LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK för M, N och C

Tentamen 17 december 2012 kl 14-19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara *klart motiverade*. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås måndagen den 4 januari 2013 kl. 17.00 på kursens hemsida. Visning sker den 15 januari 2013 kl. 12.00-12.30 i Lab C på första våningen i M-huset.

Observera att vissa av delproblemen kan lösas oberoende av varandra.
Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1. Ett system beskrivs av överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{5}{s^3 + 7s^2 + 3s + 4} U(s).$$

a. Skriv upp differentialekvationen för systemet. (1 p)

b. Skriv systemet på tillståndsform, där $u(t)$ är insignal och $y(t)$ är utsignal. (1 p)

Solution

a.

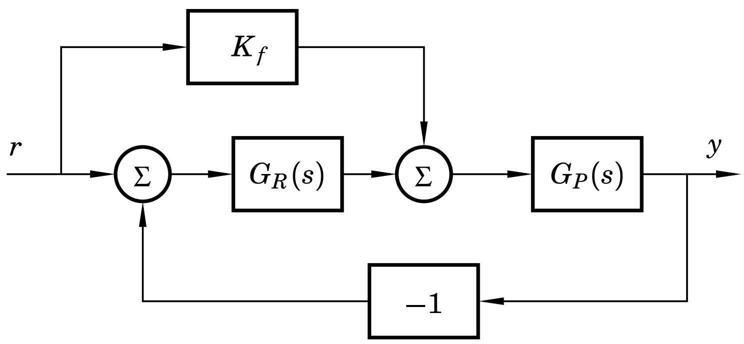
$$\dddot{y}(t) + 7\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 5u(t)$$

b. Inför tillstånden: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$. Systemet blir med dessa tillstånd

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -7 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

2. Ett system har blockschemat som visas i Figur 1, där

$$G_P(s) = \frac{1}{s+3}, \quad G_R(s) = \frac{4}{s}, \quad K_f = 5.$$

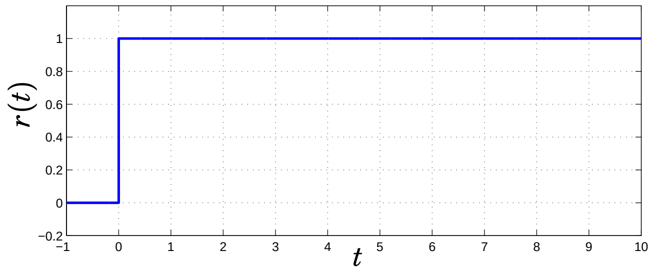


Figur 1 Blockschema för systemet i Uppgift **2**.

a. Beräkna överföringsfunktionen från r till e, där e som vanligt betecknar skillnaden mellan referensvärde och mätvärde. (1 p)

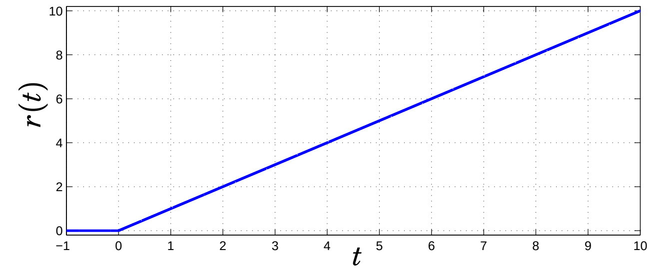
b. Beräkna det stationära felet, då $r(t)$ ges i Figur 2. (1 p)

c. Beräkna det stationära felet, då $r(t)$ ges i Figur 3. (1 p)



Figur 2 Referenssignal i Uppgift **2b**.

.



Figur 3 Referenssignal i Uppgift **2c**.

.

Solution

a. Blockschemaräkningar ger att överföringsfunktionen från r till e ges av

$$G_{er}(s) = \frac{1 - G_P K_f}{1 + G_P G_R} = \frac{s(s-2)}{s^2 + 3s + 4}.$$

b. Felsignalen $r(t)$ är ett enhetssteg vilket ger $R(s) = 1/s$. Vi får därmed

$$E(s) = G_{er}(s)R(s) = \frac{s(s-2)}{s^2 + 3s + 4} \cdot \frac{1}{s}.$$

Då $sE(s)$ har alla poler i vänster halvplan existerar gränsvärdet och slutvärdesteoremet kan användas. Detta ger oss

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(s-2)}{s^2 + 3s + 4} = 0.$$

Alltså är det stationära felet 0.

