



LUNDS UNIVERSITET
Lunds Tekniska Högskola

F4 Elektromagnetiska vågor

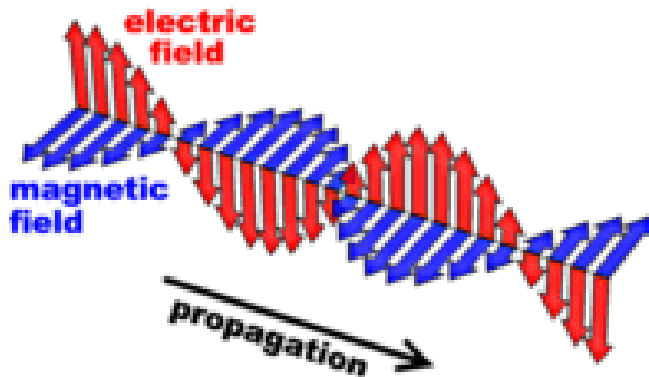
HARMONISKA SVÄNGNINGAR OCH VÅGOR



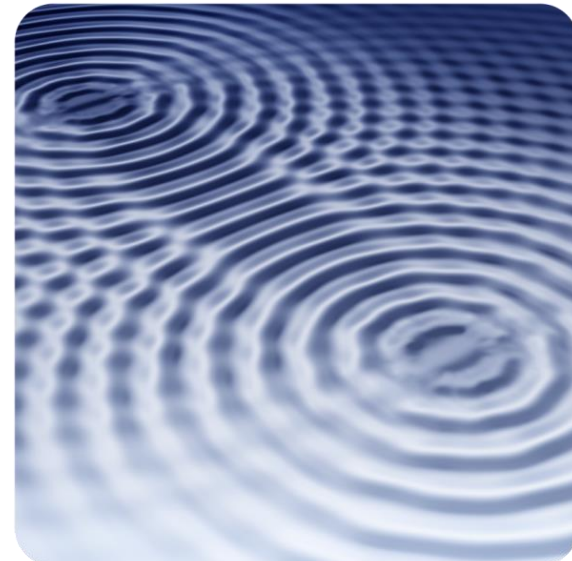
Dagens föreläsning



- F4 – Elektromagnetiska vågor
 - F5 – Bøjning och upplösning
 - F6 – Interferens och bøjning
 - F7 – Interferens i tunna skikt
 - F8 – Polarisation
-

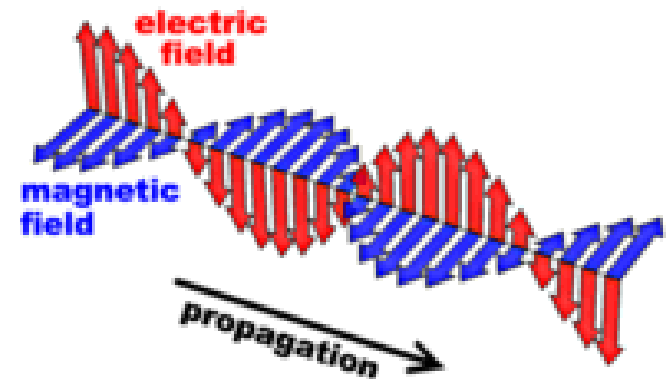


- Vågrörelsen
- Interferens mellan vågor
- Elektromagnetiska vågor



Vad är en våg?

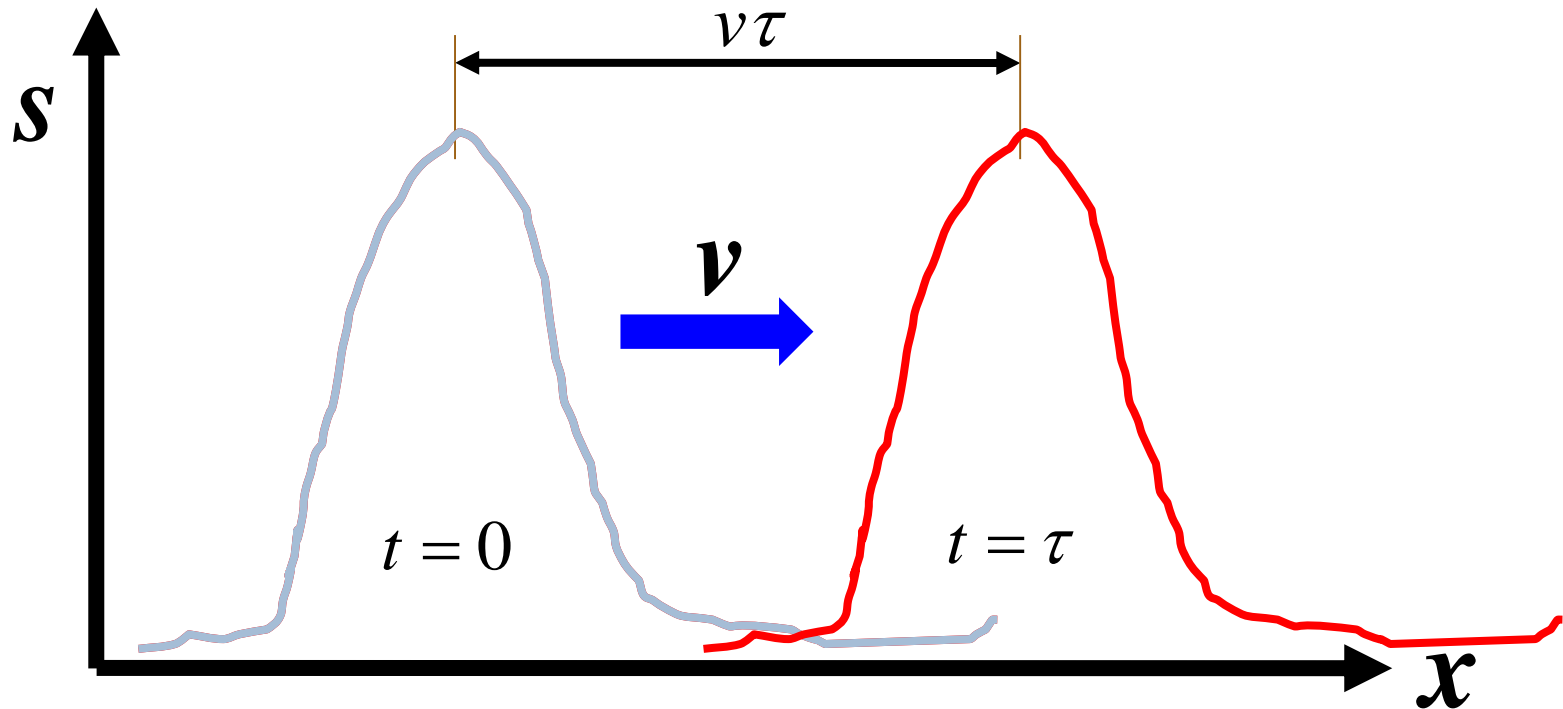
- En störning av ett medium eller fält som fortplantar sig i rummet
 - En variation av en storhet som rör sig med *konstant* hastighet och *bibehållen* form.
- Mekaniska vågor
 - Ljud
 - Vibrerande strängar
- Ytvågor
 - Havsvågor
- Elektromagnetiska vågor
 - Radiovågor
 - Ljus



Vad är en våg?

