LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 23 augusti 2011 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås onsdagen den 31 augusti på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida. Visning samma dag kl 12.00–12.30 i labbet på första våningen.

1. En roterande robotarm kan beskrivas av den lineära differentialekvationen

$$m\ddot{q}(t) + d\dot{q}(t) + gq(t) = \tau(t) \ ,$$

där m, d och g är parametrar, $q(t)$ är ledvinkeln och $\tau(t)$ är vridmomentet på leden. Låt insignalen $u = \tau$ och utsignalen $y = q$. Antag även att parametern $m = 1$.

a. Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från insignal till utsignal. (1 p)

b. Inför lämpliga tillstånd och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

c. Beräkna systemets poler. (1 p)

Solution

a. Låt $y(t) = q(t)$ samt $u(t) = \tau(t)$. Laplacetransformering av differentialekvationen ger

$$U(s) = s^2Y(s) + dsY(s) + gY(s) = (s^2 + ds + g)Y(s) \ ,$$

varför överföringsfunktionen $G(s)$ kan skrivas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + ds + g} \ .$$

b. Då systemet är av andra ordningen krävs två tillstånd för att realisera systemet på tillståndsform. Inför således tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$. Med dessa tillstånd fås

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = u - d\dot{y} - gy = u - dx_2 - gx_1 \ . \end{aligned}$$

Med tillståndsvektorn $x = [\,x_1 \quad x_2\,]^T$ kan systemet skrivas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y &= [\,1 \quad 0\,]\, x = Cx \ . \end{aligned}$$

c. Polerna till systemet beräknas antingen som egenvärdena till systemmatrisen A i tillståndsbeskrivningen eller som rötterna till nämnarpolynomet i överföringsfunktionen. Båda angreppsätten ger ekvationen

$$s^2 + ds + g = 0 \ ,$$

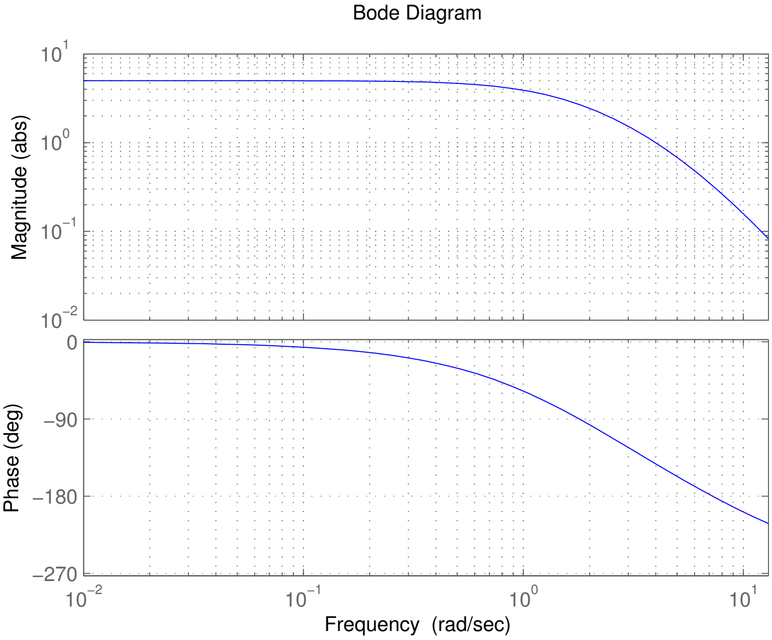
vilken har lösningarna

$$s_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - g} \ .$$

2. Med hjälp av systemidentifiering har överföringsfunktionen $G(s)$ för en process bestämts. Överföringsfunktionen kan skrivas

$$G_P(s) = \frac{5}{(1+0.1s)(1+0.3s)(1+0.7s)} \ .$$

Systemet återkopplas med en enkel P-regulator med överföringsfunktion $G_R(s) = K$. Bodediagrammet för $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$ i fallet $K = 1$ kan ses i Figur 1.



