

Уравнения математической физики

Билеты к экзамену. Поток В.И. Зубова

17 августа 2021 г. 22:02

Конспект подготовлен на основе лекций В.И. Зубова и подготовленных билетов Павла Останина и Михаила Христиненко. Полный список авторов приведён в конце.

Опечатки исправлять здесь: github.com/batmaev/umf-exam-questions

Содержание

1	Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду	6
	Приведение к каноническому виду в точке из \mathbb{R}^n	6
	Классификация уравнений	7
	Приведение к каноническому виду в области из \mathbb{R}^2	7
	Гиперболический случай	8
	Параболический случай	9
	Эллиптический случай	10
	Формальный вид уравнения характеристик	10
2	Задача Коши в \mathbb{R}^n	11
	Постановка	11
	Характеристическая поверхность	13
	Теорема Ковалевской	14
	Понятие о корректности	14
	Пример Адамара	15
3	Задача Коши для колебаний струны	16
	Формула Даламбера	16
	Существование и единственность классического решения	16
	Область зависимости от начальных данных	16

Корректность	17
4 Полубесконечная струна с закреплённым концом	18
Формулировка	18
Общее решение	18
Условия согласования	19
Метод продолжений	19
5 Однородное волновое уравнение в \mathbb{R}^3	21
Формула Пуассона-Кирхгофа	22
6 Неоднородное волновое уравнение в \mathbb{R}^3	25
Метод Дюамеля	25
Запаздывающий потенциал	26
Общая формула Кирхгофа	27
Принцип Гюйгенса	27
7 Волновое уравнение в \mathbb{R}^2	28
Метод спуска	28
Формула Пуассона	29
Диффузия волн	29
8 Теорема единственности для волнового уравнения	30
Интеграл энергии	31
9 Уравнение теплопроводности в \mathbb{R}^1	32
Наводящие соображения	32
Фундаментальное решение	35
Формула Пуассона	35
Свойства решения	35
10 Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в \mathbb{R}^n. Метод Дюамеля. Существование классического решения.	38
11 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$ (без доказательства)	42

12 Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.	46
13 Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.	53
Формулировка задачи	53
Теорема единственности	53
Обоснование метода	55
14 Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.	58
Формулы Грина	58
Формулы Грина	58
Первая формула Грина	59
Вторая формула Грина	59
Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона	59
Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона	60
15 Симметричность и положительная определенность оператора $-\Delta$ при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.	61
16 Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.	63
Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.	63
Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.	64
17 Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.	67
Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.	67
Фундаментальное решение уравнения Лапласа.	68

18 Свойства гармонических функций в \mathbb{R}^3 : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.	71
19 Билет 19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции	73
Теорема (принцип максимума)	73
Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона	75
Теорема единственности	75
20 Функция Грина для задачи Дирихле (случай \mathbb{R}^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре	76
Функция Грина	76
Функция Грина для шара	77
Формула Пуассона в шаре	78
21 Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)	79
Формулировка теоремы	79
Доказательство при $\mu \geq 0$	79
Доказательство при $\mu < 0$	80
22 Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)	81
23 Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай \mathbb{R}^3).	83
24 Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.	87
25 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.	90
26 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.	92
Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром	93

27	Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и поллярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.	95
28	Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.	99
29	Понятие области с границей C^2 . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в \mathbb{R}^3	101
30	Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность	105
31	Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Формула скачка для нормальной производной	110
32	Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач	114
	Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа	114
	Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа	115

Билет 1. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) 2 порядка в \mathbb{R}^n с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду на плоскости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ДУЧП 2 порядка с линейной старшей частью:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0; \quad u(x) \in C^2(\Omega); \quad a_{ij}(x) \in C(\Omega)$$

Считаем $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, что не сужает класса, т.к. $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$. Хотим сделать замену так, чтобы все смешанные частные производные обратились в 0. В точке это сделать можно.

Возьмём преобразование

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \in C^2(U(x^0)), \quad y^0 = y(x^0); \quad U(x^0) \rightarrow V(y^0)$$

(диффеоморфизм класса C^2 окрестности $U(x^0)$ на $V(y^0)$)

Будем предполагать \exists обратного: $x = x(y)$. Наша функция: $u = u(x_1 \dots x_n)$.

Введём $\hat{u}(y) := u[x(y)] \in C^2(V(y^0))$. Производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{уйдёт в } \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u})}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0 \\ \sum_{k,l=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right] \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0, \\ \hat{a}_{kl}(y) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Введём матрицы: $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|_{i,j=1}^n$; $\hat{A}(y^0) = \|\hat{a}_{ij}(y^0)\|_{i,j=1}^n$.

$J(x^0) = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{i,j=1}^n$ – в малой $U(x^0)$ задаёт преобразование $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0)$

$A = A^T \Rightarrow \hat{A}^T = \hat{A}$. Вопрос в выборе J такого, что \hat{A} диагональна.

Пусть в \mathbb{R}^n заданы элемент h и квадратичная форма $\Phi(h)$.

Введём 2 базиса: $\begin{pmatrix} e_1 \dots e_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{pmatrix}$ В них $h \sim \begin{matrix} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T \\ \eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T \end{matrix}$; $\Phi \sim \begin{matrix} \|c_{ij}\| \\ \|\hat{c}_{ij}\| \end{matrix}$; $\Phi(h) = \begin{matrix} \xi^T C \xi \\ \eta^T \hat{C} \eta \end{matrix}$

Пусть $\xi = S\eta$. Тогда $\Phi(h) = \eta^T S^T C S \eta = \eta^T \hat{C} \eta \rightarrow \hat{C} = S^T C S$.

Существует такой базис, что

$$\hat{C} = \text{diag}(\underbrace{+1, +1 \dots +1}_{p \text{ штук}}, \underbrace{-1, -1 \dots -1}_{q \text{ штук}}, 0, 0 \dots 0)$$

$$\Phi(h) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2$$

В равенстве $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0)$ нужно взять $J(x^0) = S^T$

Такие преобразования существуют, их много. Например, $y = y^0 + J(x^0)(x - x^0)$

В этих переменных уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+q}^2} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0.$$

Классификация уравнений

1. *Эллиптический тип*: $p = n$ или $q = n$
2. *Ультрагиперболический тип*: $p + q = n$
3. *Гиперболический тип*: $p = 1, q = n - 1$
4. *Ультрапараболический тип*: $p + q < n$
5. *Параболический тип*: $q = 0, p = n - 1$

Замечание. $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0) \Rightarrow \text{sign det}(\hat{A}(y^0)) = \text{sign det}(A(x^0))$

В случае $n = 2$ тип уравнения в точке определяется по знаку определителя:

1. *Эллиптический*: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \rightarrow |\hat{A}(y^0)| = 1$
2. *Гиперболический*: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\hat{A}(y^0)| = -1$
3. *Параболический*: $|\hat{A}(y^0)| = 0$.

Приведение уравнения 2 порядка к каноническому виду на плоскости

Рассмотрим в \mathbb{R}^2 уравнение $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, \nabla u) = 0$

Для определения в точке используем $d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Введём преобразование $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$ — диффеоморфизм класса C^2 .

В новых координатах $\hat{a}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{b}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{c}(\xi, \eta)\hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$

$$\hat{A}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = JAJ^T; \quad J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

Гиперболический случай

Выбираем $(x^0, y^0) \in \Omega$, пусть $d(x^0, y^0) = ac - b^2 < 0$. В силу непрерывности есть $U_\varepsilon(x^0, y^0)$, где $d < 0$.

Во всех точках этой окрестности тип — гиперболический.

Определение 1.1. *Второй канонический тип:* $\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0$, то есть $\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv 0$.

Введём переменную w , которая обозначает либо ξ , либо η .

Запишем *характеристическое уравнение*:

$$a(x, y)w_x^2 + 2b(x, y)w_xw_y + c(x, y)w_y^2 = 0,$$

(При $w = \xi$ это выражение равно \hat{a}_{11} , а при $w = \eta$ оно равно \hat{a}_{22})

От решений хотим $\text{grad } w \neq 0$, так как если $\nabla\eta = 0$ или $\nabla\xi = 0$, то $\det(J) = 0$.

а) Пусть $a(x^0, y^0) \neq 0$, для $c(x^0, y^0) \neq 0$ рассуждения такие же.

В окрестности, где $a(x, y) \neq 0$, делим:

$$w_x^2 + \frac{2b}{a}w_xw_y + \frac{c}{a}w_y^2 = \left(w_x + \frac{b}{a}w_y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}w_y = [w_x + \lambda_+(x, y)w_y] \cdot [w_x + \lambda_-w_y] = 0,$$

где введены обозначения $\lambda_\pm = \frac{1}{a}(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$; верно, что $\lambda_- \neq \lambda_+ \quad \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x^0, y^0)$, так как $d = ac - b^2 < 0$.

Достаточно занулить одну из скобок: $w_x + \lambda_\pm w_y = 0$.

Подобные уравнения 1 порядка решаются при помощи первых интегралов:

$$a_1(x, y)w_x + a_2(x, y)w_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{решение — ПИ системы: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a_1} = dt = \frac{dy}{a_2}$$

В нашем случае $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_\pm} \Leftrightarrow dy - \lambda_\pm dx = 0$ — первые интегралы этого уравнения дают решение исходного уравнения характеристик. Если $a, b, c \in C^2$, то λ_\pm и первые интегралы также принадлежат C^2 .

Покажем невырожденность:

$$\begin{cases} \xi_x + \lambda_+\xi_y = 0, \\ \eta_x + \lambda_-\eta_y = 0. \end{cases}$$

$$|J(x^0, y^0)| = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda_+ \xi_y & \xi_y \\ -\lambda_- \eta_y & \eta_y \end{pmatrix} = \overbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}^{\neq 0 \text{ в силу гиперболичности}} \cdot \xi_y \eta_y \neq 0$$

(если $\xi_y = 0$, то $\xi_x = 0 \Rightarrow \nabla \xi = 0$)

Итак, $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ – диффеоморфизм класса C^2 . Он зануляет \hat{a} и \hat{c} . Получается уравнение во второй канонической форме.

Замечание. От II канонической форме к I:

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\underbrace{\xi + \eta}_{\alpha}, \underbrace{\xi - \eta}_{\beta}), \quad \hat{u}_{\xi} = \tilde{u}_{\alpha} + \tilde{u}_{\beta}, \quad u_{\xi\eta} = \tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta}$$

Тогда наше уравнение:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} + \tilde{F}(\alpha, \beta, \tilde{u}, \nabla_{\alpha\beta} \tilde{u}) = 0 \text{ — I каноническая форма}$$

- б) Если $a(x, y) \equiv c(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^0, y^0)$, то $b \neq 0$, иначе уравнение в нуле функции b – не второго порядка.

То есть уравнение уже имеет II каноническую форму, преобразование в I – выше.

- в) Если $a \neq 0$ или $c \neq 0$, но $a(x^0, y^0) = c(x^0, y^0) = 0$, то аналогично $b(x^0, y^0) \neq 0$.

Заменим $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ и получим:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\xi^0, \eta^0) &= 2b(x^0, y^0) \neq 0 \\ \hat{c}(\xi^0, \eta^0) &= -2b(x^0, y^0) \end{aligned}$$

Это случай (а).

Параболический случай

Пусть в точке и некоторой ее окрестности тип параболический, то есть $ac - b^2 \equiv 0$. Ни в одной точке a и c не равны нулю одновременно, поскольку иначе $b = 0$ и это уравнение 1 порядка. Пусть для определённости $a \neq 0$. Уравнение характеристик:

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (w_x + \lambda w_y)^2 = 0, \quad \text{где } \lambda = \frac{b}{a}$$

Находим решение $w = \eta(x, y) \in C^2(U(x^0, y^0)) : \nabla w(x, y) \neq 0$.

$$\begin{cases} \xi = w & \text{эту построили} \\ \eta = \eta(x, y) & \text{эту выбираем произвольно, чтобы был диффеоморфизм} \end{cases}$$

доказательство того, что всегда можно выбрать, опущено.

Мы взяли ξ такое, что $\hat{c} \equiv 0$. Покажем, что и $\hat{b} \equiv 0$:

$$\hat{A} = JAJ^T \Rightarrow |\hat{A}| = |J|^2 \cdot |A| = |J|^2(ac - b^2) = 0 = \underbrace{\hat{a}\hat{c}}_{=0} - \hat{b}^2 \Rightarrow \hat{b} = 0$$

Пришли к

$$\hat{a}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi,\eta}\hat{u}) = 0,$$

где $\hat{a} \neq 0$, иначе 1 порядок, а обратная замена дает второй порядок.

Эллиптический случай

$$d(x, y) = ac - b^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^0, y^0)$$

Во всех точках окрестности выполнено $a \neq 0$ и $c \neq 0$, иначе было бы $d = -b^2 \leq 0$.
Характеристическое уравнение:

$$[w_x + \lambda_+ w_y][w_x + \lambda_- w_y] = 0,$$

где $\lambda_{\pm} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \mu \pm i\nu$; $\mu, \nu \in C^2$. При этом для функций λ_+, λ_- известно $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$.

Получилось два линейных ДУЧП первого порядка:

$$w_x \pm \lambda_{\pm} w_y = 0$$

Представим $w = \xi \pm i\eta \Rightarrow (\xi \pm i\eta)_x + (\mu \pm i\nu)(\xi \pm i\eta)_y = 0$

$$\begin{cases} \text{Re :} & \xi_x + \mu\xi_y - \nu\eta_y = 0 \\ \text{Im :} & \eta_x + \nu\xi_y + \mu\eta_y = 0 \end{cases} \quad \text{Искомая замена} \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \in C^2,$$

Невырожденность:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-\mu\xi_y + \nu\eta_y) & \xi_y \\ (-\nu\xi_y - \mu\eta_y) & \eta_y \end{vmatrix} = \nu(\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0, \text{ т.к.}$$

- $\nu \neq 0$
- если $\eta_y = \xi_y = 0$, то в силу уравнений на действительную и мнимую части $\xi_x = \eta_x = 0 \Rightarrow \nabla w = 0$

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{\hat{a}} - \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{\hat{c}} + \underbrace{2i(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)}_{2\hat{b}} = 0$$

Откуда $\hat{a} = \hat{c}$, $\hat{b} = 0$, то есть получаем уравнение

$$\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$$

Формальный вид уравнения характеристик

$$a \, dy \, dy - 2b \, dy \, dx + c \, dx \, dx = 0$$

Оно так выглядит из $(dy - \lambda_+ dx)(dy - \lambda_- dx) = 0$, то есть

$$(dy)^2 - \underbrace{(\lambda_+ + \lambda_-)}_{2b/a} \, dx \, dy + \underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{c/a} (dx)^2 = 0$$

Билет 2. Постановка задачи Коши для уравнения 2-го порядка с частными производными в \mathbb{R}^n с линейной старшей частью. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1)$$

и поверхность S : $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n) = 0$, $\omega \in C^2(\Omega)$ и $\text{grad}(\omega) \neq 0$ на Ω (нет особых точек). На поверхности задано гладкое некасательное поле $\vec{\nu} = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$, $\langle \vec{\nu}, \vec{n} \rangle \neq 0$.

Определение 2.1 (Задача Коши). В $U(x^0) \subset \Omega$, $x^0 \in S$, найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет двум условиям:

1. $u(x)|_{S \cap U(x^0)} = u_0(x)$
2. $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{S \cap U(x^0)} = u_1(x)$ – выводящая производная

Здесь введена производная по направлению: $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = (\vec{\nu}, \nabla u) = \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$

Может не быть непрерывной зависимости от начальных данных. Функции u_0, u_1 произвольно брать, вообще говоря, нельзя.

Далее определим характеристическую поверхность.

Пусть S – гиперплоскость $x_n = 0$. Нормаль $\vec{n} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$,
 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{n-1})$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_n} = u_1(x_1, \dots, x_{n-1})$

Мы знаем значения функции на гиперплоскости.

Знаем градиент:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array} \right\} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right\} = u_1$$

Мы знаем и вторые производные: берём указанные сверху производные и дифференцируем вдоль поверхности, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Не нашли только $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}$. До этого мы вообще еще не использовали уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} [a_{nj} u_{x_n x_j} + a_{jn} u_{x_j x_n}] + \underbrace{a_{nn} u_{x_n x_n}}_{\text{только это слагаемое еще не определено}} + F(x, u, \nabla u) = 0$$

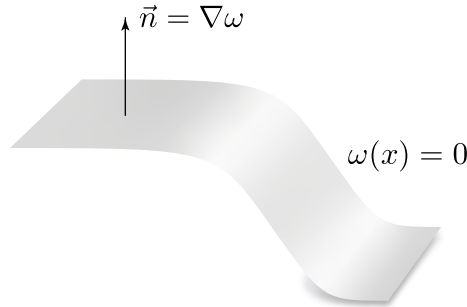
Если $a_{nn}(x) = 0$ на нашей гиперплоскости, то эту гиперплоскость назовём **характеристической**. На характеристической гиперплоскости полученное уравнение задаёт функциональную связь u_0 и u_1 – эта связь называется **условием совместности**.

Теперь переходим к произвольной поверхности: заменим координаты так, чтобы локально поверхность была гиперплоскостью:

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_n = \omega(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

\Rightarrow после преобразования $\omega = 0 \Leftrightarrow y_n = 0$.

Найдём это преобразование: возьмем $\vec{n} = \nabla \omega(x_0)$.



Дополним \vec{n} до базиса – получим $\langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{n} \rangle$. Ортогонализуем – получим $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{n} \rangle$. Возьмем такое преобразование:

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{cases} y_1 = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_{n-1} \\ y_n = \omega(\vec{x}) \end{cases}$$

Проверим, что якобиан не равен 0:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{n-1}^T) & \dots & (e_{n-1}^T) \\ (\nabla \omega(x)^T) & \dots & (\nabla \omega(x)^T) \end{vmatrix} \stackrel{x=x_0}{=} \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n^T) & \dots & (e_n^T) \\ (n^T) & \dots & (n^T) \end{vmatrix}$$

Строки матрицы – компоненты ОНБ $\Rightarrow J(x_0) \neq 0$.

Из соображений непрерывности $J \neq 0$ также в некоторой окрестности точки x_0 .

Значит, это диффеоморфизм класса C^2 .

В новых переменных: $\sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0$

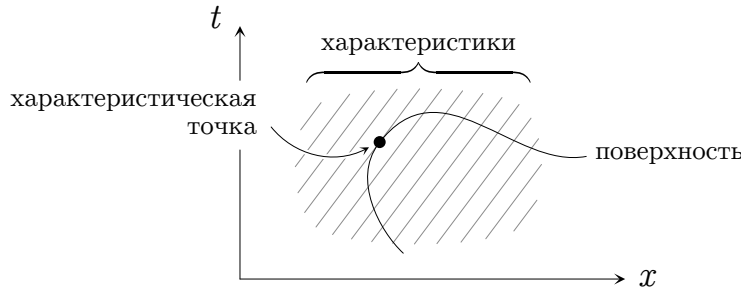
Условие характеристичности: $0 = \hat{a}_{nn} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[x(y)] \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j}$, где $y_n(x) \equiv \omega(x)$

Определение 2.2 (Характеристическая точка). Пусть дважды гладкая поверхность S задана уравнением $\omega(x) = 0$. ($\omega \in C^2$; $\nabla \omega \neq 0$)

Тогда точка $x_0 \in S$ называется характеристической, если в этой точке $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} = 0$

Определение 2.3 (Характеристическая поверхность). Дважды гладкая поверхность называется **характеристикой**, если все её точки характеристические.

Заметим, что если поверхность $\omega(x) = 0$ – характеристическая, то все поверхности $\omega(x) = \text{const}$ тоже характеристические. Поэтому характеристики образуют семейства.



Пример 2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. S – прямая $x = y$, $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{u_x}{\sqrt{2}} + \frac{u_y}{\sqrt{2}} = u_1$

Производная $\frac{du_1}{dl} = \left(\vec{l}, \nabla \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] = 0$.

Значит, любую функцию на S задать нельзя; прямая $x = y$ – характеристика.

Пример 2.2. $u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ (волновое уравнение).

Характеристическое уравнение: $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 (\text{grad } \omega)^2 = 0$

Этому уравнению удовлетворяет $\omega(t, x) = \underbrace{a^2 t^2 - \vec{x}^2}_{\text{конус}} = 0$.

Пример 2.3. $u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$ (уравнение теплопроводности).

Характеристическое уравнение: $-a^2 [\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

Так как $\nabla \omega \neq 0$, мы требуем $\omega_t \neq 0$.

Подходит $\omega(t, x) = t - C = 0 \Rightarrow$ характеристики — это гиперплоскости $t = C$

Пример 2.4. $\Delta u(x) = f(x)$ (ур-е Пуассона), $x \in \mathbb{R}^n$;

Характеристическое уравнение: $a^2[\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

А мы требовали $\nabla \omega \neq 0 \Rightarrow$ у уравнения эллиптического типа нет характеристик.

Теорема Ковалевской

Функция $u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ называется **вещественно-аналитической** в \vec{x}_0 , если в некоторой $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ она представима в виде

$$u(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| > 0} u_\alpha (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha,$$

где α – мультииндекс, $u_\alpha \in \mathbb{R}$, $(\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$

Теорема 2.1 (Ковалевской). Пусть в уравнении $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0$:

- все $a_{ij}(\vec{x})$ вещественно-аналитические в \vec{x}_0
- $F(\vec{x}, u, \nabla u)$ – вещественно-аналитическая в $(\vec{x}_0, u_0(\vec{x}_0), \nabla u(\vec{x}_0))$ соответственно
- $\omega(\vec{x})$ вещественно-аналитическая в \vec{x}_0
- \vec{x}_0 – не характеристическая точка поверхности
- u_0, u_1 – вещественно-аналитические в \vec{x}_0 .

Тогда:

- $\exists U_\varepsilon(\vec{x}_0)$: в ней \exists вещественно-аналитическое решение задачи Коши
- оно единственно в классе вещественно-аналитических функций.

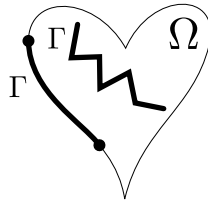
Понятие о корректности

Рассмотрим абстрактную дифференциальную задачу:

$$\begin{cases} L u(\vec{x}) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ B_j u(\vec{x}) = g_j(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma \subset \bar{\Omega}, \quad j = 1 \dots m \end{cases} \quad (*)$$

$L = L(\vec{x}, \partial)$ – линейный дифференциальный оператор порядка p

$B_j = B_j(\vec{x}, \partial)$ – конечное семейство линейных дифференциальных операторов на $\Gamma \subset \bar{\Omega}$



Определение 2.4. Пусть $F(\Omega)$ и $U(\Omega)$ – линейные нормированные пространства функций (ЛНП) на Ω , $G_1(\Gamma), \dots, G_m(\Gamma)$ – ЛНП на Γ .