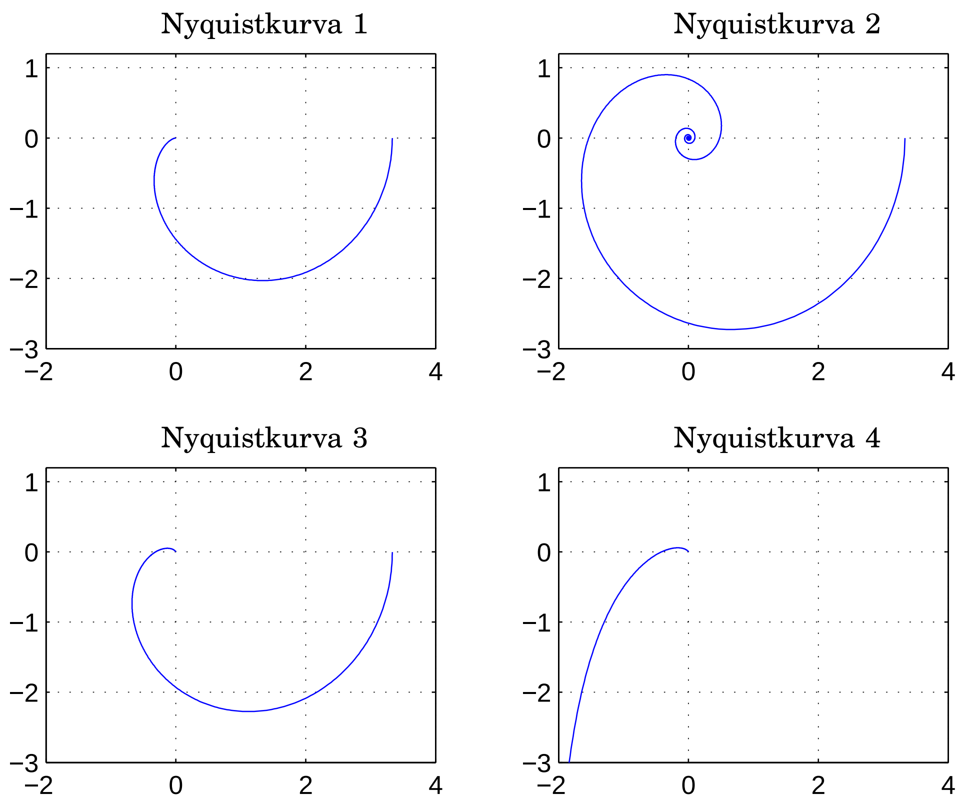
c. Felsignalen $r(t)$ är nu en enhetsramp vilket ger $R(s) = 1/s^2$. Samma metodik som innan ger oss då det stationära felet

$$\lim_{s \to 0} \frac{(s-2)}{s^2 + 3s + 4} = -\frac{1}{2}.$$

3. Nyquistdiagrammen för fyra av överföringsfunktionerna G_1–G_6 visas i Figur 4. Para ihop rätt överföringsfunktion med rätt Nyquistkurva och motivera dina svar.

$$G_1 = \frac{5}{s(s^2+4s+3)} \qquad G_2 = \frac{10}{s^2+4s+3}\mathrm{e}^{-s} \qquad G_3 = \frac{10}{s+3}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2-4s+3} \qquad G_5 = \frac{10}{s^2+4s+3} \qquad G_6 = \frac{30}{(s+1)(s+3)^2}$$



Figur 4 Nyquistkurvor till fyra av överföringsfunktionerna G_1–G_6 i Uppgift **3**.

