LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 25 oktober 2012 kl 14-19

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås senast tisdagen den 6:e november på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på kursens hemsida. Visning samma dag klockan 12-12:30 i lab C på första våningen i Maskinhuset.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1. Ett system med insignal u och utsignal y beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u} + 2u$$

a. Beräkna överföringsfunktionen från u till y. (1 p)

b. Beräkna systemets poler och nollställen. (1 p)

c. Skriv upp systemet på tillståndsform. (1 p)

Solution

a. Laplacetransformation av diff. ekvationen ger

$$s^2Y + 2sY + Y = sU + 2U \Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y = (s+2)U \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1}.$$

b. Från förra deluppgiften ser vi att systemet har en dubbelpol vid $s = -1$ samt ett nollställe vid $s = -2$.

c. Man kan till exempel skriva upp systemet på observerbar kanonisk form (reglerteknikis formelsamling s. 4):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

2. En modifierad "kulan-på-bommen"-process har överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{2}{s(s+3)+1}$$

mellan processens insignal och utsignal.

a. Antag att vi reglerar processen med hjälp av en proportionell regulator med positiv förstärkning K. Vad blir stationära felet vid ett steg med höjden a i referensvärdet? (2 p)

b. Modifera regulatorn i **a** så att stationära felet blir 0. Det slutna systemet behöver inte vara snabbare än att ha alla poler i -1. (2 p)

Solution

a. Det slutna systemet mellan $R(s)$ och $Y(s)$ ges av

$$G(s) = \frac{2K}{s^2 + 3s + 1 + 2K}.$$

Det stationära felet vid ett referenssteg kan därför uttryckas som

$$E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s))R(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 3s + 1 + 2K} R(s)$$

För att kunna använda slutvärdesteoremet måste $sE(s)$ ha samtliga poler i vänstra halvplanet. För att ett andra ordningens polynom ska ha alla rötter i vänster halvplan så ska alla koefficienter vara > 0. Då $K > 0$ så ser vi att detta är fallet, alltså får vi använda slutvärdesteoremet.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 3s + 1 + 2K} R(s)$$

Här ser vi att om $r(t)$ är ett steg med höjden a, $R(s) = a/s$ så blir gränsvärdet $\dfrac{a}{1 + 2K}$.

b. För att få bort det stationära felet måste vi införa integralverkan, använd därför t.ex. en PI-regulator,

$$G_R = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Det slutna systemet blir då

$$G(s) = \frac{\frac{1}{T_i} 2K(sT_i + 1)}{s^3 + 3s^2 + (2K + 1)s + \frac{2K}{T_i}}$$

Genom att placera alla poler i -1 så eftersträvar vi karaketeriska polynomet $(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$. Vi får då regulatorparametrarna $K = 1,\ T_i = 2$. För att kontrollera att stationära felet blir 0, så utför vi följande beräkning

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{s^3 + 3s^2 + s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \frac{1}{s} = 0$$

Alltså har vi fått bort det stationära felet.

3. Nyquistkurvan för ett stabilt öppet system visas i fig. 1. Vilka av följande påståenden är sanna? Observera att endast korrekt motiverade svar ger poäng.

a. Systemet har exakt två poler. (0.5 p)

