LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 18 januari 2013 kl 08-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås senast fredag 1:a februari på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1. Betrakta systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5(s-1)}{s^2+4s+3}$$

a. Bestäm poler, nollställen och statisk förstärkning för systemet. (1 p)

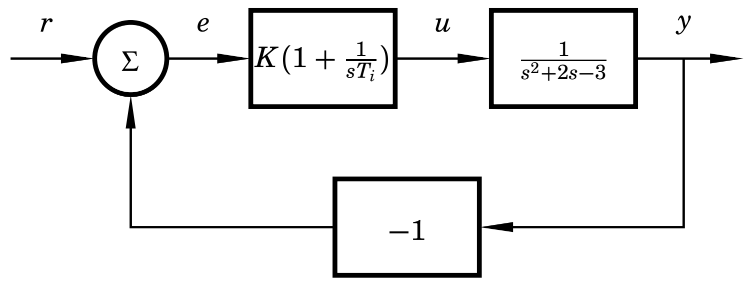
b. Är systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

a. Nollställe i $s = 1$, poler i $s = -3$, $s = -1$, statisk förstärkning $|G(0)| = \frac{5}{3}$ (även $G(0) = -\frac{5}{3}$ är rätt).

b. Ja. Alla poler ligger i vänster halvplan.

2. Blockschemat för ett system visas i Figur 1.



Figur 1 Blockschema för systemet i uppg. **2**

a. Vilka villkor på K och T_i måste vara uppfyllda för att det slutna systemet ska bli stabilt? (2 p)

b. Bestäm K och T_i så att det slutna systemet får det karaktäristiska polynomet

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{4}\right).$$

(1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen för det slutna systemet ges av $G_{cl} = \frac{G_0}{1+G_0}$, där

$$G_0 = \frac{K(sT_i+1)}{T_i s^3 + 2T_i s^2 - 3T_i s}.$$

Detta ger (utnyttja att då $G_0 = Q/P$ blir kar.pol. $Q+P$) det karaktäristiska polynomet

$$s^3 + 2s^2 + (K-3)s + \frac{K}{T_i}.$$

Härifrån kan vi nu använda stabilitetsvillkoren för ett tredjegradspolynom som finns i formelsamlingen, och kommer då fram till villkoren

$$\begin{cases} K & > & 3 \\ T_i & > & \frac{K}{2(K-3)} \end{cases}$$

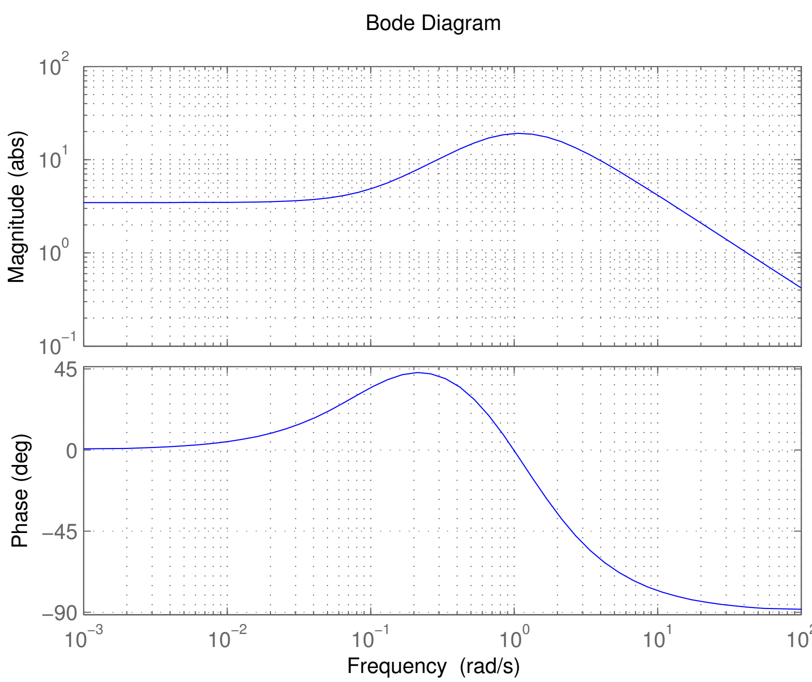
b. Det önskade karaktäristiska polynomet är

