Kontrollfrågor och Bra att veta

Meris Bahti & Felix Mul

10 mars 2013

Fråga 1

Q: Vad menas med en **odämpad harmonisk svängning**? Hur beräknas dess komplexa amplitud?

A: $Asin(\omega t+\phi)$ är en **odämpad harmonisk svängning**. Man räknar ut den komplexa amplituden genom: $A(i\omega) = |H(i\omega)|$

Fråga 2

Q: Hur kan man definiera deltafunktionen?

A: $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} p_\Delta(t)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

Fråga 3

Q: Vilket samband finns mellan stegfunktionen och deltafunktionen?

A: $\theta(t)' = \delta(t)$

Fråga 4

Q: Definiera Laplacetransform av en funktion. Har alla funktioner en Laplacetransform? Om inte så förklara varför.

A: $\mathcal{L}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s),\ s = \sigma + 0\omega$

Alla funktioner har inte en laplacetransform. Integralen måste konvergera för att det ska finnas en sådan. T.ex:
$f(t) = 1, \mathcal{L}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}dt = [\frac{1}{s}e^{-st}]_{-\infty}^{+\infty}$

Fråga 5

Q: Härled derivationsregeln för den ensidiga Laplacetransformationen.

A: Använd regel (19):
$\mathcal{L}_I(f(t)) = F(s)$ så $\mathcal{L}_I(f'(t)) = \mathcal{L}_I(f'(t)\theta(t)) = sF(s) - f(0)$
Använd regel (16):
$\mathcal{L}(f(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) = (f(t)\theta(t))' = f'(t)\theta(t) + f(t)\delta(t) = f'(t)\theta(t) + f(0)\delta(t)$
VL: $\mathcal{L}((f(t)\theta(t))') = s\mathcal{L}(f(t)\theta(t)) = s\mathcal{L}(f(t))$

HL: $\mathcal{L}(f'(t)\theta(t)) + \mathcal{L}(f(0)\delta(0)) = \mathcal{L}(f'(t)\theta(t)) + f(0)1 = \mathcal{L}_I(f'(\theta(t))) + f(0) = \mathcal{L}_I(f(t)) = s\mathcal{L}_I(f(t)) - f(0)$

Fråga 6

Q: Vad blir faltningarna $\delta * f$ och $\delta^{(n)} * f$?

A: $\delta^{(n)} * f = f^{(n)}$ t.ex. $\delta' * f = f'$ eftersom $\mathcal{L}^{-1}(sF(s)) = f'(t)$ och $\mathcal{L}(\delta'(t)) = s$

Fråga 7 - viktig

Q: Vad menas med att ett system i insignal- utsignalform är:

a) Linjärt

b) Tidsinvariant

c) Stabilt

d) Kausalt

A:

a) Linjärt: $\mathcal{S}(aw_1 + bw_2) = a\mathcal{S}w_1 + b\mathcal{S}w_2$

b) Tidsinvariant: Ifall $\mathcal{S}f(t) = y(t)$ så $\mathcal{S}f(t-\tau) = y(t-\tau)$

c) Stabilt: Ifall insignalen är begränsad så är även utsignalen begränsad.

d) Kausalt: Orsak föregår verkan. Insignalen $f(t) = 0$ för $t < t_0$ så är utsignalen $y(t) = 0$ för $t < t_0$

Fråga 8 - viktig

Q: Under vilka villkor på impulssvaret är ett linjärt system i insignal-utsignalform:

a) Tidsinvariant - kommer ej

b) Stabilt

c) Kausalt

A:

b) Tidsinvariant: kommer ej

b) Stabilt: Om gränsvärdet $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt$ är konvergent så är systemet stabilt.

b) Kausalt: Ifall $h(t)$ är en kausal funktion. T.ex. ifall $h(t)$ innehåller $\theta(t)$ så är $h(t) = 0$ för $t < 0$

Fråga 9

Q: System i insignal-utsignalform kan ibland beskrivas som faltningar med en fix funktion. Under vilka villkor på systemet gäller det atta och vad kallas den fixa funktionen?