Тогда если $\forall f(\vec{x}) \in F(\Omega), \forall g_j(\vec{x}) \in G_j(\Gamma)$ решение краевой задачи (*) существует, единственно в $U(\Omega)$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{U(\Omega)} \leq C\|f\|_{F(\Omega)} + \sum_{j=1}^m c_j \|g_j\|_{G_j(\Gamma)} \quad (**)$$

то задача корректна по отношению к выбранному набору пространств.

Замечание. Часто говорят, что решение корректной задачи должно непрерывно зависеть от начальных данных. Но в определении лектора, которое приведено выше, вместо непрерывности по начальным данным требуется ограниченность. Так тоже правильно, потому что задача линейна, а линейные операторы непрерывны тогда и только тогда, когда они ограничены.

Пример 2.5 (Адамара). Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = u_0(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \text{ — равномерно стремится к } 0 \text{ вместе со своими производными} \\ u_y|_{y=0} = u_1(x) \equiv 0 \end{cases}$$

При $u_0(x) \equiv 0$ решение будет $u(x, y) \equiv 0$.

Если задача корректна, то при $n \rightarrow \infty$ решения должны (равномерно?) стремиться к 0.

Функции $u_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{ch} ny$ — решения.

Но $u_n(0, y^*) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch} ny^* > \frac{1}{2} e^{-\sqrt{n}} e^{ny^*} \rightarrow \infty$

Неравенство (**) не выполнено.

Билет 3. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения от начальных данных. Существование и единственность классического решения. Корректность постановки задачи.

• Задача:
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad -l < x < l$$

Что понимать под решением задачи?

Определение 3.1. Классическое решение – функция класса C^2 , которая в точках указанной области удовлетворяет уравнению и заданным соотношениям.

• **Характеристическое уравнение:** $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + at = C_1 \\ x - at = C_2 \end{cases}$$

В новых координатах $\hat{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \hat{u} = f(\xi) + g(\eta)$.

Возвращаясь обратно, получим $u(t, x) = f(x + at) + g(x - at)$.

• Решим ЗК (поверхности нигде не касаются характеристик – задача должна быть корректной):

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = f(x) + g(x) &= u_0(x), & -l < x < l \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) &= u_1(x), & -l < x < l \end{aligned} \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{-l}^x u_1(z) dz + C = \frac{1}{a} V_1(x)$$

\Downarrow

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}V_1(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}V_1(x) \end{cases} \quad (-l < x < l) \quad (*)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}u_0(x + at) + \frac{1}{2a}V_1(x + at) + \frac{1}{2}u_0(x - at) - \frac{1}{2a}V_1(x - at) =$$

$$= \boxed{\frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(x) dx} - \text{формула Даламбера}$$

Решение определяется единственным образом.

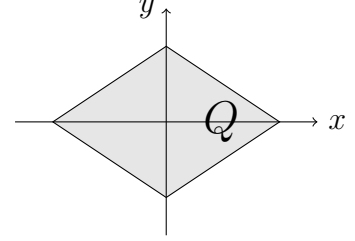
Если требуется определить максимальную область, где можно написать решение, то обратимся к формулам (*). Функции u_0 и V определены лишь на $(-l; l) \Rightarrow$ искомая область:

$$\begin{cases} -l < x + at < l \\ -l < x - at < l \end{cases} \quad - \text{характеристический четырехугольник } Q.$$

Нами доказана теорема:

Теорема 3.1. Пусть $\begin{cases} u_0(x) \in C^2(-l; l) \\ u_1(x) \in C^1(-l; l) \end{cases}$. Тогда ЗК имеет в Q

единственное решение $u(t, x) \in C^2(Q)$ – классическое. Оно дается формулой Даламбера.



Корректность задачи для уравнения малых колебаний струны:

- нами проверены существование и единственность классического решения.
- покажем непрерывность решения по входным данным u_0 и u_1 .
Берем две задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases}$$

Пусть $|u_0 - u_0| < \delta_0$, $|u_1 - u_1| < \delta_1 \quad \forall x: |x| < l$. Введем $\begin{cases} v_0 = u_0 - u_0 \\ v_1 = u_1 - u_1 \\ v = u - u \end{cases}$

Тогда задача для v : $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ v|_{t=0} = v_0(x), & |x| < l, |v_0| < \delta_0 \\ v_t|_{t=0} = v_1(x), & |x| < l, |v_1| < \delta_1 \end{cases}$

Согласно формуле Даламбера,

$$|v(t, x)| = \left| \frac{v_0(x + at) + v_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(y) dy \right| \leq \delta_0 + \delta_1 t \quad \forall (t, x) \in Q$$

- Если l конечно, то $t \leq \frac{l}{a}$ из вида четырёхугольника Q . Устремляя $\delta_0, \delta_1 \rightarrow 0$, получим $|v| \rightarrow 0$.
- Если $l = \infty$: в любой конечной полосе $t \leq T < \infty$ требуемое верно.
Так замечаем всю плоскость.

Билет 4. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закрепленным концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения.

Формулировка

Задача (называется *начально-краевой* или *смешанной*)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & \text{по сравнению с задачей Коши это дополнительное граничное условие} \end{cases} \quad (2)$$

Замечание. Физический смысл: смотрим, как волна отражается от закрепленного конца

Предполагаем, что

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2[0, +\infty) \\ u_1(x) \in C^1[0, +\infty) \end{cases}$$

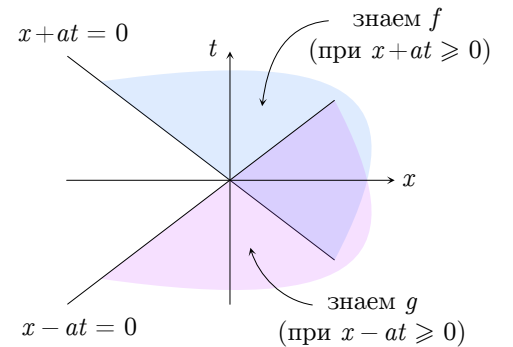
Общее решение

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x + at) + g(x - at) \\ \begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Если ввести обозначение $v_1 = \int_0^x u_1(y) dy + C$, то при $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}v_1(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}v_1(x) \end{aligned}$$

Граничные условия нужны для определения u в $(x \geq 0) \cap (t \geq 0)$ (в смысле пересечения областей). Их не обязательно ставить на $x = 0$, можно на $x + \alpha t = 0$, $-a < \alpha < a$, то есть там, где известна только одна из функций, а не обе.

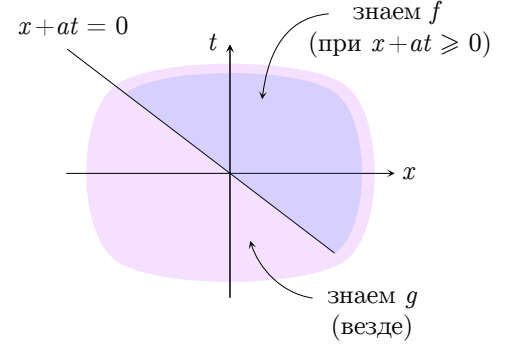


$$u|_{x=0} = f(at) + g(-at) = 0, \quad t \geq 0$$

Введем $\xi = -at, \xi \leq 0$, тогда $g(\xi) = -f(-\xi)$ и суммарно:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(\xi) - \frac{1}{2a}v_1(\xi), & \xi \geq 0 \\ -\frac{1}{2}u_0(-\xi) - \frac{1}{2a}v_1(-\xi), & \xi \leq 0 \end{cases}$$

Теперь g известна везде, решение найдено при $x + at > 0$, то есть даже в большей области, чем мы хотели.



Условия согласования

Чтобы $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$, решения необходимо «сшить»

$$\begin{aligned} g(+0) &= g(-0) \\ g'(+0) &= g'(-0) \\ g''(+0) &= g''(-0) \end{aligned}$$

Распишем эти условия:

$$\begin{aligned} g(+0) = g(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} = -\frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} &\Rightarrow u_0(0) = 0 \\ g'(+0) = g'(-0) &\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}u_0'(0)} - \frac{1}{2a}u_1(0) = \cancel{\frac{1}{2}u_0'(0)} + \frac{1}{2a}u_1(0) &\Rightarrow u_1(0) = 0 \\ g''(+0) = g''(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) = -\frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) &\Rightarrow u_0''(0) = 0 \end{aligned}$$

Определение 4.1 (условия согласования). Эти условия называются условиями согласования (начальных и граничных условий)

При их выполнении решение будет классическим. Если $u_0(0) \neq 0$, то даже обобщенного решения не будет.

Метод продолжений

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \geq at\} \\ \frac{u_0(at + x) - u_0(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \leq at\} \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 4.1. Пусть в смешанной задаче 2 функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что

- Выполнено условие гладкости: $u_0(x) \in C^2[0, +\infty)$, $u_1(x) \in C^1[0, +\infty)$
- Выполнено условие согласования: $u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0$

Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение $u(t, x) \in \mathbb{C}^2(t \geq 0, x \geq 0)$, представленное в 3

Доказательство. Используем метод продолжений. Для задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Введем

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \hat{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} - a^2 \hat{u}_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}_t|_{t=0} = \hat{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad - \text{ свели к задаче Коши}$$

Решение дается формулой Даламбера:

$$\hat{u}(t, x) = \frac{\hat{u}_0(x + at) + \hat{u}_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy$$

Покажем нечетность по x :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, -x) &= \frac{\hat{u}_0(-x + at) + \hat{u}_0(-x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \hat{u}_1(y) dy = \frac{\hat{u}_0(x - at) + \hat{u}_0(x + at)}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy = -\hat{u}(t, x) \end{aligned}$$

$$\hat{u}(t, 0) = \underbrace{\frac{\hat{u}_0(-at) + \hat{u}_0(at)}{2}}_{=0} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \hat{u}_1(y) dy = 0$$

□

Билет 5. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 . Существование классического решения этой задачи.

Теорема 5.1 (Из курса мат. анализа). Пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_y \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченные области, $f(x, y) : \overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y)$. Тогда $J(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dx \in C(\overline{\Omega}_y)$

Если к тому же $\frac{\partial f}{\partial y_k} \in C(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y)$, то $J(y)$ имеет непрерывную на $\overline{\Omega}_y$ частную производную $\frac{\partial J(y)}{\partial y_k}$, которая равна $\int_{\Omega_x} \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y) dx$.

Обозначим (τ - вспомогательный параметр)

$$u_g(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} g(\xi, \tau) dS_\xi, \quad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3$$

Лемма 5.2. Пусть $g(\xi, \tau)$ такая, что

1. $g \in C\{\xi \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\}$
2. $D_\xi^\alpha g(\xi, \tau) \in C\{\xi \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\} \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq p$.

Тогда

1. $D_{t,x}^\alpha u_g(t, x, \tau) \in C\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\} \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq p$
2. $\lim_{t \rightarrow +0} u_g(t, x, \tau) = 0$
3. При $p \geq 1 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = g(x, \tau)$

Доказательство. Докажем отдельно все три утверждения.

1. Сведем интеграл к интегралу по единичной сфере с центром в нуле с помощью такой замены:

$$\eta = \frac{\xi - x}{at} \Rightarrow \xi = x + at\eta, \quad |\vec{\eta}| = 1.$$

В таком случае элемент площади $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$. Во введенном выше интеграле получим

$$u_g(t, x, \tau) = \frac{(at)^2}{4\pi a^2 t} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta = t J_g(t, x, \tau),$$

$$\text{где } J_g(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta$$

Теперь интеграл уже по фиксированному множеству. Все выкладки справедливы при $t > 0$. Функция

$$\bar{g}(t, x, \eta, \tau) = g(x + at\eta, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, |\eta| = 1, \tau \geq 0\}.$$

Тогда по теореме из начала билета $J_g(t, x, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\}$.

Аналогично будет для производных в силу второй части той же теоремы и наличия соответствующих производных у функции g .

2. $\lim_{t \rightarrow +0} U_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t J_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) = 0$ (последний предел конечен в силу непрерывности).

Можно записать

$$U_g(t, x, \tau) = \begin{cases} u_g(t, x, \tau), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in C(\bar{\Omega}),$$

где последнее включение означает непрерывные в области и непрерывно продолжимые на границу функции.

3. При $p \geq 1$ запишем следующее:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} u_g(t, x, \tau) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} [t J_g(t, x, \tau)] = \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) + \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_g(t, x, \tau) = \\ &= J_g(0, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta \Big|_{t=0} = g(x, \tau) \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} dS_\eta = g(x, \tau). \end{aligned}$$

□

Перейдем к решению задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 5.3 (Формула Пуассона-Кирхгофа). Пусть $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

является классическим решением задачи (4)

Доказательство. В силу леммы имеем $u|_{t=0} = 0$; $u_t|_{t=0} = u_1$.

Т.к. $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $u \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$, то сделаем замену переменной:

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta.$$

Осталось только проверить, что u удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \Delta_\xi u_1(x + at\eta) dS_\eta = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi.$$

При $t > 0$ (использовано $\vec{n} = \frac{\xi - x}{|\xi - x|} = \frac{\xi - x}{at} = \eta$)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(x + at\eta) \eta_k \cdot dS_\eta = \\ &= \frac{u(x, t)}{t} + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(\xi) n_k(\xi) \cdot dS_\eta = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}(\xi) \cdot dS_\xi = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} I \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \iiint_{|\xi-x|<at} \operatorname{div}(\nabla u_1) d\xi = \oint_{|\xi-x|=at} (\nabla u_1, \vec{n}) dS_\xi = \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} dS_\xi = I$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \left[\oint_{|\xi-x|=\rho} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi \right] d\rho = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right] = \frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{u}{t \cdot t} + \frac{I}{4\pi at^2} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \\ &= \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi at} a \varphi(at) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi. \end{aligned}$$

Итак, $u(x, t)$ - классическое решение. □

Рассмотрим

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Введем $v(t, x)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Эту задачу мы уже решили. Так как $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, имеем $v \in C^3\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$.

Утверждение 5.4. $u(x, t) \equiv v_t(x, t) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ дает решение задачи (5).

Доказательство.

$$1. \quad u_{tt} - a^2 \Delta u = \partial_t(v_{tt} - a^2 \Delta v) = \partial_t 0 = 0$$

$$2. \quad u|_{t=0} = v_t|_{t=0} = u_0(x)$$

$$3. \quad u_t|_{t=0} = v_{tt}|_{t=0} = a^2 \Delta v|_{t=0} = 0 \text{ (на гиперплоскости } t = 0: \quad v|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right|_{t=0} \equiv 0. \text{ При этом } v_t \text{ может быть ненулевой.)}$$

□

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 5.5. Функция $u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi \right], \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{где } u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3),$

является классическим решением задачи (5).

Билет 6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 . Метод Дюамеля. Принцип Гюйгенса.

Формулировка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \text{считаем, что } f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\} \quad (6)$$

Метод Дюамеля

Сведем задачу к задаче Коши для однородного волнового уравнения. Рассмотрим однопараметрическое семейство задач:

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x w(t, x, \tau) = 0 & t > \tau; x \in \mathbb{R}^3 \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases} \quad \tau \geq 0 \quad (7)$$

Решение задач семейства получаем по формуле Пуассона-Кирхгофа:

$$w(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \iint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \in C_{t,x,\tau}^{2,2,0} \{t - \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

(Под $C_{t,x,\tau}^{2,2,0}$ подразумевается, что $D_{t,x}^\alpha w(t, x, \tau) \in C \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq 2$)

Утверждение 6.1.

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \tau) d\tau \text{ — классическое решение исходной задачи.}$$

Доказательство.

- $u(t, x) \in C^2 \{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$
- $u|_{t=0} = 0$
- Вычислим $u_t|_{t=0}$

Интегралы, в которых и пределы, и подынтегральная функция зависят от параметра, дифференцируются по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = f(t, b(t)) \cdot b' - f(t, a(t)) \cdot a' + \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(t, x) dx$$

В нашем случае $a = 0$, $b = t$, $b' = 1$. Поэтому

$$u_t|_{t=0} = \left(\underbrace{w(t, x, \tau)|_{\tau=t}}_{= 0 \text{ из нач. усл. в (7)}} + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \right) \Big|_{t=0} = \int_0^0 \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = 0$$

$$\bullet \quad \Delta_x u = \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = w_t(t, x, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t w_{tt}(t, x, \tau) d\tau = f(\tau, x)|_{\tau=t} + a^2 \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau \\ &= f(t, x) + a^2 \Delta_x u \end{aligned}$$

Значит, рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению. □

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.2. Пусть в задаче (6) функция $f(t, x)$ такова, что $D_x^\alpha f \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$. Тогда функция

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \left[\oint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \right] d\tau \quad (8)$$

является классическим решением, причем

$$D_{t,x}^\alpha u \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Суть метода Дюамеля: $f(t, x)$ — это начальные данные в каждый момент времени.

Запаздывающий потенциал

Преобразуем формулу (8):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi a^2(t - \tau)} \oint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi &= \left[\begin{array}{l} \rho = a(t - \tau) \\ \tau = t - \rho/a \\ d\tau = -d\rho/a \end{array} \right] = - \int_{at}^0 \frac{1}{4\pi a \rho} \frac{d\rho}{a} \oint_{|\xi - x| = \rho} f\left(t - \frac{\rho}{a}, \xi\right) dS_\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} d\rho \oint_{|\xi - x| = \rho} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dS_\xi = \boxed{\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi - x| < at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} d\xi} \end{aligned}$$

Выражение в рамке называется *запаздывающим потенциалом*.

Общая задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

Теорема 6.3 (формула Кирхгофа). Пусть в общей задаче Коши

$$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3) \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Тогда выражение

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi)}{|\xi-x|} d\xi$$

является классическим решением общей задачи Коши; $u(t, x) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$

Принцип Гюйгенса

Утверждение 6.4 (Принцип Гюйгенса). Возмущение, локализованное в пространстве (трёхмерном), приводит к действию, локализованному во времени.

Требуется, чтобы источники отсутствовали, т.е. $f \equiv 0$, а носители функций u_0 и u_1 были ограничены, откуда

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 = M \text{ — компакт}$$

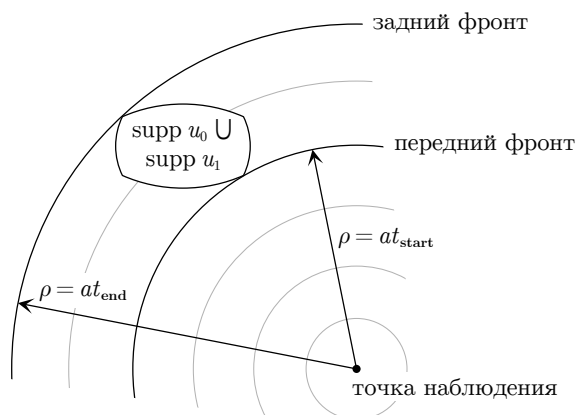
Фиксируется произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

По формуле Кирхгофа функция $u(t, x_0)$ может быть ненулевой только внутри отрезка времени

$$\text{от } t_{\text{start}} = \frac{1}{a} \cdot \inf_{y \in M} |y - x_0| \quad \text{до } t_{\text{end}} = \frac{1}{a} \cdot \sup_{y \in M} |y - x_0|$$

(иначе под интегралами тождественный нуль).

У такого конечного возмущения есть передний и задний фронт:



Значение $u(t, x_0) \sim$ интеграл по сфере радиусом $|x_0 - \xi| = \rho = at$

Билет 7. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в \mathbb{R}^2 . Метод спуска. Диффузия волн.

Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), & t > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (9)$$

Используем **метод спуска**: перейдем в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(t, x_1, x_2) \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для этой задачи решение мы уже знаем. Покажем, что оно не зависит от третьей переменной.

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2, x_3) = & \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi_1, \xi_2) dS_\xi &+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \underbrace{\iint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi}_{V(t, x)} + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi\right)}{|\xi-x|} d\xi \end{aligned}$$

Покажем, например, что функция $V(t, x)$ не зависит от x_3 . Сфера, по которой ведется интегрирование, разбивается на две полусферы, которые задаются уравнениями

$$\xi_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2} = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}$$

Интегралы по полусферам равны, поэтому $V(t, x) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \iint_{S^+} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$

Из матанализа известно, что если поверхность S задана в виде графика некоторой функции $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2) \in D$, то поверхностный интеграл можно свести к двойному по формуле

$$\iint_S u(\xi) dS_\xi = \iint_D u(\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} d\xi_1 d\xi_2$$

В нашем случае

$$\sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} = \sqrt{1 + \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}$$

Получили, что

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi'-x'|<at} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}} d\xi_1 d\xi_2$$

не зависит от третьей переменной.

Аналогично для двух других слагаемых, т. к. во всех трех под знаками интегралов или производных можно выделить интеграл вида $\iint_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$, который, как показано выше, от x_3 не зависит. Доказанное можно сформулировать как теорему:

Теорема 7.1. Пусть в задаче Коши (9): $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$ Тогда функция ($d\xi = d\xi_1 d\xi_2$)

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} + \\ \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\tau, \xi) d\xi}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \right] d\tau$$

принадлежит $C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$ и является классическим решением задачи Коши (9).

Определение 7.1. *Диффузия волн* – это отсутствие принципа Гюйгенса. В \mathbb{R}^2 его нет. Есть эффект последействия: передний фронт есть, а заднего нет, так как интегралы берутся не по контурам, а по всей внутренней области.

Можно привести более наглядное доказательство. Пусть носители функций u_0, u_1 содержатся в некотором компакте M . Тогда, «погрузив» \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^3 , получим, что носитель начального возмущения – неограниченный цилиндр $\{(x_1, x_2, x_3): (x_1, x_2) \in M, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Следовательно, начальное возмущение не ограничено в пространстве, и возмущение в любой точке не ограничено во времени (у волн, созданных цилиндром, отсутствует задний фронт)

Билет 8. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая \mathbb{R}^2). Метод интеграла энергии.

Теорема 8.1. *Классическое решение ЗК для волнового уравнения в \mathbb{R}^n единственно.*

Доказательство (для случая \mathbb{R}^2). Пусть u_1 и u_2 - классические решения.

