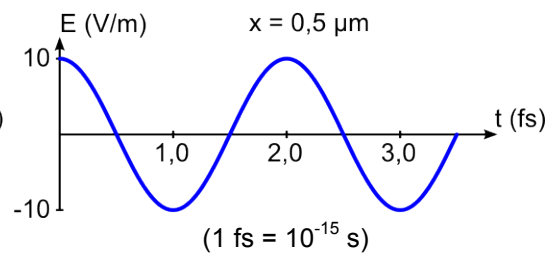
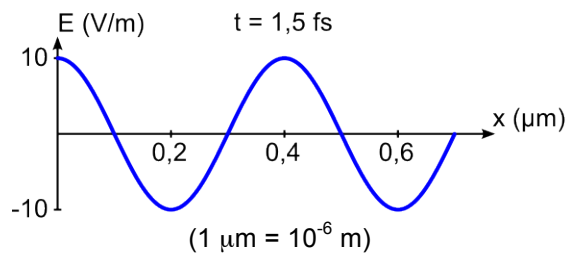


Tentamen i Fotonik - 2015-03-20, kl. 14.00-19.15

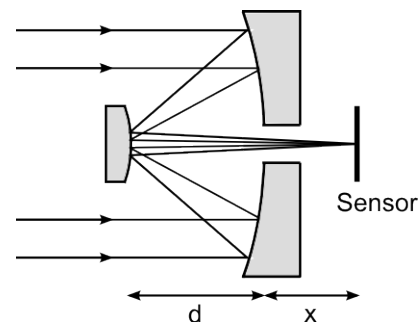
FAFF25 - Fysik för C och D, Delkurs i Fotonik

- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare, godkänd formelsamling (t ex TeFyMa), utdelat formelblad.
- **OBS! Mobiltelefon** får ej finnas i fickan eller framme på bordet!
- Börja varje ny uppgift på ett nytt blad och skriv bara på en sida av pappret.
- Skriv namn på varje blad och numrera sidorna i övre högra hörnet.
- Lösningarna ska vara renskrivna och väl motiverade. Uppgifter utan svar ger inte full poäng!
- Varje korrekt löst uppgift ger 3 poäng efter en helhetsbedömning. För godkänt krävs minst 12 poäng.
- Skrivtiden har utökats med 15 minuter för att ge möjlighet att fylla i kursutvärderingen.

- Diagrammen visar svängningen hos det elektriska fältet i en elektromagnetisk våg som utbreder sig i ett material. Bestäm med hjälp av diagrammen:
 - Ljusets frekvens.
 - Ljusets våglängd i materialet.
 - Ljusets fart i materialet.
 - Materialets brytningsindex.
 - Ljusets våglängd i vakuum.
 - Ljusets intensitet i materialet. Du kan anta att materialet är omagnetiskt (dvs $\mu_r \approx 1$).



- Ett spegelteleobjektiv består av en konkav och en konvex spegel. För att förhindra att damm kommer in i objektivet brukar den lilla spegeln klistras fast på insidan av en glasplatta. Figuren visar principen för ett spegelteleobjektiv. Den vänstra spegelns krökningsradie har absolutbeloppet 400 mm och den högra 800 mm. Avståndet mellan speglarna är 280 mm. Beräkna var bildsensorn ska placeras (i förhållande till den högra spegelns origopunkt) då ett avlägset föremål ska avbildas.



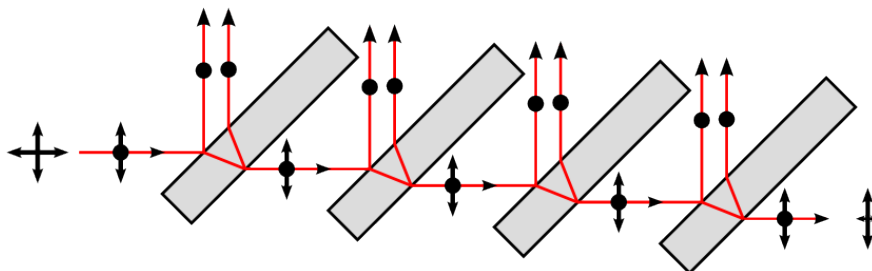
- Diskussionsuppgift.*

Förklara varför ljuset från en blå lysdiod med effekten 1 mW kan exponera den kiselbaserade bildsensorn i en mobilkamera medan en radiosändare som sänder på 99 MHz med effekten 50 kW inte klarar av det. Bandgapet i kisel är 1,11 eV.