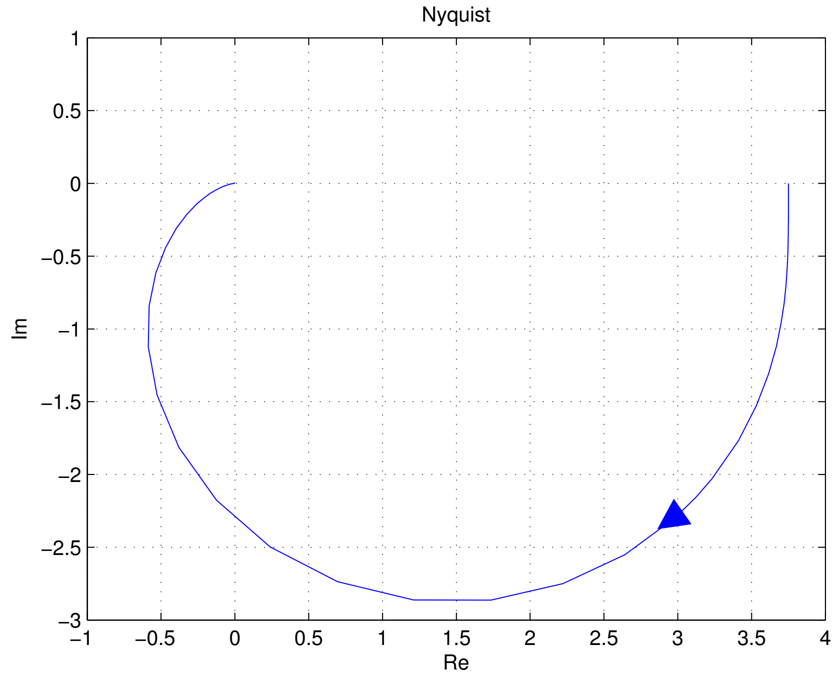
b. Fasmarginalen är c:a 80°. (0.5 p)

c. Systemets statiska förstärkning kan avläsas ur Nyquistkurvan. (0.5 p)

d. Systemet innehåller en dödtid. (0.5 p)

e. Vid proportionell återkoppling med förstärkning 50 blir det slutna systemet instabilt. (0.5 p)

f. Om systemet kopplas i serie med en förstärkning $K = 2$, minskar fasmarginalen. (0.5 p)



Figur 1 Nyquistkurvan för processen i uppg. **3**

.

Solution

a. Inte nödvändigtvis. Att Nyquistkurvan närmar sig 0 längs negativa reella axeln innebär inte nödvändigtvis att systemet har exakt två poler. Antag att systemets överföringsfunktion kan skrivas

$$G(s) = K\frac{B_m(s)}{A_n(s)},$$

där K är en förstärkning och B_m, A_n är polynom i s av grad m resp. n. Då gäller

$$\lim_{\omega\to\infty} \arg G(i\omega) = (m-n) \lim_{\omega\to\infty} \arctan\omega = (m-n)45^\circ.$$

Alltså kan Nyquistkurvan i uppgiften härröra från ett system med tex tre poler och ett nollställe (vilket också är fallet).

b. Nej. Fasmarginalen beräknas enl. $\phi_m = 180^\circ + \arg G_o(i\omega_c)$, där $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Identifierar vi punkten i Nyquistkurvan som svarar mot ω_c, ser vi att dess argument är c:a -125°, vilket ger en fasmarginal $\phi_m \approx 55^\circ$.

c. Ja. Systemets statiska förstärkning är $|G_o(i0)| \approx 3.75$

d. Nej. En dödtid L bidrar med en faktor e^{-Ls} i $G_o(s)$. För denna faktor gäller

$$\lim_{w\to\infty} \arg G_o(i\cdot\omega) = \lim_{w\to\infty} -L\omega = -\infty.$$

Enligt figuren blir dock argument för $G_o(\cdot)$ aldrig mindre än -180°.

e. Nej. Eftersom Nyquistkurvan aldrig skär negativa reella axeln, kommer den inte omsluta punkten -1 (oberoende av förstärkning). Nyquistkriteriet, som kan användas eftersom $G_o(\cdot)$ är stabilt, ger därför att även slutna systemet kommer vara stabilt.

f. Ja. Förstärkningen kommer ge oss ett nytt öppet system $G_o^*(\cdot) = 2G_o(\cdot)$ med samma fasfunktion som $G_o(\cdot)$, men med $|G_o^*(i\omega)| = 2|G_o(i\omega)|$. Nyquistkurvan för $G_o^*(\cdot)$ är alltså en omskalning av den för $G_o(\cdot)$, en faktor två i radiell led. Detta ger $|G_o(i\omega_c^*)| = \frac{1}{2}$. Ur Nyquistkurvan kan nu utläsas att $\arg G_o(i\omega_c^*) \approx -140° < \arg G_o(i\omega_c) \approx -125°$, vilket medför att fasmarginalen minskar.