Figur 1 Bodediagram för kretsöverföringsfunktionen $G_0(s)$ i uppgift 2.

a. Hur mycket kan P-regulatorns förstärkning K öka utan att systemet blir instabilt? (1 p)

b. Vad är systemets fasmarginal i fallet då P-regulatorns förstärkning är $K = 1$? (1 p)

Solution

a. Hur mycket förstärkningen i regulatorn kan öka med bibehållen stabilitet bestäms av amplitudmarginalen för kretsöverföringsfunktionen $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$. Amplitudmarginalen A_m bestäms genom avläsning i Bodediagrammet vid den frekvens ω_0 där $\arg G_0(i\omega_0) = -180°$, det vill säga i det här fallet då $\omega_0 = 7.24$ rad/s. Avläsning i Bodediagrammet ger $|G_0(i\omega_0)| = 0.33$, varför

$$A_m = \frac{1}{0.33} \approx 3.0 \ .$$

b. Fasmarginalen φ_m läses av i fasdiagrammet vid den frekvens ω_c där $|G(i\omega_c)| = 1$, det vill säga i det här fallet då $\omega_c = 4.0$ rad/s. Avläsning ger

$$\varphi_m = 37.7^\circ \ .$$

3. En vattentank med dynamik liknande den i den undre tanken i Lab 1 och 2 har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$$

från insignal till utsignal.

a. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (1 p)

b. Vid ett tillfälle appliceras insignalen $u(t) = 2\sin(t)$ på systemet. Bestäm utsignalen efter det att transienten har avklingat. (1 p)

c. Vad är systemets statiska förstärkning? (1 p)

Solution

a. Stabiliteten avgörs genom att beräkna polernas placering i det komplexa talplanet. För det aktuella systemet fås polerna direkt som lösningen till ekvationen

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \ ,$$

vilken har lösningarna

$$s_1 = -2 \text{ och } s_2 = -3 \ .$$

Då polerna är lokaliserade strikt i vänster halvplan i det komplexa talplanet följer att systemet är asymptotiskt stabilt.

b. Då insignalen är en sinussignal med frekvensen $\omega = 1$ rad/s kommer utsignalen $y(t)$ också att vara en sinussignal med samma frekvens som insignalen, dock med förändrad amplitud och fas, efter det att transienten har avklingat. Utsignalen kan skrivas

$$y(t) = 2|G(i\omega)|\sin(t + \arg G(i\omega)) \ .$$

Värdena på $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ beräknas ur överföringsfunktionen $G(s)$ för $\omega = 1$ rad/s. En faktoriseringen av täljaren i $G(s)$ ger

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2}{(s+2)(s+3)} \ .$$

För absolutbeloppet gäller att

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{2}{(i\omega + 2)(i\omega + 3)} \right| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 2^2}\sqrt{\omega^2 + 3^2}}$$
$$\implies |G(i)| = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{50}} \approx 0.28 \ .$$

Vidare gäller för argumentet

$$\arg G(i\omega) = \arg \frac{2}{(i\omega+2)(i\omega+3)} = -\arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{\omega}{3}$$
$$\Longrightarrow \arg G(i) = -\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} \approx -0.79\ .$$

Således fås slutligen utsignalen

$$y(t) = 0.57\sin(t - 0.79)\ .$$

c. Den statiska förstärkningen ges av $G(0) = \frac{1}{3}$.

4. Betrakta systemet

$$G_P = \frac{1}{s(2s+1)}$$

a. Återkoppla systemet med en konstant regulator $G_r(s) = K$ så att systemet får en fasmarginal på 25°. (2 p)

b. Kommer det återkopplade systemet ha ett stationärt fel på utgången om referenssignalen antas vara ett enhetssteg. Ange i så fall hur stort felet är? (2 p)

Solution

a. $arg(KG_P(i\omega_c)) = -90° - arctan(2\omega_c) = -(180-25) \Rightarrow \omega_c = 1,072 rad/s$

$|G_r G_P(i\omega_c)| = \frac{K}{\omega_c\sqrt{1+4\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow K = 2,54$

b. Det stationära felet för systemet blir

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1+G_P(s)G_r(s)}R(s) = \frac{s(2s+1)}{s(2s+1)+K}R(s)$$

där $R(s)$ är insignalen och $E(s)$ är felet. Slutvärdesteoremet ger då:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s(2s+1)}{s(2s+1)+K} = 0$$

Det går också att se svaret utan uträkningar då systemet har en pol i origo.

5. Bestäm överföringsfunktionen för det system vars Bodediagram visas i figur 2. (2 p)

Solution

Bodediagramets amplitudkurva har en lågfrekvensasymptot med lutningen -1 varför vi kan sluta oss till att systemet innehåller en intgrator. Vidare ser vi att systemet har en brytfrekvens vid $\omega_1 = 0.4$rad/s där amplitudkurvan byter upp till lutning 0. Amplitudkurvan bryter slutligen ned, med lutning -2, vid $\omega_2 = 10$rad/s. Det sökta systemet är således

$$G(s) = K\frac{s/0.4+1}{s(s/10+1)^2} \tag{1}$$

För att bestämma K tittar vi på en punkt på systemets lågfrekvensasymptot där

$$|G(i\omega)| \approx \frac{K}{\omega}. \tag{2}$$

för $\omega = 0.1$ rad/s är $|G(i0.1)| = 20 = \frac{K}{0.1}$. Således är $K = 2$.