A: Detta gäller för LTI-system (Linjärt tidsinvaranta) där $h(t)$ är impulssvaret och utsignalen $y(t) = f(t) * h(t)$

Fråga 10

Q: Vilka samband finns mellan stegsvar och impulssvar för ett linjärt tidsinvariant system?

A: Derivatan av stegsvaret är impulssvaret. Detta ges som: $(\mathcal{S}\theta(t))' = h(t)$

Fråga 11

Q: Ange impulssvaret för en derivation och en fördröjning.

A: Då impulssvaret är $\delta(t)$ så är dess derivata $\frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$ och en fördröjning för $\delta(t)$ är $\delta(t-a)$.

Fråga 12

Q: Definiera överföringsfunktionen för ett LTI-system.

A: Överföringsfunktionen är laplacetransformen av impulssvaret $\mathcal{L}(h(t)) = H(s)$ eller $\frac{\mathcal{S}e^{st}}{e^{st}}$

Fråga 13

Q: Vilka villkor måste man lägga på ett system för att det skall ha en frekvensfunktion? Ange sambandet mellan frekvens- och överföringsfunktionen.

A: För ett stabilt system så: $F_n(\omega) = H(i\omega)$

Fråga 14

Q: Hur kan ett systems svar på en sinusfunktion bestämmas, då frekvensfunktionen för systemet är känd?

A: $A(\omega) = |F_n(\omega)|$, $\phi(\omega) = arg(F_n(\omega))$ och $\mathcal{S}sin(\omega t) = A(\omega)sin(\omega t + \phi(\omega))$
Exempel: Vad är svaret på sin2t?
$F_n(\omega) = \frac{1}{i\omega+1} \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$
Överför sinusfunktionen på exponentform: $sin(2t) = Im(e^{2it})$ detta ger att $Im(\mathcal{S}e^{2it} = H(2i) = \frac{1}{2i+1}(cos(2t) + isin(2t))$

Fråga 15

Q: Ange sambandet mellan överföringsfunktionen och impulssvaret för ett LTI-system.

A: $\mathcal{L}(h(t)) = H(s)$

Fråga 16

Q: Ge ett exempel på en kvadratisk matris som inte är diagonaliserbar (med bevis att den inte är det).

A: **Exempel:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bevis: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ Om A är diagonaliserbar så är $\mathcal{S}^{-1}A\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $A = \mathcal{S}0\mathcal{S}^{-1} = 0$ **motsägelse**: det sista stämmer ej.

Fråga 17

Q: Finns det en diagonaliserbar matris med multipla egenvärden? Ge i så fall ett exempel (med bevis).

A: Ja, till exempel $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ som redan är diagonal. ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$)

Fråga 18

Q: Ange sambanden mellan spår, determinant och egenvärden för en matris.

A: $tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$
$det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Fråga 19

Q: Kommer ej på tentamen, tack Victor.

Fråga 20

Q: Definiera matrisexponentialfunktionen e^{At} för en godtycklig kvadratisk matris.

A: $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$

Fråga 21

Q: Vilken typ av termer uppträder i exponentialmatrisen e^{tA}? Hur kan man här se skillnad på diagonaliserbara och icke-diagonaliserbara matriser?

A: Exponentialmatrisen e^{At} innehåller $C_i e^{\lambda_i t}$-termer i det fall att A är diagonaliserbar. Ifall matrisen är icke-diagonaliserbar så förekommer $C_i t^k e^{\lambda_i t}$-termer.

Fråga 22

Q: Definiera begreppet ortogonal matris.

A: $A^T = A^{-1}$

Fråga 23

Q: Formulera spektralsatsen för (reella) symmetriska matriser.

A: Om A är en reell symmetrisk matris så är A diagonaliserbar med hjälp av en ortogonal matris $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S}^{-1}A\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathcal{S}^T A \mathcal{S}$$

alla λ_i är reella.

Fråga 24

Q: Definiera begreppet kvadratisk form och ange hur en sådan brukar beskrivas i matrisform.

