Уравнения математической физики

Билеты к экзамену. Поток В.И. Зубова

19 августа 2021 г. 20:53

Конспект подготовлен на основе лекций В.И. Зубова и подготовленных билетов Павла Останина и Михаила Христиченко. Полный список авторов приведён в конце.

Опечатки исправлять здесь: *github.com/batmaev/umf-exam-questions*

Содержание

Билет 1. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) 2 порядка в $\mathbb{R}^n$ с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду на плоскости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ДУЧП 2 порядка с линейной старшей частью:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x,u,\nabla u) = 0; \qquad u(x) \in C^2(\Omega); \quad a_{ij}(x) \in C(\Omega)$$

Считаем $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, что не сужает класса, т.к. $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$. Хотим сделать замену так, чтобы все смешанные частные производные обратились в 0. В точке это сделать можно.

Возьмём преобразование

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases} \in C^2(U(x^0)), \quad y^0 = y(x^0); \quad U(x^0) \to V(y^0)$$

(диффеоморфизм класса C^2 окрестности $U(x^0)$ на $V(y^0)$)

Будем предполагать $\exists$ обратного: $x = x(y)$. Наша функция: $u = u(x_1 \dots x_n)$.

Введём $\hat{u}(y) \coloneqq u[x(y)] \in C^2(V(y^0))$. Производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{уйдёт в } \hat{F}(y,\hat{u},\nabla_y \hat{u})}$$

Подставляем:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y)) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \hat{F}(y,\hat{u},\nabla_y \hat{u}) = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right] \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y,\hat{u},\nabla_y \hat{u}) = 0,$$

$$\hat{a}_{kl}(y) \coloneqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y))\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

Введём матрицы: $A(x^0) = \left\| a_{ij}(x^0) \right\|_{i,j=1}^{n}; \qquad \hat{A}(y^0) = \left\| \hat{a}_{ij}(y^0) \right\|_{i,j=1}^{n}$.

$J(x^0) = \left\| \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{i,j=1}^{n}$ – в малой $U(x^0)$ задаёт преобразование $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J(x^0)^T$

$A = A^T \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}^T$. Вопрос в выборе J такого, что $\hat{A}$ диагональна.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы элемент h и квадратичная форма $\Phi(h)$.

Введём 2 базиса: $\begin{matrix}(e_1 \dots e_n) \\ (e'_1 \dots e'_n)\end{matrix}$ В них $h \sim \begin{matrix}\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T \\ \eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T\end{matrix}$; $\Phi \sim \begin{matrix}\|c_{ij}\| \\ \|\hat{c}_{ij}\|\end{matrix}$; $\Phi(h) = \begin{matrix}\xi^T C \xi \\ \eta^T \hat{C} \eta\end{matrix}$

Пусть $\xi = S\eta$. Тогда $\Phi(h) = \eta^T S^T C S \eta = \eta^T \hat{C} \eta \ \to \ \hat{C} = S^T C S$.

Существует такой базис, что

$\hat{C} = \mathrm{diag}(\underbrace{+1, +1 \dots + 1}_{p \text{ штук}}, \underbrace{-1, -1 \dots - 1}_{q \text{ штук}}, 0, 0 \dots 0)$

$\Phi(h) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2$

В равенстве $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J(x^0)^T$ нужно взять $J(x^0) = S^T$

Такие преобразования существуют, их много. Например, $y = y^0 + J(x^0)(x - x^0)$

В этих переменных уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+q}^2} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0.$$

Классификация уравнений

1. *Эллиптический тип*: $p = n$ или $q = n$
2. *Ультрагиперболический тип*: $p + q = n$
3. *Гиперболический тип*: $p = 1, \ q = n - 1$
4. *Ультрапараболический тип*: $p + q < n$
5. *Параболический тип*: $q = 0, \ p = n - 1$

Замечание. $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J(x^0)^T \ \Rightarrow \ \mathrm{sign}\det\big(\hat{A}(y^0)\big) = \mathrm{sign}\det\big(A(x^0)\big)$

В случае $n = 2$ тип уравнения в точке определяется по знаку определителя:

1. *Эллиптический:* $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \to \big|\hat{A}(y^0)\big| = 1$
2. *Гиперболический:* $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \big|\hat{A}(y^0)\big| = -1$
3. *Параболический:* $\big|\hat{A}(y^0)\big| = 0.$

Приведение уравнения 2 порядка к каноническому виду на плоскости

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ уравнение $a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,\nabla u) = 0$

Для определения в точке используем $d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Введём преобразование $(x,y) \mapsto (\xi,\eta)$, $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ — диффеоморфизм класса C^2.

В новых координатах $\hat{a}(\xi,\eta)\hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{b}(\xi,\eta)\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{c}(\xi,\eta)\hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi,\eta,\hat{u},\nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$

$$\hat{A}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = JAJ^T; \quad J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

Гиперболический случай

Выбираем $(x^0,y^0) \in \Omega$, пусть $d(x^0,y^0) = ac - b^2 < 0$. В силу непрерывности есть $U_\varepsilon(x^0,y^0)$, где $d < 0$.

Во всех точках этой окрестности тип – гиперболический.

Определение 1.1. *Второй канонический тип:* $\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{F}(\xi,\eta,\hat{u},\nabla\hat{u}) = 0$, то есть $\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv 0$.

Введём переменную w, которая обозначает либо ξ, либо η.

Запишем *характеристическое уравнение:*

$$a(x,y)w_x^2 + 2b(x,y)w_xw_y + c(x,y)w_y^2 = 0,$$

(При $w = \xi$ это выражение равно $\hat{a}_{11}$, а при $w = \eta$ оно равно $\hat{a}_{22}$)

От решений хотим $\nabla w \neq 0$, так как если $\nabla\eta = 0$ или $\nabla\xi = 0$, то $\det(J) = 0$.

a) Пусть $a(x^0,y^0) \neq 0$, для $c(x^0,y^0) \neq 0$ рассуждения такие же.

   В окрестности, где $a(x,y) \neq 0$, делим:

   $$w_x^2 + \frac{2b}{a}w_xw_y + \frac{c}{a}w_y^2 = \left(w_x + \frac{b}{a}w_y\right)^2 - \frac{b^2-ac}{a}w_y = \Big(w_x + \lambda_+(x,y)w_y\Big)\cdot\Big(w_x + \lambda_-w_y\Big) = 0,$$

   где введены обозначения $\lambda_\pm = \frac{1}{a}\big(b \pm \sqrt{b^2-ac}\big)$; верно, что $\lambda_- \neq \lambda_+ \ \ \forall\,(x,y) \in U_\varepsilon(x^0,y^0)$, так как $d = ac - b^2 < 0$.

   Достаточно занулить одну из скобок: $w_x + \lambda_\pm w_y = 0$.

   Подобные уравнения 1 порядка решаются при помощи первых интегралов:

   $$a_1(x,y)w_x + a_2(x,y)w_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(x,y) \text{ — ПИ системы: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a_1} = dt = \frac{dy}{a_2}$$

   В нашем случае $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_\pm} \ \Leftrightarrow \ dy - \lambda_\pm dx = 0$ — первые интегралы этого уравнения дают решение исходного уравнения характеристик. Если $a,b,c \in C^2$, то $\lambda_\pm$ и первые интегралы также принадлежат C^2.

   Покажем невырожденность:

   $$\begin{cases} \xi_x + \lambda_+\xi_y = 0, \\ \eta_x + \lambda_-\eta_y = 0. \end{cases}$$

$$\left|J(x^0,y^0)\right| = \det\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}-\lambda_+\xi_y & \xi_y\\ -\lambda_-\eta_y & \eta_y\end{pmatrix} = \overbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}^{\substack{\neq 0 \text{ в силу}\\ \text{гиперболичности}}}\cdot \xi_y\eta_y \neq 0$$

$$(\text{если } \xi_y = 0,\ \text{то } \xi_x = 0 \ \Rightarrow\ \nabla\xi = 0)$$

Итак, $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ – диффеоморфизм класса C^2. Он зануляет $\hat{a}$ и $\hat{c}$. Получается уравнение во второй канонической форме.

Замечание. От II канонической форме к I:

$$\begin{cases}\alpha = \xi+\eta,\\ \beta = \xi-\eta\end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\underbrace{\xi+\eta}_{\alpha},\underbrace{\xi-\eta}_{\beta}),\ \hat{u}_\xi = \tilde{u}_\alpha + \tilde{u}_\beta,\ u_{\xi\eta} = \tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta}$$

Тогда наше уравнение:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} + \tilde{F}(\alpha,\beta,\tilde{u},\nabla_{\alpha\beta}\tilde{u}) = 0 \text{ — I каноническая форма}$$

б) Если $a(x,y)\equiv c(x,y)\equiv 0\ \ \forall\,(x,y)\in U(x^0,y^0)$, то $b\neq 0$, иначе уравнение в нуле функции b – не второго порядка.

То есть уравнение уже имеет II каноническую форму, преобразование в I – выше.

в) Если $a\not\equiv 0$ или $c\not\equiv 0$, но $a(x^0,y^0) = c(x^0,y^0) = 0$, то аналогично $b(x^0,y^0)\neq 0$. Заменим $\xi = x+y,\ \eta = x-y$ и получим:

$$\hat{a}(\xi^0,\eta^0) = +2b(x^0,y^0)\neq 0$$
$$\hat{c}(\xi^0,\eta^0) = -2b(x^0,y^0)$$

Это случай (а).

Параболический случай

Пусть в точке и некоторой ее окрестности тип параболический, то есть $ac-b^2\equiv 0$. Ни в одной точке a и c не равны нулю одновременно, поскольку иначе $b=0$ и это уравненение 1 порядка. Пусть для определённости $a\neq 0$. Уравнение характеристик:

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (w_x+\lambda w_y)^2 = 0,\ \text{где } \lambda = \frac{b}{a}$$

Находим решение $w = \eta(x,y)\in C^2(U(x^0,y^0))\colon\ \nabla w(x,y)\neq 0$.

$$\begin{cases}\xi = w & \text{— эту построили}\\ \eta = \eta(x,y) & \text{— эту выбираем произвольно, чтобы был диффеоморфизм}\\ & \quad\text{доказательство того, что всегда можно выбрать, опущено.}\end{cases}$$

Мы взяли ξ такое, что $\hat{c}\equiv 0$. Покажем, что и $\hat{b}\equiv 0$:

$$\hat{A} = JAJ^T \ \Rightarrow\ |\hat{A}| = |J|^2\cdot|A| = |J|^2(ac-b^2) = 0 = \underbrace{\hat{a}\hat{c}}_{=0} - \hat{b}^2 \ \Rightarrow\ \hat{b} = 0$$

Пришли к

$$\hat{a}(\xi,\eta)\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{F}(\xi,\eta,\hat{u},\nabla_{\xi,\eta}\hat{u}) = 0,$$

где $\hat{a}\neq 0$, иначе 1 порядок, а обратная замена дает второй порядок.