Тогда функция $v(x, y, t) = u_1 - u_2$ удовлетворяет полностью однородной задаче:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Наша цель - показать, что $v \equiv 0$ при $t \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Возьмем точку (x_0, y_0, t_0) , $t_0 > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Выпустим из этой точки характеристическую поверхность — конус:

$$w(t, x) = a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad t < t_0$$

Возьмем его часть — усечённый конус V_T с нижним основанием Σ_0 , верхним основанием Σ_T и боковой поверхностью Γ_T :



Вектор (внешней) нормали \vec{n} к этому усеченному конусу:

- на Σ_T : $\vec{n} = (1 \ 0 \ 0)^T$
- на Σ_0 : $\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)^T$
- на Γ_T : $\vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_t^2}} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_t \end{pmatrix}$

В силу уравнения характеристик $w_t^2 - a^2 w_x^2 - a^2 w_y^2 = 0$ (задаёт конус) имеем

$$n_t^2 = a^2 (n_x^2 + n_y^2)$$

$$n_t^2 + n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_t^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Функция $\psi = v_t(v_{tt} - a^2 v_{xx} - a^2 v_{yy})$ тождественно равна нулю.

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
0 &= v_t v_{tt} - a^2 v_t v_{xx} - a^2 v_t v_{yy} = \\
&= \frac{1}{2} (v_t^2)_t + a^2 v_x v_{xt} - (a^2 v_t v_x)_x + a^2 v_y v_{yt} - (a^2 v_t v_y)_y = \\
&= \frac{1}{2} (v_t^2)_t - (a v_t v_x)_x - (a v_t v_y)_y + \left(\frac{1}{2} a^2 v_x^2 \right)_t + \left(\frac{1}{2} a^2 v_y^2 \right)_t = \\
&= \left(\frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} \right)_t + (-a^2 v_t v_x)_x + (-a^2 v_t v_y)_y = \\
&= F_t^{(t)} + F_x^{(x)} + F_y^{(y)} = \operatorname{div} \vec{F},
\end{aligned}$$

где введено поле \vec{F} .

Проинтегрируем полученную дивергенцию по объему усеченного конуса:

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_{V_T} \operatorname{div} \vec{F} = \oint_{\partial V_T} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma_T} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} dS - \iint_{\Sigma_0} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} dS + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t - 2a^2 v_t v_x n_x - 2a^2 v_t v_y n_y) dS = E(\Sigma_T) - E(\Sigma_0) + E(\Gamma_T)
\end{aligned}$$

В силу условий $v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0$ имеем $E(\Sigma_0) = 0$ (под интегралом тождественный ноль).

Тогда $E(\Sigma_T) + E(\Gamma_T) = 0$. Кроме того, $E(\Sigma_T) \geq 0$ (под интегралом сумма квадратов).

Покажем, что и $E(\Gamma_T) \geq 0$: разделим и домножим её на $n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t^2 - 2a^2 v_t v_x n_t n_x - 2a^2 v_t v_y n_t n_y) dS = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} \left(v_t^2 \overbrace{a^2 (n_x^2 + n_y^2)}^{= n_t^2} + a^2 v_x^2 n_t^2 + a^2 v_y^2 n_t^2 - 2a^2 v_t v_x n_t n_x - 2a^2 v_t v_y n_t n_y \right) dS \\
&= \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + 1} \iint_{\Gamma_T} ((v_t n_x - v_x n_t)^2 + (v_t n_y - v_y n_t)^2) dS \geq 0
\end{aligned}$$

Значит, $E(\Sigma_0) = E(\Sigma_T) = E(\Gamma_T) \equiv 0$. Из $E(\Sigma_T) \equiv 0$ получаем:

$$v_t \equiv 0, v_x \equiv 0, v_y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{const} = v|_{t=0} = 0$$

Это верно всюду внутри усеченного конуса. Заметая такими конусами всё пространство, получим, что $v \equiv 0$. \square

Билет 9. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^1 . Фундаментальное решение. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции.

$$\text{Задача: } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Наводящие соображения

На [консультации](#) 2021 года лектор сказал, что эту часть можно не учить. Поэтому можете сразу перейти к [формальному доказательству формулы Пуассона](#).

Итак, пусть для начала:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \tau = \alpha t, & \alpha > 0, \\ \xi = \beta x, & \beta > 0. \end{cases}$$

Пусть $u(t, x)$ - решение задачи. Введём $v(\tau, \xi) = u\left(\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\xi}{\beta}\right)$. Тогда

$$1. \quad v|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & \frac{\xi}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \xi \geq 0 \\ 0, & \frac{\xi}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \xi < 0 \end{cases}$$

$$2. \quad v_\tau = \frac{1}{\alpha} u_t, \quad v_\xi = \frac{1}{\beta} u_x, \quad v_{\xi\xi} = \frac{1}{\beta^2} u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \alpha v_\tau = a^2 \beta^2 v_{\xi\xi}$$

Функция v в общем случае будет решением другой задачи Коши, но при $\alpha = \beta^2$ — той же самой задачи Коши. Значит, решение не единственно: если $u(t, x)$ — решение, то $\forall \beta > 0$ функция $v(t, x) = u\left(\frac{t}{\beta^2}, \frac{x}{\beta}\right)$ — тоже решение.

Определение 9.1. Множество преобразований $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ — *однопараметрическая группа преобразований*, если:

- Это множество замкнуто относительно операции композиции:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{D} \quad \exists! \gamma \in \mathcal{D}: \quad u_\alpha \circ u_\beta = u_\gamma$$

- Оно содержит нейтральный элемент — тождественное преобразование:

$$\exists! o \in \mathcal{D} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad u_o \circ u_\alpha = u_\alpha \circ u_o = u_\alpha)$$

- У каждого элемента есть обратный, и их композиция в любом порядке даёт тождественное преобразование.

Определение 9.2. Функция $I(x)$ — инвариант однопараметрической группы преобразований, если $\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad I(x) \equiv I(u_\alpha(x))$

Определение 9.3. Говорят, что уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований, если все преобразования группы переводят решения этого уравнения в решения.¹

Определение 9.4. Решение уравнения называется *автомодельным*, если оно зависит только от инвариантов некоторой допустимой группы преобразований.

Пример 9.1. Множество преобразований

$$\begin{cases} \tau = \beta^2 t, \\ \xi = \beta x \end{cases}$$

есть однопараметрическая группа преобразований, $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ — инвариант группы.

Найдём автомодельное решение $u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = f(z)$.

В этом случае:

$$u_t = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{-x}{2t^{3/2}}\right) \quad u_x = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad u_{xx} = f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2t\sqrt{t}} f'(z) &= a^2 f''(z) \cdot \frac{1}{t} \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= -\frac{1}{a^2} \frac{x}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2a^2} z \\ \ln |f'(z)| &= -\frac{z^2}{4a^2} + \tilde{C}_1 \end{aligned}$$

Получили, что $f(z) = C_1 \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta + C_2$

Задача была следующей: бесконечный стержень разделён на две половины, начальные температуры половин $T_0 = 0$ и $T_1 = 1$. Из физических соображений:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta = C_1^{-1} = 2a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\frac{\eta}{2a}}_{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}}$$

¹В прошлых версиях файла определение гласило, что уравнение допускает группу преобразований, если оно инвариантно относительно всех преобразований группы. Но непонятно, что подразумевается под инвариантностью *уравнения*. Новое определение же опирается на инвариантность *функций*. Оно взято с [этого сайта](#).

Окончательно:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta = \frac{2a}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu$$

Введём **интеграл ошибок**:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1, \quad \operatorname{erf}(0) = 0$$

Тогда:

$$u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4ta^2}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

1. Мы рассмотрели модельную задачу



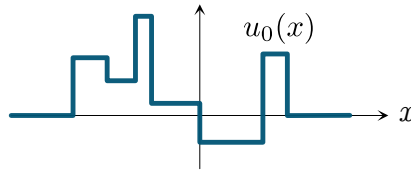
2. Увеличим ступеньку в u_* раз и сдвинем

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

3. Можем получить и решение для ступеньки конечной ширины:

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

4. Для системы из N интервалов имеем:



$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \frac{u_{*k}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

Последнее можно переписать в следующем виде:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\}}{x_{2k} - x_{1k}} \right] u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k})$$

5. Окончательно, пусть $u_0(x)$ финитна, непрерывна, ограничена. Разбиваем ее носитель $\text{supp } u_0(x)$ на отрезки, аппроксимируем кусочно постоянной. Для приближенных решений справедливо:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \left[\Psi(t, x, \xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - \xi}{\sqrt{4a^2t}} \right), \quad \xi_k = \frac{x_{2k} - x_{1k}}{2} \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{\Psi(t, x, x_{2k}) - \Psi(t, x, x_{1k})}{x_{2k} - x_{1k}} \cdot u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k}) \approx \\
 &\approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi_k)^2}{4a^2 t}} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) \quad \text{— Интегральная сумма Римана}
 \end{aligned}$$

Предположение: решение будет

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi \quad \text{— Формула Пуассона}$$

Функция

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad \text{— фундаментальное решение (или функция источника)}$$

Строгое доказательство

Теорема 9.1. Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^1)$, $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$. Тогда функция

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy$$

1. Принадлежит классу $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^1) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$
2. Является классическим решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$

Доказательство.

1. В исходном интеграле для $u(t, x)$ сделаем такую замену:

$$\frac{y-x}{\sqrt{4a^2t}} = \eta, \quad y = x + \sqrt{4a^2t} \eta, \quad dy = \sqrt{4a^2t} d\eta$$

Тогда получим

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) d\eta$$

$$u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1, \eta \in \mathbb{R}^1)$$

Оценим $|e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta)| \leq M_0 e^{-\eta^2}$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} M_0 e^{-\eta^2} d\eta$ сходится \Rightarrow исходный интеграл сходится равномерно, а значит лежит в $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$. Отсюда следует третье утверждение теоремы.

2. Возьмем

$$u_x(t, x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) dy \quad (10)$$

Выражение под интегралом лежит в $C(t > 0, x, y \in \mathbb{R}^1)$.

Пусть $x \in [-A, A]$. Покажем равномерную сходимость интеграла серией оценок:

- (a) При $|y| > A$:

$$(y-x)^2 \geq (|y| - A)^2 = y^2 + A^2 - 2\frac{|y|}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}A).$$

Поскольку $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$(y-x)^2 \geq y^2 + A^2 - \frac{y^2}{2} - 2A^2 = \frac{y^2}{2} - A^2$$

- (b) При $|y| \leq A$: $(x-y)^2 > 0$

$$(c) \text{ При } \forall y \in \mathbb{R}: (x-y)^2 \geq \varphi_A(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} - A^2, & |y| \geq A \\ 0, & |y| < A \end{cases}$$

- (d) Кроме того, $|y-x| \leq |y| + A$.

Получили следующую оценку (при $|x| < A$):

$$\left| \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) \right| \leq \frac{M_0}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} (|y| + A) e^{-\frac{\varphi_A(y)}{4a^2t}}$$

Если $t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$, то это можно ограничить выражением $C \cdot (|y| + A) \cdot e^{-\frac{\varphi_A(y)}{B}}$, интеграл от которого сходится, поэтому исходный интеграл сходится равномерно.

Равномерная сходимость (по двум параметрам сразу) есть в любом прямоугольнике

$$Q = \left\{ |x| < A, \quad t \in [t_1, t_2] \right\}$$

Беря в качестве Q все возможные такие прямоугольники, получим, что производная u_x на всём множестве $\{t > 0, x \in \mathbb{R}^1\}$ существует, непрерывна и равна интегралу (10).

Аналогично будет для любой другой производной (будет асимптотика $|P_n(y)|e^{-\alpha y^2}$).

3.

$$\mathcal{E}(t, x - y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$\mathcal{E}_x(t, x - y) = -\frac{(x - y)}{2a^2 t} \cdot \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_{xx}(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x - y)^2}{4a^4 t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_t(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t} + \frac{(x - y)^2}{4a^2} \frac{1}{t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

Тогда

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}_t(t, x - y) - a^2 \mathcal{E}_{xx}(t, x - y)] u_0(y) dy = 0.$$

Начальное условие (используя самое начало выкладок)

$$u|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} u_0(x) d\eta = u_0(x)$$

Теорема доказана. □

Билет 10. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в \mathbb{R}^n . Метод Дюамеля. Существование классического решения.

Задача:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - a^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n), & \varphi_k(x_k) \in C(\mathbb{R}^1), \quad |\varphi(x_k)| \leq M, \quad k = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (11)$$

Напишем серию задач Коши:

$$\begin{cases} u_t^k(t, x) - a^2 u_{x_k x_k}^k(t, x) = 0, \\ u^k|_{t=0} = \varphi_k(x_k); \end{cases} \quad (12)$$

Решение каждой даётся формулой Пуассона:

$$u^k(t, x_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_k - y_k)^2}{4a^2 t}} \varphi_k(y_k) dy_k \quad (13)$$

Покажем, что решение всей задачи:

$$u = \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k)$$

1. Очевидно, $u(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$;

$$2. \quad u(0, x) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x_k);$$

$$\begin{aligned} 3. \quad u_t(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[u_t^j(t, x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[a^2 u_{x_j x_j}^j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \\ &= a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(t, x) = a^2 \Delta_x u(t, x). \end{aligned}$$

Итак, в случае разделения переменных имеем:

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}{4a^2 t}} \prod_{k=1}^n \varphi_k(y_k) dy_1 \dots dy_n = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy} \quad (14)$$

Полученная формула называется **формулой Пуассона в \mathbb{R}^n** .

Теорема 10.1. Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $|u_0| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy -$$

классическое решение задачи Коши [11](#), лежащее в классе $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$. Кроме того, $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сохраняется из предыдущего билета с заменой $(x - y)^2 \rightarrow |x - y|^2$. \square

Зная решение однородного уравнения, можно найти решение и для неоднородного:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (15)$$

Используем метод Дюамеля. Предположения относительно f :

1. $D_x^\alpha f(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq 2$;
2. $|f(t, x)| \leq M_0 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$;
3. $|D_x^\alpha f(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Сводим задачу к семейству однопараметрических задач:

$$\begin{cases} v_t(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x v(t, x, \tau) = 0, & t > \tau, x \in \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = f(\tau, x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (16)$$

Решение даётся формулой Пуассона в \mathbb{R}^n :

$$v(t, x, \tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t - \tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau, y) dy$$

$v(t, x, \tau)$ непрерывно продолжима до $t \geq \tau$, ограничена: $|v(t, x, \tau)| \leq M_0$.

Покажем, что $u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$ — решение задачи.

Исследуем вспомогательную функцию:

$$w(\tilde{t}, x, \tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \tilde{t}}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 \tilde{t}}} f(\tau, y) dy, \quad \tilde{t} > 0, \tau \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Введём $\eta = \frac{y - x}{2a\sqrt{\tilde{t}}} \Rightarrow y = x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta \Rightarrow dy = dy_1 \dots dy_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta_1 \dots d\eta_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta$.

Тогда $w(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$|f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) e^{-\eta^2}| \leq M_0 e^{-\eta^2}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} d\eta < +\infty \Rightarrow w(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Итак, $w \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$.

Утверждение 10.2. *в можно дифференцировать и вносить производную под интеграл.*

Доказательство. $w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) \sim \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$|f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) e^{-\eta^2}| \leq M_2 e^{-\eta^2} \Rightarrow w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Поэтому, вместо ' \sim ' можно поставить '=':

$w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

Аналогично и для вторых производных по x :

$w_{x_i x_j}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i x_j}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$ □

Теперь производная по времени: в силу того, что уравнение

$$\begin{cases} w_{\tilde{t}} - a^2 \Delta_x w = 0, \\ w|_{\tilde{t}=0} = f(\tau, x); \end{cases}$$

выполняется везде, включая границу, получаем, что $w_{\tilde{t}} \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

Мы исследовали w , а цель — v . Связь этих функций: $v(t, x, \tau) = w(t - \tau, x, \tau)$. При условиях $\tau \geq 0, t \geq \tau, x \in \mathbb{R}^n$ имеем непрерывность следующих функций: $v, v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}$. Тогда для функции

$u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$ получаем непрерывность $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \Rightarrow$ решение будет классическим.

Осталось проверить уравнение: $u_t = v(t, x, t) + \int_0^t v_t(t, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t a^2 \Delta_x v d\tau = f(t, x) + a^2 \Delta_x u$

Определение 10.1. Пусть Q — область в $\mathbb{R}_{t, x_1, \dots, x_n}^{n+1}$, а $\hat{Q} = Q \cup \{\text{некоторое подмножество } \partial Q\}$. Обозначим $C_{t, x}^{p, q}(\hat{Q})$ множество функций $u(t, x)$ таких, что $u, D_x^\alpha u, D_t^\beta u \in$

$C(Q)$, α — мультииндекс, $|\alpha| \leq q$, $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\beta| \leq p$, и все эти функции допускают непрерывное продолжение на \hat{Q} .

Теорема 10.3. Пусть в задаче Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

a) $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

б) $f(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

в) $|f(t, x)| \leq M_1, \quad |f_{x_i}(t, x)| \leq M_2, \quad |f_{x_i x_j}(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$

Тогда функция

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy + \int_0^t \left[\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}} f(\tau, y) dy \right] d\tau$$

является классическим решением задачи Коши, лежит в классе $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C_{t,x}^{1,2}(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$. Кроме того, справедлива оценка $|u(t, x)| \leq M_0 + tM_1$

Доказательство. Последний факт: $|u| \leq M_0 + \int_0^t |v_t| d\tau \leq M_0 + M_1 t$

□

Билет 11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$ (без доказательства)

- Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n , $T > 0$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ - цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью $t = \tau$ обозначим Ω_τ

Определение 11.1. Параболическая граница области Q_T - множество $\Gamma_T = \Omega_0 \cup \{[0, T] \times \partial\Omega\}$



Определим оператор $L : Lu(t, x) = u_t - a^2 \Delta_x u$, где $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$

Теорема 11.1. (Принцип максимума) Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, и пусть $Lu(t, x) \leq 0$ в Q_T . Тогда $\max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} u(t, x)$ достигается на параболической границе Γ_T области Q_T

Доказательство. Возьмем усеченный цилиндр $Q_{T-\delta}$. Рассматриваются $M = \max_{Q_{T-\delta}} u(t, x)$ и $m = \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x)$. Теорема утверждает, что M не превосходит m .

- Пусть это не так и $m < M$. Тогда $\exists (t^1, x^1) \in Q_{T-\delta} \cup \Omega_{T-\delta}$ такая, что $M = u(t^1, x^1)$. Т.к. это точка максимума гладкой функции, $u_{x_i x_i}(t^1, x^1) \leq 0$, а $u_t(t^1, x^1) \geq 0$ (Если внутри, то равенство, если на верхней кромке, то ≥ 0).

Значит, значение образа $u(t, x)$ под действием оператора L в точке (t^1, x^1) :

$$Lu(t^1, x^1) = u_t - a^2 \Delta_x u|_{(t^1, x^1)} \geq 0.$$

Для противоречия необходимо показать, что неравенство строгое.

й

- **Строгость:** Возьмем функцию $v_\beta(t, x) = u(t, x) + \beta|x - x^1|^2$, $\beta = \frac{M - m}{2(\text{diam} Q_T)^2}$ - такая же гладкая, как u .

На параболической границе $v_\beta \leq m + \frac{M-m}{2d^2} \cdot d^2 = \frac{M+m}{2} < M$. Тем не менее, $v_\beta(t^1, x^1) = M \Rightarrow$ максимум v_β - не на параболической границе.

Пусть он в точке $(t^2, x^2) \notin \Gamma_{T-\delta}$. Тогда $L v_\beta|_{(t^2, x^2)} = L u|_{(t^2, x^2)} - \beta d^2 2n \boxed{\geq} 0 \Rightarrow L u|_{(t^2, x^2)} \geq \beta d^2 2n > 0 \Rightarrow$ **Противоречие** (вывод $\boxed{\geq}$ аналогичен рамке выше)

- **Предельный переход с $\delta \rightarrow +0$:** Пусть $u_* = \max_{\Gamma_T} u(t, x)$.

Тогда $\max_{\overline{Q_{T-\delta}}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_T} u(t, x) = u_* \Rightarrow u(t, x) \leq u_*$ во всех точках $\overline{Q_T} \setminus \Omega_T$

$$u(t, x)|_{\Omega_T} = \lim_{(\hat{t}, \hat{x}) \in Q_T \rightarrow (t, x) \in \Omega_T} u(\hat{t}, \hat{x}) \boxed{\leq} u_*$$

($\boxed{\leq}$ - предельный переход в неравенствах.) Теорема доказана.

□

Следствие. Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, $Lu = 0 \quad \forall (t, x) \in Q_T$. Тогда $\max_{\overline{Q_T}} u(t, x)$ и $\min_{\overline{Q_T}} u(t, x)$ достигаются на параболической границе Γ_T множества Q_T

Доказательство. Максимум достигается, т.к. $Lu \leq 0$, минимум достигается, т.к. $L(-u) \leq 0$ □

Единственность решения задачи Коши

Вообще говоря, решение единственным будет не всегда. Но если ограничиться некоторым классом функций, то в нем решение может оказаться единственным. Введем такой класс.

- Пусть $T > 0, \sigma \geq 0$. **Слой толщины T** - множество $\Pi_T = \{(t, x) : 0 < t < T; x \in \mathbb{R}^n\}$
Обозначим $M_\sigma(T)$ - **класс функций** $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi_T})$ таких, что $\forall u(t, x) \exists A > 0, \alpha \geq 0$ такие, что $|u(t, x)| \leq A \exp^{\alpha|x|^\sigma} \quad \forall (t, x) \in \overline{\Pi_T}$

Лемма 11.2. $M_\sigma(T)$ - линейное пространство, причем $\sigma_0 \leq \sigma_1 \Rightarrow M_{\sigma_0}(T) \subset M_{\sigma_1}(T)$

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 11.3. $\forall T > 0$ функция $u_T(t, x) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}, t < T, x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

Доказательство. - $u_T \in C^\infty \{t < T, x \in \mathbb{R}^n\}$

$$-\frac{\partial u_T}{\partial t} = \left[\frac{n}{2(T-t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}$$

$$- \Delta_x u_T = \left[\frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{2n}{4a^2(T-t)} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{4|x|^2}{4^2 a^4 (T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)} \Rightarrow (u_T)'_t - a^2 \Delta_x u_T = 0 \text{ ч.т.д}$$

□

• **Класс Тихонова** - $M_2(T)$

Лемма 11.4. Пусть $v(t, x)$ такова, что $v \in M_2(T)$ и v - решение полностью однородной ЗК $\{Lv = 0, v|_{t=0}\}$. Тогда $\exists T_1 \leq T : |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(x, t) \quad \forall \varepsilon > 0$

Доказательство. $|v| \leq A \exp^{\alpha|x|^2} \quad \forall t, x \in \overline{\Pi_T}$. Выбираем $T_1 \leq T : \frac{1}{8a^2 T_1} > \alpha : T_1 = \min \left\{ T, \frac{1}{16\alpha a^2} \right\}$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\omega_e^\pm(t, x) = \varepsilon u_{2T_1} \pm v(t, x)$. Нужно показать, что $\omega_e^\pm(t, x) > 0$:

$$\omega_e^\pm(t, x) \geq \varepsilon u_{2T_1} - |v(t, x)| \geq \varepsilon u_{2T_1} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1 - t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(2T_1 - t)} - A \exp^{\alpha|x|^2} \geq$$

$$\frac{\varepsilon}{(2T_1 - t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2 2(T_1)} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{8a^2(T_1)} \left[1 - \frac{(2T_1)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon} A \exp^{-\left(\frac{1}{8a^2(T_1)} - \alpha\right)|x|^2} \right]$$

(для выделенной части $\exists R > 0$: эта часть $< \frac{1}{2}$ при $|x| > R$)

Значит, $\forall (t, x) : 0 \leq t \leq T$ и $|x| \geq R \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$.