(2 p)

Solution

Nyquistkurva 1: Andra ordningens stabilt system utan dödtid och utan integrator $\Longrightarrow G_5$
Nyquistkurva 2: Process med dödtid $\Longrightarrow G_2$
Nyquistkurva 3: Tredje ordningens system utan integrator $\Longrightarrow G_6$
Nyquistkurva 4: Process med integrator $\Longrightarrow G_1$

4. Betrakta följande system

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

a. Vi vill utforma en styrlag, $u(t) = -Lx(t)$, som placerar polerna till systemet på ett godtyckligt ställe. Vad krävs av konstanten a för att detta ska vara möjligt? (1 p)

b. För $a = 2$, utforma en styrlag som gör systemet dubbelt så snabbt (sett till polernas placering) som det är nu. (2 p)

Solution

a. För att systemet ska vara styrbart krävs att styrbarhetsmatrisen har full rang, det vill säga $\det(W_s) \neq 0$, där styrbarhetsmatrisen ges av $W_s = (B \;\; AB)$. Determinanten för denna blir

$$\det(W_s) = \begin{vmatrix} a & -5a+1 \\ 1 & -4a-1 \end{vmatrix} = -4a^2 + 4a - 1.$$

För att denna determinant ska vara skild från noll krävs att $a \neq 1/2$.

b. För att göra systemet dubbelt så snabbt vill vi flytta båda polerna dubbelt så långt bort från origo i det komplexa talplanet. Första steget blir då att ta reda på var polerna finns för det ursprungliga systemet. För att göra detta tittar vi på egenvärdena till A-matrisen.

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+5 & -1 \\ 4 & s+1 \end{vmatrix} = (s+5)(s+1) + 4 = s^2 + 6s + 9 = (s+3)^2$$

och vi har alltså två poler i $s = -3$.

För att få systemet dubbelt så snabbt vill vi nu istället ha båda polerna i $s = -6$. Det vill säga, vårt önskade karaktäristiska polynom är $(s+6)^2 = s^2 + 12s + 36$. Det karaktäristiska polynomet till vårt system när vi har styrlagen $u(t) = -(l_1 \;\; l_2)x(t)$ ges av

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s+5+2l_1 & -1+2l_2 \\ 4+l_1 & s+1+l_2 \end{vmatrix} = s^2 + (6+2l_1+l_2)s + 9 + 3l_1 - 3l_2.$$

Jämförelse av koefficienter ger nu ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6 + 2l_1 + l_2 = 12 \\ 9 + 3l_1 - 3l_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = 6 - 2l_1 \\ l_1 = 9 + l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 5 \\ l_2 = -4 \end{cases}$$

och vi får alltså styrlagen $u(t) = -(5 \;\; -4)x(t)$.

5. Vi betraktar en fritt svängande pendel, se Figur 5. Pendeln består av en stav med längden $l > 0$ och en boll med vikt $m > 0$. Om vi antar att stavens massa kan försummas och att vi mäter vinkeln θ mellan staven och den vertikala lodlinjen, kan man modellera pendelns rörelse med differentialekvationen

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta},$$

där $g > 0$ är gravitationskonstanten och $k > 0$ är en friktionskonstant.

a. Inför tillstånden $x_1 = \theta$ och $x_2 = \dot{\theta}$. Skriv sedan systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Hitta alla stationära punkter och linjärisera systemet kring varje jämviktspunkt. (2 p)

c. Förklara först med hjälp av beräkningar om det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt. Motivera också hur man kan se detta utan matematiska beräkningar. (2 p)

Solution

a. Vi sätter $x_1 = \theta$ och $x_2 = \dot{\theta}$. Detta ger följande tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}_1 = x_2 =: f_1(x_1, x_2) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 =: f_2(x_1, x_2) \tag{2}$$

