

Уравнения математической физики

Билеты к экзамену. Поток В.И. Зубова

10 августа 2021 г. 14:46

Конспект подготовлен на основе лекций В.И. Зубова и подготовленных билетов Павла Останина и Михаила Христиненко. Полный список авторов приведён в конце.

Опечатки исправлять здесь: github.com/batmaev/umf-exam-questions

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду | 6 |
| | Приведение к каноническому виду в точке из \mathbb{R}^n | 6 |
| | Классификация уравнений | 7 |
| | Приведение к каноническому виду в области из \mathbb{R}^2 | 7 |
| | Гиперболический случай | 8 |
| | Параболический случай | 9 |
| | Эллиптический случай | 10 |
| | Формальный вид уравнения характеристик | 10 |
| 2 | Задача Коши в \mathbb{R}^n | 11 |
| | Постановка | 11 |
| | Характеристическая поверхность | 13 |
| | Понятие о корректности | 14 |
| | Пример Адамара | 15 |
| 3 | Задача Коши для колебаний струны | 16 |
| | Формула Даламбера | 16 |
| | Существование и единственность классического решения | 16 |
| | Область зависимости от начальных данных | 16 |
| | Корректность | 17 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 4 | Полубесконечная струна с закреплённым концом | 18 |
| | Формулировка | 18 |
| | Общее решение | 18 |
| | Условия согласования | 19 |
| | Метод продолжений | 19 |
| 5 | Однородное волновое уравнение в \mathbb{R}^3 | 21 |
| | Формула Пуассона-Кирхгофа | 22 |
| 6 | Неоднородное волновое уравнение в \mathbb{R}^3 | 25 |
| | Метод Дюамеля | 25 |
| | Запаздывающий потенциал | 26 |
| | Общая формула Кирхгофа | 27 |
| | Принцип Гюйгенса | 27 |
| 7 | Волновое уравнение в \mathbb{R}^2 | 28 |
| | Метод спуска | 28 |
| | Формула Пуассона | 29 |
| | Диффузия волн | 29 |
| 8 | Теорема единственности для волнового уравнения | 30 |
| | Интеграл энергии | 31 |
| 9 | Уравнение теплопроводности в \mathbb{R}^1 | 32 |
| | Наводящие соображения | 32 |
| | Фундаментальное решение | 35 |
| | Формула Пуассона | 35 |
| | Свойства решения | 35 |
| 10 | Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в \mathbb{R}^n. Метод Дюамеля. Существование классического решения. | 38 |
| 11 | Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$ (без доказательства) | 42 |
| 12 | Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теп- | |

| | |
|--|-----------|
| лопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения. | 46 |
| 13 Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения. | 53 |
| Формулировка задачи | 53 |
| Теорема единственности | 53 |
| Обоснование метода | 55 |
| 14 Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости. | 58 |
| Формулы Грина | 58 |
| Формулы Грина | 58 |
| Первая формула Грина | 59 |
| Вторая формула Грина | 59 |
| Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона | 59 |
| Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона | 60 |
| 15 Симметричность и положительная определенность оператора $-\Delta$ при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций. | 61 |
| 16 Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции. | 63 |
| Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. | 63 |
| Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции. | 64 |
| 17 Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. | 67 |
| Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. | 67 |
| Фундаментальное решение уравнения Лапласа. | 68 |

| | |
|--|----|
| 18 Свойства гармонических функций в \mathbb{R}^3 : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем. | 71 |
| 19 Билет 19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции | 73 |
| Теорема (принцип максимума) | 73 |
| Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона | 75 |
| Теорема единственности | 75 |
| 20 Функция Грина для задачи Дирихле (случай \mathbb{R}^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре | 76 |
| Функция Грина | 76 |
| Функция Грина для шара | 77 |
| Формула Пуассона в шаре | 78 |
| 21 Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3) | 79 |
| Формулировка теоремы | 79 |
| Доказательство при $\mu \geq 0$ | 79 |
| Доказательство при $\mu < 0$ | 80 |
| 22 Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3) | 81 |
| 23 Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай \mathbb{R}^3). | 83 |
| 24 Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами. | 87 |
| 25 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$. | 90 |
| 26 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае. | 92 |
| Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром | 93 |

| | | |
|----|---|-----|
| 27 | Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и поллярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел. | 95 |
| 28 | Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал. | 99 |
| 29 | Понятие области с границей C^2 . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в \mathbb{R}^3 | 101 |
| 30 | Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность | 105 |
| 31 | Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Формула скачка для нормальной производной | 110 |
| 32 | Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач | 114 |
| | Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа | 114 |
| | Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа | 115 |

Билет 1. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) 2 порядка в \mathbb{R}^n с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду на плоскости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ДУЧП 2 порядка с линейной старшей частью:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0; \quad u(x) \in C^2(\Omega); \quad a_{ij}(x) \in C(\Omega)$$

Считаем $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, что не сужает класса, т.к. $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$. Хотим сделать замену так, чтобы все смешанные частные производные обратились в 0. В точке это сделать можно.

Возьмём преобразование

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \in C^2(U(x^0)), \quad y^0 = y(x^0); \quad U(x^0) \rightarrow V(y^0)$$

(диффеоморфизм класса C^2 окрестности $U(x^0)$ на $V(y^0)$)

Будем предполагать \exists обратного: $x = x(y)$. Наша функция: $u = u(x_1 \dots x_n)$.

Введём $\hat{u}(y) := u[x(y)] \in C^2(V(y^0))$. Производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{уйдёт в } \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u})}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0 \\ \sum_{k,l=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right] \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0, \\ \hat{a}_{kl}(y) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Введём матрицы: $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|_{i,j=1}^n$; $\hat{A}(y^0) = \|\hat{a}_{ij}(y^0)\|_{i,j=1}^n$.

$J(x^0) = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{i,j=1}^n$ – в малой $U(x^0)$ задаёт преобразование $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0)$

$A = A^T \Rightarrow \hat{A}^T = \hat{A}$. Вопрос в выборе J такого, что \hat{A} диагональна.

Пусть в \mathbb{R}^n заданы элемент h и квадратичная форма $\Phi(h)$.

Введём 2 базиса: $\begin{pmatrix} e_1 \dots e_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{pmatrix}$ В них $h \sim \begin{matrix} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T \\ \eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T \end{matrix}$; $\Phi \sim \begin{matrix} \|c_{ij}\| \\ \|\hat{c}_{ij}\| \end{matrix}$; $\Phi(h) = \begin{matrix} \xi^T c \xi \\ \eta^T \hat{c} \eta \end{matrix}$

Пусть $\xi = S\eta$. Тогда $\Phi(h) = \eta^T S^T C S \eta = \eta^T \hat{C} \eta \rightarrow \hat{c} = S^T C S$.

Существует такой базис, что

$$\hat{C} = \text{diag}(\underbrace{+1, +1 \dots +1}_{p \text{ штук}}, \underbrace{-1, -1 \dots -1}_{q \text{ штук}}, 0, 0 \dots 0)$$

$$\Phi(h) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2$$

В равенстве $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0)$ нужно взять $J(x^0) = S^T$

Такие преобразования существуют, их много. Например, $y = y^0 + J(x^0)(x - x^0)$

В этих переменных уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+q}^2} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0.$$

Классификация уравнений

1. *Эллиптический тип*: $p = n$ или $q = n$
2. *Ультрагиперболический тип*: $p + q = n$
3. *Гиперболический тип*: $p = 1, q = n - 1$
4. *Ультрапараболический тип*: $p + q < n$
5. *Параболический тип*: $q = 0, p = n - 1$

Замечание. $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J^T(x^0) \Rightarrow \text{sign} \left| \hat{A}(y^0) \right| = \text{sign} |A(x^0)|$

В случае $n = 2$ тип уравнения в точке определяется по знаку определителя:

1. *Эллиптический*: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \hat{A}(y^0) \right| = 1$
2. *Гиперболический*: $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \hat{A}(y^0) \right| = -1$
3. *Параболический*: $\left| \hat{A}(y^0) \right| = 0$.

Приведение уравнения 2 порядка к каноническому виду на плоскости

Рассмотрим в \mathbb{R}^2 уравнение $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, \nabla u) = 0$

Для определения в точке используем $d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Введём преобразование $y = y(x) = \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$ — диффеоморфизм класса C^2 .

В новых координатах $\hat{a}(\xi, \eta) \hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{b}(\xi, \eta) \hat{u}_{\xi\eta} + \hat{c}(\xi, \eta) \hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$

$$\hat{A}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = JAJ^T; \quad J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

Гиперболический случай

Выбираем $(x_0, y_0) \in \Omega$, пусть $d(x_0, y_0) = ac - b^2 < 0$. В силу непрерывности есть $U_\varepsilon(x_0, y_0)$, где $d < 0$.

Во всех точках этой окрестности тип — гиперболический.

Определение 1.1. *Второй канонический тип:* $\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0$, то есть $\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv 0 \quad \forall \xi, \eta \in V(\xi^\circ, \eta^\circ)$.

Введём переменную w , которая обозначает либо ξ , либо η .

Запишем *характеристическое уравнение*:

$$a(x, y)w_x^2 + 2b(x, y)w_xw_y + c(x, y)w_y^2 = 0,$$

(При $w = \xi$ это выражение равно \hat{a}_{11} , а при $w = \eta$ оно равно \hat{a}_{22})

От решений хотим $\text{grad } w \neq 0$, так как если $\nabla\eta = 0$ или $\nabla\xi = 0$, то $J = 0$.

Замечание. $w(x) = 0$ — характеристическая $\Rightarrow \tilde{w}(x) = w(x) - c = 0$ — также характеристическая: $\tilde{c} \in C^2$, $\nabla\tilde{w} \neq 0$, \tilde{w} — удовлетворяет характеристическому уравнению.

Определение 1.2. Переменные ξ, η — *характеристические*; поверхности $\xi = C_1$, $\eta = C_2$ — *характеристические*.

а) Пусть $a(x^\circ, y^\circ) \neq 0$, для $c(x^\circ, y^\circ) \neq 0$ рассуждения такие же.

В окрестности, где $a(x, y) \neq 0$, делим:

$$w_x^2 + \frac{2b}{a}w_xw_y + \frac{c}{a}w_y^2 = \left(w_x + \frac{b}{a}w_y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}w_y = [w_x + \lambda_+(x, y)w_y] \cdot [w_x + \lambda_-w_y] = 0,$$

где введены обозначения $\lambda_\pm = \frac{1}{a}(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$; верно, что $\lambda_- \neq \lambda_+ \quad \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x^\circ, y^\circ)$, так как $d = ac - b^2 < 0$.

Рассмотрим ЛДУЧП 1-го порядка $w_x + \lambda(x, y)w_y = 0$.

Из теории: у однородного ДУЧП $a_1(x, y)w_x + a_2(x, y)w_y = 0$ при условии $a_1^2 + a_2^2 > 0$ решение есть:

$$\exists w(x, y) \in C^2(\Omega), \quad \nabla w \neq 0 \text{ и } \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} - \text{первый интеграл}$$

В нашем случае $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda} \Leftrightarrow dy - \lambda dx = 0$ — ПИ этого уравнения даёт решение исходного ДУЧП.

Значит, в обеих скобках есть по решению, причём $\nabla w \neq 0$.

Покажем невырожденность:

$$\begin{cases} \xi_x + \lambda_+ \xi_y = 0, \\ \eta_x + \lambda_- \eta_y = 0. \end{cases}$$

$$|J(x^\circ, y^\circ)| = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda_+ \xi_y & \xi_y \\ -\lambda_- \eta_y & \eta_y \end{pmatrix} = \underbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}_{\neq 0 \text{ в силу гиперболичности}} \cdot \xi_y \eta_y \neq 0$$

(если $\xi_y = 0$, то $\xi_x = 0 \Rightarrow \nabla \xi = 0$)

Итак, $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ - диффеоморфизм класса C^2 . Он зануляет \hat{a} и \hat{c} . Получается уравнение во второй канонической форме.

Замечание. От II канонической форме к I:

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\underbrace{\xi + \eta}_\alpha, \underbrace{\xi - \eta}_\beta), \quad \hat{u}_\xi = \tilde{u}_\alpha + \tilde{u}_\beta, \quad u_{\xi\eta} = \tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta}$$

Тогда наше уравнение:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} + \tilde{F}(\alpha, \beta, \tilde{u}, \nabla_{\alpha\beta} \tilde{u}) = 0 - \text{ I каноническая форма}$$

б) Если $a(x, y) \equiv c(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^\circ, y^\circ)$, то $b \neq 0$, иначе уравнение в нуле функции b – не второго порядка.

То есть уравнение уже имеет II каноническую форму, преобразование в I – выше.

в) Если $a(x^0, y^0) = c(x^0, y^0) = 0$, но в любой окрестности $W(x^0, y^0)$ есть точки, где

$$|a(x^*, y^*)| + |c(x^*, y^*)| > 0,$$

то заменим $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ и получим случай а.

Параболический случай

Пусть в точке и некоторой ее окрестности тип параболический, то есть $d = ac - b^2 = 0$, причем $\forall (x, y) \in U(x^0, y^0) \hookrightarrow a^2 + c^2 \neq 0$. Уравнение характеристик:

$$aw_x^2 + 2bw_x w_y + cw_y^2 = 0 \Rightarrow (w_x + \lambda w_y)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_+ + \lambda_- = \frac{b}{a}$$

Находим решение $w = \eta(x, y) \in C^2(U(x^0, y^0)) : \nabla w(x, y) \neq 0$.

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) & \text{эту берем произвольно, чтобы был диффеоморфизм} \\ \eta = \eta(x, y) & \text{эту построили. Доказательство того, что всегда можно выбрать, опущено} \end{cases}$$

Мы взяли ξ такое, что $\hat{c} \equiv 0$. Покажем, что и $\hat{b} \equiv 0$:

$$\hat{A} = JAJ^\top \Rightarrow |\hat{A}| = |J|^2 \cdot |A| = |J|^2(ac - b^2) = 0 = \underbrace{\hat{a}\hat{c}}_{=0} - \hat{b}^2 \Rightarrow \hat{b} = 0$$

Пришли к

$$\hat{a}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi, \eta}\hat{u}) = 0$$

$\hat{a} \neq 0$, иначе 1 порядок, а обратная замена дает второй порядок

Эллиптический случай

$$d(x, y) = ac - b^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^0, y^0)$$

Во всех точках окрестности выполнено $a \neq 0$ и $c \neq 0$, иначе было бы $d = -b^2 \leq 0$.
Характеристическое уравнение:

$$[w_x + \lambda_+ w_y][w_x + \lambda_- w_y] = 0,$$

где $\lambda_{\pm} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \mu \pm i\nu$; $\mu, \nu \in C^2$. При этом для функций λ_+, λ_- известно $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$.

Получилось два линейных ДУЧП первого порядка: $w_x \pm \lambda_{\pm} w_y = 0$

Представим $w = \xi \pm i\eta \Rightarrow (\xi \pm i\eta)_x + (\mu \pm i\nu)(\xi \pm i\eta)_y = 0$

$$\begin{cases} \text{Re : } \xi_x + \mu\xi_y - \nu\eta_y = 0 \\ \text{Im : } \eta_x + \nu\xi_y + \mu\eta_y = 0 \end{cases} \quad \text{Искомая замена} \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \in C^2,$$

Невырожденность:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-\mu\xi_y + \nu\eta_y) & \xi_y \\ (-\nu\xi_y - \mu\eta_y) & \eta_y \end{vmatrix} = \nu(\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0, \text{ т.к.}$$

- $\nu \neq 0$
- если $\eta_y = \xi_y = 0$, то в силу уравнений на действительную и мнимую части $\xi_x = \eta_x = 0 \Rightarrow \nabla w = 0$

$$aw_x^2 + 2bw_x w_y + cw_y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{\hat{a}} - \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{\hat{c}} + \underbrace{2i(a\xi_x\xi_y + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)}_{2\hat{b}} = 0$$

Откуда $\hat{a} = \hat{c}$, $\hat{b} = 0$, то есть получаем уравнение

$$\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi, \eta}\hat{u}) = 0$$

Формальный вид уравнения характеристик

$$a \, dy \, dy - 2b \, dy \, dx + c \, dx \, dx = 0$$

Оно так выглядит из $(dy - \lambda_+ dx)(dy - \lambda_- dx) = 0$, то есть

$$(dy)^2 - \underbrace{(\lambda_+ + \lambda_-)}_{2b/a} \, dx \, dy + \underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{c/a} (dx)^2 = 0$$

Билет 2. Постановка задачи Коши для уравнения 2-го порядка с частными производными в \mathbb{R}^n с линейной старшей частью. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1)$$

и поверхность $S : \omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n) = 0$, $\omega \in C^2(\Omega)$ и $\text{grad}(\omega) \neq 0$ на Ω (нет особых точек). На поверхности задано гладкое некасательное поле $\vec{\nu} = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$, $\langle \vec{\nu}, \vec{n} \rangle \neq 0$.

Определение 2.1 (Задача Коши). В $U(x^0) \subset \Omega$, $x^0 \in S$, найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет двум условиям:

1. $u(x)|_{S \cap U(x^0)} = u_0(x)$
2. $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{S \cap U(x^0)} = u_1(x)$ – выводящая производная

Здесь введена производная по направлению: $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = (\vec{\nu}, \nabla u) = \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$

Может не быть непрерывной зависимости от начальных данных. Функции u_0, u_1 произвольно брать, вообще говоря, нельзя.

Далее определим характеристическую поверхность.

Пусть S – гиперплоскость $x_n = 0$. Нормаль $\vec{n} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$,
 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{n-1})$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_n} = u_1(x_1, \dots, x_{n-1})$

Мы знаем значения функции на гиперплоскости.

Знаем градиент:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array} \right\} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right\} = u_1$$

Мы знаем и вторые производные: берём указанные сверху производные и дифференцируем вдоль поверхности, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Не нашли только $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}$. До этого мы вообще еще не использовали уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} [a_{nj} u_{x_n x_j} + a_{jn} u_{x_j x_n}] + \underbrace{a_{nn} u_{x_n x_n}}_{\text{только это слагаемое еще не определено}} + F(x, u, \nabla u) = 0$$

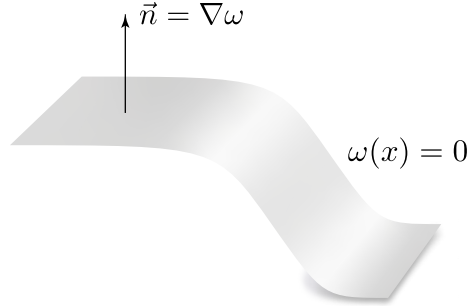
Если $a_{nn}(x) = 0$ на нашей гиперплоскости, то эту гиперплоскость назовём **характеристической**. На характеристической гиперплоскости полученное уравнение задаёт функциональную связь u_0 и u_1 – эта связь называется **условием совместности**.

Теперь переходим к произвольной поверхности: заменим координаты так, чтобы локально поверхность была гиперплоскостью:

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_n = \omega(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

\Rightarrow после преобразования $\omega = 0 \Leftrightarrow y_n = 0$.

Найдём это преобразование: возьмем $\vec{n} = \nabla \omega(x_0)$.



Дополним \vec{n} до базиса – получим $\langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{n} \rangle$. Ортогонализуем – получим $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{n} \rangle$. Возьмем такое преобразование:

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{cases} y_1 = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_{n-1} \\ y_n = \omega(\vec{x}) \end{cases}$$

Проверим, что якобиан не равен 0:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{n-1}^T) & \dots & (e_{n-1}^T) \\ (\nabla \omega(x)^T) & \dots & (\nabla \omega(x)^T) \end{vmatrix} \stackrel{x=x_0}{=} \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_{n-1}^T) & \dots & (e_{n-1}^T) \\ (n^T) & \dots & (n^T) \end{vmatrix}$$

Строки матрицы – компоненты ОНБ $\Rightarrow J(x_0) \neq 0$.

Из соображений непрерывности $J \neq 0$ также в некоторой окрестности точки x_0 .

Значит, это диффеоморфизм класса C^2 .

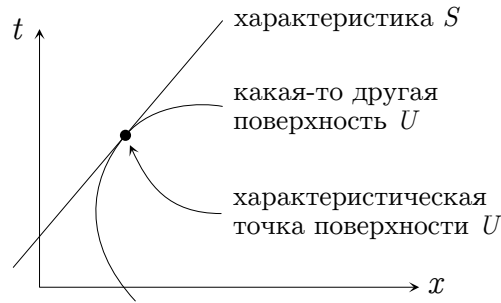
В новых переменных: $\sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0$

Условие характеристичности: $0 = \hat{a}_{nn} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[x(y)] \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j}$, где $y_n(x) \equiv \omega(x)$

Определение 2.2 (Характеристическая точка). Пусть дважды гладкая поверхность U задана уравнением $\omega(x) = 0$. ($\omega \in C^2$; во всех точках $\nabla \omega \neq 0$).

Тогда точка $x_0 \in U$ называется характеристической, если в этой точке $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} = 0$

Определение 2.3 (Характеристическая поверхность). Дважды гладкая поверхность S называется **характеристикой**, если все её точки характеристические.



Пример 2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. S – прямая $x = y$, $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{u_x}{\sqrt{2}} + \frac{u_y}{\sqrt{2}} = u_1$

Производная $\frac{du_1}{d\vec{l}} = \left(\vec{l}, \nabla \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] = 0$.

Значит, любую функцию на S задать нельзя; прямая $x = y$ – характеристика.

Пример 2.2. $u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ (волновое уравнение).

Характеристическое уравнение: $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 (\text{grad } \omega)^2 = 0$

Этому уравнению удовлетворяет $\omega(t, x) = \underbrace{a^2 t^2 - \vec{x}^2}_{\text{конус}} = 0$.

Пример 2.3. $u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$ (уравнение теплопроводности).

Характеристическое уравнение: $-a^2 [\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

Так как $\nabla \omega \neq 0$, мы требуем $\omega_t \neq 0$.

Подходит $\omega(t, x) = t - C = 0 \Rightarrow$ характеристики — это гиперплоскости $t = C$

Пример 2.4. $\Delta u(x) = f(x)$ (ур-е Пуассона), $x \in \mathbb{R}^n$;

Характеристическое уравнение: $a^2[\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

А мы требовали $\nabla \omega \neq 0 \Rightarrow$ у уравнения эллиптического типа нет характеристик.

Функция $u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ называется **вещественно-аналитической** в \vec{x}_0 , если в некоторой $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ она представима в виде

$$u(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| > 0} u_\alpha (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha,$$

где α – мультииндекс, $u_\alpha \in \mathbb{R}$, $(\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$

Теорема 2.1 (Ковалевской). Пусть в уравнении $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0$:

- все $a_{ij}(\vec{x})$ вещественно-аналитические в \vec{x}_0
- $F(\vec{x}, u, \nabla u)$ – вещественно-аналитическая в $(\vec{x}_0, u_0(\vec{x}_0), \nabla u(\vec{x}_0))$ соответственно
- $\omega(\vec{x})$ вещественно-аналитическая в \vec{x}_0
- \vec{x}_0 – не характеристическая точка поверхности
- u_0, u_1 – вещественно-аналитические в \vec{x}_0 .

