Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1.

a. Laplace-transform ger

$$s^3Y(s) = s^2aY(s) - s7Y(s) - Y(s) + U(s) + sU(s),$$

vilket ger

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

med

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 - as^2 + 7s + 1}.$$

b. Överföringsfunktionens karakteristiska polynom ges av

$$s^3 - as^2 + 7s + 1$$

Stabilitetsvillkoren i formelsamlingen ger att systemet är stabilt då $a < 0$ och $-7a > 1$, alltså då $a < -1/7$.

2. Polernas och nollställenas placering i det komplexa talplanet ger värdefull information om systemets uppträdande. För de olika överföringsfunktionerna $G_1(s)$–$G_4(s)$ ges dessa av

$$\begin{aligned}
&G_1(s) : \text{poler i } s = -1 + i \text{ och } s = -1 - i \\
&G_2(s) : \text{pol i } s = 0.2 \\
&G_3(s) : \text{pol i } s = -1 \\
&G_4(s) : \text{poler i } s = -2 \text{ och } s = -1 \text{ samt nollställe i } s = 1\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Från polernas placering inses att det enda systemet som är instabilt är $G_2(s)$. För de övriga systemen kan slutvärdesteoremet användas för att bestämma stegsvarets värde då $t \to \infty$. Då laplacetransformen för ett stegsvar är $1/s$ följer att utsignalen $y(t)$ har slutvärdet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)\ .$$

Således har $G_1(s)$ slutvärdet 0.5, $G_3(s)$ slutvärdet 1 och $G_4(s)$ slutvärdet 0.5.

Sedan inses att systemet $G_4(s)$ har ett nollställe i höger halvplan, vilket gör att stegsvaret initialt minskar istället för att öka. Det enda system som har komplexa poler är $G_1(s)$, varför detta system är det enda som kan ge upphov till oscillationer.

Från ovanstående resonemang kan följande kopplingar göras

$$G_1(s)\text{–}B \quad G_2(s)\text{–}D \quad G_3(s)\text{–}A \quad G_4(s)\text{–}C\ .$$

3.

a. Den styrbara kanoniska formen fås direkt från formelsamlingen. Då processen är av andra ordningen krävs två tillstånd för en realisering.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\
y &= [\,2 \quad 2\,]\, x = Cx \; .
\end{aligned}
$$

b. Godtycklig polplacering för det slutna systemet är möjligt om det öppna systemet är styrbart. Således bestäms det öppna systemets styrbarhetsmatris W_c. Systemet är styrbart om W_c har full rang. Med beteckningar enligt uppgift a) blir räkningarna

$$
W_c = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .
$$

Det är uppenbart att systemet är styrbart, ty styrbarhetsmatrisen W_c har full rang. Detta kan även inses genom att beräkna det $W_c = 1 \neq 0$.

c. Med $u = -Lx + l_r r,\ L = [\,l_1 \quad l_2\,]$, blir det slutna systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Lx + l_r r) = (A - BL)x + Bl_r r \\
y &= Cx \; .
\end{aligned}
$$

Polerna till det slutna systemet är ekvivalent med egenvärdena till matrisen $A - BL$ i det slutna systemet. Polerna ges således av det karakteristiska polynomet

$$
p(s) = \det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s + l_1 + 5 & l_2 + 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + (5 + l_1)s + l_2 + 1.
$$

Den önskade polplaceringen är $-1 \pm i$. Denna motsvarar det karakteristiska polynomet

$$
p_d(s) = (s - (-1 + i))(s - (-1 - i)) = s^2 + 2s + 2.
$$

För att det karakteristiska polynomet för det slutna systemet skall överensstämma med $p_d(s)$ krävs att

$$
\begin{aligned}
5 + l_1 &= 2 \\
l_2 + 1 &= 2 \; .
\end{aligned}
$$

Lösning av detta ekvationssystem ger parametervektorn L i tillståndsåterkopplingen enligt

$$
L = [\,-3 \quad 1\,] \; .
$$

För att säkerställa att $y = r$ i stationaritet väljs parametern l_r sådan att $G(0) = 1$ där $G(s)$ är överföringsfunktionen från referenssignal till mätsignal. Överföringsfunktionen ges av

$$
G(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r \; .
$$

Således fås parametern l_r enligt

$$
l_r = \frac{1}{C(-A + BL)^{-1} B} = \frac{1}{1} = 1 \; .
$$

d. Om inte alla tillstånd är mätbara kan en observerare introduceras. Denna skattar då tillstånden i processen baserat på mätsignalen från processen samt modellen av processen. Den lineära tillståndsåterkopplingen kan sedan baseras på de skattade tillstånden istället för de icke mätbara verkliga tillstånden.

4. För att kompensera systemet används en fasavancerande länk. För att nå specifikationen behövs ett faslyft på 30° vid skärfrekvensen. Ur formelsamlingen ges att $N = 3$. Skärfekvensen ω_c ges av Bodediagrammet till $12,6$ rad/s. Därmed kan b beräknas som $b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = 7,26$ och slutligen $K_K = \frac{1}{\sqrt{N}} = 0,58$. Den slutgiltiga regulatorn blir då $G_r(s) = K_K \frac{1+s/b}{1+s/(bN)}$ med värden enligt ovan.

5. Överföringsfunktionen för ett allmänt första ordningens system kan skrivas

$$G(s) = \frac{1}{s+a},$$

där a är en reell parameter. Genom att beräkna absolutbeloppet och argumentet av $G(i\omega)$, för $\omega = 5$ rad/s, kan parametern a bestämmas, eftersom utsignalen från ett system med insignalen $u(t) = \sin(5t)$ blir $y(t) = |G(i5)| \sin(5t + \arg G(i5))$. Följande två ekvationer fås följaktligen

$$|G(5i)| = \frac{1}{\sqrt{5^2 + a^2}} = 0.1 \tag{2}$$

$$\arg(G(5i)) = -\arctan(\frac{5}{a}) = -\frac{\pi}{6}. \tag{3}$$

Således följer att $a = 8.66$.