4. För att skydda kameranlinsen i mobiltelefoner placerar man ibland en platta av safir framför linsen. Safir är nämligen hårt och beständigt mot repor samtidigt som ljus kan transmittas utan absorption. För att minska reflektionsförluster vill man antireflexbehandla ytorna på safirplattan med magnesiumfluorid (MgF_2). Safir har brytningsindex 1,770 och MgF_2 har brytningsindex 1,378. Ljuset infaller normalt mot ytan.
- Hur stor del av det infallande ljuset når kameranlinsen utan antireflexbehandling?
 - Vad är den minsta tjockleken skiktet med MgF_2 måste ha? Gör beräkningen för en våglängd mitt i det synliga området.
5. En optisk fiber ska användas för långdistanskommunikation. Fibern har brytningsindex $n_k=1,44813$ och $n_m=1,44399$ i kärnan respektive manteln. Kärnans diameter är $d_k=17,0\text{ }\mu\text{m}$ och fiberns dämpningskoefficient är $\alpha=0,5\text{ dB/km}$.
- Ljuset från en diodlaser med våglängden 1550 nm ska kopplas in i fibern. Den parallella laserstrålen har diametern $2,0\text{ mm}$. Du har funnit tre linser med brännvidderna 27 mm , 9 mm och 3 mm . Vilken lins väljer du för att koppla in ljuset i fibern med minimala förluster? *Ledning:* I ditt val av lins bör du ta hänsyn både till numerisk apertur och böjning.
 - Lasern avger effekten $10,0\text{ mW}$. På andra sidan fibern sitter en mottagare som kräver minst $0,10\text{ mW}$. Vad är fiberns maximala längd? Du kan bortse från reflektioner både i linsen och i fibern.

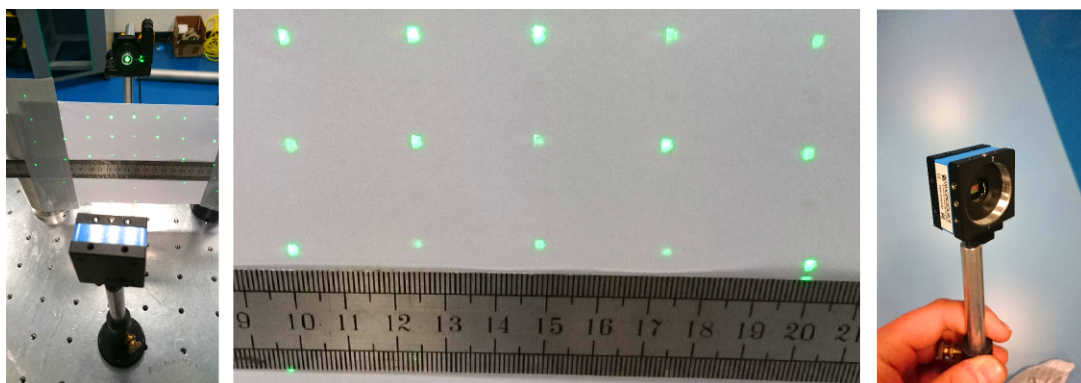


6. Opolariserat ljus infaller i luft mot en glasplatta med brytningsindex 1,54.
- För vilken infallsvinkel blir reflexen fullständigt polariserad?
 - Hur stor andel av ljuset reflekteras i den första ytan då ljuset infaller i denna vinkel?
 - N stycken glasplattor placeras efter varandra. Hur många plattor behövs för att minst 99% av det transmitterade ljuset ska vara polariserat i samma riktning ($I_{pol}/I_{trans} = 0,99$)?

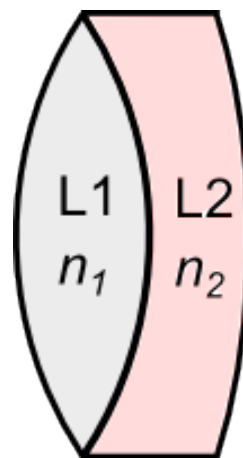


7. Du har kommit över en digitalkamera som du vill undersöka. Du plockar bort kameralinsen och belyser den nakna sensorn med en grön diodlaser. Lasern har våglängden 532 nm och infaller normalt mot sensorn. Ett intressant mönster uppkommer då i det reflekterade ljuset. Mönstret fångas upp på en skärm som du placerar 15 cm från digitalkameran. Bilden nedan visar uppställningen och mönstret på skärmen.

- Varför ser man ett stort antal punkter på skärmen?
- Bestäm avståndet Δx mellan bildelementen på sensorn!
- En person med felfri syn betraktar bildsensorn på avståndet 25 cm. Kan hon urskilja sensorns bildelement med blotta ögat? Motivera ditt svar. Du kan anta att pupillens diameter är 3 mm och göra beräkningen för en våglängd mitt i det synliga området.