Эллиптический случай

$$d(x,y) = ac - b^2 > 0 \quad \forall\,(x,y) \in U(x^0,y^0)$$

Во всех точках окрестности выполнено $a \neq 0$ и $c \neq 0$, иначе было бы $d = -b^2 \leqslant 0$.
Характеристическое уравнение:

$$\big[w_x + \lambda_+ w_y\big]\big[w_x + \lambda_- w_y\big] = 0,$$

где $\lambda_\pm = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} = \mu \pm i\nu;\quad \mu,\nu \in C^2.$ При этом для функций λ_+, λ_- известно $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$.

Получилось два линейных ДУЧП первого порядка:

$$w_x \pm \lambda_\pm w_y = 0$$

Представим $w = \xi \pm i\eta \quad \Rightarrow \quad (\xi \pm i\eta)_x + (\mu \pm i\nu)(\xi \pm i\eta)_y = 0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}: & \xi_x + \mu\xi_y - \nu\eta_y = 0 \\ \mathrm{Im}: & \eta_x + \nu\xi_y + \mu\eta_y = 0 \end{cases} \qquad \text{Искомая замена } \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \in C^2,$$

Невырожденность:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-\mu\xi_y + \nu\eta_y) & \xi_y \\ (-\nu\xi_y - \mu\eta_y) & \eta_y \end{vmatrix} = \nu(\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0, \text{ т.к}$$

- $\nu \neq 0$
- если $\eta_y = \xi_y = 0$, то в силу уравнений на действительную и мнимую части $\xi_x = \eta_x = 0 \;\Rightarrow\; \nabla w = 0$

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{\hat a} - \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{\hat c} + \underbrace{2i(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)}_{2\hat b} = 0$$

Откуда $\hat a = \hat c$, $\hat b = 0$, то есть получаем уравнение

$$\hat u_{\xi\xi} + \hat u_{\eta\eta} + \hat F(\xi,\eta,\hat u,\nabla_{\xi\eta}\hat u) = 0$$

Формальный вид уравнения характеристик

$$a\,dy\,dy - 2b\,dy\,dx + c\,dx\,dx = 0$$

Оно так выглядит из $(dy - \lambda_+ dx)(dy - \lambda_- dx) = 0$, то есть

$$(dy)^2 - \underbrace{(\lambda_+ + \lambda_-)}_{2b/a}\,dx\,dy + \underbrace{\lambda_+\lambda_-}_{c/a}(dx)^2 = 0$$

Билет 2. Постановка задачи Коши для уравнения 2-го порядка с частными производными в $\mathbb{R}^n$ с линейной старшей частью. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1}$$

и поверхность $S\colon\ \omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n) = 0,\ \omega \in C^2(\Omega)$ и $\mathrm{grad}(\omega) \neq 0$ на Ω (нет особых точек). На поверхности задано гладкое некасательное поле $\vec{\nu} = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)),\ \ \langle \vec{\nu}, \vec{n}\rangle \neq 0$.

Определение 2.1 (Задача Коши)**.** В $U(x^0) \subset \Omega,\ x^0 \in S$, найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет двум условиям:

1. $u(x)|_{S\cap U(x^0)} = u_0(x)$
2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{S\cap U(x^0)} = u_1(x)$ – выводящая производная

   Здесь введена производная по направлению: $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = (\vec{\nu},\, \nabla u) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(x)$

Может не быть непрерывной зависимости от начальных данных.
Функции u_0, u_1 произвольно брать, вообще говоря, нельзя.

Далее определим характеристическую поверхность.
Пусть S – гиперплоскость $x_n = 0$. Нормаль $\vec{n} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$,
$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = u_1(x_1, \dots, x_{n-1})$
Мы знаем значения функции на гиперплоскости.
Знаем градиент:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array}\right\} + \left\{\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\right\} = u_1$$

Мы знаем и вторые производные: берём указанные сверху производные и дифференцируем вдоль поверхности, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j},\ 1 \le i, j \le n-1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}),\ 1 \le i \le n-1$$

Не нашли только $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}$. До этого мы вообще еще не использовали уравнение:

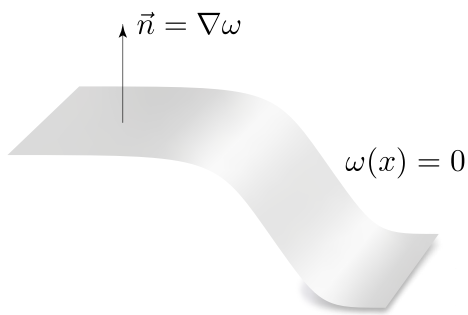
$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[a_{nj} u_{x_n x_j} + a_{jn} u_{x_j x_n}\right] + \underbrace{a_{nn} u_{x_n x_n}}_{\substack{\text{только это слагаемое}\\ \text{еще не определено}}} + F(x, u, \nabla u) = 0$$

Если $a_{nn}(x) = 0$ на нашей гиперплоскости, то эту гиперплоскость назовём **характеристической**. На характеристической гиперплоскости полученное уравнение задаёт функциональную связь u_0 и u_1 – эта связь называется **условием совместности**.

Теперь переходим к произвольной поверхности: заменим координаты так, чтобы локально поверхность была гиперплоскостью:

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\ y_n = \omega(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ после преобразования $\omega = 0 \Leftrightarrow y_n = 0$.
Найдём это преобразование: возьмем $\vec{n} = \nabla \omega(x_0)$.



Дополним $\vec{n}$ до базиса – получим $\left\langle \vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_{n-1}, \vec{n} \right\rangle$. Ортогонализуем – получим $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}, \vec{n} \rangle$.
Возьмем такое преобразование:

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{cases} y_1 = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_{n-1} \\ y_n = \omega(\vec{x}) \end{cases}$$

Проверим, что якобиан не равен 0:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \omega}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (& e_1^T &) \\ & \cdots & \\ (& e_n^T &) \\ (& \nabla \omega(x)^T &) \end{vmatrix} \overset{x = x_0}{=\!=} \begin{vmatrix} (& e_1^T &) \\ & \cdots & \\ (& e_n^T &) \\ (& n^T &) \end{vmatrix}$$

Строки матрицы – компоненты ОНБ $\Rightarrow J(x_0) \neq 0$.
Из соображений непрерывности $J \neq 0$ также в некоторой окрестности точки x_0.
Значит, это диффеоморфизм класса C^2.

В новых переменных: $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{n} \hat{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0$

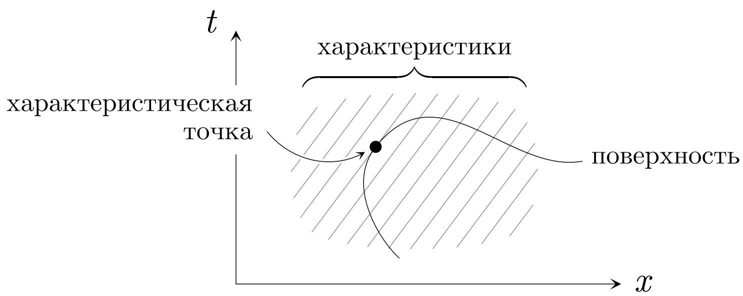
Условие характеристичности: $\displaystyle 0 = \hat{a}_{nn} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[x(y)] \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j}, \quad$ где $y_n(x) \equiv \omega(x)$

Определение 2.2 (Характеристическая точка)**.** Пусть дважды гладкая поверхность S задана уравнением $\omega(x) = 0$. $\quad (\omega \in C^2;\ \nabla\omega \neq 0)$

Тогда точка $x_0 \in S$ называется характеристической, если в этой точке $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \omega_{x_i}\, \omega_{x_j} = 0$

Определение 2.3 (Характеристическая поверхность)**.** Дважды гладкая поверхность называется **характеристикой**, если все её точки характеристические.

Заметим, что если поверхность $\omega(x) = 0$ – характеристическая, то все поверхности $\omega(x) = \mathrm{const}$ тоже характеристические. Поэтому характеристики образуют семейства.



Пример 2.1. $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad S$ – прямая $x = y$, $\quad \displaystyle\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{u_x}{\sqrt{2}} + \frac{u_y}{\sqrt{2}} = u_1$

Производная $\displaystyle\frac{du_1}{d\vec{l}} = \left(\vec{l},\ \nabla \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] = 0.$

Значит, любую функцию на S задать нельзя; прямая $x = y$ – характеристика.

Пример 2.2. $u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^3$ (волновое уравнение).

Характеристическое уравнение: $\displaystyle\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 (\operatorname{grad} \omega)^2 = 0$

Этому уравнению удовлетворяет $\omega(t, x) = \underbrace{a^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0}_{\text{конус}}$.

Пример 2.3. $u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$ (уравнение теплопроводности).

Характеристическое уравнение: $-a^2[\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \ \Rightarrow\ \omega_{x_i} = 0 \ \ \forall\, i = \overline{1, n}$

Так как $\nabla\omega \neq 0$, мы требуем $\omega_t \neq 0$.

Подходит $\omega(t, x) = t - C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ характеристики — это гиперплоскости $t = C$

Пример 2.4. $\Delta u(x) = f(x)$ (ур-е Пуассона), $x \in \mathbb{R}^n$;

Характеристическое уравнение: $a^2[\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \;\; \forall\, i = \overline{1, n}$.

А мы требовали $\nabla\omega \neq 0 \Rightarrow$ у уравнения эллиптического типа нет характеристик.

Теорема Ковалевской

Функция $u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ называется **вещественно-аналитической** в $\vec{x}_0$, если в некоторой $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ она представима в виде

$$u(\vec{x}) = \sum_{|\alpha|>0} u_\alpha (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha,$$

где α – мультииндекс, $\quad u_\alpha \in \mathbb{R}, \qquad (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_n^0)^{\alpha_n}$

Теорема 2.1 (Ковалевской)**.** *Пусть в уравнении* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0$*:*

- *все* $a_{ij}(\vec{x})$ *вещественно-аналитические в* $\vec{x}_0$
- $F(\vec{x}, u, \nabla u)$ *–вещественное-аналитическая в* $(\vec{x}_0, u_0(\vec{x}_0), \nabla u(\vec{x}_0))$ *соответственно*
- $\omega(\vec{x})$ *вещественно-аналитическая в* $\vec{x}_0$
- $\vec{x}_0$ *– не характеристическая точка поверхности*
- $u_0, \; u_1$ *– вещественно-аналитические в* $\vec{x}_0$*.*

Тогда:

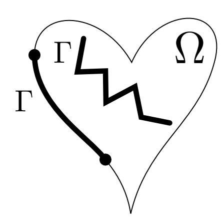
- $\exists\, U_\varepsilon(\vec{x}_0)$: *в ней* $\exists$ *вещественно-аналитическое решение задачи Коши*
- *оно единственно в классе вещественно-аналитических функций.*

Понятие о корректности

Рассмотрим абстрактную дифференциальную задачу:

$$\begin{cases} L\, u(\vec{x}) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ B_j\, u(\vec{x}) = g_j(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma \subset \bar{\Omega}, \quad j = 1 \dots m \end{cases} \tag{*}$$

$L \;\, = L(\vec{x}, \partial)$ — линейный дифференциальный оператор порядка p
$B_j = B_j(\vec{x}, \partial)$ — конечное семейство линейных дифференциальных операторов на $\Gamma \subset \bar{\Omega}$



Определение 2.4. Пусть $F(\Omega)$ и $U(\Omega)$ – линейные нормированные пространства функций (ЛНП) на Ω, $\;\; G_1(\Gamma), \dots G_m(\Gamma)$ – ЛНП на Γ.