A: $f(\mathcal{X}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

Fråga 25

Q: Hur transformeras matrisen för en kvadratisk form vid ett linjärt koordinatbyte? Vilken är skillnaden mellan denna transformationsformel och motsvarande vid linjära avbildningar?

A: Matrisen för linjärt koordinatbyte är en **likformighetstransformation**

$$\hat{A} = S^{-1}AS,$$

medan matrisen för en kvadratisk form transformeras genom en **kongruenstransformation**

$$\hat{K} = K^{-1}AS.$$

Fråga 26

Q: Ett LTI system av ändlig ordning är kausalt. Hur kan man med hjälp av dess överföringsfunktion avgöra om det är stabilt?

A: Givet en godtycklig överföringsfunktion

$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ där P,Q är godtyckliga polynom.

Då är ssystemet $\mathcal{S}$ stabilt om överföringsfunktionen uppfyller följande krav:

1) $deg(P(s)) \leq deg(Q(s))$

2) För alla lösningar, s_i, av $Q(s) = 0$ så är $Re(s) < 0$

Satser och tips och trix

- $D = S^{-1}AS \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$
- Frekvensfunktion: $H(i\omega)$
- Amplitudfunktion: $A(\omega) = |H(i\omega)|$
- Fasfunktion: $\phi(\omega) = arg(H(i\omega))$
- $H(i\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$
- Egenvärdena till en diagonalmatris är egenvärdena.
- $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$, vilket betyder att ifall man diagonaliserar matrisen A och tar fram S så kan man få fram exponentialmatrisen enkelt genom denna sats.
- $|t| = 2t\theta(t) - t$
- $\int f(t)\theta(t-a)dt = [F(t) - F(a)]\theta(t-a)$
- Alla egenvärden är unika $\Rightarrow$ diagonaliserbar

- Om något $\lambda_i = 0$ för matrisen A så är $det(A) = 0 \Rightarrow$ ej inverterbar
- Om något $\lambda_i = 0$ för matrisen A så är matrisen ej ortogonal eftersom denna inte är inverterbar.
- $det(A) < 0 \Rightarrow$ icke-stabil matris, för ett $\lambda_i = 0$ så blir matrisen alltså icke-stabil.
- $B(t) = e^{At}$, $B(2)^2 = e^{2A2}$
- Istället för att kvadratkomplettera den kvadratiska formen kan man gaussa matrisen K så att denna har 1:or diagonalt. d_i blir då det man delar respektive rad med för att få en etta på diagonalen.
- Alla $d_i > 0$: positivt definit matris
- Alla $d_i < 0$: negativt definit matris
- Alla $d_i \geq 0$: positivt semidefinit matris
- Alla $d_i \leq 0$: negativt semidefinit matris
- Matrisen har både $d_i < 0$ och $d_i > 0$: indefinit matris
- $e^0 = I$
- För att lösa begynnelsevärdesproblemet: $X' = AX, X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan man använda $X(t) = e^{At}X(0)$ för att enkelt lösa problemet.
- En matris är diagonaliserbar ifall alla egenvärden är unika.
- En matris är inverterbar då $det(A) \neq 0$
- En matris är symmetrisk då den **inte** innehåller imaginära egenvärden.
- Om $tr(A) < 0$ så måste minst ett av egenvärdena vara mindre än noll.
- $u = Sv$, $\frac{du}{dt} = Au$
- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$: positivt definit
- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$: positivt semidefinit

Exempeluppgifter

Hur många egenvärden < 2?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
För att lösa detta gör vi följande: $(A - 2I) = B$
Om $AX = \lambda B$ så $BX = (A - 2I)X = \lambda X - 2X = (\lambda - 2)X$. Gaussning med denna nya matris ger samma egenvektorer men $\lambda_i - 2$ som egenvärde. Eftersom

$\lambda_i - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_i < 2$ så följer: $B = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ gaussning av denna matris ger ut: $d_1 = -1$,$d_2 = 5$,$d_3 = -8$. De egenvärden som < 0 är de vi söker. d_1 och d_3 uppfyller detta. Alltså har vi två egenvärden som är mindre än noll.