2 作业

Consider the process modeled by the following linear discrete-time system: $y(n+1) = ay(n) + bu(n) + e(n)$, where $y(n)$ is the output, $u(n) \in \{0, 1\}$ the input(binary input), $a = 0.9$ and $b = 0.1$ are the model parameters, and $e(n)$ is white noise of mean value 0 and standard deviation σ. At instant time n the output $y(n) = 0.5$ is measured and we have to obtain a control action $u(n) \in \{0, 1\}$. Let us define the prediction $\hat{y}(n+1) = a\,y(n) + bu(n)$, and $\hat{y}(n+k) = a\,\hat{y}(n+k-1) + bu(n+k-1)$ for $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

- Obtain the control action $u(n) \in \{0, 1\}$ that minimizes $J = (\hat{y}(n+1) - r)^2 + \lambda u(n)^2$, where $\lambda = 0.01$ is a weighting factor and $r = 1$ the output reference.
- Using branch-and-bound, obtain the control sequence $U = [u(n), u(n+1), u(n+2)]$, that minimize min $J_n^{n+2} = \sum_{k=1}^{3}(\hat{y}(n+k) - r)^2 + \lambda \sum_{k=1}^{3} u(n+k-1)^2$.

第一部分： $\hat{y}(n+1) = 0.9y(n) + 0.1u(n) = 0.45 + 0.1u(n)$, $J = (0.1u(n) - 0.55)^2 + 0.01u(n)^2$, 将 $u(n) \in \{0, 1\}$ 代入，取最小，最终在 $u(n) = 1$ 时候最小 $J = (0.1 - 55)^2 + 0.01 = 0.45^2 + 0.01 = 0.2125$
第二部分：
分支限界法：
根据助教老师发的链接，参照其中的算法流程，编写算法，并且打印树，其中没有使用有优先级的队列，直接使用的是普通的广度优先的队列，并且，为了更好的进行剪枝，我在开始的时候代入的其中一种情况，初试值 J_{best} 直接设为 0.6，直接用来进行剪枝，这样可以达到比较好的效果。画出来的树如图 1 所示，其中叶节点的是最终的输出的值（$u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \in \{0, 1\}$）代入目标函数求解得来的 J_{result}，最优的 J_{result} 即为 J_{best}，不是叶节点的节点显示的是估计值（松弛解）J_{pre}，估计值和最终的输出的值比较进行剪枝。

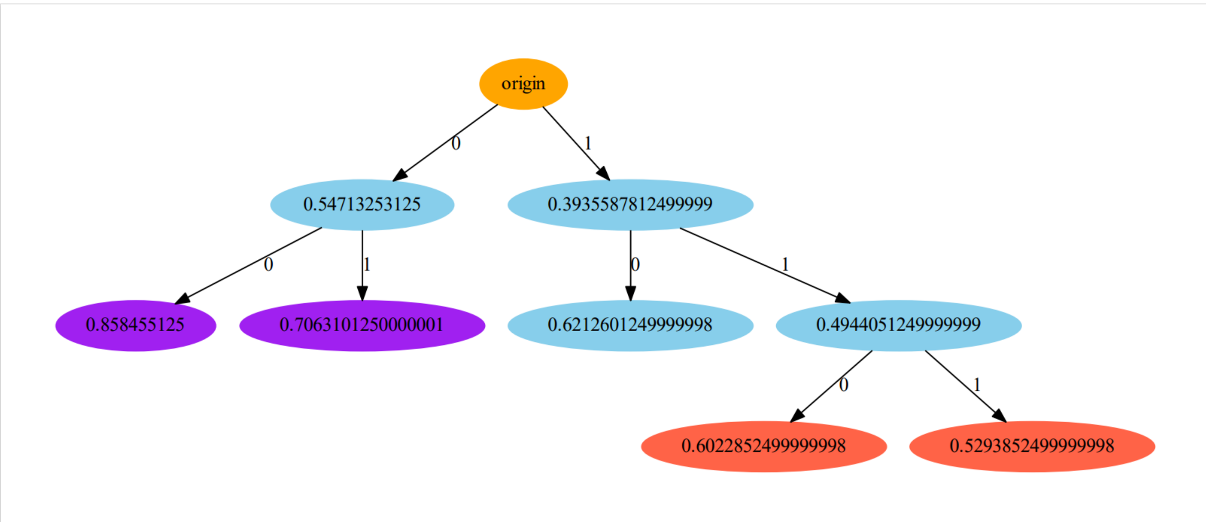

图 1: 分支定界法生成的树

动态规划方法：

(1) 根据群里赵雪岩同学 (https://github.com/zhaoxueyan1) 和张子钰同学的讨论，这里要将优化的目标函数进行转换，由于原来的目标函数的 $\hat{y}_{n+k}, k = 1, 2, 3$ 之间有递推关系，这样是会影响到求解的最优子结构性质的，也就是说，可能会出现子问题的次优解在进行了新一步的决策之后会优于现在的最优解的情况，这样就没法使用动态规划求解。所以要对原问题的目标函数进行转化。转化过程很简单，就是形式上比较繁琐，只要消掉 $\hat{y}_{n+k}, k = 1, 2, 3$ 这三个中间变量就可以了，保留 $u(n), u(n+1), u(n+2) \in \{0, 1\}$ 即可，所以对于原式:

$$\hat{y}(n+1) = 0.9y(n) + 0.1u(n)$$

$$\hat{y}(n+2) = 0.9\hat{y}(n+1) + 0.1u(n+1)$$
$$= 0.9(0.9y(n) + 0.1u(n)) + 0.1u(n+1)$$
$$= 0.81y(n) + 0.09u(n) + 0.1u(n+1)$$

$$\hat{y}(n+3) = 0.9\hat{y}(n+2) + 0.1u(n+2)$$
$$= 0.9(0.81y(n) + 0.09u(n) + 0.1u(n+1)) + 0.1u(n+2)$$
$$= 0.729y(n) + 0.081u(n) + 0.09u(n+1) + 0.1u(n+2)$$

(2) 由此将 $\hat{y}_{n+k}, k = 1, 2, 3$ 代入原来的目标函数，然后可以得到一个关于 $u(n), u(n+1), u(n+2) \in \{0, 1\}$ 的目标函数，记为 $J(u(n), u(n+1), u(n+2))$。

(3) 这个目标函数继续细分为关于 $u(n)$ 的子函数 $J(u(n))$，关于 $u(n+1)$ 的子函数 $J(u(n+1))$，关于 $u(n+2)$ 的子函数 $J(u(n+2))$，对于这三个子函数，其满足最优子结构形式，对于每一个子函数，直接比较 $u(n+k) \in \{0, 1\}, k = 0, 1, 2$0,1 分别代入的结果，选其最优解作为子函数结果。

(4) 注意子函数的求解是有顺序的 (对于这个问题不讲顺序也没有影响，但是对于动态规划来说是要有顺序的)，先求解 $u(n)$ 的子函数 $J(u(n))$，在此基础上求解关于 $u(n+1)$ 的子函数 $J(u(n+1))$，再在此基础上求解关于 $u(n+2)$ 的子函数 $J(u(n+2))$，这样就通过动态规划求解得出了最优解 1,1,1。