пусть $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ образуют базис на плоскости, $\vec{a}$ – вектор той же плоскости. Так как векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{a}$ линейно зависимы, то $\vec{a}$ можно представить в виде линейной комбинации $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, т. е. $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$.

Определение 2.8. В этом случае говорят, что вектор $\vec{a}$ *разложен по базису* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, а числа λ_1, λ_2 называют его *координатами*, или *компонентами*, в данном базисе. Данный факт записывается следующим образом: $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Разложение вектора по базису единственно. Действительно, если предположить, что вектор $\vec{a}$ имеет два разложения: $\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2}$ и $\vec{a} = \mu_1\vec{e_1} + \mu_2\vec{e_2}$, то

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{e_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e_2} = \vec{0},$$

что в силу линейной независимости $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ возможно только при $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ и $\lambda_2 - \mu_2 = 0$, т. е. $\lambda_1 = \mu_1$ и $\lambda_2 = \mu_2$.

Как и в случае плоскости, вектор $\vec{a}$ *трехмерного пространства однозначно разлагается по векторам базиса* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. То есть $\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$ и он имеет *координаты* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в данном базисе. Записывают это так: $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $Oxyz$. На каждой их осей выберем *единичный* (т. е. единичной длины) вектор:

$\vec{i}$ – на Ox,

$\vec{j}$ – на Oy,

$\vec{k}$ – на Oz.

Определение 2.9. Эти три единичных взаимно перпендикулярных вектора называют *ортами*. Они образуют базис, называемый *декартовым** *прямоугольным базисом*. Координаты вектора в данном базисе называются *декартовыми*.

Любой вектор $\vec{a}$ в трехмерном пространстве может быть разложен по данному базису:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x,\ a_y,\ a_z),$$

или

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x,\ y,\ z).$$

Причем *декартовыми координатами* a_x, a_y, a_z, или x, y, z, вектора $\vec{a}$ являются *проекции вектора* $\vec{a}$ *на соответствующие оси координат*.

Линейные операции над векторами сводятся к арифметическим операциям над их координатами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z).$$

Зная координаты вектора, легко найти его длину:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Определение 2.10. Каждой точке M пространства можно поставить в соответствие ее *радиус-вектор* $\overrightarrow{OM}$, где $O(0,\ 0,\ 0)$. Координаты этого вектора называют *координатами точки* и записывают $M(x, y, z)$.

Рассмотрим вектор

* Р. Декарт (1596 – 1650) – знаменитый французский математик, физик, физиолог и философ.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right).$$

Отсюда его длина

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}.$$

Определение 2.11. Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора*.

Пусть дан вектор

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

Тогда a_x – проекция $\vec{a}$ на ось Ox и, следовательно, $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha$. Аналогично, $a_y=|\vec{a}|\cos\beta$, $a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$ – проекции на оси Oy и Oz соответственно. И, значит,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Если данные равенства возвести в квадрат и сложить, то получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{|\vec{a}|^2}=1.$$

Легко видеть, что проекции единичного вектора $\vec{a}$ на оси координат совпадают с его направляющими косинусами и, следовательно, в случае единичного вектора имеем

$$\vec{a}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}.$$

§2.3. Деление отрезка в данном отношении

Определение 2.12. *Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении* $\lambda>0$ значит найти на данном отрезке точку M, такую, что

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}=\lambda, \text{ или } |\overrightarrow{M_1M}|=\lambda|\overrightarrow{MM_2}|.$$

Пусть $O(0, 0, 0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$. Очевидно,

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1},\ \overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}.$$

Обозначим

$$\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1},\quad \vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2},\quad \vec{r}=\overrightarrow{OM}.$$

Тогда из $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$ следует $\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\left(\vec{r}_2-\vec{r}\right)$. Отсюда

$$\vec{r}=\frac{\lambda\vec{r}_2+\vec{r}_1}{1+\lambda},$$

или, расписывая покоординатно, получаем

$$x=\frac{\lambda x_2+x_1}{1+\lambda},\quad y=\frac{\lambda y_2+y_1}{1+\lambda},\quad z=\frac{\lambda z_2+z_1}{1+\lambda}.$$

§2.4. Скалярное произведение векторов

Определение 2.13. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\vec{b}$, обозначаемое также $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними.

Вычисление: $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Физическая интерпретация: точка M движется по прямой. На точку действует постоянно сила $\vec{F}$ под углом φ к направлению перемещения точки. Тогда работа A силы $\vec{F}$ будет равна скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{l}$, т. е. $A = \vec{F}\vec{l}$.

