Вопросы по выбору

1. Вычислить плотность энергии идеального ферми-газа в как функцию температуры в d измерениях.

   Указание Под плотностью энергии будем понимать отношение $/N$, где N это число частиц. В безразмерных единицах вычислять нужно отношение $E/N\epsilon_F$, где ϵ_F обозначена энергия Ферми. Аналогично, обезразмеренная температура это отношение T/ϵ_F. Результатом решения задачи будет вычисленный график зависимости $E/N\epsilon_F$ от T/ϵ_F. Требуется также сравнить численные результаты с поведением в предельных случаях $T \ll \epsilon_F$ (вырожденный газ) и $T \gg \epsilon_F$ (классический газ + вириальная поправка).

   Литература: Ландау-Лифшиц 5 том ; Fetter-Valecka, Quantum many-body theory, главы 1-2.

   (a) Для $d = 3$
   (b) Для $d = 2$
   (c) Для $d = 1$

2. Вычислить плотность энергии и теплоемкость идеального Бозе-газа в зависмости от температуры в d измерениях.

   (a) Для $d = 3$. Особое внимание обратить на окрестность температуры бозе-конденсации.
   (b) Для $d = 2$
   (c) Для $d = 1$

3. Построить солитонное решение стационарного уравнения Кортевега-де-Вриза. Написать программу, моделирующую динамику начально-граничной задачи с несколькими солитонами при $t = 0$.

4. Построить солитонное решение одномерного уравнения синус-Гордона (кинк). Написать программу, моделирующую динамику двух кинков для различных начальных условий.

5. Рассмотрим изотермы реального на плоскости p-V. При температурах ниже критической на изотермах появляется область сосуществования жидкость-газ, и зависимость $p(V)$ становится немонотонной. Фактически же давление остается постоянным во всей области сосуществования, причем положение горизонтального участка изотермы определяется правилом Максвелла и геометрически находится из равенства площадей участков изотермы. Построить изотермы газа с учетом конструкции Максвелла. *Указание: Первым действием найти критические параметры и переписать уравнение состояния в безразмерных единицах.*

(a) Уравнение состояния ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \ .$$

(b) Уравнение состояния Бертло

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2} \ .$$

(c) I уравнение Дитеричи

$$p = \frac{RT}{V-b} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \ .$$

(d) II уравнение Дитеричи

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^{5/3}} \ .$$

(e) Уравнение состояния газа в виде вириального разложения до третьего порядка

$$p = \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{B_2}{V} + \frac{B_3}{V^2}\right) \ .$$

6. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в трехмерной прямоугольной яме конечной глубины с угловым моментом l.

7. Рассмотрим частицу в одномерной прямоугольной яме ширины a. Добавим потенциал вида $V_0 x(x-a)$. Найти уровни энергии и волновые функции, используя в качестве невозмущенного базиса состояния частицы в прямоугольной яме при $V_0 = 0$. Сравнить с результатами теории возмущений.

8. Упрощенно промоделировать движение планет солнечной системы, учитывая взаимное притяжение всех тел. Считать систему двумерной (рассмотреть плоскость вращения планет вокруг Солнца), а планеты и Солнце материальными точками. Считать, что в начальный момент времени все планеты находятся на одной линии на соответствующем их реальным орбитам радиальном расстоянии и имеют наблюдаемые орбитальные скорости. Провести моделирование на таком временном интервале, чтобы все планеты совершили хотя бы один полный оборот.

9. Упрощенно промоделировать движение системы Солнце-Земля-Луна, учитывая взаимное притяжение всех тел. Считать систему двумерной (рассмотреть плоскость вращения планет вокруг Солнца), а космические тела материальными точками. Считать, что в начальный момент времени Земля и Луна лежат на одной линии от Солнца на соответствующем им радиальном расстоянии и имеют реально наблюдаемые скорости вращения.

10. Рассмотреть движение электрона в постоянных магнитном и электрическом полях ($\hat{B} = B_0\hat{e_z}$, $\hat{E} = E_0\hat{e_y}$), направленных перендикулярно друг к другу. Сила Лоренца, действующая на заряженную частицу: $F = q(E + \frac{1}{c}[V \times B])$, где q – заряд частицы, V – ее скорость.

    Получить аналитическое выражение для координат и скоростей частицы и построить ее траекторию для $B_0 = 10\ nT,\ E_0 = 2\ mV/m,\ r_0 = [100, 0, 0]\ km,\ V_0 = [100, 50, 200]\ km/s$.

    Методом Рунге-Кутты построить траекторию частицы в случае, если магнитное поле не постоянно, а задано формулой: $\hat{B} = B_0 \tanh(x/L)\hat{e_z}$, где $B_0 = 10nT,\ L = 1000km$. Начальные условия взять т же, что в предыдущем пункте. Чем качественно поведение системы отличается в случае постоянного и переменного поля?

11. Рассмотрим простейшее одномерное уравнение диффузии функции распределения частиц по импульсам:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\left(D\frac{\partial f}{\partial p}\right) \tag{1}$$

    В тривиальном случае, когда $D = const$, оно имеет аналитическое решение.

    Получить аналитическое решение уравнения 1 в случае, когда $D = 1,\ f(t = 0, p) = \delta(p)$. *Указание: для решения задачи перейти к Фурье-пространству, т.е. рассмотреть уравнение на Фурье-образ функции распределения.*

    Численно решить уравнение 1 при тех же условиях, что в предыдущем пункте на временном интервале (после обезразмеривания системы) $t = [0, 100]$.

    К решению уравнения диффузии можно подойти и с другой стороны: при диффузии траектория каждой частицы в фазовом пространстве является случайной, т.е. для ее описания можно использовать модель случаного блуждания. Можно показать, что импульс каждой частицы будет являться случайной величиной и его изменение в каждый момент времени можно описать формулой:

$$p(t + dt) = p(t) + \sqrt{2D}W_t \tag{2}$$

    где $W_t = \varepsilon\sqrt{dt}$ – изменение Винеровского процесса, $\varepsilon \sim N(0, 1)$ – нормально-распределенная случайная величина.

    Напишите программу, которая будет моделировать случайные фазовые траектории $\sim 10^6$ частиц и позволит проследить эволюцию функции распределения во времени. Для этого нужно: 1) задать ансамбль частиц с импульсами, удовоетворяющими начальному условию, 2) задать шаг по времени, 3) для каждой частицы на каждом шаге сгенерерировать нормальное случайное число и рассчитать изменение импульса, 4) собрать функцию распределения частиц, зная импульс каждой частицы (бинировать импульсы и посчитать, какое количество частиц попало в каждый бин).

Сравнить все три полученных решения.

12. Промоделировать движение электрона в поле Земного магнитного диполя. Считать, что в начальный момент времени частица находилась в точке $r = [7R_E, 0, 0]$, где R_E – радиус Земли (6371 км), имела скорость $V = [10, 20, 10] km/s$. Диполь находится в начале координат, а его ось направлена вдоль оси z. Какие периодические движения наблюдаются в системе?