LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 29 augusti 2012 kl 08–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås onsdagen den 5 september på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida. Visning samma dag kl 12.00–12.30 i labbet på första våningen.

1. Ett system kan på tillståndsform beskrivas av ekvationerna

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

a. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (1 p)

b. Bestäm systemets överföringsfunktion $G(s)$. (1 p)

c. Ange en differentialekvation som beskriver systemet. (1 p)

Solution

a. Systemets stabilitet avgörs av egenvärdena till matrisen A. Dessa beräknas genom

$$\begin{aligned}
\det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1)+1 \\
&= s^2 - 3s + 3 = 0
\end{aligned}$$

Lösningen till denna ekvation ges av $s = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Eftersom polerna ligger i HHP är systemet instabilt.
Alternativ: Eftersom karaktäristiska ekvationen kan skrivas på formen $s^2 + a_1 s + a_2$ vet vi från formelsamlingen direkt att ekvation bara har lösningar i VHP, och systemet alltså är stabilt, om $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$.

b. Överföringsfunktionen ges av

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{s-3}{s^2-3s+3}
\end{aligned}$$

c. Enkelt om man har överföringsfunktionen:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= = \frac{s-3}{s^2-3s+3} U(s) \\
\iff (s^2 - 3s + 3)Y(s) &= (s-3)U(s) \\
\iff \ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 3y(t) &= \dot{u}(t) - 3u(t)
\end{aligned}$$

2. Vilka av följande påståenden är korrekta? Korta motiveringar krävs för poäng.

a. Följande är en korrekt tillståndsbeskrivning: (0.5 p)

$$\begin{cases} \dot{y} = Dy + Cx \\ u = By + Ax \end{cases}$$

b. Windup är ett vanligt förekommande problem för P-regulatorer. (0.5 p)

c. Nyquistkurvan för en ren tidsfördröjning, $G(s) = e^{-sL}$, går genom punkten -1. (0.5 p)

d. Om systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

återkopplas med styrlagen $u = -Lx + l_r r$ ges det slutna systemets överföringsfunktion av $G(s) = \frac{B^T}{l_r}\left(sI - A + CC^T\right)^{-1} L$. (0.5 p)

e. En praktisk förbättring av PID-regulatorns D-del är att komplettera den med ett högpass-filter. (0.5 p)

f. Med en stabil regulator (inga instabila poler) går det att göra ett från början stabilt system instabilt. (0.5 p)

Solution

a. Sant. Notationen är dock något ovanlig, byt ut y mot x, x mot u, u mot y, D mot A, C mot B, B mot C, och slutligen A mot D så är systemet angett med de ”vanliga” variabel- och matrisnamnen.

b. Falskt. Windup är ett problem som förekommer för I-delen i regulatorn (då styrsignalen mättar). P-regulatorn saknar I-del och har därför inga problem med windup.

c. Sant. Beloppet för denna överföringsfunktion är 1 för alla vinkelfrekvenser ω och dess argument är $-\omega L$, därmed kommer Nyquist-kurvan att sammanfalla med enhetscirkeln (ett oändligt antal varv). Speciellt kommer den att gå genom -1.

d. Falskt. Det slutna systemets överföringsfunktion ges av $G(s) = C\left(sI - A + BL\right)^{-1} B l_r$.

e. Falskt. Problemet med den ursprungliga formen på D-delen är att den ger oändlig förstärkning för höga frekvenser, vilket rent praktiskt innebär att den förstärker brus (som vanligtvis är väldigt högfrekvent). Den praktiska förbättringen man istället kan göra är att komplettera D-delen med ett lågpass-filter, dvs. bara ”derivera” upp till en viss frekvens.

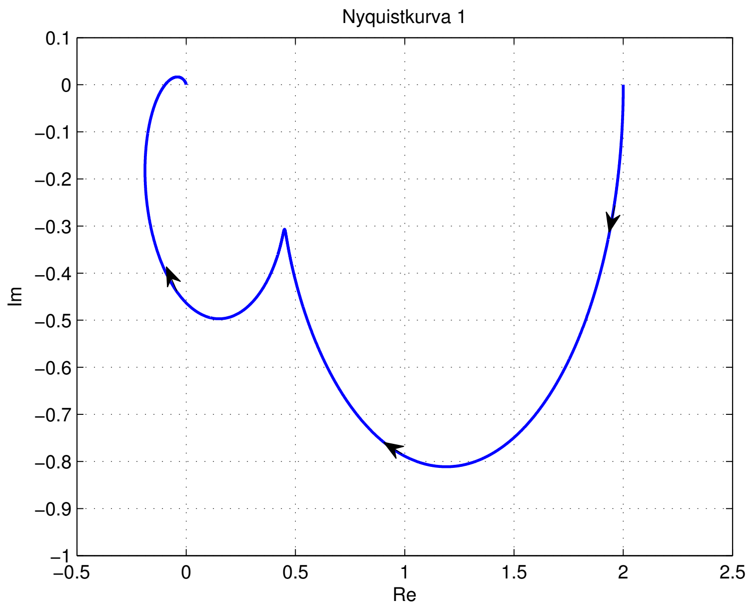
f. Sant. Som ett exempel kan man ta ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

och återkoppla det enkelt med en P-regulator med förstärkning K. Systemet är stabilt då alla dess poler är samlade i $s = -1$ och regulatorn är stabil för alla K. Det slutna systemet ges då av

$$G_{cl}(s) = \frac{K}{(s+1)^3 + K} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