Если $пр_{\vec{a}}\vec{b}$ – проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$, тогда известно, что

$$пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi,$$

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

То есть *скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию на его ось другого вектора*. Тогда

$$пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|},\quad \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Рассмотрим некоторые *свойства скалярного произведения.*

Свойство 1. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ (свойство коммутативности).

Это свойство непосредственно вытекает из определения скалярного произведения, т. к.

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\vec{b}\vec{a}.$$

Свойство 2. $\lambda(\vec{a}\vec{b})=(\lambda\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(\lambda\vec{b})$, где λ – число (свойство ассоциативности).

Свойство 3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (свойство дистрибутивности).

Действительно,

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|пр_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(пр_{\vec{c}}\vec{a}+пр_{\vec{c}}\vec{b})=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Свойство 4. $\vec{a}\vec{a}=\vec{a}^2=|a|^2$.

Свойство 5. Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения, т. е.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\vec{b}=0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{a}\perp\vec{b}$, значит,

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\varphi=0\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0.$$

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b}=0$. Тогда

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=0,$$

отсюда, если хотя бы один из векторов нулевой, то $\vec{a}\perp\vec{b}$, либо $\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$. ♦

Свойство 6. Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый угол, то их скалярное произведение положительно, если тупой – отрицательно.

Скалярное произведение в координатной форме. Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими прямоугольными декартовыми координатами:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)\,.$$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = x_1x_2\vec{i}^{\,2} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} +$$
$$+ y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}^{\,2}\,,$$

но

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{i} = \vec{k}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0,\quad \vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1.$$

Следовательно,

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,.$$

§2.5. Векторное и смешанное произведение векторов

Определение 2.14. Рассмотрим упорядоченную тройку неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, которые имеют общее начало. Эта тройка называется *правой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Определение 2.15. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, обозначаемый также $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, такой, что:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi = \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.

Пример 2. $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$.●

Из определения 2.15 вытекают следующие *геометрические свойства векторного произведения*.

1. Модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Критерий коллинеарности векторов. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

Чтобы вывести остальные свойства векторного произведения, удобнее сначала ввести еще одну операцию над векторами – смешанное произведение.

Определение 2.16. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Таким образом, по определению 2.16

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\,.$$

Рассмотрим *свойства смешанного произведения*.

Свойство 1. Смешанное произведение неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу. Оно положительно, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, и отрицательно, если она – левая.

Доказательство. Очевидно,

$$\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\Theta\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\Theta\right|\sin\varphi,$$

где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, Θ – угол между $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$. Но объем V построенного параллелепипеда равен произведению площади основания $S=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$ на высоту $H=\left|\vec{c}\right|\left|\cos\Theta\right| \Rightarrow V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Знак смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\Theta$, очевидно, совпадает со знаком $\cos\Theta$. Поэтому смешанное произведение положительно, когда вектор $\vec{c}$ направлен в ту же сторону от плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что и $\vec{a}\times\vec{b}$, т. е. когда тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой. В противном случае смешанное произведение отрицательно.♦

Свойство 2. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его сомножители компланарны.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\Theta=0 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\Theta\sin\varphi=0.$$

Это возможно в трех случаях:

а) хотя бы один из векторов нулевой – тогда все векторы компланарны;

б) $\cos\Theta = 0$, т. е. вектор $\vec{c}$ ортогонален $\vec{a}\times\vec{b}$ и, следовательно, лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Очевидно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;

в) $\sin\varphi = 0$, т. е. $\vec{a}\parallel\vec{b}$, тогда, очевидно, все три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат в одной плоскости.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Тогда либо среди них есть нулевые, в таком случае $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, либо все ненулевые, но лежат в одной плоскости. Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c} \Rightarrow \cos\Theta = 0 \text{ или } \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

В обоих случаях $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.♦

Из данного свойства следует справедливость следующего утверждения.

Критерий компланарности векторов. Для того чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Замечание. Используя определение правой и левой троек, можно убедиться, что тройки $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ имеют одну и ту же ориентацию с тройкой $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (т. е. одновременно все правые или все левые). В тоже время тройки $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$, и $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ имеют ориентацию, противоположную ориентации тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Свойство 3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Доказательство. Если среди векторов есть нулевые, то равенство верно. Если нет, то $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{a}$ и достаточно показать, что $\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Но в силу свойств 1, 2 смешанного произведения последнее равенство очевидно с точностью до знака. И его левая, и его правая часть по абсолютной величине равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. В случае, если векторы компланарны, объем параллелепипеда – нулевой. Но тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию, следовательно, и знаки тоже совпадают. ♦

Данное свойство служит оправданием записи смешанного произведении в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Действительно, безразлично, какие два рядом стоящих вектора умножаются векторно.

