Vorlesung Mathematik 3

Fourierreihen - Reelle Darstellung

Prof. Dr. A. Wipfler
E-Mail: wipfler@dhbw-ravensburg.de

Duale Hochschule Baden-Württemberg, Ravensburg/Friedrichshafen

Ausgabestand: 9. Juli 2024

Inhalt der Vorlesung

Dieser Vorlesungsteil widmet sich den Fourierreihen. Diese Reihenentwicklung dient dazu, *periodische* Funktionen als Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen.

1. Satz von Dirichlet
2. Bestimmung der Fourierkoeffizienten
3. Reelle Fourierreihen
4. Gerade und ungerade Funktionen

1.) Satz von Dirichlet

Satz von Dirichlet

$f(t)$ sei eine periodische Funktion mit der Periode T, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $f(t)$ hat im Intervall $[t, t+T]$ eine *endliche* Anzahl an Sprungstellen
2. $f(t)$ hat im Intervall $[t, t+T]$ eine *endliche* Anzahl an Maxima und Minima
3. Das Integral
$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
hat einen *endlichen* Wert

Dann kann die Funktion $f(t)$ als *Fourierreihe* der folgenden Form dargestellt werden.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

An Stellen, an denen die Funktion stetig ist, konvergiert die Fourierreihe gegen den Funktionswert. An Sprungstellen konvergiert die Funktion gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes der Funktion an der Sprungstelle.

2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten

- $$\int\limits_{t}^{t+T} \sin k\omega_0 t \sin l\omega_0 t \,\mathrm{d}t$$

2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten

- $$\int\limits_{t}^{t+T} \cos k\omega_0 t \sin l\omega_0 t \,\mathrm{d}t$$

2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten

- $$\int\limits_t^{t+T} \cos k\omega_0 t \cos l\omega_0 t \,\mathrm{d}t$$

3.) Reelle Fourierreihen

Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Die Koeffizienten a_k und b_k einer *reellen Fourierreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

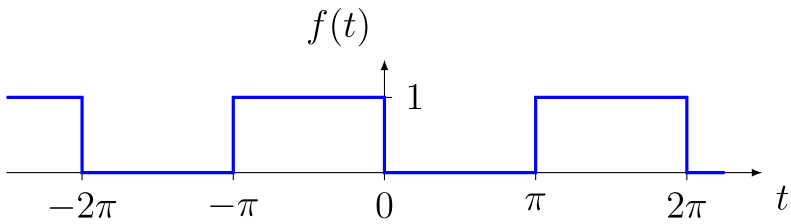
berechnen sich als

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

- Beispiel: Bestimmen Sie die Fourierreihe für folgende Funktion (periodisch fortgesetzt):

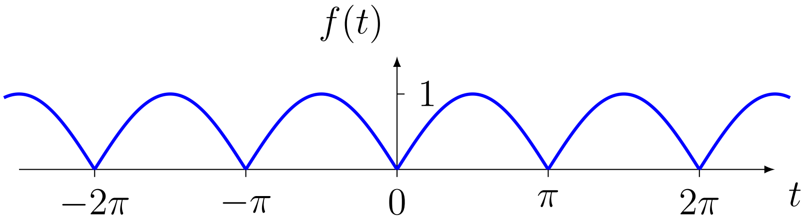
$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \le t < \pi \\ 1, & \text{für } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$



3.) Reelle Fourierreihen

- Beispiel: Bestimmen Sie die Fourierreihe für folgende Funktion (periodisch fortgesetzt):

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{für} \quad 0 \le t < \pi \\ -\sin t, & \text{für} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$



4.) Gerade und ungerade Funktionen

- Gerade Funktion:

$$f(t) = f(-t)$$

- Ungerade Funktion:

$$f(t) = -f(-t)$$