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{4}\right) = s^3+2s^2+s+\frac{1}{8}.$$

Genom att jämföra detta med det karaktäristiska polynomet i förra deluppgiften kommer man fram till

$$\begin{cases} K-3 & = & 1 \\ \frac{K}{T_i} & = & \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K & = & 4 \\ T_i & = & 32 \end{cases}$$

3. Bodediagrammet för ett system visas i Figur 2. Bestäm utsignalen från systemet efter att alla transienter dött ut då insignalen ges av $u(t) = \sin(4t) + 5\sin(t)$. (2 p)



Figur 2 Bodediagram för systemet i uppgift 3.

Solution

Från formelsamlingen har vi att $u(t) = \sin(\omega t)$ ger utsignalen $y(t) = a\sin(\omega t+\varphi)$, där $a = |G(i\omega)|$ och $\varphi = \arg G(i\omega)$. Dessa kan läsas av i

Bodediagrammet för respektive frekvens på insignalen. I vårt fall får vi då utsignalen

$$y(t) = a_4 \sin(4t + \varphi_4) + 5a_1 \sin(t + \varphi_1)$$

där

$$\begin{aligned} a_4 &= |G(4i)| &\approx& \quad 10 \\ \varphi_4 &= \arg G(4i) &\approx& \quad -60^\circ \\ a_1 &= |G(1i)| &\approx& \quad 20 \\ \varphi_1 &= \arg G(1i) &\approx& \quad 0^\circ \end{aligned}$$

Vilket sammantaget ger

$$y(t) = 10 \sin(4t - \pi/3) + 100 \sin(t).$$

4. Para ihop stegsvaren i Figur 3 med singularitetsdiagrammen i Figur 4. Motivera dina svar! Observera att inga beräkningar är nödvändiga.

(3 p)

Solution

Vi kan göra följande observationer:

Stegsvaren i A1 och A5 svänger, vilket svarar mot komplexa poler, d.v.s. B1 och B4. Polerna i B4 är sämre dämpade än de i B1, vilket innebär att A1 svarar mot B4 och A5 mot B1.

A3 är instabil vilket innebär att en pol ligger i höger halvplan. Alltså svarar A3 mot B5.

A6 har ett ”omvänt svar” vilket innebär att det finns ett nollställe i höger halvplan. Alltså svarar A6 mot B3.

A4 är snabbare än A2 och polen i B2 ligger längre bort från origo än polen i B6. Alltså svarar A2 mot B6 och A4 mot B2.

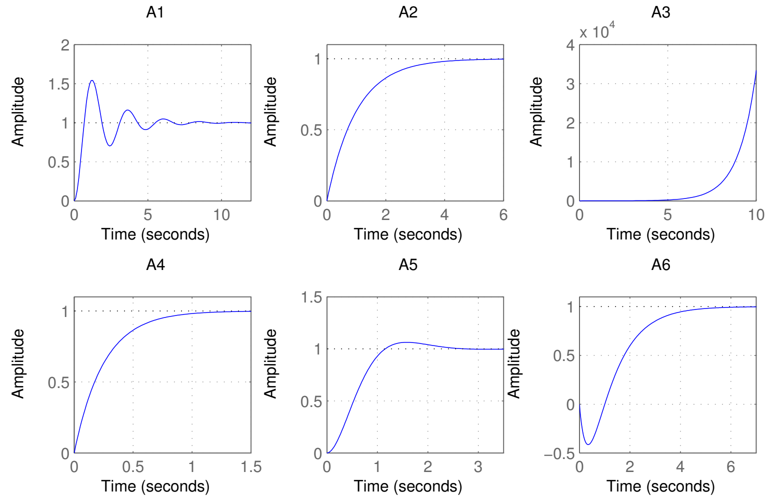
Detta ger således följande

$$\begin{aligned} &A1 - B4 \\ &A2 - B6 \\ &A3 - B5 \\ &A4 - B2 \\ &A5 - B1 \\ &A6 - B3 \end{aligned}$$