Используя свойства смешанного произведения и замечание по ориентации троек, можно убедиться в том, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Действительно, по модулю они все совпадают, как объемы одинаковых параллелепипедов. Первые три имеют одинаковые знаки, т. к. тройки векторов одной ориентации, вторые три – противоположные знаки.

Далее, используя полученное равенство и свойства 1, 2 скалярного произведения, можно убедиться в том, что

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\left(\lambda\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right),$$

где λ – произвольный скалярный множитель. Также имеют место равенства

$$\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\vec{b}\vec{c}=\vec{a}_1\vec{b}\vec{c}+\vec{a}_2\vec{b}\vec{c},$$
$$\vec{a}\left(\vec{b}_1+\vec{b}_2\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}_1\vec{c}+\vec{a}\vec{b}_2\vec{c},$$
$$\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c}_1+\vec{c}_2\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}_1+\vec{a}\vec{b}\vec{c}_2.$$

Полученные равенства используются при вычислении смешанного произведения.

Рассмотрим теперь *алгебраические свойства векторного произведения*.

Свойство 1 (антикоммутативность). $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то формула справедлива. Предположим, что $\vec{a}$ не коллинеарен $\vec{b}$ и обозначим $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{m}=\vec{b}\times\vec{a}$.

Тогда из определения векторного произведения следует:

во-первых, $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{m}\right|$ (первое условие определения);

во-вторых, $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$ и $\vec{m}\perp\vec{a}$, $\vec{m}\perp\vec{b}$ (второе условие определения), т. е. векторы $\vec{c}$ и $\vec{m}$ коллинеарны. Таким образом, возможны два случая: либо $\vec{c}=\vec{m}$, либо $\vec{c}=-\vec{m}$.

Но первое невозможно, т. к. в этом случае в силу определения векторного произведения (третье условие определения) обе тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ – правые, что неверно. Значит, $\vec{c}=-\vec{m}$. ♦

Свойство 2. Для произвольного скалярного множителя λ справедливо

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}),\ \ \vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Доказательство. Во-первых, если первое равенство справедливо, то справедливо и второе. Действительно,

$$\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=-(\lambda\vec{b})\times\vec{a}=-\lambda(\vec{b}\times\vec{a})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Таким образом, в доказательстве нуждается только первое равенство. Выберем любой прямоугольный декартов базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, (т. е. базис, векторы которого имеют единичную длину и ортогональны друг другу).

Для любого вектора $\vec{c}$, очевидно,

$$\vec{c}\vec{i}=|\vec{c}||\vec{i}|\cos\alpha=|\vec{c}|\cos\alpha=c_x,$$

аналогично, $\vec{c}\vec{j}=c_y$, $\vec{c}\vec{k}=c_z$, где c_x, c_y, c_z – компоненты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Обозначим $\vec{m}=(\lambda\vec{a})\times\vec{b},\ n=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

Очевидно, $m_x=\vec{m}\vec{i}=\left[(\lambda\vec{a})\times\vec{b}\right]\vec{i}=\lambda\vec{a}\vec{b}\vec{i}=\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{i})$.

Аналогично, $n_x=\vec{n}\vec{i}=\left[\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\right]\vec{i}=\lambda\vec{a}\vec{b}\vec{i}=\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{i})$, т. е. $m_x=n_x$.

Совершенно аналогично, умножая скалярно векторы $\vec{m},\vec{n}$ на $\vec{j}$ и $\vec{k}$, получим

$$m_y=n_y,\ m_z=n_z.$$

Следовательно, $\vec{m}=\vec{n}$.♦

Свойство 3 (дистрибутивность).

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству свойства 2 покажем, что второе равенство является следствием первого.

Действительно, если первое равенство справедливо, то в силу свойства 1

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=-(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=-(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c}).$$

Таким образом, доказательство приводится только для первого равенства.

Пусть $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – прямоугольный декартов базис. Обозначим

$$\vec{m}=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c},\quad \vec{n}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

Тогда в силу правил действия при вычислении смешанного произведения имеем

$$m_x=\vec{m}\vec{i}=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\vec{i}=\vec{a}\vec{c}\vec{i}+\vec{b}\vec{c}\vec{i},$$

$$n_x=\vec{n}\vec{i}=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{i}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{i}=\vec{a}\vec{c}\vec{i}+\vec{b}\vec{c}\vec{i}.$$

Следовательно, $m_x=n_x$.