Но $\omega_e^\pm(t, x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности \Rightarrow на Γ_{T_1} достигаются максимум и минимум $\omega_e^\pm(t, x) \Rightarrow$ он строго $> 0 \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$ всюду в полосе $(0, T_1)$. Итак, $\mp v(t, x) \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \Rightarrow |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v \equiv 0$ в $\overline{\Pi_{T_1}}$

□

Теорема 11.5. Задача Коши $Lu = f(x, t), u|_{t=0} = u_0(x)$ в классе Тихонова не может иметь более одного решения в полосе Π_T

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2 . Возьмем $v(t, x) = u_2 - u_1$. Функция v удовлетворяет полностью однородной ЗК и лежит в классе Тихонова \Rightarrow в

полосе Π_{T_1} , где T_1 определено из предыдущей леммы, будет $v \equiv 0$.
 Если $T \leq T_1$, то все доказано. В противном случае вводим:
 $w(t, x) = v(t + T_1, x)$. Она удовлетворяет:

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta_x w = 0 \\ w|_{t=0} = 0, T_1 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (17)$$

\Rightarrow в полосе $(0, T_1)$ получим $w \equiv 0$

(T_1 определяется $\frac{1}{8a^2\alpha} \Rightarrow$ одно и то же)

Так за конечное число шагов $N = \lceil \frac{T}{T_1} \rceil$ мы покроем всю Π_T

□

Билет 12. Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.

Рассмотрим смешанную (начально-краевую) задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x), & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (18)$$

Рассматриваем ее классическое решение — функцию $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, где $Q_T = \{(t, x) : t \in (0, T); x \in (0, l)\}$, удовлетворяющую в Q_T уравнению, начальному и граничным условиям.

Теорема 12.1 (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 18*

Доказательство. Если u_1, u_2 — классические решения, то $v = u_1 - u_2$ — классическое решение полностью однородной задачи. На параболической границе $\Gamma_T = \{t = 0, x \in [0, l]\} \cup \{x = 0, t \in [0, T]\} \cup \{x = l, t \in [0, T]\}$ $v|_{\Gamma_T} = 0$. Но на Γ_T достигается максимум и минимум v в Q_T в силу принципа максимума $\Rightarrow v \equiv 0$ \square

Частный случай, указанный в билете:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & 0 < t < T; \end{cases}$$

Из непрерывности естественно требовать выполнение условий согласования: $u_0(0) = u_0(l) = 0$. Оказывается, в таких условиях решение существует.

Метод Фурье — поиск решения в виде ряда по собственным функциям стационарного оператора.

Придём к этой идее. Будем искать решение $Lu = u_t - a^2 u_{xx} = 0$ методом разделения переменных:

$$u(t, x) = \Theta(t)X(x), \quad u(t, x) \neq 0.$$

Подставляем: $\dot{\Theta}(t)X(x) - a^2\Theta(t)X''(x) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\Theta}(t)}{a^2\Theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}$, т.к. равенство выполнено $\forall(t, x) \in Q_T$

Получаем на функции Θ и X следующие уравнения:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \dot{\Theta}(t) + \lambda a^2 \Theta(t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Из начального условия $u(t, 0) = \Theta(t)X(0) \quad \forall t \in (0, T) \Rightarrow X(0) = 0$. Аналогично $X(l) = 0$.

Задача для X :

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0, \\ X(x) \not\equiv 0; \end{cases} \quad (19)$$

Поставленная задача называется *задачей Штурма-Лиувилля*.

Введем оператор A :

- $D(A) = \{X \in C^2[0, l] : X(0) = X(l) = 0\}$
- $\text{Im}(A) = \{Y \in C[0, l]\}$
- $AX = -\Delta X = Y$

Задача Штурма-Лиувилля — это задача на собственные функции и собственные значения оператора A .

Решим ее:

- $\lambda < 0$:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}}$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|l}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|l}} = 0; \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|l}} & 1 \end{pmatrix} = 1 - e^{\sqrt{|\lambda|l}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|l} = 0, \text{ противоречие.}$$

Итак, « $-\Delta$ » с граничными условиями Дирихле не имеет отрицательных собственных значений.

- $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l = 0; \end{cases}$$

Нетривиальных решений нет.

- $\lambda > 0$:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Функции } X_k(x) = \sin \left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

Теперь для найденных λ_k решаем $\dot{\Theta}_k(t) + \lambda_k a^2 \Theta_k(t) = 0 \Rightarrow \Theta_k(t) = e^{-a^2 \lambda_k t}$

Мы нашли $u_k(t, x) = e^{-a^2 \lambda_k t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ — счетное число бесконечно гладких решений: u_k удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (u_k)_t - a^2 (u_k)_{xx} = 0, \\ u_k(t, 0) = u_k(t, l) = 0, \\ u_k(0, x) = X_k(x) = \sin \lambda_k x; \end{cases}$$

Тогда $u_A(t, x) = \sum_{k=1}^N A_k u_k(t, x)$ — решение для задачи с начальным условием $u(0, x) = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$.

Обозначим Ku_0 — класс функций $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$ — тех, для которых умеем выписать явное решение. Пусть A_k — k -мерные векторы. Между Ku_0 и A_k есть биекция (по $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$)

однозначно восстанавливаем $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$

Бесконечномерный вектор подойдет уже не всегда. Как минимум ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)$ должен сойтись в замыкании области. Функция $\sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(t, x)$ должна быть нужной гладкости, а также удовлетворять уравнению 18.

Утверждение 12.2. $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$ подойдет

Доказательство. Пусть $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$. Тогда $\left|A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)\right| \leq |A_k| \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно \Rightarrow сумма непрерывна. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать \Rightarrow по $u_0(x)$ восстанавливаем A_n : $\int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$

Теперь рассмотрим ряд $u_A(t, x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$

Пока не можем поставить знак равенства, поскольку еще не выяснили сходимость.

$\left| A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right| \leq |A_k| \Rightarrow$ ряд сходится абсолютно и равномерно, и мы можем поставить знак равенства:

$$u_A(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Покажем, что получилась $u_A(t, x) \in C^\infty(t > 0, 0 \leq x \leq l)$.

Возьмем прямоугольник $Q_\delta = \{(t, x) : t \geq \delta > 0, 0 \leq x \leq l\}$.

Формально $\frac{\partial u_A}{\partial t} \sim - \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(t, x)$

Для краткости введём $y = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2$.

Оценка: $|\varphi_k| \leq |A_k| y e^{-y\delta} = |A_k| \frac{1}{\delta} (y\delta) e^{-y\delta} \leq |A_k| \frac{1}{\delta e}$

Последнее неравенство следует из того, что функция xe^{-x} имеет максимум в точке $x = 1$, равный $\frac{1}{e}$.

Итак, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Варьируя δ , прямоугольниками Q_δ замечаем всю область $\{t > 0, 0 \leq x \leq l\}$

Для остальных производных получим то же самое — всегда будет получаться произведение многочлена на экспоненту с отрицательным показателем.

Мы научились решать задачу для $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$. □

Докажем серию лемм.

Лемма 12.3. Пусть в гильбертовом пространстве \mathcal{H} оператор A симметричный (самосопряжённый), т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$. Тогда:

1. Все собственные значения A вещественны;
2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x_k — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_k , а x_n — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n , причем $\lambda_k \neq \lambda_n$. Тогда:

1. $\lambda_k(x_k, x_k) = (Ax_k, x_k) = (x_k, Ax_k) = (x_k, \lambda_k x_k) = \overline{\lambda_k}(x_k, x_k) \Rightarrow \lambda_k = \overline{\lambda_k} \Rightarrow \text{Im } \lambda_k = 0$
2. $\lambda_k(x_k, x_n) = (Ax_k, x_n) = (x_k, Ax_n) = \overline{\lambda_n}(x_k, x_n) \underset{\text{пункт 1}}{=} \lambda_n(x_k, x_n) \Rightarrow \frac{(\lambda_k - \lambda_n)(x_k, x_n)}{\neq 0} = 0 \Rightarrow (x_k, x_n) = 0$

□

Лемма 12.4. Оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, определенный на $D(A)$, является симметричным относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$: $(u, v) = \int_0^l u(x) \overline{v(x)} dx$

Доказательство. $(Au, v) = \int_0^l (-u''(x)) \overline{v(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{-u'(x) \overline{v(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u'(x) \overline{v'(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{u(x) \overline{v'(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u(x) \overline{(-v''(x))} dx = (u, Av)$

□

Лемма 12.5. Пусть $\{e_k\}$ — не более чем счетная ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением: $(e_k, e_j) = \delta_{kj} \overbrace{(e_k, e_k)}^{>0}$. Тогда $\forall f$ из этого пространства

справедливо неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} \right|^2 (e_k, e_k) \leq (f, f)$

Доказательство. $0 \leq \left(f - \sum_{k=1}^n c_k e_k, f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, f) - \sum_{j=1}^n \overline{c_j} (f, e_j) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \overline{c_j} (e_k, e_j) =$

$= (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k}(e_k, e_k) - \sum_{j=1}^n c_j \overline{c_j}(e_j, e_j) + \sum_{i=1}^n c_i \overline{c_i}(e_i, e_i) = (f, f) - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 (e_k, e_k)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 (e_k, e_k) \leq (f, f)$. \square

Лемма 12.6. Пусть два ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = A$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |\beta_k|^2 = B$ сходятся. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \beta_k$ сходится абсолютно, причем $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \sqrt{A} \sqrt{B}$

Доказательство. $\sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_k| \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\beta_k|^2}$. Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. \square

Лемма 12.7. Пусть $v(x) \in C^1([0, l])$, $v(0) = v(l) = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$, где $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l v(y) \sin\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy$, сходится на $[0, l]$ к $v(x)$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. 1. Система $\{e_k\} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$, так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Дирихле — симметричного в $\mathbb{L}_2([0, l])$ оператора.

2. $A_k = \frac{(v, e_k)}{(e_k, e_k)}$, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя.

$$3. A_k = \underbrace{-\frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} v(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) \Big|_0^l}_{=0} + \frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy = \frac{l}{\pi k} \alpha_k, \text{ где } \alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy.$$

4. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя, т.к. система $\{g_k\} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$, так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Неймана — симметричного в $\mathbb{L}_2([0, l])$ оператора.

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ сходится. Тогда сходится абсолютно ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$.

Функция $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$ непрерывна.

5. Сходимость к $v(x)$: Построим

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0, l] \\ -v(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Затем продолжим на \mathbb{R} , сделав периодической: $\tilde{v}(x + 2l) = \tilde{v}(x)$. Получаем непрерывную периодическую функцию, а во всех точках $x \in [0, l]$ $\exists \tilde{v}'_-(x), \tilde{v}'_+(x)$. Тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней на всей \mathbb{R} . В силу нечетности \tilde{v} , этот ряд — только по синусам, а коэффициенты Фурье равны A_k (для них совпадают формулы). Значит, на $[0, l]$ имеем

$$v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

□

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 12.8. Пусть в смешанной задаче

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям гладкости ($u_0 \in C^1([0, l])$) и согласованная ($u_0(0) = u_0(l) = 0$). Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = u(t, x)$, где $A_k =$

$\frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$, сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q_T} = [0, T] \times [0, l]$, функ-

ция $u(t, x) \in C(\overline{Q_T}) \cap C^\infty(Q_T)$ и является классическим решением этой задачи, а любая производная при $t > 0$ от $u(t, x)$ может быть найдена почленным дифференцированием.

Билет 13. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.

Формулировка задачи

Задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (t, x) \in Q_T = (0, T) \times (0, l), \\ u|_{t=0} = u_0(x); \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t); & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (20)$$

Рассматриваем её *классическое решение* - функцию $u(t, x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению, начальным и граничным условиям.

Теорема единственности

Теорема 13.1 (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 20.*

Единственность решения. Для двух решений \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 построим $V(t, x) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$.

V - решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, \\ V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что $V \equiv 0$ с помощью интеграла энергии: рассмотрим функцию $I = V_t[V_{tt} - a^2 V_{xx}]$, $(t, x) \in Q_T$.

$$I = V_t V_{tt} - a^2 V_t V_{xx} = \frac{1}{2} (V_t^2)_t - a^2 (V_t V_x)_x + a^2 \underbrace{V_x V_{xt}}_{\frac{1}{2} (V_x^2)_t} = \underbrace{\left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right)_t}_{F_t^1} - \underbrace{(a^2 V_t V_x)_x}_{F_x^2} \Big| \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой Грина: $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \Omega} Q dy + P dx$. Для её использования требуется непрерывность производных до границы, поэтому напомним её для области: $Q_{\tau, \varepsilon} = \{(t, x) : \varepsilon < t < \tau, \varepsilon < x < l - \varepsilon\}$.

Доказательство.



$$0 = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} I \, dx dt = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dt = \oint_{\partial Q_{\tau, \varepsilon}} -\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \, dx - a^2 V_t V_x \, dt$$

Распишем интеграл по $\partial Q_{\tau, \varepsilon}$:

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\tau} dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\varepsilon} dx - \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=l-\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем :

$$\begin{aligned} \because V_t(\varepsilon, x) \rightarrow V_t(0, x) = 0 \quad \because V_x(\varepsilon, x) \rightarrow V_x(0, x) = \frac{d}{dx}(V|_{t=0}) = 0 \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \rightarrow \int_0^l \quad (\text{по определению несобственного}) \\ \because \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_t(t, l-\varepsilon) = V_t(t, l) = 0 \Rightarrow \int_0^{\tau} (a^2 V_t V_x) \, dt \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \Big|_{\tau=l} dx = \int_0^l \frac{V_t^2(0, x) + a^2 V_x^2(0, x)}{2} dx \end{aligned}$$

Аналогично для $\int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_t V_x) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$. Поэтому получаем, что:

$$\int_0^l \frac{V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x)}{2} dx = 0$$

Тогда $V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, l) \times \tau$.

В любой точке $(t, x) \in Q_{\tau}$: $\vec{\nabla} V(t, x) = \vec{0} \Rightarrow V = \text{const} \quad \forall (t, x) \in Q_{\tau}$.

На замыкании в силу непрерывности V в \overline{Q}_{τ} также будет $V \equiv \text{const}$, но на границе $V = 0 \Rightarrow V \equiv 0 \quad \forall (t, x) \in \overline{Q}_{\tau}$, поэтому $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

Существование решения Будем рассматривать смешанную задачу для однородного уравнения колебаний струны при закреплённых концах.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t, x) \in Q_{\tau}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $-\Delta_0$:

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{X(x) \in C^2[0, l]: X(0) = X(l) = 0\}$$

У этого оператора есть счётное однопараметрическое семейство собственных функций: $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k = \sin(\lambda_k x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение будем искать в виде ряда $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$. Будем требовать выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^3[0, l], \quad u_1(x) \in C^2[0, l] - \text{условия гладкости} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 - \text{для непрерывности решения на } \overline{Q}_\tau, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0 - \text{для принадлежности решения } C^1(\overline{Q}_\tau), \\ u_0''(0) = u_0''(l) = 0 - \text{для принадлежности } C^2(\overline{Q}_\tau). \end{cases} \quad (21)$$

Последние три условия называются **условиями согласования**.

Рассматриваемый оператор симметричен относительно скалярного произведения в \mathbb{L}_2 , значит, собственные функции ортогональны в \mathbb{L}_2 . Разложим u_0, u_1 в ряды Фурье по X_k на $[0, l]$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) X_k dx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) X_k dx$$

Формально подставляем в уравнение: $\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k) X_k = 0$. Из начальных условий: $\Theta_k(0) = A_k$, $\dot{\Theta}_k(0) = B_k$.

В силу ортогональности $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ получаем счётное число задач Коши:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k = 0, \\ \Theta_k(0) = A_k, \quad \dot{\Theta}_k(0) = B_k. \end{cases}$$

Решение: $\Theta_k(t) = A_k \cos\left(\frac{a\pi k}{l}\right) t + \frac{l}{a\pi k} B_k \sin\left(\frac{a\pi k}{l}\right) t$, $t \in [0, \tau]$. □

Обоснование метода

Теорема 13.2. Пусть данные Коши $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям гладкости и согласования. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно в \overline{Q}_τ . Его сумма принадлежит классу $C^2(\overline{Q}_\tau)$ и является классическим решением задачи 13. Частные производные по t и x до второго порядка включительно можно вычислить почленным дифференцированием ряда.

Доказательство.

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \frac{-2}{l} \frac{l}{\pi k} u_0(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l + \frac{l}{\pi k} \frac{2}{l} \int_0^l u_0' \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \frac{2}{l} u_0'(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l - \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int_0^l u_0''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = - \underbrace{\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \frac{2}{l} \int_0^l u_0'''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx}_{\alpha_k} + \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 u_0''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l = -$$

Примечание: α_k - коэффициенты Фурье функции $u_0'''(x)$ по ортогональной системе функций $\cos\left(\frac{\pi k}{l}\right)$ — собственных функций оператора $-\Delta_0$ с граничными условиями Неймана — тоже симметричного оператора.

Аналогично находим коэффициенты B_k :

$$B_k = - \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \beta_k, \text{ где } \beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$$

Из того, что

$$|u_k(t, x)| = |\Theta_k(t) X_k(k)| = \left| A_k \cos(a\lambda_k t) + \frac{B_k}{a\lambda_k} \sin(a\lambda_k t) \right| \leq \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \frac{1}{a\lambda_k} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{c}{k^3}$$

следует абсолютная и равномерная сходимость ряда на \overline{Q}_τ

$$1. \text{ Граничные условия: } u(t, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(0) = 0, \quad u(t, l) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(\pi k) = 0.$$

$$\text{Начальные условия: } u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\lambda_k x) = u_1(x).$$

Итак, ряд порождает непрерывную на \overline{Q}_τ функцию, удовлетворяющую начальным и граничным условиям.

$$2. \text{ Производные: } u_t \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{a\pi k}{l} A_k \sin(\lambda_k a t) + B_k \cos(a\lambda_k t) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k.$$

$$|V_k| \leq a\lambda_k |A_k| + |B_k| \leq \frac{a\pi k}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{\tilde{c}}{k^2} \implies u_t \in C(\overline{Q}_\tau)$$

Значит, $u \in C(\overline{Q}_\tau)$.

$$u_{tt} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 A_k \cos(\lambda_k a t) - \frac{a\pi k}{l} B_k \sin(\lambda_k a t) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

$$|w_k| = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 |u_k| \leq \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \left(|\alpha_k| + \frac{1}{a} |\beta_k|\right)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно и равномерно, так как: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ сходится абсолютно; поэтому $u(t, x) \in C^2(\overline{Q}_\tau)$. \square

Можно ставить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

при более широких условиях.

При условиях $u_0(x) \in C^2[0, l]$, $u_1(x) \in C^1[0, l]$ (гладкости) и $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$ (согласования) и условиях на f : $f(t, x), f_x(t, x) \in C(\overline{Q}_\tau)$, $f(t, 0) = f(t, l) = 0$ - классическое решение задачи существует и единственно.

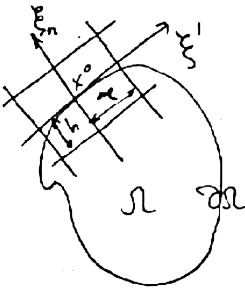
С помощью метода продолжений делаем u_0, u_1, f нечётными и 2π - периодическими, получаем задачу Коши для волнового уравнения. Решение даётся формулой Даламбера.

Билет 14. Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.

Формулы Грина

Определение 14.1. Ограниченная область Ω называется *областью с гладкой границей*, если $\forall x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$ найдутся:

- такая декартова СК, что начало в x_0 , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - координаты точек в этой СК
- Окрестность $U_0(x^0) = \{\xi: |\xi'| < r, |\xi_n| < h\}$, где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, такая, что в $U_0(x^0)$ часть границы $\Gamma \cap U_0(x^0)$ представляется в виде: $\xi_n = F(\xi'), |\xi'| < r, F(0) = 0, F(\xi') \in C^1(|\xi'| < r), \nabla_{\xi'} F(0) = 0$,
- Множество $U_-(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n < F(\xi')\} \in \Omega$,
Множество $U_+(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n \geq F(\xi')\}: \Omega \cap U_+ = \emptyset$
- Числа $r > 0, h > 0$ можно выбрать независимо от $x^0 \in \Gamma$.



Для ограниченных областей с гладкими границами справедлива формула Остроградского-Гаусса (F - непрерывно дифференцируемое векторное поле):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS = \int_{\Gamma} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS$$

Лемма 14.1.

Формулы Грина

Пусть Ω - ограниченная область с границей класса C^1 в \mathbb{R}^n , тогда справедливы следующие формулы.

$$\forall u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

$$\forall u(x) \in C^2(\bar{\Omega}), v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx - \int_{\Omega} (\Delta v)u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u dS_x$$

Полученные формулы называются первой и второй формулами Грина соответственно.

Доказательство.

Первая формула Грина

Пусть $\vec{f}(x), v(x)$ - гладкие векторное и скалярное поля соответственно: $\operatorname{div}(\vec{f} \cdot v) = (\nabla, \vec{f}v) + (\nabla, \vec{f}^\downarrow v) = v \operatorname{div} \vec{f} + (\vec{f}, \operatorname{grad} v)$.

Положим $\vec{f} = \nabla u \in C^1 \Rightarrow \operatorname{div}(v \nabla u) = v \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u} + (\nabla u, \nabla v)$.

Интегрируем по объёму в Ω :

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \oint_{\Gamma} (v \nabla u, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx$$

Заметим, что:

$$(v \nabla u, \vec{n}) = v \sum_{k=1}^{\dim \mathbb{R}^n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} n_k = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \cdot v(x)$$

При подстановке данного результата в равенство выше немедленно получим первую формулу Грина.