Endimensionell störning

En variation av en storhet som rör sig med
konstant hastighet och *bibehållen* form.



$$s = f(x - vt)$$



Allmänna vågekvationen

- Utgå från en störning på formen $s = f(x - vt)$
 - Relatera vågens partiella andra derivator

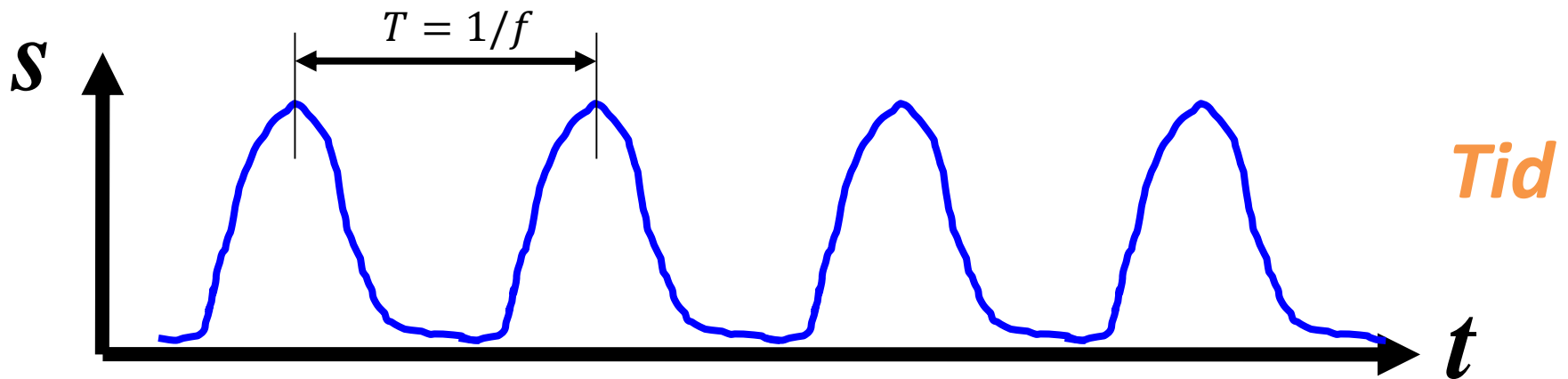
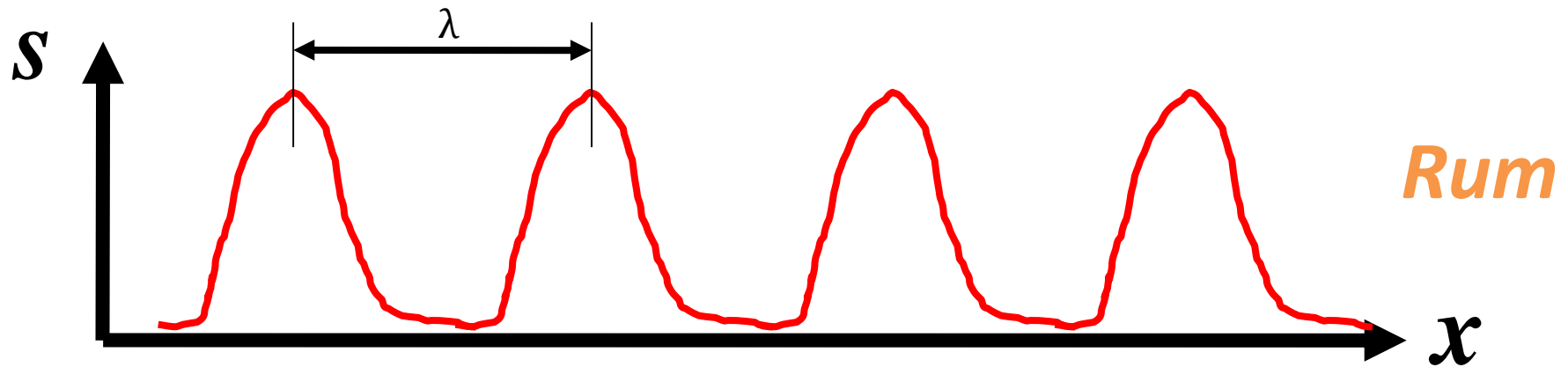
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

- För många fysikaliska system kan man visa att den allmänna vågekvationen gäller:
 - Mekaniska vågor i gaser, metaller, kristaller, strängar...
 - Elektromagnetiska vågor (från Maxwells ekvationer)
- Ekvationen beskriver fler egenskaper hos vågen än uttrycket för en störning



Periodiska vågor

$$s = f(x - vt)$$



Harmonisk våg

Storheter och beteckningar

$$\begin{aligned}\text{Störningen: } s(x, t) &= A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right) \\ &= A \sin \left(2\pi \left(tf \pm \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right) \\ &= A \sin(\underbrace{\omega t \pm kx}_{\text{Fas}} + \alpha)\end{aligned}$$

Fas

Amplitud: A

Period: T

Frekvens: f

Våglängd: λ

Faskonstant: α

Vågtalet: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Vågens hastighet: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$

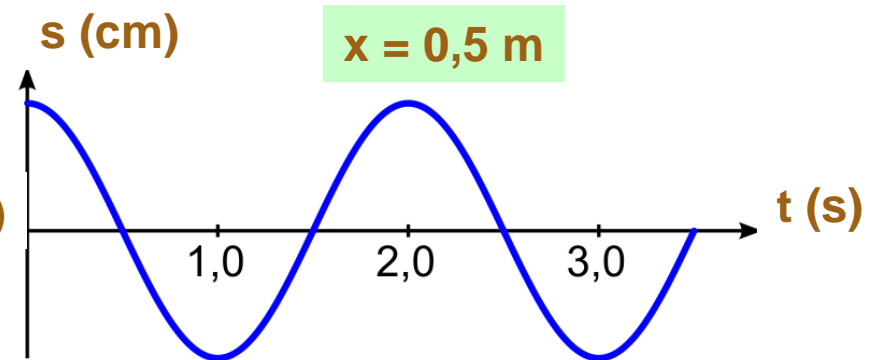
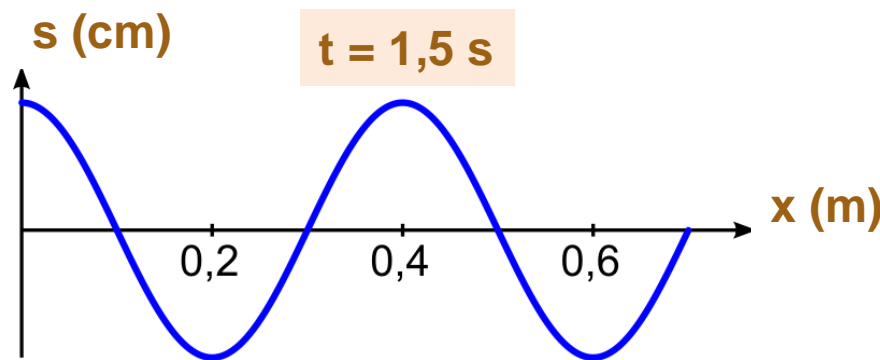