Тогда:

- $\exists U_\varepsilon(\vec{x}_0)$: в ней \exists вещественно-аналитическое решение Задачи Коши (ЗК)
- оно единственно в классе вещественно-аналитических функций.

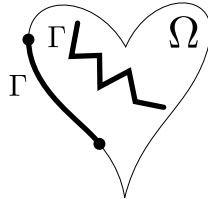
Понятие о корректности

Рассмотрим абстрактную дифференциальную задачу:

$$\begin{cases} L(\vec{x}, D)u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ B_j(\vec{x}, D)u(\vec{x}) = g_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad j \in \overline{1, m}, \end{cases} \quad (*)$$

L – линейный дифференциальный оператор порядка p

B_j – конечное семейство линейных дифференциальных операторов в $\Gamma \subset \bar{\Omega}$.



Определение 2.4. Пусть $F(\Omega)$ и $U(\Omega)$ – линейные нормированные пространства функций (ЛНП) на Ω , $G_1(\Gamma), \dots, G_m(\Gamma)$ – ЛНП на Γ .

Тогда если $\forall f(\vec{x}) \in F(\Omega), \forall g_j(\vec{x}) \in G_j(\Gamma)$ решение краевой задачи (*) существует, единственно в $U(\Omega)$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{U(\Omega)} \leq C\|f\|_{F(\Omega)} + \sum_{j=1}^m c_j \|g_j\|_{G_j(\Gamma)} \quad (**)$$

то задача корректна по отношению к выбранному набору пространств.

Пример 2.5 (Адамара). Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = u_0(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \Rightarrow 0 \text{ вместе со своими производными} \\ u_y|_{y=0} = u_1(x) \equiv 0 \end{cases}$$

При $u_0 = 0 \hookrightarrow u \equiv 0$. Если задача корректна, то при увеличении n решения должны $\rightarrow 0$.

Функции $u_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{ch} ny$ – решения.

Но $u_n(0, y^*) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch} ny^* > \frac{1}{2} e^{-\sqrt{n}} e^{ny^*} \rightarrow \infty$

Неравенство (**) не выполнено.

Билет 3. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения от начальных данных. Существование и единственность классического решения. Корректность постановки задачи.

• Задача:
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad -l < x < l$$

Что понимать под решением задачи?

Определение 3.1. Классическое решение – функция класса C^2 , которая в точках указанной области удовлетворяет уравнению и заданным соотношениям.

• **Характеристическое уравнение:** $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + at = C_1 \\ x - at = C_2 \end{cases}$$

В новых координатах $\hat{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \hat{u} = f(\xi) + g(\eta)$.

Возвращаясь обратно, получим $u(t, x) = f(x + at) + g(x - at)$.

• Решим ЗК (поверхности нигде не касаются характеристик – задача должна быть корректной):

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = f(x) + g(x) &= u_0(x), & -l < x < l \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) &= u_1(x), & -l < x < l \end{aligned} \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{-l}^x u_1(z) dz + C = \frac{1}{a} V_1(x)$$

\Downarrow

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}V_1(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}V_1(x) \end{cases} \quad (-l < x < l) \quad (*)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}u_0(x + at) + \frac{1}{2a}V_1(x + at) + \frac{1}{2}u_0(x - at) - \frac{1}{2a}V_1(x - at) =$$

$$= \boxed{\frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(x) dx} - \text{формула Даламбера}$$

Решение определяется единственным образом.

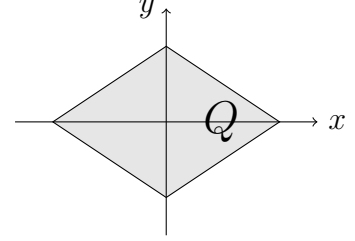
Если требуется определить максимальную область, где можно написать решение, то обратимся к формулам (*). Функции u_0 и V определены лишь на $(-l; l) \Rightarrow$ искомая область:

$$\begin{cases} -l < x + at < l \\ -l < x - at < l \end{cases} \quad - \text{характеристический четырехугольник } Q.$$

Нами доказана теорема:

Теорема 3.1. Пусть $\begin{cases} u_0(x) \in C^2(-l; l) \\ u_1(x) \in C^1(-l; l) \end{cases}$. Тогда ЗК имеет в Q

единственное решение $u(t, x) \in C^2(Q)$ – классическое. Оно дается формулой Даламбера.



Корректность задачи для уравнения малых колебаний струны:

- нами проверены существование и единственность классического решения.
- покажем непрерывность решения по входным данным u_0 и u_1 .
Берем две задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases}$$

Пусть $|u_0 - u_0| < \delta_0$, $|u_1 - u_1| < \delta_1 \quad \forall x: |x| < l$. Введем $\begin{cases} v_0 = u_0 - u_0 \\ v_1 = u_1 - u_1 \\ v = u - u \end{cases}$

Тогда задача для v : $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ v|_{t=0} = v_0(x), & |x| < l, |v_0| < \delta_0 \\ v_t|_{t=0} = v_1(x), & |x| < l, |v_1| < \delta_1 \end{cases}$

Согласно формуле Даламбера,

$$|v(t, x)| = \left| \frac{v_0(x + at) + v_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(y) dy \right| \leq \delta_0 + \delta_1 t \quad \forall (t, x) \in Q$$

- Если l конечно, то $t \leq \frac{l}{a}$ из вида четырёхугольника Q . Устремляя $\delta_0, \delta_1 \rightarrow 0$, получим $|v| \rightarrow 0$.
- Если $l = \infty$: в любой конечной полосе $t \leq T < \infty$ требуемое верно.
Так замечаем всю плоскость.

Билет 4. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закрепленным концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения.

Формулировка

Задача (называется *начально-краевой* или *смешанной*)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & \text{по сравнению с задачей Коши это дополнительное граничное условие} \end{cases} \quad (2)$$

Замечание. Физический смысл: смотрим, как волна отражается от закрепленного конца

Предполагаем, что

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2[0, +\infty) \\ u_1(x) \in C^1[0, +\infty) \end{cases}$$

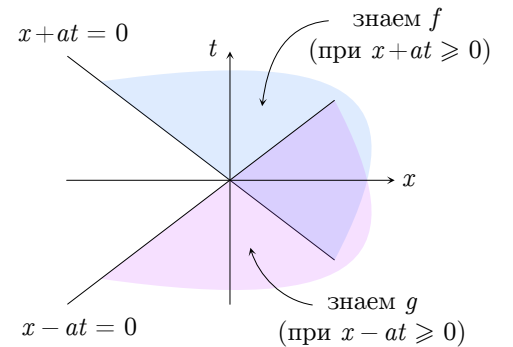
Общее решение

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x + at) + g(x - at) \\ \begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Если ввести обозначение $v_1 = \int_0^x u_1(y) dy + C$, то при $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}v_1(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}v_1(x) \end{aligned}$$

Граничные условия нужны для определения u в $(x \geq 0) \cap (t \geq 0)$ (в смысле пересечения областей). Их не обязательно ставить на $x = 0$, можно на $x + \alpha t = 0$, $-a < \alpha < a$, то есть там, где известна только одна из функций, а не обе.

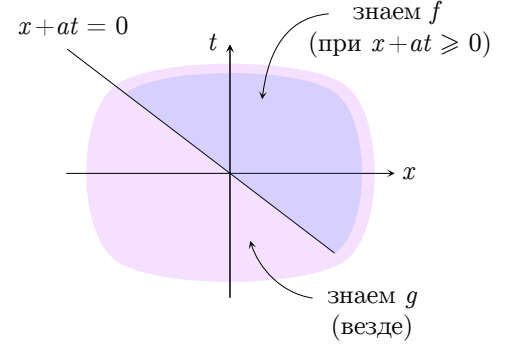


$$u|_{x=0} = f(at) + g(-at) = 0, \quad t \geq 0$$

Введем $\xi = -at, \xi \leq 0$, тогда $g(\xi) = -f(-\xi)$ и суммарно:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(\xi) - \frac{1}{2a}v_1(\xi), & \xi \geq 0 \\ -\frac{1}{2}u_0(-\xi) - \frac{1}{2a}v_1(-\xi), & \xi \leq 0 \end{cases}$$

Теперь g известна везде, решение найдено при $x + at > 0$, то есть даже в большей области, чем мы хотели.



Условия согласования

Чтобы $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$, решения необходимо «сшить»

$$\begin{aligned} g(+0) &= g(-0) \\ g'(+0) &= g'(-0) \\ g''(+0) &= g''(-0) \end{aligned}$$

Распишем эти условия:

$$\begin{aligned} g(+0) = g(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} = -\frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} &\Rightarrow u_0(0) = 0 \\ g'(+0) = g'(-0) &\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}u_0'(0)} - \frac{1}{2a}u_1(0) = \cancel{\frac{1}{2}u_0'(0)} + \frac{1}{2a}u_1(0) &\Rightarrow u_1(0) = 0 \\ g''(+0) = g''(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) = -\frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) &\Rightarrow u_0''(0) = 0 \end{aligned}$$

Определение 4.1 (условия согласования). Эти условия называются условиями согласования (начальных и граничных условий)

При их выполнении решение будет классическим. Если $u_0(0) \neq 0$, то даже обобщенного решения не будет.

Метод продолжений

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \geq at\} \\ \frac{u_0(at + x) - u_0(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \leq at\} \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 4.1. Пусть в смешанной задаче 2 функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что

- Выполнено условие гладкости: $u_0(x) \in C^2[0, +\infty)$, $u_1(x) \in C^1[0, +\infty)$
- Выполнено условие согласования: $u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0$

Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение $u(t, x) \in \mathbb{C}^2(t \geq 0, x \geq 0)$, представленное в 3

Доказательство. Используем метод продолжений. Для задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Введем

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \hat{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} - a^2 \hat{u}_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}_t|_{t=0} = \hat{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad - \text{ свели к задаче Коши}$$

Решение дается формулой Даламбера:

$$\hat{u}(t, x) = \frac{\hat{u}_0(x + at) + \hat{u}_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy$$

Покажем нечетность по x :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, -x) &= \frac{\hat{u}_0(-x + at) + \hat{u}_0(-x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \hat{u}_1(y) dy = \frac{\hat{u}_0(x - at) + \hat{u}_0(x + at)}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy = -\hat{u}(t, x) \end{aligned}$$

$$\hat{u}(t, 0) = \underbrace{\frac{\hat{u}_0(-at) + \hat{u}_0(at)}{2}}_{=0} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \hat{u}_1(y) dy = 0$$

□

Билет 5. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 . Существование классического решения этой задачи.

Теорема 5.1 (Из курса мат. анализа). Пусть $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_y \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченные области, $f(x, y) : \overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y)$. Тогда $J(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dx \in C(\overline{\Omega}_y)$

Если к тому же $\frac{\partial f}{\partial y_k} \in C(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y)$, то $J(y)$ имеет непрерывную на $\overline{\Omega}_y$ частную производную $\frac{\partial J(y)}{\partial y_k}$, которая равна $\int_{\Omega_x} \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y) dx$.

Обозначим (τ - вспомогательный параметр)

$$u_g(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} g(\xi, \tau) dS_\xi, \quad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3$$

Лемма 5.2. Пусть $g(\xi, \tau)$ такая, что

1. $g \in C\{\xi \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\}$
2. $D_\xi^\alpha g(\xi, \tau) \in C\{\xi \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\} \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq p$.

Тогда

1. $D_{t,x}^\alpha u_g(t, x, \tau) \in C\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\} \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq p$
2. $\lim_{t \rightarrow +0} u_g(t, x, \tau) = 0$
3. При $p \geq 1 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = g(x, \tau)$

Доказательство. Докажем отдельно все три утверждения.

1. Сведем интеграл к интегралу по единичной сфере с центром в нуле с помощью такой замены:

$$\eta = \frac{\xi - x}{at} \Rightarrow \xi = x + at\eta, \quad |\vec{\eta}| = 1.$$

В таком случае элемент площади $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$. Во введенном выше интеграле получим

$$u_g(t, x, \tau) = \frac{(at)^2}{4\pi a^2 t} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta = t J_g(t, x, \tau),$$

$$\text{где } J_g(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta$$

Теперь интеграл уже по фиксированному множеству. Все выкладки справедливы при $t > 0$. Функция

$$\bar{g}(t, x, \eta, \tau) = g(x + at\eta, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, |\eta| = 1, \tau \geq 0\}.$$

Тогда по теореме из начала билета $J_g(t, x, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\}$.

Аналогично будет для производных в силу второй части той же теоремы и наличия соответствующих производных у функции g .

2. $\lim_{t \rightarrow +0} U_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t J_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) = 0$ (последний предел конечен в силу непрерывности).

Можно записать

$$U_g(t, x, \tau) = \begin{cases} u_g(t, x, \tau), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in C(\bar{\Omega}),$$

где последнее включение означает непрерывные в области и непрерывно продолжимые на границу функции.

3. При $p \geq 1$ запишем следующее:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} u_g(t, x, \tau) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} [t J_g(t, x, \tau)] = \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) + \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_g(t, x, \tau) = \\ &= J_g(0, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta \Big|_{t=0} = g(x, \tau) \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} dS_\eta = g(x, \tau). \end{aligned}$$

□

Перейдем к решению задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 5.3 (Формула Пуассона-Кирхгофа). Пусть $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

является классическим решением задачи (4)

Доказательство. В силу леммы имеем $u|_{t=0} = 0$; $u_t|_{t=0} = u_1$.

Т.к. $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $u \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$, то сделаем замену переменной:

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta.$$

Осталось только проверить, что u удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \Delta_\xi u_1(x + at\eta) dS_\eta = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi.$$

При $t > 0$ (использовано $\vec{n} = \frac{\xi - x}{|\xi - x|} = \frac{\xi - x}{at} = \eta$)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(x + at\eta) \eta_k \cdot dS_\eta = \\ &= \frac{u(x, t)}{t} + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(\xi) n_k(\xi) \cdot dS_\eta = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}(\xi) \cdot dS_\xi = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} I \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \iiint_{|\xi-x|<at} \operatorname{div}(\nabla u_1) d\xi = \oint_{|\xi-x|=at} (\nabla u_1, \vec{n}) dS_\xi = \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} dS_\xi = I$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \left[\oint_{|\xi-x|=\rho} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi \right] d\rho = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right] = \frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{u}{t \cdot t} + \frac{I}{4\pi at^2} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \\ &= \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi at} a \varphi(at) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi. \end{aligned}$$

Итак, $u(x, t)$ - классическое решение. □

Рассмотрим

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Введем $v(t, x)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Эту задачу мы уже решили. Так как $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, имеем $v \in C^3\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$.

Утверждение 5.4. $u(x, t) \equiv v_t(x, t) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ дает решение задачи (5).

Доказательство.

$$1. \quad u_{tt} - a^2 \Delta u = \partial_t(v_{tt} - a^2 \Delta v) = \partial_t 0 = 0$$

$$2. \quad u|_{t=0} = v_t|_{t=0} = u_0(x)$$

$$3. \quad u_t|_{t=0} = v_{tt}|_{t=0} = a^2 \Delta v|_{t=0} = 0 \text{ (на гиперплоскости } t = 0: \quad v|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right|_{t=0} \equiv 0. \text{ При этом } v_t \text{ может быть ненулевой.)}$$

□

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 5.5. Функция $u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi \right], \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{где } u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3),$

является классическим решением задачи (5).

Билет 6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 . Метод Дюамеля. Принцип Гюйгенса.

Формулировка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \text{считаем, что } f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\} \quad (6)$$

Метод Дюамеля

Сведем задачу к задаче Коши для однородного волнового уравнения. Рассмотрим однопараметрическое семейство задач:

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x w(t, x, \tau) = 0 & t > \tau; x \in \mathbb{R}^3 \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases} \quad \tau \geq 0 \quad (7)$$

Решение задач семейства получаем по формуле Пуассона-Кирхгофа:

$$w(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \iint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \in C_{t,x,\tau}^{2,2,0} \{t - \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

(Под $C_{t,x,\tau}^{2,2,0}$ подразумевается, что $D_{t,x}^\alpha w(t, x, \tau) \in C \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq 2$)

Утверждение 6.1.

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \tau) d\tau \text{ — классическое решение исходной задачи.}$$

Доказательство.

- $u(t, x) \in C^2 \{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$
- $u|_{t=0} = 0$
- Вычислим $u_t|_{t=0}$

Интегралы, в которых и пределы, и подынтегральная функция зависят от параметра, дифференцируются по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = f(t, b(t)) \cdot b' - f(t, a(t)) \cdot a' + \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(t, x) dx$$

В нашем случае $a = 0$, $b = t$, $b' = 1$. Поэтому

$$u_t|_{t=0} = \left(\underbrace{w(t, x, \tau)|_{\tau=t}}_{= 0 \text{ из нач. усл. в (7)}} + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \right) \Big|_{t=0} = \int_0^0 \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = 0$$

$$\bullet \quad \Delta_x u = \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = w_t(t, x, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t w_{tt}(t, x, \tau) d\tau = f(\tau, x)|_{\tau=t} + a^2 \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau \\ &= f(t, x) + a^2 \Delta_x u \end{aligned}$$

Значит, рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению. □

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.2. Пусть в задаче (6) функция $f(t, x)$ такова, что $D_x^\alpha f \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$. Тогда функция

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \left[\oint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \right] d\tau \quad (8)$$

является классическим решением, причем

$$D_{t,x}^\alpha u \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Суть метода Дюамеля: $f(t, x)$ — это начальные данные в каждый момент времени.

Запаздывающий потенциал

Преобразуем формулу (8):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi a^2(t - \tau)} \oint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi &= \left[\begin{array}{l} \rho = a(t - \tau) \\ \tau = t - \rho/a \\ d\tau = -d\rho/a \end{array} \right] = - \int_{at}^0 \frac{1}{4\pi a \rho} \frac{d\rho}{a} \oint_{|\xi - x| = \rho} f\left(t - \frac{\rho}{a}, \xi\right) dS_\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} d\rho \oint_{|\xi - x| = \rho} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dS_\xi = \boxed{\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi - x| < at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} d\xi} \end{aligned}$$

Выражение в рамке называется *запаздывающим потенциалом*.

Общая задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

Теорема 6.3 (формула Кирхгофа). Пусть в общей задаче Коши

$$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3) \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Тогда выражение

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi)}{|\xi-x|} d\xi$$

является классическим решением общей задачи Коши; $u(t, x) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$

Принцип Гюйгенса

Утверждение 6.4 (Принцип Гюйгенса). Возмущение, локализованное в пространстве (трёхмерном), приводит к действию, локализованному во времени.

Требуется, чтобы источники отсутствовали, т.е. $f \equiv 0$, а носители функций u_0 и u_1 были ограничены, откуда

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 = M \text{ — компакт}$$

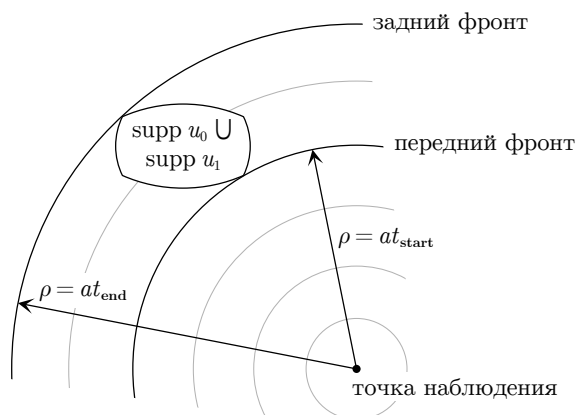
Фиксируется произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

По формуле Кирхгофа функция $u(t, x_0)$ может быть ненулевой только внутри отрезка времени

$$\text{от } t_{\text{start}} = \frac{1}{a} \cdot \inf_{y \in M} |y - x_0| \quad \text{до } t_{\text{end}} = \frac{1}{a} \cdot \sup_{y \in M} |y - x_0|$$

(иначе под интегралами тождественный нуль).

У такого конечного возмущения есть передний и задний фронт:



Значение $u(t, x_0) \sim$ интеграл по сфере радиусом $|x_0 - \xi| = \rho = at$

Билет 7. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в \mathbb{R}^2 . Метод спуска. Диффузия волн.

Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), & t > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (9)$$

Используем **метод спуска**: перейдем в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(t, x_1, x_2) \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для этой задачи решение мы уже знаем. Покажем, что оно не зависит от третьей переменной.

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2, x_3) = & \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi_1, \xi_2) dS_\xi &+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \underbrace{\iint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi}_{V(t, x)} + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi\right)}{|\xi-x|} d\xi \end{aligned}$$

Покажем, например, что функция $V(t, x)$ не зависит от x_3 . Сфера, по которой ведется интегрирование, разбивается на две полусферы, которые задаются уравнениями

$$\xi_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2} = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}$$

Интегралы по полусферам равны, поэтому $V(t, x) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \iint_{S^+} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$

Из матанализа известно, что если поверхность S задана в виде графика некоторой функции $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2) \in D$, то поверхностный интеграл можно свести к двойному по формуле

$$\iint_S u(\xi) dS_\xi = \iint_D u(\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} d\xi_1 d\xi_2$$

В нашем случае

$$\sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} = \sqrt{1 + \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}$$

Получили, что

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi'-x'|<at} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}} d\xi_1 d\xi_2$$

не зависит от третьей переменной.

Аналогично для двух других слагаемых, т. к. во всех трех под знаками интегралов или производных можно выделить интеграл вида $\oint\limits_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$, который, как показано выше, от x_3 не зависит. Доказанное можно сформулировать как теорему:

Теорема 7.1. Пусть в задаче Коши (9): $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$ Тогда функция ($d\xi = d\xi_1 d\xi_2$)

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} + \\ \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\tau, \xi) d\xi}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \right] d\tau$$

принадлежит $C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$ и является классическим решением задачи Коши (9).

Определение 7.1. *Диффузия волн* – это отсутствие принципа Гюйгенса. В \mathbb{R}^2 его нет. Есть эффект последействия: передний фронт есть, а заднего нет, так как интегралы берутся не по контурам, а по всей внутренней области.

Можно привести более наглядное доказательство. Пусть носители функций u_0, u_1 содержатся в некотором компакте M . Тогда, «погрузив» \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^3 , получим, что носитель начального возмущения – неограниченный цилиндр $\{(x_1, x_2, x_3): (x_1, x_2) \in M, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Следовательно, начальное возмущение не ограничено в пространстве, и возмущение в любой точке не ограничено во времени (у волн, созданных цилиндром, отсутствует задний фронт)

Билет 8. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая \mathbb{R}^2). Метод интеграла энергии.