Вторая формула Грина

Для получения второй формулы Грина необходимо вычесть из первой формулы Грина симметричное ему по u и v равенство:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \oint_{\Gamma} (u \nabla v, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) \, dx$$

□

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть Ω - ограниченная область с границей Γ класса C^1 , $u_0(x) \in C(\Gamma)$, $f(x) \in C(\overline{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = u_0(x). \end{cases} \quad (22)$$

Классическим решением задачи Дирихле [22](#) называется $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

Лемма 14.2. *Не может существовать более одного классического решения задачи [22](#).*

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 22, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0$, $v|_{\Gamma} = 0$.

По формуле Грина:

$$\int_{\Omega} v \Delta v dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx \Rightarrow \nabla v \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow v(x) = \text{const}$$

С учётом того, что $\Delta(x) = 0$ и $v(x)|_{\Gamma} = 0$, получим, что $v(x) = 0$, а значит, $u_I = u_{II}$, и решение единственно. \square

Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона

Пусть Ω -ограниченная область с границей класса C^1 , $u_1(x) \in C(\Gamma)$, $f(x) \in C(\bar{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$ удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_1(x), x \in \Gamma. \quad (23)$$

Определение 14.2. Классическое решение задачи Неймана 23 есть такая функция $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям.

Лемма 14.3. Любые два классические решения задачи Неймана отличаются на константу.

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 23, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0$. По формуле Грина имеем:

$$\int_{\Omega} \Delta v v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \Rightarrow v \equiv \text{const}$$

\square

Лемма 14.4. Необходимым условием существования классического решения задачи Неймана является условие $\int_{\Omega} f(x) dx = \oint_{\Gamma} u_1(x) ds$

Доказательство.

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} \Delta u \cdot 1 dx = [1\text{-ая формула Грина}] = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot 1 ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla 1) dx = \int_{\partial\Omega} u_1(x) \cdot 1 ds$$

\square

Билет 15. Симметричность и положительная определенность оператора $-\Delta$ при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.

Задача на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа при однородном условии Дирихле: Найти λ и $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, где Ω - область с кусочно-гладкой границей Γ , такие, что

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u(x) \neq 0, \end{cases}$$

Утверждение 15.1 (без доказательства). *Существует счетное число собственных значений $\{\lambda_k\}_k$, $\{\lambda_k\} \rightarrow \infty$, причем каждому λ_k соответствует конечное число собственных функций.*

Формула Грина справедлива и для комплексных функций. Считаем, что $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = -\lambda \int_{\Omega} u \bar{u} dx$$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \oint_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \bar{u} dS - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{u}) dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} - \text{соотношение Рэлея.}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ (строго больше, т.к. $\nabla u = 0 \Rightarrow u = 0$). В задаче Неймана $\lambda = 0$ возможно.

Утверждение 15.2. *Оператор $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле является симметричным относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$: $(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx$*

Доказательство. Пусть $u(x), v(x)$ лежат в области определения нашего оператора

$$D_0(-\Delta) = \{u(x) : u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \Delta u(x) \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial \Omega} = 0\}.$$

Симметричность оператора означает, что

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) \quad \forall u, v \in D_0(-\Delta).$$

Проверим это:

$$(-\Delta u, v) - (u, -\Delta v) = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx \stackrel{\text{2 формула Грина}}{=} \oint_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v \right) dS = 0.$$

□

Утверждение 15.3. Собственные функции рассматриваемого оператора $u_k(x)$ и $u_m(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_k и λ_m , ортогональны относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(-\Delta u_k, u_m) &= (u_k, -\Delta u_m) \\ \lambda_k(u_k, u_m) &= \lambda_m(u_k, u_m) \\ \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_m)(u_k, u_m) &= 0 \Rightarrow (u_k, u_m) = 0\end{aligned}$$

□

Билет 16. Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Задача: в круге $D = \{x \mid |x| < R\}$ и на границе $\Gamma = \partial D$ рассматриваем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in D \leftarrow \text{уравнение Пуассона} \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), x \in \partial D \end{cases} \quad (24)$$

Сделаем замену: $x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi$.

Функция $\hat{u}(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Аналогично $\hat{u}_0(\rho, \varphi) = u_0(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \hat{f}(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \hat{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \hat{u}_{\varphi\varphi} = \hat{f}(\rho, \varphi), 0 < \rho < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \hat{u}(R, \varphi) = \hat{u}_0(R, \varphi) \\ \hat{u}(\rho, \varphi) = \hat{u}(\rho, \varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Далее считаем $\hat{f} = 0$, то есть решаем уравнение Лапласа.

Предположение: $u_0(x) \in C^1(\Gamma)$. Предполагаем, что решение принадлежит классу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. При этом $\hat{u} - 2\pi$ -периодическая по $\varphi \Rightarrow$ можно разложить \hat{u}_0, \hat{u} в ряды Фурье. [Если был бы уравнение Пуассона – требовали бы $f \in C^1(\bar{D})$.]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \varphi) \\ \hat{u}_0(R, \varphi) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} a_0(\rho) \\ A_0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} \cos k\varphi + \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} \sin k\varphi \right], \text{ где} \\ \begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \cos k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}_0, \\ \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \sin k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Формально подставляем в уравнение (аргументы функций опускаем – они все уже определены).

$$\frac{1}{2} \left(a'' + \frac{1}{\rho} a' \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k'' + \frac{1}{\rho} a_k' - \frac{k^2}{\rho^2} a_k \right] \cos k\varphi + \left[b_k'' + \frac{1}{\rho} b_k' - \frac{k^2}{\rho^2} b_k \right] \sin k\varphi \right\} = 0$$

Из граничного условия:

$$\frac{1}{2} a_0(R) + \sum_k [a_k(R) \cos k\varphi + b_k(R) \sin k\varphi] = \frac{1}{2} A_0 + \sum_k [A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi]$$

В силу ортогональности тригонометрической системы в $L_2[0, 2\pi]$ имеем на a_k и b_k следующие задачи:

$$\begin{cases} a_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}a_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}a_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ a_k(R) = A_k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}b_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}b_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ b_k(R) = B_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Будем искать только ограниченные решения – для этого одного граничного условия окажется достаточно.

Решения данных уравнений Эйлера ищем в виде $\alpha\rho^\mu$:

Для первой серии задачи: $\alpha[\mu(\mu - 1) + \mu - k^2]\rho^{\mu-2} = 0 \Rightarrow \mu = \pm k$.

Общее решение:

$$a_k(\rho) = C_{1k}\rho^k + C_{2k}\rho^{-k}$$

$$a_0(\rho) = C_{10} \cdot 1 + C_{20} \cdot \ln \rho$$

Для ограниченности в круге берем $C_{2k} = C_{20} = 0 \Rightarrow a_k = C_{1k}\rho^k, C_{1k} = \frac{A_k}{R^k}, k \in \mathbb{N}_0$.

Итак,

$$\begin{cases} a_k(\rho) \\ b_k(\rho) \end{cases} = \begin{cases} A_k \\ B_k \end{cases} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \Rightarrow \hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \quad (25)$$

Вернемся в исходные переменные. Заметим, что если ввести $z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\varphi}$, то $\rho^k \cos k\varphi = \operatorname{Re} z^k$,

$\rho^k \sin k\varphi = \operatorname{Im} z^k$.

Обозначим $\operatorname{Re} z^k = p_k(x_1, x_2), \operatorname{Im} z^k = q_k(x_1, x_2)$.

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] \quad (26)$$

Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Теорема 16.1. Пусть $u_0 \in C(\Gamma)$. Тогда:

1. Существует и единственно классическое решение $u(x) \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$ задачи 24 с $f \equiv 0$.
2. В D это решение представимо рядами 25 и 26, сходящимися в $|x| \leq R_1 < R$ равномерно.
3. Классическое решение представимо формулой Пуассона:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\partial D} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_\xi$$

4. Любые частные производные по x_1 и x_2 вычисляются почленным дифференцированием ряда.

Доказательство. 1. Единственность докажем позднее (в этом билете ее нет).

2. Пусть $|u_0| < M$ на Γ . Тогда:

$$|A_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u_0| |\cos k\psi| d\psi \leq 2M, \quad |B_k| \leq 2M$$

Запишем

$$u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2, \text{ где}$$

$$w_1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} z^k, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{R^k} z^k$$

Оба ряда сходятся абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R_1 < R \Rightarrow$ порождают в круге радиуса R_1 регулярные функции, что и требовалось.

3. Докажем формулу Пуассона:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(R, \psi) d\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(\psi) (\cos k\psi \cdot \cos k\varphi + \sin k\psi \sin k\varphi) d\psi \left(\frac{\rho}{R}\right)^k = \\ &= (\text{сходимость равномерная}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos k(\psi - \varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi \end{aligned}$$

Под интегралом ($|p| = |\bar{p}| = \frac{\rho}{R} < 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k &= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-\bar{p}} - 1 = \frac{1-p+1-\bar{p}-1+p+\bar{p}-p\bar{p}}{(1-p)(1-\bar{p})} = \frac{1-|p|^2}{1-(p+\bar{p})+p\bar{p}} = \\ &= \frac{1-|p|^2}{1-2\operatorname{Re} p + |p|^2} = \frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R} \cos(\psi-\varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2}, \quad x = (\rho, \varphi) \\ &\quad \xi = (R, \psi) \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} \hat{u}_0(\psi) d\psi \\ \iff u(x) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_{\xi} \end{aligned}$$

Заметим, что при $u_0 \equiv 1$ мы получим ядро Пуассона:

$$1 \equiv \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} dS_{\xi}$$

Покажем, что $u(x) \in C(\bar{D})$.

Пусть $x \in D \cap \{x : |x - x^0| < \delta_{n_0}\}$, где $x_0 \in \Gamma$, а δ_{n_0} выбрано так, чтобы $|u_0(x) - u_0(x^0)| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} u(x) - u(x^0) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \left(\int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| < \delta_{n_0}\}} + \int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| \geq \delta_{n_0}\}} \right) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = I_{<} + I_{\geq} \end{aligned}$$

$$|I_{<}| \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{(<)} \frac{|R^2 - |x|^2|}{|x - \xi|^2} |u_0(\xi) - u_0(x^0)| dS_{\xi} \leq \varepsilon \cdot \{\text{ядро Пуассона}\} = \varepsilon$$

$$|I_{\geq}| \leq \frac{1}{2\pi R} \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{\min|\xi - x|^2} \cdot 2M \cdot \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 4MR \frac{R - |x|}{\min|\xi - x|^2}, \text{ где } R + |x| \leq 2R \text{ и } \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 2\pi R$$

$$|\xi - x| = |\xi - x^0 + x^0 - x| \geq |\xi - x^0| - |x^0 - x| > \delta_{n_0} - \frac{\delta_{n_0}}{2} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow |I_{\geq}| \leq 16MR \frac{R - |x|}{\delta_{n_0}^2}$$

Возьмем $\delta_n = \min \left\{ \frac{\delta_{n_0}}{2}, \varepsilon \delta_{n_0}^2 \right\}$. Тогда при $|x - x^0| < \delta_n$ будем иметь $R - |x| \leq |x^0 - x| < \delta_n \Rightarrow$

Итак, при $|x^0 - x| < \delta_n : |u(x) - u(x^0)| \leq |I_{<}| + |I_{\geq}| \leq \varepsilon + 16MR\varepsilon$.

Непрерывность доказана.

4. Дифференцируемость:

$u = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2$.

Вспомогательный факт: $\tilde{w}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z) \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{u}_{x_1} + i\tilde{v}_{x_1} \Rightarrow \tilde{u}_{x_1} = (\operatorname{Re} \tilde{w})_{x_1} = \operatorname{Re} (\tilde{w}_z)$

В нашем случае:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} w_1(z) = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (z^k)'_z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \operatorname{Re} \frac{dz^k}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (p_k)'_{x_1} (x_1, x_2)$$

Аналогично для B_k и для производного любого порядка.

□

Билет 17. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.

Рассматривается уравнение Пуассона в \mathbb{R}^3 : $\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, где Ω – область.

Определение 17.1 (Гармоническая функция). Функция $u(x)$ называется гармонической в $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если $u(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u(x) \equiv 0$ на Ω .

Удобно перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Уравнение примет вид:

$$0 = \Delta \hat{u}(r, \theta, \varphi) = \hat{u}_{rr} + \frac{2}{r} \hat{u}_r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \right]$$

В квадратных скобках написан оператор Лапласа-Бельтрами от функции \hat{u} . Решение зависящее от r , удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2} \hat{u}_r = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = r^\mu \Rightarrow \mu(\mu - 1) + 2\mu = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Функция $\hat{u}(r) = \frac{1}{r}$ – гармоническая всюду кроме 0.

Лемма 17.1 (Интегральное представление решения уравнения Пуассона). Пусть Ω – область с кусочно-гладкой границей Γ . Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\Delta u \in C(\bar{\Omega})$. Тогда для $\forall x \in \Omega$ $u(x)$ представима в виде суммы трех потенциалов (объемного Ньютонова, простого слоя, двойного слоя):

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy}_{\text{объемный Ньютоновский потенциал}} - \underbrace{\oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y}_{\text{потенциал простого слоя}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) u(y) dS_y}_{\text{потенциал двойного слоя}}$$

Доказательство. Берем $x \in G, \varepsilon > 0$ такое, что $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ (B – открытый шар в \mathbb{R}^3). Строим область $\Omega_x^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$, $\partial \Omega_x^\varepsilon = \Gamma \cup \gamma$, где $\gamma = \partial B(x, \varepsilon)$.



В Ω_x^ε ядро $K_3(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty$ ($\Delta K_3(x, y) \equiv 0$). Используем 2 формулу Грина:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_x^\varepsilon} \Delta u(y) K_3(x, y) dy - \int_{\Omega_x^\varepsilon} u(y) \Delta K_3(x, y) dy = \\
 & = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y + \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \\
 & \iff \int_{\Omega_x^\varepsilon} f(y) K_3(x, y) dy + \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y = \\
 & = \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y
 \end{aligned}$$

Offtop 17.1. интеграл от $\frac{1}{|x|^\alpha}$ сходится при $\alpha < n = \dim \mathbb{R}^n$. У нас $n = 3, \alpha = 1$.

Устремляем $\varepsilon \rightarrow 0$:

1. $\int_{\Omega_x^\varepsilon} \rightarrow \int_{\Omega}$ в силу последнего замечания.

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint (u(y) - u(x) + u(x)) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y + \\
 & u(x) \oint_{\gamma} 1 dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y + u(x) \oint_{\gamma} 1 dS_y \\
 & \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \\
 & \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \left| \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot \max_{|y-x| \leq R} |u(y) - u(x)| \cdot \oint_{\gamma} dS_y \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \left| \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} M \int_{\gamma} dS_y = M\varepsilon \rightarrow 0 \\
 & \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} \right| = |(\nabla u, \vec{n})| \leq |\nabla u| \cdot |n| \leq M, \text{ так как } \nabla u \in C(\overline{\Omega})
 \end{aligned}$$

Итак, после предельного перехода получим требуемое соотношение □

Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Экскурс в обобщенные функции

Определение 17.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство пробных (основных) функций:

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ supp } \varphi(x) \text{ – компакт.}$

Определение 17.3. В $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ вводится сходимость по следующему правилу: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff$

- $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathcal{D}^\alpha \varphi_k \rightrightarrows \mathcal{D}^\alpha \varphi$
- $\exists A > 0 : \varphi_k(x) \equiv 0$ при $|x| > A \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (у всех функций общий носитель)

Пример функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$$

Определение 17.4. Обобщенная функция f над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – всякий линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Определение 17.5. Линейный функционал: $(f, \alpha\varphi + \mu\psi) = \alpha(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$

Определение 17.6. Непрерывный функционал: $\forall \{\varphi_k\} \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(\varphi_k) \rightarrow f(\varphi)$

По определению $\forall \lambda, \mu$ - чисел, $\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенная функция $F = \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $(F, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$

Определение 17.7 (сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{\iff} (f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (слабая* сходимость).

Определение 17.8. Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой, если

$$\forall B > 0 \quad \exists \int_{|x| < B} |f(x)| dx < \infty$$

Каждая такая $f(x)$ порождает обобщенную функцию $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$.

Если существует локально интегрируемая $f(x)$ такая, что обобщенная функция f представляется в виде $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$, то $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется регулярной.

Лемма 17.2 (Дюбуа-Реймон). Если f и g непрерывны и порождают одну обобщенную функцию, то $f \equiv g$. Если f и g разрывны, то они совпадают почти всюду.

Определение 17.9 (δ -функция). $(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$

δ -функция не является регулярной.

Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Правило дифференцирования: $(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$.

В частном случае $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta \varphi)$

Теорема 17.3. Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}\varphi \subset B(0, A)$. Возьмем $\Omega = B(0, A+1)$. По теореме об интегральном представлении

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \int_{|y| < A+1} E(y) \Delta_y \varphi(y) dy + \oint_{|y|=A+1} \varphi(y) \frac{\partial E(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y - \oint_{|y|=A+1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vec{n}_y} E(y) dS_y = \\ &= (E, \Delta_x \varphi(x)) = (\Delta E, \varphi(x))\end{aligned}$$

Что и требовалось. □

Определение 17.10. Функция $E(x)$ называется фундаментальным решением оператора Лапласа.

Билет 18. Свойства гармонических функций в \mathbb{R}^3 : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.

Определение 18.1. Функция $u(x)$ гармоническая в $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если

1. $u(x) \in C^2(\Omega)$
2. $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

Теорема 18.1. Всякая функция $u(x)$, гармоническая в области Ω , является в Ω бесконечно дифференцируемой, т.е. $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in \Omega$ и $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Представим $u(x)$ суммой:

$$u(x) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$



Теперь берем $B_\delta(x_0) \subsetneq B_r(x_0)$. Будем обозначать $S(x_0, r)$ сферу $\partial B_r(x_0)$. Если $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$, $y \in S(x_0, r)$, то $|x-y| \geq r - \delta > 0$.

Рассмотрим в $\overline{B}_\delta(x_0)$

$$u_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y.$$

Напишем

$$\tilde{u}_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} D_x^\alpha \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Заметим, что $\frac{-1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0) \times S(x_0, r)) \Rightarrow$ записанные частные производные непрерывны, интеграл \tilde{u}_0 существует $\Rightarrow \tilde{u}_0(x) = D_x^\alpha u_0(x)$.

Теперь берем

$$u_2(x) = \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) = \sum_1^n n_k \frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right)$$

В $\overline{B}_\delta(x_0)$ запишем

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_1^3 \oint u_0(y) n_k(y) D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \right) dS_y$$

Записанные частные производные непрерывны, интеграл $\tilde{u}_2(x)$ существует $\Rightarrow \tilde{u}_2(x) = D_x^\alpha u_2(x)$.
Итак, для $u_0(x)$ и $u_2(x)$ существуют частные производные любого порядка. Значит, $u(x) \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0))$, где x_0 - произвольная точка из Ω . $\Rightarrow u(x) \in C^\infty(\Omega)$ \square

Теорема 18.2 (Теорема о среднем). Пусть $u(x)$, гармоническая в шаре $B_r(x_0)$ и $u(x) \in C^1(\overline{B}_r(x_0))$. Тогда $u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y$. (в центре - среднее по значениям на сфере)

Доказательство.

$$u(x_0) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \stackrel{\rho=|x_0-y|}{=} \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4\pi r^2},$$

тогда

$$\oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y.$$

Покажем, что потенциал простого слоя равен нулю.

$$- \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{|y-x_0|=r} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|=r} (\nabla u(y), \vec{n}(y)) dS_y \stackrel{\text{Ф-ла Остр.-Гаусса}}{=} \\ = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \operatorname{div}(\nabla u) dy = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \Delta u dy = 0$$

\square

Теорема 18.3 (Обратная теорема о среднем). Пусть $u(x) \in C(\Omega)$ и $u(x)$ обладает свойством среднего $\forall x \in \Omega$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$ - произвольная область. Тогда $u(x)$ - гармоническая функция на Ω .

Доказательство. $\forall x_0 \in \Omega \exists r > 0 : \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Рассмотрим решение

$$v(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y$$

$$\text{для задачи} \begin{cases} \Delta u(x) = 0, |x| < r \\ v|_{|x|=r} = u|_{|x|=r} \end{cases}$$

Введем $w(x) = u(x) - v(x)$, $w(x) \in C(|x| \leq r)$, получим что $w(x)$ удовлетворяет свойству среднего. Тогда по принципу максимума (для функции, удовлетворяющей свойству среднего, будет доказан в следующем билете) $|w(x)| \leq \max_{|y-x|=r} |w(y)| = 0 \Rightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x: |x| < r$ \square

Билет 19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции

Теорема (принцип максимума)

Теорема 19.1. (Принцип максимума) Если $u(x)$ - гармоническая в области Ω и достигает \max или \min значения в точке $a \in \Omega$, то $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in \Omega$

Offtop 19.1. Теорема справедлива в \mathbb{R}^n

Доказательство. •

- Докажем вспомогательное локальное

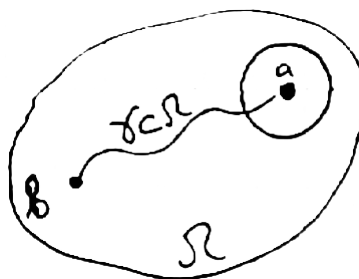
Утверждение 19.2. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ достигает максимума в точке a , а так же удовлетворяет свойству среднего:

$$u(a) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y \quad \forall r : 0 < r < d_a = \text{dist}(a, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$$

Тогда $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in B(a, d_a)$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } u(a) &= \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y = \frac{u(a)}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} dS_y + \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = u(a) + \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y \Rightarrow \\ &\oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = 0 \Leftrightarrow u(y) = u(a) \quad \forall y : |y-a| = r < d_a \quad \square \\ &\leq 0, \text{ непрерывна} \end{aligned}$$

- Докажем саму теорему



Соединим a и b кусочно-гладкой кривой. Эту кривую параметризуем натуральным параметром (параметризация кривой длиной её дуги): $x = x(s), x(0) = a, x(L) = b$. Обозначим $d = \text{dist} \{ \gamma = x; \partial\Omega \} > 0$ (d действительно > 0 : если $d = 0$, то $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \gamma : \rho(x_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся $\{x_{n_k}\} = \{y_k\}(\gamma -$

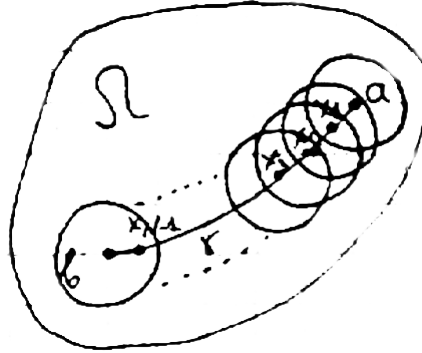
ограничено). Пусть $y_k \rightarrow y_0$. Тогда y_0 - предельная для $\partial\Omega$ в силу замкнутости $y_0 \in \gamma \cup \partial\Omega \Rightarrow$ противоречие)

Разобьем $[0, L]$ на части размера $\Delta S = \frac{L}{N}$

Пусть $\{S_k = k\Delta S, x_k = x(S_k)\}$. Число N выберем так, чтобы $\Delta S = \frac{L}{N} < d$



Заметим, что $|x_k - x_{k-1}| \leq s_k - s_{k-1} < d(\cdot)$ - кратчайшее расстояние между точками этого отрезка).



