LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 28 augusti 2013 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet läggs in i LADOK senast onsdagen den 11/9. Visning sker torsdagen den 12/9 klockan 12.30-13.00 i Lab C på första våningen i Maskinhuset.

Lycka till!

Observera att i de flesta fall kan deluppgifterna lösas oberoende av varandra.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 20130312

1. Betrakta systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

a. Bestäm överföringsfunktionen från u till y. (1 p)

b. Bestäm systemets poler. Är systemet instabilt, (marginellt) stabilt, eller asymptotiskt stabilt? (2 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen från u till y ges av

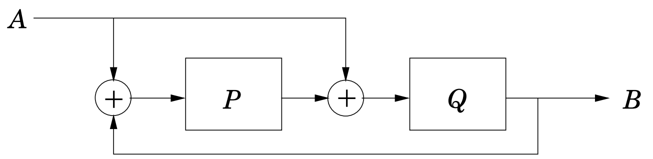
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}.$$

b. Polerna ges av rötterna till överföringsfunktionens nämnarpolynom

$$p(s) = (s+1)(s+2).$$

Alltså har systemet en pol i $s = -1$ och en pol i $s = -2$. Eftersom realdelen av alla poler är strikt negativ, så är systemet asymptotiskt stabilt.

2. Bestäm överföringsfunktionen från A till B för systemet i Figur 1 uttryckt med P och Q.



Figur 1 Blockschemat för Uppgift **2**

(2 p)

Solution

Blockschemaberäkningar ger att

$$B = Q(P(B+A)+A) = QPB + Q(P+1)A$$
$$\iff B(1-QP) = Q(P+1)A$$
$$\iff B = \frac{Q(P+1)}{1-QP}A.$$

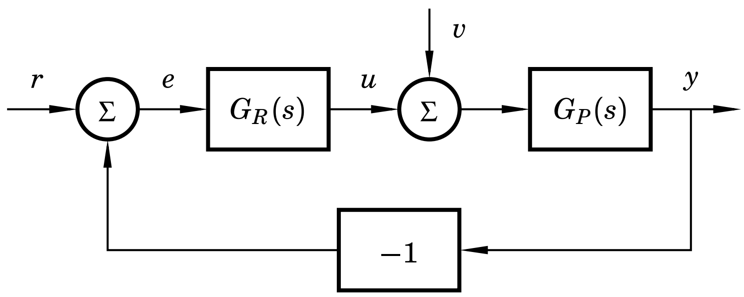
Överföringsfunktionen från A till B ges alltså av

$$\frac{Q(P+1)}{1-QP}.$$

3. En klåpare till ingenjör har misslyckats i sin design av ett kritiskt processteg i en nybyggd syltfabrik. Detta har resulterat i en instabil process. Ingenjörens något mer kompetenta kollega har lyckats härleda en modell av processen

$$G_P(s) = -\frac{s+1}{s-3}$$

och hyser gott hopp om att processen skall kunna stabiliseras med en regulator. Regulator och process är kopplade i enlighet med blockdiagrammet i figur 2.



Figur 2 Blockdiagram för process i uppgift 3.

a. Bestäm parametrarna $K > 0$ och $T_i > 0$ för en PI-regulator, $G_R(s)$, som stabiliserar processen och därmed säkrar Nordens syltförsörjning. (2 p)

b. Beräkna det stationära felet då processen utsätts för en laststörning i form av en ramp, $v(t) = t$. Systemet börvärde antas vara noll. (2 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen för en PI-regulator är

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

och det slutna systemets överföringsfunktion är

$$G_{cl}(s) = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{(s+1)\,K\,(sT_i+1)}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3T_i)\,s + K} =$$

$$= \frac{(s+1)\,K\,(sT_i+1)\,/(T_i(K-1))}{s^2 + \frac{KT_i+K+3T_i}{T_i(K-1)}s + \frac{K}{T_i(K-1)}}.$$

Ett andra ordningens system med polpolynom $p(s) = s^2 + a_1 s + a_2$ är asymptotiskt stabilt om och endast om samtliga koefficienter är positiva, d.v.s. $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$. Eftersom integraltiden $T_i > 0$, så är det slutna systemet asymptotiskt stabilt för alla PI-regulatorer med $K > 1$.