Exempel

Bestämning av vågens parametrar

Diagrammen visar en harmonisk vågrörelse. Bestäm

- Våglängden λ
- Vågens hastighet v
- Perioden T
- Vågens utbredningsriktning (höger eller vänster i vänstra diagrammet)
- Frekvensen f



$$s(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right]$$



Transversella eller longitudinella vågor



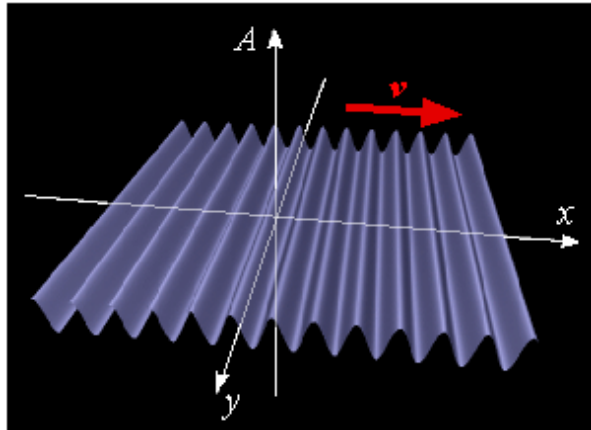
- Longitudinell våg
 - Störningen är parallell med utbredningsriktningen
 - Exempelvis ljudvågor



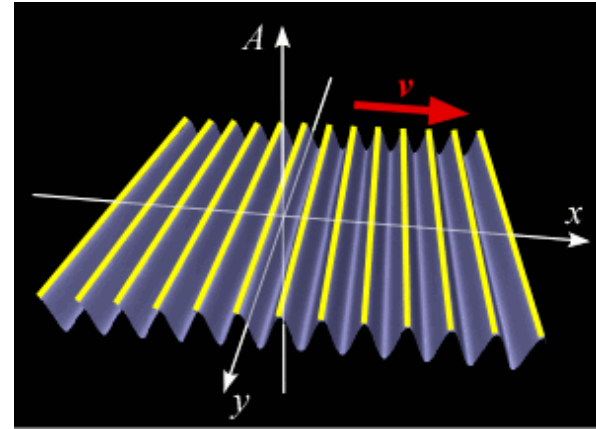
- Transversell våg
 - Störningen är vinkelrät mot utbredningsriktningen
 - Kan vara polariserad (två olika riktningar)
 - Elektromagnetiska vågor är i praktiken alltid transversella



Vågfronter



En plan våg som rör sig åt höger



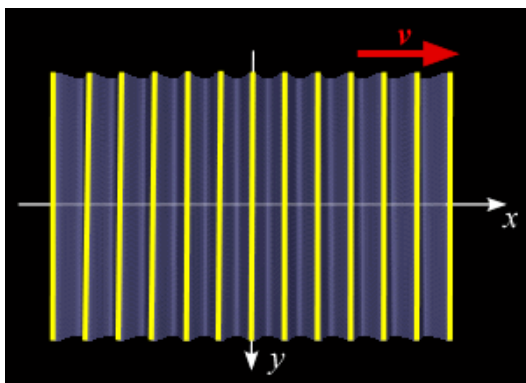
Vågfronter, markerade på vågtopparna

- Sammanhängande punkter där en våg har samma fas
 - 2D: Vågfronten är en linje
 - 3D: Vågfronten är en yta

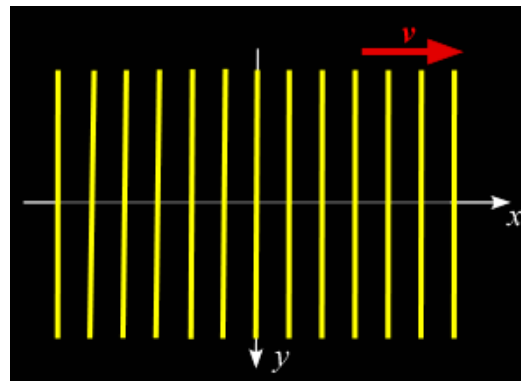


Plana vågor och cirkulära vågor

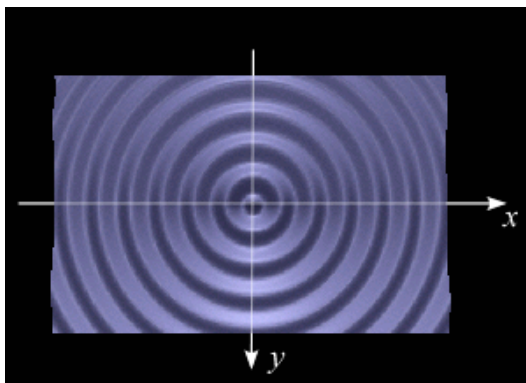
... samt utvidgning till sfäriska vågor



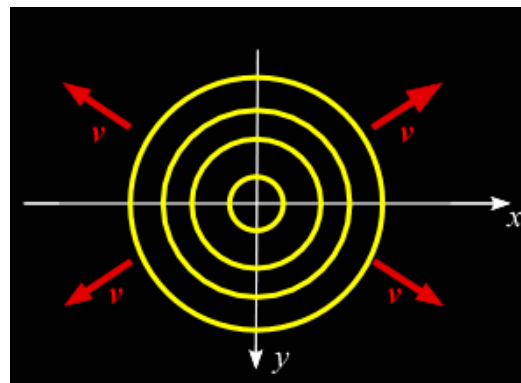
Plan våg som rör sig åt höger



Vågfronter, representerar en plan våg



Cirkulär våg som rör sig utåt



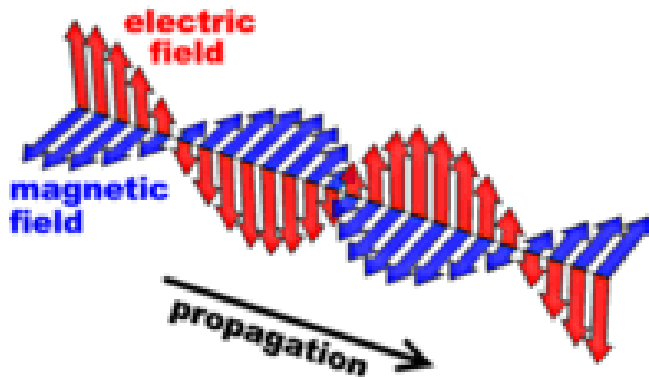
Vågfronter, representerar en cirkulär våg



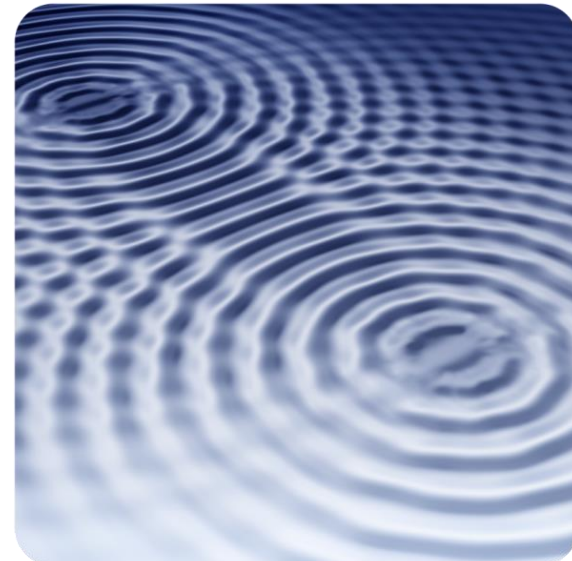
Dagens föreläsning



- F4 – Elektromagnetiska vågor
- F5 – Bøjning och upplösning
- F6 – Interferens och bøjning
- F7 – Multipelinterferens
- F8 - Polarisation