Рассмотрим шары $B_d(x_k)_{k=0}^N$. В силу $|x_k - x_{k-1}| < d$ верно $x_{k+1} \in B_d(x_k)$. Примем утверждение 19.2 к первому шару. Как следствие $u(x_1) = u(a) \Rightarrow$ утверждение 19.2 применимо уже ко второму шару. В цепочке шаров конечное число \Rightarrow добираемся до точки b - теорема доказана.

□

• Заметим, что достаточно было потребовать свойство среднего и непрерывность, вместо гармоничности.

Следствие. Пусть Ω - ограниченная область, а $u(x)$ - гармоническая в Ω и непрерывная на $\bar{\Omega}$. Тогда $u(x)$ достигает \max и \min на $\partial\Omega$, т.е. $\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$

Доказательство. Либо максимум/минимум на границе, либо $u(x) \equiv \text{const}$ в Ω

□

Следствие. Для указанной в следствии 19 $u(x) \hookrightarrow |u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|$

Доказательство.

$$\begin{cases} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(y) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \\ -u(x) \leq \max_{\partial\Omega} (-u(y)) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \end{cases} \quad (27)$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)|$$

□

Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Ω - ограниченная область

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u(x)|_{\partial\Omega} = u_0(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

Определение 19.1. Классическое решение задачи Дирихле - функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению и граничному условию. (раньше было $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^{\boxed{1}}(\overline{\Omega})$, единица была нужна для формул Грина, теперь убираем ее)

Теорема единственности

Теорема 19.3. (единственности) Не может существовать более 1 классического решения задачи Дирихле (28).

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - классические решения (28). Тогда $v(x) = u_1 - u_2$ - классическое решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(x) \equiv 0, x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

Согласно принципу максимума, $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |v(x)| = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$

□

Билет 20. Функция Грина для задачи Дирихле (случай \mathbb{R}^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

Функция Грина

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ — некоторое классическое решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_0(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Запишем интегральное представление:

$$u = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy - \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

Рассмотрим задачу при фиксированном $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, & \forall y \in \Omega \\ g(x, y)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Если $\partial\Omega \in C^2$, то решение существует (пока не можем это доказать).

Используем вторую формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_y u(y) g(x, y) dy - \int_{\Omega} u(y) \Delta_y g(x, y) dy &= \\ &= 0 \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} g(x, y) dS_y - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y = 0$$

wanted to find

Тогда

$$u(x) = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) dS_y$$

Функция Грина, по определению:

$$G(x, y) \triangleq \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$$

Она симметрична и имеет ту же особенность, что и $\frac{-1}{4\pi|x-y|}$

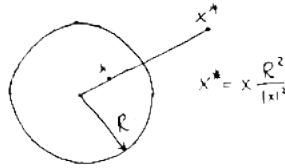
Функция Грина для шара

Получим функцию Грина для шара:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, y \in \Omega \\ g(x, y)|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Будем обозначать x^* точку, инверсную точке x относительно окружности $|y| = R$.

$$x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$$

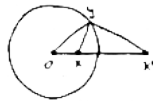


Покажем, что решением является функция:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4\pi R}, & x = 0 \end{cases}$$

Функция $g(x, y)$ - гармоническая по y в шаре $|y| < R$ (особенность $y = x^*$ лежит вне шара, т.к. x^* лежит внутри него).

Посмотрим значение функции g на границе:



Заметим, что $\triangle OXY \sim \triangle OYX^*$, т.к. $\angle XOY$ - общий, и $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|x^*|}$.

Из подобия $\frac{|y-x|}{|y-x^*|} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{R}$.

Значит, $\frac{R}{4\pi|x||y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi y}$, что и требовалось.

Формула Пуассона в шаре

Получим формулу Пуассона решения задачи Дирихле в шаре:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial G}{\partial y_k} \Big|_{|y|=R} = \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left[-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{|y-x^*|} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{y_k}{R} \left[\frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \frac{y_k - x_k^*}{|y-x^*|^3} \right] \end{aligned}$$

Вспомним, что $\frac{R}{|x| \cdot |y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{|x-y|}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} \Big|_{|y|=R} &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4\pi} \frac{y_k}{R} \left[\frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \left(\frac{|x|}{R} \right)^3 \frac{y_k - x_k^*}{|y-x|^3} \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \left[y_k - x_k - \frac{|x|^2}{R^2} (y_k - x_k^*) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[\langle y, y-x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \langle y, y-x^* \rangle \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[\underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} - \langle y, x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=\langle y, x \rangle}{\langle y, x^* \rangle} \right] = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R |y-x|^3} \end{aligned}$$

Итак, **формула Пуассона для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:**

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u_0(y) dS_y$$

Билет 21. Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)

Формулировка теоремы

Теорема 21.1. (Теорема Лиувилля) Функция $u(x)$, гармоническая в \mathbb{R}^3 ($\Delta u = 0$) и имеющая на бесконечности рост не выше степенного (т.е. $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu$), является многочленом от x_1, x_2, x_3 степени не выше μ .

Доказательство при $\mu \geq 0$

Общая идея - доказать, что все производные степени выше μ равны нулю.

1. Выберем $x \in \mathbb{R}^3, R > 0$ так, чтобы $R > 2|x|$:



В области $|x| < R$ $u(x)$ - гармоническая, а $u(x)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$.

Тогда применима формула Пуассона для шара:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} u(y) dS_y$$

В силу выбора R имеем $|y - x| \geq |y| - |x| \geq \frac{R}{2} > 0$.

Можем записать:

$$\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y$$

2. Докажем по индукции, что

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \mathcal{D}_x^\alpha \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}},$$

где P_α - однородный многочлен степени $|\alpha| + 2$ от $R, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$.

- База:

$$\mathcal{D}_x^{(0,0,0)} \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{|x - y|^3}$$

- Переход. Пусть требуемое верно $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$. Возьмём $\hat{\alpha} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\mathcal{D}_x^{\hat{\alpha}} \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}} \right] = \frac{\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_1} \cdot |x - y|^2 - (3 + 2|\alpha|) \cdot P_\alpha \cdot (x_1 - y_1)}{|x - y|^{3+2(|\alpha|+1)}} = \frac{P_{\hat{\alpha}}(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\hat{\alpha}|}}$$

3. Покажем теперь, что $\forall |x| \leq \frac{R}{2}, \forall |y| = R, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ справедлива оценка:

$$\left| \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right) \right| \leq \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}}.$$

Действительно, $|P_\alpha| \leq \tilde{C}_\alpha R^{|\alpha|+2}$, а $|x - y|^{3+2|\alpha|} \geq \left(\frac{R}{2}\right)^{3+2|\alpha|} = \hat{C}_\alpha R^{3+2|\alpha|}$. Отсюда следует требуемая оценка.

4. Теперь докажем, что $\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| > \mu$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_x^\alpha u(x)| &= \frac{1}{4\pi R} \left| \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi R} \cdot C \cdot (1 + |x|)^\mu \cdot \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}} \cdot 4\pi R^2 \leq \\ &\leq \frac{C \cdot C_\alpha \cdot (1 + R)^\mu}{R^{|\alpha|}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Значит, } \mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| > \mu. \end{aligned}$$

5. Для гармонической в \mathbb{R}^3 функции $u(x)$ справедливо представление:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \\ &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x^\alpha, \end{aligned}$$

где $m = [\mu], \alpha! \triangleq \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!, x^\alpha \triangleq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$.

Доказательство при $\mu < 0$

Пусть $\mu < 0$. Тогда т.к. $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu, \mu < 0$, то $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^0 \equiv C_1$.

По предыдущему пункту, $u(x)$ - полином степени 0, т.е. константа.

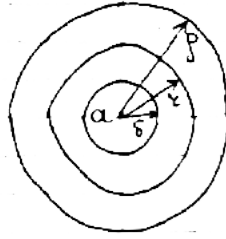
Но $|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{|\mu|}} \Rightarrow u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$.

Билет 22. Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)

Теорема 22.1. (об устранимой особой точке). Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\mathring{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^3$ и $u(x) = o(E(x-a))$ при $x \rightarrow a$, где $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$. Тогда $u(x)$ можно так доопределить в точке a , что она будет гармонической в $B_\rho(a) = \{x : |x-a| < \rho\}$.

Доказательство.

1. $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \Leftrightarrow |x| \cdot u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
2. Возьмём $r < \rho$.



Функция $u(x)$ непрерывна на $\partial B_r(a)$.

Построим гармоническую функцию:

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y \in C(|x| \leq r)$$

3. Считаем $a = 0$. Покажем, что $u(x) \equiv \hat{u}(x)$ при $0 < |x| \leq r$. Строим $v(x) = u(x) - \hat{u}(x)$. Эта функция гармоническая в $\mathring{B}_r(a)$, непрерывная на $(0 < |x| \leq r)$, а также $v(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| = r$ и $|x| \cdot v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
4. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функции $W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x)$.
Функции W_ε^\pm также гармонические в $(0 < |x| < r)$, непрерывны на $(0 < |x| \leq r)$, а $W_\varepsilon^\pm(x)|_{|x|=r} = \frac{\varepsilon}{|x|} > 0$.
5. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\forall x : |x| \leq \delta \rightarrow |x| \cdot |v(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

При $|x| \leq \delta$:

$$W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x) \geq \frac{\varepsilon}{|x|} - |v(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[1 - \frac{|x| \cdot |v(x)|}{\varepsilon} \right] \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{\varepsilon}{2|x|} > 0$$

6. При $\delta \leq |x| \leq r$ функции $W_\varepsilon^\pm(x)$ — гармонические в $(\delta < |x| < r)$ и непрерывны на замыкании этой ограниченной области \Rightarrow по принципу максимума максимум и минимум достигаются на границе.

Значит, $W_\varepsilon^\pm(x) > 0$ при $\delta \leq |x| \leq r$.

Итак, $W_\varepsilon^\pm(x)$ положительна в $(0 < |x| \leq r) \Rightarrow |v(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|}$ в $(0 < |x| \leq r)$.

Значит, $v(x) \equiv 0$ при $0 < |x| \leq r \Rightarrow v(x)$ можно продолжить на $|x| \leq r$, положив $v(0) = 0$, ч.т.д.

Билет 23. Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай \mathbb{R}^3).

Пусть x лежит в окрестности ∞ , т.е. $|x| > R > 0$, а y лежит в окрестность нуля. Считаем $y \neq 0$. Тогда между этими окрестностями есть биекция - инверсия: $x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$, $x = x^* \frac{R^2}{|x^*|^2}$; $|x||x^*| = R^2$

Лемма 23.1. Если функция $u(x)$ гармоническая в окрестности ∞ : $|x| > R$ в \mathbb{R}^n , то функция $u^*(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \cdot u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right)$ будет гармонической в проколотой окрестности нуля. Если $u^*(y)$ гармоническая в проколотой окрестности нуля, то $u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \cdot u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right)$ -гармоническая в окрестности ∞ .

Определение 23.1. Преобразование $u(x) \mapsto u^*(y)$ и $u^*(y) \mapsto u(x)$ называется **преобразованием Кельвина**.

Доказательство. Пусть $x \in U_\varepsilon(\infty)$, $y \in U_\delta(0)$, $|x| = \rho$, $|y| = r$, $x = y \frac{R^2}{|y|^2}$.

Перейдем в сферическую систему. Лемму докажем в одну сторону.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3).$$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = \rho \cos \theta \end{cases}, \begin{cases} y_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ y_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ y_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

Тогда $\hat{u}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{r} \hat{u}\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)$:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \hat{u}^*(r, \theta, \varphi)) + \frac{1}{r} \underbrace{\Delta'_{\theta, \varphi}}_{\text{оп-р Лапласа -Бельтрани}} \hat{u}^*(r, \theta, \varphi) \right] = \frac{R}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\hat{u}\left(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho}, \theta, \varphi\right) \right] + \frac{R}{r^3} \Delta'_{\theta, \varphi} \hat{u}\left(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho}, \theta, \varphi\right)$$

Вспомогательная выкладка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] = \frac{\rho^2}{R^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] \end{aligned}$$

С учетом выкладки имеем:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho^3}{R^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] + \frac{\rho^3}{R^5} \Delta'_{\theta, \varphi} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\rho^5}{R^5} \Delta_x \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = 0$$

□

Теорема 23.2. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в окрестности бесконечности $|x| > R$ и $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$. Тогда $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ и $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$ при $x \rightarrow \infty$

Доказательство. Применим к нашей функции прямое преобразование Кельвина: $u^*(y) = \frac{R}{|y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right)$. Эта функция гармоническая в проколотой окрестности нуля: $0 < |y| < R$.

Далее, $|y|u^*(y) = Ru\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ (аргумент $\rightarrow \infty$) $\Rightarrow u^*(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right), y \rightarrow 0$.

- Воспользуемся теоремой об устранимой точке и доопределим $u^*(y)$ в нуле. Теперь $u^*(y)$ – гармоническая в $|y| < R \Rightarrow$ в $|y| \leq \frac{R}{2}$ есть непрерывность вплоть до границы любых производных $\Rightarrow \forall \alpha \exists M_\alpha: |D^\alpha u^*(y)| \leq M_\alpha \forall y: |y| \leq \frac{R}{2}$
- Пусть $|x| \geq 2R, y = x^* \Rightarrow |x^*| = |y| \leq \frac{R}{2}$. Тогда $u(x) = u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x||y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x|} u^*(y)$.
Можем оценить: $|u(x)| \leq \frac{R}{|x|} M_0 \Rightarrow u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), x \rightarrow \infty$.
- Возьмем теперь $\alpha = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} &= D^\alpha u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{R}{|x|} u^*(y) \right) = -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R}{|x|} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \left[\delta_k^1 - 2 \frac{x_1 x_k}{|x|^2} \right] \end{aligned}$$

Оценка:

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right| \leq R \frac{x_1}{|x|} \underbrace{\frac{1}{|x|^2} |u^*(y)|}_{\leq M_0} + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\left| \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \right|}_{\leq M_{(1,0,0)}} \left[\delta_k^1 + 2 \frac{|x_1| \cdot |x_k|}{|x|^2} \right] \leq \frac{C}{|x|^2}$$

Итак, $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Аналогично, по индукции, и для других производных.

□

Постановка внешних задач.

Определение 23.2. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется внешней, если $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} = \Omega_1$ – ограниченная область в \mathbb{R}^3

Определение 23.3. Внешнюю область в Ω будем называть внешней областью с гладкой (кусочно-гладкой) границей, если $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ – область с (кусочно-гладкой) границей.

Внешняя задача Дирихле Найти $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), \quad x \in \Gamma \\ u(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

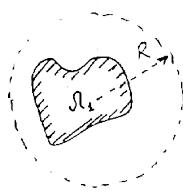
Такое решение называется **классическим**

Отличие постановок внешних и внутренних задач - $u(x) \rightarrow 0$ во внешних задачах. Для внутренней задачи Неймана - даже при выполнении условий разрешимости $\oint u_1(x) dS_x = 0$ решение не единственно

Теорема 23.3. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Дирихле*

Доказательство. Если u_1, u_2 - классические решения, то $v(x) = u_1 - u_2$ - удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} v(x)|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Строим сферу радиуса $R \geq \tilde{R}(\varepsilon), \Omega_1 \subset B_R(o)$. По следствию из принципа максимума $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega_1 \cup \partial B_R(0)} |v(y)| \leq \varepsilon$

Т.к. $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, имеем $v(x) \equiv 0$ в $\Omega \cup \Gamma$ □

Теорема 23.4. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Неймана*

Доказательство. Если u_1, u_2 - классические решения, то $\underbrace{v(x) = u_1 - u_2}_{\text{гармоническая в } \Omega \text{ и } C^2(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)}$ - удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Возьмем $R : \Omega_1 \subset B_R(0)$, $\rho > R$. По I-ф-лу Грина для v

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} \Delta v \cdot v \cdot dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x + \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x - \int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Получили $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x$. Далее $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx \leq$

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right| |v(x)| dS_x \leq (\text{теорема об асимптотике гармонических функций}) \leq$$

$$\frac{C_1}{\rho^2} \cdot \frac{C_2}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

Итак, $\nabla v(x) \equiv 0 \Rightarrow v(x) \equiv \text{const} = 0$, ч.т.д. □

Билет 24. Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.

Определение 24.1 (Интегральное уравнение Фредгольма второго рода). Уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Здесь:

- $x \in \bar{G}$, G — ограниченная область в \mathbb{R}^3 ;
- $f(x) \in C(\bar{G})$ — задана;
- $K(x, y) : (\bar{G} \times \bar{G}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- λ — числовой параметр;
- $u(x) \in C(\bar{G})$ — искомая функция.

Определение 24.2 (Интегральный оператор). Оператор K такой, что

$$(Ku)(x) = \int_G K(x, y)u(y)dy,$$

называется интегральным оператором с ядром $K(x, y)$.

Теорема 24.1. Если ядро $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то оператор K ограничен в $C(\bar{G})$ и имеет место оценка

$$\|K\| \leq \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \leq \max_{x, y \in \bar{G}} |K(x, y)|mesG$$

Доказательство. Если $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то $K : C(G) \rightarrow C(G)$.

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{C(\bar{G})} &= \max_{\bar{G}} |(Ku)(x)| = \max_{\bar{G}} \left| \int_G K(x, y)u(y)dy \right| \leq \max_{\bar{G}} \int_G |K(x, y)||u(y)|dy \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \max_{y \in \bar{G}} |u(y)| \int_G |K(x, y)|dy = \|u\|_{C(\bar{G})} \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \Rightarrow \|K\| = \sup_{\|u\|_{C(\bar{G})}=1} \frac{\|Ku\|_{C(\bar{G})}}{\|u\|_{C(\bar{G})}} \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \end{aligned}$$

□

Определение 24.3 (Полярное ядро). Ядро $K(x, y)$ называется полярным, если его можно представить в виде $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y$, где $\kappa \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, $\alpha < n$ — размерность пространства.

Лемма 24.2 (Признак полярного ядра). Ядро K является полярным $\Leftrightarrow K(x, y) \in C((\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\})$ и $|K(x, y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\beta} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y, B > 0, \beta < n$.

Доказательство. (\Rightarrow): Пусть ядро полярное. Тогда $\exists B : |\kappa| \leq B$ на $\bar{G} \times \bar{G}$ и $|K| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha}$.

(\Leftarrow): Пусть $\beta < n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \beta + \varepsilon < n$. Рассмотрим $\kappa = \begin{cases} K(x, y)|x - y|^{\beta+\varepsilon}, & x, y \in G, x \neq y; \\ 0, & x = y \in G. \end{cases}$

Построенная κ непрерывна в $(\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\}$.

Возьмем $x^0, y^0 \in G, x^0 \neq y^0 : |\kappa(x, y) - \kappa(x^0, y^0)| = |\kappa(x, y)| \leq |K||x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq \frac{B}{|x-y|^\beta}|x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq B|x - y|^\varepsilon = B|(x - x^0) - (y - y^0)|^\varepsilon \leq B(|x - x^0| + |y - y^0|)^\varepsilon \Rightarrow \kappa$ непрерывна всюду в $\bar{G} \times \bar{G}$.

Очевидно из определения κ , что можем записать $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^{\beta+\varepsilon}}$, т.е. это ядро – полярное по определению. \square

Определение 24.4 (Транспонированное ядро). Ядром, транспонированным к ядру $K(x, y)$, называется ядро $K'(x, y) = K(y, x)$. Соответствующий оператор K' так же называют транспонированным.

Теорема 24.3. *Интегральный оператор K с полярным ядром является ограниченным оператором в $C(\bar{G})$. Справедлива оценка: $\|K\| \leq \sup_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy$. $\forall \varepsilon > 0$ оператор K можно представить в виде суммы $K = K_\varepsilon^{cont} + K_\varepsilon^{pol}$, где $\|K_\varepsilon^{pol}\| \leq \varepsilon$, $\|(K_\varepsilon^{pol})'\| \leq \varepsilon$, K_ε^{cont} — и.о. с непрерывным ядром, K_ε^{pol} — и.о. с полярным ядром.*

Доказательство.

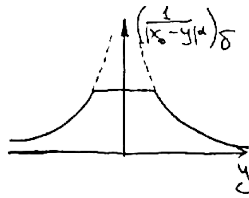
1. Пусть $\psi(y) = K(x, y)u(y)$. Функция ψ непрерывна при $y \neq x$.

В особенности: $|\psi(y)| = |K(x, y)||u(y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha} \|u\|_{C(\bar{G})}$ — интегрируема, т.к. $\alpha < n$.

Значит, порождается функция $\varphi(x) = \int_G \psi(y) dy = \int_G K(x, y)u(y) dy$ — этот интеграл существует $\forall x \in \bar{G}$.

2. Определим δ —срезку функции $\frac{1}{|x-y|^\alpha}$:

$$\left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha}, & |x-y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta^\alpha}, & |x-y| < \delta. \end{cases} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$



3. Представим $K(x, y) = K_\delta^1(x, y) + K_\delta^2(x, y)$, где $K_\delta^1(x, y) = \kappa(x, y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha})_\delta$,

$$K_\delta^2(x, y) = \begin{cases} 0, & |x-y| \geq \delta; \\ \kappa(x, y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha}), & |x-y| < \delta. \end{cases}$$

4. Выберем произвольно $u(x) \in C(\bar{G})$ и рассмотрим $\|K_\delta^2 u\|_{C(\bar{G})}$:

$$\|K_\delta^2 u\| = \max_{x \in G} \left| \int_{|y-x| < \delta} \kappa(x, y) \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha} \right) u(y) dy \right| \leq B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|y-x| < \delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|z| < \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha}.$$

Замена $\begin{cases} x_k = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k, & k = 1, \dots, n-1; \\ x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}, \end{cases}$ где $\varphi_k \in [0, \Pi]$, $\varphi_n \in [0, 2\Pi]$

Якобиан $J = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}$. Получили:

$$\|K_\delta^2 a\| \leq C_1 \|u\|_{C(G)} \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr = C \|u\|_{C(G)} \delta^{n-\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Получили $K_\delta^2 u \rightarrow Ku$ по норме $\Rightarrow Ku \in C(\bar{G})$.