Теорема 8.1. *Классическое решение ЗК для волнового уравнения в \mathbb{R}^n единственно.*

Доказательство (для случая \mathbb{R}^2). Пусть u_1 и u_2 - классические решения.

Тогда функция $v(x, y, t) = u_1 - u_2$ удовлетворяет полностью однородной задаче:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Наша цель - показать, что $v \equiv 0$ при $t \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Возьмем точку (x_0, y_0, t_0) , $t_0 > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Выпустим из этой точки характеристическую поверхность — конус:

$$w(t, x) = a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad t < t_0$$

Возьмем его часть — усечённый конус V_T с нижним основанием Σ_0 , верхним основанием Σ_T и боковой поверхностью Γ_T :



Вектор (внешней) нормали \vec{n} к этому усеченному конусу:

- на Σ_T : $\vec{n} = (1 \ 0 \ 0)^T$
- на Σ_0 : $\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)^T$
- на Γ_T : $\vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_t^2}} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_t \end{pmatrix}$

В силу уравнения характеристик $w_t^2 - a^2 w_x^2 - a^2 w_y^2 = 0$ (задаёт конус) имеем

$$n_t^2 = a^2 (n_x^2 + n_y^2)$$

$$n_t^2 + n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_t^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Функция $\psi = v_t(v_{tt} - a^2 v_{xx} - a^2 v_{yy})$ тождественно равна нулю.

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
0 &= v_t v_{tt} - a^2 v_t v_{xx} - a^2 v_t v_{yy} = \\
&= \frac{1}{2} (v_t^2)_t + a^2 v_x v_{xt} - (a^2 v_t v_x)_x + a^2 v_y v_{yt} - (a^2 v_t v_y)_y = \\
&= \frac{1}{2} (v_t^2)_t - (a v_t v_x)_x - (a v_t v_y)_y + \left(\frac{1}{2} a^2 v_x^2 \right)_t + \left(\frac{1}{2} a^2 v_y^2 \right)_t = \\
&= \left(\frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} \right)_t + (-a^2 v_t v_x)_x + (-a^2 v_t v_y)_y = \\
&= F_t^{(t)} + F_x^{(x)} + F_y^{(y)} = \operatorname{div} \vec{F},
\end{aligned}$$

где введено поле \vec{F} .

Проинтегрируем полученную дивергенцию по объему усеченного конуса:

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_{V_T} \operatorname{div} \vec{F} = \oint_{\partial V_T} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma_T} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} dS - \iint_{\Sigma_0} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2} dS + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t - 2a^2 v_t v_x n_x - 2a^2 v_t v_y n_y) dS = E(\Sigma_T) - E(\Sigma_0) + E(\Gamma_T)
\end{aligned}$$

В силу условий $v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0$ имеем $E(\Sigma_0) = 0$ (под интегралом тождественный ноль).

Тогда $E(\Sigma_T) + E(\Gamma_T) = 0$. Кроме того, $E(\Sigma_T) \geq 0$ (под интегралом сумма квадратов).

Покажем, что и $E(\Gamma_T) \geq 0$: разделим и домножим её на $n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t^2 - 2a^2 v_t v_x n_t n_x - 2a^2 v_t v_y n_t n_y) dS = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} \left(v_t^2 \overbrace{a^2 (n_x^2 + n_y^2)}^{= n_t^2} + a^2 v_x^2 n_t^2 + a^2 v_y^2 n_t^2 - 2a^2 v_t v_x n_t n_x - 2a^2 v_t v_y n_t n_y \right) dS \\
&= \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + 1} \iint_{\Gamma_T} ((v_t n_x - v_x n_t)^2 + (v_t n_y - v_y n_t)^2) dS \geq 0
\end{aligned}$$

Значит, $E(\Sigma_0) = E(\Sigma_T) = E(\Gamma_T) \equiv 0$. Из $E(\Sigma_T) \equiv 0$ получаем:

$$v_t \equiv 0, v_x \equiv 0, v_y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{const} = v|_{t=0} = 0$$

Это верно всюду внутри усеченного конуса. Заметая такими конусами всё пространство, получим, что $v \equiv 0$. \square

Билет 9. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^1 . Фундаментальное решение. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции.

$$\text{Задача: } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Наводящие соображения

На [консультации](#) 2021 года лектор сказал, что эту часть можно не учить. Поэтому можете сразу перейти к [формальному доказательству формулы Пуассона](#).

Итак, пусть для начала:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \tau = \alpha t, & \alpha > 0, \\ \xi = \beta x, & \beta > 0. \end{cases}$$

Пусть $u(t, x)$ - решение задачи. Введём $v(\tau, \xi) = u\left(\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\xi}{\beta}\right)$. Тогда

$$1. \quad v|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & \frac{\xi}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \xi \geq 0 \\ 0, & \frac{\xi}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \xi < 0 \end{cases}$$

$$2. \quad v_\tau = \frac{1}{\alpha} u_t, \quad v_\xi = \frac{1}{\beta} u_x, \quad v_{\xi\xi} = \frac{1}{\beta^2} u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \alpha v_\tau = a^2 \beta^2 v_{\xi\xi}$$

Функция v в общем случае будет решением другой задачи Коши, но при $\alpha = \beta^2$ — той же самой задачи Коши. Значит, решение не единственно: если $u(t, x)$ — решение, то $\forall \beta > 0$ функция $v(t, x) = u\left(\frac{t}{\beta^2}, \frac{x}{\beta}\right)$ — тоже решение.

Определение 9.1. Множество преобразований $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ — *однопараметрическая группа преобразований*, если:

- Это множество замкнуто относительно операции композиции:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{D} \quad \exists! \gamma \in \mathcal{D}: \quad u_\alpha \circ u_\beta = u_\gamma$$

- Оно содержит нейтральный элемент — тождественное преобразование:

$$\exists! o \in \mathcal{D} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad u_o \circ u_\alpha = u_\alpha \circ u_o = u_\alpha)$$

- У каждого элемента есть обратный, и их композиция в любом порядке даёт тождественное преобразование.

Определение 9.2. Функция $I(x)$ — инвариант однопараметрической группы преобразований, если $\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad I(x) \equiv I(u_\alpha(x))$

Определение 9.3. Говорят, что уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований, если все преобразования группы переводят решения этого уравнения в решения.¹

Определение 9.4. Решение уравнения называется *автомодельным*, если оно зависит только от инвариантов некоторой допустимой группы преобразований.

Пример 9.1. Множество преобразований

$$\begin{cases} \tau = \beta^2 t, \\ \xi = \beta x \end{cases}$$

есть однопараметрическая группа преобразований, $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ — инвариант группы.

Найдём автомодельное решение $u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = f(z)$.

В этом случае:

$$u_t = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{-x}{2t^{3/2}}\right) \quad u_x = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad u_{xx} = f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2t\sqrt{t}} f'(z) &= a^2 f''(z) \cdot \frac{1}{t} \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= -\frac{1}{a^2} \frac{x}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2a^2} z \\ \ln |f'(z)| &= -\frac{z^2}{4a^2} + \tilde{C}_1 \end{aligned}$$

Получили, что $f(z) = C_1 \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta + C_2$

Задача была следующей: бесконечный стержень разделён на две половины, начальные температуры половин $T_0 = 0$ и $T_1 = 1$. Из физических соображений:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta = C_1^{-1} = 2a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\frac{\eta}{2a}}_{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}}$$

¹В прошлых версиях файла определение гласило, что уравнение допускает группу преобразований, если оно инвариантно относительно всех преобразований группы. Но непонятно, что подразумевается под инвариантностью *уравнения*. Новое определение же опирается на инвариантность *функций*. Оно взято с [этого сайта](#).

Окончательно:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta = \frac{2a}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu$$

Введём **интеграл ошибок**:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1, \quad \operatorname{erf}(0) = 0$$

Тогда:

$$u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4ta^2}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

1. Мы рассмотрели модельную задачу



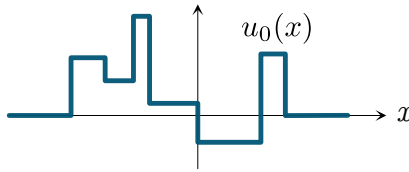
2. Увеличим ступеньку в u_* раз и сдвинем

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

3. Можем получить и решение для ступеньки конечной ширины:

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

4. Для системы из N интервалов имеем:



$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \frac{u_{*k}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

Последнее можно переписать в следующем виде:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\}}{x_{2k} - x_{1k}} \right] u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k})$$

5. Окончательно, пусть $u_0(x)$ финитна, непрерывна, ограничена. Разбиваем ее носитель $\text{supp } u_0(x)$ на отрезки, аппроксимируем кусочно постоянной. Для приближенных решений справедливо:

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \left[\Psi(t, x, \xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - \xi}{\sqrt{4a^2t}} \right), \quad \xi_k = \frac{x_{2k} - x_{1k}}{2} \right] = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\Psi(t, x, x_{2k}) - \Psi(t, x, x_{1k})}{x_{2k} - x_{1k}} \cdot u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k}) \approx \\
&\approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \right] = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi_k)^2}{4a^2t}} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) \quad \text{— Интегральная сумма Римана}
\end{aligned}$$

Предположение: решение будет

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} u_0(\xi) d\xi \quad \text{— Формула Пуассона}$$

Функция

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \quad \text{— фундаментальное решение (или функция источника)}$$

Строгое доказательство

Теорема 9.1. Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^1)$, $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$. Тогда функция

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} u_0(y) dy$$

1. Принадлежит классу $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^1) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$
2. Является классическим решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$

Доказательство.

1. В исходном интеграле для $u(t, x)$ сделаем такую замену:

$$\frac{y-x}{\sqrt{4a^2t}} = \eta, \quad y = x + \sqrt{4a^2t} \eta, \quad dy = \sqrt{4a^2t} d\eta$$

Тогда получим

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) d\eta$$

$$u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1, \eta \in \mathbb{R}^1)$$

Оценим $|e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta)| \leq M_0 e^{-\eta^2}$, причем $\int_{-\infty}^{\infty} M_0 e^{-\eta^2} d\eta$ сходится \Rightarrow исходный интеграл сходится равномерно, а значит лежит в $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$. Отсюда следует третье утверждение теоремы.

2. Возьмем

$$u_x(t, x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) dy \quad (10)$$

Выражение под интегралом лежит в $C(t > 0, x, y \in \mathbb{R}^1)$.

Пусть $x \in [-A, A]$. Покажем равномерную сходимость интеграла серией оценок:

- (a) При $|y| > A$:

$$(y-x)^2 \geq (|y| - A)^2 = y^2 + A^2 - 2\frac{|y|}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}A).$$

Поскольку $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$(y-x)^2 \geq y^2 + A^2 - \frac{y^2}{2} - 2A^2 = \frac{y^2}{2} - A^2$$

- (b) При $|y| \leq A$: $(x-y)^2 > 0$

$$(c) \text{ При } \forall y \in \mathbb{R}: (x-y)^2 \geq \varphi_A(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} - A^2, & |y| \geq A \\ 0, & |y| < A \end{cases}$$

- (d) Кроме того, $|y-x| \leq |y| + A$.

Получили следующую оценку (при $|x| < A$):

$$\left| \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) \right| \leq \frac{M_0}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} (|y| + A) e^{-\frac{\varphi_A(y)}{4a^2t}}$$

Если $t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$, то это можно ограничить выражением $C \cdot (|y| + A) \cdot e^{-\frac{\varphi_A(y)}{B}}$, интеграл от которого сходится, поэтому исходный интеграл сходится равномерно.

Равномерная сходимость (по двум параметрам сразу) есть в любом прямоугольнике

$$Q = \left\{ |x| < A, \quad t \in [t_1, t_2] \right\}$$

Беря в качестве Q все возможные такие прямоугольники, получим, что производная u_x на всём множестве $\{t > 0, x \in \mathbb{R}^1\}$ существует, непрерывна и равна интегралу (10).

Аналогично будет для любой другой производной (будет асимптотика $|P_n(y)|e^{-\alpha y^2}$).

3.

$$\mathcal{E}(t, x - y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$\mathcal{E}_x(t, x - y) = -\frac{(x - y)}{2a^2 t} \cdot \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_{xx}(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x - y)^2}{4a^4 t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_t(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t} + \frac{(x - y)^2}{4a^2} \frac{1}{t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

Тогда

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}_t(t, x - y) - a^2 \mathcal{E}_{xx}(t, x - y)] u_0(y) dy = 0.$$

Начальное условие (используя самое начало выкладок)

$$u|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} u_0(x) d\eta = u_0(x)$$

Теорема доказана. □

Билет 10. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в \mathbb{R}^n . Метод Дюамеля. Существование классического решения.

Задача:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - a^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n), & \varphi_k(x_k) \in C(\mathbb{R}^1), \quad |\varphi(x_k)| \leq M, \quad k = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (11)$$

Напишем серию задач Коши:

$$\begin{cases} u_t^k(t, x) - a^2 u_{x_k x_k}^k(t, x) = 0, \\ u^k|_{t=0} = \varphi_k(x_k); \end{cases} \quad (12)$$

Решение каждой даётся формулой Пуассона:

$$u^k(t, x_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_k - y_k)^2}{4a^2 t}} \varphi_k(y_k) dy_k \quad (13)$$

Покажем, что решение всей задачи:

$$u = \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k)$$

1. Очевидно, $u(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$;

2. $u(0, x) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x_k)$;

$$\begin{aligned} 3. \quad u_t(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[u_t^j(t, x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[a^2 u_{x_j x_j}^j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \\ &= a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(t, x) = a^2 \Delta_x u(t, x). \end{aligned}$$

Итак, в случае разделения переменных имеем:

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}{4a^2 t}} \prod_{k=1}^n \varphi_k(y_k) dy_1 \dots dy_n = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy} \quad (14)$$

Полученная формула называется **формулой Пуассона в \mathbb{R}^n** .

Теорема 10.1. Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $|u_0| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy -$$

классическое решение задачи Коши 11, лежащее в классе $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$. Кроме того, $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сохраняется из предыдущего билета с заменой $(x - y)^2 \rightarrow |x - y|^2$. \square

Зная решение однородного уравнения, можно найти решение и для неоднородного:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (15)$$

Используем метод Дюамеля. Предположения относительно f :

1. $D_x^\alpha f(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq 2$;
2. $|f(t, x)| \leq M_0 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$;
3. $|D_x^\alpha f(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Сводим задачу к семейству однопараметрических задач:

$$\begin{cases} v_t(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x v(t, x, \tau) = 0, & t > \tau, x \in \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = f(\tau, x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (16)$$

Решение даётся формулой Пуассона в \mathbb{R}^n :

$$v(t, x, \tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau, y) dy$$

$v(t, x, \tau)$ непрерывно продолжима до $t \geq \tau$, ограничена: $|v(t, x, \tau)| \leq M_0$.

Покажем, что $u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$ — решение задачи.

Исследуем вспомогательную функцию:

$$w(\tilde{t}, x, \tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \tilde{t}}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 \tilde{t}}} f(\tau, y) dy, \quad \tilde{t} > 0, \tau \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Введём $\eta = \frac{y-x}{2a\sqrt{\tilde{t}}} \Rightarrow y = x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta \Rightarrow dy = dy_1 \dots dy_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta_1 \dots d\eta_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta$.

Тогда $w(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$\left| f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) e^{-\eta^2} \right| \leq M_0 e^{-\eta^2}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} d\eta < +\infty \Rightarrow w(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Итак, $w \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$.

Утверждение 10.2. *в можно дифференцировать и вносить производную под интеграл.*

Доказательство. $w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) \sim \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$\left| f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) e^{-\eta^2} \right| \leq M_2 e^{-\eta^2} \Rightarrow w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Поэтому, вместо ' \sim ' можно поставить '=':

$w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

Аналогично и для вторых производных по x :

$w_{x_i x_j}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i x_j}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$ □

Теперь производная по времени: в силу того, что уравнение

$$\begin{cases} w_{\tilde{t}} - a^2 \Delta_x w = 0, \\ w|_{\tilde{t}=0} = f(\tau, x); \end{cases}$$

выполняется везде, включая границу, получаем, что $w_{\tilde{t}} \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

Мы исследовали w , а цель — v . Связь этих функций: $v(t, x, \tau) = w(t - \tau, x, \tau)$. При условиях $\tau \geq 0, t \geq \tau, x \in \mathbb{R}^n$ имеем непрерывность следующих функций: $v, v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}$. Тогда для функции

$u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$ получаем непрерывность $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \Rightarrow$ решение будет классическим.

Осталось проверить уравнение: $u_t = v(t, x, t) + \int_0^t v_t(t, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t a^2 \Delta_x v d\tau = f(t, x) + a^2 \Delta_x u$

Определение 10.1. Пусть Q — область в $\mathbb{R}_{t, x_1, \dots, x_n}^{n+1}$, а $\hat{Q} = Q \cup \{\text{некоторое подмножество } \partial Q\}$. Обозначим $C_{t, x}^{p, q}(\hat{Q})$ множество функций $u(t, x)$ таких, что $u, D_x^\alpha u, D_t^\beta u \in$

$C(Q)$, α — мультииндекс, $|\alpha| \leq q$, $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\beta| \leq p$, и все эти функции допускают непрерывное продолжение на \hat{Q} .

Теорема 10.3. Пусть в задаче Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

а) $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

б) $f(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

в) $|f(t, x)| \leq M_1, \quad |f_{x_i}(t, x)| \leq M_2, \quad |f_{x_i x_j}(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$

Тогда функция

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy + \int_0^t \left[\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}} f(\tau, y) dy \right] d\tau$$

является классическим решением задачи Коши, лежит в классе $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C_{t,x}^{1,2}(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$. Кроме того, справедлива оценка $|u(t, x)| \leq M_0 + tM_1$

Доказательство. Последний факт: $|u| \leq M_0 + \int_0^t |v_t| d\tau \leq M_0 + M_1 t$

□

Билет 11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$ (без доказательства)

- Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n , $T > 0$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ - цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью $t = \tau$ обозначим Ω_τ

Определение 11.1. Параболическая граница области Q_T - множество $\Gamma_T = \Omega_0 \cup \{[0, T] \times \partial\Omega\}$



Определим оператор $L : Lu(t, x) = u_t - a^2 \Delta_x u$, где $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$

Теорема 11.1. (Принцип максимума) Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, и пусть $Lu(t, x) \leq 0$ в Q_T . Тогда $\max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} u(t, x)$ достигается на параболической границе Γ_T области Q_T

Доказательство. Возьмем усеченный цилиндр $Q_{T-\delta}$. Рассматриваются $M = \max_{Q_{T-\delta}} u(t, x)$ и $m = \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x)$. Теорема утверждает, что M не превосходит m .

- Пусть это не так и $m < M$. Тогда $\exists (t^1, x^1) \in Q_{T-\delta} \cup \Omega_{T-\delta}$ такая, что $M = u(t^1, x^1)$. Т.к. это точка максимума гладкой функции, $u_{x_i x_i}(t^1, x^1) \leq 0$, а $u_t(t^1, x^1) \geq 0$ (Если внутри, то равенство, если на верхней кромке, то ≥ 0).

Значит, значение образа $u(t, x)$ под действием оператора L в точке (t^1, x^1) :

$$\boxed{Lu(t^1, x^1) = u_t - a^2 \Delta_x u|_{(t^1, x^1)} \geq 0}.$$

Для противоречия необходимо показать, что неравенство строгое.

й

- **Строгость:** Возьмем функцию $v_\beta(t, x) = u(t, x) + \beta|x - x^1|^2$, $\beta = \frac{M - m}{2(\text{diam} Q_T)^2}$ - такая же гладкая, как u .

На параболической границе $v_\beta \leq m + \frac{M-m}{2d^2} \cdot d^2 = \frac{M+m}{2} < M$. Тем не менее, $v_\beta(t^1, x^1) = M \Rightarrow$ максимум v_β - не на параболической границе.

Пусть он в точке $(t^2, x^2) \notin \Gamma_{T-\delta}$. Тогда $L v_\beta|_{(t^2, x^2)} = L u|_{(t^2, x^2)} - \beta d^2 2n \boxed{\geq} 0 \Rightarrow L u|_{(t^2, x^2)} \geq \beta d^2 2n > 0 \Rightarrow$ **Противоречие** (вывод $\boxed{\geq}$ аналогичен рамке выше)

- **Предельный переход с $\delta \rightarrow +0$:** Пусть $u_* = \max_{\Gamma_T} u(t, x)$.

Тогда $\max_{\overline{Q_{T-\delta}}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_T} u(t, x) = u_* \Rightarrow u(t, x) \leq u_*$ во всех точках $\overline{Q_T} \setminus \Omega_T$

$$u(t, x)|_{\Omega_T} = \lim_{(\hat{t}, \hat{x}) \in Q_T \rightarrow (t, x) \in \Omega_T} u(\hat{t}, \hat{x}) \boxed{\leq} u_*$$

($\boxed{\leq}$ - предельный переход в неравенствах.) Теорема доказана.

□

Следствие. Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, $Lu = 0 \quad \forall (t, x) \in Q_T$. Тогда $\max_{\overline{Q_T}} u(t, x)$ и $\min_{\overline{Q_T}} u(t, x)$ достигаются на параболической границе Γ_T множества Q_T

Доказательство. Максимум достигается, т.к. $Lu \leq 0$, минимум достигается, т.к. $L(-u) \leq 0$ □

Единственность решения задачи Коши

Вообще говоря, решение единственным будет не всегда. Но если ограничиться некоторым классом функций, то в нем решение может оказаться единственным. Введем такой класс.