8. Eftersom brytningsindex i glas är våglängdsberoende, kommer en enkel lens misslyckas med att fokusera olika våglängder till samma punkt. Fenomenet kallas kromatisk aberration och leder till oskarpa avbildningar. Problemet kan dock lösas genom att kombinera två linser av olika material i en så kallad akromatisk dubblett. Akromatiska dubbletter kan designas på många vis. I en så kallad Clark-dubblett kombineras en symmetrisk bikonvex lens (L1) med en konkav-konvex lens (L2). Linserna kan anses tunna och placeras i kontakt med varandra enligt figur. Absolutbeloppet på krökningsradien är R för båda ytorna i L1 samt den konkava ytan i L2 medan absolutbeloppet för krökningsradien är R' för den konvexa ytan i L2. Linserna är gjorda av glas med olika brytningsindex. L1 är gjord av kronglas (BK7), och L2 är gjord av flintglas (F2). Tabellen anger brytningsindex våglängdsberoende för de två materialen.



- Vilken krökningsradie R gör så att L1 får brännvidden 200 mm för våglängden 400 nm?
- Hur mycket kortare eller längre är brännvidden för L1 för våglängden 600 nm?
- Den kombinerade akromatiska dubbletten får en annan brännvidd än L1. Dubbletten ska optimeras för våglängderna 400 nm och 600 nm. Parallellt ljus infaller från vänster mot L1. Vilken krökning R' ska väljas för den högra ytan i L2 för att dubbletten ska få samma brännvidd för båda våglängderna?
- Vad är den optimerade dubblettens brännvidd?

λ (nm)	BK7 (n_1)	F2 (n_2)
400	1,5308	1,6522
450	1,5253	1,6388
500	1,5214	1,6299
550	1,5185	1,6237
600	1,5163	1,6190

1. a) Frekvens: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2f_0} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 500 \text{ THz}$

b) Våglängd: $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$

c) Ljusets fart: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0,4 \mu\text{m} \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

d) Materialets brytningsindex: $n = \frac{c}{v} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,5$

e) Våglängd i vakuum: $\lambda_0 = \lambda \cdot n = 0,6 \mu\text{m}$

f) Intensitet: $I = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}}$, $\mu_r = 1$, $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

$$\Rightarrow I = \frac{E_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot n$$

$$\Rightarrow I = \frac{(10 \text{ V/m})^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}}} \cdot 1,5 =$$

$$= 0,2 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} \cdot \sqrt{\frac{\text{A}^2}{\text{V}^2}} = 0,2 \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = 0,2 \text{ W/m}^2$$

2. Beräkna stegvis avbildning av ett avlagt föremål:

(1) Högra spegeln: $f = -\frac{R}{2}$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $a_1 = \infty$, $R_1 = -800 \text{ mm}$

$$\Rightarrow b_1 = \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{a_1} \right)^{-1} = 400 \text{ mm}$$

(2) Vänstra spegeln: $R = 400 \text{ mm}$, $a = -b_1 + 280 \text{ mm}$

$$\Rightarrow b_2 = \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{a_2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{-200 \text{ mm}} - \frac{1}{-120 \text{ mm}} \right)^{-1} = 300 \text{ mm}$$

$$x = b_2 - d = (300 - 280) \text{ mm} = 20 \text{ mm}$$

Bildsensorn ska placeras 20 mm till höger om den högra spegeln.

3. Bildsensorn fungerar genom att elektron-hål-par skapas av den elektromagnetiska strålningen i varje pixel. För att detta ska ske krävs att fotonenergin är större än bandgapet.

Den längsta våglängd som kan registreras är därför:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{bg}} = \frac{1,239 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}}{1,1 \text{ eV}} = 1,116 \mu\text{m}.$$

Lyddioden emitterar ljus med en våglängd runt 450 nm vilket motsvarar en fotonenergi på 2,75 eV. Ljuset från lyddioden kan därför exponera bildsensorn.

Radiovågorna, med frekvensen 99 MHz, har en våglängd på ca 3 m och en fotonenergi på ca 0,4 peV.

