1.

a.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+3+a^2)}{(s+1)(s+3)}$$

b. Alla, ty det karakteristiska polynomet

$$p_A(s) = \det(sI - A) = (s+1)(s+3)$$

beror inte på a.

c. Systemet är inte styrbart då styrsignalen inte kan påverka tillstånd nummer två. Obersverbart är det inte heller eftersom

$$\det W_c = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

När a är noll blir överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2}{s+1},$$

och den kunde lika gärna härstamma från en process med ett tillstånd. Det visar att vi tappat observerbarhet och/eller styrbarhet.

2.

a. Inga nollställen. En pol i -1 och två i -0.5. Tidsfördröjning 1 (i lämplig tidsenhet).

b. Antag att fasförskjutning är $-\pi$ vid frekvensen ω_0, det vill säga

$$\arg G(i\omega_0) = -\pi..$$

Alltså ges ω_0 av nollstället till

$$f(\omega) := -\omega - \arctan\omega - 2\arctan(2\omega) + \pi.$$

Genom att, till exempel, plotta f med miniräknaren kan man avläsa att $w_0 \approx 0.7$ rad/s. Amplitudmarginalen ges nu av

$$A_m = \frac{1}{|G(i\omega_0)|} \approx 1.8.$$

3.

a. Lämpligt val av tillstånd kan i det här fallet vara $x_1(t) = \theta(t)$ och $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Då kan systemet skrivas på följande tillståndsform:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= x_2(t) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x_2}(t) &= -\sin x_1(t) - x_2(t) = f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Jämviktspunkterna för systemet finnes sedan genom att sätta x^0. Första raden ger att $x_2^0 = 0$ medan andra raden ger $\sin x_1^0 = 0$, vilket har lösningen $x_1^0 = k\pi$ för $k = 0, 1, \ldots$. Jämviktspunkterna ges alltså av $x^0 = (k\pi, 0)$.

b. För linjäriseringen behöver vi de partiella derivatorna av f_1 och f_2, utvärderade i x^0:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x=x^0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x=x^0} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x=x^0} = -\cos k\pi = -(-1)^k \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x=x^0} = -1$$

Det linjäriserade systemet ges sedan av (där $\Delta x = x - x^0$):

$$\dot{\Delta x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^k & -1 \end{pmatrix} \Delta x(t)$$

Eftersom vi bara får två olika fall för olika k räcker det med att undersöka för $k = 0$ och $k = 1$.
$k = 0$: egenvärdena för A ges då av

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s + 1 = 0 \tag{1}$$

Lösningen till ekvationen ger egenvärdena $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, som båda ligger i VHP. Det linjäriserade systemet är alltså asymptotiskt stabilt.
$k = 1$: på samma sätt som ovan, men nu blir karaktäristiska ekvationen $s^2 + s - 1$. Rötterna till denna ges av $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Den ena polen ligger i HHP, och det linjäriserade systemet är därmed instabilt.

c. Att $x_2^0 = 0$ betyder att pendelns saknar vinkelhastighet vid jämviktspunkterna. $x_1^0 = k\pi$ innebär att jämviktsvinklarna är 0 eller multiplar av π. Jämviktspunkterna motsvaras alltså av att pendeln hänger rakt ner ($k = 0, 2, 4, \dots$) eller står rakt upp ($k = 1, 3, 5, \dots$). Stabilitetsanalysen i föregående deluppgift säger att jämviktspunkten där pendeln hänger rakt ner är asymptotiskt stabilt, medan läget där pendeln står rakt upp är instabilt (vilket kanske var väntat...?).

4. Från blockschemat får vi sambandet

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_P(s)(G_D(s)D(s) + G_R(s) \cdot -1Y(s)) \\ (1 + G_P(s)G_R(s))Y(s) &= G_P(s)G_D(s)D(s) \\ Y(s) &= \frac{G_P(s)G_D(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} D(s) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen blir då

$$G_{dy}(s) = \frac{G_P(s)G_D(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

5.

a. För impulssvar gäller att $u(t) = \delta(t)$ (Diracspik). Då har vi

$$U(s) = 1$$
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

Begynnelsevärde:

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s)$$

Slutvärde:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

Alla överföringsfunktionerna har stabila poler, därmed kan vi använda slut- och begynnelsevärdesteoremen.

	$y(0)$	$\lim_{t\to\infty} y(t)$
$G_1(s)$	1	0
$G_2(s)$	3	0
$G_3(s)$	0	0
$G_4(s)$	0	0
$G_5(s)$	0	1
$G_6(s)$	0	1

Båda impulssvaren i figuren har begynnelsevärde 0 och slutvärde 0. De måste därmed motsvara $G_3(s)$ och $G_4(s)$. Polerna för $G_3(s)$ ligger i $s = -1$, polerna för $G_4(s)$ ligger i $s = -3$.