5. $\|K\| \leq \|K_\delta^1\| + \|K_\delta^2\| \leq C\delta^{n-\alpha} + \|K_\delta^1\| < \infty \Rightarrow K$ — ограничен.

Для транспонированного ядра все рассуждения аналогичны, т.к. полярное ядро $K = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha}$ при замене x на y изменяет только непрерывный числитель κ .

□

Билет 25. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

Теорема 25.1. Пусть в интегральном уравнении (1) ядро K полярное и выполнено $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$, тогда:

- $\forall f \in C(G)$ (1) имеет единственное решение $u(x) \in C(\overline{G})$. Это решение при фиксированном λ_{fix} представимо абсолютно сходящимся в $C(\overline{G})$ рядом Неймана:

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i K^i f(x), \quad x \in G$$

- Оператор $I - \lambda K$ отображает всё $C(\overline{G})$ на всё $C(\overline{G})$ и имеет на $C(\overline{G})$ непрерывный обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$, причём $\|(I - \lambda K)^{-1}\| \leq (1 - |\lambda| \cdot \|K\|)^{-1}$

Доказательство. 1. Отметим, что оператор λK сжимающий: $\|\lambda K\| = |\lambda| \cdot \|K\| < 1$.

Построим итерационный процесс:

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x) \\ u_1 &= f(x) + \lambda K u_0(x) = f(x) + \lambda K f(x) \\ &\dots \\ u_n &= f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i K^i f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Все $u_k(x) \in C(\overline{G})$, причем $u_k = S_k$ – k -я частичная сумма ряда Неймана. Далее,

$$\begin{aligned} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq |\lambda|^i \cdot \|K\|^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\|_{C(\overline{G})} \implies \\ \implies \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\| = \frac{\|f\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}. \end{aligned}$$

Указанный в условии ряд сходится абсолютно в банаховом пространстве $C(\overline{G}) \implies$ он сходится \implies

$$\implies \exists u(x) \in C(\overline{G}) : \|U - U_n\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies U_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{C(\overline{G})}} U$$

- Покажем что U – решение: $U_n = f + \lambda K U_{n-1}$, при этом $U_n \longrightarrow U$ а $\lambda K U_{n-1} \longrightarrow \lambda K U$ в силу непрерывности оператора K .

- Единственность: пусть U_I, U_{II} – решения, обозначим $V = U_I - U_{II} \in \overline{G}$. При этом V удовлетворяет однородному уравнению $V = \lambda K V$, $x \in C(\overline{G})$. Тогда

$$\|V\| \leq |\lambda| \cdot \|K\| \cdot \|V\| \longrightarrow (1 - |\lambda| \cdot \|K\|) \cdot \|V\| \leq 0 \longrightarrow \|V\| = 0 \longrightarrow V \equiv 0$$

2. $u = \lambda K u + f \longleftrightarrow (I - \lambda K)u = f$. То, что $I - \lambda K$ отображает всё $C(\overline{G})$, – ясно. Согласно пункту 1 $\forall f \in C(\overline{G}) \exists! u(x)$ – решение, значит оператор отображает всё $C(\overline{G})$ на всё $C(\overline{G})$. Значит, существует обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$. Он ограничен т.к.

$$\|(I - \lambda K)^{-1}f\|_{C(\overline{G})} = \|U\|_{C(\overline{G})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f\|_{C(\overline{G})} \leq \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} < \infty$$

□

Билет 26. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

Определение 26.1. Интегральное уравнение вида

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, \quad K'(x, y) = K(y, x)$$

называется союзным уравнению (1).

Определение 26.2. Ядро $K(x, y) \in (C(\overline{G}) \times C(\overline{G}))$ называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y), \quad a_i, b_i \in C(\overline{G})$$

Будем считать что $\{a_1 \dots a_N\}$ и $\{b_1 \dots b_N\}$ – линейно независимые наборы (если это не так, то уменьшим N). Будем теперь рассматривать уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (2)$$

- Введем в $C(\overline{G})$ билинейную форму $\langle u; v \rangle = \int_G u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in C(\overline{G})$

- Введем также следующие обозначения:

- $\mu_{ij} = \langle b_i; a_j \rangle; \quad A = \|\mu_{ij}\|_{i,j}^N$
- $\varphi_i = \langle b_i; f \rangle; \quad \vec{\varphi} = \|\varphi_1 \dots \varphi_N\|^T$
- $c_i = \langle b_i; u \rangle; \quad \vec{c} = \|c_1 \dots c_N\|^T \quad (3)$

-

Лемма 26.1 (об эквивалентности). Пусть $u(x) \in C(\overline{G})$ – решение уравнения (2). Тогда $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$, $x \in \overline{G}$, где (\vec{c}) определяется (3) и удовлетворяет системе $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. Обратно, если (\vec{c}) – некоторое решение системы $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$ то $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$, $x \in \overline{G}$ является решением интегрального уравнения.

Доказательство. 1. Пусть $u(x)$ решение интегрального уравнения. Тогда

$$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x)c_i + f(x)$$

Домножим на b_i и проинтегрируем по G :

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i \iff \vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{\varphi}$$

2. Обратно, если $c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i$, $i = \overline{1, N}$ то рассмотрим $u_*(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) c_i + f(x)$. Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} u_* - \lambda \int_G K(x, y) u_*(y) dy - f(x) &= \\ &= u_* - \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x) b_i(y) \right] u_*(y) dy - f(x) = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[c_j - \int_G b_j(y) u_*(y) dy \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^N c_i \underbrace{\int_G b_j(y) a_i(y) dy}_{\mu_{ji}} - \underbrace{\int_G b_j(y) f(y) dy}_{\varphi_j} \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \underbrace{\left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^N \mu_{ji} c_i - \varphi_j \right]}_0 = \end{aligned}$$

□

Таким образом, исследование интегральных уравнений с вырожденным ядром эквивалентно исследованию системы $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$.

Offtop 26.1. Отметим что для союзного уравнения $v(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \underbrace{\int_G a_j(y) v(y) dy}_{d_j} + g(x)$

соответствующей системой является $(E - \lambda A^T) \vec{d} = \vec{\varphi}$, где $\vec{\varphi} = \int_G \vec{a}(y) g(y) dy$.

Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром

Пусть $D(\lambda) = \det(E - \lambda A) = \det(E - \lambda A^T)$. Ясно что $D(\lambda) \neq 0$ т.к. $D(0) = 1$. $D(\lambda)$ есть многочлен $P(\lambda)$, $\deg P \leq N \longrightarrow$ он имеет p действительных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $0 \leq p \leq N$.

- Если $D(\lambda) \neq 0$ то $\forall k : \lambda_k \neq \lambda \longrightarrow$ у уравнения $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$ решение существует и оно единственно. Аналогичное утверждение верно и для союзного уравнения.
- Если $\exists k : \lambda_k = \lambda \rightarrow Rg(E - \lambda A) = Rg(E - \lambda A^T) = r < N$

Пусть $m = N - r > 0$. Тогда базис в пространстве решений $(E - \lambda A)\vec{c}$ обозначим как $\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n$ а базис в пространстве решений $(E - \lambda A^t)\vec{d} = 0$ обозначим как $\vec{d}_1 \dots \vec{d}_n$. Соответствующие им решения обозначим $u_1 \dots u_m$ и $v_1 \dots v_m$ соответственно $(u_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) c_{j,k}, v_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) d_{j,k})$.

Покажем что $u_1 \dots u_m$ базис решения однородного уравнения. Пусть

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0 \iff \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\lambda \sum_{j=1}^n a_j(x) c_{j,i} \right] = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i c_{i,j} = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{c}_i = 0$$

Значит система $u_1 \dots u_m$ — линейно независима.

Определение 26.3 (Собственные функции и собственные числа оператора K). Функция $u(x) \in C(\bar{G})$, $u \neq 0$ удовлетворяющая уравнению

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y) u(y) dy, \quad x \in C(\bar{G})$$

называется собственной функцией ядра K или собственной функцией оператора K . Соответствующие собственным функциям λ называются характеристическими числами ядра/оператора K .

Свойства характеристических чисел:

- $\lambda \neq 0$ (иначе $u \equiv 0$).
- λ — не собственное значение оператора: $u = \lambda K u \Leftrightarrow K u = \frac{1}{\lambda} u \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$ — собственное значение.
- Собственные значения K и K' совпадают.

Рассмотрим систему $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. По теореме Фредгольма эта система совместна тогда и только тогда, когда каждое решение сопряженной однородной системы $(E - \lambda A^t)\vec{d} = \vec{0}$ ортогонально $\vec{\varphi}$:

$$\langle \vec{\varphi}; \vec{d} \rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^N \varphi_j d_j = 0 \iff \int_G f(y) \left[\sum_{j=1}^N b_j(y) d_j \right] dy = 0 \iff \int_G f(y) v(y) dy = 0$$

Получили что интегральное уравнение с вырожденным ядром совместно тогда и только тогда, когда f ортогонально каждому решению однородного союзного уравнения.

Сформулируем все полученные и доказанные выше результаты в виде теорем Фредгольма:

Теорема 26.2 (Первая теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему однозначно разрешимы при любых правых частях из $C(\bar{G})$.

Теорема 26.3 (Вторая теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) = 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему имеют одинаковое число линейно независимых решений $m = N - \text{Rg}(E - \lambda A)$

Теорема 26.4 (Третья теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешения интегрального уравнения с вырожденным ядром необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x) \in C(\bar{G})$ был ортогонален всем решениям союзного уравнения.

Билет 27. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

и ему союзное

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, K'(x, y) = K(y, x) \quad (2)$$

Теорема 27.1 (Первая теорема Фредгольма (Теорема Фредгольма об альтернативах)). *Либо интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в $C(\overline{G})$ для каждой функции $f(x)$ из $C(\overline{G})$ либо соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.*

Теорема 27.2 (Вторая теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он же имеет место и для уравнения (2). Как однородное уравнение соответствующее (1) так и однородное уравнение соответствующее (2) имеют конечные числа линейно независимых собственных функций, причем эти числа совпадают.*

Теорема 27.3 (Третья теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место второй случай альтернативы, то неоднородное уравнение (1) разрешимо в $C(\overline{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие "ортогональности":*

$$\int_G f(y)v(y)dy = 0$$

Теорема 27.4. *В любом круге $|\lambda| < R$ на \mathbb{C} у ядра уравнения (1) имеется не более чем конечное количество характеристических чисел. Единственная возможная точка накопления характеристических чисел – бесконечно удаленная точка.*

Билет посвящен доказательству этих теорем.

Теорема 27.5 (Аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , а $W(x) \in C(\overline{G})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon(x)$ – многочлен от $x_1 \dots x_n$ такой, что $\|h(x) - P_\varepsilon(x)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$.*

Будем использовать данный факт из анализа.

Лемма 27.6. *Пусть K – интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ этот оператор можно представить в виде $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{H}{K}_\varepsilon$, $\left\| \overset{H}{K}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$, $\left\| \overset{H}{K}'_\varepsilon \right\| < \varepsilon$*

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ найдем $P_\varepsilon(x, y)$ от $x_1..x_n, y_1..y_n$: $\|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$. Тогда $\left\| \overset{H}{K_\varepsilon} \right\| \leq \|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} \cdot \text{mes} G = \varepsilon \cdot \text{mes} G$. При этом оператор $\overset{B}{\Phi}_\varepsilon$ имеет вырожденное ядро P_ε . \square

Лемма 27.7. Пусть K – интегральный оператор с полярным ядром $K(x, y)$ $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ этот оператор можно представить в виде $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q'_\varepsilon} \right\| < \varepsilon$

Доказательство. Представим K в виде суммы $\overset{H}{K}_\varepsilon + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$. По предыдущей лемме $\overset{H}{K} = \overset{B}{\Phi} + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Значит, $K = \overset{B}{\Phi} + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} = \overset{B}{\Phi} + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ \square

Перейдем к теоремам Фредгольма.

Пусть $R > 0$, $\overline{D_R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$.

- Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2R}$, $K = \overset{B}{\Phi} + Q$, $P = P(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j(x)b_j(y)$, $\|Q\|, \|Q'\| < \varepsilon$
- Представим уравнение $u = \lambda Ku + f$ в виде $(I - \lambda K)u = \lambda \Phi u + f$, аналогично, его союзное уравнение $v = \lambda K'v + g$ представим в виде $(I - \lambda K')v = \lambda \Phi'v + g$. Далее представим эти уравнения в следующей форме:

$$(I - \lambda Q)u = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \int_G b_j(y)u(y)dy + f(x)$$

$$(I - \lambda Q')v = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \int_G a_j(y)v(y)dy + g(x)$$

- Q – оператор с малой нормой: $|\lambda| \cdot \|Q\| \leq \frac{|\lambda|}{2R} < 1$. Аналогичные рассуждения верны и для оператора Q' , а значит операторы $(I - \lambda Q)$, $(I - \lambda Q')$ непрерывно обратимы. Перепишем уравнения:

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}a(x)}_{\hat{a}_j(x, \lambda)} \int_G b_j(y)u(y)dy + \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}f(x)}_{\hat{f}(x)} = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y)u(y)dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

$$v(x) = \dots = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{b}_j(x, \lambda) \int_G a_j(y)u(y)dy + \hat{g}(x, \lambda)$$

Это уравнения с вырожденными ядрами, их решение эквивалентно решению систем:

$$(E - \lambda \hat{A})\vec{c} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}(\lambda) = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu_{i,j} = \langle b_i; \hat{a}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle b_i; \hat{f} \rangle$$

$$(E - \lambda \hat{A}')\vec{d} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}'(\lambda) = \|\mu'_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu'_{i,j} = \langle a_i; \hat{b}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle a_i; \hat{g} \rangle$$

Лемма 27.8. Пусть K – полярное ядро такое, что $\|\lambda K\| < 1$. Тогда $\forall a, b \in C(\overline{G}) \longrightarrow \langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle = \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx$ – регулярная функция при $|\lambda| < \|K\|^{-1}$. Если дополнительно выполнено $|\lambda| \cdot \|K'\| < 1$, то $[(I - \lambda K)^{-1}a; b] = [a; (I - \lambda K')^{-1}b]$.

Доказательство.

$$(I - \lambda K)^{-1}a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j a(x) \implies \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx = \int_G \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j(a(x))b(x)}_{\text{сход. равномерно}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[\int_G K^j a(x)b(x)dx \right]$$

Полученный ряд сходится абсолютно т.к. справедлива оценка

$$\left| \lambda^j \int_G K^j(a(x))b(x)dx \right| \leq \|a\| \cdot \|b\| \cdot \text{mes}G \cdot \underbrace{|\lambda|^j \cdot \|K\|^j}_{q_j; q < 1}$$

Докажем теперь вторую часть:

$$\|\lambda K'\| < 1 \implies \exists (I - \lambda K')^{-1} \in \mathcal{L}(C(\overline{G})) \implies (I - \lambda K')^{-1}b = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b(x)$$

Тогда:

$$\langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle \stackrel{*}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle K^j a; b \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle a; (K')^j b \rangle = \left\langle a; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b \right\rangle = \langle a; (I - \lambda K')^{-1}b \rangle$$

Докажем (*):

$$\begin{aligned} \langle Ku; v \rangle &= \int_G \int G K(x, y) u(y) dy v(x) dx = \\ &= \int_G u(y) \left[\int G K(x, y) v(x) d(x) \right] dy = [x \rightarrow y; y \rightarrow x; (**)] = \\ &= \int_G u(x) \left[\int G \underbrace{K(y, x)}_{K'(x, y)} v(y) dy \right] dx = \langle u; K' v \rangle \end{aligned}$$

Где переход (**) верен по т. Фубини-Тонелли. □

Лемма 27.9. Матрица $\hat{A}'(\lambda)$ является транспонированной к матрице $\hat{A}(\lambda)$. Элементы \hat{m}_{ij} матрицы \hat{A} – регулярные в круге $|\lambda| < 2R$ функции λ .

Доказательство.

$$|\lambda| < 2R \implies |\lambda| \cdot \|Q\| < 1, |\lambda| \cdot \|Q'\| < 1$$

$$\hat{\mu}'_{ij} = \langle a_i; (I - \lambda Q')^{-1}b_j \rangle = \langle (I - \lambda Q)^{-1}a_i; b_j \rangle = \hat{\mu}_{ji}$$

Регулярность следует из предыдущей леммы. □

- Рассмотрим $D(\lambda) = \det(E - \lambda \hat{A}(\lambda)) = \det(E - \lambda \hat{A}'(\lambda))$. Это регулярная в круге $|\lambda| < 2R$ функция, $D(0) = 1 \implies D(\lambda) \not\equiv 0$.

В круге $|\lambda| < R$ может быть только конечное число нулей λ_k иначе по теореме о единственности имели бы $D(\lambda) \equiv 0$.

Если λ не корень $D(\lambda) = 0$ то оба уравнения однозначно разрешимы.

Если же λ – корень $D(\lambda) = 0$, то оба уравнения имеют конечномерные пространства решений одной размерности.

Таким образом, мы доказали следующие эквивалентности:

- разрешимость исходного уравнения
- разрешимость системы

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y) u(y) dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

- разрешимость $(E - \lambda \hat{A}') \vec{d} = \vec{\varphi}$

Осталась третья теорема: условие разрешимости: $\vec{\varphi} \perp \vec{d}_{\text{одн}}$ – любому решению $[E - \lambda \hat{A}'(\lambda)] = \vec{0}$ т.е.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=1}^N \hat{\varphi} d_j}_0 &= \sum_{j=1}^N \langle b_j; \hat{f} \rangle d_j = \sum_{j=1}^N \langle b_j; (I - \lambda Q)^{-1} f \rangle_j = \\ &= \sum_{j=1}^N \langle f; (I - \lambda Q')^{-1} b_j \rangle_j = \left\langle f, \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q')^{-1} b_j}_{\hat{b}_j} d_j \right\rangle = \langle f; v \rangle = \int_G f v dx = 0 \end{aligned}$$

Билет 28. Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.

- Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$. Эту запись нужно понимать следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{-1}{4\pi|y|} \right) \Delta_y \varphi(y) dy = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Определение 28.1. Функция $\vartheta(x)$ вида $\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$ называется объемным ньютоновым потенциалом.

Замечание. Это свёртка фундаментального решения с функцией $-4\pi\rho(x)$

Теорема 28.1. 1. Пусть $\rho(x)$ — кусочно-непрерывная, ограниченная, финитная. Тогда $\vartheta(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и $\vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

2. Если \exists область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: $\rho(x) \in C^1(\Omega)$, то $\vartheta(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta\vartheta(x) = -4\pi\rho(x)$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Доказательство проведем в менее общей постановке: считаем $\rho \in C^\infty$ и $\text{supp } \rho$ компактом.

- $\exists C : |\rho(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$. Считаем, что $\text{supp } \rho \subset B_A(0)$. Берем $x : |x| > 2A$. Тогда если $|y| \leq A$, то $|y| < \frac{|x|}{2}$.
- Оценка:

$$\begin{aligned} |\vartheta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| = \\ &= \left| \int_{|y| < A} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| \leq \int_{|y| < A} \frac{|\rho(y)|}{|x-y|} dy \leq \frac{c}{\frac{|x|}{2}} \int_{|y| < A} \frac{dy}{1} = \frac{8\pi c A^3}{3|x|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

- Пользуемся утверждением из анализа: Пусть $F(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)$, $j = \overline{1, n}$ непрерывны на $\Omega \times G$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $g(x)$ абсолютно интегрируема: $\int_G |g(x)| dx < \infty$. Тогда $\int_G F(x, y) g(y) dy \in C^1(\overline{\Omega})$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_G F(x, y) g(y) dy = \int_G \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) g(y) dy$$

- Пусть $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\exists A : \rho(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| > A$. Пусть

$$\Omega = \{x : |x| < R\}; \quad F(x, y) = \rho(x + y)$$

$$G = \{y : |y| < R + A\}; \quad g(y) = \frac{1}{|y|}.$$

При $|x| < R, |y| > A + R \Leftrightarrow |x + y| \geq |y| - |x| \geq A + R - R = A \Rightarrow \rho(x + y) \equiv 0$.

•

$$\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy = \int_{|y| < R+A} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = \int_{|y| < R+A} \frac{\partial \rho(x + y)}{\partial x_j} \frac{1}{|y|} dy;$$

Также для остальных производных.

•

$$\Delta \vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \rho(x + y)}{|y|} dy = -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{-1}{4\pi|y|} \right) \underbrace{\Delta_y \rho(x + y)}_{\parallel \Delta_x \rho(x + y)} dy = -4\pi \langle \delta(y), \rho(x + y) \rangle = -4\pi \rho(x).$$

□

Билет 29. Понятие области с границей C^2 . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в \mathbb{R}^3

Определение 29.1. Область с границей Γ класса C^2 - ограниченная область ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$), удовлетворяющая условиям :

- $\forall x^0 \in \Gamma \exists$ декартова с.к. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в x^0 и функция $F_{x^0}(\xi')$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi'| \leq r$ т.ч. что
 - $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r)$; $F_{x^0}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i}(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$
 - Множество $\sum_{x^0} = \{x : \xi_3 = F_{x^0}(\xi'), |\xi'| \leq r\} \subset \Gamma$
 - Множество $U_{x^0}^- = \{x : F_{x^0}(\xi') - h < \xi_3 < F_{x^0}(\xi'), |\xi'| < r\} \subset \Omega$
 - Множество $U_{x^0}^+ = \{x : F_{x^0}(\xi') < \xi_3 < F_{x^0}(\xi') + h, |\xi'| < r\}$ не пересекается с Ω
- $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r) \Rightarrow \left| \frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i} \right| \leq M_1; \left| \frac{\partial^2 F_{x^0}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq M_2, |\xi'| \leq r$
- Постоянные $r > 0$, $h > 0$ и M_1, M_2 можно выбрать не зависящими от $x^0 \in \Gamma$ и от с.к. ξ

Определение 29.2. Указанную с.к. и окрестность $U_{x^0} = U_{x^0}^- \cup U_{x^0}^+$ назовем **подходящим** для X^0 , а ξ' - **локальными координатами** на куске \sum_{x^0} границы Γ .

Определение 29.3. Неограниченная область называется **внешней областью с границей** $\Gamma \in C^2$, если $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ есть ограниченная область с границей $\in C^2$.