6. En process $G_P(s)$ regleras med en PI-regulator $G_R(s)$ med parametrar $K = 1$ och $T_i = 1$, se blockschemat i Figur 3. Överföringsfunktionen för processen har bestämts till

$$G_P(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \ .$$

En störning v påverkar också insignalen till processen.

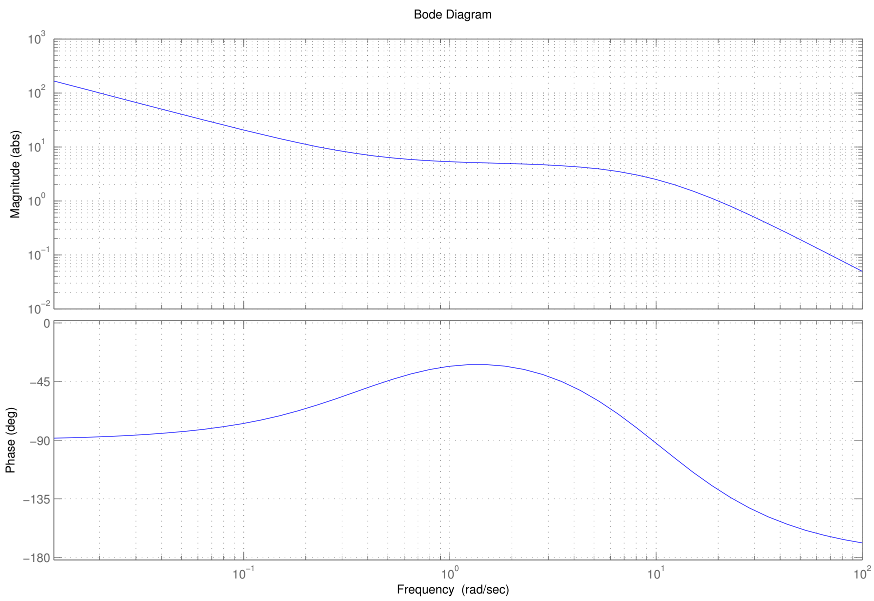
a. Låt $G_f(s) = 0$. Störningen v utgörs under lång tid av en sinussignal med amplitud 3 och vinkelfrekvens $\omega_0 = 2$ rad/s, det vill säga

$$v(t) = 3\sin(2t) \ .$$

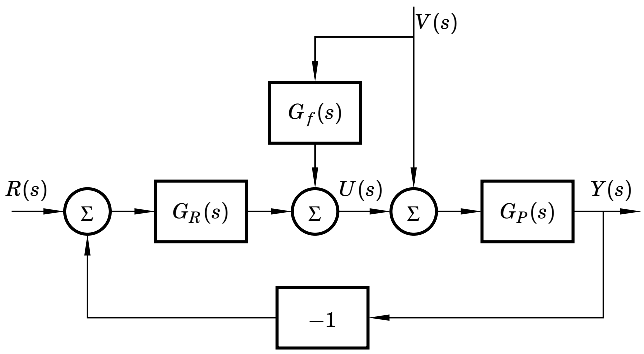
Vad blir störningens bidrag till utsignalen efter att transienterna har avklingat? (2 p)

b. Antag att störningen v är mätbar. Bestäm överföringsfunktionen för $G_f(s)$ sådan att störningens inverkan på utsignalen elimineras. Vad kallas denna teknik för att eliminera mätbara störningar? Gör en intuitiv tolkning av ditt resultat. (2 p)

Solution



Figur 2 Bodediagram för systemet i uppgift 5.



Figur 3 Blockschema för systemet i uppgift 6.

a. Då insignalen är en sinussignal med en konstant vinkelfrekvens är det känt att även utsignalen kommer att vara en sinussignal, dock med förändrad amplitud och fasförskjutning. Förändringen definieras av överföringsfunktionen från v till y. Således måste denna beräknas. Då regulatorn är en PI-regulator följer att överföringsfunktionen $G_R(s)$ kan skrivas

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} \ .$$

Från blockschemat fås sedan direkt

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_P(s)[V(s) + G_R(s)(R(s) - Y(s))] \\ \Longleftrightarrow Y(s) &= \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} V(s) + \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} R(s) \end{aligned}$$

Faktorisera processens överföringsfunktion enligt

$$G_P(s) = \frac{s+4}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s+4}{(s+3)(s+1)} \ .$$