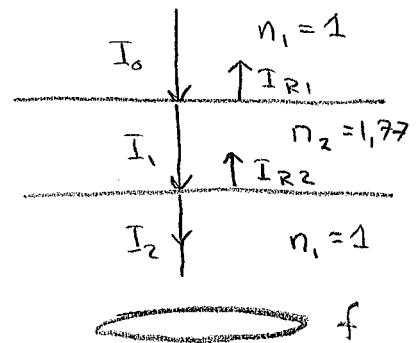
Detta innebär att fotonenergin inte räcker för att exponera bildsensorn.

$$4. a) \begin{cases} R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \\ I_1 = (1 - R_1) \cdot I_0 \\ I_2 = (1 - R_2) \cdot I_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = R_2 = R \\ I_2 = (1 - R)^2 \cdot I_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{0,77}{2,77} \right)^2 = 0,0773$$

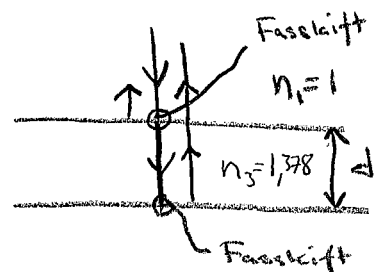
$$\Rightarrow I_2 = 0,9227^2 \cdot I_0 = 0,85 \cdot I_0$$



- b) Destruktiv interferens mellan vågorna som reflekteras i första och andra ytan:

$$2 \cdot d \cdot n_3 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \frac{\lambda}{4} \cdot n_3^{-1} \\ \lambda \approx 550 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \underline{d = 100 \text{ nm}}$$



5. a) Numerisk apertur för fibern: $NA = \sqrt{n_k^2 - n_m^2}$

$$\left. \begin{array}{l} n_k = 1,44813 \\ n_m = 1,44399 \end{array} \right\} \Rightarrow NA = 0,11$$

Numerisk apertur för linserna: $NA = \sin \theta \approx \frac{D/2}{f}$
 (D är strålens diameter)

$$\Rightarrow NA = \begin{cases} 0,332\dots, & f = 3 \text{ mm} \\ 0,111\dots, & f = 9 \text{ mm} \\ 0,037\dots, & f = 27 \text{ mm} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \geq 9 \text{ mm}$ för att matcha fiberns NA.

Böjning: $D \cdot \sin \theta = 1,22 \lambda$

Första minimum ska ligga innanför kärnans ytterdiameter.

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta \approx \frac{d_k/2}{f} \\ D = 2 \text{ mm} \\ \lambda = 1550 \text{ nm} \end{array} \right\} \Rightarrow D \cdot \frac{d_k/2}{f} = 1,22 \lambda \Rightarrow f = \frac{D \cdot d_k}{1,22 \cdot \lambda \cdot 2} = 9 \text{ mm}$$

$\Rightarrow f \leq 9 \text{ mm}$ för att böjning ska matcha kärnans storlek.

\Rightarrow Svar: $f = 9 \text{ mm}$ passar båda kriterierna.

b) $\alpha = 0,5 \text{ dB/km}$

$P_{in} = 10 \text{ mW}$

$P_{ut} = 0,1 \text{ mW}$

$-\alpha \cdot L = 10 \cdot \log \frac{P_{ut}}{P_{in}} \Rightarrow L = -10 \cdot \log \frac{P_{ut}}{P_{in}} \cdot \frac{1}{\alpha} = 40 \text{ km}$

6. a) Brewstervinkeln ger fullständigt polariserad reflex: $\tan \Theta = \frac{n_2}{n_1}$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1,54$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta = \arctan 1,54 = 57^\circ}$$

b) Den p-polariserade delen av ljuset transmitteras fullständigt, medan den s-polariserade delen reflekteras enligt:

$$R_s = \frac{\sin^2(\alpha_i - \alpha_t)}{\sin^2(\alpha_i + \alpha_t)} \quad \text{med } \alpha_t = \arcsin(n_1/n_2) = 33^\circ$$

$$\Rightarrow R_s = 0,165$$

Eftersom ljuset är opolariserat innan den första ytan blir den totala reflektansen:

$$\boxed{R = (R_s + R_p)/2 = R_s/2 = 0,0827}$$

c) Vi önskar att $I_{\text{pol}}/I_{\text{trans}} > 0,99$
d.v.s. $I_p/(I_p + I_s) \geq 0,99$

$$\begin{cases} I_p = I_0/2 \\ I_s = I_0/2 \cdot (1 - R_s)^{2 \cdot n} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{där } I_0 \text{ är den totala intensiteten} \\ \text{av det opolariserade ljuset och} \\ n \text{ är antalet plattor.} \end{array}$$

$$\frac{I_p}{I_p + I_s} = 0,99 \Leftrightarrow \frac{I_0/2}{\frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cdot (1 - R_s)^{2 \cdot n}} = 0,99$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + (1 - R_s)^{2 \cdot n}} = 0,99$$

$$\Leftrightarrow (1 - R_s)^{2 \cdot n} = 0,99^{-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot n \cdot \log(1 - R_s) = \log(0,99^{-1} - 1)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(0,99^{-1} - 1)}{2 \cdot \log(1 - R_s)} = 12,7$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Det krävs 13 plattor.}}$$

