Алгоритм Чу—Лью/Эдмондса поиска остовного ориентированного корневого дерева минимального веса

Ижболдин А.В.
Снигирёв А.А.

Март 2025

Определения

Для начала опишем определения, которые мы будем использовать при описании данного алгоритма.

Остовное ориентированное корневое дерево (Arborescence, арборесценция)
Подграф T графа G, который:

- Является ориентированным деревом (нет циклов, если игнорировать направление).
- Имеет корень r — вершину, из которой достижимы все остальные вершины.
- В каждую вершину $v \neq r$ входит ровно одно ребро (нет входящих рёбер в корень r).

У каждого такого остовного ориентированного корневого дерева определим характеристику:

Вес остовного дерева
Весом остовного дерева T называется сумма весов ребер $e \in E$ входящих в него.

$$w(T) = \sum_{e \in E} w(e)$$

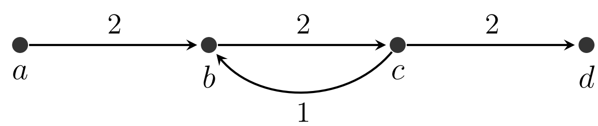
Минимальный вес остовного дерева - такое дерево в котором вес будет минимальным

Алгоритм Чу—Лью/Эдмондса

Алгоритм Чу—Лью/Эдмондса — это метод поиска остовного ориентированного корневого дерева (известного как арборесценция) минимального веса в ориентированном графе с весами на рёбрах. Такой граф должен содержать корневую вершину, из которой достижимы все остальные вершины. Алгоритм гарантирует построение дерева с минимальной суммой весов входящих рёбер.

Для краткости будет называть минимальное остовное корневое дерево минимального веса - MST (minimum spanning tree)

В ситуации неориентированных графов MST обязательно содержит ребро минимального веса (если оно не единственное, то хотя бы одно из них). В ориентированной же ситуации, дуга минимального веса может не содержаться вообще ни в одном остовном дереве. Например на графе снизу:



В такой ситуации MST будет состоять из $(a, b), (b, c), (c, d)$ и при этом не содержит минимальное ребро (c, b). Это означает, что алгоритмы, основанные на последовательном присоединении к уже построенному промежуточному графу рёбер минимального веса из оставшихся (такие как алгоритмы Прима и Краскала), не могут быть применены в ориентированной ситуации и нужна модификация алгоритма.

Алгоритм, который решает данную проблему предложили независимо сначала Ён-Чин Чу и Чжен-Гон Лью (1965), а затем Джек Эдмондс (1967).

Описание алгоритма

Если хотя бы одна вершина графа G недостижима из r (корня), то требуемое дерево построить нельзя.

1. Для каждой вершины $u \neq v$ графа G произведём следующую операцию: найдём ребро минимального веса, входящее в u, и вычтем вес этого ребра из весов всех ребер, входящих в u. Назовем ребра входящие в u как $\partial^+ u$

$$M_u = \min_{e \in \partial^+ u} w(e), \quad w'(e) = w(e) - M_u.$$

2. Строим граф $K = (V, E_0)$, где E_0 — множество ребер нулевого веса графа G. Если этот граф является остовным дерево с корнем в v, то оно и будет искомым.

3. Иначе в графе G есть сильно связные компоненты. Для этого построим конденсацию (сжатие) графа G и назовем его C, в котором сильно связная компонента будет сжата в "супервершину"с сохранением ребер входящих и выходящих из неё.

4. Повторяем шаги начиная с 1 пока не получим остовное дерево для сжатого графа.

5. Пусть в C построено MST, теперь каждую "супервершину" заменим деревом из нулевых дуг внутри соответствующей сильно связной компоненты.

6. Полученное дерево — MST в графе G.

Доказательство корретности

Очевидно, что количество циклов внутри графа - конечно, а за одну сжатую вершину мы "устраняем" один цикл, следовательно алгоритм завершиться.