- Vågrörelsen
- Interferens mellan vågor
- Elektromagnetiska vågor



Superpositionsprincipen

En konsekvens av den allmänna vågekvationen

- Vi har visat att en störning på formen $s = f(x \pm vt)$ är en lösning till den allmänna vågekvationen

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

- Hur är det då med en störning på formen

$$s = a \cdot f(x \pm vt) + b \cdot g(x \pm vt)$$

Superposition av vågor:

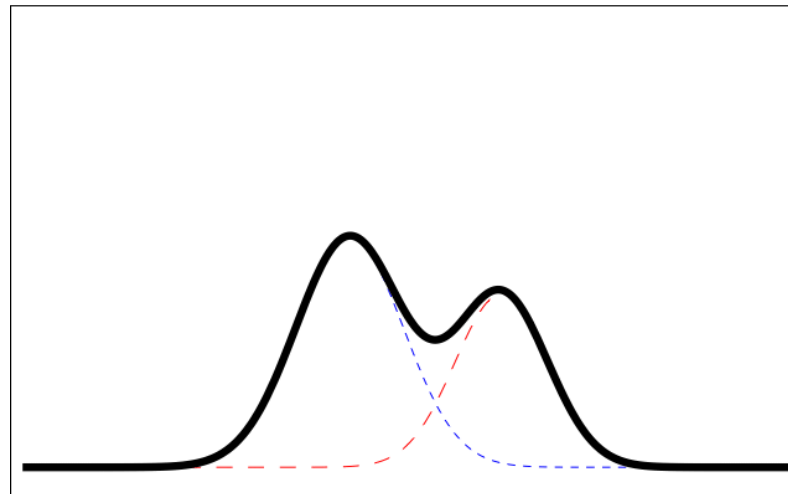
Om störningarna $s = f(x, t)$ och $s = g(x, t)$ är lösningar till vågekvationen, så är ävens $s = a \cdot f(x \pm vt) + b \cdot g(x \pm vt)$ en lösning till vågekvationen.



Superpositionsprincipen

Illustration

- *Den resulterande störningen i en punkt där två eller flera vågor interfererar ges av summan av de enskilda vågornas påverkan.*

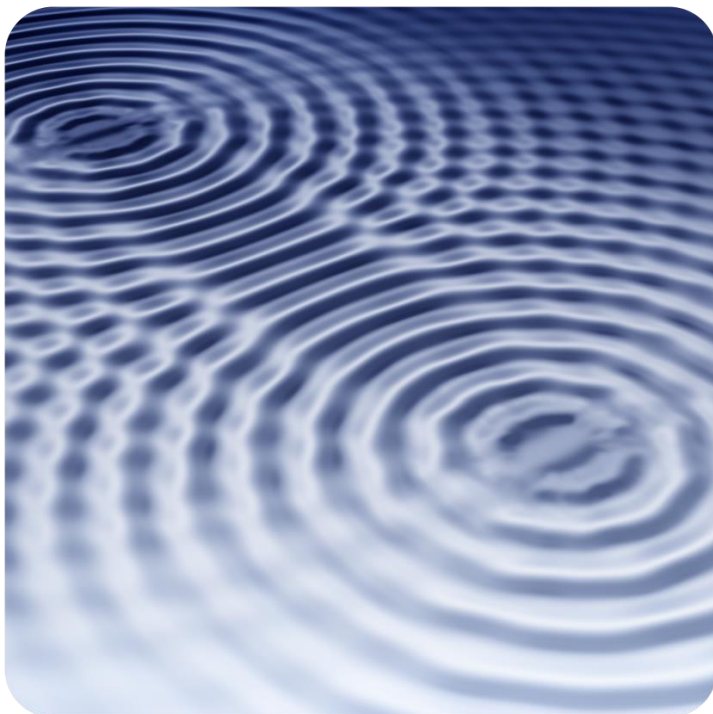


Vågor som adderas – interferens!