Тогда если $\forall f(\vec{x}) \in F(\Omega),\ \ \forall g_j(\vec{x}) \in G_j(\Gamma)$ решение краевой задачи (*) существует, единственно в $U(\Omega)$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{U(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{F(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} c_j \|g_j\|_{G_j(\Gamma)} \tag{**}$$

то **задача корректна по отношению к выбранному набору пространств.**

Замечание. Часто говорят, что решение корректной задачи должно непрерывно зависеть от начальных данных. Но в определении лектора, которое приведено выше, вместо непрерывности по начальным данным требуется ограниченность. Так тоже правильно, потому что задача линейна, а линейные операторы непрерывны тогда и только тогда, когда они ограничены.

Пример 2.5 (Адамара)**.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u\big|_{y=0} = u_0(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \text{ — равномерно стремится к 0 вместе со своими производными} \\ u_y\big|_{y=0} = u_1(x) \equiv 0 \end{cases}$$

При $u_0(x) \equiv 0$ решением будет $u(x, y) \equiv 0$.

Если задача корректна, то при $n \to \infty$ решения должны (равномерно?) стремиться к 0.

Функции $u_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{ch} ny$ – решения.

Но $u_n(0, y^*) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch} ny^* > \frac{1}{2} e^{-\sqrt{n}} e^{ny^*} \to \infty$

Неравенство (**) не выполнено.

Билет 3. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения от начальных данных. Существование и единственность классического решения. Корректность постановки задачи.

• Задача: $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,x)\big|_{t=0} = u_0(x) & \quad -l < x < l \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$

Что понимать под решением задачи?

Определение 3.1. ***Классическое решение*** – функция класса C^2, которая в точках указанной области удовлетворяет уравнению и заданным соотношениям.

• **Характеристическое уравнение:** $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x + at = C_1 \\ x - at = C_2 \end{cases}$

В новых координатах $\hat{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \;\Rightarrow \hat{u} = f(\xi) + g(\eta)$.

Возвращаясь обратно, получим $u(t,x) = f(x+at) + g(x-at)$.

• Решим ЗК (поверхности нигде не касаются характеристик – задача должна быть корректной):

$$u\big|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), \qquad -l < x < l$$

$$u_t\big|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), \qquad -l < x < l \quad \Rightarrow \; f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_{-l}^{x} u_1(z)dz + C = \frac{1}{a}V_1(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}V_1(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}V_1(x) \end{cases} \qquad (-l < x < l) \tag{*}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}u_0(x+at) + \frac{1}{2a}V_1(x+at) + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2a}V_1(x-at) =$$

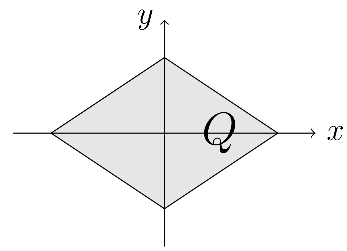
$$= \boxed{\frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(x)dx} \text{ – } \textbf{формула Даламбера}$$

Решение определяется единственным образом.

Если требуется определить максимальную область, где можно написать решение, то обратимся к формулам (*). Функции u_0 и V определены лишь на $(-l; l)$ $\Rightarrow$ искомая область:

$\begin{cases} -l < x + at < l \\ -l < x - at < l \end{cases}$ – **характеристический четырехугольник** Q.

Нами доказана теорема:



Теорема 3.1. *Пусть* $\begin{cases} u_0(x) \in C^2(-l;l) \\ u_1(x) \in C^1(-l;l) \end{cases}$. *Тогда ЗК имеет в* Q *единственное решение* $u(t,x) \in C^2(Q)$ *– классическое. Оно дается формулой Даламбера.*

Корректность задачи для уравнения малых колебаний струны:

- нами проверены существование и единственность классического решения.
- покажем непрерывность решения по входным данным u_0 и u_1.
  Берем две задачи:

$$\begin{cases} \overset{1}{u}_{tt} - a^2 \overset{1}{u}_{xx} = 0, & (t,x) \in Q \\ \overset{1}{u}\Big|_{t=0} = \overset{1}{u}_0(x), & |x| < l \\ \overset{1}{u}_t\Big|_{t=0} = \overset{1}{u}_1(x), & |x| < l \end{cases} \qquad \begin{cases} \overset{2}{u}_{tt} - a^2 \overset{2}{u}_{xx} = 0, & (t,x) \in Q \\ \overset{2}{u}\Big|_{t=0} = \overset{2}{u}_0(x), & |x| < l \\ \overset{2}{u}_t\Big|_{t=0} = \overset{2}{u}_1(x), & |x| < l \end{cases}$$

Пусть $\left|\overset{1}{u}_0 - \overset{2}{u}_0\right| < \delta_0, \ \left|\overset{1}{u}_1 - \overset{2}{u}_1\right| < \delta_1 \quad \forall\, x\colon |x| < l.$ Введем $\begin{cases} v_0 = \overset{1}{u}_0 - \overset{2}{u}_0 \\ v_1 = \overset{1}{u}_1 - \overset{2}{u}_1 \\ v = \overset{1}{u} - \overset{2}{u} \end{cases}$

Тогда задача для v : $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & (t,x) \in Q \\ v|_{t=0} = v_0(x), & |x| < l, \ |v_0| < \delta_0 \\ v_t|_{t=0} = v_1(x), & |x| < l, \ |v_1| < \delta_1 \end{cases}$

Согласно формуле Даламбера,

$$|v(t,x)| = \left| \frac{v_0(x+at) + v_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} v_1(y)dy \right| \leqslant \delta_0 + \delta_1 t \quad \forall\,(t,x) \in Q$$

  – Если l конечно, то $t \leq \dfrac{l}{a}$ из вида четырёхугольника Q. Устремляя δ_0, $\delta_1 \to 0$, получим $|v| \to 0$.
  – Если $l = \infty$: в любой конечной полосе $t \leq T < \infty$ требуемое верно.
  Так заметаем всю плоскость.

Билет 4. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закрепленным концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения.

Формулировка

Задача (называется *начально-краевой* или *смешанной*)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0,\ x > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \geqslant 0 \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \geqslant 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \ \text{по сравнению с задачей Коши это дополнительное граничное условие} \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Физический смысл: смотрим, как волна отражается от закрепленного конца

Предполагаем, что

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2[0, +\infty) \\ u_1(x) \in C^1[0, +\infty) \end{cases}$$

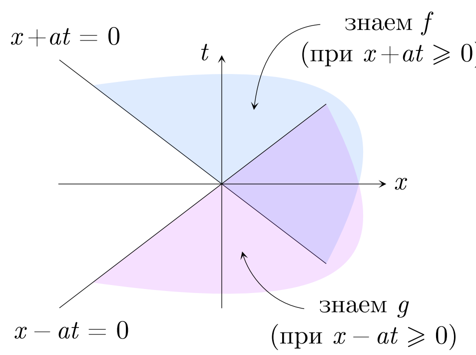
Общее решение

$$u(t, x) = f(x + at) + g(x - at)$$

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), & x \geqslant 0 \\ u_t\big|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Если ввести обозначение $v_1 = \displaystyle\int_0^x u_1(y)\, dy + C$, то при $x \geqslant 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}v_1(x)$$
$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}v_1(x)$$



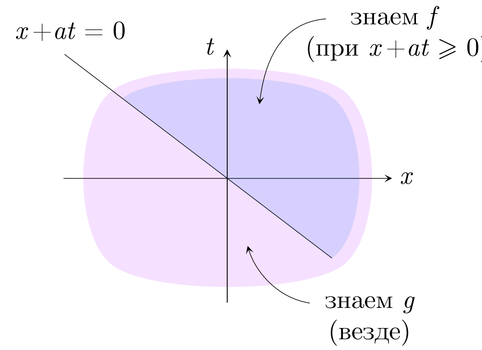
Граничные условия нужны для определения u в $(x \geqslant 0) \cap (t \geqslant 0)$ (в смысле пересечения областей). Их не обязательно ставить на $x = 0$, можно на $x + \alpha t = 0,\ -a < \alpha < a$, то есть там, где известна только одна из функций, а не обе.

$$u\big|_{x=0} = f(at) + g(-at) = 0, \quad t \geqslant 0$$

Введем $\xi = -at, \xi \leqslant 0$, тогда $g(\xi) = -f(-\xi)$ и суммарно:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(\xi) - \frac{1}{2a}v_1(\xi), & \xi \geqslant 0 \\ -\frac{1}{2}u_0(-\xi) - \frac{1}{2a}v_1(-\xi), & \xi \leqslant 0 \end{cases}$$

Теперь g известна везде, решение найдено при $x + at > 0$, то есть даже в большей области, чем мы хотели.



Условия согласования

Чтобы $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$, решения необходимо «сшить»

$$\begin{gathered} g(+0) = g(-0) \\ g'(+0) = g'(-0) \\ g''(+0) = g''(-0) \end{gathered}$$

Распишем эти условия:

$$\begin{array}{llll} g(+0) = g(-0) & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1}(0) = -\frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1}(0) & \Rightarrow \quad u_0(0) = 0 \\ g'(+0) = g'(-0) & \Leftrightarrow & \cancel{\frac{1}{2}u_0'}(0) - \frac{1}{2a}u_1(0) = \cancel{\frac{1}{2}u_0'}(0) + \frac{1}{2a}u_1(0) & \Rightarrow \quad u_1(0) = 0 \\ g''(+0) = g''(-0) & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) = -\frac{1}{2}u_0''(0) - \frac{1}{2a}u_1'(0) & \Rightarrow \quad u_0''(0) = 0 \end{array}$$

Определение 4.1 (условия согласования)**.** Эти условия называются условиями согласования (начальных и граничных условий)

При их выполнении решение будет классическим. Если $u_0(0) \neq 0$, то даже обобщенного решения не будет.