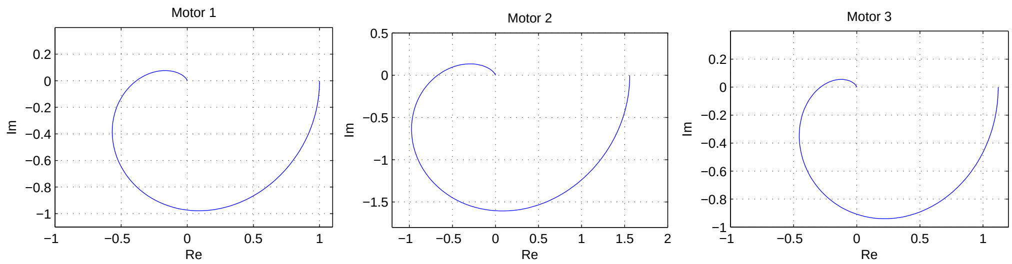
b. Överföringsfunktionen från v till e är

$$G_{ev}(s) = -\frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = -\frac{s(s+1)T_i}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3T_i)\,s + K}$$

Laplacetransformering av laststörningen ger $V(s) = \frac{1}{s^2}$. Under förutsättning att PI-regulatorn valts så att systemet är asymptotiskt stabilt kan slutvärdesteoremet användas och det stationära felet ges då av

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ev}(s)\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0} -\frac{(s+1)\,T_i}{T_i\,(K-1)\,s^2 + (KT_i + K + 3\,T_i)\,s + K} = -\frac{T_i}{K} \end{aligned}$$

4. En tryckkokare med motordriven inflödesventil ska serietillverkas men motorerna som kommer från tre olika underleverantörer verkar vara lite olika. I Figur 3 ges Nyquistkurvorna för de tre motorerna. Anta att motorerna ska styras av en P-regulator, $u(t) = Ke(t)$. Vilket är det största positiva K som kommer att ge stabila slutna system för samtliga modeller? (1 p)



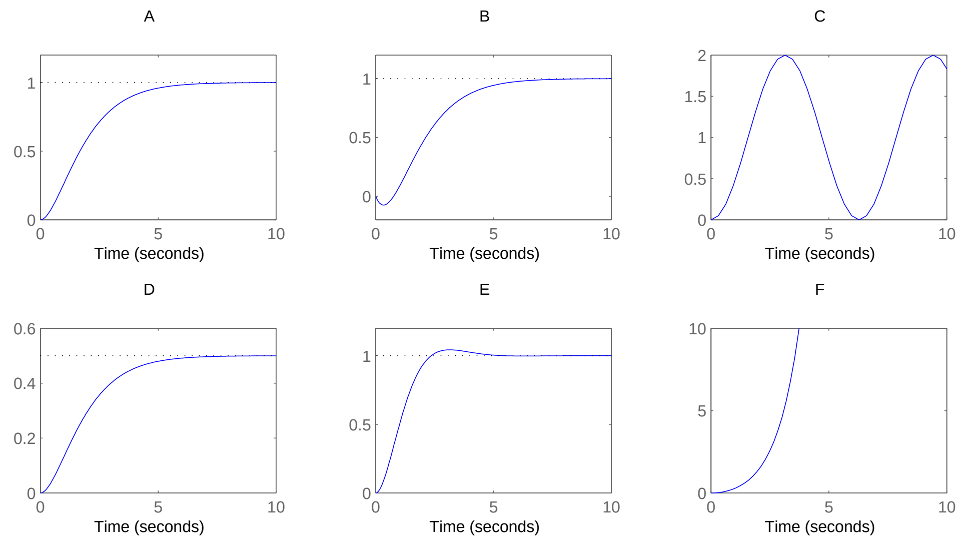
Figur 3 De uppmätta Nyquistkurvorna för de olika motordrivna ventilerna i uppgift 4.

Solution

Lösningen består av att vi tar fram vilket system som lättast blir instabilt vid återkoppling med en P-regulator (d.v.s. en förstärkning K), vilket ges av amplitudmarginalen. Denna kan avläsas i diagrammen genom att hitta var Nyquistkurvan skär negativa reella axeln. Amplitudmarginalen ges då av $-1/x_c$, om x_c är koordinaten för skärningspunkten. Avläsning i diagrammen ger att $A_m^1 \approx 2.5$, $A_m^2 \approx 1.42$, $A_m^3 \approx 3.3$, vilket således tillåter ett maximalt K på 1.42

5. Para ihop överföringsfunktionerna (G_1-G_4) nedan med rätt stegsvar (A-F) i Figur 4. Motivera! (2 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2},$$
$$G_3(s) = \frac{1}{2s^2 + 4s + 2}, \qquad G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$



Figur 4 Stegsvar i Uppgift 5.