4. Betrakta systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

med den generella styrlagen $u = -Lx + l_r r$, där $r = 0$ i just detta fall.

a. Efter analys har man kommit fram till att systemet inte är tillräckligt snabbt. Beräkna en tillståndsåterkoppling L så att det slutna systemets poler placeras i -4. (2 p)

b. Om vi vill göra systemet ännu snabbare, t.ex. placera båda polerna i -6 skulle vi stöta på problem. Varför? (1 p)

c. Låt oss anta att vi bara kan mäta y och inte x. För att kunna använda en tillståndsåterkoppling måste vi då först konstruera ett Kalmanfilter så att vi kan återkoppla med de skattade tillstånden istället. Beräkna K i ett Kalmanfilter så att skattningsfelets poler placeras i -8. (1 p)

Solution

a. För att kunna beräkna koefficienterna i L-vektorn, tar vi fram det slutna systemets karakteristiska polynom och matchar det mot det önskade karakteristiska polynomet där bägge polerna ligger i -4.

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{pmatrix} s+1+l_1 & -3+l_2 \\ 0 & s+4 \end{pmatrix} = s^2 + s(5+l_1) + 4(l_1+1)$$

$$= (s+4)(s+4) = s^2 + 8s + 16 = 0$$

Då får man två ekvationer där bara l_1 ingår, som har samma lösning, $l_1 = 3$, medan l_2 kan väljas fritt. Parametern l_2 bidrar inte då det andra tillståndet inte är styrbart.

b. Vi kan inte placera bägge polerna i -6 därför att den icke-styrbara, som ligger i -4, inte kan flyttas. Den andra polen som ligger i -1 kan vi dock flytta godtyckligt.

c. Här ska vi konstruera ett Kalmanfilter som ger att skattningsfelets poler placeras i -8. Det är fullt möjligt då systemet är observerbart. På samma sätt som i a) uppgiften tar vi fram den karakteristiska ekvationen för matrisen $(A-KC)$ dvs:

$$det(sI-A+KC) = det\begin{pmatrix} s+1+2k_1 & -3 \\ 2k_2 & s+4 \end{pmatrix} = s^2+s(5+2k1)+8k_1+6k_2+4$$

$$= (s+8)(s+8) = s^2+16s+64 = 0$$

där $k_1 = \frac{11}{2}$ och $k_2 = \frac{8}{3}$.

5. Figur 2 visar en reglerkrets där mätsignalen y påverkas av en laststörning d. Processens överföringsfunktion är $G_P(s) = \frac{1}{s}$ och regulatorns överföringsfunktion $G_R(s) = 5$. I figuren visas också $y(t)$ när $d(t)$ ändras som ett steg från $d=0$ till $d=d_0$ vid tiden $t=0$. Bestäm d_0. (2 p)

Solution

Det slutna systemets överföringsfunktion från d till y ges av

$$G_{d\to y}(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{5}{s}} = \frac{1}{s+5}.$$

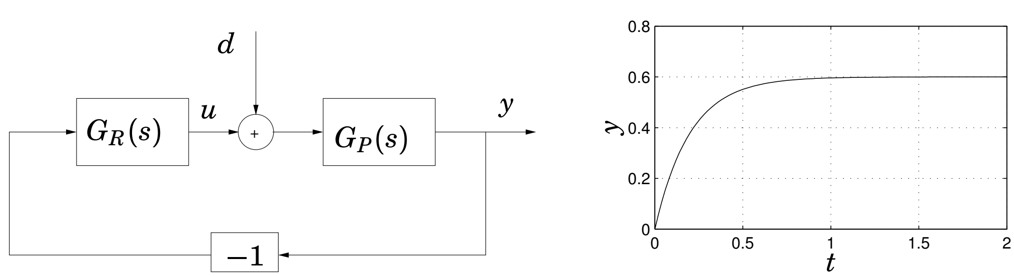
Laplacetransformen av $d(t)$ är $D(s) = \frac{d_0}{s}$. Beräkna $Y(s)$ som

$$Y(s) = G_{d\to y}(s)D(s) = \frac{1}{s+5}\frac{d_0}{s}.$$

Slutvärdesteoremet kan användas för att beräkna $\lim_{t\to\infty} y(t)$ eftersom $sY(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet,

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sd_0}{s(s+5)} = \frac{d_0}{5}$$

Från figuren läses y_∞ av till $y_\infty = 0.6$. Vi får då $d_0 = 0.6\cdot 5 = 3$.



