

Vorlesung Mathematik 3

Fouriertransformation

Prof. Dr. A. Wipfler

E-Mail: wipfler@dhbw-ravensburg.de

Duale Hochschule Baden-Württemberg, Ravensburg/Friedrichshafen

Ausgabestand: 13. Juli 2024

Inhalt der Vorlesung

Dieser Vorlesungsteil widmet sich den Fouriertransformationen. Diese erweitern das Konzept der Fourierreihe auf transiente Funktionen, also solche, die nicht periodisch sind.

1. Periodendauer $T \rightarrow \infty$
2. Spaltfunktion
3. Faltung
4. Differenziation und Integration
5. Verschiebung

1.) $T \rightarrow \infty$

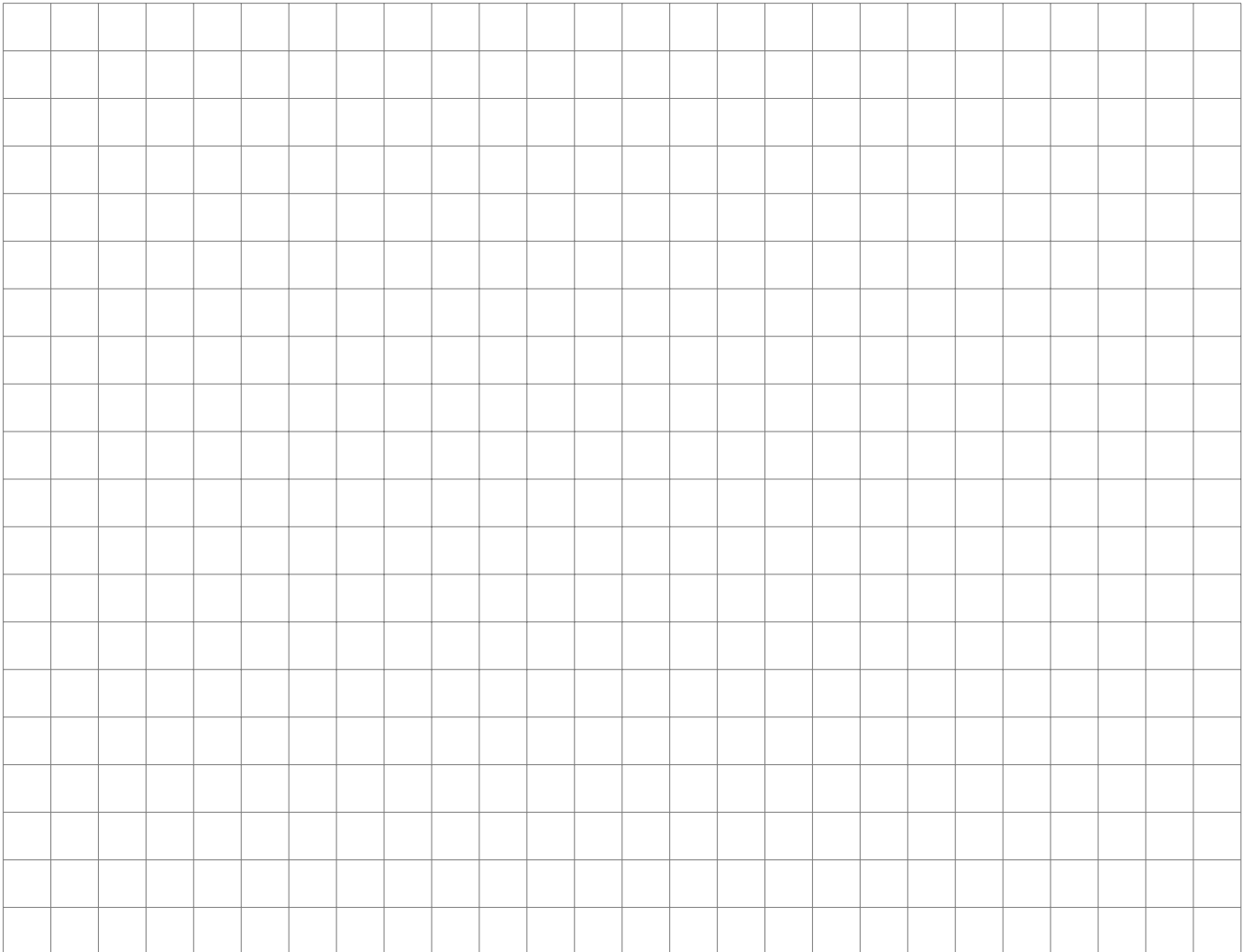
► Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

► Betrachtung für $T \rightarrow \infty$ unter Berücksichtigung von

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



Fouriertransformation

Die *Fouriertransformation* ordnet einer Funktion $f(t)$ im Zeitbereich eine Funktion $F(j\omega)$ im Frequenzbereich zu.