- Пусть $T > 0, \sigma \geq 0$. **Слой толщины T** - множество $\Pi_T = \{(t, x) : 0 < t < T; x \in \mathbb{R}^n\}$
Обозначим $M_\sigma(T)$ - **класс функций** $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi_T})$ таких, что $\forall u(t, x) \exists A > 0, \alpha \geq 0$ такие, что $|u(t, x)| \leq A \exp^{\alpha|x|^\sigma} \quad \forall (t, x) \in \overline{\Pi_T}$

Лемма 11.2. $M_\sigma(T)$ - линейное пространство, причем $\sigma_0 \leq \sigma_1 \Rightarrow M_{\sigma_0}(T) \subset M_{\sigma_1}(T)$

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 11.3. $\forall T > 0$ функция $u_T(t, x) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}, t < T, x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

Доказательство. - $u_T \in C^\infty \{t < T, x \in \mathbb{R}^n\}$

$$-\frac{\partial u_T}{\partial t} = \left[\frac{n}{2(T-t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}$$

$$- \Delta_x u_T = \left[\frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{2n}{4a^2(T-t)} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{4|x|^2}{4^2 a^4 (T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)} \Rightarrow (u_T)'_t - a^2 \Delta_x u_T = 0 \text{ ч.т.д}$$

□

• **Класс Тихонова** - $M_2(T)$

Лемма 11.4. Пусть $v(t, x)$ такова, что $v \in M_2(T)$ и v - решение полностью однородной ЗК $\{Lv = 0, v|_{t=0}\}$. Тогда $\exists T_1 \leq T : |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(x, t) \quad \forall \varepsilon > 0$

Доказательство. $|v| \leq A \exp^{\alpha|x|^2} \quad \forall t, x \in \overline{\Pi_T}$. Выбираем $T_1 \leq T : \frac{1}{8a^2 T_1} > \alpha : T_1 = \min \left\{ T, \frac{1}{16\alpha a^2} \right\}$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\omega_e^\pm(t, x) = \varepsilon u_{2T_1} \pm v(t, x)$. Нужно показать, что $\omega_e^\pm(t, x) > 0$:

$$\omega_e^\pm(t, x) \geq \varepsilon u_{2T_1} - |v(t, x)| \geq \varepsilon u_{2T_1} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1 - t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(2T_1 - t)} - A \exp^{\alpha|x|^2} \geq$$

$$\frac{\varepsilon}{(2T_1 - t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2 2(T_1)} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{8a^2(T_1)} \left[1 - \frac{(2T_1)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon} A \exp^{-\left(\frac{1}{8a^2(T_1)} - \alpha\right)|x|^2} \right]$$

(для выделенной части $\exists R > 0$: эта часть $< \frac{1}{2}$ при $|x| > R$)

Значит, $\forall(t, x) : 0 \leq t \leq T$ и $|x| \geq R \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$.



Но $\omega_e^\pm(t, x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности \Rightarrow на Γ_{T_1} достигаются максимум и минимум $\omega_e^\pm(t, x) \Rightarrow$ он строго $> 0 \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$ всюду в полосе $(0, T_1)$. Итак, $\mp v(t, x) \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \Rightarrow |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v \equiv 0$ в $\overline{\Pi_{T_1}}$

□

Теорема 11.5. Задача Коши $Lu = f(x, t), u|_{t=0} = u_0(x)$ в классе Тихонова не может иметь более одного решения в полосе Π_T

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2 . Возьмем $v(t, x) = u_2 - u_1$. Функция v удовлетворяет полностью однородной ЗК и лежит в классе Тихонова \Rightarrow в

полосе Π_{T_1} , где T_1 определено из предыдущей леммы, будет $v \equiv 0$.
 Если $T \leq T_1$, то все доказано. В противном случае вводим:
 $w(t, x) = v(t + T_1, x)$. Она удовлетворяет:

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta_x w = 0 \\ w|_{t=0} = 0, T_1 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (17)$$

\Rightarrow в полосе $(0, T_1)$ получим $w \equiv 0$

(T_1 определяется $\frac{1}{8a^2\alpha} \Rightarrow$ одно и то же)

Так за конечное число шагов $N = \lceil \frac{T}{T_1} \rceil$ мы покроем всю Π_T

□

Билет 12. Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.

Рассмотрим смешанную (начально-краевую) задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x), & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (18)$$

Рассматриваем ее классическое решение — функцию $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, где $Q_T = \{(t, x) : t \in (0, T); x \in (0, l)\}$, удовлетворяющую в Q_T уравнению, начальному и граничным условиям.

Теорема 12.1 (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 18*

Доказательство. Если u_1, u_2 — классические решения, то $v = u_1 - u_2$ — классическое решение полностью однородной задачи. На параболической границе $\Gamma_T = \{t = 0, x \in [0, l]\} \cup \{x = 0, t \in [0, T]\} \cup \{x = l, t \in [0, T]\}$ $v|_{\Gamma_T} = 0$. Но на Γ_T достигается максимум и минимум v в Q_T в силу принципа максимума $\Rightarrow v \equiv 0$ \square

Частный случай, указанный в билете:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & 0 < t < T; \end{cases}$$

Из непрерывности естественно требовать выполнение условий согласования: $u_0(0) = u_0(l) = 0$. Оказывается, в таких условиях решение существует.

Метод Фурье — поиск решения в виде ряда по собственным функциям стационарного оператора.

Придём к этой идее. Будем искать решение $Lu = u_t - a^2 u_{xx} = 0$ методом разделения переменных:

$$u(t, x) = \Theta(t)X(x), \quad u(t, x) \neq 0.$$

Подставляем: $\dot{\Theta}(t)X(x) - a^2\Theta(t)X''(x) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\Theta}(t)}{a^2\Theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}$, т.к. равенство выполнено $\forall(t, x) \in Q_T$

Получаем на функции Θ и X следующие уравнения:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \dot{\Theta}(t) + \lambda a^2 \Theta(t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Из начального условия $u(t, 0) = \Theta(t)X(0) \quad \forall t \in (0, T) \Rightarrow X(0) = 0$. Аналогично $X(l) = 0$.

Задача для X :

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0, \\ X(x) \not\equiv 0; \end{cases} \quad (19)$$

Поставленная задача называется *задачей Штурма-Лиувилля*.

Введем оператор A :

- $D(A) = \{X \in C^2[0, l] : X(0) = X(l) = 0\}$
- $\text{Im}(A) = \{Y \in C[0, l]\}$
- $AX = -\Delta X = Y$

Задача Штурма-Лиувилля — это задача на собственные функции и собственные значения оператора A .

Решим ее:

- $\lambda < 0$:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}}$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|l}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|l}} = 0; \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|l}} & e^{-\sqrt{|\lambda|l}} \end{pmatrix} = 1 - e^{2\sqrt{|\lambda|l}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|l} = 0, \text{ противоречие.}$$

Итак, « $-\Delta$ » с граничными условиями Дирихле не имеет отрицательных собственных значений.

- $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l = 0; \end{cases}$$

Нетривиальных решений нет.

- $\lambda > 0$:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Функции } X_k(x) = \sin \left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

Теперь для найденных λ_k решаем $\dot{\Theta}_k(t) + \lambda_k a^2 \Theta_k(t) = 0 \Rightarrow \Theta_k(t) = e^{-a^2 \lambda_k t}$

Мы нашли $u_k(t, x) = e^{-a^2 \lambda_k t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ — счетное число бесконечно гладких решений: u_k удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (u_k)_t - a^2 (u_k)_{xx} = 0, \\ u_k(t, 0) = u_k(t, l) = 0, \\ u_k(0, x) = X_k(x) = \sin \lambda_k x; \end{cases}$$

Тогда $u_A(t, x) = \sum_{k=1}^N A_k u_k(t, x)$ — решение для задачи с начальным условием $u(0, x) = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$.

Обозначим Ku_0 — класс функций $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$ — тех, для которых умеем выписать явное решение. Пусть A_k — k -мерные векторы. Между Ku_0 и A_k есть биекция (по $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$)

однозначно восстанавливаем $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$

Бесконечномерный вектор подойдет уже не всегда. Как минимум ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)$ должен сойтись в замыкании области. Функция $\sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(t, x)$ должна быть нужной гладкости, а также удовлетворять уравнению 18.

Утверждение 12.2. $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$ подойдет

Доказательство. Пусть $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$. Тогда $\left|A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)\right| \leq |A_k| \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно \Rightarrow сумма непрерывна. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать \Rightarrow по $u_0(x)$ восстанавливаем A_n : $\int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$

Теперь рассмотрим ряд $u_A(t, x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$

Пока не можем поставить знак равенства, поскольку еще не выяснили сходимость.

$\left| A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right| \leq |A_k| \Rightarrow$ ряд сходится абсолютно и равномерно, и мы можем поставить знак равенства:

$$u_A(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Покажем, что получилась $u_A(t, x) \in C^\infty(t > 0, 0 \leq x \leq l)$.

Возьмем прямоугольник $Q_\delta = \{(t, x) : t \geq \delta > 0, 0 \leq x \leq l\}$.

Формально $\frac{\partial u_A}{\partial t} \sim - \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(t, x)$

Для краткости введём $y = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2$.

Оценка: $|\varphi_k| \leq |A_k| y e^{-y\delta} = |A_k| \frac{1}{\delta} (y\delta) e^{-y\delta} \leq |A_k| \frac{1}{\delta e}$

Последнее неравенство следует из того, что функция xe^{-x} имеет максимум в точке $x = 1$, равный $\frac{1}{e}$.

Итак, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Варьируя δ , прямоугольниками Q_δ замечаем всю область $\{t > 0, 0 \leq x \leq l\}$

Для остальных производных получим то же самое — всегда будет получаться произведение многочлена на экспоненту с отрицательным показателем.

Мы научились решать задачу для $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$. □

Докажем серию лемм.

Лемма 12.3. Пусть в гильбертовом пространстве \mathcal{H} оператор A симметричный (самосопряжённый), т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$. Тогда:

1. Все собственные значения A вещественны;
2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть x_k — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_k , а x_n — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n , причем $\lambda_k \neq \lambda_n$. Тогда:

1. $\lambda_k(x_k, x_k) = (Ax_k, x_k) = (x_k, Ax_k) = (x_k, \lambda_k x_k) = \overline{\lambda_k}(x_k, x_k) \Rightarrow \lambda_k = \overline{\lambda_k} \Rightarrow \text{Im } \lambda_k = 0$
2. $\lambda_k(x_k, x_n) = (Ax_k, x_n) = (x_k, Ax_n) = \overline{\lambda_n}(x_k, x_n) \underset{\text{пункт 1}}{=} \lambda_n(x_k, x_n) \Rightarrow \frac{(\lambda_k - \lambda_n)(x_k, x_n)}{\neq 0} = 0 \Rightarrow (x_k, x_n) = 0$

□

Лемма 12.4. Оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, определенный на $D(A)$, является симметричным относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$: $(u, v) = \int_0^l u(x) \overline{v(x)} dx$

Доказательство. $(Au, v) = \int_0^l (-u''(x)) \overline{v(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{-u'(x) \overline{v(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u'(x) \overline{v'(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{u(x) \overline{v'(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u(x) \overline{(-v''(x))} dx = (u, Av)$

□

Лемма 12.5. Пусть $\{e_k\}$ — не более чем счетная ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением: $(e_k, e_j) = \delta_{kj} \overbrace{(e_k, e_k)}^{>0}$. Тогда $\forall f$ из этого пространства

справедливо неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} \right|^2 (e_k, e_k) \leq (f, f)$

Доказательство. $0 \leq \left(f - \sum_{k=1}^n c_k e_k, f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, f) - \sum_{j=1}^n \overline{c_j} (f, e_j) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \overline{c_j} (e_k, e_j) =$

$= (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k}(e_k, e_k) - \sum_{j=1}^n c_j \overline{c_j}(e_j, e_j) + \sum_{i=1}^n c_i \overline{c_i}(e_i, e_i) = (f, f) - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 (e_k, e_k)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 (e_k, e_k) \leq (f, f)$. \square

Лемма 12.6. Пусть два ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = A$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |\beta_k|^2 = B$ сходятся. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \beta_k$ сходится абсолютно, причем $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \sqrt{A} \sqrt{B}$

Доказательство. $\sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_k| \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\beta_k|^2}$. Переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. \square

Лемма 12.7. Пусть $v(x) \in C^1([0, l])$, $v(0) = v(l) = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$, где $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l v(y) \sin\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy$, сходится на $[0, l]$ к $v(x)$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. 1. Система $\{e_k\} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$, так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Дирихле — симметричного в $\mathbb{L}_2([0, l])$ оператора.

2. $A_k = \frac{(v, e_k)}{(e_k, e_k)}$, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя.

$$3. A_k = \underbrace{-\frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} v(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) \Big|_0^l}_{=0} + \frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy = \frac{l}{\pi k} \alpha_k, \text{ где } \alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy.$$

4. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя, т.к. система $\{g_k\} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l])$, так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Неймана — симметричного в $\mathbb{L}_2([0, l])$ оператора.

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ сходится. Тогда сходится абсолютно ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$.

Функция $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$ непрерывна.

5. Сходимость к $v(x)$: Построим

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0, l] \\ -v(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Затем продолжим на \mathbb{R} , сделав периодической: $\tilde{v}(x + 2l) = \tilde{v}(x)$. Получаем непрерывную периодическую функцию, а во всех точках $x \in [0, l]$ $\exists \tilde{v}'_-(x), \tilde{v}'_+(x)$. Тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней на всей \mathbb{R} . В силу нечетности \tilde{v} , этот ряд — только по синусам, а коэффициенты Фурье равны A_k (для них совпадают формулы). Значит, на $[0, l]$ имеем

$$v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

□

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 12.8. Пусть в смешанной задаче

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям гладкости ($u_0 \in C^1([0, l])$) и согласованная ($u_0(0) = u_0(l) = 0$). Тогда ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = u(t, x)$, где $A_k =$

$\frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$, сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q_T} = [0, T] \times [0, l]$, функ-

ция $u(t, x) \in C(\overline{Q_T}) \cap C^\infty(Q_T)$ и является классическим решением этой задачи, а любая производная при $t > 0$ от $u(t, x)$ может быть найдена почленным дифференцированием.

Билет 13. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.

Формулировка задачи

Задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (t, x) \in Q_T = (0, T) \times (0, l), \\ u|_{t=0} = u_0(x); \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t); & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (20)$$

Рассматриваем её *классическое решение* - функцию $u(t, x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению, начальным и граничным условиям.

Теорема единственности

Теорема 13.1 (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 20.*

Единственность решения. Для двух решений \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 построим $V(t, x) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$.

V - решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, \\ V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что $V \equiv 0$ с помощью интеграла энергии: рассмотрим функцию $I = V_t[V_{tt} - a^2 V_{xx}]$, $(t, x) \in Q_T$.

$$I = V_t V_{tt} - a^2 V_t V_{xx} = \frac{1}{2} (V_t^2)_t - a^2 (V_t V_x)_x + a^2 \underbrace{V_x V_{xt}}_{\frac{1}{2} (V_x^2)_t} = \underbrace{\left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right)_t}_{F_t^1} - \underbrace{(a^2 V_t V_x)_x}_{F_x^2} \Big| \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой Грина: $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \Omega} Q dy + P dx$. Для её использования требуется непрерывность производных до границы, поэтому напомним её для области: $Q_{\tau, \varepsilon} = \{(t, x): \varepsilon < t < \tau, \varepsilon < x < l - \varepsilon\}$.

Доказательство.



$$0 = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} I \, dx dt = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dt = \oint_{\partial Q_{\tau, \varepsilon}} -\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \, dx - a^2 V_t V_x \, dt$$

Распишем интеграл по $\partial Q_{\tau, \varepsilon}$:

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\tau} dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\varepsilon} dx - \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=l-\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем :

$$\begin{aligned} \because V_t(\varepsilon, x) \rightarrow V_t(0, x) = 0 \quad \because V_x(\varepsilon, x) \rightarrow V_x(0, x) = \frac{d}{dx}(V|_{t=0}) = 0 \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \rightarrow \int_0^l \quad (\text{по определению несобственного}) \\ \because \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_t(t, l-\varepsilon) = V_t(t, l) = 0 \Rightarrow \int_0^{\tau} (a^2 V_t V_x) \, dt \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \Big|_{\tau=l} dx = \int_0^l \frac{V_t^2(0, x) + a^2 V_x^2(0, x)}{2} dx \end{aligned}$$

Аналогично для $\int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_t V_x) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$. Поэтому получаем, что:

$$\int_0^l \frac{V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x)}{2} dx = 0$$

Тогда $V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, l) \times \tau$.

В любой точке $(t, x) \in Q_{\tau}$: $\vec{\nabla} V(t, x) = \vec{0} \Rightarrow V = \text{const} \quad \forall (t, x) \in Q_{\tau}$.

На замыкании в силу непрерывности V в \overline{Q}_{τ} также будет $V \equiv \text{const}$, но на границе $V = 0 \Rightarrow V \equiv 0 \quad \forall (t, x) \in \overline{Q}_{\tau}$, поэтому $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

Существование решения Будем рассматривать смешанную задачу для однородного уравнения колебаний струны при закреплённых концах.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t, x) \in Q_{\tau}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $-\Delta_0$:

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{X(x) \in C^2[0, l]: X(0) = X(l) = 0\}$$

У этого оператора есть счётное однопараметрическое семейство собственных функций: $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k = \sin(\lambda_k x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение будем искать в виде ряда $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$. Будем требовать выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^3[0, l], \quad u_1(x) \in C^2[0, l] - \text{условия гладкости} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 - \text{для непрерывности решения на } \overline{Q}_\tau, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0 - \text{для принадлежности решения } C^1(\overline{Q}_\tau), \\ u_0''(0) = u_0''(l) = 0 - \text{для принадлежности } C^2(\overline{Q}_\tau). \end{cases} \quad (21)$$

Последние три условия называются **условиями согласования**.

Рассматриваемый оператор симметричен относительно скалярного произведения в \mathbb{L}_2 , значит, собственные функции ортогональны в \mathbb{L}_2 . Разложим u_0, u_1 в ряды Фурье по X_k на $[0, l]$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) X_k dx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) X_k dx$$

Формально подставляем в уравнение: $\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k) X_k = 0$. Из начальных условий: $\Theta_k(0) = A_k$, $\dot{\Theta}_k(0) = B_k$.

В силу ортогональности $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ получаем счётное число задач Коши:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k = 0, \\ \Theta_k(0) = A_k, \quad \dot{\Theta}_k(0) = B_k. \end{cases}$$

Решение: $\Theta_k(t) = A_k \cos\left(\frac{a\pi k}{l}\right) t + \frac{l}{a\pi k} B_k \sin\left(\frac{a\pi k}{l}\right) t$, $t \in [0, \tau]$. □

Обоснование метода

Теорема 13.2. Пусть данные Коши $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям гладкости и согласования. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно в \overline{Q}_τ . Его сумма принадлежит классу $C^2(\overline{Q}_\tau)$ и является классическим решением задачи 13. Частные производные по t и x до второго порядка включительно можно вычислить почленным дифференцированием ряда.

Доказательство.

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \frac{-2}{l} \frac{l}{\pi k} u_0(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l + \frac{l}{\pi k} \frac{2}{l} \int_0^l u_0' \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \frac{2}{l} u_0'(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l - \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int_0^l u_0''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = - \underbrace{\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \frac{2}{l} \int_0^l u_0'''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx}_{\alpha_k} + \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 u_0''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l = -$$

Примечание: α_k - коэффициенты Фурье функции $u_0'''(x)$ по ортогональной системе функций $\cos\left(\frac{\pi k}{l}\right)$ — собственных функций оператора $-\Delta_0$ с граничными условиями Неймана — тоже симметричного оператора.

Аналогично находим коэффициенты B_k :

$$B_k = - \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \beta_k, \text{ где } \beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$$

Из того, что

$$|u_k(t, x)| = |\Theta_k(t) X_k(k)| = \left| A_k \cos(a \lambda_k t) + \frac{B_k}{a \lambda_k} \sin(a \lambda_k t) \right| \leq \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \frac{1}{a \lambda_k} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{c}{k^3}$$

следует абсолютная и равномерная сходимость ряда на \overline{Q}_τ

$$1. \text{ Граничные условия: } u(t, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(0) = 0, \quad u(t, l) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(\pi k) = 0.$$

$$\text{Начальные условия: } u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\lambda_k x) = u_1(x).$$

Итак, ряд порождает непрерывную на \overline{Q}_τ функцию, удовлетворяющую начальным и граничным условиям.

$$2. \text{ Производные: } u_t \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{a \pi k}{l} A_k \sin(\lambda_k a t) + B_k \cos(a \lambda_k t) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k.$$

$$|V_k| \leq a \lambda_k |A_k| + |B_k| \leq \frac{a \pi k}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{\tilde{c}}{k^2} \implies u_t \in C(\overline{Q}_\tau)$$

Значит, $u \in C(\overline{Q}_\tau)$.

$$u_{tt} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{a \pi k}{l}\right)^2 A_k \cos(\lambda_k a t) - \frac{a \pi k}{l} B_k \sin(\lambda_k a t) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

$$|w_k| = \left(\frac{a \pi k}{l}\right)^2 |u_k| \leq \left(\frac{a \pi k}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \left(|\alpha_k| + \frac{1}{a} |\beta_k|\right)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно и равномерно, так как: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ сходится абсолютно; поэтому $u(t, x) \in C^2(\overline{Q}_\tau)$. \square

Можно ставить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

при более широких условиях.

При условиях $u_0(x) \in C^2[0, l]$, $u_1(x) \in C^1[0, l]$ (гладкости) и $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$ (согласования) и условиях на f : $f(t, x), f_x(t, x) \in C(\overline{Q}_\tau)$, $f(t, 0) = f(t, l) = 0$ - классическое решение задачи существует и единственно.

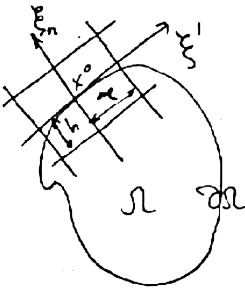
С помощью метода продолжений делаем u_0, u_1, f нечётными и 2π - периодическими, получаем задачу Коши для волнового уравнения. Решение даётся формулой Даламбера.

Билет 14. Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.

Формулы Грина

Определение 14.1. Ограниченная область Ω называется *областью с гладкой границей*, если $\forall x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$ найдутся:

- такая декартова СК, что начало в x_0 , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - координаты точек в этой СК
- Окрестность $U_0(x^0) = \{\xi: |\xi'| < r, |\xi_n| < h\}$, где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, такая, что в $U_0(x^0)$ часть границы $\Gamma \cap U_0(x^0)$ представляется в виде: $\xi_n = F(\xi'), |\xi'| < r, F(0) = 0, F(\xi') \in C^1(|\xi'| < r), \nabla_{\xi'} F(0) = 0$,
- Множество $U_-(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n < F(\xi')\} \in \Omega$,
Множество $U_+(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n \geq F(\xi')\}: \Omega \cap U_+ = \emptyset$
- Числа $r > 0, h > 0$ можно выбрать независимо от $x^0 \in \Gamma$.



Для ограниченных областей с гладкими границами справедлива формула Остроградского-Гаусса (F - непрерывно дифференцируемое векторное поле):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS = \int_{\Gamma} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS$$

Лемма 14.1.

Формулы Грина

Пусть Ω - ограниченная область с границей класса C^1 в \mathbb{R}^n , тогда справедливы следующие формулы.

$$\forall u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

$$\forall u(x) \in C^2(\bar{\Omega}), v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx - \int_{\Omega} (\Delta v)u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u dS_x$$

Полученные формулы называются первой и второй формулами Грина соответственно.

Доказательство.