Med hjälp av stabilitetsreglerna för tredje ordningens nämnarpolynom ser man t.ex. att $K = 10$ ger ett instabilt slutet system.



Figur 1 Nyquistkurva till Problem 3.

3. En system $G(s)$, som ej har någon tidsfördröjning och har alla poler och nollställen i vänster halvplan, har Nyquistkurvan i figur 1. Svara på följande frågor med hjälp av Nyquistkurvan.

a. Vad är statiska förstärkningen för $G(s)$? (1 p)

b. Om systemet återkopplas med -1, kommer det slutna systemet att vara stabilt? (1 p)

Solution

a. Statiska förstäkningen är $G(0)$ och avläses där Nyquistkurvan börjar, dvs. $G(0) = 2$.

b. Ja, slutna systemet är stabilt då Nyquistkurvan ligger till *höger* om -1.

4. En process med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

återkopplas med en PI-regulator med förstärkning $K = 4$ och integraldel $Ti = 2$. Hur stort blir det kvarvarande reglerfelet vid steg respektive ramp som referensvärde? (2 p)

Solution

Regulatorn ges av

$$G_r(s) = 4(1 + \frac{1}{2s})$$

och därmed blir överföringsfunktionen från referensvärdet till felsignalen

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)} R(s) = \frac{2s^3 + 12s^2 + 16s}{2s^3 + 12s^2 + 24s + 4} R(s)$$

Det stationära felet ges av

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Med laplacetransformen för steg respektive ramp räknas reglerfelet ut till 0 respektive 4.

5. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a. Ange systemets överföringsfunktion. Är systemet stabilt? (1 p)

b. Introducera valfri styrlag som placerar systemets poler i $s = -8$ samt $s = -3$. (2 p)

c. Är det alltid möjligt att med hjälp av tillståndsåterkoppling placera poler i ett allmänt system på godtycklig plats? Ge en kort motivering till ditt svar. (1 p)

Solution

a. $G(s) = \frac{6(s+8)}{(s+8)(s-1)}$

Systemet har poler i $s = -8$ samt $s = 1$. Eftersom den ena polen ligger i högra halvplanet är systemet inte stabilt.

b. Välj t.ex.

$$l_1 = 0$$
$$l_2 = 1$$

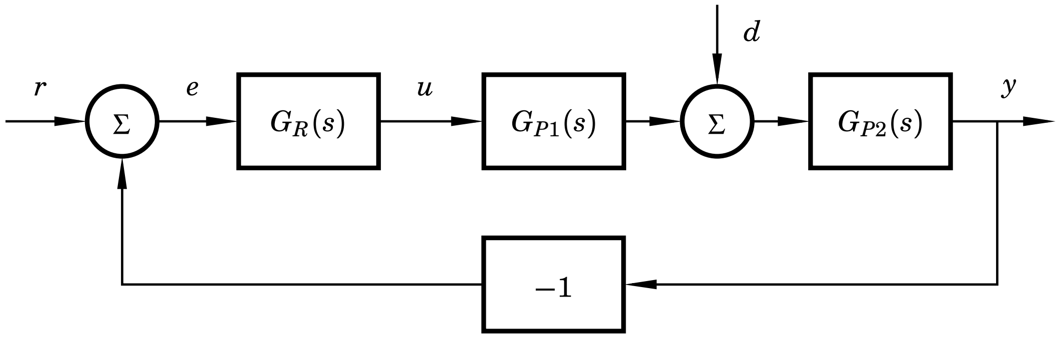
Observera att det finns flera tänkbara lösningar då polen i $s = -8$ inte är styrbar. Eftersom det återkopplade systemet ska ha en pol där behöver den dock inte vara styrbar.

c. För att undersöka om systemets poler går att placera i godtycklig position kontrolleras att styrbarhetsmatrisen har full rang. För det aktuella systemet blir den

$$W_c = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Då matrisen inte har full rang är systemet inte heller styrbart.

