LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 19 augusti 2010 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås måndagen den 30 augusti på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset och på kursens hemsida. Visning sker samma dag kl 12.00–12.30 i lab C.

1. Ett system beskrivs av tillståndsekvationerna

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).\end{aligned}$$

a. Bestäm systemets överföringsfunktion från u till y. (1 p)

b. Bestäm systemets poler och nollställen. Är systemet stabilt? Kommer ett stegsvar initialt att gå i rätt riktning? (2 p)

c. Med vilken amplitud svänger y om vi har $u(t) = 0.3sin(2t)$? (1 p)

Solution

a.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{0}_{D}\end{aligned}$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+1}{s^2+s+2}$

b. Poler: $s^2 + s + 2 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Alla poler ligger i vänster halvplan, alltså är systemet stabilt.

Nollställen: $s + 1 = 0 \Rightarrow s = -1$. Alla nollställena ligger i vänster halvplan, alltså kommer ett stegsvar initialt kommer att gå i rätt riktning.

c. Den sökta amplituden är amplituden hos insignalen gånger systemets förstärkning för frekvensen för sinussignalen, dvs $\omega = 2$.

$0.3|G(2i)| = 0.3\frac{|1+2i|}{|(2i)^2+2i+2|} = 0.3\sqrt{\frac{5}{8}} \approx 0.24$

2. Ett system med mätsignal y och styrsignal u beskrivs av den olinjära differentialekvationen

$$\ddot{y} - 2\dot{y}y + y^3 = \sqrt{u}$$

a. Skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Bestäm alla stationära punkter för systemet. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring valfri stationär punkt. (1 p)

Solution

a. Inför t.ex tillstånden $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$. Detta ger

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= 2x_1x_2 - x_1^3 + \sqrt{u} \\ y &= x_1\end{aligned}$$

b. I stationäritet är alla tidsderivator 0. Detta ger

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ u &= x_1^6 \end{aligned}$$

Systemets stationära punkter är alltså $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (t, 0, t^6)$.

c.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, & \dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_2 - 3x_1^2, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_1, & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} = 0.5u^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 1, & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 0, & \dfrac{\partial g}{\partial u} = 0 \end{array}$$

Välj t.ex $t = 1 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 0, 1)$. Detta ger

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x \end{aligned}$$

3. Betrakta följande system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

a. Kontrollera att systemet är styrbart och observerbart. (1 p)

b. Bestäm en styrlag $u = -Lx + l_r r$ så att det slutna systemets poler placeras i -4 och $y = r$ i stationäritet (3 p)

c. Bestäm ett Kalmanfilter som skattar tillstånden med hjälp av u och y. Placera filtrets poler dubbelt så snabba som tillståndsåterkopplingen i föregående deluppgift. (2 p)

Solution

a. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vilken har full rang, det vill säga systemet är styrbart.
Observerbarhetsmatrisen är

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

som även den har full rang, systemet är observerbart.

b. Det karakteristiska polynomet för det slutna systemet ges av

$$\det(sI-(A-BL)) = \det\begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ l_1 & s+2+l_2 \end{pmatrix} = s^2+(5+l_2)s+6+l_1+3l_2$$

För att placera polerna i -4 jämför vi koefficienterna med de i

$$(s+4)^2 = s^2+8s+16$$

vilket ger

$$\left.\begin{aligned} 5+l_2 &= 8 \\ 6+l_1+3l_2 &= 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow l_1 = 1, \quad l_2 = 3$$

Eftersom $y = x_1$ vill vi välja l_r så att $x_1 = r$ i stationäritet. Tillståndsekvationerna när $\dot{x} = 0$ blir

$$\begin{aligned} 0 &= -3x_1 + x_2 \\ 0 &= -x_1 - 5x_2 + l_r r \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $x_2 = 3x_1$ vilket insatt i den andra ekvationen ger

$$0 = -x_1 - 15x_1 + l_r r = -16x_1 + l_r r$$

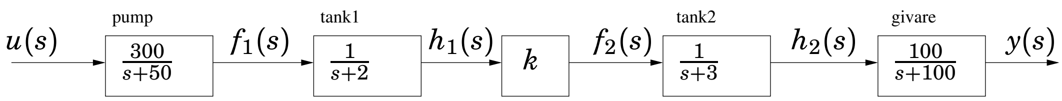
För att ekvationen skall vara uppfylld för $x_1 = r$ måste vi då välja $l_r = 16$.

