1 Билет 1. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) 2 порядка в $\mathbb{R}^n$ с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду на плоскости

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ДУЧП 2 порядка с линейной старшей частью:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0; \qquad u(x) \in C^2(\Omega); \quad a_{ij}(x) \in C(\Omega)$$

Считаем $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, что не сужает класса, т.к. $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$. Хотим сделать замену так, чтобы все смешанные частные производные обратились в 0. В точке это сделать можно. Возьмём преобразование

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \in C^2(U(x^0)), \quad y^0 = y(x^0); \quad U(x^0) \to V(y^0)$$

(диффеоморфизм класса C^2 окр. $U(x^0)$ на $V(y^0)$)
Будем предполагать $\exists$ обратного: $x = x(y)$ Наша функция: $u = u(x_1 \ldots x_n)$. Введём $\hat{u}(y) \overbrace{=}^{def} u[x(y)] \in C^2(V(y^0))$ Производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Подставляем:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y)) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right] \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \hat{a}_{kl}(y)$$

Введём матрицы: $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|_{i,j=1}^{n}; \qquad \hat{A}(y^0) = \|\hat{a}_{ij}(y^0)\|_{i,j=1}^{n}$.
$J(x^0) = \left\|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^0)\right\|_{i,j=1}^{n}$ - в малой $U(x^0)$ задаёт преобразование $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0)$
$A = A^T \Rightarrow \hat{A}^T = \hat{A}$. Вопрос в выборе J, так что $\hat{A}$ диагональна.
Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы элемент h и квадратичная форма $\Phi(h)$.
Введём 2 базиса: $\begin{matrix}(e_1 \ldots e_n) \\ (e'_1 \ldots e'_n)\end{matrix}$ В них $h \sim \begin{matrix}\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)^T \\ \eta = (\eta_1 \ldots \eta_n)^T\end{matrix}$; $\Phi \sim \begin{matrix}\|c_{ij}\| \\ \|\hat{c}_{ij}\|\end{matrix}$; $\Phi(h) = \begin{matrix}\xi^T c \xi \\ \eta^T \hat{c} \eta\end{matrix}$

Пусть $\xi = S\eta$. Тогда $\Phi(h) = \eta^T S^T C S \eta = \eta^T \hat{C} \eta \to \hat{c} = S^T C S$. Существует такой базис, что $\hat{C} = diag(\underbrace{+1, +1 \cdots + 1}_{p \text{ штук}}, \underbrace{-1, -1 \cdots - 1}_{q \text{ штук}}, 0, 0 \ldots 0)$

$\Phi(h) = \eta_1^2 + \cdots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \cdots - \eta_{p+q}^2$

В равенстве $\hat{A}(y^0) = J(x^0) A(x^0) J^T(x^0)$ нужно взять $J(x^0) = S^T$

Такие преобразования существуют, их много. Например, $y = y^0 + S^T(x^0)(x - x^0)$

В этих переменных уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+q}^2} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0.$$

Классификация уравнений:

1. *Эллиптический тип*: $p = n$ или $q = n$
2. *Ультрагиперболический тип*: $p + q = n$
3. *Гиперболический тип*: $p = 1, q = n - 1$
4. *Ультрапараболический тип*: $p + q < n$
5. *Параболический тип*: $q = 0, p = n - 1$

Замечание. $\hat{A}(y^0) = J(x^0) A(x^0) J^T(x^0) \Rightarrow \operatorname{sign} \left| \hat{A}(y^0) \right| = \operatorname{sign} |A(x^0)|$

В случае $n = 2$ тип уравнения в точке определяется по знаку определителя:

1. Эллиптический вид: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \to \left| \hat{A}(y^0) \right| = 1$

2. Гиперболический вид: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \left| \hat{A}(y^0) \right| = -1$

3. Параболический вид: $\left| \hat{A}(y^0) \right| = 0.$

Приведение уравнения 2 порядка к каноническому виду на плоскости:

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ уравнение $a(x,y) u_{xx} + 2b(x,y) u_{xy} + c(x,y) u_{yy} + F(x, y, u, \nabla u) = 0$

Для определения в точке используем $d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Введём преобразование $y = y(x) = \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ — диффеоморфизм класса C^2.

В новых координатах $\hat{a}\,(\xi, \eta)\, \hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{b}\,(\xi, \eta)\, \hat{u}_{\xi\eta} + \hat{c}\,(\xi, \eta)\, \hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}\,(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta} \hat{u}) = 0$

$$\hat{A}\,(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = J A J^T; \quad J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

1.1 Гиперболический случай

Выбираем $(x_0, y_0) \in \Omega$, пусть $d(x_0, y_0) = ac - b^2 < 0$. В силу непрерывности есть $U_\varepsilon(x_0, y_0)$, где $d < 0$.