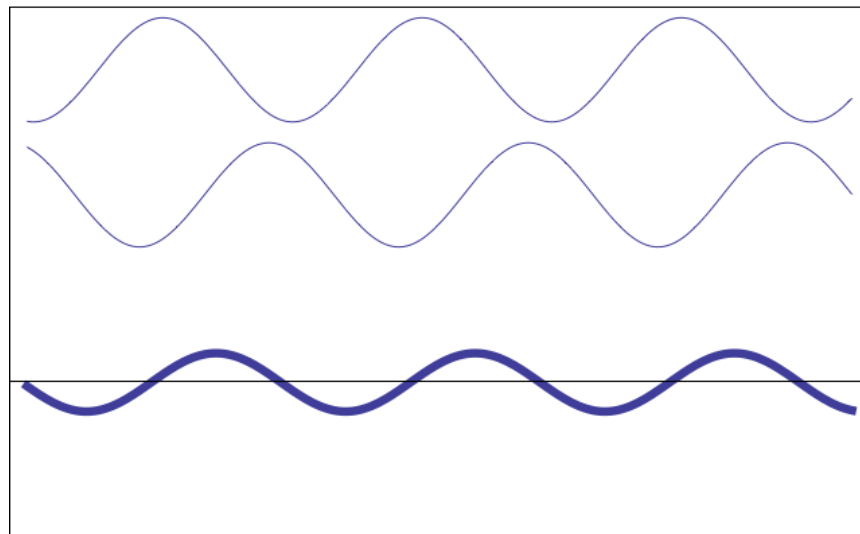


Interferens mellan två vågor

Konstruktiv interferens och destruktiv interferens



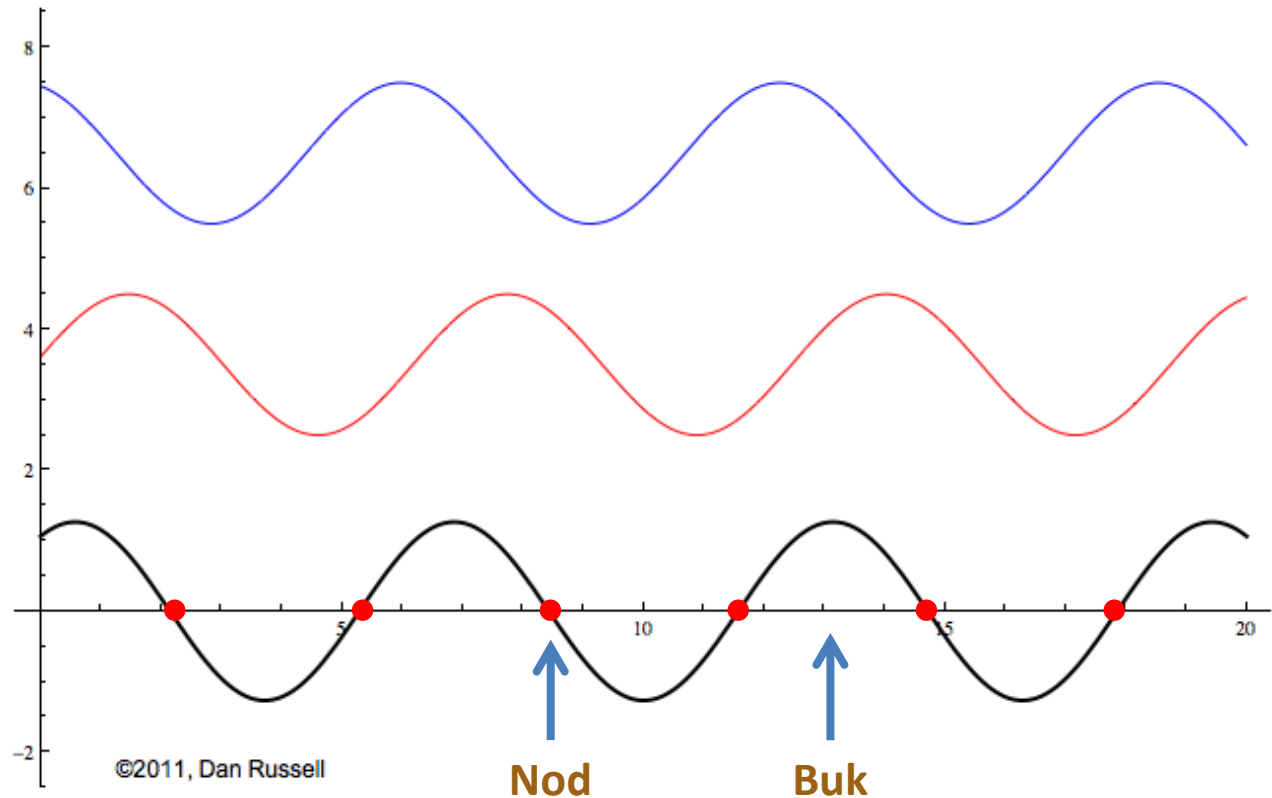
$$s(x, t) = \sin(\omega t) + \sin(\omega t + \alpha)$$



Stående vågor

Två kolliderande vågor

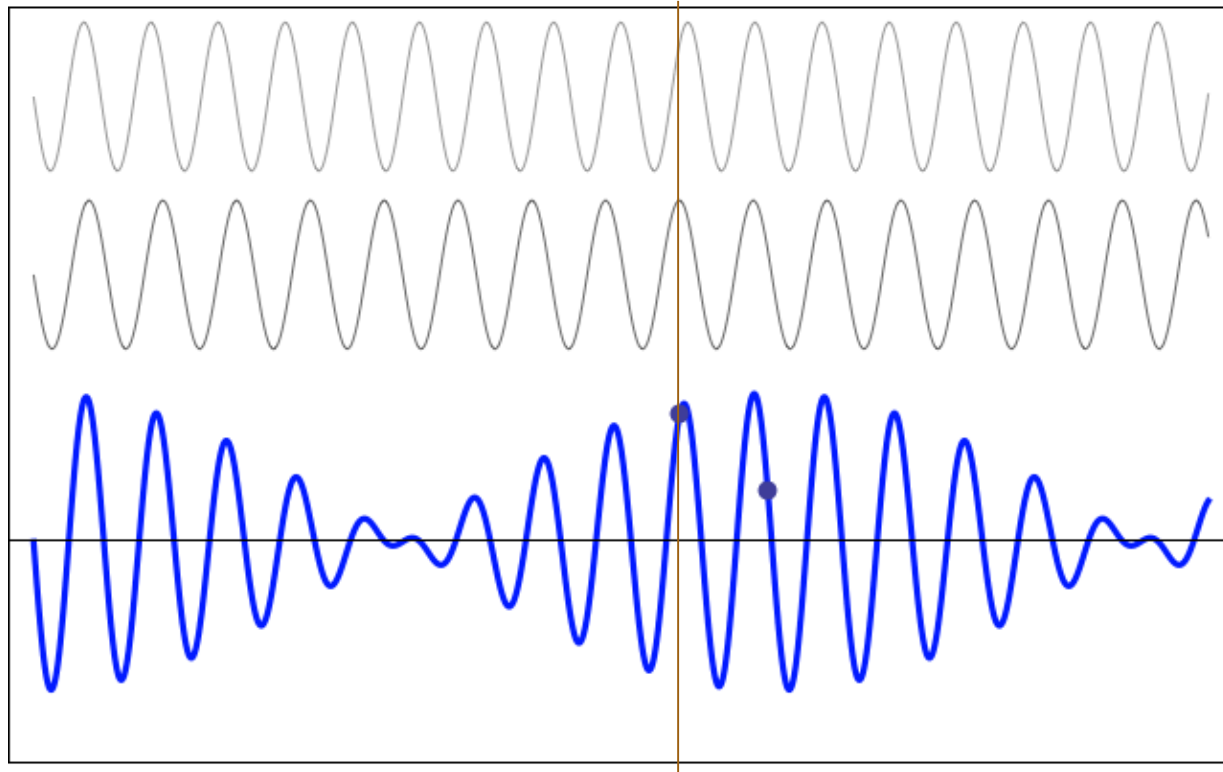
- *Samma frekvens (och utbredningshastighet)*
- *Vågen ser ut att stå stilla – en stående våg.*



Svävning

Två interfererande vågor med olika frekvens

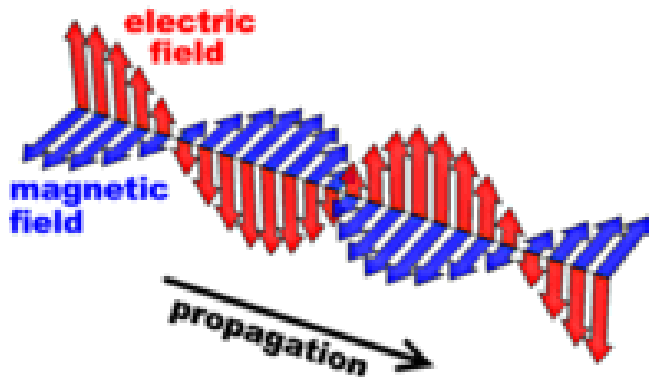
$$s(t) = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$



