

1.

a. Laplace-transform ger

$$s^2 Y(s) = saY(s) - 4Y(s) + U(s) + sU(s),$$

vilket ger

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

med

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 - as + 4}.$$

b. Överföringsfunktionens karakteristiska polynom ges av

$$s^2 - as + 4.$$

Stabilitetsvillkoren i formelsamlingen ger att systemet är stabilt då  $a \leq 0$ .

2.

a. Inför tillstånden  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y}$ . Detta ger

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + (u-3)^2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att i stationäritet gäller  $\dot{x}_2 = 0$ , och således att

$$0 = (u-3)^2 - 2,$$

det vill säga att  $u_0 = 3 + \sqrt{2}$  eller  $u_0 = 3 - \sqrt{2}$ . Vidare kan  $x_1^0$  väljas fritt.

b. Vi vill använda oss av  $u_0 = 3 + \sqrt{2}$ . Definiera

$$f(x_1, x_2, u) := x_1 x_2 + (u-3)^2 - 2$$

och beräkna derivatorna i den stationära punkten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, u_0) &= x_2^0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, u_0) &= x_1^0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, u_0) &= 2(u_0 - 3) \end{aligned}.$$

Det linjäriserade systemet ges nu av

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2(u_0 - 3) \end{bmatrix} \Delta u.$$

Här är  $(x_1^0, x_2^0, u_0) = (x_1^0, 0, 3 + \sqrt{2})$ , och  $x_1^0$  kan väljas fritt.

3.

- a. Systemet ges av  $\dot{x} = Ax + Bu$  där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}, D = 0.$$

Överföringsfunktionen ges av:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = (-2.5 \quad 2.5) \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{10s}{(s+1)(s+10)} \end{aligned}$$

- b. Överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = s^1 \cdot (1+s)^{-1} \cdot (1+1/10s)^{-1}$$

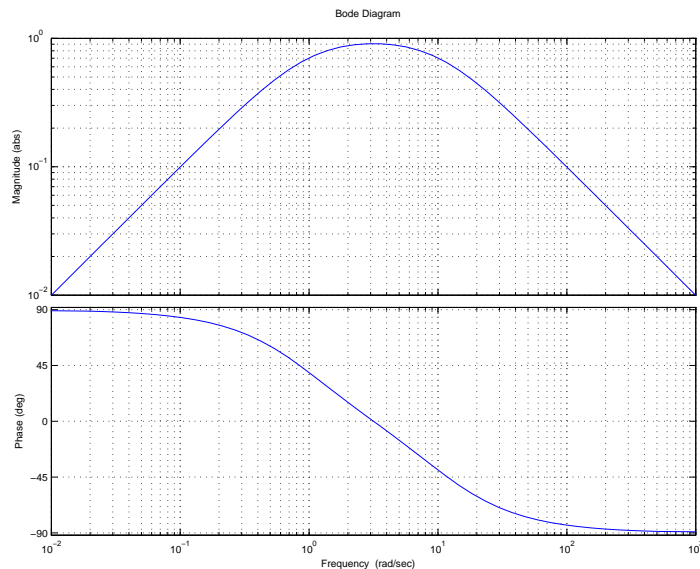
Lågfrekvensasymptot:  $G_{LF} \approx s$

Brytfrekvenser:  $\omega = 1$  rad/s (pol)  $\omega = 10$  rad/s (pol)

Förstärkningskurvan börjar med lutningen 1. Vid  $\omega = 1$  rad/s minskar lutningen med 1 och vid  $\omega = 10$  rad/s minskar lutningen med ytterligare 1 vilket gör att kurvan slutar med lutningen -1.

Faskurvan börjar på  $90^\circ$ . Vid  $\omega = 1$  rad/s minskar fasen med  $90^\circ$  och vid  $\omega = 10$  rad/s med ytterligare  $90^\circ$  så att faskurvan slutar på  $-90^\circ$ .

Bodediagrammet visas i Figur 1.