5. Ett olinjärt dynamiskt system ges av

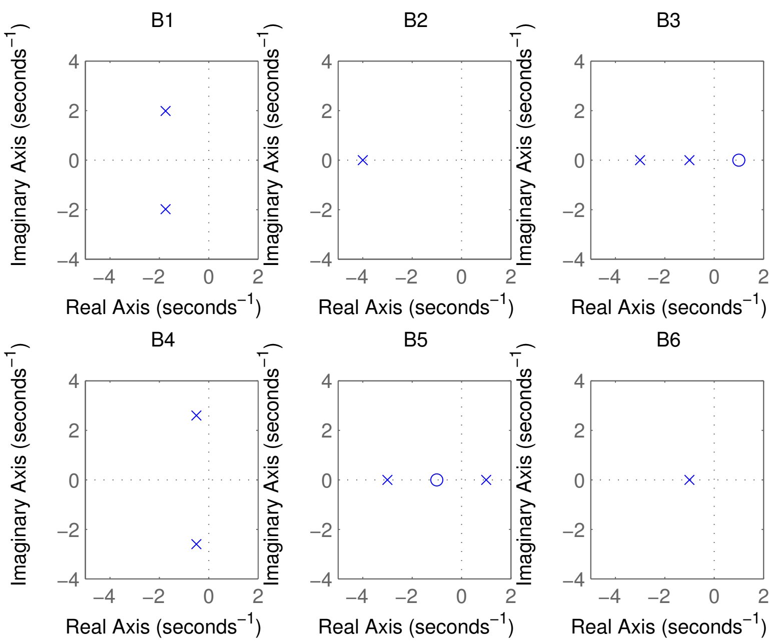
$$\dot{x} = f(x,u) = (4u - x^2)x,$$

där u är systemets insignal och x är processens enda tillståndsvariabel.



Figur 3 Stegsvar till uppgift 4

.



Figur 4 Singularitetsdiagram till uppgift 4

.

a. Ange samtliga stationära punkter (x^0, u^0) till systemet då $u^0 = 1$. (1 p)

b. Linjärisera systemet runt samtliga stationära punkter. (2 p)

Solution

a. Med $u^0 = 1$ får vi $\dot{x} = 0$ för $x^0 = 0$, $x^0 = -2$ och $x^0 = 2$.

b. Vi har $f'_x(x,u) = 4u - 3x^2$ och $f'_u(x,u) = 4x$. Med de nya variablerna $\Delta x =$

$x - x^0$ och $\Delta u = u - u^0$ ges det linjäriserade systemet av

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \left(4u^0 - 3(x^0)^2\right) \Delta x + 4x^0 \Delta u$$

där u^0 och x^0 från a-uppgiften ska sättas in.

6. En likströmsmotor kan beskrivas av följande modell

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

där x_1 är motorns vinkelhastighet och x_2 är motorns position.

a. Man önskar rekonstruera tillståndsvariablerna med hjälp av ett Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}).$$

Bestäm vektorn K så att Kalmanfiltrets poler hamnar i -4. (2 p)

b. Man använder ofta ett Kalmanfilter i kombination med tillståndsåterkoppling. Det beror på att man sällan kan mäta alla tillstånd i processen. Rita upp ett blockdiagram för ett sådant system med kombinerad tillståndsåterkoppling och Kalmanfiltrering. Glöm inte att sätta ut signalerna $\hat{x}$, r, u och y. Tillståndsåterkoppling ges för övrigt av styrlagen

$$u = -L\hat{x} + l_r r$$

där u är insignalen till processen och r är referenssignalen. (1 p)

Solution

a. Kalmanfiltrets systemmatris blir

$$A - KC = \begin{bmatrix} -1 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