Solution

Bland överföringsfunktionerna G_1-G_4 finns inget system som har något nollställe i höger halvplan (ingen av överföringsfunktionerna har något nollställe alls) och inget system som är instabilt (dvs. har någon pol i höger halvplan). Detta betyder att stegsvar B (som initialt går åt fel håll) och stegsvar F (som ej är begränsat) kan uteslutas.

G_1: Systemet har två reella poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Eftersom polerna är reella fås ingen översläng, så detta måste svara mot stegsvar A, som har slutvärdet 1.

G_2: Systemet har två komplexkonjugerade poler i $-1 \pm i$ och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Detta måste svara mot stegsvar E som har en översläng och slutvärdet 1.

G_3: Systemet har två poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 0.5$. Detta måste därför svara mot stegsvar D som har slutvärdet 0.5.

G_4: Systemet har två poler på imaginära axeln i $\pm i$ och är därmed stabilt men inte asymptotiskt stabilt. Därför måste detta svara mot stegsvar C, som är begränsat men ej når ett slutvärde.

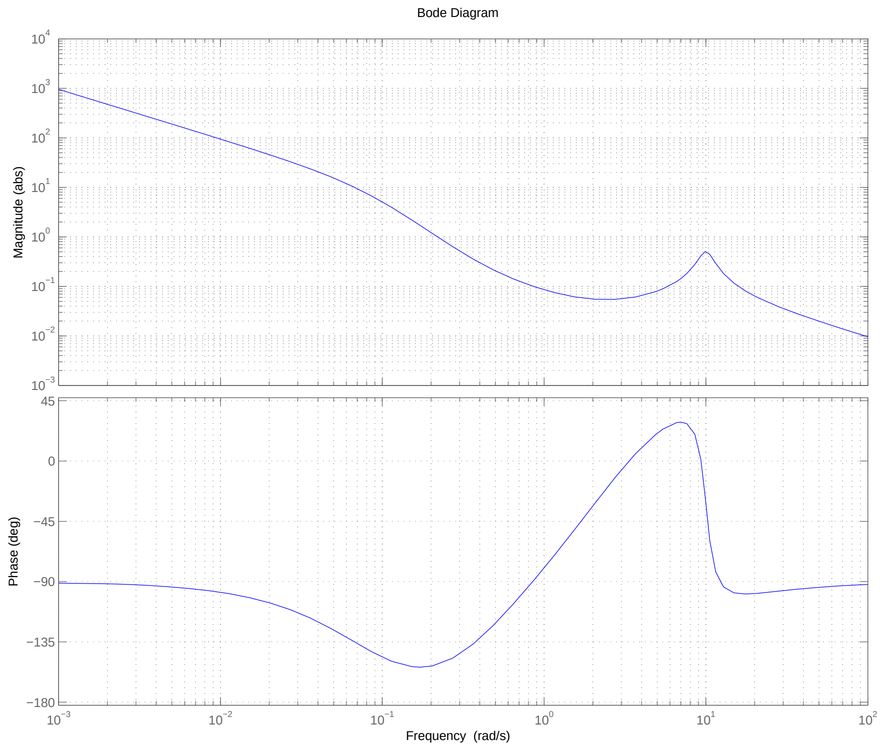
6. En servomotor som skall användas för att styra en ventil har ett Bodediagram som kan ses i figur 5.

a. Använd Bodediagrammet för att beräkna vad utsignalen, $y(t)$, blir då insignalen, d.v.s. spänningen till motorn, är

$$u(t) = 2\sin(0.4t).$$

(1 p)

b. Vad är systemets fasmarginal om motorn återkopplas med en P-regulator med förstärkningen $K = 1$? (1 p)



Figur 5 Bodediagram för uppgift 6.