Аналогично получим $m_y=n_y$, $m_z=n_z$. Итак, $\vec{m}=\vec{n}$.♦

Отметим, что алгебраические свойства векторного произведения определяют правила действия при векторном умножении.

§2.6. Векторное и смешанное произведение в декартовых координатах

Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами:

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),$$
$$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2).$$

Умножим векторно $\vec{a}$ на $\vec{b}$, используя алгебраические свойства 2, 3 векторного произведения. Получим

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+x_1y_2\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+x_1z_2\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+$$
$$+y_1x_2\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+y_1y_2\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+y_1z_2\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+z_1x_2\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+z_1y_2\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+z_1z_2\left(\vec{k}\times\vec{k}\right).$$

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов:

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\end{cases}\qquad \begin{cases}\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}\\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\end{cases}\qquad \begin{cases}\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.\end{cases}$$

С учетом таблицы умножения получается

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k},$$

или

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1).$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать символический определитель 3-го порядка:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Действительно, раскрывая его по 1-й строке, мы получим выражение, эквивалентное найденному выше.

Пример 3. Пусть $\vec{a}$ = (1, 0, 2), $\vec{b}$ = (0, –1, 1). Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=(2,-1,-1).\bullet$$

Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы своими прямоугольными декартовыми координатами:

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\ \vec{c}=(x_3,y_3,z_3).$$

Вычислим координаты смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)(x_3,\ y_3,\ z_3)=$$
$$=x_3(y_1z_2-y_2z_1)+y_3(z_1x_2-z_2x_1)+z_3(x_1y_2-x_2y_1).$$

Или, используя определители 2-го порядка, можно записать

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

Но данное выражение является разложением по 3-й строке определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

§2.7. Двойное векторное произведение векторов

Определение 2.17. Выражения $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ и $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ называют *двойными векторными произведениями.*

Вычислять двойное векторное произведение можно, последовательно выполняя операции векторного умножения с соблюдением их порядка. Следует при этом помнить, что векторное умножение не обладает свойством ассоциативности, т. е.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \neq \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Упражнение. Привести пример нарушения свойства ассоциативности.

Облегчить вычисление двойного векторного произведения можно с помощью формулы сокращенного умножения

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right), \tag{2.2}$$

которая дает разложение двойного векторного произведения по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Коэффициентами разложения здесь служат скалярные произведения $\vec{a}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}$.

Тогда выражение $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Докажем формулу сокращенного умножения (2.2).

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы вектор $\vec{a}$ лежал на оси Ox, а вектор $\vec{b}$ – в плоскости Oxy. Тогда

$$\vec{a} = (x_1, 0, 0),\ \vec{b} = (x_2, y_2, 0),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Вычислим правую и левую части соотношения (2.2) и убедимся в их равенстве.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ x_1y_2),$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & x_1y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (-x_1y_2y_3,\ x_1x_3y_2,\ 0).$$

С другой стороны,

$$\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) = (x_2, y_2, 0)x_1x_3 = (x_1x_2x_3,\ x_1y_2x_3,\ 0),$$

$$\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right) = (x_1, 0, 0)(x_2x_3 + y_2y_3) = (x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3,\ 0,\ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right)=(-x_1y_2y_3,\ x_1y_2x_3,\ 0).$$

Тема 3. Матрицы

§3.1. Прямоугольные матрицы и линейные операции над ними

Определение 3.1. Таблица из m строк и n столбцов

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *прямоугольной матрицей порядка*, или *размерности*, $m\times n$. Часто в обозначении матрицы вместо квадратных скобок употребляют круглые. Размерность матрицы иногда удобно указывать в обозначении: $A_{m\times n}$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка* n.

Определение 3.2. Матрицы A и B называются *равными* ($A = B$), если они одинаковых размерностей и все их соответствующие элементы совпадают, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ при $i = 1, 2,\dots, m$; $j = 1, 2,\dots, n$.

Определение 3.3. *Нулевой матрицей O* называют матрицу, все элементы которой нулевые, т. е.

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 3.4. Операция сложения вводится только для матриц, имеющих одинаковые размерности. *Суммой матриц A* и B называется матрица $C = A + B$, такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, 2,\dots, m;\ j = 1, 2,\dots, n.$$

То есть при сложении матриц складываются все их соответствующие элементы.

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что операция сложения матриц удовлетворяет свойствам:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + O = A$.

Определение 3.5. *Произведением матрицы A на число α* называется матрица αA, полученная умножением всех элементов матрицы A на число α.

Пример 1. Пусть

$$\alpha=-3,\ A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}. \bullet$$

Определение 3.6. Матрицу $(-1)A$ называют *противоположной* матрице A и обозначают $-A$, выражение $A - B = A + (-B)$ называют *разностью матриц* A и B.