Figur 2 Blockshema och svar på laststörning i uppgift 5

6. Värmedynamiken i ett rum kan beskrivas av följande differentialekvation:

$$\dot{x} = -ax + bu$$
$$y = cx$$

där x är rummets temperatur, u är mängden värme som tillförs rummet och y är den spänning som temperaturgivaren avger och som är proportionell mot temperaturen. Antag att $a = 2$, $b = 3$ och $c = 0.01$. Designa en PI-regulator så att det slutna systemet har den karaktäristiska ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$$

där $\zeta = 0.7$ och $\omega = 4$. (3 p)

Solution

För att ta fram överföringsfunktionen tar vi Laplace-transformen på differentialekvationen. Vi antar att x(0) = 0.

$$sX(s) - x(0) = -aX(s) + bU(s) \tag{1}$$
$$(s+a)X(s) = x(0) + bU(s) \tag{2}$$
$$X(s) = \frac{1}{s+a}x(0) + \frac{b}{s+a}U(s) \tag{3}$$
$$Y(s) = \frac{c}{s+a}x(0) + \frac{cb}{s+a}U(s) = \frac{0.03}{s+2}U(s) \tag{4}$$

Vi vill nu bestämma regulatorparametrarna K och T_i genom att ta fram polerna för det slutna systemet och välja K och T_i så att dessa poler hamnar på specificerad plats. Överföringsfunktionen för det slutna systemet från r till y blir

$$Y = \frac{G_pG_r}{1+G_pG_r}R \tag{5}$$

Karaktäristiska ekvationen blir

$$1 + G_pG_r = 1 + \frac{0.03}{s+2}\frac{K(sT_i+1)}{sT_i} = 0$$

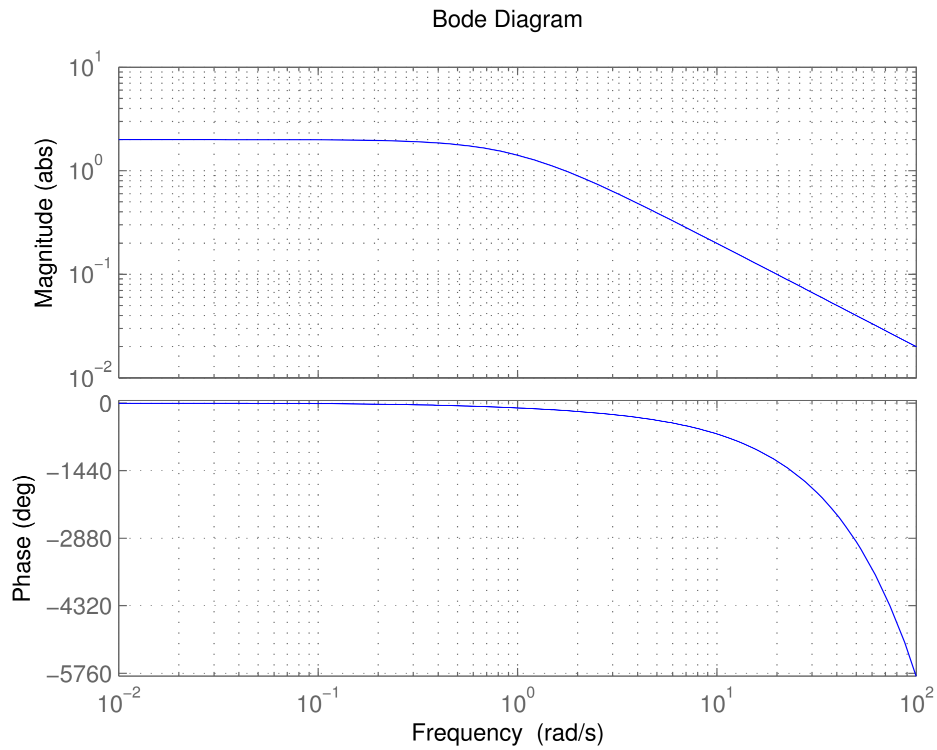
$$s^2 + s(2 + 0.03K) + 0.03K/T_i = 0$$

När dessa koefficienter matchas mot den önskade specificerade polplaceringen får vi ekvationer för att bestämma K och T_i.