Метод продолжений

Теорема 4.1. *Пусть в смешанной задаче 2 функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что*

- *Выполнено условие гладкости: $u_0(x) \in C^2[0, +\infty),\ u_1(x) \in C^1[0, +\infty)$*
- *Выполнено условие согласования: $u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = 0$*

Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение $u(t, x) \in C^2(t \geqslant 0, x \geqslant 0)$:

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\,dy, & \{x \geqslant -at,\ x \geqslant at\} \\ \dfrac{u_0(at+x) - u_0(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} u_1(y)\,dy, & \{x \geqslant -at,\ x \leqslant at\} \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Используем метод продолжений. Для задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & x \geqslant 0 \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x), & x \geqslant 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Введем

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geqslant 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases} \qquad \hat{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geqslant 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} - a^2 \hat{u}_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}_t\big|_{t=0} = \hat{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad \text{– свели к задаче Коши}$$

Решение дается формулой Даламбера:

$$\hat{u}(t,x) = \frac{\hat{u}_0(x+at) + \hat{u}_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y)\, dy$$

Покажем нечетность по x:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,-x) &= \frac{\hat{u}_0(-x+at) + \hat{u}_0(-x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} \hat{u}_1(y)\, dy \\ &= \frac{\hat{u}_0(x-at) + \hat{u}_0(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y)\, dy = -\hat{u}(t,x) \end{aligned}$$

$$\hat{u}(t,0) = \underbrace{\frac{\hat{u}_0(-at) + \hat{u}_0(at)}{2}}_{=0} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} \hat{u}_1(y)\, dy = 0$$

$\square$

Билет 5. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Существование классического решения этой задачи.

Теорема 5.1 (Из курса мат. анализа). *Пусть* $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n,\ \Omega_y \subset \mathbb{R}^m$ *– ограниченные области,* $f(x,y)\colon \overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y \to \mathbb{R},\ f \in C\big(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y\big)$. *Тогда* $J(y) = \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dx \ \in C\big(\overline{\Omega}_y\big)$

Если к тому же $\dfrac{\partial f}{\partial y_k} \in C\big(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y\big)$, *то* $J(y)$ *имеет непрерывную на* $\overline{\Omega}_y$ *частную производную* $\dfrac{\partial J(y)}{\partial y_k}$, *которая равна* $\int\limits_{\Omega_x} \dfrac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\,dx$.

Обозначим (τ - вспомогательный параметр)

$$u_g(t,x,\tau) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\xi - x| = at} g(\xi,\tau)\,dS_\xi\,, \qquad a > 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ \tau \geqslant 0,\ \xi \in \mathbb{R}^3$$

Лемма 5.2. *Пусть* $g(\xi,\tau)$ *такая, что*

1. $g \in C\left\{\xi \in \mathbb{R}^3,\ \tau \geqslant 0\right\}$
2. $D^\alpha_\xi\, g(\xi,\tau) \in C\left\{\xi \in \mathbb{R}^3,\ \tau \geqslant 0\right\}\ \forall\, \alpha\colon |\alpha| \leqslant p$.

Тогда

1. $D^\alpha_{t,x}\, u_g(t,x,\tau) \in C\left\{\mathbf{t \geqslant 0},\ x \in \mathbb{R}^3,\ \tau \geqslant 0\right\}\ \forall\, \alpha\colon |\alpha| \leqslant p$
2. $\lim\limits_{t \to +0} u_g(t,x,\tau) = 0$
3. *При* $p \geqslant 1$ $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{\partial u_g}{\partial t} = g(x,\tau)$

Доказательство. Докажем отдельно все три утверждения.

1. Сведем интеграл к интегралу по единичной сфере с центром в нуле с помощью такой замены:
$$\eta = \frac{\xi - x}{at}\ \Rightarrow\ \xi = x + at\eta,\ |\vec{\eta}| = 1.$$
В таком случае элемент площади $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$. Во введенном выше интеграле получим
$$u_g(t,x,\tau) = \frac{(at)^2}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\eta| = 1} g(x + at\eta,\, \tau)\,dS_\eta = tJ_g(t,x,\tau),$$
где $J_g(t,x,\tau) = \dfrac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} g(x + at\eta,\, \tau)\,dS_\eta$

Теперь интеграл уже по фиксированному множеству. Все выкладки справедливы при $t > 0$. Функция

$$\tilde{g}(t, x, \eta, \tau) = g(x + at\eta,\ \tau)\ \in C\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ |\eta| = 1,\ \tau \geqslant 0\right\}.$$

Тогда по теореме из начала билета $J_g(t, x, \tau) \in C\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ \tau \geqslant 0\right\}$.

Аналогично будет для производных в силу второй части той же теоремы и наличия соответствующих производных у функции g.

2. $\lim\limits_{t\to+0} U_g(t, x, \tau) = \lim\limits_{t\to+0} tJ_g(t, x, \tau) = \lim\limits_{t\to+0} t \cdot \lim\limits_{t\to+0} J_g(t, x, \tau) = 0$ (последний предел конечен в силу непрерывности).

   Можно записать
$$U_g(t, x, \tau) = \begin{cases} u_g(t, x, \tau), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in C\big(\overline{\Omega}\big),$$
   где последнее включение означает непрерывные в области и непрерывно продолжимые на границу функции.

3. При $p \geqslant 1$ запишем следующее:

$$\lim_{t\to+0} \frac{\partial}{\partial t} u_g(t, x, \tau) = \lim_{t\to+0} \frac{\partial}{\partial t}[tJ_g(t, x, \tau)] = \lim_{t\to+0} J_g(t, x, \tau) + \cancelto{0}{\lim_{t\to+0} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_g(t, x, \tau)} =$$
$$= J_g(0, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau)\, dS_\eta \Bigg|_{t=0} = g(x, \tau) \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} dS_\eta = g(x, \tau).$$

$\square$

Перейдем к решению задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 5.3 (Формула Пуассона-Кирхгофа)**.** *Пусть* $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\xi - x| = at} u_1(\xi)\, dS_\xi \quad \in\ C^2\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3\right\}$$

является классическим решением задачи (4)

Доказательство. В силу леммы имеем $u\big|_{t=0} = 0;\ u_t\big|_{t=0} = u_1$.

Т.к. $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2),\ u \in C^2\left\{t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^3\right\}$, то сделаем замену переменной:

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta)\, dS_\eta.$$

Осталось только проверить, что u удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{t}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} \Delta_\xi u_1(x+at\eta)\, dS_\eta = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi)\, dS_\xi.$$

При $t>0$ (использовано $\vec{n} = \dfrac{\xi - x}{|\xi - x|} = \dfrac{\xi - x}{at} = \eta$):

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} u_1(x+at\eta)\, dS_\eta + \frac{ta}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(x+at\eta)\eta_k \cdot dS_\eta =$$

$$= \frac{u(x,t)}{t} + \frac{ta}{4\pi} \oiint\limits_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(\xi) n_k(\xi) \cdot dS_\eta = \frac{u(x,t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \oiint\limits_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}(\xi) \cdot dS_\xi = \frac{u(x,t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} I$$

Заметим, что

$$\iiint\limits_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi)\, d\xi = \iiint\limits_{|\xi-x|<at} \operatorname{div}(\nabla u_1)\, d\xi = \oiint\limits_{|\xi-x|=at} (\nabla u_1,\, \vec{n})\, dS_\xi = \oiint\limits_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}\, dS_\xi = I$$

Тогда получим

$$u_t = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint\limits_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi)\, d\xi = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int\limits_0^{at} \left[\oiint\limits_{|\xi-x|=\rho} \Delta_\xi u_1(\xi)\, dS_\xi \right] d\rho = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int\limits_0^{at} \varphi(\rho)\, d\rho$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at}\right] = \frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{u}{t\cdot t} + \frac{I}{4\pi at^2} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} =$$

$$= \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{at} \varphi(\rho)\, d\rho = \frac{1}{4\pi at} a\varphi(at) = \frac{1}{4\pi t} \oiint\limits_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi)\, dS_\xi.$$

Итак, $u(x,t)$ - классическое решение. $\square$

Рассмотрим

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad t>0,\, x \in \mathbb{R}^3 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Введем $v(t,x)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^3 \\ v\big|_{t=0} = 0 \\ v_t\big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Эту задачу мы уже решили. Так как $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, имеем $v \in C^3\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Утверждение 5.4. *$u(x,t) \equiv v_t(x,t) \in C^2\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3\right\}$ дает решение задачи (5).*

Доказательство.

1. $u_{tt} - a^2\Delta u = \partial_t(v_{tt} - a^2\Delta v) = \partial_t\, 0 = 0$
2. $u\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = u_0(x)$
3. $u_t\big|_{t=0} = v_{tt}\big|_{t=0} = a^2\Delta v\big|_{t=0} = 0$ (на гиперплоскости $t = 0$: $v\big|_{t=0} \equiv 0 \ \Rightarrow \ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{t=0} \equiv 0 \ \Rightarrow$ $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right|_{t=0} \equiv 0$. При этом v_t может быть ненулевой.)

$\square$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 5.5. *Функция $u(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\xi-x|=at} u_0(\xi)\, dS_\xi\right]$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, где $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, является классическим решением задачи (5).*

Билет 6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Метод Дюамеля. Принцип Гюйгенса.

Формулировка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(t,x) \quad t>0, x\in\mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \text{считаем, что } f(t,x)\in C^{0,2}_{t,x}\{t\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}^3\} \tag{6}$$

Метод Дюамеля

Сведем задачу к задаче Коши для однородного волнового уравнения. Рассмотрим однопараметрическое семейство задач:

$$\begin{cases} w_{tt}(t,x,\tau) - a^2\Delta_x w(t,x,\tau) = 0 \quad t>\tau;\ x\in\mathbb{R}^3 \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases} \qquad \tau\geqslant 0 \tag{7}$$

Решение задач семейства получаем по формуле Пуассона-Кирхгофа:

$$w(t,x,\tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \oiint\limits_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,dS_\xi \quad \in\ C^{2,2,0}_{t,x,\tau}\{t-\tau\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}^3\}$$

(Под $C^{2,2,0}_{t,x,\tau}$ подразумевается, что $D^\alpha_{t,x}\, w(t,x,\tau)\in C\ \ \forall\,\alpha\colon |\alpha|\leqslant 2$)

Утверждение 6.1.

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\tau)d\tau \text{ — \textit{классическое решение исходной задачи.}}$$

Доказательство.

- $u(t,x)\in C^2\{x\in\mathbb{R}^3,\ t\geqslant 0\}$
- $u|_{t=0} = 0$
- Вычислим $u_t|_{t=0}$

  Интегралы, в которых и пределы, и подынтегральная функция зависят от параметра, дифференцируются по формуле

  $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\,dx = f(t,b(t))\cdot b' - f(t,a(t))\cdot a' + \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(t,x)\,dx$$

В нашем случае $a=0,\ b=t,\ b'=1$. Поэтому

$$u_t|_{t=0} = \left(\underbrace{w(t,x,\tau)|_{\tau=t}}_{=0 \text{ из нач. усл. в } (7)} + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \right)\Bigg|_{t=0} = \int_0^0 \frac{\partial w}{\partial t}\, d\tau = 0$$

- $\Delta_x u = \displaystyle\int_0^t \Delta_x w(t,x,\tau) d\tau$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}\, d\tau = w_t(t,x,\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t w_{tt}(t,x,\tau)\, d\tau = f(\tau,x)|_{\tau=t} + a^2 \int_0^t \Delta_x w(t,x,\tau)\, d\tau$$
$$= f(t,x) + a^2\Delta_x u$$

Значит, рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению. □

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.2. *Пусть в задаче (6) функция $f(t,x)$ такова, что $D_x^\alpha f \in C\left\{t \geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^3\right\}$ Тогда функция*

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \left[\oiint\limits_{|\xi - x| = a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, dS_\xi \right] d\tau \tag{8}$$

является классическим решением, причем

$$D_{t,x}^\alpha\, u \in C\left\{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Суть метода Дюамеля: $f(t,x)$ — это начальные данные в каждый момент времени.