§3.2. Умножение матриц

Произведение AB матриц A и B определяется только в том случае, когда матрица A *согласована* с матрицей B, т. е. когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Например,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица A согласована с B, но B не согласована с A. Значит, существует произведение AB, но не существует BA.

Квадратные матрицы одного порядка, очевидно, всегда взаимно согласованы.

Определение 3.7. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, p.$$

Кратко эту сумму записывают следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

а произведение матриц обозначают $C = AB$.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \; D = BA = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}. \bullet$$

Из данного примера видно, что для матричного умножения закон коммутативности $AB = BA$ не справедлив.

Следует отметить, что произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ но } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq O.$$

При умножении квадратных матриц особое значение имеет *единичная матрица*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нулевые. Легко проверить, что $AE = EA = A$ для любой матрицы A того же порядка, что и E.

Матричное умножение обладает следующими свойствами:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$;

3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

4) $(AB)^* = B^*A^*$, где знак «*» означает транспонирование;

5) $|AB| = |A| \cdot |B|$, т. е. определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

§3.3. Обратная матрица

Определение 3.8. Обратная матрица определяется только для квадратной матрицы. Если A – квадратная матрица, то *обратной* к ней называется матрица A^{-1} той же размерности, удовлетворяющая условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*, в противном случае – *невырожденной*.

Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Из алгебраических дополнений элементов матрицы A составим матрицу

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

и транспонируем ее (т. е. поменяем местами соответствующие строки и столбцы). Получится матрица

$$B^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Лемма. $AB^* = B^*A = |A|E$.

Доказательство. Обозначим $C = AB^*$, т. е.

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответсвующие элементы j-го столбца матрицы B^*. Очевидно, для элементов c_{ij} матрицы C, стоящих на главной диагонали, получим сумму произведений элементов i-й строки на их алгебраические дополнения, что равно определителю матрицы A. Для остальных элементов c_{ij} $(i \neq j)$ получим сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на алгебраические дополнения элементов j-й строки, что равно 0. Значит,

$$AB^*=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |A| \end{bmatrix}=|A|E.$$

Аналогично получается $B^*A = |A|E$.♦

Теорема 3.1. Для того чтобы для матрицы A существовала обратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Доказательство. Необходимость. Пусть обратная матрица A^{-1} существует. Тогда по определению обратной матрицы и свойству 5 умножения матриц

$$|E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \neq 0,$$

откуда получаем, что $|A| \neq 0$. То есть A – невырожденная матрица.

Достаточность. Пусть A – невырожденная матрица, т. е. $|A| \neq 0$. докажем, что матрица

$$C=\frac{B^*}{|A|}$$

является обратной для A.

Действительно, в силу леммы $AC = E$ и $CA = E$. Следовательно, $C = A^{-1}$.♦

В процессе доказательства теоремы 3.1 найдено выражение для обратной матрицы:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}B^*,$$

или

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.2. Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.

Доказательство. Предположим противное. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – матрицы, обратные A. Тогда $AA_1^{-1} = E$. Умножим это равенство на A_2^{-1} слева. Получим

$$A_2^{-1} = A_2^{-1}E = A_2^{-1}\left(AA_1^{-1}\right) = \left(A_2^{-1}A\right)A_1^{-1} = EA_1^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = A_1^{-1}. \blacklozenge$$

Упражнение. Показать, что:

1) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Пример 3. Найдем обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$|A| = 3 - 2 = 1,\ A_{11} = 3,\ A_{12} = -1,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1.$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично $A^{-1}A = E$.•

§3.4. Матричная запись системы линейных уравнений

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Составим матрицу данной системы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.1) равносильна *матричному уравнению*

$$AX = B. \qquad (3.2)$$

Если матрица A невырождена, то решение уравнения (3.2), а значит, и системы (3.1), можно найти следующим образом.

Умножим на A^{-1} слева обе части равенства (3.2). Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

откуда

$$X = A^{-1}B. \qquad (3.3)$$

Пример 4. В примере 3 из предыдущего параграфа показана невырожденность матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1, \end{cases}$$

матрицей которой является A. Тогда эту систему можно записать в виде (3.2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Откуда, согласно (3.3), получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.•

Итак, мы имеем еще один способ решения систем линейных уравнений – *матричный*.

Упражнение. Вывести формулы Крамера из формулы (3.3).

