

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, осень 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

Справочное изложение теории, частично разобранный на лекции.

Определение 1. Аксиомой является любая формула исчисления высказываний, которая может быть получена из следующих схем аксиом:

- (1) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4) $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5) $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10) $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Определение 2. Выводом из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ назовём конечную непустую последовательность высказываний $\delta_1, \dots, \delta_t$, для каждого из которых выполнено хотя бы что-то из списка:

1. высказывание является аксиомой;
2. высказывание получается из предыдущих по правилу *Modus Ponens* (то есть, для высказывания δ_i найдутся такие δ_j и δ_k , что $j, k < i$ и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$);
3. высказывание является гипотезой (то есть, является одной из формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n$).

Определение 3. Будем говорить, что формула α выводится (доказывается) из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что последней формулой которого является формула α .

Заметим, что доказательство формулы α — это вывод формулы α из пустого множества гипотез.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

Теорема 1. $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Пример использования: пусть необходимо доказать $\vdash A \rightarrow A$ — то есть доказать существование вывода формулы $A \rightarrow A$ (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы A доказывает $A \vdash A$. Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и $\vdash A \rightarrow A$ (то есть, вывода формулы $A \rightarrow A$, не использующего гипотезы).

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 - (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (*правило контрапозиции*)
 - (c) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow (A \vee B)$ (*вариант I закона де Моргана*)
 - (d) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ (*II закон де Моргана*)
 - (e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
 - (f) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (*закон Пирса*)
 - (h) $\vdash A \vee \neg A$
 - (i) $\vdash (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$
 - (j) $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$
 - (k) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
 - (l) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
4. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.
5. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.