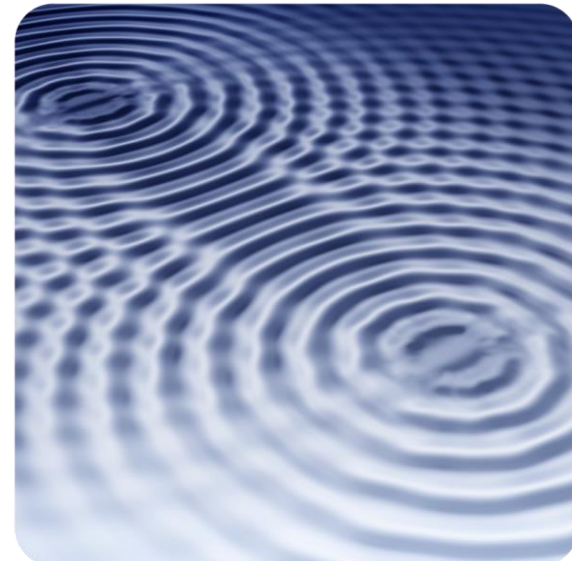
Dagens föreläsning



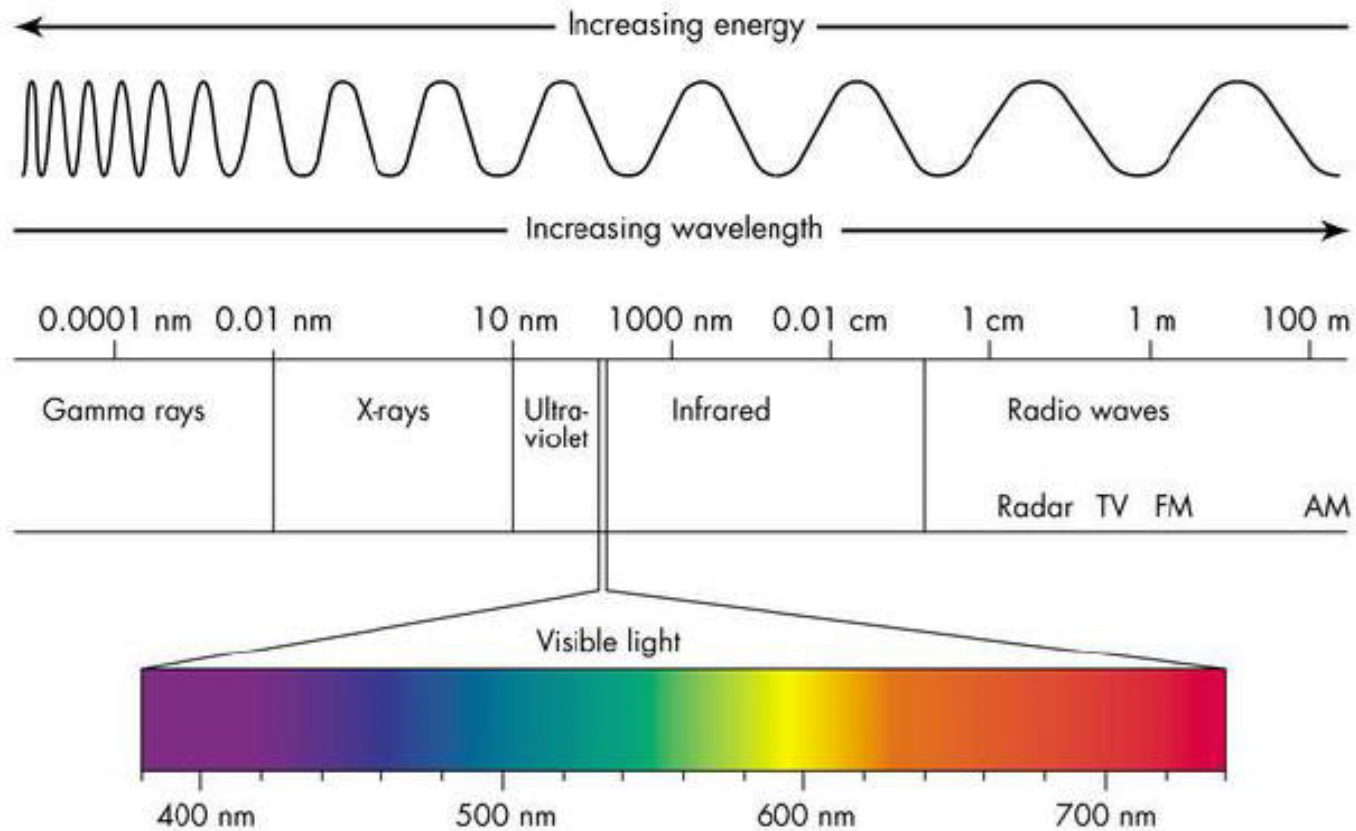
- F4 – Elektromagnetiska vågor
 - F5 – Bøjning och upplösning
 - F6 – Interferens och bøjning
 - F7 – Multipelinterferens
 - F8 - Polarisation
-



- Vågrörelsen
- Interferens mellan vågor
- Elektromagnetiska vågor

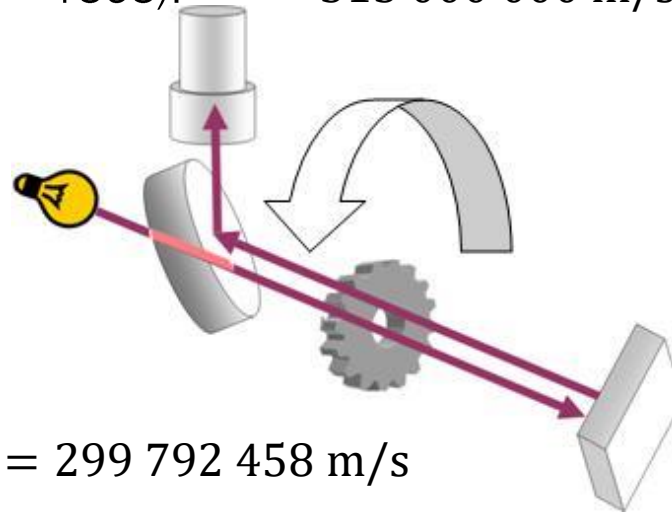
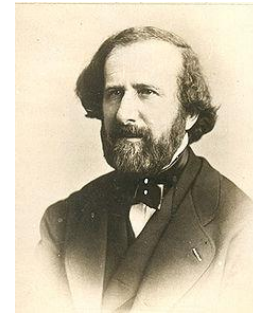


Det elektromagnetiska spektrumet



Ljusets fart

- Ole Römer (1644 – 1710): 200 000 000 m/s
- Armand Fizeau (1819 – 1896)
- Léon Foucalt (1819 – 1868): 315 000 000 m/s



- 1983: Definition: $c = 299\,792\,458$ m/s



James Clerk Maxwell (1831-1879)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

\mathbf{E} – Elektriskt fält

\mathbf{B} – Magnetisk flödestäthet

\mathbf{J} – Strömtäthet

ρ – Laddningstäthet

ϵ_0 – Vakuumpermittiviteten

μ_0 – Vakuumpermeabiliteten



Maxwells ekvationer i vakuum

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{array} \right.$$

Transversella "plana"
störningar längs x-axeln

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \end{array} \right.$$



Maxwells ekvationer i vakuum

Sammanfattning

- Vågekvationen gäller för de transversella elektriska och magnetiska fälten för en "plan" störning.