Запаздывающий потенциал

Преобразуем формулу (8):

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{4\pi a^2(t-\tau)} \oiint\limits_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, dS_\xi = \begin{bmatrix} \rho = a(t-\tau) \\ \tau = t-\rho/a \\ d\tau = -d\rho/a \end{bmatrix} = -\int\limits_{at}^0 \frac{1}{4\pi a\rho}\frac{d\rho}{a} \oiint\limits_{|\xi-x|=\rho} f\Big(t-\frac{\rho}{a},\ \xi\Big) dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{at} d\rho \oiint\limits_{|\xi-x|=\rho} \frac{f(t-\frac{|\xi-x|}{a},\ \xi)}{|\xi-x|}\, dS_\xi = \boxed{\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{f(t-\frac{|\xi-x|}{a},\xi)}{|\xi-x|}\, d\xi}$$

Выражение в рамке называется *запаздывающим потенциалом.*

Общая задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = f(t,x) \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

Теорема 6.3 (формула Кирхгофа)**.** *Пусть в общей задаче Коши*

$$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3) \qquad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3) \qquad f \in C^{0,2}_{t,x}\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Тогда выражение

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\xi-x|=at} u_0(\xi)\,dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t}\oiint\limits_{|\xi-x|=at} u_1(\xi)\,dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{f(t-\frac{|\xi-x|}{a},\xi)}{|\xi-x|}\,d\xi$$

является классическим решением общей задачи Коши; $u(t,x) \in C^2\left\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3\right\}$

Принцип Гюйгенса

Утверждение 6.4 (Принцип Гюйгенса)**.** *Возмущение, локализованное в пространстве (трёхмерном), приводит к действию, локализованному во времени.*

Требуется, чтобы источники отсутствовали, т.е. $f \equiv 0$, а носители функций u_0 и u_1 были ограничены, откуда

$$\operatorname{supp} u_0 \ \cup\ \operatorname{supp} u_1 = M \text{ — компакт}$$

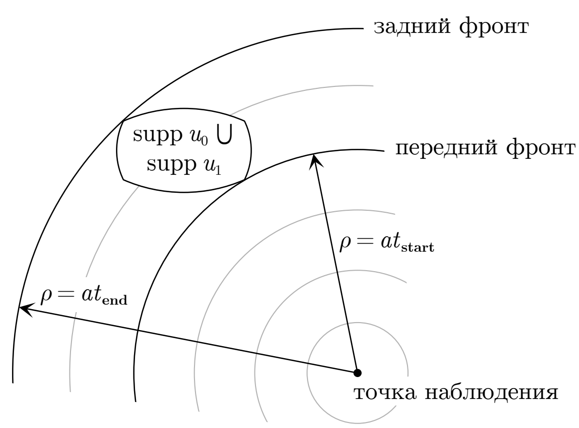
Фиксируется произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

По формуле Кирхгофа функция $u(t,x_0)$ может быть ненулевой только внутри отрезка времени

$$\text{от}\ \ t_{\text{start}} = \frac{1}{a}\cdot\inf_{y\in M}|y-x_0| \qquad \text{до}\ \ t_{\text{end}} = \frac{1}{a}\cdot\sup_{y\in M}|y-x_0|$$

(иначе под интегралами тождественный нуль).

У такого конечного возмущения есть передний и задний фронт:



Значение $u(t,x_0)$ $\sim$ интеграл по сфере радиусом $|x_0 - \xi| = \rho = at$

Билет 7. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Метод спуска. Диффузия волн.

Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), \qquad t > 0,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases} \tag{9}$$

Используем **метод спуска**: перейдем в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(t, x_1, x_2) \\ u\big|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для этой задачи решение мы уже знаем. Покажем, что оно не зависит от третьей переменной.

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\xi - x| = at} u_0(\xi_1, \xi_2)\, dS + \underbrace{\frac{1}{4\pi a^2 t} \oiint\limits_{|\xi - x| = at} u_1(\xi_1, \xi_2)\, dS}_{V(t,x)} + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{|\xi - x| < at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a},\ \xi\right)}{|\xi - x|}\, d\xi$$

Покажем, например, что функция $V(t, x)$ не зависит от x_3. Сфера, по которой ведется интегрирование, разбивается на две полусферы S_+ и S_-, которые задаются уравнениями

$$\xi_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2} = x_3 \pm \sqrt{a^2t^2 - |\xi' - x'|^2}$$

Интегралы по полусферам равны, поэтому $V(t, x) = \dfrac{1}{2\pi a^2 t} \iint\limits_{S^+} u_1(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi$

Из матанализа известно, что если поверхность S задана в виде графика некоторой функции $\xi_3 = F(\xi_1,\, \xi_2),\ \ (\xi_1, \xi_2) \in D$, то поверхностный интеграл можно свести к двойному по формуле

$$\iint\limits_S u(\xi)\, dS = \iint\limits_D u(\xi_1,\, \xi_2,\, F(\xi_1,\, \xi_2)) \sqrt{1 + \left(F'_{\xi_1}\right)^2 + \left(F'_{\xi_2}\right)^2}\, d\xi_1 d\xi_2$$

В нашем случае

$$\sqrt{1 + \left(F'_{\xi_1}\right)^2 + \left(F'_{\xi_2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}$$

Получили, что

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{|\xi' - x'| < at} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi' - x'|^2}}\, d\xi_1 d\xi_2$$

не зависит от третьей переменной.

Аналогично для двух других слагаемых, т. к. во всех трех под знаками интегралов или производных можно выделить интеграл вида $\displaystyle\oiint\limits_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi_1,\xi_2)\,dS_\xi$, который, как показано выше, от x_3 не зависит. Доказанное можно сформулировать как теорему:

Теорема 7.1. *Пусть в задаче Коши (9): $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2),\ u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2),\ f \in C^{0,2}_{t,x}\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^2\}$ Тогда функция ($d\xi = d\xi_1 d\xi_2$)*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}\right] + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}} + \int\limits_0^t \left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}\right]d\tau$$

принадлежит $C^2\{t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^2\}$ и является классическим решением задачи Коши (9).

Определение 7.1. ***Диффузия волн*** – это отсутствие принципа Гюйгенса. В $\mathbb{R}^2$ его нет. Есть эффект последействия: передний фронт есть, а заднего нет, так как интегралы берутся не по контурам, а по всей внутренней области.

Можно привести более наглядное доказательство. Пусть носители функций u_0, u_1 содержатся в некотором компакте M. Тогда, «погрузив» $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, получим, что носитель начального возмущения - неограниченный цилиндр $\{(x_1,x_2,x_3)\colon\ (x_1,x_2) \in M,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Следовательно, начальное возмущение не ограничено в пространстве, и возмущение в любой точке не ограничено во времени (у волн, созданных цилиндром, отсутствует задний фронт)

Билет 8. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая $\mathbb{R}^2$). Метод интеграла энергии.

Теорема 8.1. *Классическое решение ЗК для волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ единственно.*

Доказательство (для случая $\mathbb{R}^2$). Пусть u_1 и u_2 - классические решения.

Тогда функция $v(x, y, t) = u_1 - u_2$ удовлетворяет полностью однородной задаче:

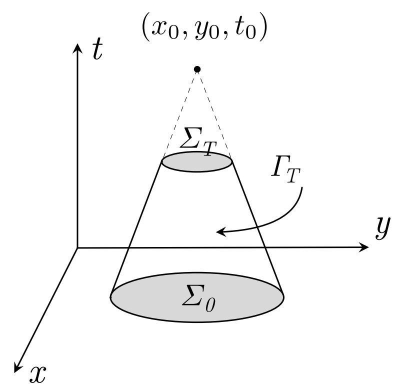
$$\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Наша цель - показать, что $v \equiv 0$ при $t \geqslant 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Возьмем точку $(x_0, y_0, t_0),\quad t_0 > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Выпустим из этой точки характеристическую поверхность — конус:

$$w(t, x) = a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad t < t_0$$

Возьмем его часть — усечённый конус V_T с нижним основанием Σ_0, верхним основанием Σ_T и боковой поверхностью Γ_T :



Вектор (внешней) нормали $\vec{n}$ к этому усеченному конусу:

- на Σ_T : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$
- на Σ_0 : $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$
- на Γ_T : $\vec{n} = \dfrac{-1}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_t^2}} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_t \end{pmatrix}$

  В силу уравнения характеристик $w_t^2 - a^2 w_x^2 - a^2 w_y^2 = 0$ (задаёт конус) имеем

  $n_t^2 = a^2\big(n_x^2 + n_y^2\big)$

  $n_t^2 + n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_t^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad n_t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$

Функция $\psi = v_t(v_{tt} - a^2 v_{xx} - a^2 v_{yy})$ тождественно равна нулю.

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
0 &= v_t v_{tt} - a^2 v_t v_{xx} - a^2 v_t v_{yy} = \\
&= \frac{1}{2}\big(v_t^2\big)_t + a^2 v_x v_{xt} - \big(a^2 v_t v_x\big)_x + a^2 v_y v_{yt} - \big(a^2 v_t v_y\big)_y = \\
&= \frac{1}{2}\big(v_t^2\big)_t - (a v_t v_x)_x - (a v_t v_y)_y + \left(\frac{1}{2}a^2 v_x^2\right)_t + \left(\frac{1}{2}a^2 v_y^2\right)_t = \\
&= \left(\frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2}\right)_t + \big(-a^2 v_t v_x\big)_x + \big(-a^2 v_t v_y\big)_y = \\
&= F_t^{(t)} + F_x^{(x)} + F_y^{(y)} = \operatorname{div} \vec{F},
\end{aligned}$$

где введено поле $\vec{F}$.

Проинтегрируем полученную дивергенцию по объему усеченного конуса:

$$0 = \iiint\limits_{V_T} \operatorname{div} \vec{F} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V_T} (\vec{F}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Sigma_T} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2}\, dS - \iint\limits_{\Sigma_0} \frac{v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2}{2}\, dS +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{\Gamma_T} \big((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t - 2a^2 v_t v_x n_x - 2a^2 v_t v_y n_y\big) dS \;=\; E(\Sigma_T) - E(\Sigma_0) + E(\Gamma_T)$$

В силу условий $v\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = 0$ имеем $E(\Sigma_0) = 0$ (под интегралом тождественный ноль). Тогда $E(\Sigma_T) + E(\Gamma_T) = 0$. Кроме того, $E(\Sigma_T) \geqslant 0$ (под интегралом сумма квадратов).