**Figur 1** Bodediagram för Problem 3 b.

4. Inget av stegsvaren kan svara mot ett första ordningens system vilket innebär att  $G_1(s)$  kan uteslutas. Vi kan även utesluta  $G_4(s)$  eftersom inget av stegsvaren kan svara mot ett instabilt system.

Av de återstående överföringsfunktionerna har samtliga statisk förstärkning 1 utom  $G_3(s)$  som har statisk förstärkning 1.5. Detta ger att  $G_3(s)$  svarar mot stegsvar  $D$ .

Det enda som skiljer  $G_3(s)$  och  $G_5(s)$  är den statiska förstärkningen, vi har alltså att  $G_5(s)$  svarar mot  $A$ .

De återstående överföringsfunktionerna är  $G_2(s)$  och  $G_6(s)$  som har samma karakteristiska polynom. Överföringsfunktionen  $G_6(s)$  kan skrivas som  $G_6(s) = -sG_2(s) + G_2(s)$ , vilket innebär att stegsvar  $C$ , som börjar i negativ riktning, svarar mot  $G_6(s)$ .

Sammantaget har vi  $A-G_5(s)$ ,  $B-G_2(s)$ ,  $C-G_6(s)$ ,  $D-G_3(s)$ .

5. För att öka snabbheten med bibehållen fasmarginal väljer vi en fasavance-rande länk. Den nuvarande skärfrekvensen avläses till  $\omega_c = 1$  rad/s, vilket ger den önskade skärfrekvensen efter kompensering  $\omega_c^* = 3$  rad/s.

I bodediagrammet kan vi även avläsa den nuvarande fasmarginalen till  $\phi_m \approx 63$  grader. Vid  $\omega_c^*$  är fasmarginalen ungefär 33 grader vilket innebär att faskurvan måste öka med 30 grader. I formelsamlingen ser vi att detta motsvarar  $N = 3$ .

För att fasökningen skall vara maximal just vid  $\omega_c^*$  väljer vi  $b = \frac{\omega_c^*}{\sqrt{N}} \approx 1.7$ .

Till sist måste  $K_K$  väljas så att det kompenserade systemet får skärfrekvensen  $\omega_c^*$ . Vid  $\omega_c^*$  har kompenseringslänken förstärkningen  $K_K\sqrt{N}$ . Ur bodediagrammet avläses systemets förstärkning vid  $\omega_c^*$  till ungefär 0.2 vilket ger  $K_K = \frac{1}{0.2\sqrt{N}} \approx 2.9$ .

6.

- a. Skriv systemet på matrisform:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

Med sturlagen  $u = -(l_1 \ l_2)x$  blir slutna systemets karakteristiska polynom  $\det(sI - A + BL) = s^2 + (l_1 + 3)s + 2l_1 + 4l_2 + 2$ . Det önskade karakteristiska polynomet ges av  $(s + 2 + 2i)(s + 2 - 2i) = (s + 2)^2 + 4 = s^2 + 4s + 8$ . Genom att identifiera koefficienterna i polynomen får vi:

$$l_1 + 3 = 4$$

$$2l_1 + 4l_2 + 2 = 8$$

dvs  $l_1 = 1$  och  $l_2 = (6 - 2l_1)/4 = 1$ .

Svar:  $u = -x_1 - x_2$

- b. För att kunna skatta alla tillstånd måste systemet vara observerbart. Mäter vi  $x_1$ , dvs  $y = (1 \ 0)x = Cx$ , blir observerbarhetsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Systemet blir alltså icke-observerbart. Mäter vi  $x_2$ , ( $y = (0 \ 1)x = Cx$ ), får vi:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

dvs ett observerbart system. Svar: Vi ska mäta  $x_2$

- 7 a. Vi Laplace-transformerar differentialekvationen och får

$$(s^2 + 3s)Y = (s + \frac{1}{2})U$$

$$Y = \underbrace{\frac{s + \frac{1}{2}}{s(s + 3)}}_{G(s)} U$$

- b. Fasmarginalen bestäms för den frekvens,  $\omega_c$  där systemets förstärkning är 1.

$$|G(i\omega_c)| = \frac{|\frac{1}{2} + i\omega_c|}{|i\omega_c||3 + i\omega_c|} = 1$$

Ekvationen löses enklast numeriskt och vi får då  $\omega_c \approx 0.18$

$$\varphi_m = \pi + \arg(G(i\omega_c)) = \pi + \arg(\frac{1}{2} + i\omega_c) - \arg(i\omega_c) - \arg(3 + i\omega_c) = \pi + \arctan(2\omega_c) - \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\omega_c}{3}) \approx 106^\circ$$

- c. Systemet har dödtidsmarginalen  $L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \approx 10s$  och skulle alltså fortfarande vara stabilt med en tidsfördröjning på 8 sekunder.

