# Теоретические домашние задания

*Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, осень 2023 года*

## Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

Справочное изложение теории, частично разобранной на лекции.

**Определение 1.** *Аксиомой является любая формула исчисления высказываний, которая может быть получена из следующих схем аксиом:*

| | |
|---|---|
| (1) | $\alpha \to \beta \to \alpha$ |
| (2) | $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ |
| (3) | $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$ |
| (4) | $\alpha \& \beta \to \alpha$ |
| (5) | $\alpha \& \beta \to \beta$ |
| (6) | $\alpha \to \alpha \vee \beta$ |
| (7) | $\beta \to \alpha \vee \beta$ |
| (8) | $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$ |
| (9) | $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$ |
| (10) | $\neg\neg\alpha \to \alpha$ |

**Определение 2.** *Выводом из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ назовём конечную непустую последовательность высказываний $\delta_1, \dots, \delta_t$, для каждого из которых выполнено хотя бы что-то из списка:*

1. *высказывание является аксиомой;*
2. *высказывание получается из предыдущих по правилу Modus Ponens (то есть, для высказывания $\delta_i$ найдутся такие $\delta_j$ и $\delta_k$, что $j, k < i$ и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$);*
3. *высказывание является гипотезой (то есть, является одной из формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n$).*

**Определение 3.** *Будем говорить, что формула $\alpha$ выводится (доказывается) из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что последней формулой которого является формула $\alpha$.*

Заметим, что доказательство формулы $\alpha$ — это вывод формулы $\alpha$ из пустого множества гипотез.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):

**Теорема 1.** $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha \vdash \beta$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \to \beta$.

Пример использования: пусть необходимо доказать $\vdash A \to A$ — то есть доказать существование вывода формулы $A \to A$ (заметьте, так поставленное условие не требует этот вывод предъявлять, только доказать его существование). Тогда заметим, что последовательность из одной формулы $A$ доказывает $A \vdash A$. Далее, по теореме о дедукции, отсюда следует и $\vdash A \to A$ (то есть, вывода формулы $A \to A$, не использующего гипотезы).

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
   (c) $\vdash A \& B \to B \& A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \& \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$
3. Докажите:

(a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

(b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*

(c) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to (A \vee B)$ *(вариант I закона де Моргана)*

(d) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$ *(II закон де Моргана)*

(e) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$

(f) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$

(g) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*

(h) $\vdash A \vee \neg A$

(i) $\vdash (A \,\&\, B \to C) \to (A \to B \to C)$

(j) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \,\&\, B \to C)$

4. Даны высказывания $\alpha$ и $\beta$, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\nvdash \beta \to \alpha$. Укажите способ построения высказывания $\gamma$, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\nvdash \gamma \to \alpha$ и $\nvdash \beta \to \gamma$.

5. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.