Solution

a. Då insignalen till ett linjärt tidsinvariant system är en sinussignal $u(t) = k\sin(\omega t)$ ges utsignalen av

$$y(t) = k|G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg(G(i\omega))).$$

Avläsning i Bodediagrammet vid $\omega = 0.4$ rad/s ger

$$|G(0.4i)| = 0.3, \quad \arg(G(0.4i)) = -132^\circ.$$

Utsignalen blir således

$$y(t) = 0.6\sin(0.4t - 132^\circ).$$

b. Då systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkningen $K = 1$ avläses fasmarginalen som

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 28.1^\circ.$$

7. Design en tillståndsåterkopplingsregulator på formen

$$u = -Lx + l_r r$$

för systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Det slutna systemet ska ha en pol i $s = -1$ och en pol i $s = -2$ och det ska inte uppstå något stationärt fel. (3 p)

Solution

Insättning av styrlagen i differentialekvationen ger att

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BLx + Bl_r r.$$

Laplacetransformering ger att

$$\begin{aligned} sX &= AX - BLX + Bl_r R \\ \iff (sI - (A - BL))X &= Bl_r R \\ \iff X &= (sI - (A - BL))^{-1} Bl_r R. \end{aligned}$$

Utsignalekvationen ger då att

$$Y = CX = C(sI - (A - BL))^{-1} Bl_r R.$$

Polerna för det slutna systemet från R till Y ges av lösningarna till

$$0 = \det(sI - A + BL) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{vmatrix} s + l_1 + 1 & l_2 \\ -1 & s + 1 \end{vmatrix} = s^2 + s(l_1 + 2) + (l_1 + l_2 + 1).$$

Matchning av koefficienter med det önskade polpolynomet

$$p(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

ger

$$\begin{cases} s^2: & 1 = 1, \\ s^1: & l_1 + 2 = 3 \Leftrightarrow l_1 = 1, \\ s^0: & l_1 + l_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow l_2 = 0. \end{cases}$$

I stationäritet ges det slutna systemet av

$$\dot{x} = 0 = (A - BL)x + Bl_r r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_r r,$$
$$y = Cx \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = -2x_1 + l_r r, \\ 0 = x_1 - x_2, \\ y = x_2. \end{cases}$$

Eftersom vi inte vill ha något stationärt fel så får vi även villkoret $r = y$, vilket ger oss den unika lösningen $l_r = 2$. (Den tredje ekvationen ger $x_2 = r$. Den andra ekvationen ger sedan $x_1 = x_2 = r$. Slutligen ger då den första ekvationen $-2r + l_r r = 0 \Leftrightarrow l_r = 2$.) Den sökta styrlagen är alltså

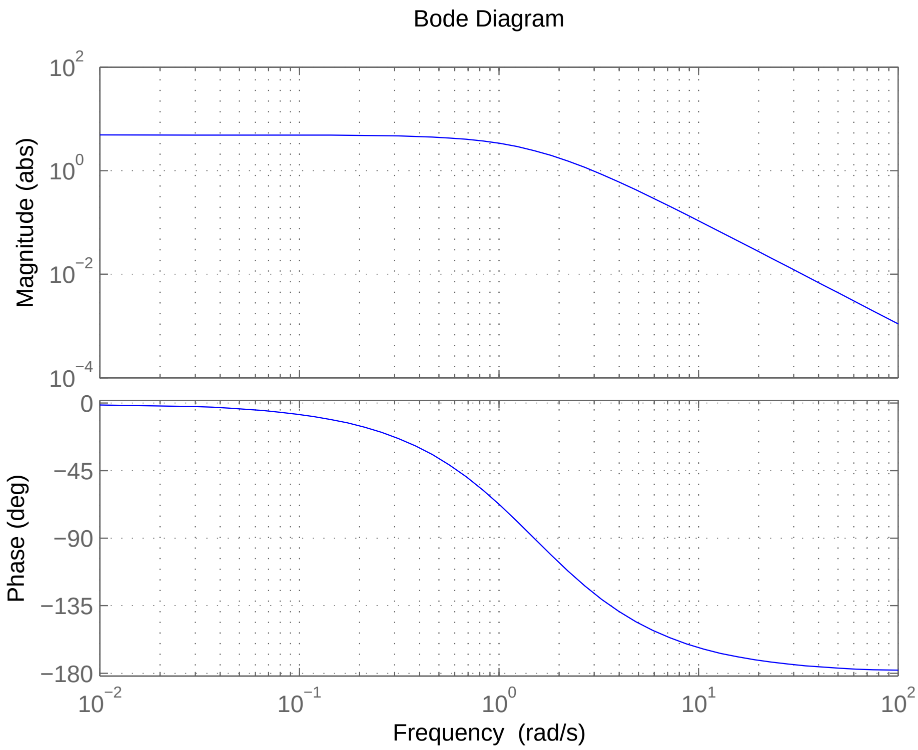
$$u = -x_1 + 2r.$$

Notera att det även är möjligt att finna l_r genom att lösa

$$C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r = 1$$

för $s = 0$.

