Vorlesung Mathematik 3

Fouriertransformation

Prof. Dr. A. Wipfler
E-Mail: wipfler@dhbw-ravensburg.de

Duale Hochschule Baden-Württemberg, Ravensburg/Friedrichshafen

Ausgabestand: 16. Juli 2024

Inhalt der Vorlesung

Dieser Vorlesungsteil widmet sich den Fouriertransformationen. Diese erweiteren das Konzept der Fourierreihe auf transiente Funktionen, also solche, die nicht periodisch sind.

1. Periodendauer $T \to \infty$
2. Spaltfunktion
3. Faltung
4. Differenziation
5. Verschiebung

1.) $T \to \infty$

- *Komplexe Fourierreihe*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t} \, \mathrm{d}t$$

- Betrachtung für $T \to \infty$ unter Berücksichtigung von

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

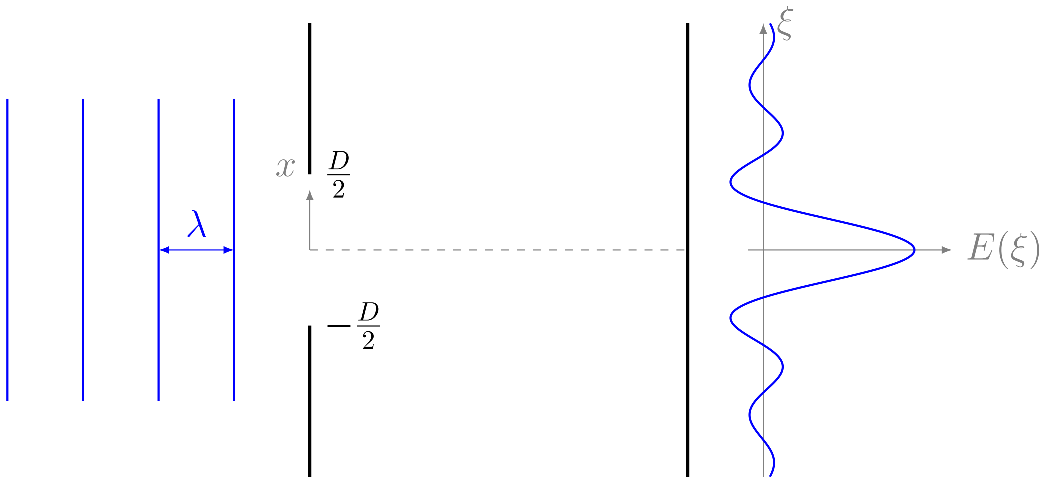
Fouriertransformation

Die *Fouriertransformation* ordnet einer Funktion $f(t)$ im Zeitbereich eine Funktion $F(j\omega)$ im Frequenzbereich zu.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t \qquad \text{Hintransformation}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \mathrm{e}^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \qquad \text{Rücktransformation}$$

2.) Spaltfunktion



Definition

Die *Spaltfunktion* (alternativ: *Sinus cardinalis*) ist definiert als

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

3.) Faltung

Definition

Die *Faltung* zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist definiert als:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Bestimmung der Fouriertransformation von $f(t) * g(t)$

Faltungssatz

Die Fouriertransformierte einer Faltung zweier Funktionen f und g entspricht dem *Produkt* der beiden Fouriertransformierten F und G der einzelnen Funktionen:

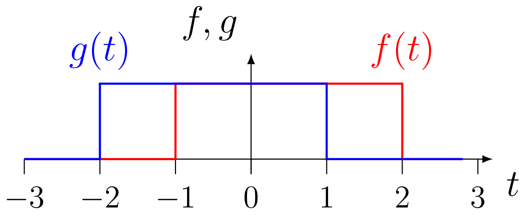
$$\begin{array}{rcl} f & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & F \\ g & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & G \\ f * g & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & FG \end{array}$$

3.) Faltung

- Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



4.) Differenziationn

- Differenziation

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)\right\} = F(j\omega)$$
$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} =?$$

Differenziationssatz

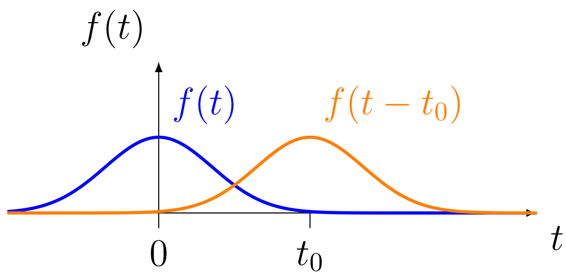
Ist $F(j\omega) = \mathfrak{F}\left\{f(t)\right\}$ die Fouriertransformierte der Funktion $f(t)$, so gilt für die Fouriertransformierte der Ableitung von $f(t)$:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\} = j\omega F(j\omega)$$

5.) Verschiebung

- Verschiebung im Zeitbereich

$$
\begin{aligned}
f(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad F(j\omega) \\
f(t-t_0) \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad ?
\end{aligned}
$$



Verschiebungssatz

Ist die Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ gegeben mit

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)\right\} = F(j\omega),$$

so gilt für die um t_0 verschobene Funktion $f(t-t_0)$:

$$\mathfrak{F}\left\{f(t-t_0)\right\} = \mathrm{e}^{-j\omega t_0} F(j\omega).$$