Покажем, что и $E(\Gamma_T) \geqslant 0$: разделим и домножим её на $n_t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \iint\limits_{\Gamma_T} \big((v_t^2 + a^2 v_x^2 + a^2 v_y^2) n_t^2 \;-\; 2a^2 v_t v_x n_t n_x \;-\; 2a^2 v_t v_y n_t n_y\big) dS =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \iint\limits_{\Gamma_T} \Big(v_t^2 \overbrace{a^2(n_x^2 + n_y^2)}^{= n_t^2} + a^2 v_x^2 n_t^2 \;+\; a^2 v_y^2 n_t^2 \;-\; 2a^2 v_t v_x n_t n_x \;-\; 2a^2 v_t v_y n_t n_y\Big)\, dS$$

$$= \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+1} \iint\limits_{\Gamma_T} \big((v_t n_x - v_x n_t)^2 + (v_t n_y - v_y n_t)^2\big) dS \quad\geqslant\; 0$$

Значит, $E(\Sigma_0) = E(\Sigma_T) = E(\Gamma_T) \equiv 0$. Из $E(\Sigma_T) \equiv 0$ получаем:

$$v_t \equiv 0,\; v_x \equiv 0,\; v_y \equiv 0 \quad\Rightarrow\quad v = \text{const} = v\big|_{t=0} = 0$$

Это верно всюду внутри усеченного конуса. Заметая такими конусами всё пространство, получим, что $v \equiv 0$. $\square$

Билет 9. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$. Фундаментальное решение. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции.

$$\text{Задача:}\quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Наводящие соображения

На консультации 2021 года лектор сказал, что эту часть можно не учить. Поэтому можете сразу перейти к формальному доказательству формулы Пуассона.

Итак, пусть для начала:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \tau = \alpha t, & \alpha > 0, \\ \xi = \beta x, & \beta > 0. \end{cases}$$

Пусть $u(t,x)$ - решение задачи. Введём $v(\tau,\xi) = u\left(\dfrac{\tau}{\alpha},\ \dfrac{\xi}{\beta}\right)$. Тогда

1. $$v\big|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & \dfrac{\xi}{\beta} \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \xi \geqslant 0 \\ 0, & \dfrac{\xi}{\beta} < 0 \ \Leftrightarrow\ \xi < 0 \end{cases}$$

2. $$v_\tau = \frac{1}{\alpha} u_t, \quad v_\xi = \frac{1}{\beta} u_x, \quad v_{\xi\xi} = \frac{1}{\beta^2} u_{xx} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha v_\tau = a^2 \beta^2 v_{\xi\xi}$$

Функция v в общем случае будет решением другой задачи Коши, но при $\alpha = \beta^2$ — той же самой задачи Коши. Значит, решение не единственно: если $u(t,x)$ — решение, то $\forall\, \beta > 0$ функция $v(t,x) = u\left(\dfrac{t}{\beta^2},\ \dfrac{x}{\beta}\right)$ — тоже решение.

Определение 9.1. Множество преобразований $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ — *однопараметрическая группа преобразований,* если:

- Это множество замкнуто относительно операции композиции:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{D} \quad \exists!\, \gamma \in \mathcal{D}\colon \quad u_\alpha \circ u_\beta = u_\gamma$$

- Оно содержит нейтральный элемент — тождественное преобразование:

$$\exists!\, o \in \mathcal{D} \quad \big(\forall\, \alpha \in \mathcal{D} \quad u_o \circ u_\alpha = u_\alpha \circ u_o = u_\alpha\big)$$

- У каждого элемента есть обратный, и их композиция в любом порядке даёт тождественное преобразование.

Определение 9.2. Функция $I(x)$ — *инвариант однопараметрической группы преобразовний*, если $\forall\, \alpha \in \mathcal{D} \quad I(x) \equiv I(u_\alpha(x))$

Определение 9.3. Говорят, что *уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований*, если все преобразования группы переводят решения этого уравнения в решения.[1]

Определение 9.4. Решение уравнения называется *автомодельным*, если оно зависит только от инвариантов некоторой допустимой группы преобразований.

Пример 9.1. Множество преобразований

$$\begin{cases} \tau = \beta^2 t, \\ \xi = \beta x \end{cases}$$

есть однопарметрическая группа преобразований, $z = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ — инвариант группы.

Найдём автомодельное решение $u(t,x) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) = f(z)$.

В этом случае:

$$u_t = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{-x}{2t^{3/2}}\right) \qquad u_x = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad u_{xx} = f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

Подставляем в уравнение:

$$-\frac{x}{2t\sqrt{t}} f'(z) = a^2 f''(z) \cdot \frac{1}{t}$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{1}{a^2}\frac{x}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2a^2} z$$

$$\ln|f'(z)| = -\frac{z^2}{4a^2} + \tilde{C}_1$$

Получили, что $f(z) = C_1 \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}}\, d\eta + C_2$

Задача была следующей: бесконечный стержень разделён на две половины, начальные температуры половин $T_0 = 0$ и $T_1 = 1$. Из физических соображений:

$$\lim_{z \to -\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\lim_{z \to +\infty} f(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}}\, d\eta = C_1^{-1} = 2a \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}}\, d\frac{\eta}{2a}}_{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}}$$

[1] В прошлых версиях файла определение гласило, что уравнение допускает группу преобразований, если оно инвариантно относительно всех преобразований группы. Но непонятно, что подразумевается под инвариантностью *уравнения*. Новое определение же опирается на инвариантность *функций*. Оно взято с этого сайта.

Окончательно:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}}\, d\eta = \frac{2a}{\sqrt{4\pi a^2}} \int\limits_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2}\, d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2}\, d\mu$$

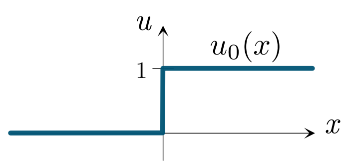
Введём **интеграл ошибок**:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\xi^2}\, d\xi\,, \qquad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1, \ \ \operatorname{erf}(0) = 0$$

Тогда:

$$u(t,x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4ta^2}}} e^{-\mu^2}\, d\mu = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right]$$

1. Мы рассмотрели модельную задачу



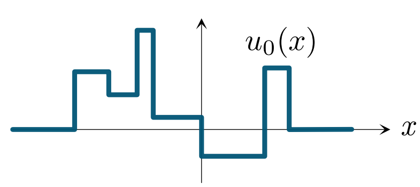
2. Увеличим ступеньку в u_* раз и сдвинем

$$u(t,x) = \frac{u_*}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right]$$

3. Можем получить и решение для ступеньки конечной ширины:

$$u(t,x) = \frac{u_*}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2 t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right]$$

4. Для системы из N интервалов имеем:



$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{u_{*k}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2 t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right]$$

Последнее можно переписать в следующем виде:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right\}}{x_{2k} - x_{1k}}\right] u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k})$$

5. Окончательно, пусть $u_0(x)$ финитна, непрерывна, ограничена. Разбиваем ее носитель $\operatorname{supp} u_0(x)$ на отрезки, аппроксимируем кусочно постоянной. Для приближенных решений справедливо:

$$u(t,x) = \left[\Psi(t,x,\xi) = -\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{4a^2t}}\right), \quad \xi_k = \frac{x_{2k}-x_{1k}}{2}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{\Psi(t,x,x_{2k}) - \Psi(t,x,x_{1k})}{x_{2k}-x_{1k}} \cdot u_{*k} \cdot (x_{2k}-x_{1k}) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k}-x_{1k}) = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\bigg|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k}-x_{1k}) \text{ — Интегральная сумма Римана}$$

Предположение: решение будет

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} u_0(\xi)\, d\xi \text{ — Формула Пуассона}$$

Функция

$\mathcal{E}(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ — **фундаментальное решение (или функция источника)**

Строгое доказательство

Теорема 9.1. *Пусть* $u_0 \in C(\mathbb{R}^1)$, $|u_0(x)| \leqslant M_0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^1$. *Тогда функция*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} u_0(y) dy$$

1. *Принадлежит классу* $C^\infty\,(t>0,\ x\in\mathbb{R}^1) \ \cap\ C(t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^1)$

2. *Является классическим решением задачи Коши*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. $|u(t,x)| \leqslant M \quad \forall\, t \geqslant 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^1$

Доказательство.

1. В исходном интеграле для $u(t,x)$ сделаем такую замену:

$$\frac{y-x}{\sqrt{4a^2t}} = \eta, \quad y = x + \sqrt{4a^2t}\,\eta, \quad dy = \sqrt{4a^2t}\,d\eta$$

   Тогда получим

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t}\,\eta)\,d\eta$$

$$u_0(x + \sqrt{4a^2t}\,\eta) \quad \in \quad C(t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^1,\ \eta \in \mathbb{R}^1)$$

   Оценим $\left|e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t}\,\eta)\right| \leqslant M_0 e^{-\eta^2}$, причем $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M_0 e^{-\eta^2} d\eta$ сходится $\Rightarrow$ исходный интеграл сходится равномерно, а значит лежит в $C(t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^1)$. Отсюда следует третье утверждение теоремы.

2. Возьмем

$$u_x(t,x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y)\,dy \tag{10}$$

   Выражение под интегралом лежит в $C(t > 0,\ \ x, y \in \mathbb{R}^1)$.

   Пусть $x \in [-A, A]$. Покажем равномерную сходимость интеграла серией оценок:

   (a) При $|y| > A$:

   $(y-x)^2 \geqslant (|y| - A)^2 = y^2 + A^2 - 2\dfrac{|y|}{\sqrt{2}}\big(\sqrt{2}A\big).$

   Поскольку $2ab \leqslant a^2 + b^2$,

   $(y-x)^2 \geqslant y^2 + A^2 - \dfrac{y^2}{2} - 2A^2 = \dfrac{y^2}{2} - A^2$

   (b) При $|y| \leqslant A$: $\ (x-y)^2 > 0$

   (c) При $\forall\, y \in \mathbb{R}$: $\ (x-y)^2 \geqslant \varphi_A(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - A^2, & |y| \geqslant A \\ 0, & |y| < A \end{cases}$

   (d) Кроме того, $|y - x| \leqslant |y| + A$.

   Получили следующую оценку (при $|x| < A$):

$$\left|\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y)\right| \leqslant \frac{M_0}{4a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}} (|y| + A) e^{-\frac{\varphi_A(y)}{4a^2t}}$$

   Если $t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$, то это можно ограничить выражением $C \cdot (|y| + A) \cdot e^{\frac{\varphi_A(y)}{B}}$, интеграл от которого сходится, поэтому исходный интеграл сходится равномерно.