- Våglösningar finns
- Superpositionsprincipen gäller
- Vågornas hastighet är

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$$

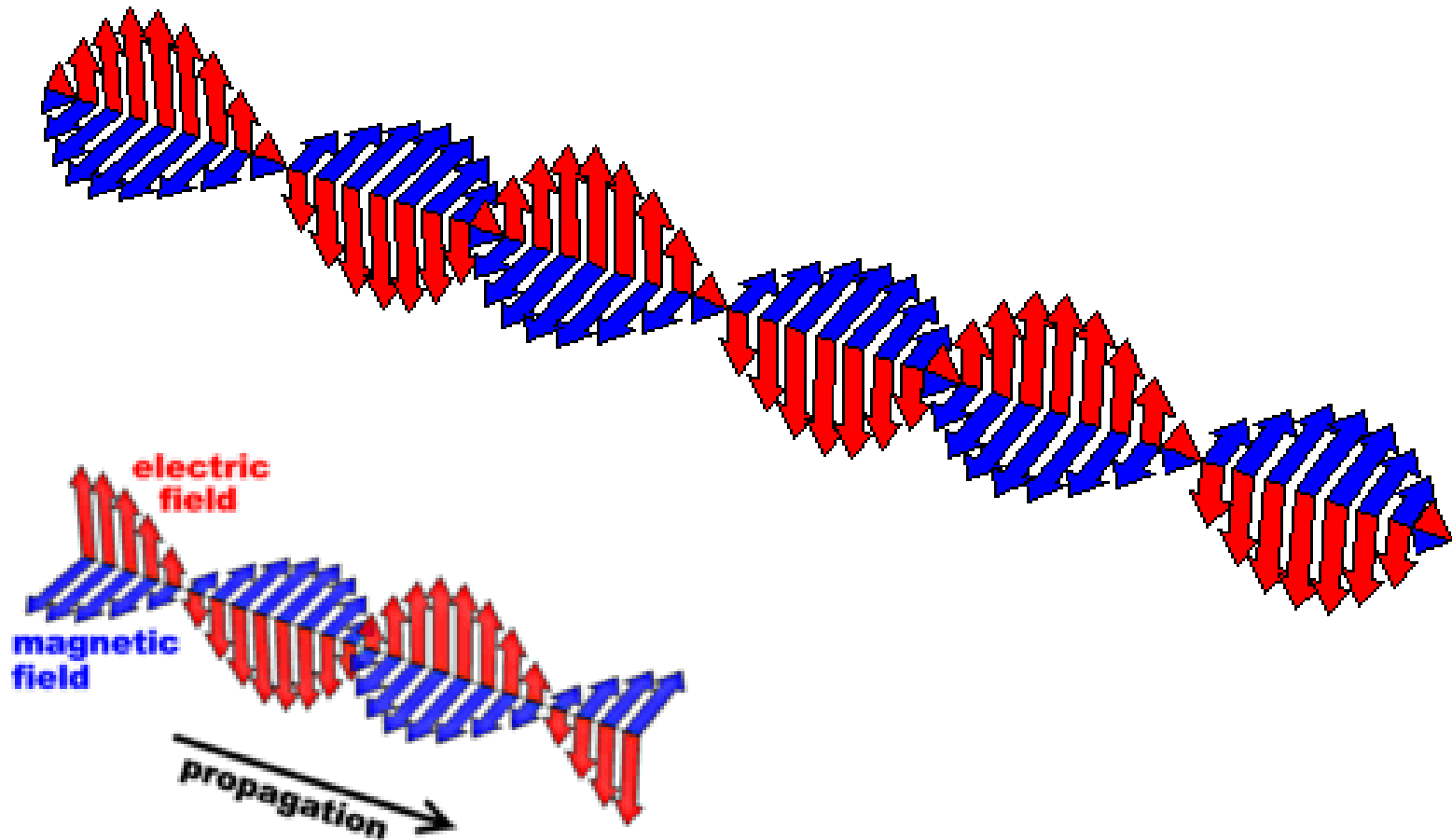
- Det elektriska och magnetiska fälten är vinkelräta mot varandra

- $B_z = \frac{E_y}{c}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \end{cases}$$

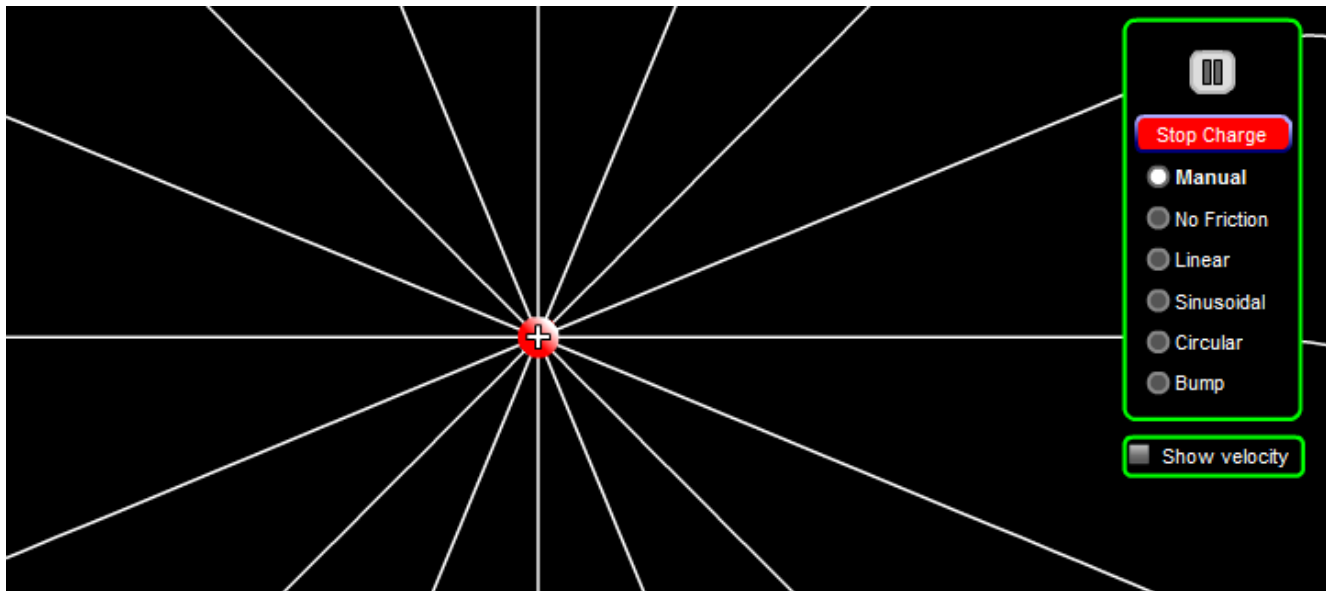


Hur ser en EM-våg ut?