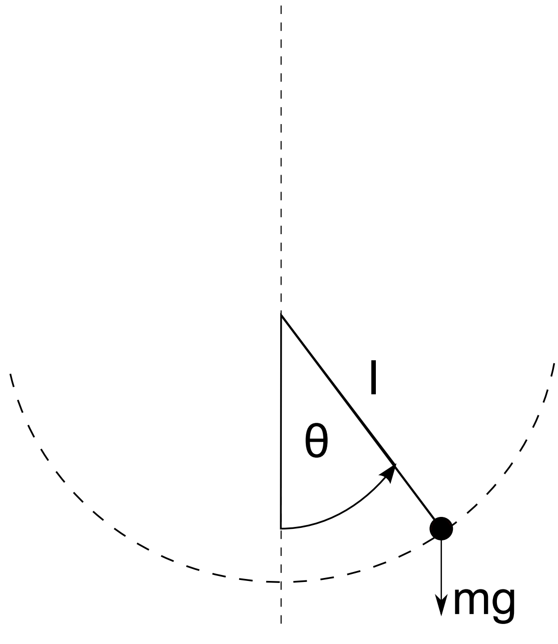
b. Vi sätter $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ och får $(x_1, x_2) = (n\pi, 0)$, med $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{g}{l}\cos(x_1), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k}{m}. \tag{4}$$

Då $\cos(x_1)$ är 2π-periodisk får vi två olika system. Man kan också observera att punkten $(2n\pi, 0)$ beskriver samma punkt som $(0,0)$, och $((2n+1)\pi, 0)$ är samma punkt som $(\pi, 0)$, eftersom θ är 2π-periodisk. Därför får vi

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \Delta x \tag{5}$$



Figur 5 Pendeln i Uppgift **5**.

c. Det karaktäristiska polynomet är

$$s\left(s+\frac{k}{m}\right)\mp\frac{g}{l}=s^2+s\frac{k}{m}\mp\frac{g}{l}.$$

Om alla koefficienterna i polynomet är positiva, är systemet stabilt. Därför är systemet stabilt kring $(2n\pi, 0)$ och instabilt kring $((2n+1)\pi, 0)$. Detta kan man också intuitivt förstå utan matematiska beräkningar, eftersom punkten $(2n\pi, 0)$ betyder att pendeln hänger rakt ner, medan däremot punkten $((2n+1)\pi, 0)$ innebär att pendeln är inverterad, det vill säga pendeln stannar bara i punkterna $((2n+1)\pi, 0)$ om vi börjar där. Men enligt definitionen av stabilitet måste $x(t)\to 0$ då $t\to\infty$ för alla initialtillstånd $x(0)$.

6. Betrakta systemet

$$G_P(s)=\frac{10e^{-0.1s}}{(s+1)(s+3)}$$

Dimensionera en kompenseringslänk $G_k(s)$ sådan att det kompenserade systemet blir ungefär dubbelt så snabbt utan att stabiliteten försämras.

(3 p)

Solution

Vi söker en fasavancerande kompenseringslänk $G_k(s)=K_kN\dfrac{s+b}{s+bN}$. Skärfrekvensen för $G_P(s)$ ges av

$$|G_P(i\omega_c)|=\frac{10}{|(i\omega_c+1)||(i\omega_c+3)|}=1.$$

Det betyder att

$$10^2=(\omega_c^2+1)(\omega_c^2+9),$$

vilket ger att $\omega_c=\sqrt{\sqrt{116}-5}=2.40$.

Fasmarginalen ϕ_m ges av

$$\phi_m=180^\circ+\arg(G_P(i\omega_c))=180^\circ-0.1\omega_c-\arctan(\omega_c)-\arctan\left(\frac{\omega_c}{3}\right)=60.2^\circ$$

Den önskade skärfrekvensen är därför $\omega_c^*=4.80$ och den önskade fasmarginalen är 60.2°. Det betyder att vi behöver en fasökning av

$$\Delta\phi_m=60.2^\circ-(180^\circ+\arg(G_P(i4.80)))=60.2^\circ-(180^\circ-163.73^\circ)=43.9^\circ$$

Då faskurvans topp—det vill säga toppen av $G_k(s)$—finns vid frekvensen $b\sqrt{N}$, vill vi välja b så att