Определение 29.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - область с границей Γ класса C^2 . Функция вида $V^{(0)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y$ называется **потенциалом простого слоя**.

Теорема 29.1. Пусть $\mu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда:

1. $V^0(x) \in C(\mathbb{R}^3)$
2. $V^0(x)$ гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$
3. $V^0(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$

Доказательство. 2. Пусть $x^1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, $\delta_1 = \text{dist}\{x^1, \Gamma\} > 0$



Возьмем шар $\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^1| < \frac{\delta_1}{2}\}$. Тогда расстояние от произвольной точки $x \in \overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}$ до $\forall y \in \Gamma$ не меньше $\frac{\delta_1}{2} : |x - y| \geq |x^1 - y| - |x - x^1| \geq \delta_1 - \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$

Поэтому $\frac{1}{|x - y|} \in C^\infty(\underbrace{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}_x \times \underbrace{\Gamma}_y) \Rightarrow \mathcal{D}_x^\alpha \frac{1}{|x - y|} \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma)$

По теореме о дифференцировании интеграла по параметру (формулировка в билете 5) имеем

$$\mathcal{D}_x^\alpha V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \mathcal{D}_x^\alpha \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma) \quad \forall \alpha\text{-мультииндекса}$$

В частности, $\Delta_x V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mu(y) dS_y = 0$, что и требовалось.

1. Если $x \in \Gamma$, то $\frac{1}{|x - y|}$ - полярное ядро, следовательно, интегральный оператор с полярным ядром переводит непрерывную функцию $\mu(y)$ в непрерывную $\Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\Gamma)$.

Мы уже доказали, что $V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \Rightarrow$ осталось показать непрерывность в областях Ω следующего вида:



Построим для этого последовательность функций, равномерно сходящихся к $V^{(0)}(x)$:

Пусть $\left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta$ - δ -срезка функции $\frac{1}{|x - y|}$:

$$\left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x - y|}, & \text{если } |x - y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta}, & \text{если } |x - y| < \delta. \end{cases}$$

$$V_\delta^{(0)}(x) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \mu(y) dS_y \in C(\overline{\Omega})$$

Будем выбирать $0 < \delta < \frac{d}{2}$ (d - из свойств области с границей класса C^2) - такое число, что $\forall x^0 \in \Gamma \rightarrow B(x^0, d) \subset U_{x^0}$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| = \left| \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x - y|} - \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) \mu(y) dS_y \right|$$

Если $x : |x - y| \geq \delta$, то $\left(\frac{1}{|x - y|} - \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) = 0$

В противном случае она равна $\left| \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{\delta} \right)}_{>0} \underbrace{\mu(y)}_{|\mu(y)| \leq \|\mu\|_{C(\Gamma)} = C} dS_y \right| \geq C \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$

Нам осталось оценить интеграл $\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$



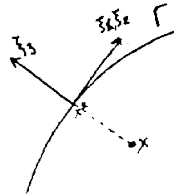
Пусть $x^* = \pi_\Gamma(x)$. Построим $B(x, \delta)$ и $B(x^*, 2\delta)$.

Ясно, что т.к. $|x - x^*| < \delta \Rightarrow B(x, \delta) \subset B(x^*, 2\delta)$.

Увеличивая область интегрирования, запишем:

$$\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|} \leq \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x^* - y| < 2\delta}} \frac{dS_y}{|x^* - y|}$$

По определению числа d имеем $B(x^*, 2\delta) \subset U_{x^*}$.



Свяжем с x^* локальную систему координат и функцию $F_{x^*}(\xi_1, \xi_2)$

Т.к. $y \in \Gamma, y = (\xi_1, \xi_2, F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))$

Т.к. $x^* = \pi_\Gamma(x)$, точка x имеет ненулевую компоненту только по ξ_3 : $x = (0, 0, x_3)$

Оценки: $|x - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_3 - F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2$

$|x^* - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \Rightarrow$ расширяем область интегрирования до

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta$$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| \geq C \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right)^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 \leq$$

$$C \sqrt{1 + 2M_1^2} \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

В полярной системе координат $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ последний интеграл примет вид $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\delta} \frac{r dr}{r} = 4\pi\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Итак, $\underbrace{V_\delta^{(0)}(x)}_{\in C(\bar{\Omega})} \Rightarrow_{\delta \rightarrow 0} V^{(0)}(x) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3)$.

3. $\mu(x) \in \Gamma \Rightarrow |\mu(x)| \leq \|\mu\|_\Gamma = C \quad \forall x \in \Gamma$

Возьмем сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри этой сферы. Тогда $\forall y \in \Gamma \rightarrow |y| \leq R$.

При $x \rightarrow \infty \rightarrow |x| \geq 2R \Rightarrow y \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |V^0(x)| \leq \int_\Gamma \frac{|\mu(y)|}{|x-y|} dS_y \leq \frac{2C}{|x|} \underbrace{\int_\Gamma dS_y}_{\tilde{C}} \Rightarrow V^0(x) =$

$O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

□

Билет 30. Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность

Пусть Γ - граница класса C^2 ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Определение 30.1. Функция вида $V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y$ называется *потенциалом двойного слоя*

Сразу будет удобно переписать определение в иной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{k=1}^3 \frac{n_k(y)(x_k - y_k)}{|x-y|^3} = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y \end{aligned}$$

Лемма 30.1. Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда:

а) $V^{(2)}(x)$ - гармоническая функция в $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$;

б) $V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \rightarrow \infty$

Доказательство.

а)

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \underbrace{n_k(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{т.к. } \Gamma \in C^2}} \underbrace{\nu(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{по условию}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{-\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} \\ \in C((\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times \Gamma)}} dS_y = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Gamma} \underbrace{n_x(y) \nu(y) \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{\text{потенциал простого слоя с} \\ \mu = n_k \cdot \nu \in C(\Gamma) \\ \downarrow \\ \text{является гармонической} \\ \text{функцией в } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma}} dS_y \end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться тем, что производная гармонической функции - гармоническая.

б) Возьмём сразу сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри сферы. При

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow |x| > 2R \Rightarrow |y| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2 \geq \frac{|x|^2}{4}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \leq \frac{|x-y| \cdot |\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V^{(2)}(x)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y \right| \leq \frac{4}{|x|^2} \int_{\Gamma} |\nu(y)| dS_y \leq 4 \|\nu(y)\|_{C(\Gamma)} \int_{\Gamma} dS_y \cdot \frac{1}{|x|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

□

Лемма 30.2. Если Ω ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, то $\forall x, y \in \Gamma, x \neq y$, справедлива оценка

$$\left| \frac{(x - y, n(y))}{|x - y|^2} \right| \leq \frac{M}{|x - y|}$$

Доказательство. Пусть d - число из определения поверхности с границей $\Gamma \in C^2$:

- если $|x - y| \geq d$, то $\frac{|(x - y, \bar{n}_y)|}{|x - y|^3} \leq \frac{1}{|x - y|^2} \leq \frac{1}{d} \frac{1}{|x - y|}$
- если $|x - y| < d$, то свяжем y с локальной системой координат. В этой системе:
 $y = (0, 0, 0)$, $x = (\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2))$, $\bar{n}_y = (0, 0, 1) \Rightarrow$
 $|x - y, \bar{n}_y| = |F_y(\xi_1, \xi_2)| \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + F_y^2(\xi_1, \xi_2)) = M_2|x - y|^2$, что и требовалось.

□

Лемма 30.3. Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя $V^{(2)} \in C(\Gamma)$

Доказательство. Используем признак полярного ядра (билет №24). В силу леммы $|K(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|}$ и $K(x, y) = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^2} \in C((\Gamma \times \Gamma) \setminus \{x = y\})$ Оператор с полярным ядром переводит непрерывные функции в непрерывные, а $\nu \in C(\Gamma) \Rightarrow V^{(2)}(x) \in C(\Gamma)$

□

Наша цель - описать скачок $V^{(2)}(x)$ при переходе через границу. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 30.4. Пусть Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Тогда интеграл $V_{GAUSS}^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \nu(y) \cdot 1 \cdot dS_y = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} dS_y$ - (интеграл Гаусса) равен

$$\begin{cases} -4\pi, x \in \Omega \\ -2\pi, x \in \Gamma \\ 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

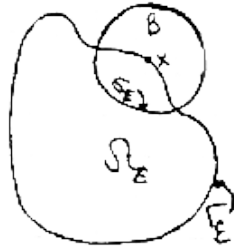
Доказательство. 1) Пусть $x \in \Omega$. Возьмём $u(x) \equiv 1$ и запишем представление этой функции в виде суммы трёх потенциалов:

$$u(x) \equiv 1 = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\Delta 1}_{=0} dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y}}_{=0} = -\frac{1}{4\pi} V_{GAUSS}^{(2)}(x)$$

2) Пусть $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ Возьмём $u(y) \equiv 1$ и $v(y) = \frac{1}{|x - y|}$ и воспользуемся для этих функций первой формулой Грина:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\Delta_y v(y)}_{=0} \cdot u(y) dy = \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} v(y) u(y) dS_y}_{=V_{GAUSS}^{(2)}(x)} - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla_y v(y), \nabla 1) dy}_{=0} \Rightarrow V_{GAUSS}^{(2)}(x) = 0$$

3) Пусть $x \in \Gamma$. Введём $B = B(x, \varepsilon)$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus B$, $\sigma_\varepsilon = \partial B \cap \bar{\Omega}$ Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon \Rightarrow x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$



Согласно второму пункту можем написать $\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = 0$ Значит

$$\underbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y}_{\rightarrow \int_{\Gamma} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0} = 0$$

Покажем, что

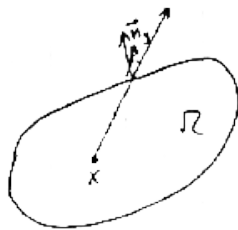
$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y \rightarrow 2\pi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} = \frac{|x-y||\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Поэтому } \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} dS_y$$

При малых ε кусок границы Γ внутри \rightarrow к полуплоскости $\Rightarrow \sigma_\varepsilon \rightarrow$ к полусфере.

Поэтому $\int_{\sigma_\varepsilon} dS_y = 2\pi\varepsilon^2 (1 + O(1))$, что и требовалось □

Offtop : Геометрический смысл интеграла Гаусса: $\frac{(y-x, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y = \frac{dS_y \cos \beta}{|x-y|^2} = d\Omega$



– телесный угол, под которым из точки x видна часть dS_y . Интеграл Гаусса есть сумма всех таких углов со знаком ”минус”. Поэтому геометрически последняя лемма очевидна.

Лемма 30.5. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$. Пусть $x^o \in \Gamma$. Тогда

$$\forall x : (x \in \mathbb{R}^3) \cap \left(|x - x^o| < \frac{d_*}{2} \right) \text{ верно } \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y < K, d_* = \frac{1}{2} \min \left(d, \frac{2}{M_2} \right)$$

Без доказательства

Лемма 30.6. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$. Пусть $x^o \in \Gamma$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x^o} W(x, x^o) = W(x^o, x^o), \text{ где } W(x, x^o) = \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y, \text{ а } \nu(x) \in C(\Gamma)$$

Доказательство. Требуется показать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - x^o| < \delta_\varepsilon \rightarrow |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| < \varepsilon$. Функция $\nu(x)$ непрерывна на компакте, следовательно она и равномерно непрерывна на нём. Значит $\exists \beta = \beta(\varepsilon) : \quad \forall y \in \Gamma : |y - x^o| < \delta \rightarrow |\nu(y) - \nu(x^o)| < \varepsilon$.

Выберем $\beta \leq \frac{d_*}{2}$

$$\begin{aligned} |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| &= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right) (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y \right| \leq \\ &\leq \int_{|y-x^o|<\beta} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\leq K+K} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq \varepsilon} dS_y + \\ &\int_{\Gamma \setminus (|y-x^o|<\beta)} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\substack{\leq \psi(x); \psi(x^o)=0 \\ \downarrow \\ \exists \delta_1: \|\psi(x)\| < \varepsilon, \\ \text{если } |x-x^o| < \delta_1}} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq 2\|\nu\|_{C(\Gamma)}} dS_y \end{aligned}$$

Значит, при $|x - x^o| \leq \max \left(\frac{d_*}{2}, \delta_1(\varepsilon) \right)$ имеет место оценка $|W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| \leq 2K\varepsilon + 2\varepsilon\|\nu\|_{C(\Gamma)}$ \square

Теперь можно перейти к описанию скачка потенциала.

Теорема 30.7. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$, а $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя $V^{(2)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ и $V^{(2)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ (можно непрерывно продолжить на замыкания). Обозначим $\forall x^o \in \Gamma : V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x); V_-^{(2)}(x^o) =$

$$\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) \text{ Тогда } V_{\pm}^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) \mp 2\pi\nu(x^o)$$

Доказательство.

$$V^{(2)}(x) = W(x, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y$$

$$V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) = \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o) + \nu(x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \Omega \text{ это } 4\pi} = W(x^o, x^o) - 4\pi\nu(x^o)$$

Далее, если $x^o \in \Gamma$, то $V^{(2)}(x^o) = W(x^o, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x^o - y, \bar{n}_y)}{|x^o - y|^3} \nu(y) dS_y = W(x^o, x^o) - 2\pi\nu(x^o)$

Поэтому $V_+^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) - 2\pi\nu(x^o)$ Это, в частности, означает, что $V^{(2)}(x)$ можно непрерывно продолжить до $\bar{\Omega}$. Для стремления $x \rightarrow x^o$ извне доказательство аналогично:

$$V_-^{(2)}(x^o) = \underbrace{\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} + \lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} \nu(x^o) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ это } 0} = W(x^o, x^o) = V^{(2)}(x^o) + 2\pi\nu(x^o)$$

Это, в частности, означает, что $V^{(2)}$ можно непрерывно продолжить до $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

□

Билет 31. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью Формула скачка для нормальной производной

Мотивация: во внутренней задаче Неймана (билет 14) ищется решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ уравнения

$$\Delta u = f(x), x \in \Omega$$

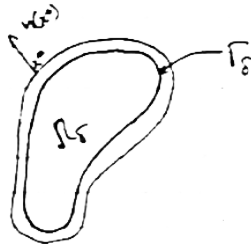
при условии

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_r = u_1(x),$$

где $u_1 \in C(\Gamma)$.

Но существуют примеры гармонических в области функций, градиент которых нельзя продолжить по непрерывности на замыкание этой области. Можно расширить понятие классического решения.

Пусть $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$



Пусть $x^o \in \Gamma$, а $\vec{n}(x^o)$ - нормаль к Γ в x^o . Т.к. $\Gamma \in C^2$, $\vec{n}(x^o)$ - непрерывная функция по x^o . Проведем через x^o прямую $x = x^o + \vec{n}(x^o)t, t \in \mathbb{R}$

Распишем произведение

$$(\vec{n}(x^o), \nabla u) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

Определение 31.1. Говорят, что $u(x)$ имеет **правильную нормальную производную** по направлению внешней нормали на Γ из Ω , если

1. $\forall x^o \in \Gamma$ существует конечный предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o) \equiv \lim_{x=x^o+\vec{n}(x^o)t, x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

2. Этот предел равномерный по $x^o \in \Gamma$

Лемма 31.1. Если $u(x)$ имеет ПНП по нормали $\vec{n}(x^o)$ из Ω на Γ , то

1. $u(x)$ имеет обычную производную по нормали $\vec{n}(x^o)$ в точке $x^o \in \Gamma$, и эта производная совпадает с ПНП
2. ПНП $\in C(\Gamma)$

Доказательство. Обычная производная по нормали

$$\lim_{x \rightarrow x^o, x = x^o + \vec{n}(x^o)t} \frac{u(x^o) - u(x)}{|x^o - x|} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{u(x^o) - u(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{-t} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}$$

- этот предел существует по условию.

Покажем непрерывность: Пусть δ мало, $0 < \delta < \delta_o, x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$

Пусть $V_\delta(x^o) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) =$

$$= \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) \Rightarrow V_\delta(x^*) \in C(\Gamma)$$

$n_k(x^o)$ непрерывна, т.к. $\Gamma \in C^2$

По определению ПНП: $V_\delta \Rightarrow$ ПНП \Rightarrow она также непрерывная на Γ . □

• После расширения определения классического решения встает вопрос о единственности решения. При исследовании этого вопроса мы использовали формулы Грина. Для них требовалась гладкость $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Покажем, как обобщить эти факты с помощью ПНП.

• Пусть Ω - ограниченная область с границей \mathbb{R}^3 , граница $G \in C^2, 0 < \delta < \delta_\mu$

$\Gamma_\delta = x : x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$ - граница класса уже C^1 , т.к. $\vec{n} \in C^1$



Лемма 31.2. Пусть Ω - ограниченная область с границей $G \in C^2, u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, а у $u(x) \ni$ ПНП по направлению внешней нормали $\vec{n}(x^o), \Delta u \in C(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega} (\Delta u) u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) u(x) dS - \int_{\Omega} |\nabla|^2 dx$$

Доказательство. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow u(x) \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\Omega_\delta) \Rightarrow$

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta u(x)) u(x) dx(1) = \oint_{G_\delta} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS(2) - \int_{\Omega_\delta} |\nabla u(x)|^2 dx(3)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(1) = \int_{\Omega} \Delta u dx, \text{ т.к. } \Delta u(x) \text{ и } u(x) \in C(\bar{\Omega})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(2) = \int_{G_{\delta}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(3) = \lim_{x=x^o-\delta \vec{n}x^o} \int_{\Omega_{\delta}} |\nabla u(x)|^2 dx$$

• С учетом сделанного обобщения все сделанные ранее рассуждения о внутренних и внешних задачах верны и для расширенного понятия классического решения. \square

Теорема 31.3 (Корректная постановка внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа). Ω - ограниченная область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_G = u_1(x) \in C(G) \end{cases} \quad (30)$$

Теорема 31.4 (Корректная постановка внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа). Ω - внешняя область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = u_1(x) \in C(\Gamma) \\ u(x)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (31)$$

• Рассмотрим потенциал простого слоя

Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$; $x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$; $0 < \delta < \delta^*$

$$V^* = \int_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dS_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dS_y = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_G \frac{1}{|x-y|} \mu(y) dS_y$$

$$\sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{y_k - x_k}{|x-y|^3} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x-y|^3} \mu(y) dS_y$$

Обозначим $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{\pm}(x^o) = \lim_{x=x^o \mp \delta \vec{n}(x^o), \delta \rightarrow +0} \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o)(1) = \int_{\Gamma} \frac{(y-x^o, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y, x^o \in G(2)$$

(1) - прямое значение нормальной производной

(2) - полярное ядро $\Rightarrow \forall \mu(x) \in C(G), \forall x^o \in \Gamma$ этот интеграл существует, и более того $(1) \in C(\Gamma)$

Теорема 31.5. У потенциала простого слоя $V^o(x)$ с плотностью $\mu(x) \in C(\Gamma)$ существует ПНП на Γ :

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_+(x^o)\right) u \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_-(x^o)\right),$$

причем имеет место формула скачка

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_{\pm}(x^o) \right) = \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) \pm 2\pi\mu(x^o)$$

Следствие. $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_+(x^o) - \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_-(x^o) = 4\pi\mu(x^o), x^o \in \Gamma$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_+(x^o) + \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_-(x^o) \right], x \in \Gamma$$

Билет 32. Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач

Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ имеющую ПНП по направлению внешней нормали, и такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (32)$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$u(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y$. Свойства $\Delta u(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \rightarrow 0$ выполнены.

Кроме того, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ и имеет ПНП. Нужно проверить $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G$.

• Пусть

$$x^o \in G \Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = -2\pi\mu(x^o) + \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y = u_1(x^o)$$

$\mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^2} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x^o \in G$ - Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с интегральным оператором и полярным ядром.

Уравнение однозначно разрешимо \Leftrightarrow уравнение $\mu_*(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y \equiv 0$ имеет только тривиальное решение.

Для этого покажем, что $V_*(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y \equiv 0$

Ясно, что уравнение на μ_* получается таким же образом как и уравнение на μ , но из задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial v}{\partial \vec{n}})|_r = 0, x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ v(x) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (33)$$

В силу единственности решение этой задачи $V_* = 0 (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$. Но $V_* \in C(\mathbb{R}^3) \Rightarrow X_* \equiv 0$ на $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ Функция V_* удовлетворяет внутренней задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta V_* = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ V_*(x) = 0 \quad \forall x \in G \end{cases} \quad (34)$$

$\Rightarrow V_* \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$

Итак, $V_*(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Но $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_+(x^o) - (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = 4\pi\mu_*(x^o), x^o \in G \Rightarrow \mu_*(x^o) \equiv 0 \quad \forall x^o \in G$

Итак, по теореме Фредгольма об альтернативе уравнение

$$(*) \mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x \in G \text{ однозначно разрешимо}$$

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ такую, что:

$$1) \Delta u(x) = 0, x \in \Omega$$

$$2) u|_r = u_0(x), x \in G (u_0(x) \in C(G))$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y, \nu(x) \in C(G)$$

Условия $\Delta u = 0 \in \Omega$ и $u(x) \in C^2(G) \cap C(\bar{\Omega})$ уже выполнены. Осталось проверить $u|_r = u_0(x), x \in G$

• Для потенциала двойного слоя справедлива формула скачка: $u_+(x^o) = u(x^o) - 2\pi\nu(x^o) \Rightarrow u_0(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - 2\pi\nu(x^o)$

$$\Rightarrow \nu(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - \frac{u_0(x^o)}{2\pi}, x^o \in G \text{ Ядро, транспонированное к тому, что стоит в } (*)$$

Т.к. (*) однозначно разрешимо, это уравнение тоже имеет единственное решение

Теорема 32.1. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $G \in C^2$. Тогда у внутренней задачи Дирихле $\forall u_1 \in C(G)$, а также у внешней задачи Неймана $\forall u_0 \in C(G)$ существует единственное классическое решение

Делали:

- Иwanyчев Сергей, 376 группа
- Погодин Роман, 374 группа
- Нагайко Иван, 372 группа
- Рязанов Андрей, 374 группа
- Федоряка Дмитрий, 374 группа
- Багно Богдан, 376 группа
- Изутин Никита, 378 группа
- Ермолова Марина, 373 группа
- Хасянов Расул, 371 группа
- Михальченко Егор, 371 группа
- Шлёнский Владислав, 374 группа
- Цветкова Ольга, 374 группа
- Молибог Игорь, 374 группа
- Чигринский Виктор, 374 группа
- Леонтьев Семён, 377 группа
- Кильянов Александр, 372 группа
- Тернов Лёха, 228 группа