Generering av EM-vågor

- *Elektromagnetiska vågor genereras när elektrisk laddning ändrar sin hastighet eller riktning.*
 - *Särskilt viktiga är elektronernas rörelse*



http://phet.colorado.edu/sims/radiating-charge/radiating-charge_en.html



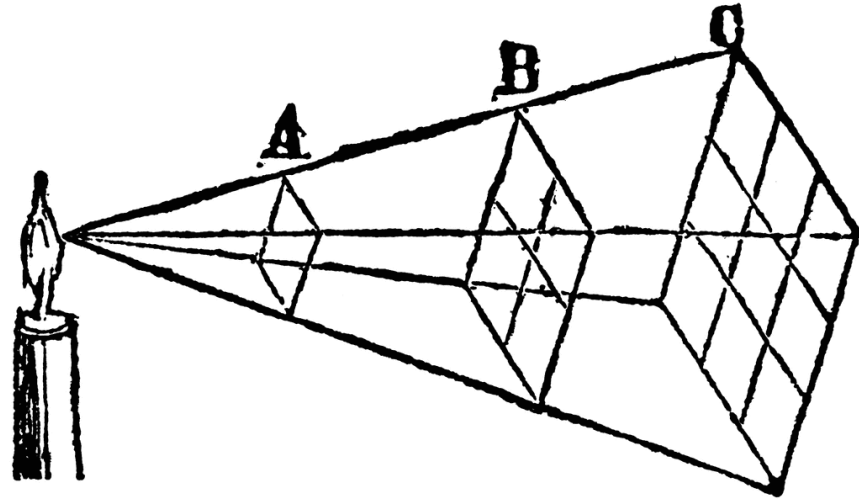
Effekt och intensitet

- Vågor bär på energi
- Effekt – Transporterad energi per tidsenhet

$$P = \frac{dE}{dt} \text{ [J/s = W]}$$

- Intensitet – Transporterad effekt per ytenhet

$$I = \frac{P}{A} \text{ [W/m}^2\text{]}$$



Intensitet för en elektromagnetisk våg

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0^2$$

eller förenklat $I = \text{konst} \cdot E_0^2$

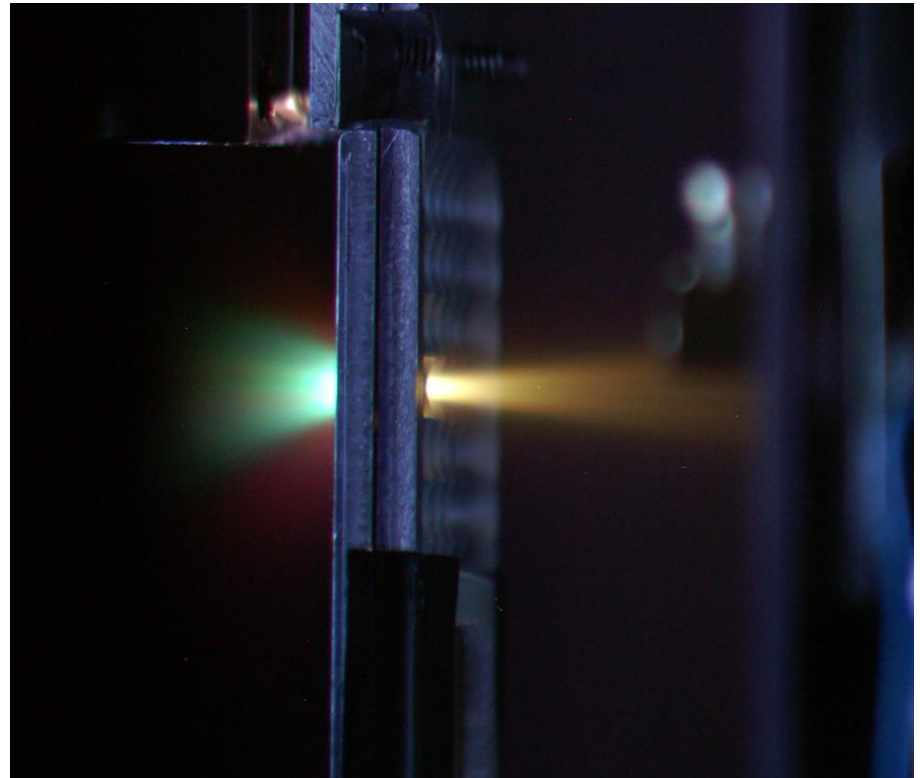


Exempel

Ljuset från en högeffektlaser fokuseras i vakuum med en konkav spegel. Energin hos ljuspulserna är 1,2 J och de varar i 30 fs ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$).

Vid ett experiment fokuseras laserpulserna till en tvärsnittsarea av $10 \mu\text{m}^2$.

Beräkna de maximala amplituderna hos de elektriska och magnetiska fälten.



Ljusets hastighet

Brytningsindex

I vakuum:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

I något material:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

ϵ_r = permittivitetstalet

μ_r = permeabilitetstalet ($\mu_r \approx 1$, för icke magnetiska material)

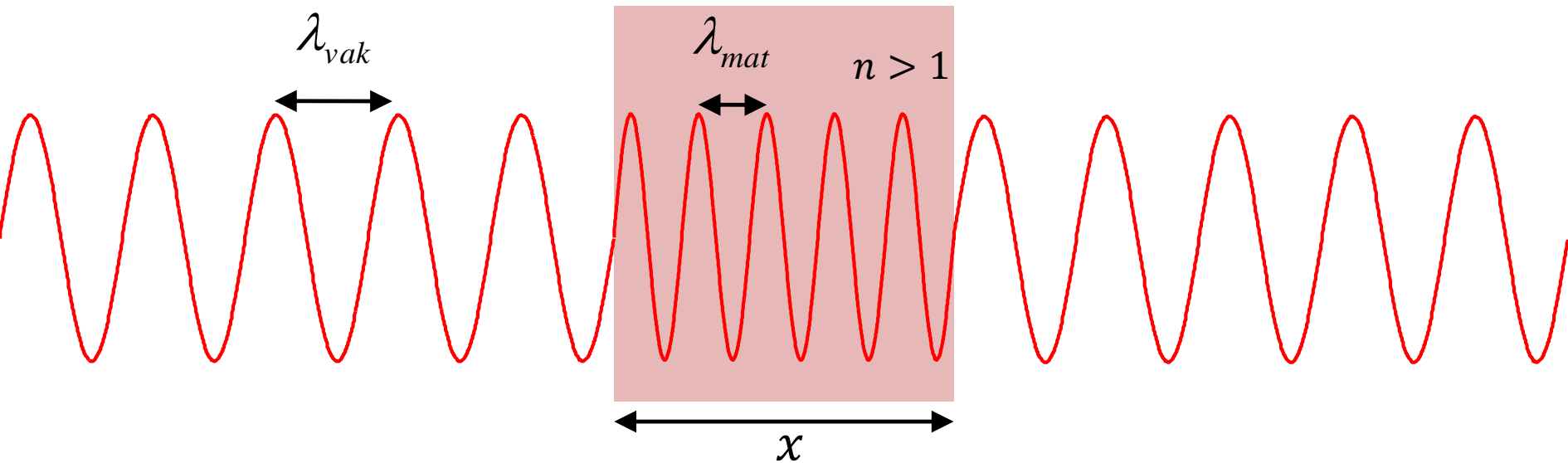
Brytningsindex:

$$n \equiv \frac{c}{v} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$



Optisk väglängd

- Sträcka i vakuum som ger samma fasskift som i ett material.



$$\frac{L}{\lambda_{vak}} = \frac{x}{\lambda_{mat}} \quad \rightarrow \quad \lambda_{vak}$$



Harmoniska svängningar

Sammanfattning

- Allmänna vågekvationen: $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$
- Harmonisk våg $s(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \alpha)$
 - Amplitud A
 - Vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
 - Vågta $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
 - Vågens hastighet $v = \frac{\omega}{k}$
 - Faskonstant α

Elektromagnetiska vågor:

- Utbredningshastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

- Intensitet $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E_0^2$

