# **Vorlesung Mathematik 3**

Fourierreihen - Reelle Darstellung

Prof. Dr. A. Wipfler E-Mail: wipfler@dhbw-ravensburg.de

Duale Hochschule Baden-Württemberg, Ravensburg/Friedrichshafen

Ausgabestand: 25. Juni 2024

### Inhalt der Vorlesung

Dieser Vorlesungsteil widmet sich den Fourierreihen. Diese Reihenentwicklung dient dazu, *periodische* Funktionen als Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen.

- 1. Satz von Dirichlet
- 2. Bestimmung der Fourierkoeffizienten
- 3. Beispiele

#### 1.) Satz von Dirichlet

#### Satz von Dirichlet

f(t) sei eine periodische Funktion mit der Periode T, die folgende Bedingungen erfüllt:

- 1. f(t) hat im Intervall [t, t+T] eine *endliche* Anzahl an Sprungstellen
- 2. f(t) hat im Intervall [t, t+T] eine *endliche* Anzahl an Maxima und Minima
- Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

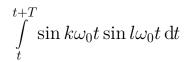
hat einen endlichen Wert

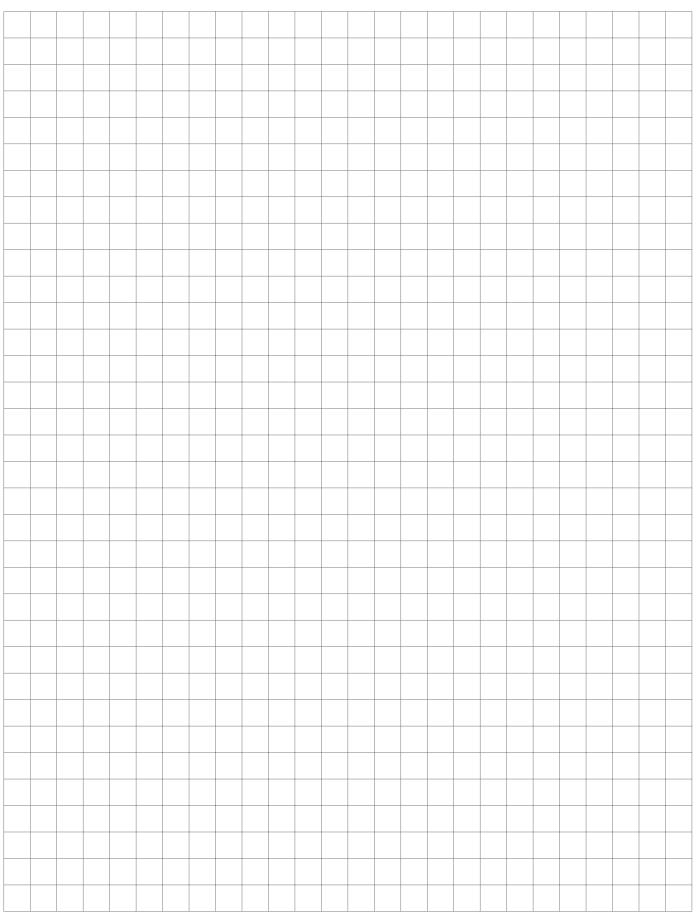
Dann kann die Funktion f(t) als *Fourierreihe* der folgenden Form dargestellt werden.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

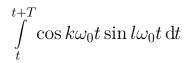
An Stellen, an denen die Funktion stetig ist, konvergiert die Fourierreihe gegen den Funktionswert. An Sprungstellen konvergiert die Funktion gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes der Funktion an der Sprungstelle.