8.

- a. Vid P-reglering är styrsignalen  $u = Ke$  där  $e = h_r - h$  är reglerfelet. Antag att det stationära felet är  $e_0 = 0$ . Då blir den stationära styrsignalen  $u_0 = K0 = 0$ . Insättning i dynamikekvationen ger  $\dot{h} = -c_1\sqrt{h_0} < 0$ . Denna motsägelse visar att  $h = h_r$  ej kan gälla stationärt under P-reglering (givet  $h_r > 0, 0 < K < \infty$ ).

- b. Antag att det existerar ett stationärt fel  $e_0 \neq 0$ . Styrsignalen vid PI-reglering blir då  $u(t) = K(e_0 + \frac{1}{T_i} \int e_0 dt)$ . Denna styrsignal varierar över tiden och är således inte stationär. Motsägelsen visar att  $e_0 \neq 0$  ej kan existera under PI-reglering (givet  $h_r$  konstant).

- c. Den linjäriserade modellen av övre tankens dynamik innehåller endast en pol. Denna kan placeras godtyckligt redan med en P-regulator. Den linjäriserade dynamiken från styrsignal till vätskehöjd i den undre tanken är däremot ett andra ordningens system. Här innebär D-delen en extra frihetsgrad när det slutna systemets poler ska placeras.

Alternativt kan man se D-delen som en icke modellbaserad prediktor för reglerfelet. Det är meningsfullt att prediktera reglerfelutvecklingen vid nivåreglering av undre tanken, eftersom styrsignalen måste propagera genom övre tankens dynamik (som är av lågpasskaraktär). Vid reglering av övre tanken har vi däremot ingen långsam dynamik som styrsignalen måste propagera genom.

9.

- a. Om insignalen,  $u(t)$ , till en linjär process är en sinusvåg kommer utsignalen också vara en sinusvåg med samma frekvens (när alla transienter dött ut). Dock kommer dess amplitud och fas att ha ändrats enligt:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G_p(i\omega)|A \sin(\omega t + \arg(G_p(i\omega))).$$

För linjära system gäller också superpositionsprincipen. Det innebär att vi kan behandla de båda sinussignalerna i  $u(t)$  var för sig och sedan addera ihop delresultaten till den totala utsignalen:

$$y(t) = |G_p(2i)|A_1 \sin(2t + \arg(G_p(2i))) + |G_p(3i)|A_2 \sin(3t + \arg(G_p(3i))).$$

Eftersom

$$|G_p(i\omega)| = \frac{4}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + 0.8^2\omega^2}}$$

fås  $|G_p(2i)| = 2.5$  och  $|G_p(3i)| = 0.72$ . Ur fasploten kan man läsa att  $\arg(G_p(2i)) \approx -90^\circ$  och  $\arg(G_p(3i)) \approx -154^\circ$ . Transformation till radianer ger slutligen:

$$y(t) = 2.5 \sin(2t - \pi/2) + 0.72 \cdot 2 \sin(3t - 2.69)$$

- b.** Från föreläsningarna vet vi att magnituden på känslighetsfunktionen ger ett mått på hur mycket den relativa känsligheten ökar för störningar i det slutna systemet jämfört med det öppna. Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)} = \frac{s^2 + 0.8s + 4}{s^2 + 0.8s + 8},$$

där  $G_r$  alltså är regulatorn. Magnituden vid frekvensen 2 rad/s blir  $|S(2i)| = 0.37 < 1$ . Det slutna systemet är således mindre känsligt för en störning än det öppna.