Det karaktäristiska polynomet blir då

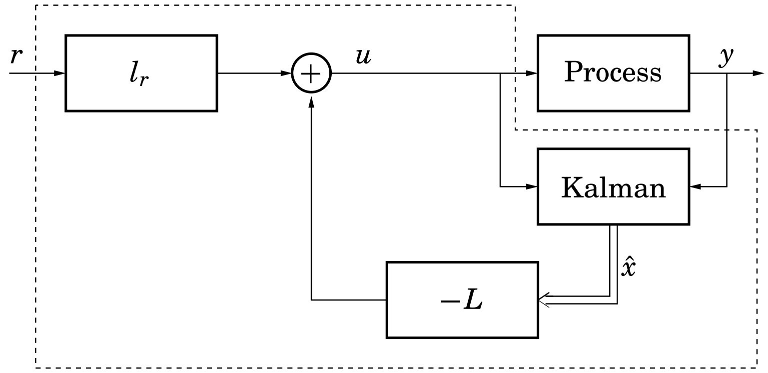
$$p(s) = \det(SI - (A - KC)) = \det \begin{bmatrix} s+1 & k_1 \\ -1 & s+k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (k_2+1)s + k_1 + k_2$$

vilket ska vara lika med det önskade karaktäristiska polynomet

$$p(s) = (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Identifiering av koefficienter ger K-vektorn

$$K = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$



Figur 5 Blockdiagram för uppgift 6

b. Blockdiagrammets utseende syns i Figur 5.

7. Ett stabilt system med överföringsfunktionen $G(s)$ har skärningsfrekvensen $\omega_c = 6$ rad/s och fasmarginalen $\phi_m = 15$ grader. Systemet utsätts för en tidsfördröjning som är på 0.1 sekunder. Är det fördröjda systemet stabilt när det återkopplas? (2 p)

Solution

Det öppna systemet blir $H(s) = G(s)e^{-0.1s}$ eftersom vi har en tidsfördröjning på 0.1 sekund. Eftersom

$$|H(i\omega)| = |G(i\omega)e^{-i0.1\omega}| = |G(i\omega)||e^{-i0.1\omega}| = |G(i\omega)|,$$

har $H(s)$ samma skärningsfrekvens som $G(s)$, dvs. $\omega_c = 6$ rad/s. Nu är fasen för $H(s)$ för denna skärfrekvens

$$\begin{aligned}
\arg H(i\omega_c) &= \arg\left(G(i\omega_c)e^{-i0.1\omega_c}\right) \\
&= \arg G(i\omega_c) + \arg e^{-i0.1\omega_c} \\
&= \arg G(i\omega_c) - 0.1\omega_c \\
&= \arg G(i\omega_c) - 0.6 \text{ rad/s} \\
&= \arg G(i\omega_c) - 34.4 \text{ deg}
\end{aligned}$$

Alltså kommer det öppna systemets fas att minskas med 34.4 grader då tidsfördröjning introduceras. Men $G(s)$ hade fasmarginalen $\phi_m = 15 < 34.4$, varför det återkopplade systemet kommer att vara instabilt.

8. Ett system beskrivs av ekvationerna

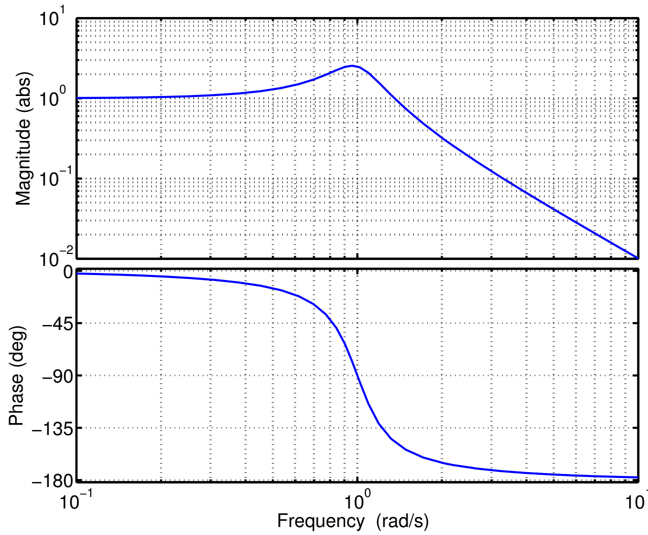
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