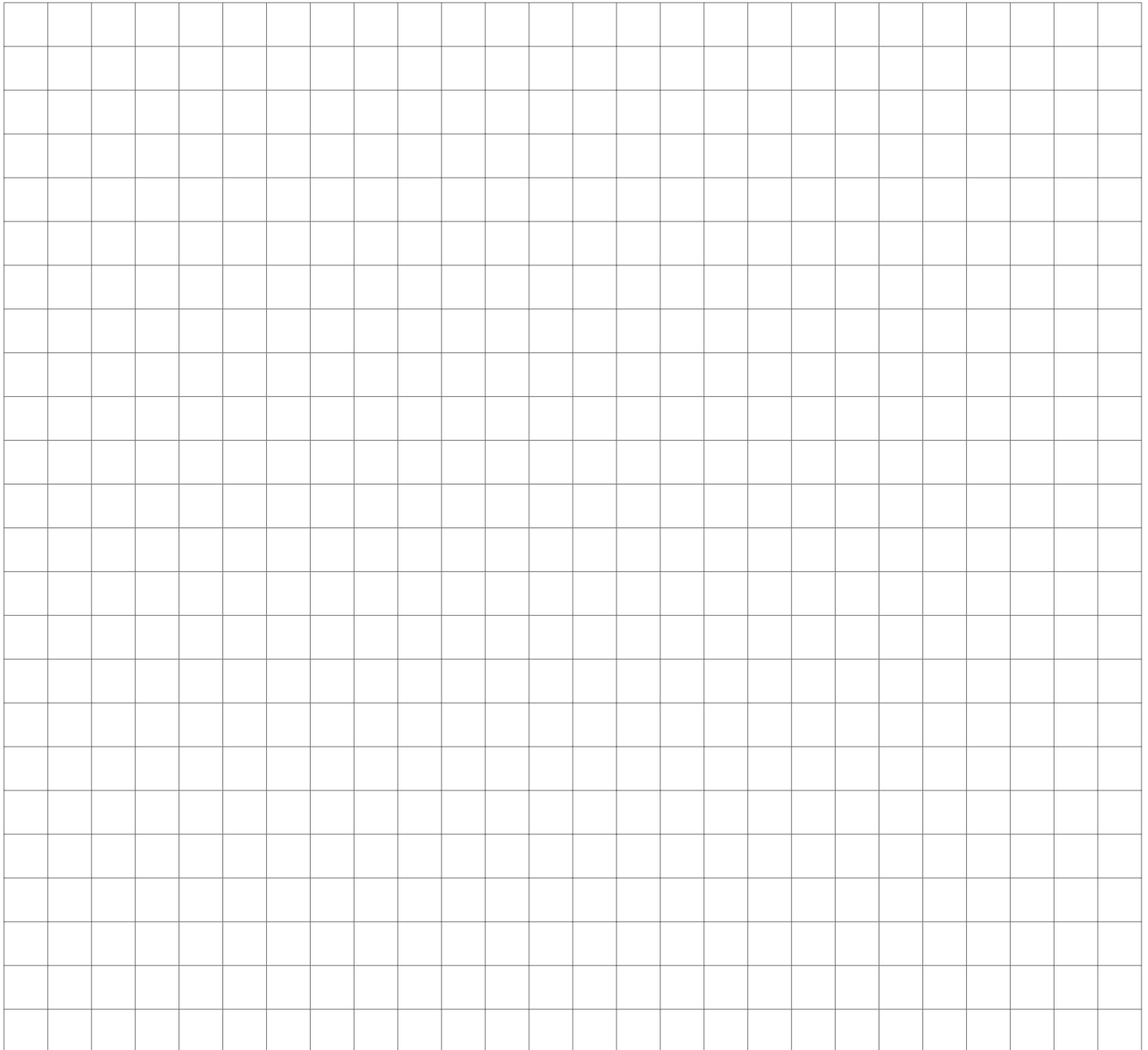
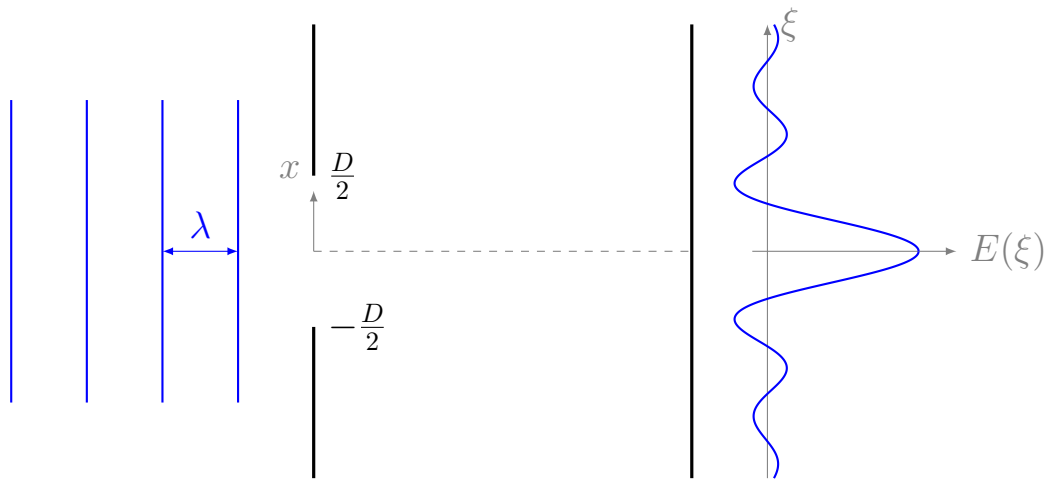
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Hintransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Rücktransformation