6. Ett system beskrivs av blockschemat i figur 2.



Figur 2 Blockschema för systemet i uppgift 6.

a. Bestäm överföringsfunktionen från laststörningen d till mätsignalen y. (1 p)

b. Regulatorstrukturen modifieras med en framkoppling för att minska inverkan av störningen, se figur 3. Hur ska G_{ff} designas för bästa resultat? (1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen från d till y ges av:

$$G_{dy}(s) = \frac{G_{P2}(s)}{1 + G_{P2}(s)G_{P1}(s)G_R(s)}$$

b. Överföringsfunktionen från d till y ges nu av

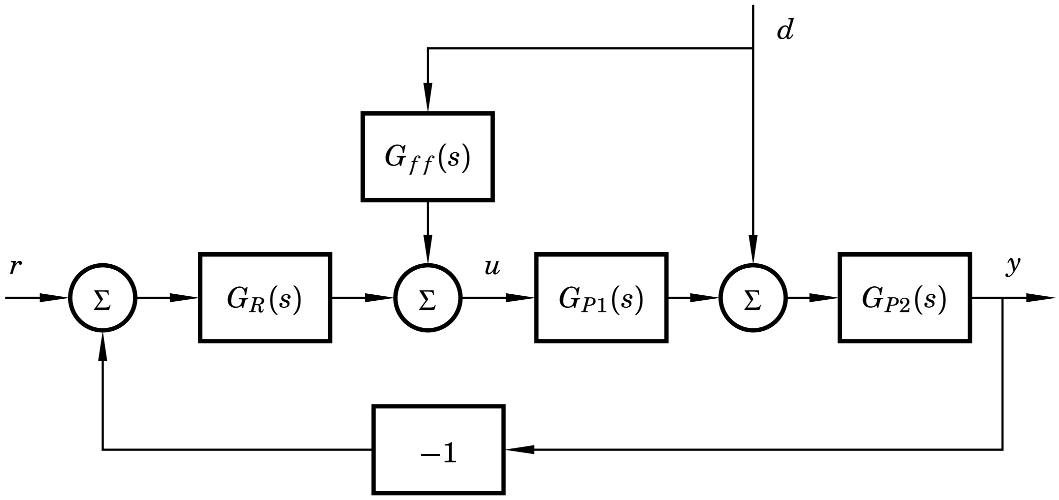
$$G_{dy}(s) = \frac{G_{P2}(s)(1 + G_{P1}(s)G_{ff}(s))}{1 + G_{P2}(s)G_{P1}(s)G_R(s)}$$

För att minimera inverkan av laststörningen d på mätsignalen y bör överföringsfunktionen ovan bli 0. Detta uppnås genom att lösa

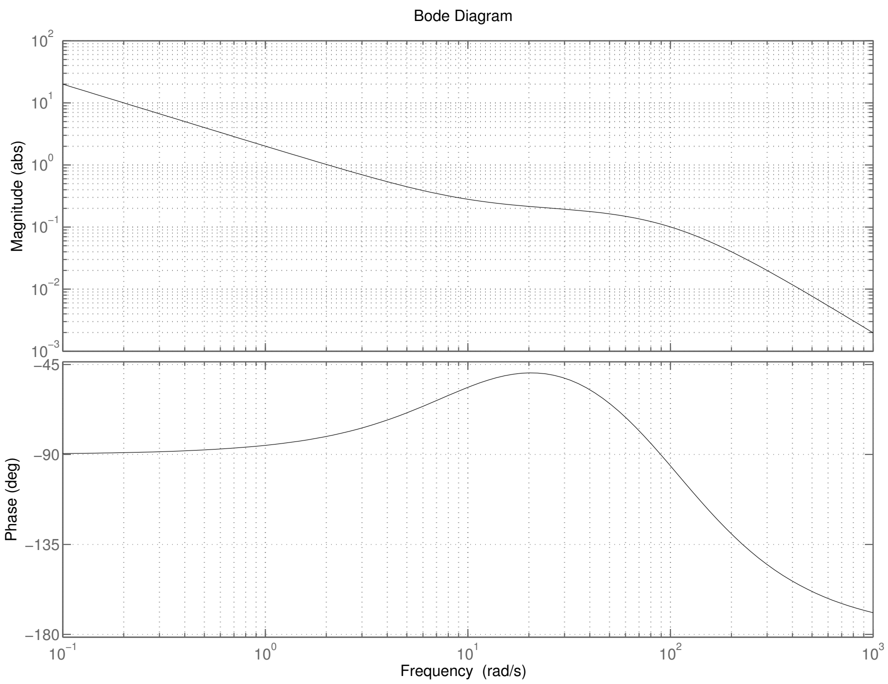
$$1 + G_{P1}(s)G_{ff}(s) = 0$$

vilket ger

$$G_{ff}(s) = -\frac{1}{G_{P1}(s)}$$



Figur 3 Modifierat blockschema med framkoppling för systemet i uppgift 6.