Är systemet styrbart? *(Tips: behöver vi verkligen beräkna styrbarhetsmatrisen för att lösa detta?)* (2 p)

Solution

Systemet är inte styrbart, vilket man kan se direkt i matriserna. Vi kan inte styra det tredje tillståndet, varken direkt med styrsignalen eller indirekt genom att påverka de andra tillstånden. I detta fall är det tredje tillståndet dessutom instabilt och observerbart, vilket gör systemet instabilt oavsett hur styrsignalen väljs.

9. Experiment på en process har gett upphov till Bodediagrammet i Figur 6.



Figur 6 Bodediagrammet för processen i Uppgift 9.

a. Hur kan man ana att processen är dåligt dämpad genom att studera Bodediagrammet? (0.5 p)

b. Rita Nyquistdiagrammet för processen. (1.5 p)

Solution

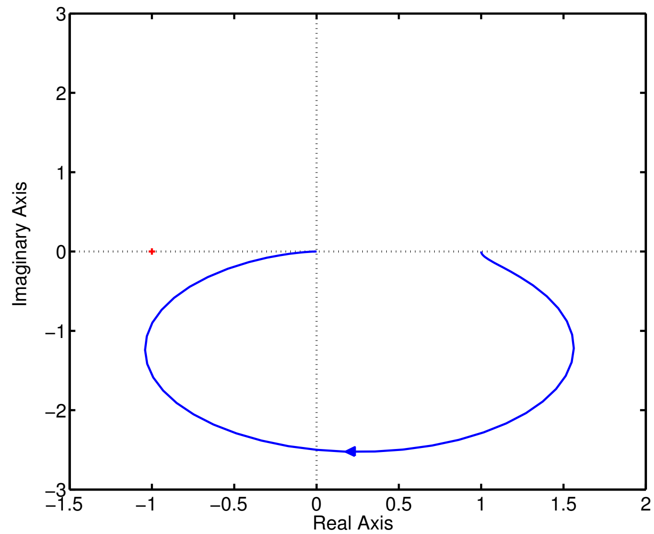
a. Överföringsfunktionen som motsvarar Bodediagrammet ges av

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1},$$

d.v.s. processen har en relativ dämpning på 0.2. Det finns två indikationer på detta i Bodediagrammet. Den första är den markanta resonanstoppen vid frekvenser kring egenfrekvensen $\omega_0 = 1$ rad/s. Den andra är att fasmarginalen, som avläses till cirka 30° (den är egentligen 32.8°), är liten.

b. Nyquistdiagrammet för processen visas i Figur 7.

Följande observationer är användbara vid framtagandet av Nyquistkurvan. I Bodediagrammet ser vi att fasen alltid är monotont avtagande från 0° till −180°, d.v.s. att imaginärdelen alltid är icke-positiv. Den statiska förstärkningen avläses till 1 och Nyquistkruvan börjar alltså i 1. Amplituden stiger



Figur 7 Nyquistdiagrammet för processen i Uppgift 9.

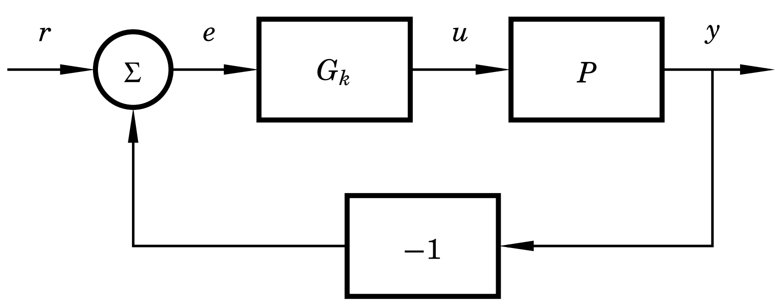
tills den når sin topp vid ungefär 2.5, och då är fasen ungefär $-90°$. Alltså går Nyquistkurvan igenom punkten $-2.5i$ och efter detta börjar kurvan närma sig origo igen medan fasen närmar sig $-180°$. Vi närmar oss alltså origo längs negativa reella axeln.