$$s^2: \quad 1 = 1 \tag{6}$$
$$s: \quad 2 + 0.03K = 2\zeta\omega \rightarrow K = \frac{2\zeta\omega - 2}{0.03} = 120 \tag{7}$$
$$1: \quad \frac{0.03K}{T_i} = \omega^2 \rightarrow T_i = \frac{0.03K}{\omega^2} = 0.225 \tag{8}$$

7. Ett första ordningens system med en tidsfördröjning L är

$$G(s) = \frac{2}{s+1}e^{-Ls}$$



Figur 3 Bodediagram för problem 7a.

a. Skissa Bodediagrammet för $G(s)$ då $L = 1$ s. (2 p)

b. Systemet återkopplas med en proportionell regulator med förstärkningen K. Visa att systemet är stabilt för alla $L > 0$ om $0 < K < 0.5$. (1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{2}{s+1}e^{-s}$$

Bodediagrammet ritas enligt figur 3.

b. Om det återkopplade systemet ska vara stabilt för alla L måste Nyquistkurvans avstånd från origo vara mindre än ett för alla ω, d.v.s. Nyquistkurvan ska ligga innanför enhetscirkeln. Systemet utan tidsfördröjning har lågfrekvensasymptoten 2. Eftersom det är ett första ordningens system så är detta högsta förstärkningen, vilket ger $0 < K < 0.5$ för stabilitet.

8. Vi antar att vi vill styra en elmotor. Vår matematiska modell av elmotorn har överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{4}{s^2}$$

En återkoppling av denna överföringsfunktion, med en P-regulator som har förstärkning 1, ger oanvändbar reglering. Designa därför en lämplig kompensering som ger systemet fasmarginalen 40° samtidigt som den ger en fem gånger större skärfrekvens. (3 p)

Solution

Välj en fasavancerande kompenseringslänk

$$G_k(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}, \quad N > 1.$$

Detta för att den höjer förstärkningen vid höga frekvenser samtidigt som den höjer fasen vid den nya skärfrekvensen. Vi måste nu bestämma motorns nya skärfrekvens och fasmarginalen vid denna frekvens. Den gamla skärfrekvensen kan fås ur sambandet

$$|G_p(i\omega_c)| = \frac{4}{\omega_c^2} = 1 \Rightarrow \omega_c^2 = 4 \Rightarrow \omega_c = 2\,\text{rad/s}$$

Den önskade skärfrekvensen ska vara 5 gånger så stor och blir således $\omega_{c,ny} = 10$ rad/s. Processens fasmarginal i denna punkt är

$$\varphi_m = 180^\circ + arg\, G_p(i\omega_{c,ny}).$$

Där

$$arg\, G_p(i\omega_{c,ny}) = arg(\frac{4}{-\omega_{c,ny}^2}) = -180^\circ.$$

Det ger fasmarginalen $\varphi_m = 0^\circ$. Därmed ska kompenseringsfiltret minst ha fasen $+40^\circ$ vid skärfrekvensen. En titt i formelsamlingen på sidan 12 ger oss t.ex. $N = 5$.

b ges av sambandet $b\sqrt{N} = \omega_{c,ny}$. Alltså blir $b \approx 4.47$. Kompenseringsfiltrets förstärkning K_k fås i sin tur från formeln

$$K_k = \frac{1}{\sqrt{N}|G_p(i\omega_{c,ny})|} = \frac{1}{(\sqrt{5}\frac{4}{10^2})} \approx 11.18$$

Därmed är kompenseringsfiltret bestämt till

$$G_k(s) = 11.18\,\frac{1 + s/4.47}{1 + s/22.35}.$$