c. Det karakteristiska polynomet för skattningsfelet ges av

$$\det(sI-(A-KC)) = \det\begin{pmatrix} s+3+k_1 & -1 \\ k_2 & s+2 \end{pmatrix} = s^2+(5+k_1)s+6+2k_1+k_2$$

För att göra observeraren dubbelt så snabb som tillståndsåterkopplingen vill vi placera polerna i -8 och jämför därför med polynomet $s^2+16s+64$. Identifiering av koefficienter ger $k_1 = 11$, $k_2 = 36$.

4. Ett system består av en pump, två linjära seriekopplade tankar med utloppshål, och en nivågivare för den undre tanken. Figur 1 visar blockdiagrammet för systemet. u är spänningen till pumpen, f_1, f_2 är inflöden till



Figur 1 Systemet i uppgift 4

övre tanken respektive undre tanken, h_1, h_2 är nivåerna i övre respektive undre tanken, k är en omvandlingsfaktor mellan nivå och flöde, och y är den uppmätta nivån i den undre tanken.

a. Antag att tankarna är identiskt dimensionerade så när som på utloppshålens area. Vilken tank har störst utloppsarea? Motivera! (1 p)

b. Vi är intresserade av att undersöka stegändringar i u. Vilket av nedanstående system är den bästa approximationen till systemet i Figur 1. Motivera!

$$G_1(s) = \frac{300k}{(s+50)(1+100s)} \quad G_2(s) = \frac{k}{(s+50)(1+100s)}$$
$$G_3(s) = \frac{6k}{(s+2)(s+3)} \quad G_4(s) = \frac{k}{(s+2)(s+3)}$$
$$G_5(s) = \frac{k}{(s+75)(s+1.5)} \quad G_6(s) = \frac{150k}{(s+75)(s+1.5)}$$

(1 p)

Solution

a. Nivån i tanken med större utgånshål sjunker snabbare än i tanken med minde utgångshål. Låt q beteckna inflödet. Från överföringsfunktionen för första tanken:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{s+2}Q(s) \Rightarrow sH_1(s) + 2H_1(s) = Q(s) \Rightarrow sH_1(s) = -2H_1(s) + Q(s) \\ \dot{h}_1 &= -2h_1 + q \end{aligned}$$

Antag nu att vi fyller tanken till h_0 och sedan stänger av inflödet. Då får vi

$$\dot{h}_1 = -2h_1,\ h(0) = h_0 \Rightarrow h_1(t) = h_0e^{-2t}$$

Genom att uprrepa proceduren för den undre tanken får vi fram:

$$\dot{h}_2 = -3h_1,\ h(0) = h_0 \Rightarrow h_2(t) = h_0e^{-3t}$$

Vatnnet rinner alltså ut snabbare ur den undre tanken vilket innebär att den har störst utloopsarea.