8. Lisa har ett system vars Bodediagram visas i Figur 6.



Figur 6 Bodediagram för Lisas system i Uppgift 8.

a. Lisa vill göra systemet snabbare och funderar därför på att koppla in en kompenseringslänk. Ska hon välja en fasavancerande eller en fasretarderande länk? När borde hon istället välja den andra typen av kompenseringslänk? (1 p)

b. Lisa skulle vilja ha systemet 10 gånger så snabbt. Vilken skärfrekvens vill hon då ha på sitt nya system? (1 p)

c. Lisas kompis Pelle läser i föreläsningsanteckningarna och tycker att det verkar krångligt att designa en kompenseringslänk. Han hävdar att det räcker med att Lisa ökar förstärkningen med en konstant K för att öka snabbheten. Vilket K skulle Lisa behöva ha för att få sin önskade skärfrekvens? (1 p)

d. Vad är den stora nackdelen med Pelles sätt att lösa uppgiften? (1 p)

Solution

a. Lisa vill ha en fasavancerande länk. Den fasretarderande länken är bra då man vill minska sina stationära fel.

b. $\omega_c^{\text{ny}} = 30$ rad/s.

c. Förstärkningen vid $\omega = 30$ rad/s är $|G(30i)| \approx 10^{-2}$. För att detta ska bli den nya skärfrekvensen måste Lisa multiplicera med $K = 100$.

d. Nackdelen är att fasmarginalen för systemet minskar från cirka 50° till cirka 5°, vilket ger ett mycket känsligare system.

9 a. Låt G vara ett systems överföringsfunktion och y vara systemets stegsvar. Visa att stegsvarets initialderivata $\dot{y}(0)$ är skiljd från noll om G är asymptotiskt stabil och given av

$$G_1(s) = \frac{b}{s+a},$$

men noll om G är asymptotiskt stabil och given av

$$G_2(s) = \frac{e}{(s+c)(s+d)},$$

där a, b, c, d och e är positiva och reella konstanter.

(2 p)

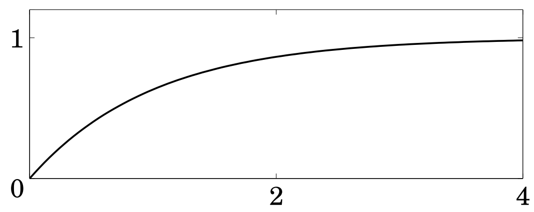
b. Stegsvaret av systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

visas i Figur 7. Trots att systemet är av andra ordningen så är $\dot{y}(0) \neq 0$. Förklara hur detta är möjligt, trots resultatet i Uppgift **a**.

(2 p)

Solution



Figur 7 Stegsvaret i Problem **b**

a. Laplacetransformen av stegsvarets tidsderivata ges av

$$sY(s) = sG(s)U(s) = sG(s)\frac{1}{s} = G(s).$$

Eftersom både G_1 och G_2 är asymptotiskt stabila så har $sG(s)$ alla poler i vänstra halvplanet. Begynnelsevärdesteoremet ger då att

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s).$$

För G_1 fås alltså att

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+a} b = \lim_{s\to\infty} \left(1 - \frac{a}{s+a}\right) b = b$$

och för G_2 fås att

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{(s+c)(s+d)} = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{s^2 + O(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{es}{s^2} = 0.$$

b. Överföringsfunktionen för systemet ges av

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Eftersom vi förkortade bort en pol och ett nollställe i överföringsfunktionen så har alltså systemet bara första ordningens dynamik, trots att vi i vår tillståndsrepresentation hade två tillstånd.

Kommentar: Ett alternativt sätt att lösa uppgiften på är att ta sig en närmare titt på tillståndsrepresentationen, vilket avslöjar att y bara beror på x_1, som i sin tur inte beror på x_2. Om vi förkastar det andra tillståndet så fås alltså ändå precis samma relation mellan insignal och utsignal.