Тема 4. Ранг матрицы. Исследование систем линейных уравнений на совместность

§4.1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Выделим какие-нибудь k строк и k столбцов матрицы $(k \le m, k \le n)$. Из элементов матрицы, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами матрицы*. Ясно, что всего можно составить $C_m^k C_n^k$ миноров k-го порядка.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Можно составить $C_2^2 C_3^2 = 3$ миноров 2-го порядка матрицы A. Это

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}. \bullet$$

Определение 4.1. *Рангом матрицы* называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, если ранг матрицы равен r, то среди миноров этой матрицы есть по крайней мере один минор r-го порядка, отличный от нуля, в то время как все миноры $(r+1)$-го порядка и выше равны нулю.

Ранг матрицы A обозначают $r(A)$.

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) транспонирование, т. е. замена каждой строки столбцом с тем же номером и наоборот;

2) перестановка двух строк (столбцов);

3) умножение всех элементов строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$;

4) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число.

Теорема 4.1. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Теорема 4.1 приводится здесь без доказательства.

Ранг матрицы можно вычислить, пользуясь определением 4.1, т. е., вычисляя все миноры матрицы, определить наивысший порядок отличных от нуля миноров. Но это очень трудоемко. Сформулированная теорема 4.1 позволяет уменьшить вычисления, преобразуя матрицу с помощью элементарных преобразований к эквивалентной (т. е. того же ранга) матрице, имеющей не более одного ненулевого элемента в каждой строке и в каждом столбце.

Пример 2. Выполним элементарные преобразования матрицы A:

1) поменяем местами 1-й и 2-й столбцы;

2) умножим 1-й столбец на 1/2;

3) прибавим ко 2-му, 3-му и 4-му столбцам 1-й столбец, умноженный на – 3, – 1 и – 2 соответственно;

4) умножим 2-й столбец на 1/2;

5) прибавим к 3-му и 4-му столбцам 1-й столбец, умноженный на 1 и – 1 соответственно; прибавим к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на 3;

6) поменяем местами 3-й и 4-й столбцы; умножим 4-ю строку на 1/6.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

отсюда $r(A) = 3$.•

§4.2. Понятие n-мерного векторного пространства

Каждая точка в пространстве определяется тремя координатами. Однако в математике часто встречаются объекты, для задания которых недостаточно трех действительных чисел. Например, шар в пространстве определяется 4 числами – координатами его центра и величиной радиуса. Многочлен степени, не превосходящей n, определяется $n+1$ числом – его коэффициентами.

Упорядоченная система n чисел $\vec{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *n-мерным вектором*. При этом числа $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называются *компонентами,* или *координатами,* данного вектора. Два вектора называются *равными*, если равны все их соответствующие компоненты.

Для n-мерных векторов определяются операции *сложения* и *умножения на число* как покоординатные операции:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Очевидно,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

То есть сложение коммутативно и ассоциативно.

Роль нуля играет *нулевой вектор*

$$\vec{0} = (0, \ldots, 0).$$

Разность векторов определяется следующим образом:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}.$$

Определение 4.2. Множество всех n-мерных векторов, для которых установлены операции сложения и умножения на число, называется *n-мерным вещественным векторным пространством* и обозначается $\mathbf{R}^n$.

На векторное пространство $\mathbf{R}^n$ без изменений переносятся определения линейной комбинации, линейной независимости и зависимости векторов, данные в §2.2.

Покажем, что векторы

$$\vec{e_1} = (1, 0, ..., 0), \ \vec{e_2} = (0, 1, ..., 0), \ \vec{e_n} = (0, 0, ..., 1)$$

линейно независимы, т. е. для них равенство вида (2.1)

$$\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \ \ldots \ + \lambda_n\vec{e_n} = \vec{0}$$

возможно только при условии

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Действительно, в силу определения операций сложения векторов и умножения вектора на число это равенство равносильно такому:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \vec{0}.$$

Отсюда $\lambda_i = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Также нетрудно показать, что любые $n+1$ векторов линейно зависимы в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов в $\mathbf{R}^n$ равно n. Любая система из n линейно независимых векторов называется *базисом* в $\mathbf{R}^n$. Нетрудно показать, что любой вектор однозначно разлагается по базису.

Рассмотрим еще один пример. Левая часть линейного уравнения с n неизвестными, т. е. выражение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n,$$

называется *линейной формой* от неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$. Очевидно, линейная форма полностью определяется вектором $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из своих коэффициентов и, обратно, всякий n-мерный вектор однозначно задает линейную форму. Таким образом, операции над векторами можно рассматривать как операции над линейными формами.

§4.3. Теорема о ранге матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы можно рассмотреть как m-мерные векторы, строки – как n-мерные векторы.