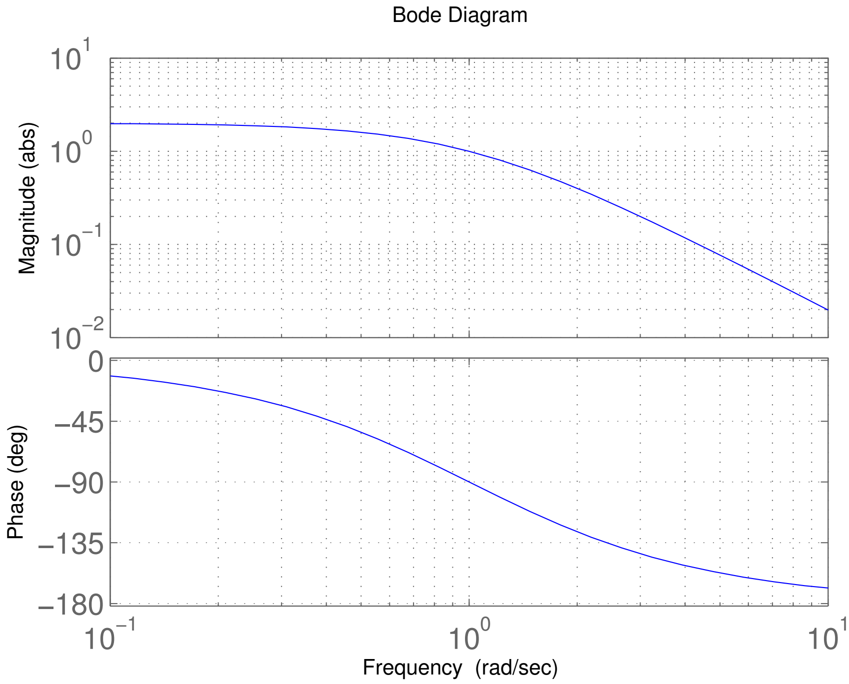
Ett alternativt kanske snabbare sätt är att utnyttja att vid ett konstant inflöde blir jämviktsnivån lägre med ett stort utloppshål. Jämviktsnivån i tankarna vid $q = 1m^3/s$ ges av slutvärdesteoremt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} h_1(t) &= \lim_{s\to 0} sH_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s+2}\frac{1}{s} = \frac{1}{2} \\ \lim_{t\to\infty} h_2(t) &= \lim_{s\to 0} sH_2(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s+3}\frac{1}{s} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

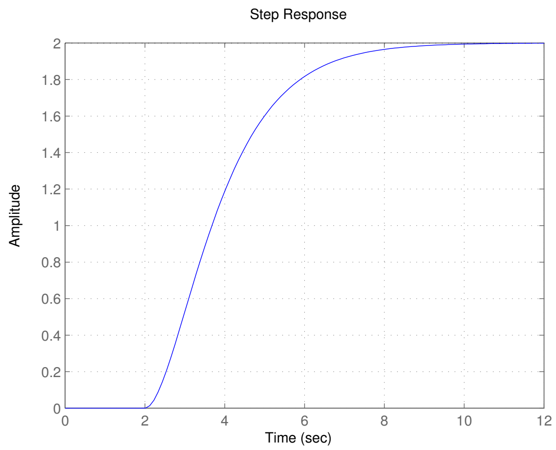
vilket återigen visar att den undre tanken har störst utloppsarea.

b. Systemet har två långsamma poler i (-2,-3) och två snabba poler i (-50,-100). Eftersom det är de långsamma polerna som dominerar systemets dynamik är det de vi ska behålla. Eftersom vi är intresserade av att undersöka stegändringar i u är det viktigt att statiska förstärkningen stämmer. Rätt svar är G_3 då även den stationära förstärkningen stämmer.

5. Bodediagrammet för en processmodell samt regulator (d.v.s öppna systemet) visas i figur 2. Det visar sig finnas en omodellerad tidsfördröjning i systemet. Du gör därför ett stegsvarsexperiment på det öppna systemet och får fram resultatet i figur 3.



Figur 2 Bodediagrammet för öppna systemet utan tidsfördröjning i problem 5.



Figur 3 Stegsvarsresultatet för processen i problem 5.

a. Är slutna systemet stabilt? Du kan anta att bodediagrammet stämmer så när som på tidsfördröjningen. (1 p)

b. Designa en kompenseringslänk för systemet (med tidsfördröjning) så att skräfrekvensen det öppna systemet förblir oförändrad och fasmarginalen blir 20^o. (3 p)

Solution

a. Vi låter G betteckna det öppna systemet utan tidsfördröjning. Från figur 2 kan vi avläsa att fasmarginalen ϕ_m för G är 90^o. Stegsvarsexperimentet visar att tidsfördröjningen är 2 s. Fasen för det öppna systemet med tidsfördröjning blir då:

$$arg\{G(i\omega)e^{-i2\omega}\} = arg\{G(i\omega)\} - 2\omega$$

Amplitudkurvan påverkas inte av tidsfördröjningar, vilket innebär att skärfrekvensen förblir $\omega_c = 1$. Vi skärfrekvensen har vi alltså en fasminsking på $2\frac{180}{pi} = 115^o > \phi_m$. Systemet är alltså instabilt enligt Nyquistteoremet.

