$$u(x,q,k_0) - k_0^2 \int_R \varphi(x,y,k_0)\,\xi(y)\,u(y,q,k_0)\,dy = \varphi(x,q,k_0)$$

$x \in R$

$R = [0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ $k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$

$x_{ijk} = \big((i-1)h;\ (j-1)h;\ (k-1)h\big)$ $i = 1,\dots,N+1$

$y_{pqr} = \big((p-1)h;\ (q-1)h;\ (r-1)h\big)$

$$\varphi(x,y,k_0) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$u_{ijk} = u(x_{ijk}, q, k_0)$

$$u_{ijk} - \sum_{pqr} \underbrace{k_0^2\,\varphi(x_{i,j,k}, y_{pqr}, k_0)}\,\xi(y_{pqr})\,u_{pqr} = \underbrace{\varphi(x_{ijk}, q, k_0)}$$

a_{10}, a_{20}, a_{30}] для каждой частоты своя матрица

f_{1R1}, f_{1R2}, …, f_{1R6}] для 6 источн. и перв. частоты

f_{2R1}, f_{2R2}, …, f_{2R6}] для второй частоты

f_{3R1}, f_{3R2}, …, f_{3R6}] для третьей частоты

$(a_{10})_{ijk\,pqr} \longrightarrow (a_{10})_{ii\,jj}$

$ii = (N+1)^2(k-1) + (N+1)(j-1) + i$

$jj = (N+1)^2(p-1) + (N+1)(q-1) + r$

$$k_0^2 \int_R \varphi(x, y, k_0)\, \xi(y)\, u(y, q, k_0)\, dy = u(x; q, k_0) - \varphi(x, q, k_0)$$

$x \in Y$ (детекторы) $\qquad y \in R$

x_{kem} — по полусфере с центром $(0{,}5,\ 0{,}5\ 0{,}5)$ и зависит от источника.

$$y_{pqz} = ((p-1)h;\ (q-1)h;\ (z-1)h)$$

$$\sum_{pqz} \underbrace{k_0^2 \varphi(x_{kem}, y_{pqz}, k_0)} \xi_{pqz} u_{pqz} = f_{1S1}$$

$= f_{1S2}$
$\dots$
f_{1S2}] 6 приемников для первой частоты

a_{11}
a_{12}
$\dots$
a_{16}] для первой частоты

$\cdot$

a_{31}
$\dots$
a_{36}] для третьей частоты

f_{2S1}
f_{2S2}
$\dots$
f_{2S6}] для второй частоты

f_{3S1}
f_{3S2}
$\dots$
f_{3S6}] для третьей частоты

Оператор

$$F\begin{pmatrix} \xi \\ u_{11} \\ u_{12} \\ \dots \\ u_{16} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \dots \\ u_{26} \\ u_{31} \\ \dots \\ u_{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 R_1 \\ f_1 S_1 \\ f_1 R_2 \\ f_1 S_2 \\ \dots \\ f_1 R_6 \\ f_1 S_6 \\ \cdot \\ f_3 R_1 \\ f_3 S_1 \\ \dots \\ f_3 R_6 \\ f_3 S_6 \end{pmatrix}$$

u_{11} — поле для первого источника и первой частоты.

u_{ij} — поле на неоднородности для j-го источника и j-ой частоты.

u_{36} — поле для шестого источника и третьей частоты

Прямая задача

1. Введем ξ

2. Из уравнения $u_{11} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{11} = f_{1R1}$ находим u_{11}

$u_{12} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{12} = f_{1R2}$ — " — u_{12}

. . . .

$u_{16} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{16} = f_{1R6}$ — " — u_{16}

$u_{21} - a_{20}\, \xi\, u_{21} = f_{2R1}$ u_{21}

. . . .

$u_{36} - a_{30} \cdot \xi\, u_{36} = f_{3R6}$ находим u_{36}

3. Найденные поле подставлеем во второе уравнение системы

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \cdot \xi \cdot u_{11} = f_{1S1} \\ a_{12} \cdot \xi \cdot u_{12} = f_{1S2} \\ \dots \\ a_{16} \cdot \xi \cdot u_{16} = f_{1S6} \\ a_{21} \cdot \xi \cdot u_{21} = f_{2S1} \\ \dots \\ a_{36} \cdot \xi \cdot u_{36} = f_{3S6} \end{array}\right]$$

Так нашлись правые части для вторых уравнений.

Основная система. Оператор F

$$\begin{pmatrix} u_{11} - a_{10}\xi u_{11} \\ a_{11}\xi u_{11} \\ u_{12} - a_{10}\xi u_{12} \\ a_{12}\xi u_{12} \\ u_{13} - a_{10}\xi u_{13} \\ a_{13}\xi u_{13} \\ \vdots \\ u_{16} - a_{10}\xi u_{16} \\ a_{16}\xi u_{16} \\ u_{21} - a_{20}\xi u_{20} \\ a_{21}\xi u_{21} \\ \vdots \\ u_{36} - a_{30}\xi u_{36} \\ a_{36}\xi u_{36} \end{pmatrix}$$

Якобиан

$$F' = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial u_{11}}, \frac{\partial F}{\partial u_{12}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_{16}}, \frac{\partial F}{\partial u_{21}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_{36}} \right)$$

