1.

a. Stationär förstärkning ges av $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = 1/4$, (systemet är stabilt så slutvärdesteoremet kan användas), polen ges av $s = -4$ och tidskonstanten är $T = 1/4$.

b.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+4}\frac{1}{s}$$

Tabell för invers Laplace transform i formelsamlingen ger

$$y(t) = 0.25(1 - e^{-4t})$$

c. Slutna loopen ges av

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}R(s) = \frac{K}{s+4+K}R(s)$$

d. Mätbrus får större påverkan på styrsignal och utsignal och kan förstöra regleringen och tex öka slitaget på motorn. Omodellerad dynamik kan påverka regleringen och göra slutna systemet instabilt.

2.

a. Systemets poler ges av egenvärdena till A. Eftersom denna är triangulär ges egenvärdena av diagonalemelementen ochär därför -3 och -7. Eftersom dessa ligger i vänster halvplan är systemet stabilt.

b. Styrbart då styrbarhetsmatrisen $[B\ AB] = \begin{bmatrix} \alpha & -3\alpha+1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ är inverterbar. Determinanten är $-7\alpha + 3\alpha - 1$, vilket ger villkoret $\alpha \neq -1/4$.

c. Karakteristiska polynomet ges av $\det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ l_1 & s+7+l_2 \end{bmatrix} =$ $(s+3)(s+7+l_2)+l_1 = s^2+10s+l_2s+3l_2+l_1+21$ Vilket ger $l_1 = 79, l_2 = 0$. Stationär förstärkning ges av $l_r \cdot C(-A+BL)^{-1}B = l_r[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 79 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$ $l_r[1\ \ 1]\frac{1}{100}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -79 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = l_r/25 = 1$, vilket ger $l_r = 25$.

3.

a. Inför beteckningen $f(x,u) = c\left(1 - \frac{x^2}{k}\right) + u$. Således kan modellen skrivas

$$\dot{x} = f(x,u)$$

Då funktionen $f(x,u)$ innehåller en kvadratisk term är modellen inte linjär.

b. De stationära punkterna (x^o, u^o) fås av ekvationen $f(x^o, u^o) = 0$. Detta ger de stationära punkterna

$$\left(\sqrt{\frac{(c+u^o)k}{c}}, u^o\right) \quad \text{och} \quad \left(-\sqrt{\frac{(c+u^o)k}{c}}, u^o\right)$$

De partiella derivatorna av $f(x,u)$ med avseende på x respektive u ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2c}{k}x \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 1$$

Låt $\Delta x = x - x^o$ och $\Delta u = u - u^o$. Det linjäriserade systemet kring den stationära punkten $\left(\sqrt{\frac{(c+u^o)k}{c}}, u^o\right)$ ges då av

$$\dot{\Delta x} = -\frac{2c}{k}\sqrt{\frac{(c+u^o)k}{c}}\Delta x + \Delta u = -2\sqrt{\frac{c(c+u^o)}{k}}\Delta x + \Delta u$$

4.

a.

$$1 = |G_0(i\omega_c)| = \frac{k}{\omega_c} \Longrightarrow \omega_c = k$$

b.

$$\arg G_0(i\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \omega_c\tau$$

Vi vill ha $\phi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c) = \pi/4$ vilket ger $\arg G_0(i\omega_c) = -3\pi/4$. Av ovanstående får vi $\omega_c\tau = \frac{\pi}{4}$ vilket ger $\omega_c = \frac{\pi}{4\tau}$, dvs

$$k = \frac{\pi}{4\tau}$$

5.

a. Vi får

$$Y = \frac{CP}{1+CP}R = \frac{\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}}{1+\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}}\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

b. Förkortningen av faktorn $(s-1)$ innebär att den slutna loopen är internt instabil. Detta syns inte i utsignalen $y(t)$ men syns om man tex beräknar insignalen $u(t)$. Vi får att

$$U(s) = \frac{C}{1+CP}R = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}}\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{0.5}{s-1} - \frac{0.5}{s+1}$$

vilket ger att

$$u(t) = 0.5e^{t} - 0.5e^{-t}$$

varav syns att styrsignalen blir obegränsat stor. I praktiken kommer styrsignalen vara begränsad och mätta efter ett tag, och regleringen fungerar då inte längre.

6.

a. Förenklade Nyquist-kriteriet säger: *Om kretsöverföringsfunktionen G_0 är stabil kommer slutna systemet man får när man återkopplar med -1 bli stabilt om Nyquistkurvan för G_0 ej omsluter -1.*

I uppgiften är $G_0 = KG$ där G ges av figuren. Kretsöverföringens Nyquistkurva, dvs för KG, kommer se likadan ut, fast skalad med faktorn K. För tillräckligt små K kommer Nyquistkurvan inte längre omsluta -1. Eftersom Nyquistkurvan för $G_0 = KG$ skär negativa reella axeln i punkten $-1.5K$ måste vi för stabilitet ha $-1 < -1.5K$ vilket ger $K < 2/3$.

b. Ska vi ha en faktor 2 som marginal måste vi välja $K = 1/3$.

7. Det finns flera sätt att lösa uppgiften. Enklast är kanske att studera derivatan vid $t = 0$. Eftersom $u = 1$ och $x(0) = 0$ har vi från ekvationerna att $\dot{x}_1(0) = -x_1(0) + 3x_2(0) = 0$ och $\dot{x}_2(0) = -2.5x_2(0) + 1 = 1$, och därför skall vi ha $\dot{y}(0) = \dot{x}_1(0) - 2\dot{x}_2(0) = -2$. Av figuren ser vi då att $A = x_2$, $B = y$ och $C = x_1$.

Annan information man kan utnyttja i stället är slutvärdet när $t \to \infty$ för $x(t)$ och $y(t)$, samt relationen $y(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$ för någon tid t, tex $t = 1.5$.

8.

a. Med tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} T_v \\ T_i \end{bmatrix}$ kan ekvationerna skrivas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 T_y, \\ T_i &= Cx \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Laplacetransform ger

$$\begin{aligned} T_i &= C(sI - A)^{-1}(B_1 U + B_2 T_y) \\ &= [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_y \right) \\ &= [0 \ \ 1] \frac{1}{(s+2)(s+1) - 1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_y \right) \\ &= \frac{s+2}{s^2 + 3s + 1} U + \frac{1}{s^2 + 3s + 1} T_y \end{aligned}$$

b. Man kan använda $G_{FF}(s) = -\frac{1}{s+2}$ vilket helt eliminerar inverkan av T_y. Lägg märke till att $G_{FF}(s)$ har lägre gradtal i täljaren än i nämnaren (dvs är ”proper”) och därför är praktiskt realiserbar.

c. Windup innebär att I-delen har integrerats upp till ett stor värde under sommaren pga reglerfelet. Under hösten kommer det bli för kallt i huset i ett par månader, tills regulatorns ”regler-skuld” är betald och I-delen tillbaks på lämpligt värde igen. Lösningen på problemet är att stänga av uppdateringen av I-delen då elementen är avstängda (eller går på maxeffekt, eftersom det omvända problemet annars kan uppstå efter en kall vinter).

9. Av Bode-diagrammet läser vi av $\phi_m \approx \pi/3$ vid $\omega_c \approx 0.48$. Detta ger tidsfördröjningsmarginalen $L_m = \phi_m/\omega_c \approx 2.2$ sekunder.