Первая формула Грина

Пусть $\vec{f}(x), v(x)$ - гладкие векторное и скалярное поля соответственно: $\operatorname{div}(\vec{f} \cdot v) = (\nabla, \vec{f}v) + (\nabla, \vec{f}^\downarrow v) = v \operatorname{div} \vec{f} + (\vec{f}, \operatorname{grad} v)$.

Положим $\vec{f} = \nabla u \in C^1 \Rightarrow \operatorname{div}(v \nabla u) = v \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u} + (\nabla u, \nabla v)$.

Интегрируем по объёму в Ω :

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \oint_{\Gamma} (v \nabla u, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx$$

Заметим, что:

$$(v \nabla u, \vec{n}) = v \sum_{k=1}^{\dim \mathbb{R}^n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} n_k = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \cdot v(x)$$

При подстановке данного результата в равенство выше немедленно получим первую формулу Грина.

Вторая формула Грина

Для получения второй формулы Грина необходимо вычесть из первой формулы Грина симметричное ему по u и v равенство:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \oint_{\Gamma} (u \nabla v, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) \, dx$$

□

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть Ω - ограниченная область с границей Γ класса C^1 , $u_0(x) \in C(\Gamma)$, $f(x) \in C(\overline{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = u_0(x). \end{cases} \quad (22)$$

Классическим решением задачи Дирихле [22](#) называется $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

Лемма 14.2. *Не может существовать более одного классического решения задачи [22](#).*

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 22, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0$, $v|_{\Gamma} = 0$.

По формуле Грина:

$$\int_{\Omega} v \Delta v dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx \Rightarrow \nabla v \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow v(x) = \text{const}$$

С учётом того, что $\Delta(x) = 0$ и $v(x)|_{\Gamma} = 0$, получим, что $v(x) = 0$, а значит, $u_I = u_{II}$, и решение единственно. \square

Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона

Пусть Ω -ограниченная область с границей класса C^1 , $u_1(x) \in C(\Gamma)$, $f(x) \in C(\bar{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$ удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_1(x), x \in \Gamma. \quad (23)$$

Определение 14.2. Классическое решение задачи Неймана 23 есть такая функция $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям.

Лемма 14.3. Любые два классические решения задачи Неймана отличаются на константу.

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 23, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0$. По формуле Грина имеем:

$$\int_{\Omega} \Delta v v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \Rightarrow v \equiv \text{const}$$

\square

Лемма 14.4. Необходимым условием существования классического решения задачи Неймана является условие $\int_{\Omega} f(x) dx = \oint_{\Gamma} u_1(x) ds$

Доказательство.

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} \Delta u \cdot 1 dx = [1\text{-ая формула Грина}] = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot 1 ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla 1) dx = \int_{\partial\Omega} u_1(x) \cdot 1 ds$$

\square

Билет 15. Симметричность и положительная определенность оператора $-\Delta$ при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.

Задача на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа при однородном условии Дирихле: Найти λ и $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, где Ω - область с кусочно-гладкой границей Γ , такие, что

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u(x) \neq 0, \end{cases}$$

Утверждение 15.1 (без доказательства). *Существует счетное число собственных значений $\{\lambda_k\}_k$, $\{\lambda_k\} \rightarrow \infty$, причем каждому λ_k соответствует конечное число собственных функций.*

Формула Грина справедлива и для комплексных функций. Считаем, что $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = -\lambda \int_{\Omega} u \bar{u} dx$$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \bar{u} dS - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{u}) dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} - \text{соотношение Рэлея.}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ (строго больше, т.к. $\nabla u = 0 \Rightarrow u = 0$). В задаче Неймана $\lambda = 0$ возможно.

Утверждение 15.2. *Оператор $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле является симметричным относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$: $(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx$*

Доказательство. Пусть $u(x), v(x)$ лежат в области определения нашего оператора

$$D_0(-\Delta) = \{u(x) : u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \Delta u(x) \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Симметричность оператора означает, что

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) \quad \forall u, v \in D_0(-\Delta).$$

Проверим это:

$$(-\Delta u, v) - (u, -\Delta v) = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx \stackrel{\text{2 формула Грина}}{=} \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v \right) dS = 0.$$

□

Утверждение 15.3. Собственные функции рассматриваемого оператора $u_k(x)$ и $u_m(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_k и λ_m , ортогональны относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(-\Delta u_k, u_m) &= (u_k, -\Delta u_m) \\ \lambda_k(u_k, u_m) &= \lambda_m(u_k, u_m) \\ \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_m)(u_k, u_m) &= 0 \Rightarrow (u_k, u_m) = 0\end{aligned}$$

□

Билет 16. Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Задача: в круге $D = \{x \mid |x| < R\}$ и на границе $\Gamma = \partial D$ рассматриваем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in D \leftarrow \text{уравнение Пуассона} \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), x \in \partial D \end{cases} \quad (24)$$

Сделаем замену: $x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi$.

Функция $\hat{u}(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Аналогично $\hat{u}_0(\rho, \varphi) = u_0(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \hat{f}(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

Задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \hat{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \hat{u}_{\varphi\varphi} = \hat{f}(\rho, \varphi), 0 < \rho < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \hat{u}(R, \varphi) = \hat{u}_0(R, \varphi) \\ \hat{u}(\rho, \varphi) = \hat{u}(\rho, \varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Далее считаем $\hat{f} = 0$, то есть решаем уравнение Лапласа.

Предположение: $u_0(x) \in C^1(\Gamma)$. Предполагаем, что решение принадлежит классу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. При этом $\hat{u} - 2\pi$ -периодическая по $\varphi \Rightarrow$ можно разложить \hat{u}_0, \hat{u} в ряды Фурье. [Если был бы уравнение Пуассона – требовали бы $f \in C^1(\bar{D})$.]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \varphi) \\ \hat{u}_0(R, \varphi) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} a_0(\rho) \\ A_0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} \cos k\varphi + \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} \sin k\varphi \right], \text{ где} \\ \begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \cos k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}_0, \\ \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \sin k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Формально подставляем в уравнение (аргументы функций опускаем – они все уже определены).

$$\frac{1}{2} \left(a'' + \frac{1}{\rho} a' \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k'' + \frac{1}{\rho} a_k' - \frac{k^2}{\rho^2} a_k \right] \cos k\varphi + \left[b_k'' + \frac{1}{\rho} b_k' - \frac{k^2}{\rho^2} b_k \right] \sin k\varphi \right\} = 0$$

Из граничного условия:

$$\frac{1}{2} a_0(R) + \sum_k [a_k(R) \cos k\varphi + b_k(R) \sin k\varphi] = \frac{1}{2} A_0 + \sum_k [A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi]$$

В силу ортогональности тригонометрической системы в $L_2[0, 2\pi]$ имеем на a_k и b_k следующие задачи:

$$\begin{cases} a_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}a_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}a_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ a_k(R) = A_k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}b_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}b_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ b_k(R) = B_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Будем искать только ограниченные решения – для этого одного граничного условия окажется достаточно.

Решения данных уравнений Эйлера ищем в виде $\alpha\rho^\mu$:

Для первой серии задачи: $\alpha[\mu(\mu - 1) + \mu - k^2]\rho^{\mu-2} = 0 \Rightarrow \mu = \pm k$.

Общее решение:

$$a_k(\rho) = C_{1k}\rho^k + C_{2k}\rho^{-k}$$

$$a_0(\rho) = C_{10} \cdot 1 + C_{20} \cdot \ln \rho$$

Для ограниченности в круге берем $C_{2k} = C_{20} = 0 \Rightarrow a_k = C_{1k}\rho^k, C_{1k} = \frac{A_k}{R^k}, k \in \mathbb{N}_0$.

Итак,

$$\begin{cases} a_k(\rho) \\ b_k(\rho) \end{cases} = \begin{cases} A_k \\ B_k \end{cases} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \Rightarrow \hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \quad (25)$$

Вернемся в исходные переменные. Заметим, что если ввести $z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\varphi}$, то $\rho^k \cos k\varphi = \operatorname{Re} z^k$,

$\rho^k \sin k\varphi = \operatorname{Im} z^k$.

Обозначим $\operatorname{Re} z^k = p_k(x_1, x_2), \operatorname{Im} z^k = q_k(x_1, x_2)$.

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] \quad (26)$$

Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Теорема 16.1. Пусть $u_0 \in C(\Gamma)$. Тогда:

1. Существует и единственно классическое решение $u(x) \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$ задачи 24 с $f \equiv 0$.
2. В D это решение представимо рядами 25 и 26, сходящимися в $|x| \leq R_1 < R$ равномерно.
3. Классическое решение представимо формулой Пуассона:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\partial D} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_\xi$$

4. Любые частные производные по x_1 и x_2 вычисляются почленным дифференцированием ряда.

Доказательство. 1. Единственность докажем позднее (в этом билете ее нет).

2. Пусть $|u_0| < M$ на Γ . Тогда:

$$|A_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u_0| |\cos k\psi| d\psi \leq 2M, \quad |B_k| \leq 2M$$

Запишем

$$u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2, \text{ где}$$

$$w_1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} z^k, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{R^k} z^k$$

Оба ряда сходятся абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq R_1 < R \Rightarrow$ порождают в круге радиуса R_1 регулярные функции, что и требовалось.

3. Докажем формулу Пуассона:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(R, \psi) d\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(\psi) (\cos k\psi \cdot \cos k\varphi + \sin k\psi \sin k\varphi) d\psi \left(\frac{\rho}{R}\right)^k = \\ &= (\text{сходимость равномерная}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos k(\psi - \varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi \end{aligned}$$

Под интегралом ($|p| = |\bar{p}| = \frac{\rho}{R} < 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k &= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-\bar{p}} - 1 = \frac{1-p+1-\bar{p}-1+p+\bar{p}-p\bar{p}}{(1-p)(1-\bar{p})} = \frac{1-|p|^2}{1-(p+\bar{p})+p\bar{p}} = \\ &= \frac{1-|p|^2}{1-2\operatorname{Re} p + |p|^2} = \frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R} \cos(\psi-\varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2}, \quad x = (\rho, \varphi) \\ &\quad \xi = (R, \psi) \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} \hat{u}_0(\psi) d\psi \\ \iff u(x) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_{\xi} \end{aligned}$$

Заметим, что при $u_0 \equiv 1$ мы получим ядро Пуассона:

$$1 \equiv \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} dS_{\xi}$$

Покажем, что $u(x) \in C(\bar{D})$.

Пусть $x \in D \cap \{x : |x - x^0| < \delta_{n_0}\}$, где $x_0 \in \Gamma$, а δ_{n_0} выбрано так, чтобы $|u_0(x) - u_0(x^0)| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} u(x) - u(x^0) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \left(\int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| < \delta_{n_0}\}} + \int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| \geq \delta_{n_0}\}} \right) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = I_{<} + I_{\geq} \end{aligned}$$

$$|I_{<}| \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{(<)} \frac{|R^2 - |x|^2|}{|x - \xi|^2} |u_0(\xi) - u_0(x^0)| dS_{\xi} \leq \varepsilon \cdot \{\text{ядро Пуассона}\} = \varepsilon$$

$$|I_{\geq}| \leq \frac{1}{2\pi R} \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{\min|\xi - x|^2} \cdot 2M \cdot \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 4MR \frac{R - |x|}{\min|\xi - x|^2}, \text{ где } R + |x| \leq 2R \text{ и } \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 2\pi R$$

$$|\xi - x| = |\xi - x^0 + x^0 - x| \geq |\xi - x^0| - |x^0 - x| > \delta_{n_0} - \frac{\delta_{n_0}}{2} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow |I_{\geq}| \leq 16MR \frac{R - |x|}{\delta_{n_0}^2}$$

Возьмем $\delta_n = \min \left\{ \frac{\delta_{n_0}}{2}, \varepsilon \delta_{n_0}^2 \right\}$. Тогда при $|x - x^0| < \delta_n$ будем иметь $R - |x| \leq |x^0 - x| < \delta_n \Rightarrow$

Итак, при $|x^0 - x| < \delta_n : |u(x) - u(x^0)| \leq |I_{<}| + |I_{\geq}| \leq \varepsilon + 16MR\varepsilon$.

Непрерывность доказана.

4. Дифференцируемость:

$u = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2$.

Вспомогательный факт: $\tilde{w}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z) \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{u}_{x_1} + i\tilde{v}_{x_1} \Rightarrow \tilde{u}_{x_1} = (\operatorname{Re} \tilde{w})_{x_1} = \operatorname{Re} (\tilde{w}_z)$

В нашем случае:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} w_1(z) = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (z^k)'_z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \operatorname{Re} \frac{dz^k}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (p_k)'_{x_1} (x_1, x_2)$$

Аналогично для B_k и для производного любого порядка.

□

Билет 17. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.

Рассматривается уравнение Пуассона в \mathbb{R}^3 : $\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, где Ω – область.

Определение 17.1 (Гармоническая функция). Функция $u(x)$ называется гармонической в $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если $u(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u(x) \equiv 0$ на Ω .

Удобно перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Уравнение примет вид:

$$0 = \Delta \hat{u}(r, \theta, \varphi) = \hat{u}_{rr} + \frac{2}{r} \hat{u}_r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \right]$$

В квадратных скобках написан оператор Лапласа-Бельтрами от функции \hat{u} . Решение зависящее от r , удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2} \hat{u}_r = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = r^\mu \Rightarrow \mu(\mu - 1) + 2\mu = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Функция $\hat{u}(r) = \frac{1}{r}$ – гармоническая всюду кроме 0.

Лемма 17.1 (Интегральное представление решения уравнения Пуассона). Пусть Ω – область с кусочно-гладкой границей Γ . Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\Delta u \in C(\bar{\Omega})$. Тогда для $\forall x \in \Omega$ $u(x)$ представима в виде суммы трех потенциалов (объемного Ньютонова, простого слоя, двойного слоя):

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy}_{\text{объёмный Ньютоновыи потенциал}} - \underbrace{\oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y}_{\text{потенциал простого слоя}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) u(y) dS_y}_{\text{потенциал двойного слоя}}$$

Доказательство. Берем $x \in G, \varepsilon > 0$ такое, что $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ (B – открытый шар в \mathbb{R}^3). Строим область $\Omega_x^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$, $\partial \Omega_x^\varepsilon = \Gamma \cup \gamma$, где $\gamma = \partial B(x, \varepsilon)$.



В Ω_x^ε ядро $K_3(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty$ ($\Delta K_3(x, y) \equiv 0$). Используем 2 формулу Грина:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_x^\varepsilon} \Delta u(y) K_3(x, y) dy - \int_{\Omega_x^\varepsilon} u(y) \Delta K_3(x, y) dy = \\
 & = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y + \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \\
 & \iff \int_{\Omega_x^\varepsilon} f(y) K_3(x, y) dy + \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y = \\
 & = \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y
 \end{aligned}$$

Offtop 17.1. интеграл от $\frac{1}{|x|^\alpha}$ сходится при $\alpha < n = \dim \mathbb{R}^n$. У нас $n = 3, \alpha = 1$.

Устремляем $\varepsilon \rightarrow 0$:

1. $\int_{\Omega_x^\varepsilon} \rightarrow \int_{\Omega}$ в силу последнего замечания.

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint (u(y) - u(x) + u(x)) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y + \\
 & u(x) \oint_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \\
 & \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \left| \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot \max_{|y-x| \leq R} |u(y) - u(x)| \cdot \oint_{\gamma} dS_y \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \left| \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} M \int_{\gamma} dS_y = M\varepsilon \rightarrow 0 \\
 & \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} \right| = |(\nabla u, \vec{n})| \leq |\nabla u| \cdot |n| \leq M, \text{ так как } \nabla u \in C(\overline{\Omega})
 \end{aligned}$$

Итак, после предельного перехода получим требуемое соотношение □

Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Экскурс в обобщенные функции

Определение 17.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство пробных (основных) функций:

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ supp } \varphi(x) \text{ – компакт.}$

Определение 17.3. В $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ вводится сходимость по следующему правилу: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff$

- $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathcal{D}^\alpha \varphi_k \rightrightarrows \mathcal{D}^\alpha \varphi$
- $\exists A > 0 : \varphi_k(x) \equiv 0$ при $|x| > A \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (у всех функций общий носитель)

Пример функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$$

Определение 17.4. Обобщенная функция f над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – всякий линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Определение 17.5. Линейный функционал: $(f, \alpha\varphi + \mu\psi) = \alpha(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$

Определение 17.6. Непрерывный функционал: $\forall \{\varphi_k\} \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(\varphi_k) \rightarrow f(\varphi)$

По определению $\forall \lambda, \mu$ - чисел, $\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенная функция $F = \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $(F, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$

Определение 17.7 (сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{\iff} (f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (слабая* сходимость).

Определение 17.8. Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой, если

$$\forall B > 0 \quad \exists \int_{|x| < B} |f(x)| dx < \infty$$

Каждая такая $f(x)$ порождает обобщенную функцию $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$.

Если существует локально интегрируемая $f(x)$ такая, что обобщенная функция f представляется в виде $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$, то $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется регулярной.

Лемма 17.2 (Дюбуа-Реймон). Если f и g непрерывны и порождают одну обобщенную функцию, то $f \equiv g$. Если f и g разрывны, то они совпадают почти всюду.

Определение 17.9 (δ -функция). $(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$

δ -функция не является регулярной.

Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Правило дифференцирования: $(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$.

В частном случае $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta \varphi)$

Теорема 17.3. Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}\varphi \subset B(0, A)$. Возьмем $\Omega = B(0, A+1)$. По теореме об интегральном представлении

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \int_{|y| < A+1} E(y) \Delta_y \varphi(y) dy + \oint_{|y|=A+1} \varphi(y) \frac{\partial E(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y - \oint_{|y|=A+1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vec{n}_y} E(y) dS_y = \\ &= (E, \Delta_x \varphi(x)) = (\Delta E, \varphi(x))\end{aligned}$$

Что и требовалось. □

Определение 17.10. Функция $E(x)$ называется фундаментальным решением оператора Лапласа.

Билет 18. Свойства гармонических функций в \mathbb{R}^3 : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.

Определение 18.1. Функция $u(x)$ гармоническая в $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если

1. $u(x) \in C^2(\Omega)$
2. $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

Теорема 18.1. Всякая функция $u(x)$, гармоническая в области Ω , является в Ω бесконечно дифференцируемой, т.е. $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in \Omega$ и $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Представим $u(x)$ суммой:

$$u(x) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$



Теперь берем $B_\delta(x_0) \subsetneq B_r(x_0)$. Будем обозначать $S(x_0, r)$ сферу $\partial B_r(x_0)$. Если $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$, $y \in S(x_0, r)$, то $|x-y| \geq r - \delta > 0$.

Рассмотрим в $\overline{B}_\delta(x_0)$

$$u_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y.$$

Напишем

$$\tilde{u}_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} D_x^\alpha \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Заметим, что $\frac{-1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0) \times S(x_0, r)) \Rightarrow$ записанные частные производные непрерывны, интеграл \tilde{u}_0 существует $\Rightarrow \tilde{u}_0(x) = D_x^\alpha u_0(x)$.

Теперь берем

$$u_2(x) = \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) = \sum_1^n n_k \frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right)$$

В $\overline{B}_\delta(x_0)$ запишем

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_1^3 \oint u_0(y) n_k(y) D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \right) dS_y$$

Записанные частные производные непрерывны, интеграл $\tilde{u}_2(x)$ существует $\Rightarrow \tilde{u}_2(x) = D_x^\alpha u_2(x)$.
Итак, для $u_0(x)$ и $u_2(x)$ существуют частные производные любого порядка. Значит, $u(x) \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0))$, где x_0 - произвольная точка из Ω . $\Rightarrow u(x) \in C^\infty(\Omega)$ \square

Теорема 18.2 (Теорема о среднем). Пусть $u(x)$, гармоническая в шаре $B_r(x_0)$ и $u(x) \in C^1(\overline{B}_r(x_0))$. Тогда $u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y$. (в центре - среднее по значениям на сфере)

Доказательство.

$$u(x_0) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \stackrel{\rho=|x_0-y|}{=} \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4\pi r^2},$$

тогда

$$\oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y.$$

Покажем, что потенциал простого слоя равен нулю.

$$- \oint_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{|y-x_0|=r} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|=r} (\nabla u(y), \vec{n}(y)) dS_y \stackrel{\text{Ф-ла Остр.-Гаусса}}{=} \\ = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \operatorname{div}(\nabla u) dy = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \Delta u dy = 0$$

\square

Теорема 18.3 (Обратная теорема о среднем). Пусть $u(x) \in C(\Omega)$ и $u(x)$ обладает свойством среднего $\forall x \in \Omega$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$ - произвольная область. Тогда $u(x)$ - гармоническая функция на Ω .

Доказательство. $\forall x_0 \in \Omega \exists r > 0 : \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Рассмотрим решение

$$v(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y$$

$$\text{для задачи} \begin{cases} \Delta u(x) = 0, |x| < r \\ v|_{|x|=r} = u|_{|x|=r} \end{cases}$$

Введем $w(x) = u(x) - v(x)$, $w(x) \in C(|x| \leq r)$, получим что $w(x)$ удовлетворяет свойству среднего. Тогда по принципу максимума (для функции, удовлетворяющей свойству среднего, будет доказан в следующем билете) $|w(x)| \leq \max_{|y-x|=r} |w(y)| = 0 \Rightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x: |x| < r$ \square

Билет 19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции

Теорема (принцип максимума)

Теорема 19.1. (Принцип максимума) Если $u(x)$ - гармоническая в области Ω и достигает \max или \min значения в точке $a \in \Omega$, то $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in \Omega$

Offtop 19.1. Теорема справедлива в \mathbb{R}^n

Доказательство. •

- Докажем вспомогательное локальное

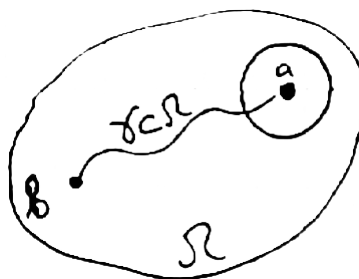
Утверждение 19.2. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ достигает максимума в точке a , а так же удовлетворяет свойству среднего:

$$u(a) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y \quad \forall r : 0 < r < d_a = \text{dist}(a, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$$

Тогда $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in B(a, d_a)$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } u(a) &= \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y = \frac{u(a)}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} dS_y + \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = u(a) + \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y \Rightarrow \\ &\oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = 0 \Leftrightarrow u(y) = u(a) \quad \forall y : |y-a| = r < d_a \quad \square \\ &\leq 0, \text{ непрерывна} \end{aligned}$$

- Докажем саму теорему



Соединим a и b кусочно-гладкой кривой. Эту кривую параметризуем натуральным параметром (параметризация кривой длиной её дуги): $x = x(s), x(0) = a, x(L) = b$. Обозначим $d = \text{dist} \{ \gamma = x; \partial\Omega \} > 0$ (d действительно > 0 : если $d = 0$, то $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \gamma : \rho(x_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся $\{x_{n_k}\} = \{y_k\}(\gamma -$

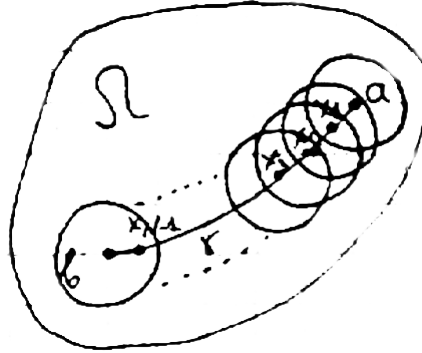
ограничено). Пусть $y_k \rightarrow y_0$. Тогда y_0 - предельная для $\partial\Omega$ в силу замкнутости $y_0 \in \gamma \cup \partial\Omega \Rightarrow$ противоречие)

Разобьем $[0, L]$ на части размера $\Delta S = \frac{L}{N}$

Пусть $\{S_k = k\Delta S, x_k = x(S_k)\}$. Число N выберем так, чтобы $\Delta S = \frac{L}{N} < d$



Заметим, что $|x_k - x_{k-1}| \leq s_k - s_{k-1} < d(\cdot)$ - кратчайшее расстояние между точками этого отрезок).