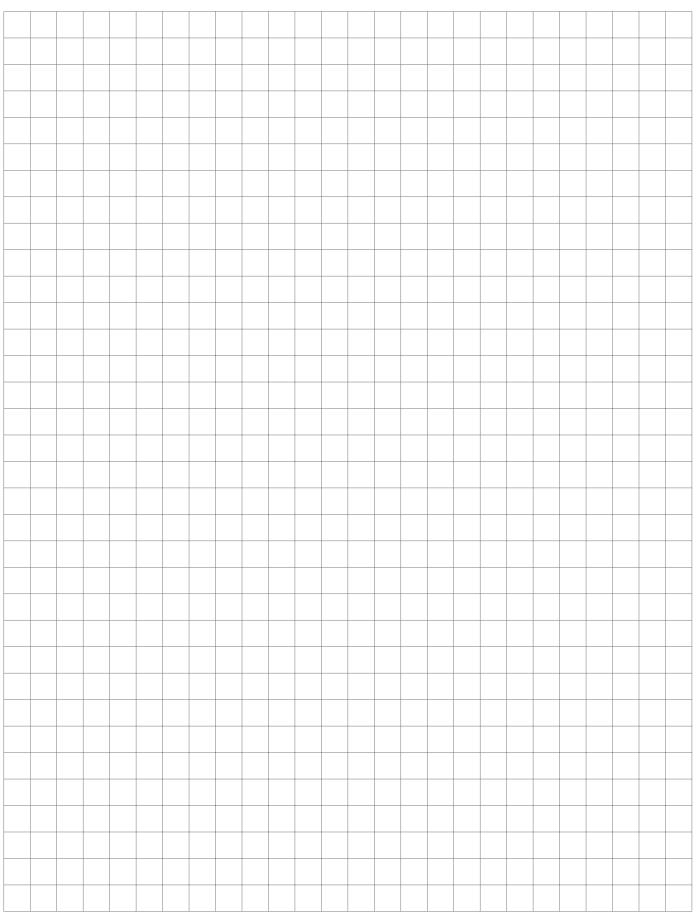
## 2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten





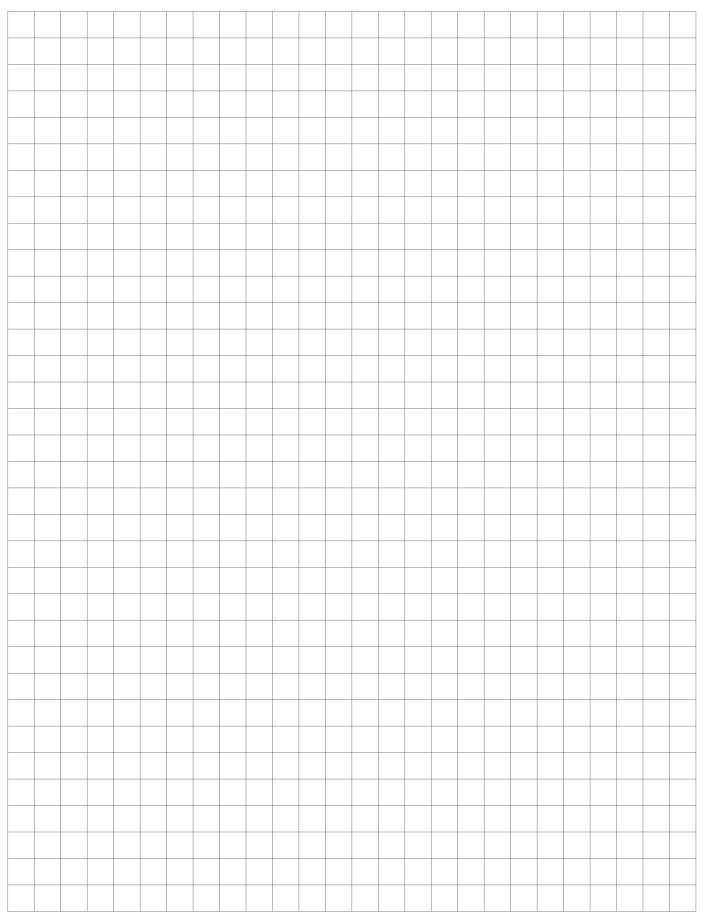
### 2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten





### 2.) Bestimmung der Fourierkoeffizienten





#### 3.) Reelle Fourierreihen

#### Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  einer reellen Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

berechnen sich als

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

Beispiel: Bestimmen Sie die Fourierreihe für folgende Funktion:

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \mbox{f\"ur} & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \mbox{f\"ur} & \pi \leq t < 2\pi \end{array} \right.$$