6.

a. För låga frekvenser har kurvan i Bodediagrammets förstärkningsdel en lutning på +2. Detta, kombinerat med att fasen för låga frekvenser börjar på 180 grader, är indikativt på ett system med en dubbel deriveringsterm. Vid $\omega = 1$ sker en nedbrytning av lutningen med två steg, samtidigt som fasen närmar sig 0 grader. Detta innebär att det finns två poler med brytfrekvens $\omega = 1$. Vid $\omega = 100$ sker ännu en nedbrytning av förstärkningskurvans lutning samtidigt som fasen går ner mot -90 grader. Här finns alltså ännu en pol. Detta ger att överföringsfunktionen för systemet kan skrivas som

$$G(s) = K \cdot s^2 \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s/100+1} = \frac{Ks^2}{(s+1)^2(s/100+1)}$$

För att bestämma K noterar vi att lågfrekvensasymptoten för $G(s)$ ges av $G_{LF}(s) = Ks^2$. Förstärkningen för den ges av $|G_{LF}(i\omega)| = K\omega^2$. Avläsning av Bodediagrammet vid lämplig låg frekvens ger att

$$\begin{aligned} |G_{LF}(0.1i)| &= 0.1^2 K = 0.01 \\ \implies K = 1 & \end{aligned}$$

b. Eftersom systemet är linjärt och tidsinvariant gäller att utsignalen vid en sinusformad insignal på formen $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ efter att transienterna avklingat har formen $y(t) = |G(i\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg G(i\omega))$. Speciellt gäller även att om insignalerna $u_1(t)$ och $u_2(t)$ ger upphov till utsignalerna $y_1(t)$ och $y_2(t)$ så ger insignalen $u_1(t) + u_2(t)$ utsignalen $y_1(t) + y_2(t)$.

Förstärkningen och fasförskjutningen för systemet ges av

$$
\begin{aligned}
|G(i\omega)| &= \frac{\omega^2}{(\omega^2+1)\sqrt{\omega^2/100^2+1}} \\
\arg G(i\omega) &= \pi - 2\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{100}
\end{aligned}
$$

Detta ger att utsignalen blir

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 150\cdot 0.01\cdot\sin(0.1t + 2.94) - 2\cdot 0.71\sin(100t - 0.77) \\
&= 1.5\sin(0.1t + 2.94) - 1.42\sin(100t - 0.77)
\end{aligned}
$$

Alternativt kan utsignalen också bestämmas genom avläsning i Bodediagrammet.

7.

a. Vi söker den frekvens för vilken

$$\arg e^{-i0.5\omega}G_p(i\omega) = -\pi,$$

dvs då

$$-0.5\omega - \arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{3} = -\pi.$$

Detta kan vi lösa, till exempel, genom att plotta med miniräknaren. Frekvensen blir $\omega_0 \approx 2.5$. Vi har att

$$K \le \frac{1}{|G_p(i\omega_0)|} \approx 10.5.$$

b. Laplace-transformen av felet vid en stegändring ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)K}\frac{1}{s}.$$

Vi använder slutvärdesteoremet (och det får vi, för systemet är stabilt!)

$$sE(s) = \frac{1}{1+G_p(s)K} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)+K} \longrightarrow \frac{3}{3+K} \approx 0.22.$$

8.

a. Överföringsfunktionen för en PI-regulator ges av

$$G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i}) = \frac{K}{T_i}\frac{sT_i + 1}{s}$$

vilket vi kan identifiera som en integrator, ett nollställe och en förstärkning. Nollställets brytfrekvens ges av $1/T_i = 2$ rad/s, vilket ger $T_i = 0.5$ s. För att bestämma K avläses Bodediagrammet vid någon lämplig frekvens och pluggas in i förstärkningen för regulatorn:

$$\begin{aligned} |G_R(0.1i)| &= \frac{K}{T_i}\frac{\sqrt{1 + 0.1^2 T_i^2}}{0.1} = 20 \\ &\implies K = 1 \end{aligned}$$

b. Här vill vi designa en fasretarderande länk $G_k(s) = \frac{s+a}{s+a/M}$ för att minska det stationära felet. Bilda kretsöverföringsfunktionen utan kompenseringslänk: $G_0(s) = G_P(s)G_R(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$. Vi kan sedan använda slutvärdesteoremet för att undersöka det stationära felets beteende vid enhetsramp som referens ($R(s) = \frac{1}{s^2}$).

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} sE(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + G_k(s)G_0(s)}\frac{1}{s^2} = \\ &\lim_{s\to 0} s\frac{s(s + a/M)(s + 1)}{s(s + a/M)(s + 1) + (s + a)(s + 2)}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{2M} \\ &\implies M = 10 \end{aligned}$$

Nackdelen med en fasretarderande länk är att systemet generellt tappar fas. Extra viktigt blir detta kring skärfrekvensen, därför använder vi oss av tumregeln $a = 0.1\omega_c$ där ω_c är det ursprungliga systemets skärfrekvens. Återstår alltså att beräkna den.

$$\begin{aligned} |G(i\omega_c)|^2 &= \frac{4 + \omega_c^2}{\omega_c^2(\omega_c^2 + 1)} = 1 \\ &\implies \omega_c = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Detta ger $a = 0.1\sqrt{2}$ och den slutgiltiga kompenseringslänken ges alltså av

$$G_k(s) = \frac{s + 0.1\sqrt{2}}{s + 0.01\sqrt{2}}$$