Для удобства доказательства введем несколько опеределений:

Определение
Для вершины $v \in V$ или подмножества вершин $S \subseteq V$ обозначим $\partial^+ v$ и $\partial^+ S$ множество дуг, входящих в v и S соответственно.

Определение
Для вершины $v \in V$ положим $M_v = \min_{e \in \partial^+ v} w_e$.

На первом шаге алгоритма мы создаём новый граф G' путём установки $w'_e \leftarrow w_e - M_v$ для всех $e \in \partial^+ v$ для каждой вершины $v \in V$. Другими словами, мы вычитаем некоторое значение из веса каждой входящей дуги в вершины так, чтобы была хотя бы одна дуга с весом 0.

Теорема
T является минимальной по весу арборесценцией в $G \Leftrightarrow T$ является минимальной по весу арборесценцией в G'.

Доказательство. Каждая вершина должна иметь ровно одну входящую дугу. Если мы уменьшим вес каждой входящей дуги на M_v, мы также уменьшим вес каждой возможной арборесценции на M_v. Таким образом, мы не влияем на минимальную по весу арборесценцию. $\square$

Каждая вершина имеет хотя бы одну входящую дугу с весом 0. Для каждой вершины мы выбираем входящую дугу с весом 0. Если это арборесценция, то это должна быть минимальная по весу арборесценция, поскольку все веса дуг по-прежнему неотрицательны.

Рассмотрим некоторый цикл C с нулевой стоимостью. На втором шаге алгоритма мы строим новый граф $G'' = G'/C$, который представляет собой G' с циклом C, стянутым в одну вершину, с удалением дуг внутри C и заменой параллельных дуг на самую дешёвую дугу.

Теорема
Пусть $\mathrm{OPT}(G)$ — стоимость MST в G. Мы утверждаем, что $\mathrm{OPT}(G') = \mathrm{OPT}(G'')$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathrm{OPT}(G') \leq \mathrm{OPT}(G'')$. Предположим, что у нас есть минимальная по весу арборесценция T'' в G''. Существует некоторая вершина v_c, которая представляет некоторый цикл в G'. Мы можем построить арборесценцию T' в G' путём разворачивания цикла и удаления одного ребра в цикле. Поскольку цикл имеет вес 0 на всех своих рёбрах, T' имеет тот же вес, что и T''. Например, на рисунке 2.3 белая вершина развёрнута в 4-цикл, а пунктирная стрелка — это ребро, которое удаляется после разворачивания.

Теперь покажем, что $\mathrm{OPT}(G'') \leq \mathrm{OPT}(G')$. Предположим, что у нас есть минимальная по весу арборесценция T' в G'. После стягивания некоторых вершин в G' для получения G'', если мы посмотрим на рёбра в T', они по-прежнему должны соединять каждую вершину с корнем. Следовательно, мы можем удалить некоторые рёбра, чтобы создать арборесценцию в G''. Поскольку веса рёбер неотрицательны, мы можем только уменьшить стоимость, удаляя рёбра. Следовательно, $\mathrm{OPT}(G'') \leq \mathrm{OPT}(G')$. $\square$

Вышеприведённое доказательство даёт алгоритм для нахождения минимальной по весу арборесценции в G' при наличии минимальной по весу арборесценции в G'' путём разворачивания стянутого цикла. Поскольку G'' имеет строго меньше вершин, чем G', мы можем теперь запустить алгоритм с начала на G'', и это индуктивно даёт алгоритм для нахождения минимальной по весу арборесценции в G.

Время работы алгоритма составляет $O(mn)$. Каждый шаг стягивания занимает $O(m)$ времени и уменьшает количество вершин по крайней мере на одну. Поскольку вершин n, то имеется не более n итераций.

Оптимизации

Также хочется отметить, что оценка $O(VE)$ не является наименьшей и алгоритм можно оптимизировать до $O(\min(E\log V, V^2))$ (реализация Тарьяна). В 1986 Габов, Галиль, Спенсер, Комптон и Тарьян предложили более быструю реализацию со временем работы $O(E + V\log V)$