Ökad noggrannhet när man ritar kurvan för hand kan fås genom att helt enkelt avläsa amplitud och fas vid godtycklig frekvens i Bodediagrammet och konstatera att Nyquistdiagrammet går igenom motsvarande punkt i komplexa talplanet.

10. Överföringsfunktionen för ett system ges av

$$P(s) = \frac{0.325}{s(s+1)^2}.$$

Vi vill kunna följa referensvärden som ökar linjärt med hastigheten 0.5 med ett kvarstående reglerfel som är mindre än 0.1. Vi vill även att fasmarginalen ska vara större än 50°, vilket garanterar att det kvarstående reglerfelet är ändligt. Designa en kompenseringslänk G_k som uppfyller kraven vid enkel återkoppling enligt Figur 8. (3 p)



Figur 8 Det återkopplade systemet i Uppgift 10.

Solution

Vi börjar med att identifiera skärfrekvensen ω_c för att finna den nuvarande fasmarginalen. Detta görs genom att lösa ekvationen

$$|P(i\omega_c)| = \frac{0.325}{\omega_c(\omega_c^2+1)} = 1$$

numeriskt, vilket ger oss $\omega_c \approx 0.298$. Eftersom fasen hos P är en monotont avtagande funktion av frekvensen, så kan vi avrunda ω_c upp till 0.3 för att få en nedre gräns på fasmarginalen. Denna finner vi genom att beräkna

$$\phi_m = \pi + \arg G(i\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2\arctan\omega_c > \frac{\pi}{2} - 2\arctan 0.3 > 0.98 > 56^\circ.$$

Vi ser att vi har mer än 6° till godo i fasmarginalen. Eftersom vi inte har några krav på att öka snabbheten hos sytemet och vi har fasmarginal till godo så är det en fasretarderande länk på formen

$$G_k(s) = \frac{s+a}{s+\frac{a}{M}}$$

som vi behöver för att minska det kvarstående rampfelet. Eftersom fasmarginalen för det okompenserade systemet är större 56° så är vi garanterade att ha en fasmarginal som är större än 50° om vi följer tumregeln $a = 0.1\omega_c \approx 0.03$.

För att beräkna M så börjar vi med att ta fram överföringsfunktionen från r till e. Denna ges av

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - P(s)G_k(s)E(s) \\ E(s)(1+P(s)G_k(s)) &= R(s) \\ E(s) &= \frac{1}{1+P(s)G_k(s)}R(s). \end{aligned}$$

Vid rampändringar i referensvärdet med hastighet 0.5 så är $R(s) = \frac{1}{2s^2}$. Detta ger oss

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+\frac{0.325}{s(s+1)^2}\frac{s+a}{s+\frac{a}{M}}}\frac{1}{2s^2} = \frac{s(s+1)^2(s+\frac{a}{M})}{s(s+1)^2(s+\frac{a}{M})+0.325(s+a)}\frac{1}{2s^2} \\ &= \frac{0.5(s+1)^2(s+\frac{a}{M})}{s(s(s+1)^2(s+\frac{a}{M})+0.325(s+a))}. \end{aligned}$$

Vårt val av a garanterar att fasmarginalen är större än 50° och alltså är rampfelet ändligt för alla M. Slutvärdesteoremet kan då tillämpas och ger oss att det kvarstående rampfelet är

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{0.5(s+1)^2(s+\frac{a}{M})}{s(s+1)^2(s+\frac{a}{M})+0.325(s+a)} = \frac{\frac{a}{2M}}{0.325a} = \frac{1}{0.65M}.$$

Felet blir alltså mindre än 0.1 om

$$\frac{1}{0.65M} < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad M > \frac{10}{0.65} > 15.5.$$

En kompenseringslänk som uppfyller specifikationerna är alltså

$$G_k(s) = \frac{s+0.03}{s+0.0019}.$$