Равномерная сходимость (по двум параметрам сразу) есть в любом прямоугольнике

$$Q = \Big\{ |x| < A, \quad t \in [t_1, t_2] \Big\}$$

Беря в качестве Q все возможные такие прямоугольники, получим, что производная u_x на всём множестве $\big\{ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^1 \big\}$ существует, непрерывна и равна интегралу (10).

Аналогично будет для любой другой производной (будет асимптотика $|P_n(y)| e^{-\alpha y^2}$).

3.

$$\mathcal{E}(t, x - y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$\mathcal{E}_x(t, x - y) = -\frac{(x - y)}{2a^2 t} \cdot \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_{xx}(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x - y)^2}{4a^4 t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_t(t, x - y) = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{(x - y)^2}{4a^2}\frac{1}{t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

Тогда

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\big[\mathcal{E}_t(t, x - y) - a^2 \mathcal{E}_{xx}(t, x - y) \big]}^{0} u_0(y) dy = 0.$$

Начальное условие (используя самое начало выкладок)

$$u\big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} u_0(x) d\eta = u_0(x)$$

Теорема доказана. $\square$

Билет 10. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Метод Дюамеля. Существование классического решения.

Задача:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - a^2\Delta_x u(t,x) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ u|_{t=0} = u_0(x) = \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n), & \varphi_k(x_k)\in C(\mathbb{R}^1), \quad |\varphi(x_k)|\leqslant M, \quad k=\overline{1,n}; \end{cases} \tag{11}$$

Напишем серию задач Коши:

$$\begin{cases} \overset{k}{u}_t(t,x) - a^2 \overset{k}{u}_{x_kx_k}(t,x) = 0,\\ \overset{k}{u}|_{t=0} = \varphi_k(x_k); \end{cases} \tag{12}$$

Решение каждой даётся формулой Пуассона:

$$\overset{k}{u}(t,x_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_k-y_k)^2}{4a^2t}}\varphi_k(y_k)dy_k \tag{13}$$

Покажем, что решение всей задачи:

$$u = \prod_{k=1}^{n}\overset{k}{u}(t,x_k)$$

1. Очевидно, $u(t,x)\in C(t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(t>0,x\in\mathbb{R}^n)$;
2. $u(0,x) = \prod\limits_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k)$;
3. $u_t(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\prod\limits_{k=1}^{n}\overset{k}{u}(t,x_k)\right] = \sum\limits_{j=1}^{n}\left[\overset{j}{u}_t(t,x_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\overset{k}{u}(t,x_k)\right] = \sum\limits_{j=1}^{n}\left[a^2\overset{j}{u}_{x_jx_j}\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\overset{k}{u}(t,x_k)\right] =$
$= a^2\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}\prod\limits_{k=1}^{n}\overset{k}{u}(t,x_k) = a^2\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}u(t,x) = a^2\Delta_x u(t,x).$

Итак, в случае разделения переменных имеем:

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}}\ldots\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^n(x_j-y_j)^2}{4a^2t}}\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(y_k)dy_1\ldots dy_n = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)dy} \tag{14}$$

Полученная формула называется **формулой Пуассона в $\mathbb{R}^n$**.

Теорема 10.1. *Пусть* $u_0 \in C(\mathbb{R}^n), |u_0| \leqslant M \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} u_0(y)dy \ -$$

классическое решение задачи Коши 11, лежащее в классе $C^\infty(t>0, x\in\mathbb{R}^n) \cap C(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$. *Кроме того,* $|u(t,x)| \leqslant M \ \ \forall\, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сохраняется из предыдущего билета с заменой $(x-y)^2 \to |x-y|^2$. □

Зная решение однородного уравнения, можно найти решение и для неоднородного:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_x u = f(t,x), \quad t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0; \end{cases} \tag{15}$$

Используем метод Дюамеля. Предположения относительно f:

1. $D_x^\alpha f(t,x) \in C(t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^n) \ \ \forall\, \alpha : |\alpha| \leqslant 2;$
2. $|f(t,x)| \leqslant M_0 \ \ \forall\, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n;$
3. $|D_x^\alpha f(t,x)| \leqslant M_2 \ \ \forall\, t \geqslant 0, x\in\mathbb{R}^n.$

Сводим задачу к семейству однопараметрических задач:

$$\begin{cases} v_t(t,x,\tau) - a^2\Delta_x v(t,x,\tau) = 0, \qquad t > \tau, x\in\mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = f(\tau,x), \qquad x\in\mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{16}$$

Решение даётся формулой Пуассона в $\mathbb{R}^n$:

$$v(t,x,\tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau,y)dy$$

$v(t,x,\tau)$ непрерывно продолжима до $t\geqslant\tau$, ограничена: $|v(t,x,\tau)| \leqslant M_0$.

Покажем, что $u(t,x) = \int\limits_0^t v(t,x,\tau)d\tau$ — решение задачи.

Исследуем вспомогательную функцию:

$$w(\tilde t,x,\tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2\tilde t}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2\tilde t}} f(\tau,y)dy, \quad \tilde t > 0, \tau \geqslant 0, x, y\in\mathbb{R}^n$$

Введём $\eta = \dfrac{y-x}{2a\sqrt{\tilde t}} \Rightarrow y = x + 2a\sqrt{\tilde t}\eta \Rightarrow dy = dy_1\dots dy_n = \left(2a\sqrt{\tilde t}\right)^n d\eta_1\dots d\eta_n = \left(2a\sqrt{\tilde t}\right)^n d\eta.$

Тогда $w(\tilde{t}, x, \tau) = \dfrac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) \in C(\tau \geqslant 0, \tilde{t} \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$\Big|f\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big)e^{-\eta^2}\Big| \leqslant M_0 e^{-\eta^2}$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} d\eta < +\infty \Rightarrow w(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Итак, $w \in C(\tilde{t} \geqslant 0, \tau \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$.

Утверждение 10.2. *w можно дифференцировать и вносить производную под интеграл.*

Доказательство. $w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) \sim \dfrac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f_{x_i}\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) \in C(\tau \geqslant 0, \tilde{t} \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$\Big|f_{x_i}\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big)e^{-\eta^2}\Big| \leqslant M_2 e^{-\eta^2} \Rightarrow w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau)$ сходится равномерно.

Поэтому, вместо '$\sim$' можно поставить '$=$':

$$w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$$

Аналогично и для вторых производных по x:

$$w_{x_i x_j}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i x_j}\Big(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta\Big) d\eta, \quad \tilde{t} > 0 \qquad \square$$

Теперь производная по времени: в силу того, что уравнение

$$\begin{cases} w_{\tilde{t}} - a^2 \Delta_x w = 0, \\ w|_{\tilde{t}=0} = f(\tau, x); \end{cases}$$

выполняется везде, включая границу, получаем, что $w_{\tilde{t}} \in C(\tilde{t} \geqslant 0, \tau \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$

Мы исследовали w, а цель — v. Связь этих функций: $v(t, x, \tau) = w(t - \tau, x, \tau)$. При условиях $\tau \geqslant 0, t \geqslant \tau, x \in \mathbb{R}^n$ имеем непрерывность следующих функций: $v, v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}$. Тогда для функции $u(t, x) = \int\limits_0^t v(t, x, \tau) d\tau$ получаем непрерывность $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \Rightarrow$ решение будет классическим.

Осталось проверить уравнение: $u_t = v(t, x, t) + \int\limits_0^t v_t(t, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int\limits_0^t a^2 \Delta_x v d\tau = f(t, x) + a^2 \Delta_x u$

Определение 10.1. Пусть Q — область в $\mathbb{R}^{n+1}_{t, x_1, \ldots, x_n}$, а $\hat{Q} = Q \cup \{$некоторое подмножество $\partial Q\}$. Обозначим $C^{p,q}_{t,x}(\hat{Q})$ множество функций $u(t, x)$ таких, что $u, D^\alpha_x u, D^\beta_t u \in$

$C(Q), \alpha$ — мультииндекс, $|\alpha| \leqslant q, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta \leqslant p$, и все эти функции допускают непрерывное продолжение на $\hat{Q}$.

Теорема 10.3. *Пусть в задаче Коши*

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_x u = f(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

а) $u_0 \in C(\mathbb{R}^n), |u_0(x)| \leqslant M_0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

б) $f(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n)$

в) $|f(t,x)| \leqslant M_1, \ |f_{x_i}(t,x)| \leqslant M_2, \ \left|f_{x_i x_j}(t,x)\right| \leqslant M_2 \quad \forall\, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n$

Тогда функция

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} u_0(y)dy + \int\limits_0^t \left[\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau,y)dy\right] d\tau$$

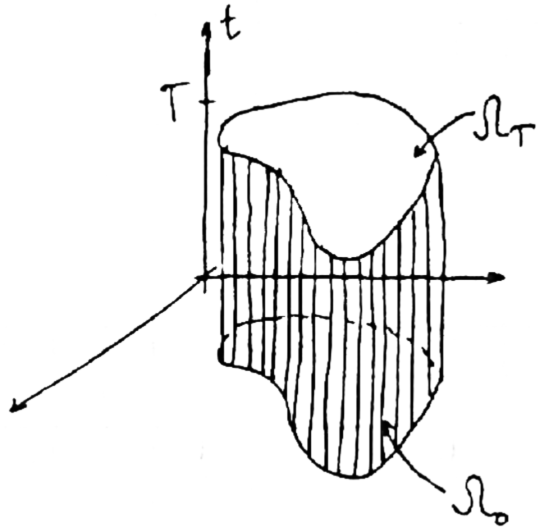
является классическим решением задачи Коши, лежит в классе $C(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}_{t,x}(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$*. Кроме того, справедлива оценка* $|u(t,x)| \leqslant M_0 + tM_1$

Доказательство. Последний факт: $|u| \leqslant M_0 + \int\limits_0^t |v_t| d\tau \leqslant M_0 + M_1 t$ $\square$

Билет 11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе $\mathbf{M_2(T)}$ (без доказательства)

• Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, T > 0, $Q_T = (0,T)\times\Omega$ - цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью $t=\tau$ обозначим Ω_τ

Определение 11.1. Параболическая граница области Q_T - множество $\Gamma_T = \Omega_0 \cup \{[0,T]\times \partial\Omega\}$



Определим оператор L : $\mathrm{L}u(t,x) = u_t - a^2\Delta_x u$, где $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T)$

Теорема 11.1. (Принцип максимума) *Пусть* $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, *и пусть* $\mathrm{L}u(t,x) \leqslant 0$ *в* Q_T. *Тогда* $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(t,x)$ *достигается на параболической границе* Γ_T *области* Q_T

Доказательство. Возьмем усеченный цилиндр $Q_{T-\delta}$. Рассматриваются $M = \max\limits_{\overline{Q_{T-\delta}}} u(t,x)$ и $m = \max\limits_{\Gamma_{T-\delta}} u(t,x)$. Теорема утверждает, что M не превосходит m.