b. Eftersom vi vill höja fasen behöver vi en fasavancerance länk:

$$G_k(s) = KN\frac{s+b}{s+bN}$$

Vid den önskade skärfrekvensen ($\omega_c = 1$) är fasmarginalen $\phi_m = 180 - (115+90) = -25$ grader. Vi behöver alltså höja fasen 45^o. Ur formelsamlingen kan vi avläsa $N = 6$. Nästa steg är att placera fastoppen vid den önskade skärfrekvensen:

$$b\sqrt{N} = \omega_c \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Sista steget är att se till att $\omega = 1$ förblir skärfrekvens:

$$|G_k(i1)||G(i1)| = 1 \Rightarrow K\sqrt{N} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$G_k(s) = \frac{\sqrt{6}s + 1}{s + \sqrt{6}}$$

löser problemet.

6. En dubbelintegrator har överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s^2}$$

Beräkna parametrarna i en PD-regulator så att det slutna systemet får sina poler i $s = -2$. (2 p)

Solution

Om PD-regulatorn ges av $K(sT_d + 1)$ blir Kretsöverföringsfunktionen

$$\frac{\frac{KK_p(sT_d+1)}{s^2}}{1 + \frac{KK_p(sT_d+1)}{s^2}}$$

vilket ger det karakteristiska polynomet

$$s^2 + KKp(sT_d + 1) = s^2 + T_d KK_p s + KK_p$$

jämför med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ ger

$$K = \frac{4}{K_p}$$
$$T_d = 1$$

7. Antag att du fått i uppgift att reglera temperaturen i vattnet från en dusch. Efter en stunds modellerande kommer du fram till att duschen borde kunna beskrivas med en första ordningens modell med dödtid:

$$G_p(s) = \frac{e^{-Ls}}{(10s+1)}.$$

Vidare hoppas du att duschen kan regleras bra nog med hjälp av en PI-regulator

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right).$$

Du väljer till en början $T_i = 3$

a. Givet att amplitudmarginalen inte får underskrida 2, hur stort får K maximalt vara om dödtiden är $L = 0$ respektive $L = 2$ sekunder? (2.5 p)

b. Din uppdragsgivare tipsar dig om en regulatorinställning där man väljer T_i till samma som systemets tidskonstant, dvs i vårt fall $T_i = 10$. Givet denna integraltid, hur stort kan K väljas utan att dödtidsmarginalen underskrider 1 sekund? Antag att $L = 2$ sekunder. (1.5 p)

Solution

a. Då $L = 0$ sekunder kommer öppna systemets överföringsfunktion

$$G_o(s) = K\frac{(3s+1)}{3s}\frac{e^{-sL}}{(10s+1)}$$

aldrig ha en fas under $-180°$. Därmed kommer amplitudmarginalen vara oändligt stor oavsett värdet på K.

Med $L = 2$ sekunder blir argumentfunktionen

$$\arg G_o(i\omega) = -2\omega - \frac{\pi}{2} + \arctan(3\omega) - \arctan(10\omega).$$

Numeriska beräkningar visar att denna kommer ha fasen $-180°$ då $\omega_0 = 0.62$ rad/s. För att ha minst amplitudmarginalen 2 krävs att $|G_o(i\omega_0)| \leq 0.5$. Detta ger ekvationen:

$$K\frac{\sqrt{9\omega_0^2+1}}{3\omega_0\sqrt{100\omega_0^2+1}} \leq 0.5$$

och slutligen $K \leq 2.76$.

b. Öppna systemets överföringsfunktion blir nu

$$G_o(s) = \frac{K}{10s}e^{-2s}.$$

Eftersom kravet är att dödtidsmarginalen är minst $L_m = 1$ sekund vet vi att

$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} \Rightarrow \omega_c = \phi_m \tag{1}$$

där ϕ_m är fasmarginalen och ω_c är skärfrekvensen. Om man nu beräknar fasmarginalen

$$\phi_m = \pi + \arg G_o(i\omega_c) = \frac{\pi}{2} - 2\omega_c,$$

och tar (1) i beaktning ser vi att skärfrekvensen blir

$$\omega_c = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}.$$

Genom att vi vet att $|G_o(i\omega_c)| = 1$ kan vi slutligen beräkna K

$$|G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{10\omega_c} = 1 \Rightarrow K = \frac{10\pi}{6} = 5.24$$