Во всех точках этой окрестности тип-гиперболический.

Определение 1.1. *Второй канонический тип:* $\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0$, то есть $\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv 0 \ \forall\, \xi, \eta \in V(\xi^\circ, \eta^\circ)$.

Введём переменную w, которая обозначает либо ξ, либо η.
Запишем *характеристическое уравнение:*

$$a(x,y)w_x^2 + 2b(x,y)w_x w_y + c(x,y)w_y^2 = 0,$$

От решений хотим grad $w \neq 0$, так как если $\nabla\eta = 0$ или $\nabla\xi = 0$, то $J = 0$.

Замечание. $w(x) = 0$ - характеристическая $\Rightarrow \tilde{w}(x) = w(x) - c = 0$ - также характеристическая: $\tilde{c} \in C^2,\ \nabla\tilde{w} \neq 0,\ \tilde{w}$ - удовлетворяет характеристическому уравнению.

Определение 1.2. Переменные ξ, η - *характеристические*; поверхности $\xi = C_1,\ \eta = C_2$ - *характеристические.*

a) Пусть $a(x^\circ, y^\circ) \neq 0$, для $c(x^\circ, y^\circ) \neq 0$ рассуждения такие же.
В окрестности, где $a(x,y) \neq 0$ $\big(u_\varepsilon(x^\circ, y^\circ)\big)$, делим:

$$w_x^2 + \frac{2b}{a}w_x w_y + \frac{c}{a}w_y^2 = \left(w_x + \frac{b}{a}w_y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}w_y = \big[w_x + \lambda_+(x,y)w_y\big] \cdot \big[w_x + \lambda_- w_y\big] = 0,$$

где введены обозначения $\lambda_\pm = \frac{1}{a}(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$, верно, что $\lambda_- \neq \lambda_+ \ \ \forall\,(x,y) \in U_\varepsilon(x^\circ, y^\circ)$, так как $d = ac - b^2 < 0$.
Рассмотрим ЛДУЧП 1-го порядка $w_x + \lambda(x,y)w_y = 0$.
Из теории: у однородного ДУЧП $a_1(x,y)w_x + a_2(x,y)w_y = 0$ при условии $a_1^2 + a_2^2 > 0$ решение есть:

$$\exists\, w(x,y) \in C^2(\Omega),\ \nabla w \neq 0 \text{ и } \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} - \text{ первый интеграл}$$

В нашем случае $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda} \Leftrightarrow dy - \lambda dx = 0$ - ПИ этого уравнения даёт решение исходного ДУЧП.
Значит, в обеих скобках есть по решению, причём $\nabla w \neq 0$.
Покажем невырожденность:

$$\begin{cases} \xi_x + \lambda_+\xi_y = 0, \\ \eta_x + \lambda_-\eta_y = 0. \end{cases}$$

$$\big|J(x^\circ, y^\circ)\big| = \det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda_+\xi_y & \xi_y \\ -\lambda_-\eta_y & \eta_y \end{pmatrix} = \underbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}_{\substack{\neq 0 \text{ в силу} \\ \text{гиперболичности}}} \cdot \xi_y\eta_y \neq 0$$

$$(\text{если } \xi_y = 0, \text{ то } \xi_x = 0 \Rightarrow \nabla\xi = 0)$$

Итак, $\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$ - диффеорморфизм класса C^2. Оно зануляет $\hat{a}$ и $\hat{c}$. Получается уравнение второй канонической форме.

Замечание. От II канонической форме к I:

$$\begin{cases}\alpha=\xi+\eta,\\ \beta=\xi-\eta\end{cases} \quad \Rightarrow \hat{u}(\xi,\eta)=\tilde{u}(\underbrace{\xi+\eta}_{\alpha},\underbrace{\xi-\eta}_{\beta}),\ \hat{u}_\xi=\tilde{u}_\alpha+\tilde{u}_\beta,\ u_{\xi\eta}=\tilde{u}_{\alpha\alpha}-\tilde{u}_{\beta\beta}$$

Тогда наше уравнение:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha}-\tilde{u}_{\beta\beta}+\tilde{F}(\alpha,\beta,\tilde{u},\nabla_{\alpha\beta}\tilde{u})=0-\text{ I каноническая форма}$$

б) Если $a(x,y)\equiv c(x,y)\equiv 0\ \ \forall\,(x,y)\in U(x^\circ,y^\circ)$, то $b\neq 0$, иначе уравнение в нуле функции в - не второго порядка.
Уравнение имеет II каноническую форму, преобразование в I - выше.

в) Если $a(x^0,y^0)=c(x^0,y^0)=0$, но в любой окрестности $W(x^0,y^0)$ есть точки, где

$$|a(x^*,y^*)|+|c(x^*,y^*)|>0,$$

то заменим $\xi=x+y,\eta=x-y$, и получим случай а.