7. a) Ett böjningsmönster bildas då ljusvågen reflekteras i den periodiska strukturen i sensorn som är uppbyggd av pixlar. Jämför med ett reflektionsgitter.

b) Gitterformeln vid normalt infall:

$$d \cdot \sin \theta = m\lambda \Rightarrow d = \frac{m\lambda}{\sin \theta}$$

$$\text{För } m=2: \theta = \arctan \frac{5\text{cm}}{15\text{cm}} \Rightarrow \boxed{d = 3,4 \mu\text{m}}$$

c) Rayleighs upplösningskriterium

$$\left. \begin{array}{l} D \cdot \sin \theta = 1,22\lambda \\ \sin \theta = \frac{d}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow D \cdot \frac{d}{L} = 1,22\lambda \Leftrightarrow d = \frac{1,22\lambda \cdot L}{D}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1,22 \cdot 550\text{nm} \cdot 25\text{cm}}{3\text{mm}} = 56 \mu\text{m}$$

Pixlarna är mycket mindre än ögats upplösningförmåga.

8. a) Brytningsstyrka för lins: $B \equiv \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

För L1 är $|R_1| = |R_2| = R$
 $R_1 > 0, R_2 < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = (n_1 - 1) \cdot \frac{2}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \Leftrightarrow R &= (n_1 - 1) \cdot 2 \cdot f_1 \\ f_1 &= 200 \text{ mm} \\ n_1 &= 1,5308 \text{ vid } \lambda = 400 \text{ nm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{R = 212,3 \text{ mm}}$$

b) n'_1 - Brytningsindex vid $\lambda = 600 \text{ nm}$ $n'_1 = 1,5163$

$$f'_1 = \frac{R}{(n'_1 - 1) \cdot 2} = \frac{2 \cdot (n_1 - 1)}{2 \cdot (n'_1 - 1)} \cdot f_1 = \frac{n_1 - 1}{n'_1 - 1} \cdot f_1 = \frac{0,5308}{0,5163} \cdot f_1$$

$$\Rightarrow \boxed{f'_1 = 1,0281 \cdot f_1 = 205,6 \text{ mm}} \quad \text{d.v.s. } 5,6 \text{ mm längre fokallängd.}$$

c) För tätt placerade linser gäller att inversen av fokallängderna kan adderas, d.v.s.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \text{för de två linsernas resulterande brännvidd, } f, \text{ vid } \lambda = 400 \text{ nm.}$$

På samma vis har vi för $\lambda = 600 \text{ nm}$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Vi söker den krökningsradie R' som ger:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{n'_1 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1} \quad \text{och} \quad \frac{1}{f'_2} = \frac{n'_2 - 1}{n_2 - 1} \cdot \frac{1}{f_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_1} \cdot \left(1 + \frac{1 - n'_1}{1 - n_1} \right) = \frac{1}{f_2} \cdot \left(\frac{n'_2 - 1}{n_2 - 1} - 1 \right)$$

$$8 \text{ c) } \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_1} \cdot \left(1 + \frac{1 - n_1'}{1 - n_1} \right) = (n_2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \cdot \left(\frac{n_2' - 1}{n_2 - 1} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{n_1' - 1}{n_1 - 1} - 1 \right)}{(n_2 - 1) \left(\frac{n_2' - 1}{n_2 - 1} - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{\frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{n_1' - 1}{n_1 - 1} - 1 \right)}{(n_2 - 1) \left(\frac{n_2' - 1}{n_2 - 1} - 1 \right)} - \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{n_1' - 1}{n_1 - 1} - 1 \right)}{n_2' - n_2} - \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'} = -5,96 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1} \Rightarrow \boxed{R' = -1,6810 \text{ mm} = -1,68 \text{ m}}$$

$$d) \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{-R} - \frac{1}{R'} \right) = 0,6522 \cdot \left(-\frac{1}{212,3 \text{ mm}} + \frac{1}{1680 \text{ mm}} \right) = -2,68 \text{ mm}^{-1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f = \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)^{-1} = 431,7 \text{ mm}$$

Kontroll för $\lambda = 600 \text{ nm}$:

$$\frac{1}{f_2'} = (n_2' - 1) \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) = 0,6190 \cdot \left(-\frac{1}{212,3 \text{ mm}} + \frac{1}{1680 \text{ mm}} \right) = -2,517 \text{ mm}^{-1}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \boxed{f' = \left(\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \right)^{-1} = 431,7 \text{ mm}}$$