$$b\sqrt{N}=\omega_c^*=4.80.$$

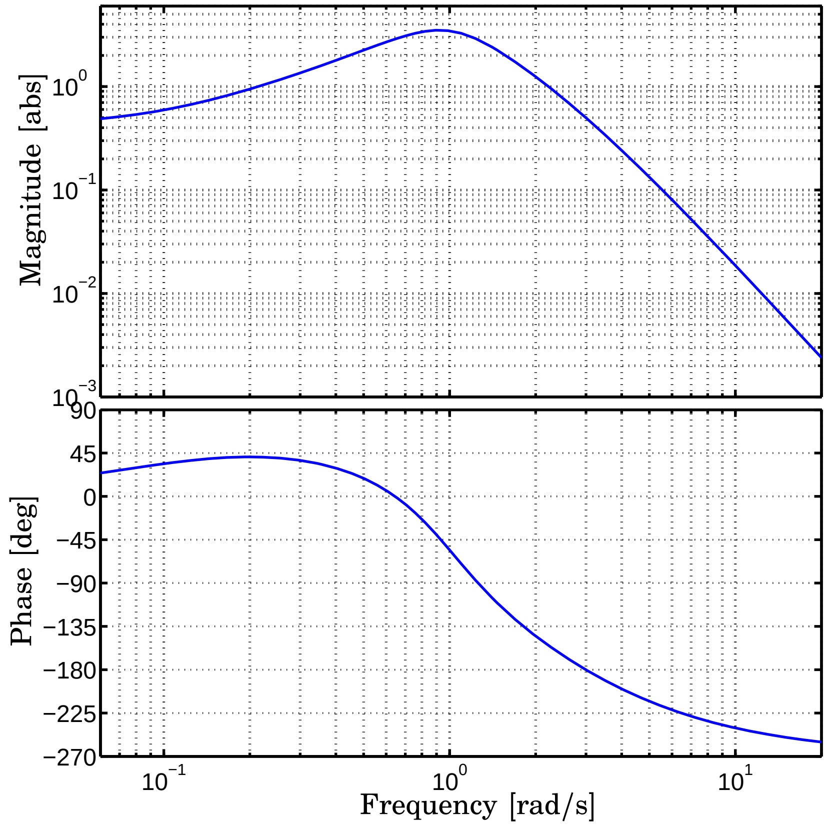
I formelsamlingen läser vi därför av att $N=6$ och det ger att $b=1.96$.

Det sista steget är att bestämma K_k så att vi verkligen har skärfrekvensen $\omega_c^*=4.80$, det vill säga

$$|G_k(i\omega_c^*)||G_P(i\omega_c^*)|=|G_P(i\omega_c^*)|K_k\sqrt{N}=1,$$

som ger att $K_k=\dfrac{1}{0.36\sqrt{6}}=1.13\ \Rightarrow\ G_k(s)=6.78\dfrac{s+1.96}{s+11.76}$.

7. Bodediagrammet för en process visas i Figur 6. Använd Ziegler-Nichols frekvensmetod för att bestämma en PID-regulator för reglering av processen. (2 p)



Figur 6 Bodediagrammet för processen i Uppgift **7**.

Solution

I diagrammet ser vi vid frekvensen $\omega_0 = 3$ rad/s, det vill säga där fasen är $-180°$, att amplitudmarginalen är ungefär $A_m = 2$. Detta betyder att systemet självsvänger då $K_0 = A_m = 2$, med en frekvens på 3 rad/s, vilket ger oss en periodtid på

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}.$$

Ziegler-Nichols frekvensmetod ger då att

$$K = 0.6K_0 = 0.6 \cdot 2 = 1.2,$$
$$T_i = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{3} \approx 1.0,$$
$$T_d = \frac{T_0}{8} = \frac{\pi}{12} \approx 0.3.$$

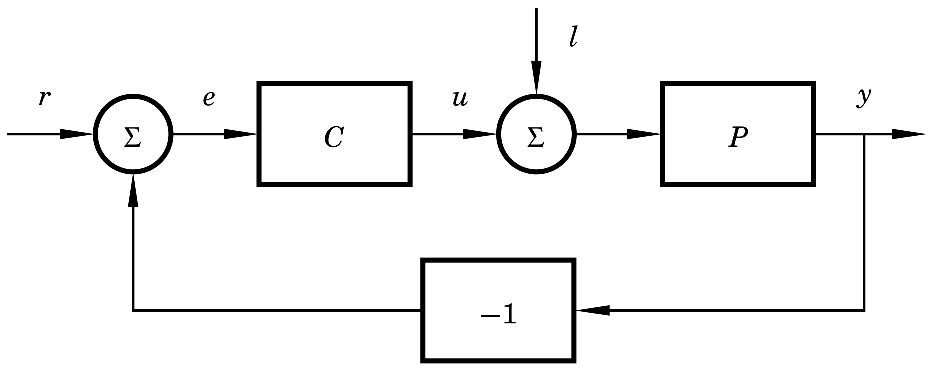
8. En första ordningens instabil process given av

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

ska stabiliseras genom återkoppling med en PI-regulator

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

enligt Figur 7.