Överföringsfunktionen från v till y blir således

$$G_{vy} = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{s+4}{(s+3)(s+1)}}{1 + \frac{s+4}{(s+3)(s+1)}\frac{s+1}{s}} = \frac{s(s+4)}{(s+1)(s+2)^2} \ .$$

Effekten på utsignalen kan nu beräknas

$$y(t) = 3|G_{vy}(i2)| \sin(2t + \arg G_{vy}(i2)) \ ,$$

där

$$\begin{aligned} |G_{vy}(i2)| &= \left|\frac{i2(i2+4)}{(i2+1)(i2+2)^2}\right| = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}(\sqrt{8})^2)} = \frac{1}{2} \\ \arg G_{vy}(i2) &= \arg \frac{i2(i2+4)}{(i2+1)(i2+2)^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{2} - \arctan 2 - 2\arctan 1 \approx -0.644 \ . \end{aligned}$$

Således fås bidraget från störningen på utsignalen enligt

$$y(t) = \frac{3}{2}\sin(2t - 0.644) \ .$$

b. Överföringsfunktionen $G_f(s)$ bestäms nu så att effekten av störningen i utsignalen elimineras. Denna teknik kallas framkoppling. Från blockschemat följer att följande samband gäller

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_P(s)[V(s) + G_f(s)V(s) + G_R(s)(R(s) - Y(s))] \\ &\Longleftrightarrow \\ Y(s) &= G_P(s)[1 + G_f(s)]V(s) + G_P(s)G_R(s)[R(s) - Y(s)] \ . \end{aligned}$$

Med valet $G_f(s) = -1$ inses att störningens effekt på utsignalen elimineras. Detta är intuitivt om blockschemat studeras, eftersom störningen kan elimineras genom att addera just störningens aktuella mätvärde till insignalen för processen.

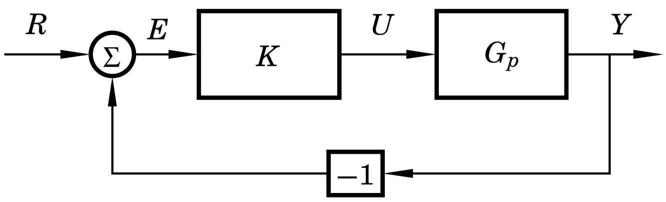
7. En process har överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{2}{s+1}e^{-sL}$$

och ska regleras med en proportionalregulator med förstärkningen K enligt figur 4. Bestäm för vilka K det slutna systemet är stabilt för *alla* tidsfördröjningar L. (2 p)

Solution

Eftersom det slutna systemet ska vara stabilt för *alla* $L > 0$ så kan fasen bli -180^o för godtyckligt låg frekvens. Eftersom amplituden av processen är avtagande med frekvensen så måste alltså lågfrekvensförstärkningen vara < 1. Detta ger $K < 0.5$ (strikt olikhet).



Figur 4 Reglerkrets - Problem 7.

8. Mängden pengar x på ett bankkonto, som från början innehåller 1000 kr, kan modelleras av

$$\dot{x} = rx + u, \quad x(0) = 1000$$

där $r > 0$ är den kontinuerliga effektiva räntan och u är insättningstakten (uttag från kontot motsvaras av att $u < 0$).

a. Antag att kontohavaren låter $u = Kx$. Bestäm för vilka K som mängden pengar på kontot:

1. växer obegränsat
2. håller sig konstant

(2 p)

b. Antag att de pengar som tas ut från kontot läggs i en madrass (som inte ger någon ränta). Låt mängden pengar i madrassen betecknas av z och ställ upp en differentialekvation som visar hur z beror på x. (1 p)

c. Antag att $K = -r$ och inför tillståndsvektorn $\begin{pmatrix} x & z \end{pmatrix}^T$. Redogör för det slutna systemets stabilitet och ge en tolkning av vad detta innebär för pengamängderna. (2 p)

Solution

a. $\dot{x} = rx + u = rx + Kx = (r + K)x$. x växer obegränsat (systemet är instabilt) om $r + K > 0$, dvs $K > -r$.

x blir konstant om $\dot{x} = 0 \Rightarrow r + K = 0$, dvs $K = -r$.

b. $\dot{z} = -u = -Kx$

c.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

Karakteristiskt polynom är s^2 vilket ger två poler i $s = 0$. Dubbelpol på imaginära axeln ger att systemet är instabilt. Eftersom mängden pengar på kontot är konstant så måste detta innebära att mängden pengar i madrassen växer obegränsat. (Det kan ju låta bra, men vi har inte tagit hänsyn till inflationen...)