2.) Spaltfunktion



Definition

Die *Spaltfunktion* (alternativ: *Sinus cardinalis*) ist definiert als

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

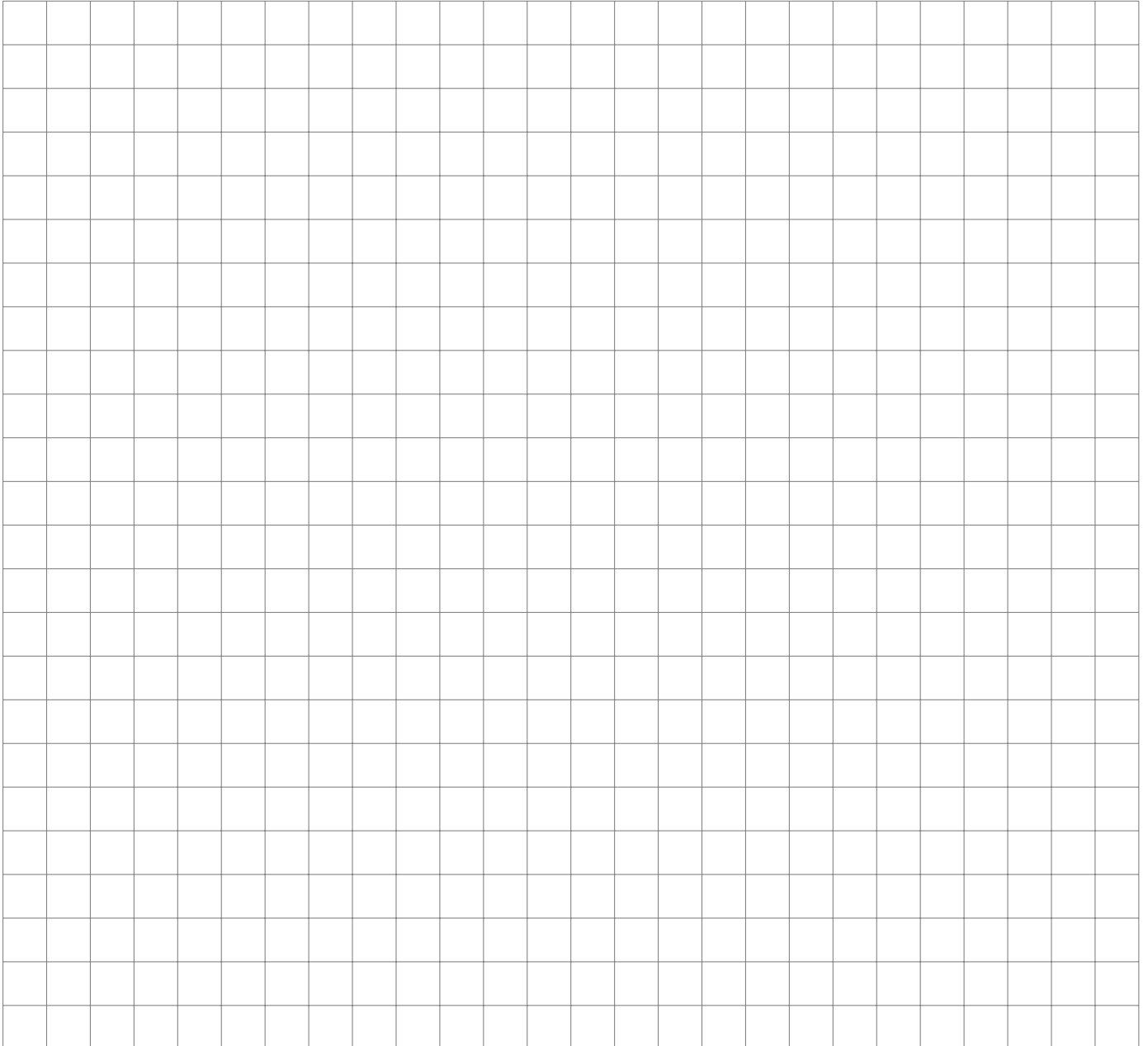
3.) Faltung

Definition

Die *Faltung* zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist definiert als:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

► Bestimmung der Fouriertransformation von $f(t) * g(t)$



Faltungssatz

Die Fouriertransformierte einer Faltung zweier Funktionen f und g entspricht dem *Produkt* der beiden Fouriertransformierten F und G der einzelnen Funktionen:

$$\begin{array}{lcl} f & \text{---} \bullet & F \\ g & \text{---} \bullet & G \\ f * g & \text{---} \bullet & FG \end{array}$$

► Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