Якобиан F'^{*}

$$
\begin{pmatrix}
J_{11} & J_{11-2} & J_{12} & J_{12-2} & J_{13} & J_{13-2} & \dots & J_{16} & J_{16-2} & J_{21} & J_{21-2} & \dots & J_{26} & J_{26-2} & J_{31} & J_{31-2} & \dots & J_{36} & J_{36-2} \\
J_{10} & J_{101} & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & J_{10} & J_{102} & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & J_{10} & J_{103} & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & J_{10} & J_{106} & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & J_{20} & J_{201} & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & J_{20} & J_{206} & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & J_{30} & J_{301} & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & J_{30} & J_{306}
\end{pmatrix}
$$

$J_{10} = -a_{10} \cdot \xi + E$ $\qquad$ $J_{101} = a_{11} \cdot \xi$ $\qquad$ $J_{201} = a_{21} \cdot \xi$

$J_{20} = -a_{20} \cdot \xi + E$ $\qquad$ $J_{102} = a_{12} \cdot \xi$ $\qquad$ $J_{202} = a_{22} \cdot \xi$

$\dots$ $\qquad$ $\dots$

$J_{30} = -a_{30} \cdot \xi + E$ $\qquad$ $J_{106} = a_{16} \cdot \xi$ $\qquad$ $J_{206} = a_{26} \cdot \xi$

$J_{11} = a_{10} \cdot u_{11}$ $\qquad$ $J_{21} = a_{20} \cdot u_{11}$ $\qquad$ $J_{31} = a_{30} \cdot u_{11}$

$J_{12} = a_{10} \cdot u_{12}$ $\qquad$ $J_{22} = a_{20} \cdot u_{12}$ $\qquad$ $J_{32} = a_{30} \cdot u_{12}$

$\dots$ $\qquad$ $\dots$ $\qquad$ $\dots$

$J_{16} = a_{10} \cdot u_{16}$ $\qquad$ $J_{26} = a_{20} \cdot u_{16}$ $\qquad$ $J_{36} = a_{30} \cdot u_{16}$

$J_{11-2} = a_{11} \cdot u_{11}$ $\qquad$ $J_{21-2} = a_{21} \cdot u_{21}$ $\qquad$ $J_{31-2} = a_{31} \cdot u_{3}$

$J_{12-2} = a_{12} \cdot u_{12}$ $\qquad$ $J_{22-2} = a_{22} \cdot u_{22}$ $\qquad$ $J_{32-2} = a_{32} \cdot u_{32}$

$\dots$ $\qquad$ $\dots$ $\qquad$ $\dots$

$J_{16-2} = a_{16} \cdot u_{16}$ $\qquad$ $J_{26-2} = a_{26} \cdot u_{26}$ $\qquad$ $J_{36-6} = a_{36} \cdot u_{36}$

Обратная задача.

1. Инициализация $\xi = 0;\quad u_{11} = f_{1R1},\ u_{12} = f_{1R2}, \dots,\ u_{36} = f_{3R6}$

2. Основной метод $x_{n+1} = x_n - \gamma_n \left[F'^{*}(x_n)\left(F(x_n) - f\right) + \alpha_n (x_n - \xi)\right]$

Основной оператор задачи

$F_{11\text{-}1} = u_{11} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{11} \quad \Big| - f_{1R1}$

$F_{11\text{-}2} = a_{11} \cdot \xi \cdot u_{11} \quad \Big| - f_{1S1}$

$F_{12\text{-}1} = u_{12} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{12} \quad \Big| - f_{1R2}$

$F_{12\text{-}2} = a_{12} \cdot \xi \cdot u_{12} \quad \Big| - f_{1S2}$

...

$F_{16\text{-}1} = u_{16} - a_{10} \cdot \xi \cdot u_{16} \quad \Big| - f_{1R6}$

$F_{16\text{-}2} = a_{16} \cdot \xi \cdot u_{16} \quad \Big| - f_{1S6}$

$F_{21\text{-}1} = u_{21} - a_{20} \cdot \xi \cdot u_{21} \quad \Big| - f_{2R1}$

$F_{21\text{-}2} = a_{21} \cdot \xi \cdot u_{21} \quad \Big| - f_{2S1}$

...

$F_{36\text{-}1} = u_{36} - a_{30} \cdot \xi \cdot u_{36} \quad \Big| - f_{3R6}$

$F_{36\text{-}2} = a_{36} \cdot \xi \cdot u_{36} \quad \Big| - f_{3S6}$

Нахождение неизвестных

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \gamma_n \left[J_{11} F_{11-1} + J_{11-2} F_{11-2} + \dots + J_{36} F_{36-1} + J_{36-2} F_{36-2} \right]$$

$$u_{11} = u_{11} - \gamma \left[J_{10} (F_{11-1}) + J_{101} \cdot F_{11-2} \right]$$

$$u_{12} = u_{12} - \gamma \left[J_{10} (F_{11-1}) + J_{102} \cdot F_{12-2} \right]$$

. . . .

$$u_{16} = u_{16} - \gamma \left[J_{10} F_{16-1} + J_{106} F_{16-2} \right]$$

$$u_{21} = u_{21} - \gamma \left[J_{20} F_{21-1} + J_{201} \cdot F_{21-2} \right]$$

. . . .

$$u_{36} = u_{36} - \gamma \left[J_{30} \cdot F_{36-1} + J_{306} F_{36-2} \right]$$