Определение 4.3. *Базисным минором матрицы* будет называться любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Очевидно, для ненулевой матрицы базисный минор всегда существует, вообще говоря, не единственный. Столбцы и строки, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Теорема 4.2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пусть $r(A) = r$. Предположим для определенности, что отличный от нуля минор r-го порядка (т. е. базисный минор) расположен в левом верхнем углу матрицы, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обозначим i-ю строку матрицы через $\vec{a_i} = (a_{i1}, ..., a_{in})$. Докажем первое утверждение теоремы. Предположим противное, т. е. базисные строки линейно зависимы. Тогда одна из базисных строк, например $\vec{a_r}$, является линейной комбинацией остальных:

$$\vec{a_r} = \alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + ... + \alpha_{r-1}\overrightarrow{a_{r-1}}.$$

Отсюда и в миноре D r-я строка является линейной комбинацией остальных. По свойству 5 определителей определитель D не изменится, если мы вычтем из r-й строки 1-ю, умноженную на α_1, затем 2-ю, умноженную на α_2, … …, $(r-1)$-ю, умноженную на α_{r-1}. Но после этих преобразований строка минора D станет нулевой, т. е. он должен равняться нулю. Полученное противоречие доказывает первое утверждение.

Докажем второе утверждение теоремы. Очевидно, достаточно доказать, что небазисные строки матрицы линейно выражаются через базисные. Пусть $r < k \le m$ и $1 \le l \le n$.

Рассмотрим определитель $(r+1)$-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю при всех k и l. Действительно, если $l \le r$, то он равен нулю т. к. у него два одинаковых столбца. Если же $l > r$, то это минор $(r+1)$-го порядка матрицы ранга r и, следовательно, он тоже равен нулю, согласно определению 4.1.

Разложим определитель Δ по элементам последнего столбца:

$$\Delta = a_{1l}\Delta_1 + a_{2l}\Delta_2 + \dots + a_{rl}\Delta_r + a_{kl}\Delta_k = 0, \tag{4.1}$$

где Δ_i – алгебраические дополнения элементов последнего столбца Δ.

Эти алгебраические дополнения зависят от k, но не зависят от l, т. к. при их вычислении последний столбец вычеркивается. Кроме того, $\Delta_k = D \ne 0$ и, значит, равенство (4.1) можно разделить на Δ_k. Получим

$$a_{kl} = \alpha_1 a_{1l} + \alpha_2 a_{2l} + \dots + \alpha_r a_{rl}, \tag{4.2}$$

где $\alpha_i = -\dfrac{\Delta_i}{D}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Равенство (4.2) справедливо при всех $r < k \le m$. Но это означает, что

$$\vec{a_k} = \alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \dots + \alpha_r \vec{a_r}. ♦$$

Так как при транспонировании матрицы ее строки становятся столбцами, а ранг не меняется, то имеют место следующие утверждения.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно рангу матрицы.

Следствие 2. Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

§4.4. Метод окаймляющих миноров для вычисления ранга матрицы

Определение 4.4. *Минором, окаймляющим минор M порядка k* матрицы, называется минор $(k+1)$-го порядка этой матрицы, содержащий M.

Если внимательно рассмотреть доказательство теоремы 4.2 о ранге матрицы, то можно заметить, что в нем не рассматривались все миноры $(r+1)$-го порядка, равные нулю. В действительности, в данном доказательстве рассматривались только миноры Δ, окаймляющие минор D. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если в матрице A имеется минор порядка r, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен r.

Таким образом, для вычисления ранга достаточно найти отличный от нуля минор, все окаймляющие миноры которого равны нулю.

Пример 3. Пусть

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Очевидно,

$$M=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Все окаймляющие M миноры равны нулю:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, $r(A)$ = 2.●

К достоинству метода окаймляющих миноров относится то, что он одновременно с рангом матрицы дает возможность найти ее базисный минор.

Пусть дана система линейных форм

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\ f_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\ \ldots\\ f_m(x_1, x_2,\ldots, x_n)=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n.\end{cases}$$

Используя метод окаймляющих миноров, можно выделить максимальную линейно независимую подсистему линейных форм, через которые будут линейно выражаться все остальные формы.

Пример 4. Пусть дана система линейных форм:

$$f_1(x_1, x_2, x_3)=2x_1+x_2+x_3,\ \ f_2(x_1, x_2, x_3)=x_2,\ \ f_3(x_1, x_2, x_3)=2x_1-x_2+x_3.$$

Составим матрицу из коэффициентов линейных форм

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим минор

$$M=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Единственный окаймляющий M минор равен нулю:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, M – базисный минор. Поэтому формы $f_1(x_1, x_2, x_3)$ и $f_2(x_1, x_2, x_3)$ линейно независимы и через них линейно выражается форма $f_3(x_1, x_2, x_3)$.●

§4.5. Произвольные системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь, вообще говоря, не обязательно $m = n$. Обобщим определение 1.5 из §1.4.

