Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 12 januari 2010

1.

a. Endast en jämviktspunkt finns: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

b. Vi får följande derivator:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 2x_3 - 3x_3^2 \end{pmatrix}$$

och därför får vi följande linjärsering av systemet:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Delta x \end{aligned}$$

2.

a. Vi har att slutna systemets överföringsfunktion blir:

$$G(s) = \frac{G_P K}{1 + G_P K} = \frac{4K}{s^2 + 3s + 4K}$$

b. Ett andra ordningens polynom har alla rötter i vänster halvplan om och endast om alla koefficienter är >0. Om $K = 0$ är slutna systemet uppenbart stabilt (överföringsfunktionen blir 0). Vi får alltså att $K \geq 0$.

3.

a. Laplacetransform av de båda differentialekvationerna ger

$$\begin{aligned} s^2X(s) + 2sX(s) + X(s) &= 2sU(s) + U(s) \\ sZ(s) + Z(s) &= U(s) \end{aligned}$$

vilket i sin tur kan omarbetas till

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)} U(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2} U(s) = G_1(s)U(s) \\ Z(s) &= \frac{1}{(s+1)} U(s) = G_2(s)U(s) \end{aligned}$$

b. Det gäller att

$$Y(s) = X(s) + Z(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$

och därmed blir överföringsfunktionen mellan $u(t)$ och $y(t)$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2} + \frac{(2s+1)}{(s+1)^2} = \frac{(3s+2)}{(s+1)^2}.$$

Givet överföringsfunktionen kan vi skriva om systemet på t.ex. styrbar kanonisk tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

enligt formelsamlingen.

4. Slutvärdet kan beräknas mha slutvärdesteoremet under förutsättning att $sY(s) = sG(s)U(s) = G(s)$ har alla sina poler i vänster halvplan. Laplacetransformen för enhetssteget är $U(s) = 1/s$.

a. Nämnarpolynomet är ett andragradspolynom med alla koefficienter större än noll och alltså alla nollställen i vänster halvplan. Slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s+7}{s^2+7s+11} = \frac{7}{11}$$

b. Nämnarpolynomet är en produkt av förstagradspolynom som alla endast har positiva koefficienter. Följaktligen har nämaren alla nollställen i vänster halvplan och slutvärdesteoremet kan användas:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2(s-3)}{(7s+1)(s+6)(3s+7)(5s+4)} = \frac{-2\cdot 3}{1\cdot 6\cdot 7\cdot 4} = -\frac{1}{28}$$

c. Nämnaren är ett andragradspolynom med negativa koefficienter och alltså minst ett nollställe i höger halvplan. Systemet är således instabilt och slutvärdesteoremet kan inte användas. Istället kan man skriva om $Y(s)$ på en form som finns med i tabellen över Laplacetransformer och titta på motsvarande tidsfunktion.

$$Y(s) = \frac{-1}{s(s^2-s-6)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(-3)\cdot 2}{s(s-3)(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{-3e^{-2t}-2e^{3t}}{2+3}\right) \to -\infty \text{ då } t\to\infty$$

5. IV - F Stegsvaret är det enda som liknar ett första ordningens system.

I - C Stegsvaret går till en början åt fel håll vilket betyder att det finns ett nolställe i höger halvplan.

III - B Stegsvarets initiala lutning visar att det finns ett nollställe i vänster halvplan (jämför med lutningen i stegsvar A,D,E).

VI - E Stegsvarets översläng visar att vi har komplexa poler. Stegsvaret är mer väl dämpat än stegsvar D (som är lika snabbt) och därmed svarar stegsvaret mot pol/nollställe-diagram VI.

V - D Stegsvar D är lika snabbt som stegsvar E men sämre dämpat vilket svarar mot större vinkel till polerna från negativa reella axeln, alltså V.

II - A Stegsvaret är långsammare än stegsvar D och E vilket innebär att (de komplexa) polerna ligger närmre origo.