Figur 7 Det återkopplade systemet i Uppgift **8**.

a. Någon föreslår regulatorparametrarna $K = 1$ samt $T_i = -1$ och hävdar att det återkopplade systemet då hanterar börvärdesändringar med galans. Ta fram överföringsfunktionen från r till y och utvärdera detta påstående. (1 p)

b. Någon annan person ställer sig tveksam till det återkopplade systemets förmåga att hantera laststörningar med detta val av parametrar. Ta fram överföringsfunktionen från l till y och utvärdera detta påstående. (1 p)

c. Ange för vilka värden på K och T_i både överföringsfunktionen från r till y och från l till y är stabila. (2 p)

d. Jämför resultatet i Uppgift **c** med resultaten i Uppgift **a** och Uppgift **b**. (1 p)

Solution

a. Blockschemaberäkningar ger att

$$\begin{aligned}
Y(s) &= P(s)(L(s) + C(s)(R(s) - Y(s))), \\
(1 + P(s)C(s))Y(s) &= P(s)L(s) + P(s)C(s)R(s), \\
Y(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}L(s) + \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}R(s) \\
&= G_{yl}(s)L(s) + G_{yr}(s)R(s).
\end{aligned}$$

Med detta val av regulatorparametrar får vi

$$C(s) = 1 - \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s}.$$

Överföringsfunktionen från r till y ges alltså av

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}}{1+\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}.$$

Vi ser att återkopplingen har lyckats stabilisera överföringsfunktionen från r till y utan att göra dynamiken långsammare.

b. Från lösningen till Uppgift **a** har vi att överföringsfunktionen från l till y ges av

$$G_{yl}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}.$$

Vi ser att den föreslagna återkopplingen inte gör någonting åt instabiliteten vid laststörningar.

c. Med

$$C(s) = K\left(1+\frac{1}{sT_i}\right) = \frac{K(sT_i+1)}{sT_i}$$

får vi från lösningen till Uppgift **a** att överföringsfunktionerna blir

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}\frac{K(sT_i+1)}{sT_i}}{1+\frac{1}{s-1}\frac{K(sT_i+1)}{sT_i}} = \frac{K(sT_i+1)}{sT_i(s-1)+K(sT_i+1)} \\ &= \frac{KT_is+K}{T_is^2+T_i(K-1)s+K} = \frac{Ks+\frac{K}{T_i}}{s^2+(K-1)s+\frac{K}{T_i}} \end{aligned}$$

och

$$G_{yl}(s) = \frac{G_{yr}(s)}{C(s)} = \frac{Ks+\frac{K}{T_i}}{s^2+(K-1)s+\frac{K}{T_i}}\frac{s}{K(s+\frac{1}{T_i})} = \frac{s}{s^2+(K-1)s+\frac{K}{T_i}}$$

Överföringsfunktionerna har samma polpolynom, som ges av

$$p(s) = s^2+(K-1)s+\frac{K}{T_i}.$$

Överföringsfunktionerna är alltså stabila om $K > 1$ och $T_i > 0$.

d. I Uppgift **a** lyckades vi uppnå en stabil överföringsfunktion från r till y genom ett val av K och T_i som inte uppfyller stabilitetsvillkoren från Uppgift **c**. Detta skedde genom en pol- och nollställesförkortning. Som vi ser i överföringsfunktionen från l till y kan vi dock aldrig uppnå stabilitet i denna överföringsfunktion utan att uppfylla $K > 1$ och $T_i > 0$. Stabilitet i överföringsfunktionen från r till y kan vi uppnå utan att uppfylla $K > 1$ och $T_i > 0$ endast genom en pol- och nollställesförkortning.