Figur 4 Bodediagram till Problem 7.

7. Bodediagrammet för en process, som antas ej ha någon tidsfördröjning, är ritad i figur 4.

a. Vad är processens överföringsfunktion? (2 p)

b. Utifrån figur 4, bestäm fas- och amplitudmarginal. (1 p)

c. Processen återkopplas med en proportionalregulator med förstärkningen 11.5. Är det resulterande slutna systemet stabilt? (1 p)

Solution

a. Vi ser att lågfrekvensasymptoten måste ha formen K/s då vi har lutningen -1 i amplituddiagrammet och fasen går mot -90^o. Genom att använda frekvensen 2 rad/sek. så kan vi bestämma konstanten K, dvs,

$$\left|\frac{K}{2i}\right| = 1 \Rightarrow \; K = 2$$

Vi ser även att amplituden och fasen bryter upp med brytpunkt $\omega = 10$ rad/s, vilket avslöjar att vi måste ha ett nollställe i -10. Vidare, så bryter amplituden ned till lutning -2 och fasen ned mot -180^o vid $\omega = 100$, vilket ger att vi måste ha *två* poler i -100. Alltså, överföringsfunktionen för processen måste vara

$$G(s) = \frac{2}{s} \cdot (s/10 + 1) \cdot \frac{1}{(s/100 + 1)^2}$$

b. Utifrån figuren ser vi att amplituden är 1 vid $\omega = 2$ rad/s. Då är fasen ca. -80^o. Alltså är vår fasmarginal ca $\phi_m = 180^o - 80^o = 100^o$. Amplitudmarginalen säger hur mycket vi kan förstärka över alla frekvenser innan vi får instabilitet. Vi ser att fasen alltid är $> -180^o$. Därför är vår amplitudmarginal oändlig, $A_m = \infty$.

c. Då vi aldrig kan omcirkla -180^o då fasen alltid är >-180^o så är vårt slutna system alltid stabilt enligt Nyquistteoremet.

8. En ingenjör har fått ett uppdrag på ett värmeverk att reglera temperaturen i en ny effektivare prototypvärmepanna. Panntemperaturen beskrivs av följande överföringsfunktion

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 8}.$$

a. Ingenjören får en dag snilleblixten att reglera processen med en PI-regulator. Ingenjören upptäcker dock att vissa regulatorparametrar får katastrofala följder. Vilka krav ställs på regulatorparametrarna K och T_i vid reglering av processen? (2 p)

b. Efter årsrevisionen bestämmer ledningen för företaget att ingenjören skall friställas till förmån för en mer kompentent konsult. Konsulten hävdar att med en PID-regulator på formen

$$C(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d)$$

kan man erhålla bättre prestanda. Visa att konsulten har rätt. (2 p)

c. Konsulten har använt sig av standardformen för en PID-regulator. Anta att den sensor man använder ger en brusig signal och att styrsignalen har övre och undre gränser. Vilka är de två i särklass viktigaste förändringarna av PID-regulatorn som man bör genomföra? (1 p)

Solution

a. En PI-regulator ges av

$$G_r(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i}).$$

Det slutna systemet överföringsfunktion ges av

$$G_{cl}(s) = \frac{G_r G_p}{1 + G_r G_p} = \frac{K/T_i(T_i s + 1)}{s^3 + 2s^2 + (K-8)s + K/T_i}.$$

Stabilitetsvillkoren för ett tredje ordningens system ger

$$\begin{aligned} 2 &> 0 \\ K - 8 &> 0 \\ K/T_i &> 0 \\ 2(K-8) &> K/T_i. \end{aligned}$$

Vi erhåller från andra olikheten att $K > 8$. Från tredje olikheten erhålls $T_i > 0$. Den fjärde olikheten kan då skrivas som

$$T_i > \frac{K}{2 - \frac{16}{K}}.$$

b. Det slutna systemets överföringsfunktion från referens till utsignal är

$$G_{cl}(s) = \frac{G_pC}{1+G_pC} = \frac{\left(sT_i + 1 + s^2T_iT_d\right)K}{s^3T_i + 2s^2T_i - 8sT_i + KsT_i + K + Ks^2T_iT_d}$$
$$= \frac{K(s^2T_d + s + 1/T_i)}{s^3 + (2+KT_d)s^2 + (K-8)s + K/T_i}.$$

Introduktionen av D-del i regulator ger oss möjlighet att placera polerna för det återkopplade systemet godtyckligt. Detta var inte möjligt med PI-regleringen i uppgift a.

c. Har man en brusig mätsignal bör man filtrera mätsignalen innan styrsignalen beräknas. Detta är speciellt viktigt när man har D-delen inkopplad. Begränsningar i styrsignalen kan ge upphov till integratoruppvridning (windup) varför man bör införa något tyda av skydd emot detta.