6.

a. Systemet måste vara styrbart, vilket är ekvivalent med att styrbarhetsmatrisen har full radrang.

b. Vi vill alltså att vårt karakteristiska polynom ska få formen $s^2 + 2s + 2$. Med $L = [l_1 \;\; l_2]^{\mathrm{T}}$ erhåller vi $p_{A-BL}(s) = det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2 s + l_1$. Vi väljer således $L = [2 \;\; 2]^{\mathrm{T}}$.

Den statiska förstärkningen ges av $G(0) = C(-A + BL)^{-1} B l_r = 0.5 l_r$. Vi ser att $l_r = 2$ uppfyller specifikationen.

c. Återkoppling med stor förstärkning kan ge en mättad styrsignal. Detta då vårt ställdon inte klarar att producera så pass stora signaler. Detta medför att systemets poler inte hamnar där vi vill.

7. Välj en fasavancerande kompenseringslänk

$$G_k(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}, \quad N > 1.$$

Detta för att den höjer förstärkningen vid höga frekvenser samtidigt som den höjer fasen vid den nya skärfrekvensen. Vi måste nu bestämma motorns nya skärfrekvens och fasmarginalen vid denna frekvens. Den gamla skärfrekvensen kan fås ur sambandet

$$|G_p(i\omega_c)| = \frac{4}{\omega_c^2} = 1 \Rightarrow \omega_c^2 = 4 \Rightarrow \omega_c = 2\,\mathrm{rad/s}$$

Den önskade skärfrekvensen ska vara 5 gånger så stor och blir således $\omega_{c,ny} = 10$ rad/s. Processens fasmarginal i denna punkt är

$$\varphi_m = 180° + arg\, G_p(i\omega_{c,ny}).$$

Där

$$arg\, G_p(i\omega_{c,ny}) = arg(\frac{4}{-\omega_{c,ny}^2}) = -180°.$$

Det ger fasmarginalen $\varphi_m = 0°$. Därmed ska kompenseringsfiltret minst ha fasen $+40°$ vid skärfrekvensen. En titt i formelsamlingen på sidan 12 ger oss t.ex. $N = 5$.

b ges av sambandet $b\sqrt{N} = \omega_{c,ny}$. Alltså blir $b \approx 4.47$. Kompenseringsfiltrets förstärkning K_k fås i sin tur från formeln

$$K_k = \frac{1}{\sqrt{N}|G_p(i\omega_{c,ny})|} = \frac{1}{(\sqrt{5}\frac{4}{10^2})} \approx 11.18$$

Därmed är kompenseringsfiltret bestämt till

$$G_k(s) = 11.18\,\frac{1 + s/4.47}{1 + s/22.35}.$$

8. För att stabilitet hos det slutna systemet ska kunna garanteras måste det öppna systemets nyquistkurva ligga till höger om -1 då fasen är $-180°$. Beräkna först de frekvenser för vilka fasen är $-180°$:

$$\arg G_o(i\omega_0) = -\pi \Rightarrow -n \arctan(10\omega_0) = -\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{10}\tan(\pi/n)$$

Härnäst vill vi veta ifall magnituden i denna punkt är större eller mindre än 1 och det tar vi reda på genom:

$$|G_o(i\omega_0)| = 1 \cdot |G_p(i\omega_0)| = \frac{3}{\left(\sqrt{100\omega_0^2 + 1}\right)^n}$$

Då $n = 2$ kommer fasen aldrig under $-180°$ och detta fall kan därmed ignoreras. Då n gradvis ökar kommer vi få följande resultat:

$$\begin{aligned} n = 3 &\Rightarrow \omega_0 = 0.17 \text{ rad/s} \Rightarrow |G_o(i\omega_0)| = 0.375 \\ n = 4 &\Rightarrow \omega_0 = 0.1 \text{ rad/s} \Rightarrow |G_o(i\omega_0)| = 0.75 \\ n = 5 &\Rightarrow \omega_0 = 0.07 \text{ rad/s} \Rightarrow |G_o(i\omega_0)| = \mathbf{1.04} \end{aligned}$$

Med andra ord kan man högst styra 4 tankar på rad med P-regulatorn i fråga.