Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, осень 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

Справочное изложение теории, частично разобранной на лекции.

Определение 1. *Аксиомой является любая формула исчисления высказываний, которая может быть получена из следующих схем аксиом:*

(1)	$\alpha \to \beta \to \alpha$
(2)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
(3)	$\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
(4)	$\alpha \& \beta \to \alpha$
(5)	$\alpha \& \beta \to \beta$
(6)	$\alpha \to \alpha \vee \beta$
(7)	$\beta \to \alpha \vee \beta$
(8)	$(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
(9)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
(10)	$\neg\neg\alpha \to \alpha$

Определение 2. *Выводом из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ назовём конечную непустую последовательность высказываний, для каждого из которых выполнено хотя бы что-то из списка:*

1. *высказывание является аксиомой;*
2. *высказывание получается из предыдущих по правилу Modus Ponens (то есть, для высказывания δ_i найдутся такие δ_j и δ_k, что $j, k < i$ и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$);*
3. *высказывание является гипотезой (то есть, является одной из формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n$).*

Определение 3. *Будем говорить, что формула α выводится (доказывается) из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что последней формулой которого является формула α.*

Заметим, что доказательство формулы α — это вывод формулы α из пустого множества гипотез.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

Теорема 1. $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \to \beta$.

Пример использования: пусть необходимо доказать $\vdash A \to A$ — то есть доказать существование вывода формулы $A \to A$ (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы A доказывает $A \vdash A$. Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и $\vdash A \to A$ (то есть, вывода формулы $A \to A$, не использующего гипотезы).

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$
3. Докажите:

(a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

(b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*

(c) $\vdash \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B) \to (A \vee B)$ *(вариант I закона де Моргана)*

(d) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \mathbin{\&} B)$ *(II закон де Моргана)*

(e) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$

(f) $\vdash A \mathbin{\&} B \to A \vee B$

(g) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*

(h) $\vdash A \vee \neg A$

(i) $\vdash (A \mathbin{\&} B \to C) \to (A \to B \to C)$

(j) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \mathbin{\&} B \to C)$

4. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\nvdash \beta \to \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\nvdash \gamma \to \alpha$ и $\nvdash \beta \to \gamma$.

5. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.