О лабах

C. Нормализация метаязыка

Доказательство на метаязыке:

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$$
$$\Gamma_2 \vdash \alpha_2$$
$$\dots$$
$$\Gamma_n \vdash \alpha_n$$

Требуется перестроить его в доказательство в гильбертовском стиле:

$$\Gamma_n \vdash \alpha_n$$
$$\alpha'_1$$
$$\dots$$
$$\alpha'_k$$
$$\alpha_n$$

Общая идея перестроения

Возможные типы переходов:

1. Аксиома $\Gamma \vdash \alpha$ — формула α корректен в итоговом доказательстве без изменений.
2. Modus Ponens
$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \alpha_1 \\ \Gamma \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \\ \Gamma \vdash \alpha_2 \end{array}$$
Переход остаётся корректен также без изменений, главное — следить за совпадением списка Γ (с учётом возможных перестановок).
3. Дедукция
$$\begin{array}{c} \Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \beta \\ \Gamma, \gamma_2, \alpha_2 \vdash \gamma_1 \to \alpha_1 \to \beta \end{array}$$
Данный переход представляет главный интерес.

Посмотрим внимательней

Вспомним теорему о дедукции с конструктивным доказательством:

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \text{ эквивалентно } \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Делается это путём перестроения всего вывода (помните, гипотезы изменяются, потому теорема затронет формулы вывода и при переносе α влево).

Пример ($\Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \beta \Rightarrow \Gamma, \gamma_2, \alpha_2 \vdash \gamma_1 \to \alpha_1 \to \beta$)

Пусть дан вывод $\mathcal{B}_1$, показывающий $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \beta$.

1. *По $\mathcal{B}_1$ построим $\mathcal{B}_2$* $: \Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1 \vdash \alpha_2 \to \beta$
2. *По $\mathcal{B}_2$ построим $\mathcal{B}_3$* $: \Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2 \vdash \beta$
3. *По $\mathcal{B}_3$ построим $\mathcal{B}_4$* $: \Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_2 \vdash \alpha_1 \to \beta$
4. *По $\mathcal{B}_4$ построим $\mathcal{B}_5$* $: \Gamma, \gamma_2, \alpha_2 \vdash \gamma_1 \to \alpha_1 \to \beta$

Если не думать об оптимизации, то каждый шаг предпологает построение копии всего вывода с изменениями.

Идеи об ускорении вывода

- Хранить доказательство в виде дерева.
- Применение дедукционного перехода может быть сделано как особый узел в дереве доказательства.
- При перестроении преобразовывать дерево лениво:
  - идти вверх по дереву, от итоговой формулы;
  - игнорировать неиспользуемые узлы;
  - суммировать преобразования при возможности (нейтрализовать встречные дедукции — аккуратно! преобразования не коммутируют; накапливать последовательные и т.п.).
- Не требуется идеальное решение — достаточно прохождения тестов жюри.

E. Свобода для подстановки

Задача хорошо решается через последовательное применение унификации несколько раз.
Выражение в алгебраических термах:

$$\theta ::= f_k(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid x_i$$

В нашем случае f_k — это и логические и предметные символы. Переменные — предметные переменные.
Например, если $(\forall x.\varphi) \rightarrow \psi$ есть 11 аксиома, то

$$\pi = \mathcal{U}[\varphi, \psi]$$

существует и либо тривиально, либо содержит единственную замену — для переменной x.

Эквивалентные преобразования системы уравнений

Теорема

Пусть $\mathcal{E} = \{\sigma_1 = \tau_1, \sigma_2 = \tau_2, \dots, \sigma_k = \tau_k\}$ *— система уравнений в алгебраических термах. Тогда каждое из следующих преобразований оставляет множество решений системы неизменным:*

1. *убрать уравнение вида* $\sigma_t = \sigma_t$ *из системы;*
2. *заменить уравнение вида* $f(\theta_1, \dots, \theta_j) = f(\theta'_1, \dots, \theta'_j)$ *на семейство уравнений* $\theta_1 = \theta'_1; \dots; \theta_j = \theta'_j$*;*
3. *сделать подстановку при наличии уравнения вида* $x = f(\theta_1, \dots, \theta_j)$*: заменить все остальные вхождения* x *в систему на* $f(\theta_1, \dots, \theta_j)$*;*
4. *поменять выражения в уравнении местами:* $\sigma_t = x_j$ *на* $x_j = \sigma_t$*.*

Решение системы уравнений

Теорема

Преобразования системы уравнений (при исключении преобразований, ведущих к повторению системы) за конечное время приведут:

1. *либо к системе вида $x_i = \sigma_i$, причём каждая из переменных x_i входит в систему ровно один раз;*
2. *либо к несовместной системе: такой, в которую входит уравнение вида*

$$x_i = \dots x_i \dots$$

Здесь переменная x_i входит слева и справа от знака равенства, причём справа входит нетривиально.

После применения преобразований по системе можно будет построить требуемую подстановку.

Оптимизации

В принципе, не обязательно делать унификацию как указано выше. Но нужно трезво понимать, что вы делаете — иначе отладка будет сложна :)

O. Ординальный калькулятор

В задаче будем применять определение сложения, умножения и умножения через $\underline{sup}(X) = \bigcup X$. За переосмысление решения для определения операций с лекции — доп. баллы.

Определение

Канторовой нормальной формой назовём выражение вида

$$\omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \omega^{\beta_2} \cdot a_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot a_n$$

причём $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n \geq 0$ *и* $a_i \in \mathbb{N}, a_i > 0$.

Теорема

Для любого ординала $\alpha < \varepsilon_0$ *существует единственная КНФ, равная ему.*

Некоторые свойства операций

Теорема

Для операций над ординалами выполнены следующие свойства:

1. $\alpha \cdot (\zeta_1 + \zeta_2) = \alpha \cdot \zeta_1 + \alpha \cdot \zeta_2$ *(левая дистрибутивность)*
2. $\alpha \cdot 0 = 0$
3. $\alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} = \alpha^{\beta_1 + \beta_2}$
4. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^(\beta \cdot \gamma)$
5. $\alpha^0 = 1$

Доказательство.

Трансфинитная индукция по структуре $\square$

Сложение КНФ

Заметим, что

$$\omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \omega^{\beta_2} \cdot a_2 = \begin{cases} \omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \omega^{\beta_2} \cdot a_2, & \beta_1 > \beta_2 \\ \omega^{\beta_1} \cdot (a_1 + a_2), & \beta_1 = \beta_2 \\ \omega^{\beta_2} \cdot a_2, & \beta_1 < \beta_2 \end{cases}$$

Имея это свойство, можно вычислить сложение двух КНФ так, чтобы результатом также была некоторая КНФ.

Умножение КНФ

Заметим, что при $\xi > 0$

$$(\omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot a_n) \cdot \omega^{\xi} = \omega^{\beta_1 + \xi}$$

И также, если $x \in \mathbb{N}, x > 0$, то

$$(\omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \omega^{\beta_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot a_n) \cdot x = \omega^{\beta_1} \cdot (a_1 \cdot x) + \omega^{\beta_2} \cdot a_2 \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot a_n$$

Возведение в степень

Если γ — предельный, то

$$(\omega^{\beta_1} \cdot a_1 + \omega^{\beta_2} \cdot a_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot a_n)^\gamma = (\omega^{\beta_1})^\gamma$$

Идея решения задачи

С помощью определённых операций сложения, умножения и возведения в степень для канторовых нормальных форм возможно перевести любое ординальное выражение, использующее только ω, числа и операции сложения, умножения и возведения в степень, в КНФ, после чего эти КНФ сравнить.