Рассмотрим шары $B_d(x_k)_{k=0}^N$. В силу $|x_k - x_{k-1}| < d$ верно $x_{k+1} \in B_d(x_k)$. Примем утверждение 19.2 к первому шару. Как следствие $u(x_1) = u(a) \Rightarrow$ утверждение 19.2 применимо уже ко второму шару. В цепочке шаров конечное число \Rightarrow добираемся до точки b - теорема доказана.

□

• Заметим, что достаточно было потребовать свойство среднего и непрерывность, вместо гармоничности.

Следствие. Пусть Ω - ограниченная область, а $u(x)$ - гармоническая в Ω и непрерывная на $\bar{\Omega}$. Тогда $u(x)$ достигает \max и \min на $\partial\Omega$, т.е. $\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$

Доказательство. Либо максимум/минимум на границе, либо $u(x) \equiv \text{const}$ в Ω

□

Следствие. Для указанной в следствии 19 $u(x) \hookrightarrow |u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|$

Доказательство.

$$\begin{cases} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(y) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \\ -u(x) \leq \max_{\partial\Omega} (-u(y)) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \end{cases} \quad (27)$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)|$$

□

Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Ω - ограниченная область

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u(x)|_{\partial\Omega} = u_0(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

Определение 19.1. Классическое решение задачи Дирихле - функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению и граничному условию. (раньше было $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^{\boxed{1}}(\overline{\Omega})$, единица была нужна для формул Грина, теперь убираем ее)

Теорема единственности

Теорема 19.3. (единственности) Не может существовать более 1 классического решения задачи Дирихле (28).

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - классические решения (28). Тогда $v(x) = u_1 - u_2$ - классическое решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(x) \equiv 0, x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

Согласно принципу максимума, $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |v(x)| = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$

□

Билет 20. Функция Грина для задачи Дирихле (случай \mathbb{R}^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

Функция Грина

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ — некоторое классическое решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_0(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Запишем интегральное представление:

$$u = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy - \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

Рассмотрим задачу при фиксированном $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, & \forall y \in \Omega \\ g(x, y)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Если $\partial\Omega \in C^2$, то решение существует (пока не можем это доказать).

Используем вторую формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_y u(y) g(x, y) dy - \int_{\Omega} u(y) \Delta_y g(x, y) dy &= \\ &= 0 \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} g(x, y) dS_y - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y = 0$$

wanted to find

Тогда

$$u(x) = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) dS_y$$

Функция Грина, по определению:

$$G(x, y) \triangleq \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$$

Она симметрична и имеет ту же особенность, что и $\frac{-1}{4\pi|x-y|}$

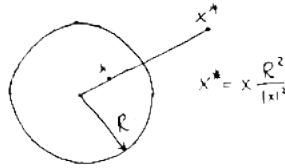
Функция Грина для шара

Получим функцию Грина для шара:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, y \in \Omega \\ g(x, y)|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Будем обозначать x^* точку, инверсную точке x относительно окружности $|y| = R$.

$$x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$$

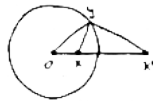


Покажем, что решением является функция:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4\pi R}, & x = 0 \end{cases}$$

Функция $g(x, y)$ - гармоническая по y в шаре $|y| < R$ (особенность $y = x^*$ лежит вне шара, т.к. x^* лежит внутри него).

Посмотрим значение функции g на границе:



Заметим, что $\triangle OXY \sim \triangle OYX^*$, т.к. $\angle XOY$ - общий, и $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|x^*|}$.

Из подобия $\frac{|y-x|}{|y-x^*|} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{R}$.

Значит, $\frac{R}{4\pi|x||y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi y}$, что и требовалось.

Формула Пуассона в шаре

Получим формулу Пуассона решения задачи Дирихле в шаре:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial G}{\partial y_k} \Big|_{|y|=R} = \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left[-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{|y-x^*|} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{y_k}{R} \left[\frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \frac{y_k - x_k^*}{|y-x^*|^3} \right] \end{aligned}$$

Вспомним, что $\frac{R}{|x| \cdot |y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{|x-y|}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} \Big|_{|y|=R} &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4\pi} \frac{y_k}{R} \left[\frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \left(\frac{|x|}{R} \right)^3 \frac{y_k - x_k^*}{|y-x|^3} \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \left[y_k - x_k - \frac{|x|^2}{R^2} (y_k - x_k^*) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[\langle y, y-x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \langle y, y-x^* \rangle \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[\underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} - \langle y, x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=\langle y, x \rangle}{\langle y, x^* \rangle} \right] = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R |y-x|^3} \end{aligned}$$

Итак, **формула Пуассона для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:**

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u_0(y) dS_y$$

Билет 21. Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)

Формулировка теоремы

Теорема 21.1. (Теорема Лиувилля) Функция $u(x)$, гармоническая в \mathbb{R}^3 ($\Delta u = 0$) и имеющая на бесконечности рост не выше степенного (т.е. $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu$), является многочленом от x_1, x_2, x_3 степени не выше μ .

Доказательство при $\mu \geq 0$

Общая идея - доказать, что все производные степени выше μ равны нулю.

1. Выберем $x \in \mathbb{R}^3, R > 0$ так, чтобы $R > 2|x|$:



В области $|x| < R$ $u(x)$ - гармоническая, а $u(x)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$.

Тогда применима формула Пуассона для шара:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} u(y) dS_y$$

В силу выбора R имеем $|y - x| \geq |y| - |x| \geq \frac{R}{2} > 0$.

Можем записать:

$$\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y$$

2. Докажем по индукции, что

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \mathcal{D}_x^\alpha \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}},$$

где P_α - однородный многочлен степени $|\alpha| + 2$ от $R, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$.

- База:

$$\mathcal{D}_x^{(0,0,0)} \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{|x - y|^3}$$

- Переход. Пусть требуемое верно $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$. Возьмём $\hat{\alpha} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\mathcal{D}_x^{\hat{\alpha}} \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}} \right] = \frac{\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_1} \cdot |x - y|^2 - (3 + 2|\alpha|) \cdot P_\alpha \cdot (x_1 - y_1)}{|x - y|^{3+2(|\alpha|+1)}} = \frac{P_{\hat{\alpha}}(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\hat{\alpha}|}}$$

3. Покажем теперь, что $\forall |x| \leq \frac{R}{2}, \forall |y| = R, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ справедлива оценка:

$$\left| \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right) \right| \leq \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}}.$$

Действительно, $|P_\alpha| \leq \tilde{C}_\alpha R^{|a|+2}$, а $|x - y|^{3+2|\alpha|} \geq \left(\frac{R}{2}\right)^{3+2|\alpha|} = \hat{C}_\alpha R^{3+2|\alpha|}$. Отсюда следует требуемая оценка.

4. Теперь докажем, что $\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| > \mu$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_x^\alpha u(x)| &= \frac{1}{4\pi R} \left| \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi R} \cdot C \cdot (1 + |x|)^\mu \cdot \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}} \cdot 4\pi R^2 \leq \\ &\leq \frac{C \cdot C_\alpha \cdot (1 + R)^\mu}{R^{|\alpha|}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Значит, } \mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| > \mu. \end{aligned}$$

5. Для гармонической в \mathbb{R}^3 функции $u(x)$ справедливо представление:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \\ &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x^\alpha, \end{aligned}$$

где $m = [\mu], \alpha! \triangleq \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!, x^\alpha \triangleq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$.

Доказательство при $\mu < 0$

Пусть $\mu < 0$. Тогда т.к. $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu, \mu < 0$, то $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^0 \equiv C_1$.

По предыдущему пункту, $u(x)$ - полином степени 0, т.е. константа.

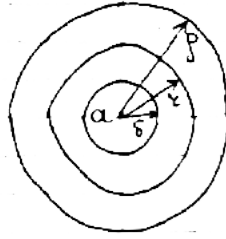
Но $|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{|\mu|}} \Rightarrow u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$.

Билет 22. Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай \mathbb{R}^3)

Теорема 22.1. (об устранимой особой точке). Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\mathring{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^3$ и $u(x) = o(E(x-a))$ при $x \rightarrow a$, где $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$. Тогда $u(x)$ можно так доопределить в точке a , что она будет гармонической в $B_\rho(a) = \{x : |x-a| < \rho\}$.

Доказательство.

1. $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \Leftrightarrow |x| \cdot u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
2. Возьмём $r < \rho$.



Функция $u(x)$ непрерывна на $\partial B_r(a)$.

Построим гармоническую функцию:

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y \in C(|x| \leq r)$$

3. Считаем $a = 0$. Покажем, что $u(x) \equiv \hat{u}(x)$ при $0 < |x| \leq r$. Строим $v(x) = u(x) - \hat{u}(x)$. Эта функция гармоническая в $\mathring{B}_r(a)$, непрерывная на $(0 < |x| \leq r)$, а также $v(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| = r$ и $|x| \cdot v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
4. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функции $W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x)$.
Функции W_ε^\pm также гармонические в $(0 < |x| < r)$, непрерывны на $(0 < |x| \leq r)$, а $W_\varepsilon^\pm(x)|_{|x|=r} = \frac{\varepsilon}{|x|} > 0$.
5. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\forall x : |x| \leq \delta \rightarrow |x| \cdot |v(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

При $|x| \leq \delta$:

$$W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x) \geq \frac{\varepsilon}{|x|} - |v(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[1 - \frac{|x| \cdot |v(x)|}{\varepsilon} \right] \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{\varepsilon}{2|x|} > 0$$

6. При $\delta \leq |x| \leq r$ функции $W_\varepsilon^\pm(x)$ — гармонические в $(\delta < |x| < r)$ и непрерывны на замыкании этой ограниченной области \Rightarrow по принципу максимума максимум и минимум достигаются на границе.

Значит, $W_\varepsilon^\pm(x) > 0$ при $\delta \leq |x| \leq r$.

Итак, $W_\varepsilon^\pm(x)$ положительна в $(0 < |x| \leq r) \Rightarrow |v(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|}$ в $(0 < |x| \leq r)$.

Значит, $v(x) \equiv 0$ при $0 < |x| \leq r \Rightarrow v(x)$ можно продолжить на $|x| \leq r$, положив $v(0) = 0$, ч.т.д.

Билет 23. Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай \mathbb{R}^3).

Пусть x лежит в окрестности ∞ , т.е. $|x| > R > 0$, а y лежит в окрестность нуля. Считаем $y \neq 0$. Тогда между этими окрестностями есть биекция - инверсия: $x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$, $x = x^* \frac{R^2}{|x^*|^2}$; $|x||x^*| = R^2$

Лемма 23.1. Если функция $u(x)$ гармоническая в окрестности ∞ : $|x| > R$ в \mathbb{R}^n , то функция $u^*(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \cdot u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right)$ будет гармонической в проколотой окрестности нуля. Если $u^*(y)$ гармоническая в проколотой окрестности нуля, то $u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \cdot u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right)$ -гармоническая в окрестности ∞ .

Определение 23.1. Преобразование $u(x) \mapsto u^*(y)$ и $u^*(y) \mapsto u(x)$ называется **преобразованием Кельвина**.

Доказательство. Пусть $x \in U_\varepsilon(\infty)$, $y \in U_\delta(0)$, $|x| = \rho$, $|y| = r$, $x = y \frac{R^2}{|y|^2}$.

Перейдем в сферическую систему. Лемму докажем в одну сторону.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3).$$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = \rho \cos \theta \end{cases}, \begin{cases} y_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ y_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ y_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

Тогда $\hat{u}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{r} \hat{u}\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)$:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \hat{u}^*(r, \theta, \varphi)) + \frac{1}{r} \underbrace{\Delta'_{\theta, \varphi}}_{\text{оп-р Лапласа -Бельтрани}} \hat{u}^*(r, \theta, \varphi) \right] = \frac{R}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\hat{u}\left(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho}, \theta, \varphi\right) \right] + \frac{R}{r^3} \Delta'_{\theta, \varphi} \hat{u}\left(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho}, \theta, \varphi\right)$$

Вспомогательная выкладка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] = \frac{\rho^2}{R^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] \end{aligned}$$

С учетом выкладки имеем:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho^3}{R^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] + \frac{\rho^3}{R^5} \Delta'_{\theta, \varphi} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\rho^5}{R^5} \Delta_x \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = 0$$

□

Теорема 23.2. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в окрестности бесконечности $|x| > R$ и $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$. Тогда $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ и $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$ при $x \rightarrow \infty$

Доказательство. Применим к нашей функции прямое преобразование Кельвина: $u^*(y) = \frac{R}{|y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right)$. Эта функция гармоническая в проколотой окрестности нуля: $0 < |y| < R$.

Далее, $|y|u^*(y) = Ru\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ (аргумент $\rightarrow \infty$) $\Rightarrow u^*(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right), y \rightarrow 0$.

- Воспользуемся теоремой об устранимой точке и доопределим $u^*(y)$ в нуле. Теперь $u^*(y)$ – гармоническая в $|y| < R \Rightarrow$ в $|y| \leq \frac{R}{2}$ есть непрерывность вплоть до границы любых производных $\Rightarrow \forall \alpha \exists M_\alpha: |D^\alpha u^*(y)| \leq M_\alpha \forall y: |y| \leq \frac{R}{2}$
- Пусть $|x| \geq 2R, y = x^* \Rightarrow |x^*| = |y| \leq \frac{R}{2}$. Тогда $u(x) = u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x||y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x|} u^*(y)$.
Можем оценить: $|u(x)| \leq \frac{R}{|x|} M_0 \Rightarrow u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), x \rightarrow \infty$.
- Возьмем теперь $\alpha = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} &= D^\alpha u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{R}{|x|} u^*(y) \right) = -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R}{|x|} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \left[\delta_k^1 - 2 \frac{x_1 x_k}{|x|^2} \right] \end{aligned}$$

Оценка:

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right| \leq R \frac{x_1}{|x|} \underbrace{\frac{1}{|x|^2} |u^*(y)|}_{\leq M_0} + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\left| \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \right|}_{\leq M_{(1,0,0)}} \left[\delta_k^1 + 2 \frac{|x_1| \cdot |x_k|}{|x|^2} \right] \leq \frac{C}{|x|^2}$$

Итак, $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Аналогично, по индукции, и для других производных.

□

Постановка внешних задач.

Определение 23.2. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется внешней, если $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} = \Omega_1$ – ограниченная область в \mathbb{R}^3

Определение 23.3. Внешнюю область в Ω будем называть внешней областью с гладкой (кусочно-гладкой) границей, если $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ – область с (кусочно-гладкой) границей.

Внешняя задача Дирихле Найти $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), \quad x \in \Gamma \\ u(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

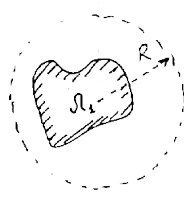
Такое решение называется **классическим**

Отличие постановок внешних и внутренних задач - $u(x) \rightarrow 0$ во внешних задачах. Для внутренней задачи Неймана - даже при выполнении условий разрешимости $\oint u_1(x) dS_x = 0$ решение не единственно

Теорема 23.3. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Дирихле*

Доказательство. Если u_1, u_2 - классические решения, то $v(x) = u_1 - u_2$ - удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} v(x)|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Строим сферу радиуса $R \geq \tilde{R}(\varepsilon), \Omega_1 \subset B_R(o)$. По следствию из принципа максимума $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega_1 \cup \partial B_R(0)} |v(y)| \leq \varepsilon$

Т.к. $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, имеем $v(x) \equiv 0$ в $\Omega \cup \Gamma$ □

Теорема 23.4. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Неймана*

Доказательство. Если u_1, u_2 - классические решения, то

$$\underbrace{v(x) = u_1 - u_2}_{\text{гармоническая в } \Omega \text{ и } C^2(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)} \quad -$$

удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Возьмем $R : \Omega_1 \subset B_R(0)$, $\rho > R$. По I-ф-лу Грина для v

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} \Delta v \cdot v \cdot dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x + \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x - \int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Получили $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x$. Далее $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx \leq$

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right| |v(x)| dS_x \leq (\text{теорема об асимптотике гармонических функций}) \leq$$

$$\frac{C_1}{\rho^2} \cdot \frac{C_2}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

Итак, $\nabla v(x) \equiv 0 \Rightarrow v(x) \equiv \text{const} = 0$, ч.т.д. □

Билет 24. Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.

Определение 24.1 (Интегральное уравнение Фредгольма второго рода). Уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Здесь:

- $x \in \bar{G}$, G — ограниченная область в \mathbb{R}^3 ;
- $f(x) \in C(\bar{G})$ — задана;
- $K(x, y) : (\bar{G} \times \bar{G}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- λ — числовой параметр;
- $u(x) \in C(\bar{G})$ — искомая функция.

Определение 24.2 (Интегральный оператор). Оператор K такой, что

$$(Ku)(x) = \int_G K(x, y)u(y)dy,$$

называется интегральным оператором с ядром $K(x, y)$.

Теорема 24.1. Если ядро $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то оператор K ограничен в $C(\bar{G})$ и имеет место оценка

$$\|K\| \leq \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \leq \max_{x, y \in \bar{G}} |K(x, y)|mesG$$

Доказательство. Если $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то $K : C(G) \rightarrow C(G)$.

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{C(\bar{G})} &= \max_{\bar{G}} |(Ku)(x)| = \max_{\bar{G}} \left| \int_G K(x, y)u(y)dy \right| \leq \max_{\bar{G}} \int_G |K(x, y)||u(y)|dy \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \max_{y \in \bar{G}} |u(y)| \int_G |K(x, y)|dy = \|u\|_{C(\bar{G})} \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \Rightarrow \|K\| = \sup_{\|u\|_{C(\bar{G})}=1} \frac{\|Ku\|_{C(\bar{G})}}{\|u\|_{C(\bar{G})}} \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \end{aligned}$$

□

Определение 24.3 (Полярное ядро). Ядро $K(x, y)$ называется полярным, если его можно представить в виде $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y$, где $\kappa \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, $\alpha < n$ — размерность пространства.

Лемма 24.2 (Признак полярного ядра). Ядро K является полярным $\Leftrightarrow K(x, y) \in C((\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\})$ и $|K(x, y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\beta} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y, B > 0, \beta < n$.

Доказательство. (\Rightarrow): Пусть ядро полярное. Тогда $\exists B : |\kappa| \leq B$ на $\bar{G} \times \bar{G}$ и $|K| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha}$.

(\Leftarrow): Пусть $\beta < n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \beta + \varepsilon < n$. Рассмотрим $\kappa = \begin{cases} K(x, y)|x - y|^{\beta+\varepsilon}, & x, y \in G, x \neq y; \\ 0, & x = y \in G. \end{cases}$

Построенная κ непрерывна в $(\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\}$.

Возьмем $x^0, y^0 \in G, x^0 \neq y^0 : |\kappa(x, y) - \kappa(x^0, y^0)| = |\kappa(x, y)| \leq |K||x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq \frac{B}{|x-y|^\beta}|x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq B|x - y|^\varepsilon = B|(x - x^0) - (y - y^0)|^\varepsilon \leq B(|x - x^0| + |y - y^0|)^\varepsilon \Rightarrow \kappa$ непрерывна всюду в $\bar{G} \times \bar{G}$.

Очевидно из определения κ , что можем записать $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^{\beta+\varepsilon}}$, т.е. это ядро – полярное по определению. \square

Определение 24.4 (Транспонированное ядро). Ядром, транспонированным к ядру $K(x, y)$, называется ядро $K'(x, y) = K(y, x)$. Соответствующий оператор K' так же называют транспонированным.

Теорема 24.3. *Интегральный оператор K с полярным ядром является ограниченным оператором в $C(\bar{G})$. Справедлива оценка: $\|K\| \leq \sup_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy$. $\forall \varepsilon > 0$ оператор K можно представить в виде суммы $K = K_\varepsilon^{cont} + K_\varepsilon^{pol}$, где $\|K_\varepsilon^{pol}\| \leq \varepsilon$, $\|(K_\varepsilon^{pol})'\| \leq \varepsilon$, K_ε^{cont} — и.о. с непрерывным ядром, K_ε^{pol} — и.о. с полярным ядром.*

Доказательство.

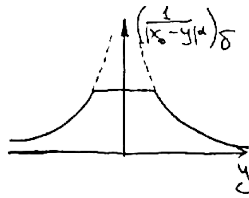
1. Пусть $\psi(y) = K(x, y)u(y)$. Функция ψ непрерывна при $y \neq x$.

В особенности: $|\psi(y)| = |K(x, y)||u(y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha} \|u\|_{C(\bar{G})}$ — интегрируема, т.к. $\alpha < n$.

Значит, порождается функция $\varphi(x) = \int_G \psi(y) dy = \int_G K(x, y)u(y) dy$ — этот интеграл существует $\forall x \in \bar{G}$.

2. Определим δ —срезку функции $\frac{1}{|x-y|^\alpha}$:

$$\left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha}, & |x-y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta^\alpha}, & |x-y| < \delta. \end{cases} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$



3. Представим $K(x, y) = K_\delta^1(x, y) + K_\delta^2(x, y)$, где $K_\delta^1(x, y) = \kappa(x, y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha})_\delta$,

$$K_\delta^2(x, y) = \begin{cases} 0, & |x-y| \geq \delta; \\ \kappa(x, y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha}), & |x-y| < \delta. \end{cases}$$

4. Выберем произвольно $u(x) \in C(\bar{G})$ и рассмотрим $\|K_\delta^2 u\|_{C(\bar{G})}$:

$$\|K_\delta^2 u\| = \max_{x \in G} \left| \int_{|y-x| < \delta} \kappa(x, y) \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha} \right) u(y) dy \right| \leq B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|y-x| < \delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|z| < \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha}.$$

Замена $\begin{cases} x_k = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k, & k = 1, \dots, n-1; \\ x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}, \end{cases}$ где $\varphi_k \in [0, \Pi]$, $\varphi_n \in [0, 2\Pi]$

Якобиан $J = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}$. Получили:

$$\|K_\delta^2 a\| \leq C_1 \|u\|_{C(G)} \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr = C \|u\|_{C(G)} \delta^{n-\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Получили $K_\delta^2 u \rightarrow Ku$ по норме $\Rightarrow Ku \in C(\bar{G})$.