$G_4(s)$ är därför ett snabbare system, vilket motsvarar impulssvaret för sockerdricka. $G_3(s)$ är långsammare, och motsvarar impulssvaret för fullkornspasta.

b. Normalt äter man en viss mängd mat på en relativt kort tid och låter sedan bli att äta under en längre period. Man kan därmed modellera matintaget som en impuls, något som sker momentant jämfört med tiden det tar för kroppen att ta upp näringen i maten.

Ett stegsvar i matintag hade motsvarat att man åt kontinuerligt under en längre tid, näringstillförsel med dropp kan beskrivas med ett stegsvar.

6.

a. Processen ges av

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

och regulatorn av

$$u = -Lx + l_r r$$

Det slutna systemet blir

$$\dot{x} = Ax + B(-Lx + lr_r r) = (A - BL)x + Bl_r r$$
$$y = Cx$$

och det slutna systemets överföringsfunktion från r till y ges av

$$\begin{aligned}
G_{ry}(s) &= C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 9 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{9}{s^2 + 6s + 9}
\end{aligned}$$

Det slutna systemets poler ges av

$$\begin{aligned}
&s^2 + 6s + 9 = 0 \\
&s = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3
\end{aligned}$$

dvs en dubbelpol i $s = -3$. Det slutna systemets statiska förstärkning blir

$$G_{ry}(0) = 1$$

b. Man kan använda ett Kalmanfilter tillsammans med tillståndsåterkopplingen för att skatta x_1 från mätningen av x_2.

Ett annat alternativ är att styra vattennivån i den undre dammen med en PID-regulator.

7.

a. Den fasretarderande kompenseringslänken ges av

$$G_k(s) = \frac{s+a}{s+a/M}, \quad M > 1$$

Utan kompenseringslänken ges reglerfelet, $E(s)$, av överföringsfunktionen $E(s) = \frac{1}{1+G_p(s)}$. Eftersom samtliga poler till $sE(s)$ ligger i vänster halvplan kan slutvärdesteoremet användas.

Då insignalen är ett steg ges således det stationära felet av

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 + 4s + 10}{s^2 + 4s + 20} = \frac{1}{2}.$$

Med den fasretarderande länken beskrivs reglerfelet istället av $E(s) = \frac{1}{1+G_k(s)G_p(s)}$. Det stationära felet ges av

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \frac{s+a}{s+a/M}\frac{10}{s^2+4s+10}} = \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s^3 + (a/M + 4)s^2 + (4a/M + 10)s + 10a/M}{s^3 + (a/M + 4)s^2 + (4a/M + 20)s + 10a/M + 10a} \\
&= \frac{10a/M}{10a/M + 10a} = \frac{1}{1+M}
\end{aligned}$$

Det stationära felet skall minskas med en faktor 10. Således skall M väljas som

$$\frac{1}{1+M} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow M \geq 19.$$

Återstår då att välja brytfrekvensen a hos kompenseringlänken. Enligt specifikationen får fasmarginalen minska med högst 6° varför a enligt tumreglen i formelsamlingen skall väljas som $a = 0.1\omega_c$. Brytfrekvensen ω_c beräknas som

$$\begin{aligned}
|G(i\omega_c)| &= \frac{10}{\sqrt{(10-\omega_c^2)^2 + 16\omega_c}} = 1 \Rightarrow \\
100 &= (10-\omega_c^2)^2 + 16\omega_c \Leftrightarrow \omega_c^4 - 4\omega_c^2 \Leftrightarrow \omega_c^2(\omega_c^2 - 4) \\
\omega_c &= 2 \text{ rad/s}.
\end{aligned}$$

a skall således väljas till 0.2 och den fasretarderande länken ges av

$$G_k(s) = \frac{s+0.2}{s+0.2/19}$$

b. Fasförlusten vid skärfrekvensen, ω_c, ges av

$$\arg G_k(i\omega_c) = \arctan(\frac{\omega_c}{a}) - \arctan(\frac{\omega_c M}{a}) \tag{2}$$

Sätt $a = x\omega_c$

$$\arctan(\frac{1}{x}) - \arctan(\frac{M}{x}) > \arctan(\frac{1}{x}) - 90° \geq -2° \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\arctan(\frac{1}{x}) &\geq 88° \\
\frac{1}{x} &\geq \tan(88°) \\
x &\leq \frac{1}{\tan(88°)} \approx 0.035
\end{aligned} \tag{4}$$

Den nya tumreglen, som garanterar att man som högst tappar 2° i fasmarginal, är $a = 0.035\omega_c$.