Определение 4.5. *Решением системы* (4.3) называется совокупность n значений неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots,\ x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в систему все уравнения превращаются в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, не имеющая ни одного решения – *несовместной*. Если система имеет единственное решение, ее называют *определенной*, если более одного – *неопределенной*.

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрицу B называют *расширенной матрицей системы*.

Ясно, что $r(B) \geq r(A)$, т. к. каждый минор матрицы A является и минором матрицы B, но не наоборот.

Теорема 4.3 (критерий Кронекера – Капелли* совместности системы). Для того чтобы система линейных уравнений (4.3) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т. е. $r(A) = r(B)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (4.3) совместна, т. е. существует числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \tag{4.4}$$

Из последнего столбца матрицы B вычтем 1-й столбец, умноженный на α_1, затем 2-й, умноженный на $\alpha_2, \ldots$, наконец, n-й столбец, умноженный на α_n.

В силу (4.4) получим матрицу

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}.$$

* Л. Кронекер (1823 – 1891) – немецкий математик; А. Капелли (1855 – 1910) – итальянский математик.

При этом $r(B_1) = r(B)$, поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Но ясно, что $r(B_1) = r(A)$, т. к. все неизмененные миноры матрицы B_1 равны соответствующим минорам матрицы A и обратно. То есть $r(A) = r(B)$.

Достаточность. Пусть $r(B) = r(A) = r$. И предположим, для определенности, что отличный от нуля минор r-го порядка расположен в левом верхнем углу матрицы A:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме 4.2 о ранге матрицы первые r строк матрицы B – базисные и, следовательно, линейно независимы, все остальные строки линейно выражаются через базисные. Но это означает, что первые r уравнений системы (4.3) независимы, а все остальные $m-r$ уравнений являются их следствиями, т. е. их можно исключить из системы. Нам достаточно решить первые r уравнений; их решения автоматически будут удовлетворять и остальным уравнениям.

Далее возможны два случая.

1. Пусть $r = n$. Тогда систему, состоящую из первых r уравнений системы (4.3),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r \end{cases}$$

можно решить по формулам Крамера. Ее главный определитель $D \neq 0$ и, значит, система имеет единственное решение. Тогда система (4.3) – совместная и определенная.

2. Пусть $r < n$. Возьмем r базисных уравнений (т. е. в данном случае r первых уравнений). Первые r неизвестных оставим в левой части уравнений, остальные перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Так называемым *свободным неизвестным* $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно придавать какие угодно значения, получая при этом соответствующие значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ из системы (4.5).

Это случай совместной, но неопределенной системы. Общие формулы решения можно получить, если считать свободные неизвестные параметрами и решать систему (4.5) относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$ (например по формулам Крамера).♦

Следствие. Совместная система будет определенной тогда и только тогда, когда $n = r(A)$.

В §1.4 при выводе формул Крамера остался неисследованным особый случай, когда в системе из n уравнений с n неизвестными $\Delta = \Delta_{x_1} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$. Очевидно, у такой системы $r(B) < n$, т. к. все миноры n-го порядка матрицы B равны нулю. Аналогично $r(A) < n$, т. к. равен нулю единственный минор n-го порядка матрицы A.

Значит, эта система может быть несовместной, если $r(A) \neq r(B)$, или совместной, но неопределенной, если $r(A) = r(B)$.

Пример 5. Пусть требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $r(B) = r(A) = 2$, т. е. система совместна. Выберем два базисных уравнения с базисными неизвестными. Например, выберем два первых уравнения с неизвестными x_1, x_2. Тогда система принимает вид (4.5):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Находим

$$\Delta = -3,\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1+4x_3 & 2 \\ -1+5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 + 2 - 10x_3 = -6x_3 + 3 \Rightarrow x_1 = 2x_3 - 1.$$

Аналогично находим

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1+4x_3 \\ 2 & -1+5x_3 \end{vmatrix} = -1 + 5x_3 - 2 - 8x_3 = -3x_3 - 3 \Rightarrow x_2 = x_3 + 1.$$

И получаем, что данная система уравнений имеет бесконечное множество решений вида

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - 1 \\ x_2 = \alpha + 1 \\ x_3 = \alpha, \end{cases}$$

где α – любое действительное число.•