5. $\|K\| \leq \|K_\delta^1\| + \|K_\delta^2\| \leq C\delta^{n-\alpha} + \|K_\delta^1\| < \infty \Rightarrow K$ — ограничен.

Для транспонированного ядра все рассуждения аналогичны, т.к. полярное ядро $K = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha}$ при замене x на y изменяет только непрерывный числитель κ .

□

Билет 25. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

Теорема 25.1. Пусть в интегральном уравнении (1) ядро K полярное и выполнено $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$, тогда:

- $\forall f \in C(G)$ (1) имеет единственное решение $u(x) \in C(\overline{G})$. Это решение при фиксированном λ_{fix} представимо абсолютно сходящимся в $C(\overline{G})$ рядом Неймана:

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i K^i f(x), \quad x \in G$$

- Оператор $I - \lambda K$ отображает всё $C(\overline{G})$ на всё $C(\overline{G})$ и имеет на $C(\overline{G})$ непрерывный обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$, причём $\|(I - \lambda K)^{-1}\| \leq (1 - |\lambda| \cdot \|K\|)^{-1}$

Доказательство. 1. Отметим, что оператор λK сжимающий: $\|\lambda K\| = |\lambda| \cdot \|K\| < 1$.

Построим итерационный процесс:

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x) \\ u_1 &= f(x) + \lambda K u_0(x) = f(x) + \lambda K f(x) \\ &\dots \\ u_n &= f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i K^i f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Все $u_k(x) \in C(\overline{G})$, причем $u_k = S_k$ – k -я частичная сумма ряда Неймана. Далее,

$$\begin{aligned} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq |\lambda|^i \cdot \|K\|^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\|_{C(\overline{G})} \implies \\ \implies \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\| = \frac{\|f\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}. \end{aligned}$$

Указанный в условии ряд сходится абсолютно в банаховом пространстве $C(\overline{G}) \implies$ он сходится \implies

$$\implies \exists u(x) \in C(\overline{G}) : \|U - U_n\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies U_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{C(\overline{G})}} U$$

- Покажем что U – решение: $U_n = f + \lambda K U_{n-1}$, при этом $U_n \longrightarrow U$ а $\lambda K U_{n-1} \longrightarrow \lambda K U$ в силу непрерывности оператора K .

- Единственность: пусть U_I, U_{II} – решения, обозначим $V = U_I - U_{II} \in \overline{G}$. При этом V удовлетворяет однородному уравнению $V = \lambda K V$, $x \in C(\overline{G})$. Тогда

$$\|V\| \leq |\lambda| \cdot \|K\| \cdot \|V\| \longrightarrow (1 - |\lambda| \cdot \|K\|) \cdot \|V\| \leq 0 \longrightarrow \|V\| = 0 \longrightarrow V \equiv 0$$

2. $u = \lambda K u + f \longleftrightarrow (I - \lambda K)u = f$. То, что $I - \lambda K$ отображает всё $C(\overline{G})$, – ясно. Согласно пункту 1 $\forall f \in C(\overline{G}) \exists! u(x)$ – решение, значит оператор отображает всё $C(\overline{G})$ на всё $C(\overline{G})$. Значит, существует обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$. Он ограничен т.к.

$$\|(I - \lambda K)^{-1}f\|_{C(\overline{G})} = \|U\|_{C(\overline{G})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f\|_{C(\overline{G})} \leq \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} < \infty$$

□

Билет 26. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

Определение 26.1. Интегральное уравнение вида

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, \quad K'(x, y) = K(y, x)$$

называется союзным уравнению (1).

Определение 26.2. Ядро $K(x, y) \in (C(\overline{G}) \times C(\overline{G}))$ называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y), \quad a_i, b_i \in C(\overline{G})$$

Будем считать что $\{a_1 \dots a_N\}$ и $\{b_1 \dots b_N\}$ – линейно независимые наборы (если это не так, то уменьшим N). Будем теперь рассматривать уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (2)$$

- Введем в $C(\overline{G})$ билинейную форму $\langle u; v \rangle = \int_G u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in C(\overline{G})$

- Введем также следующие обозначения:

- $\mu_{ij} = \langle b_i; a_j \rangle$; $A = \|\mu_{ij}\|_{i,j}^N$
- $\varphi_i = \langle b_i; f \rangle$; $\vec{\varphi} = \|\varphi_1 \dots \varphi_N\|^T$
- $c_i = \langle b_i; u \rangle$; $\vec{c} = \|c_1 \dots c_N\|^T$ (3)

-

Лемма 26.1 (об эквивалентности). Пусть $u(x) \in C(\overline{G})$ – решение уравнения (2). Тогда $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$, $x \in \overline{G}$, где \vec{c} определяется (3) и удовлетворяет системе $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. Обратно, если \vec{c} – некоторое решение системы $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$ то $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$, $x \in \overline{G}$ является решением интегрального уравнения.

Доказательство. 1. Пусть $u(x)$ решение интегрального уравнения. Тогда

$$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x)c_i + f(x)$$

Домножим на b_i и проинтегрируем по G :

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i \iff \vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{\varphi}$$

2. Обратно, если $c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i$, $i = \overline{1, N}$ то рассмотрим $u_*(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) c_i + f(x)$. Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} u_* - \lambda \int_G K(x, y) u_*(y) dy - f(x) &= \\ &= u_* - \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^N a_i(x) b_i(y) \right] u_*(y) dy - f(x) = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[c_j - \int_G b_j(y) u_*(y) dy \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^N c_i \underbrace{\int_G b_j(y) a_i(y) dy}_{\mu_{ji}} - \underbrace{\int_G b_j(y) f(y) dy}_{\varphi_j} \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \underbrace{\left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^N \mu_{ji} c_i - \varphi_j \right]}_0 = \end{aligned}$$

□

Таким образом, исследование интегральных уравнений с вырожденным ядром эквивалентно исследованию системы $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$.

Offtop 26.1. Отметим что для союзного уравнения $v(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \underbrace{\int_G a_j(y) v(y) dy}_{d_j} + g(x)$

соответствующей системой является $(E - \lambda A^T) \vec{d} = \vec{\varphi}$, где $\vec{\varphi} = \int_G \vec{a}(y) g(y) dy$.

Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром

Пусть $D(\lambda) = \det(E - \lambda A) = \det(E - \lambda A^T)$. Ясно что $D(\lambda) \neq 0$ т.к. $D(0) = 1$. $D(\lambda)$ есть многочлен $P(\lambda)$, $\deg P \leq N \longrightarrow$ он имеет p действительных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $0 \leq p \leq N$.

- Если $D(\lambda) \neq 0$ то $\forall k : \lambda_k \neq \lambda \longrightarrow$ у уравнения $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$ решение существует и оно единственно. Аналогичное утверждение верно и для союзного уравнения.
- Если $\exists k : \lambda_k = \lambda \rightarrow Rg(E - \lambda A) = Rg(E - \lambda A^T) = r < N$

Пусть $m = N - r > 0$. Тогда базис в пространстве решений $(E - \lambda A)\vec{c}$ обозначим как $\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n$ а базис в пространстве решений $(E - \lambda A^t)\vec{d} = 0$ обозначим как $\vec{d}_1 \dots \vec{d}_n$. Соответствующие им решения обозначим $u_1 \dots u_m$ и $v_1 \dots v_m$ соответственно $(u_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) c_{j,k}, v_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) d_{j,k})$.

Покажем что $u_1 \dots u_m$ базис решения однородного уравнения. Пусть

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0 \iff \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\lambda \sum_{j=1}^n a_j(x) c_{j,i} \right] = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i c_{i,j} = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{c}_i = 0$$

Значит система $u_1 \dots u_m$ — линейно независима.

Определение 26.3 (Собственные функции и собственные числа оператора K). Функция $u(x) \in C(\bar{G})$, $u \neq 0$ удовлетворяющая уравнению

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y) u(y) dy, \quad x \in C(\bar{G})$$

называется собственной функцией ядра K или собственной функцией оператора K . Соответствующие собственным функциям λ называются характеристическими числами ядра/оператора K .

Свойства характеристических чисел:

- $\lambda \neq 0$ (иначе $u \equiv 0$).
- λ — не собственное значение оператора: $u = \lambda K u \Leftrightarrow K u = \frac{1}{\lambda} u \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$ — собственное значение.
- Собственные значения K и K' совпадают.

Рассмотрим систему $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. По теореме Фредгольма эта система совместна тогда и только тогда, когда каждое решение сопряженной однородной системы $(E - \lambda A^t)\vec{d} = \vec{0}$ ортогонально $\vec{\varphi}$:

$$\langle \vec{\varphi}; \vec{d} \rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^N \varphi_j d_j = 0 \iff \int_G f(y) \left[\sum_{j=1}^N b_j(y) d_j \right] dy = 0 \iff \int_G f(y) v(y) dy = 0$$

Получили что интегральное уравнение с вырожденным ядром совместно тогда и только тогда, когда f ортогонально каждому решению однородного союзного уравнения.

Сформулируем все полученные и доказанные выше результаты в виде теорем Фредгольма:

Теорема 26.2 (Первая теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему однозначно разрешимы при любых правых частях из $C(\bar{G})$.

Теорема 26.3 (Вторая теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) = 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему имеют одинаковое число линейно независимых решений $m = N - \text{Rg}(E - \lambda A)$

Теорема 26.4 (Третья теорема Фредгольма). Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешения интегрального уравнения с вырожденным ядром необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x) \in C(\bar{G})$ был ортогонален всем решениям союзного уравнения.

Билет 27. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

и ему союзное

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, K'(x, y) = K(y, x) \quad (2)$$

Теорема 27.1 (Первая теорема Фредгольма (Теорема Фредгольма об альтернативах)). *Либо интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в $C(\overline{G})$ для каждой функции $f(x)$ из $C(\overline{G})$ либо соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.*

Теорема 27.2 (Вторая теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он же имеет место и для уравнения (2). Как однородное уравнение соответствующее (1) так и однородное уравнение соответствующее (2) имеют конечные числа линейно независимых собственных функций, причем эти числа совпадают.*

Теорема 27.3 (Третья теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место второй случай альтернативы, то неоднородное уравнение (1) разрешимо в $C(\overline{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие "ортогональности":*

$$\int_G f(y)v(y)dy = 0$$

Теорема 27.4. *В любом круге $|\lambda| < R$ на \mathbb{C} у ядра уравнения (1) имеется не более чем конечное количество характеристических чисел. Единственная возможная точка накопления характеристических чисел – бесконечно удаленная точка.*

Билет посвящен доказательству этих теорем.

Теорема 27.5 (Аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , а $W(x) \in C(\overline{G})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon(x)$ – многочлен от $x_1 \dots x_n$ такой, что $\|h(x) - P_\varepsilon(x)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$.*

Будем использовать данный факт из анализа.

Лемма 27.6. *Пусть K – интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ этот оператор можно представить в виде $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{H}{K}_\varepsilon$, $\left\| \overset{H}{K}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$, $\left\| \overset{H}{K}'_\varepsilon \right\| < \varepsilon$*

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ найдем $P_\varepsilon(x, y)$ от $x_1..x_n, y_1..y_n$: $\|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$. Тогда $\left\| \overset{H}{K_\varepsilon} \right\| \leq \|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} \cdot \text{mes}G = \varepsilon \cdot \text{mes}G$. При этом оператор $\overset{B}{\Phi}_\varepsilon$ имеет вырожденное ядро P_ε . \square

Лемма 27.7. Пусть K – интегральный оператор с полярным ядром $K(x, y)$ $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ этот оператор можно представить в виде $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q'_\varepsilon} \right\| < \varepsilon$

Доказательство. Представим K в виде суммы $\overset{H}{K}_\varepsilon + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$. По предыдущей лемме $\overset{H}{K} = \Phi + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Значит, $K = \Phi + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} = \Phi + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$, $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ \square

Перейдем к теоремам Фредгольма.

Пусть $R > 0, \overline{D_R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$.

- Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2R}$, $K = \Phi + Q$, $P = P(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j(x)b_j(y)$, $\|Q\|, \|Q'\| < \varepsilon$
- Представим уравнение $u = \lambda Ku + f$ в виде $(I - \lambda K)u = \lambda \Phi u + f$, аналогично, его союзное уравнение $v = \lambda K'v + g$ представим в виде $(I - \lambda K')v = \lambda \Phi'v + g$. Далее представим эти уравнения в следующей форме:

$$(I - \lambda Q)u = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \int_G b_j(y)u(y)dy + f(x)$$

$$(I - \lambda Q')v = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \int_G a_j(y)v(y)dy + g(x)$$

- Q – оператор с малой нормой: $|\lambda| \cdot \|Q\| \leq \frac{|\lambda|}{2R} < 1$. Аналогичные рассуждения верны и для оператора Q' , а значит операторы $(I - \lambda Q), (I - \lambda Q')$ непрерывно обратимы. Перепишем уравнения:

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}a(x)}_{\hat{a}_j(x, \lambda)} \int_G b_j(y)u(y)dy + \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}f(x)}_{\hat{f}(x)} = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y)u(y)dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

$$v(x) = \dots = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{b}_j(x, \lambda) \int_G a_j(y)u(y)dy + \hat{g}(x, \lambda)$$

Это уравнения с вырожденными ядрами, их решение эквивалентно решению систем:

$$(E - \lambda \hat{A})\vec{c} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}(\lambda) = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu_{i,j} = \langle b_i; \hat{a}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle b_i; \hat{f} \rangle$$

$$(E - \lambda \hat{A}')\vec{d} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}'(\lambda) = \|\mu'_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu'_{i,j} = \langle a_i; \hat{b}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle a_i; \hat{g} \rangle$$

Лемма 27.8. Пусть K – полярное ядро такое, что $\|\lambda K\| < 1$. Тогда $\forall a, b \in C(\overline{G}) \longrightarrow \langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle = \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx$ – регулярная функция при $|\lambda| < \|K\|^{-1}$. Если дополнительно выполнено $|\lambda| \cdot \|K'\| < 1$, то $[(I - \lambda K)^{-1}a; b] = [a; (I - \lambda K')^{-1}b]$.

Доказательство.

$$(I - \lambda K)^{-1}a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j a(x) \implies \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx = \int_G \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j(a(x))b(x)}_{\text{сход. равномерно}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[\int_G K^j a(x)b(x)dx \right]$$

Полученный ряд сходится абсолютно т.к. справедлива оценка

$$\left| \lambda^j \int_G K^j(a(x))b(x)dx \right| \leq \|a\| \cdot \|b\| \cdot \text{mes}G \cdot \underbrace{|\lambda|^j \cdot \|K\|^j}_{q_j; q < 1}$$

Докажем теперь вторую часть:

$$\|\lambda K'\| < 1 \implies \exists (I - \lambda K')^{-1} \in \mathcal{L}(C(\overline{G})) \implies (I - \lambda K')^{-1}b = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b(x)$$

Тогда:

$$\langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle \stackrel{*}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle K^j a; b \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle a; (K')^j b \rangle = \left\langle a; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b \right\rangle = \langle a; (I - \lambda K')^{-1}b \rangle$$

Докажем (*):

$$\begin{aligned} \langle Ku; v \rangle &= \int_G \int G K(x, y) u(y) dy v(x) dx = \\ &= \int_G u(y) \left[\int G K(x, y) v(x) d(x) \right] dy = [x \rightarrow y; y \rightarrow x; (**)] = \\ &= \int_G u(x) \left[\int G \underbrace{K(y, x)}_{K'(x, y)} v(y) dy \right] dx = \langle u; K' v \rangle \end{aligned}$$

Где переход (**) верен по т. Фубини-Тонелли. □

Лемма 27.9. Матрица $\hat{A}'(\lambda)$ является транспонированной к матрице $\hat{A}(\lambda)$. Элементы \hat{m}_{ij} матрицы \hat{A} – регулярные в круге $|\lambda| < 2R$ функции λ .

Доказательство.

$$|\lambda| < 2R \implies |\lambda| \cdot \|Q\| < 1, |\lambda| \cdot \|Q'\| < 1$$

$$\hat{\mu}'_{ij} = \langle a_i; (I - \lambda Q')^{-1}b_j \rangle = \langle (I - \lambda Q)^{-1}a_i; b_j \rangle = \hat{\mu}_{ji}$$

Регулярность следует из предыдущей леммы. □

- Рассмотрим $D(\lambda) = \det(E - \lambda \hat{A}(\lambda)) = \det(E - \lambda \hat{A}'(\lambda))$. Это регулярная в круге $|\lambda| < 2R$ функция, $D(0) = 1 \implies D(\lambda) \not\equiv 0$.

В круге $|\lambda| < R$ может быть только конечное число нулей λ_k иначе по теореме о единственности имели бы $D(\lambda) \equiv 0$.

Если λ не корень $D(\lambda) = 0$ то оба уравнения однозначно разрешимы.

Если же λ – корень $D(\lambda) = 0$, то оба уравнения имеют конечномерные пространства решений одной размерности.

Таким образом, мы доказали следующие эквивалентности:

- разрешимость исходного уравнения
- разрешимость системы

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y) u(y) dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

- разрешимость $(E - \lambda \hat{A}') \vec{d} = \vec{\varphi}$

Осталась третья теорема: условие разрешимости: $\vec{\varphi} \perp \vec{d}_{\text{одн}}$ – любому решению $[E - \lambda \hat{A}'(\lambda)] = \vec{0}$ т.е.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=1}^N \hat{\varphi} d_j}_0 &= \sum_{j=1}^N \langle b_j; \hat{f} \rangle d_j = \sum_{j=1}^N \langle b_j; (I - \lambda Q)^{-1} f \rangle_j = \\ &= \sum_{j=1}^N \langle f; (I - \lambda Q')^{-1} b_j \rangle_j = \left\langle f, \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q')^{-1} b_j}_{\hat{b}_j} d_j \right\rangle = \langle f; v \rangle = \int_G f v dx = 0 \end{aligned}$$

Билет 28. Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.

- Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$. Эту запись нужно понимать следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{-1}{4\pi|y|} \right) \Delta_y \varphi(y) dy = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Определение 28.1. Функция $\vartheta(x)$ вида $\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$ называется объемным ньютоновым потенциалом.

Замечание. Это свёртка фундаментального решения с функцией $-4\pi\rho(x)$

Теорема 28.1. 1. Пусть $\rho(x)$ — кусочно-непрерывная, ограниченная, финитная. Тогда $\vartheta(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и $\vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

2. Если \exists область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: $\rho(x) \in C^1(\Omega)$, то $\vartheta(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta\vartheta(x) = -4\pi\rho(x)$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Доказательство проведем в менее общей постановке: считаем $\rho \in C^\infty$ и $\text{supp } \rho$ компактом.

- $\exists C : |\rho(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$. Считаем, что $\text{supp } \rho \subset B_A(0)$. Берем $x : |x| > 2A$. Тогда если $|y| \leq A$, то $|y| < \frac{|x|}{2}$.
- Оценка:

$$\begin{aligned} |\vartheta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| = \\ &= \left| \int_{|y| < A} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| \leq \int_{|y| < A} \frac{|\rho(y)|}{|x-y|} dy \leq \frac{c}{\frac{|x|}{2}} \int_{|y| < A} \frac{dy}{1} = \frac{8\pi c A^3}{3|x|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

- Пользуемся утверждением из анализа: Пусть $F(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)$, $j = \overline{1, n}$ непрерывны на $\Omega \times G$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $g(x)$ абсолютно интегрируема: $\int_G |g(x)| dx < \infty$. Тогда $\int_G F(x, y) g(y) dy \in C^1(\overline{\Omega})$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_G F(x, y) g(y) dy = \int_G \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) g(y) dy$$

- Пусть $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\exists A : \rho(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| > A$. Пусть

$$\Omega = \{x : |x| < R\}; \quad F(x, y) = \rho(x + y)$$

$$G = \{y : |y| < R + A\}; \quad g(y) = \frac{1}{|y|}.$$

При $|x| < R, |y| > A + R \Leftrightarrow |x + y| \geq |y| - |x| \geq A + R - R = A \Rightarrow \rho(x + y) \equiv 0$.

•

$$\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy = \int_{|y| < R+A} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = \int_{|y| < R+A} \frac{\partial \rho(x + y)}{\partial x_j} \frac{1}{|y|} dy;$$

Также для остальных производных.

•

$$\Delta \vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \rho(x + y)}{|y|} dy = -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{-1}{4\pi|y|} \right) \underbrace{\Delta_y \rho(x + y)}_{\parallel \Delta_x \rho(x + y)} dy = -4\pi \langle \delta(y), \rho(x + y) \rangle = -4\pi \rho(x).$$

□

Билет 29. Понятие области с границей C^2 . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в \mathbb{R}^3

Определение 29.1. Область с границей Γ класса C^2 - ограниченная область ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$), удовлетворяющая условиям :

- $\forall x^0 \in \Gamma \exists$ декартова с.к. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в x^0 и функция $F_{x^0}(\xi')$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi'| \leq r$ т.ч. что
 - $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r)$; $F_{x^0}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i}(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$
 - Множество $\sum_{x^0} = \{x : \xi_3 = F_{x^0}(\xi'), |\xi'| \leq r\} \subset \Gamma$
 - Множество $U_{x^0}^- = \{x : F_{x^0}(\xi') - h < \xi_3 < F_{x^0}(\xi'), |\xi'| < r\} \subset \Omega$
 - Множество $U_{x^0}^+ = \{x : F_{x^0}(\xi') < \xi_3 < F_{x^0}(\xi') + h, |\xi'| < r\}$ не пересекается с Ω
- $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r) \Rightarrow \left| \frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i} \right| \leq M_1; \left| \frac{\partial^2 F_{x^0}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq M_2, |\xi'| \leq r$
- Постоянные $r > 0$, $h > 0$ и M_1, M_2 можно выбрать не зависящими от $x^0 \in \Gamma$ и от с.к. ξ

Определение 29.2. Указанную с.к. и окрестность $U_{x^0} = U_{x^0}^- \cup U_{x^0}^+$ назовем **подходящим** для X^0 , а ξ' - **локальными координатами** на куске \sum_{x^0} границы Γ .

Определение 29.3. Неограниченная область называется **внешней областью с границей** $\Gamma \in C^2$, если $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ есть ограниченная область с границей $\in C^2$.

Определение 29.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - область с границей Γ класса C^2 . Функция вида $V^{(0)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y$ называется **потенциалом простого слоя**.

Теорема 29.1. Пусть $\mu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда:

1. $V^0(x) \in C(\mathbb{R}^3)$
2. $V^0(x)$ гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$
3. $V^0(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$

Доказательство. 2. Пусть $x^1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, $\delta_1 = \text{dist}\{x^1, \Gamma\} > 0$



Возьмем шар $\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^1| < \frac{\delta_1}{2}\}$. Тогда расстояние от произвольной точки $x \in \overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}$ до $\forall y \in \Gamma$ не меньше $\frac{\delta_1}{2} : |x - y| \geq |x^1 - y| - |x - x^1| \geq \delta_1 - \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$

Поэтому $\frac{1}{|x - y|} \in C^\infty(\underbrace{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}_x \times \underbrace{\Gamma}_y) \Rightarrow \mathcal{D}_x^\alpha \frac{1}{|x - y|} \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma)$

По теореме о дифференцировании интеграла по параметру (формулировка в билете 5) имеем

$$\mathcal{D}_x^\alpha V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \mathcal{D}_x^\alpha \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma) \quad \forall \alpha\text{-мультииндекса}$$

В частности, $\Delta_x V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mu(y) dS_y = 0$, что и требовалось.

1. Если $x \in \Gamma$, то $\frac{1}{|x - y|}$ - полярное ядро, следовательно, интегральный оператор с полярным ядром переводит непрерывную функцию $\mu(y)$ в непрерывную $\Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\Gamma)$.

Мы уже доказали, что $V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \Rightarrow$ осталось показать непрерывность в областях Ω следующего вида:



Построим для этого последовательность функций, равномерно сходящихся к $V^{(0)}(x)$:

Пусть $\left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta$ - δ -срезка функции $\frac{1}{|x - y|}$:

$$\left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x - y|}, & \text{если } |x - y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta}, & \text{если } |x - y| < \delta. \end{cases}$$

$$V_\delta^{(0)}(x) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \mu(y) dS_y \in C(\overline{\Omega})$$

Будем выбирать $0 < \delta < \frac{d}{2}$ (d - из свойств области с границей класса C^2) - такое число, что $\forall x^0 \in \Gamma \rightarrow B(x^0, d) \subset U_{x^0}$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| = \left| \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x - y|} - \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) \mu(y) dS_y \right|$$

Если $x : |x - y| \geq \delta$, то $\left(\frac{1}{|x - y|} - \left(\frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) = 0$

В противном случае она равна $\left| \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{\delta} \right)}_{>0} \underbrace{\mu(y)}_{|\mu(y)| \leq \|\mu\|_{C(\Gamma)} = C} dS_y \right| \geq C \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$

Нам осталось оценить интеграл $\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$



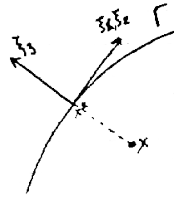
Пусть $x^* = \pi_\Gamma(x)$. Построим $B(x, \delta)$ и $B(x^*, 2\delta)$.

Ясно, что т.к. $|x - x^*| < \delta \Rightarrow B(x, \delta) \subset B(x^*, 2\delta)$.

Увеличивая область интегрирования, запишем:

$$\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|} \leq \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x^* - y| < 2\delta}} \frac{dS_y}{|x^* - y|}$$

По определению числа d имеем $B(x^*, 2\delta) \subset U_{x^*}$.



Свяжем с x^* локальную систему координат и функцию $F_{x^*}(\xi_1, \xi_2)$

Т.к. $y \in \Gamma, y = (\xi_1, \xi_2, F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))$

Т.к. $x^* = \pi_\Gamma(x)$, точка x имеет ненулевую компоненту только по ξ_3 : $x = (0, 0, x_3)$

Оценки: $|x - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_3 - F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2$

$|x^* - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \Rightarrow$ расширяем область интегрирования до

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta$$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| \geq C \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right)^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 \leq$$

$$C \sqrt{1 + 2M_1^2} \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

В полярной системе координат $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ последний интеграл примет вид $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\delta} \frac{r dr}{r} = 4\pi\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Итак, $\underbrace{V_\delta^{(0)}(x)}_{\in C(\bar{\Omega})} \Rightarrow_{\delta \rightarrow 0} V^{(0)}(x) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3)$.

3. $\mu(x) \in \Gamma \Rightarrow |\mu(x)| \leq \|\mu\|_\Gamma = C \quad \forall x \in \Gamma$

Возьмем сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри этой сферы. Тогда $\forall y \in \Gamma \rightarrow |y| \leq R$.

При $x \rightarrow \infty \rightarrow |x| \geq 2R \Rightarrow y \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |V^0(x)| \leq \int_\Gamma \frac{|\mu(y)|}{|x-y|} dS_y \leq \frac{2C}{|x|} \underbrace{\int_\Gamma dS_y}_{\tilde{C}} \Rightarrow V^0(x) =$

$O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

□

Билет 30. Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность

Пусть Γ - граница класса C^2 ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Определение 30.1. Функция вида $V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y$ называется *потенциалом двойного слоя*

Сразу будет удобно переписать определение в иной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{k=1}^3 \frac{n_k(y)(x_k - y_k)}{|x-y|^3} = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y \end{aligned}$$

Лемма 30.1. Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда:

а) $V^{(2)}(x)$ - гармоническая функция в $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$;

б) $V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \rightarrow \infty$

Доказательство.

а)

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \underbrace{n_k(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{т.к. } \Gamma \in C^2}} \underbrace{\nu(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{по условию}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{-\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} \\ \in C((\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times \Gamma)}} dS_y = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Gamma} \underbrace{n_x(y) \nu(y) \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{\text{потенциал простого слоя с} \\ \mu = n_k \cdot \nu \in C(\Gamma) \\ \downarrow \\ \text{является гармонической} \\ \text{функцией в } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma}} dS_y \end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться тем, что производная гармонической функции - гармоническая.

б) Возьмём сразу сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри сферы. При

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow |x| > 2R \Rightarrow |y| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2 \geq \frac{|x|^2}{4}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \leq \frac{|x-y| \cdot |\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V^{(2)}(x)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y \right| \leq \frac{4}{|x|^2} \int_{\Gamma} |\nu(y)| dS_y \leq 4 \|\nu(y)\|_{C(\Gamma)} \int_{\Gamma} dS_y \cdot \frac{1}{|x|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

□

Лемма 30.2. Если Ω ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, то $\forall x, y \in \Gamma, x \neq y$, справедлива оценка

$$\left| \frac{(x - y, n(y))}{|x - y|^2} \right| \leq \frac{M}{|x - y|}$$

Доказательство. Пусть d - число из определения поверхности с границей $\Gamma \in C^2$:

- если $|x - y| \geq d$, то $\frac{|(x - y, \bar{n}_y)|}{|x - y|^3} \leq \frac{1}{|x - y|^2} \leq \frac{1}{d} \frac{1}{|x - y|}$
- если $|x - y| < d$, то свяжем y с локальной системой координат. В этой системе:
 $y = (0, 0, 0)$, $x = (\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2))$, $\bar{n}_y = (0, 0, 1) \Rightarrow$
 $|x - y, \bar{n}_y| = |F_y(\xi_1, \xi_2)| \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + F_y^2(\xi_1, \xi_2)) = M_2|x - y|^2$, что и требовалось.

□

Лемма 30.3. Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя $V^{(2)} \in C(\Gamma)$

Доказательство. Используем признак полярного ядра (билет №24). В силу леммы $|K(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|}$ и $K(x, y) = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^2} \in C((\Gamma \times \Gamma) \setminus \{x = y\})$ Оператор с полярным ядром переводит непрерывные функции в непрерывные, а $\nu \in C(\Gamma) \Rightarrow V^{(2)}(x) \in C(\Gamma)$

□

Наша цель - описать скачок $V^{(2)}(x)$ при переходе через границу. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 30.4. Пусть Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Тогда интеграл $V_{GAUSS}^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \nu(y) \cdot 1 \cdot dS_y = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} dS_y$ - (интеграл Гаусса) равен

$$\begin{cases} -4\pi, x \in \Omega \\ -2\pi, x \in \Gamma \\ 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

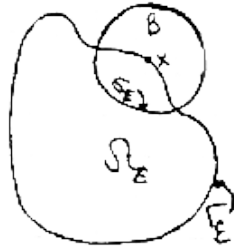
Доказательство. 1) Пусть $x \in \Omega$. Возьмём $u(x) \equiv 1$ и запишем представление этой функции в виде суммы трёх потенциалов:

$$u(x) \equiv 1 = \int_{\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\Delta 1}_{=0} dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \left(\frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y}}_{=0} = -\frac{1}{4\pi} V_{GAUSS}^{(2)}(x)$$

2) Пусть $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ Возьмём $u(y) \equiv 1$ и $v(y) = \frac{1}{|x - y|}$ и воспользуемся для этих функций первой формулой Грина:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\Delta_y v(y) \cdot u(y)}_{=0} dy = \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} v(y) u(y) dS_y}_{=V_{GAUSS}^{(2)}(x)} - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla_y v(y), \nabla 1) dy}_{=0} \Rightarrow V_{GAUSS}^{(2)}(x) = 0$$

3) Пусть $x \in \Gamma$. Введём $B = B(x, \varepsilon)$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus B$, $\sigma_\varepsilon = \partial B \cap \bar{\Omega}$ Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon \Rightarrow x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$



Согласно второму пункту можем написать $\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = 0$ Значит

$$\underbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y}_{\rightarrow \int_{\Gamma} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0} = 0$$

Покажем, что

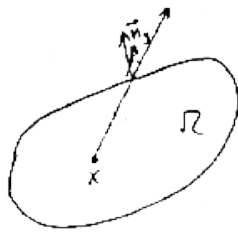
$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y \rightarrow 2\pi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} = \frac{|x-y||\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Поэтому } \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} dS_y$$

При малых ε кусок границы Γ внутри \rightarrow к полуплоскости $\Rightarrow \sigma_\varepsilon \rightarrow$ к полусфере.

Поэтому $\int_{\sigma_\varepsilon} dS_y = 2\pi\varepsilon^2 (1 + O(1))$, что и требовалось □

Offtop : Геометрический смысл интеграла Гаусса: $\frac{(y-x, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y = \frac{dS_y \cos \beta}{|x-y|^2} = d\Omega$



– телесный угол, под которым из точки x видна часть dS_y . Интеграл Гаусса есть сумма всех таких углов со знаком ”минус”. Поэтому геометрически последняя лемма очевидна.

Лемма 30.5. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$. Пусть $x^o \in \Gamma$. Тогда

$$\forall x : (x \in \mathbb{R}^3) \cap \left(|x - x^o| < \frac{d_*}{2} \right) \text{ верно } \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y < K, d_* = \frac{1}{2} \min \left(d, \frac{2}{M_2} \right)$$

Без доказательства

Лемма 30.6. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$. Пусть $x^o \in \Gamma$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x^o} W(x, x^o) = W(x^o, x^o), \text{ где } W(x, x^o) = \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y, \text{ а } \nu(x) \in C(\Gamma)$$

Доказательство. Требуется показать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - x^o| < \delta_\varepsilon \rightarrow |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| < \varepsilon$. Функция $\nu(x)$ непрерывна на компакте, следовательно она и равномерно непрерывна на нём. Значит $\exists \beta = \beta(\varepsilon) : \quad \forall y \in \Gamma : |y - x^o| < \delta \rightarrow |\nu(y) - \nu(x^o)| < \varepsilon$.

Выберем $\beta \leq \frac{d_*}{2}$

$$\begin{aligned} |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| &= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right) (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y \right| \leq \\ &\leq \int_{|y-x^o|<\beta} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\leq K+K} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq \varepsilon} dS_y + \\ &\quad \int_{\Gamma \setminus (|y-x^o|<\beta)} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\substack{\leq \psi(x); \psi(x^o)=0 \\ \downarrow \\ \exists \delta_1: \|\psi(x)\| < \varepsilon, \\ \text{если } |x-x^o| < \delta_1}} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq 2\|\nu\|_{C(\Gamma)}} dS_y \end{aligned}$$

Значит, при $|x - x^o| \leq \max \left(\frac{d_*}{2}, \delta_1(\varepsilon) \right)$ имеет место оценка $|W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| \leq 2K\varepsilon + 2\varepsilon\|\nu\|_{C(\Gamma)}$ □

Теперь можно перейти к описанию скачка потенциала.

Теорема 30.7. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$, а $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя $V^{(2)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ и $V^{(2)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ (можно непрерывно продолжить на замыкания). Обозначим $\forall x^o \in \Gamma : V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x); V_-^{(2)}(x^o) =$

$$\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) \text{ Тогда } V_{\pm}^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) \mp 2\pi\nu(x^o)$$

Доказательство.

$$V^{(2)}(x) = W(x, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y$$

$$V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) = \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o) + \nu(x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \Omega \text{ это } 4\pi} = W(x^o, x^o) - 4\pi\nu(x^o)$$

Далее, если $x^o \in \Gamma$, то $V^{(2)}(x^o) = W(x^o, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x^o - y, \bar{n}_y)}{|x^o - y|^3} \nu(y) dS_y = W(x^o, x^o) - 2\pi\nu(x^o)$

Поэтому $V_+^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) - 2\pi\nu(x^o)$ Это, в частности, означает, что $V^{(2)}(x)$ можно непрерывно продолжить до $\bar{\Omega}$. Для стремления $x \rightarrow x^o$ извне доказательство аналогично:

$$V_-^{(2)}(x^o) = \underbrace{\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} + \lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} \nu(x^o) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ это } 0} = W(x^o, x^o) = V^{(2)}(x^o) + 2\pi\nu(x^o)$$

Это, в частности, означает, что $V^{(2)}$ можно непрерывно продолжить до $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

□

Билет 31. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью Формула скачка для нормальной производной

Мотивация: во внутренней задаче Неймана (билет 14) ищется решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ уравнения

$$\Delta u = f(x), x \in \Omega$$

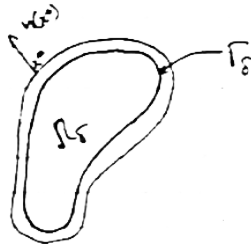
при условии

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_r = u_1(x),$$

где $u_1 \in C(\Gamma)$.

Но существуют примеры гармонических в области функций, градиент которых нельзя продолжить по непрерывности на замыкание этой области. Можно расширить понятие классического решения.

Пусть $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^2$



Пусть $x^o \in \Gamma$, а $\vec{n}(x^o)$ - нормаль к Γ в x^o . Т.к. $\Gamma \in C^2$, $\vec{n}(x^o)$ - непрерывная функция по x^o . Проведем через x^o прямую $x = x^o + \vec{n}(x^o)t, t \in \mathbb{R}$

Распишем произведение

$$(\vec{n}(x^o), \nabla u) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

Определение 31.1. Говорят, что $u(x)$ имеет **правильную нормальную производную** по направлению внешней нормали на Γ из Ω , если

1. $\forall x^o \in \Gamma$ существует конечный предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o) \equiv \lim_{x=x^o+\vec{n}(x^o)t, x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

2. Этот предел равномерный по $x^o \in \Gamma$

Лемма 31.1. Если $u(x)$ имеет ПНП по нормали $\vec{n}(x^o)$ из Ω на Γ , то

1. $u(x)$ имеет обычную производную по нормали $\vec{n}(x^o)$ в точке $x^o \in \Gamma$, и эта производная совпадает с ПНП
2. ПНП $\in C(\Gamma)$

Доказательство. Обычная производная по нормали

$$\lim_{x \rightarrow x^o, x = x^o + \vec{n}(x^o)t} \frac{u(x^o) - u(x)}{|x^o - x|} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{u(x^o) - u(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{-t} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}$$

- этот предел существует по условию.

Покажем непрерывность: Пусть δ мало, $0 < \delta < \delta_o, x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$

Пусть $V_\delta(x^o) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) =$

$$= \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) \Rightarrow V_\delta(x^*) \in C(\Gamma)$$

$n_k(x^o)$ непрерывна, т.к. $\Gamma \in C^2$

По определению ПНП: $V_\delta \Rightarrow$ ПНП \Rightarrow она также непрерывная на Γ . □

• После расширения определения классического решения встает вопрос о единственности решения. При исследовании этого вопроса мы использовали формулы Грина. Для них требовалась гладкость $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Покажем, как обобщить эти факты с помощью ПНП.

• Пусть Ω - ограниченная область с границей \mathbb{R}^3 , граница $G \in C^2, 0 < \delta < \delta_\mu$

$\Gamma_\delta = x : x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$ - граница класса уже C^1 , т.к. $\vec{n} \in C^1$



Лемма 31.2. Пусть Ω - ограниченная область с границей $G \in C^2, u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, а у $u(x) \ni$ ПНП по направлению внешней нормали $\vec{n}(x^o), \Delta u \in C(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega} (\Delta u) u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) u(x) dS - \int_{\Omega} |\nabla|^2 dx$$

Доказательство. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow u(x) \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\Omega_\delta) \Rightarrow$

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta u(x)) u(x) dx(1) = \oint_{G_\delta} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS(2) - \int_{\Omega_\delta} |\nabla u(x)|^2 dx(3)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(1) = \int_{\Omega} \Delta u dx, \text{ т.к. } \Delta u(x) \text{ и } u(x) \in C(\bar{\Omega})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(2) = \int_{G_{\delta}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(3) = \lim_{x=x^o - \delta \vec{n}(x^o)} \int_{\Omega_{\delta}} |\nabla u(x)|^2 dx$$

• С учетом сделанного обобщения все сделанные ранее рассуждения о внутренних и внешних задачах верны и для расширенного понятия классического решения. \square

Теорема 31.3 (Корректная постановка внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа). Ω - ограниченная область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_G = u_1(x) \in C(G) \end{cases} \quad (30)$$

Теорема 31.4 (Корректная постановка внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа). Ω - внешняя область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = u_1(x) \in C(\Gamma) \\ u(x)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (31)$$

• Рассмотрим потенциал простого слоя

Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$; $x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$; $0 < \delta < \delta^*$

$$V^* = \int_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x - y|} dS_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x - y|} dS_y = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_G \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dS_y$$

$$\sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{y_k - x_k}{|x - y|^3} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \frac{(y - x, \vec{n}(x^o))}{|x - y|^3} \mu(y) dS_y$$

Обозначим $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{\pm}(x^o) = \lim_{x=x^o \mp \delta \vec{n}(x^o), \delta \rightarrow +0} \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o)(1) = \int_{\Gamma} \frac{(y - x^o, \vec{n}(x^o))}{|x^o - y|^3} \mu(y) dS_y, x^o \in G(2)$$

(1) - прямое значение нормальной производной

(2) - полярное ядро $\Rightarrow \forall \mu(x) \in C(G), \forall x^o \in \Gamma$ этот интеграл существует, и более того $(1) \in C(\Gamma)$

Теорема 31.5. У потенциала простого слоя $V^o(x)$ с плотностью $\mu(x) \in C(\Gamma)$ существует ПНП на Γ :

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{+}(x^o) u \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{-}(x^o),$$

причем имеет место формула скачка

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_{\pm}(x^o) \right) = \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) \pm 2\pi\mu(x^o)$$

Следствие. $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{+}(x^o) - \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{-}(x^o) = 4\pi\mu(x^o), x^o \in \Gamma$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{+}(x^o) + \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{-}(x^o) \right], x \in \Gamma$$

Билет 32. Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач

Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ имеющую ПНП по направлению внешней нормали, и такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (32)$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$u(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y$. Свойства $\Delta u(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \rightarrow 0$ выполнены.

Кроме того, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ и имеет ПНП. Нужно проверить $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G$.

• Пусть

$$x^o \in G \Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = -2\pi\mu(x^o) + \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y = u_1(x^o)$$

$\mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^2} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x^o \in G$ - Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с интегральным оператором и полярным ядром.

Уравнение однозначно разрешимо \Leftrightarrow уравнение $\mu_*(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y \equiv 0$ имеет только тривиальное решение.

Для этого покажем, что $V_*(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y \equiv 0$

Ясно, что уравнение на μ_* получается таким же образом как и уравнение на μ , но из задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial v}{\partial \vec{n}})|_r = 0, x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ v(x) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (33)$$

В силу единственности решение этой задачи $V_* = 0(x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$. Но $V_* \in C(\mathbb{R}^3) \Rightarrow X_* \equiv 0$ на $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ Функция V_* удовлетворяет внутренней задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta V_* = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ V_*(x) = 0 \quad \forall x \in G \end{cases} \quad (34)$$

$\Rightarrow V_* \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$

Итак, $V_*(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Но $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_+(x^o) - (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = 4\pi\mu_*(x^o), x^o \in G \Rightarrow \mu_*(x^o) \equiv 0 \quad \forall x^o \in G$

Итак, по теореме Фредгольма об альтернативе уравнение

$$(*) \mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x \in G \text{ однозначно разрешимо}$$

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ такую, что:

$$1) \Delta u(x) = 0, x \in \Omega$$

$$2) u|_r = u_0(x), x \in G (u_0(x) \in C(G))$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y, \nu(x) \in C(G)$$

Условия $\Delta u = 0 \in \Omega$ и $u(x) \in C^2(G) \cap C(\bar{\Omega})$ уже выполнены. Осталось проверить $u|_r = u_0(x), x \in G$

$$\bullet \text{ Для потенциала двойного слоя справедлива формула скачка: } u_+(x^o) = u(x^o) - 2\pi\nu(x^o) \Rightarrow u_0(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - 2\pi\nu(x^o)$$

$$\Rightarrow \nu(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - \frac{u_0(x^o)}{2\pi}, x^o \in G \text{ Ядро, транспонированное к тому, что стоит в } (*)$$

Т.к. $(*)$ однозначно разрешимо, это уравнение тоже имеет единственное решение

Теорема 32.1. Пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $G \in C^2$. Тогда у внутренней задачи Дирихле $\forall u_1 \in C(G)$, а также у внешней задачи Неймана $\forall u_0 \in C(G)$ существует единственное классическое решение

Делали:

- Иwanyчев Сергей, 376 группа
- Погодин Роман, 374 группа
- Нагайко Иван, 372 группа
- Рязанов Андрей, 374 группа
- Федоряка Дмитрий, 374 группа
- Багно Богдан, 376 группа
- Изутин Никита, 378 группа
- Ермолова Марина, 373 группа
- Хасянов Расул, 371 группа
- Михальченко Егор, 371 группа
- Шлёнский Владислав, 374 группа
- Цветкова Ольга, 374 группа
- Молибог Игорь, 374 группа
- Чигринский Виктор, 374 группа
- Леонтьев Семён, 377 группа
- Кильянов Александр, 372 группа
- Тернов Лёха, 228 группа