- **Пусть это не так** и $m < M$. Тогда $\exists (t^1,x^1) \in Q_{T-\delta} \cup \Omega_{T-\delta}$ такая, что $M = u(t^1,x^1)$.
  Т.к. это точка максимума гладкой функции, $u_{x_ix_i}(t^1,x^1) \leqslant 0$, а $u_t(t^1,x^1) \geqslant 0$ (Если внутри, то равенство, если на верхней кромке, то $\geqslant 0$).
  Значит, значение образа $u(t,x)$ под действием оператора L в точке (t^1,x^1) : $\boxed{\mathrm{L}u(t^1,x^1) = u_t - a^2\Delta_x u|_{(t^1,x^1)} \geqslant 0}$.
  Для противоречия необходимо показать, что неравенство строгое.

й

- **Строгость:** Возьмем функцию $v_\beta(t,x) = u(t,x) + \beta|x - x^1|^2, \beta = \dfrac{M-m}{2(\mathrm{diam} Q_T)^2}$ - такая же гладкая, как u.
  На параболической границе $v_\beta \leqslant m + \frac{M-m}{2d^2}\cdot d^2 = \frac{M+m}{2} < M$. Тем не менее, $v_\beta(t^1, x^1) = M \Rightarrow$ максимум v_β - не на параболической границе.
  Пусть он в точке $(t^2, x^2) \notin \Gamma_{T-\delta}$. Тогда $\mathrm{L}v_\beta|_{(t^2,x^2)} = \mathrm{L}u|_{(t_2,x_2)} - \beta d^2 2n \boxed{\geqslant} 0 \Rightarrow$ $\mathrm{L}u|_{(t_2,x_2)} \geqslant \beta d^2 2n > 0 \Rightarrow$ **Противорчие** (вывод $\boxed{\geqslant}$ аналогичен рамке выше)

- **Предельный переход с $\delta \to +0$:** Пусть $u_* = \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$.
  Тогда $\max\limits_{\overline{Q_{T-\delta}}} u(t,x) \leqslant \max\limits_{\Gamma_{T-\delta}} u(t,x) \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x) = u_* \Rightarrow u(t,x) \leqslant u_*$ во всех точках $\overline{Q_T} \diagdown \Omega_T$
  $u(t,x)|_{\Omega_T} = \lim\limits_{(\widehat{t},\widehat{x}) \in Q_T \to (t,x) \in \Omega_T} u(\widehat{t}, \widehat{x}) \boxed{\leqslant} u_*$
  ($\boxed{\leqslant}$ - предельный переход в неравенствах.) Теорема доказана.

$\square$

Следствие. *Пусть $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}), \mathrm{L}u = 0 \quad \forall\, (t,x) \in Q_T$. Тогда $\max\limits_{\overline{Q_T}} u(t,x)$ и $\min\limits_{\overline{Q_T}} u(t,x)$ достигаются на параболической границе Γ_T множества Q_T*

Доказательство. Максимум достигается,т.к. $\mathrm{L}u \leqslant 0$, минимум достигается, т.к. $\mathrm{L}(-u) \leqslant 0$ $\square$

Единственность решения задачи Коши

Вообще говоря, решение единственным будет не всегда. Но если ограничиться некоторым классом функций, то в нем решение может оказаться единственным. Введем такой класс.

- Пусть $T > 0, \sigma \geqslant 0$. **Слой толщины T** - множество $\Pi_T = \{(t,x) : 0 < t < T; x \in \mathbb{R}^n\}$
  Обозначим $M_\sigma(T)$ -**класс функций** $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi_T})$ таких, что $\forall\, u(t,x) \;\; \exists\, A > 0, \alpha \geqslant 0$ такие, что $|u(t,x)| \leqslant A \exp^{\alpha |x|^\sigma} \quad \forall\, (t,x) \in \overline{\Pi_T}$

  Лемма 11.2. *$M_\sigma(T)$ - линейное пространство, причем $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 \Rightarrow M_{\sigma_0}(T) \subset M_{\sigma_1}(T)$*

  Доказательство. Очевидно. $\square$

  Лемма 11.3. *$\forall T > 0$ функция $u_T(t,x) = \dfrac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \exp^{\dfrac{|x|^2}{4a^2(T-t)}}, t < T, x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности*

  Доказательство. $-\; u_T \in C^\infty\{t < T, x \in \mathbb{R}^n\}$

  $$-\;\frac{\partial u_T}{\partial t} = \left[\frac{n}{2(T-t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)^2}\right] \exp^{\dfrac{|x|^2}{4a^2(T-t)}}$$

$$-\Delta_x u_T = \left[\frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}}\frac{2n}{4a^2(T-t)} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}}\frac{4|x|^2}{4^2a^4(T-t)^2}\right]\exp^{\frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}} \Rightarrow (u_T)'_t - a^2\Delta_x u_T = 0$$ ч.т.д

□

- **Класс Тихонова** - $M_2(T)$

Лемма 11.4. *Пусть $v(t,x)$ такова, что $v \in M_2(T)$ и v - решение полностью однородной ЗК $\{\mathrm{L}v = 0, v|_{t=0}\}$. Тогда $\exists T_1 \leqslant T : |v| \leqslant \varepsilon u_{2T_1}(x,t) \;\; \forall\, \varepsilon > 0$*

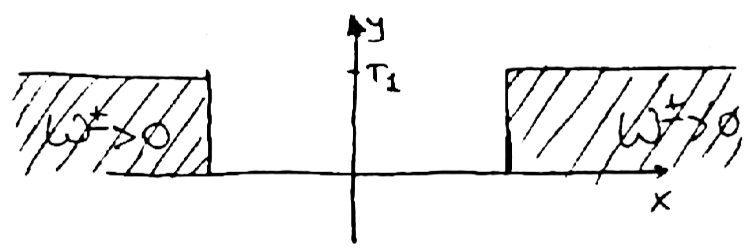
Доказательство. $|v| \leqslant A\exp^{\alpha|x|^2} \quad \forall\, t,x \in \overline{\Pi_T}$. Выбираем $T_1 \leqslant T : \dfrac{1}{8a^2T_1} > \alpha : T_1 = \min\left\{T, \dfrac{1}{16\alpha a^2}\right\}$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\omega_e^{\pm}(t,x) = \varepsilon u_{2T_1} \pm v(t,x)$. Нужно показать, что $\omega_e^{\pm}(t,x) > 0$:

$$\omega_e^{\pm}(t,x) \geqslant \varepsilon u_{2T_1} - |v(t,x)| \geqslant \varepsilon u_{2T_1} - A\exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1-t)^{\frac{n}{2}}}\exp^{\frac{|x|^2}{4a^2(2T_1-t)}} - A\exp^{\alpha|x|^2} \geqslant \frac{\varepsilon}{(2T_1-t)^{\frac{n}{2}}}\exp^{\frac{|x|^2}{4a^2 2(T_1)}} - A\exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1)^{\frac{n}{2}}}\exp^{\frac{|x|^2}{8a^2(T_1)}}\left[1 - \boxed{\frac{(2T_1)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon}A\exp^{-\left(\frac{1}{8a^2(T_1)}-\alpha\right)|x|^2}}\right]$$

(для выделенной части $\exists R > 0$: эта часть $< \frac{1}{2}$ при $|x| > R$)

Значит, $\forall (t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T$ и $|x| \geqslant R \;\Rightarrow \omega_e^{\pm}(t,x) > 0$.



Но $\omega_e^{\pm}(t,x)$ удовлетворяет уровнению теплопроводности $\Rightarrow$ на Γ_{T_1} достигаются максимум и минимум $\omega_e^{\pm}(t,x) \Rightarrow$ он строго $> 0 \Rightarrow \omega_e^{\pm}(t,x) \underline{> 0}$ всюду в полосе $(0, T_1)$. Итак,$\mp v(t,x) \leqslant \varepsilon u_{2T_1}(t,x) \Rightarrow |v| \leqslant \varepsilon u_{2T_1}(t,x) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow v \equiv 0$ в $\overline{\Pi_{T_1}}$

□

Теорема 11.5. *Задача Коши $\mathrm{L}u = f(x,t), u|_{t=0} = u_0(x)$ в* **классе Тихонова** *не может иметь более одного решения в полосе Π_T*

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2. Возьмем $v(t,x) = u_2 - u_1$. Функция v удовлетворяет полностью однородной ЗК и лежит в **классе Тихонова** $\Rightarrow$ в

полосе Π_{T_1}, где T_1 определенно из предыдущей леммы, будет $v \equiv 0$
Если $T \leqslant T_1$, то все доказано. В противном случае вводим:
$w(t,x) = v(t + T_1, x)$. Она удовлеворяет:

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta_x w = 0 \\ w|_{t=0} = 0, T_1 \leqslant t < T, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{17}$$

$\Rightarrow$ в полосе $(0, T_1)$ получим $w \equiv 0$
(T_1 определяется $\dfrac{1}{8a^2\alpha} \Rightarrow$ одно и то же)
Так за конечное число шагов $N = \lceil \frac{T}{T_1} \rceil$ мы покроем всю Π_T $\square$

Билет 12. Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.

Рассмотрим смешанную (начально-краевую) задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x), & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u\big|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u\big|_{x=l} = \psi_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \end{cases} \tag{18}$$

Рассматриваем ее классическое решение — функцию $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, где $Q_T = \{(t,x) : t \in (0,T); x \in (0,l)\}$, удовлетворяющую в Q_T уравнению, начальному и граничным условиям.

Теорема 12.1 (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 18*

Доказательство. Если u_1, u_2 — классические решения, то $v = u_1 - u_2$ — классическое решение полностью однородной задачи. На параболической границе $\Gamma_T = \{t = 0, x \in [0,l]\} \cup \{x = 0, t \in [0,T]\} \cup \{x = l, t \in [0,T]\}$ $v|_{\Gamma_T} = 0$. Но на Γ_T достигается максимум и минимум v в Q_T в силу принципа максимума $\Rightarrow v \equiv 0$ □

Частный случай, указанный в билете:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, & 0 < t < T; \end{cases}$$

Из непрерывности естественно требовать выполнение условий согласования: $u_0(0) = u_0(l) = 0$. Оказывается, в таких условиях решение существует.

Метод Фурье — поиск решения в виде ряда по собственным функциям стационарного оператора.

Придём к этой идее. Будем искать решение $Lu = u_t - a^2 u_{xx} = 0$ методом разделения переменных:
$u(t,x) = \Theta(t) X(x), \quad u(t,x) \not\equiv 0.$

Подставляем: $\dot{\Theta}(t) X(x) - a^2 \Theta(t) X''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\dot{\Theta}(t)}{a^2 \Theta(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \mathrm{const}$, т.к. равенство выполнено $\forall (t,x) \in Q_T$

Получаем на функции Θ и X следующие уравнения:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dot{\Theta}(t) + \lambda a^2 \Theta(t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \end{cases}$$

Из начального условия $u(t,0) = \Theta(t)X(0) \;\; \forall\, t \in (0,T) \Rightarrow X(0) = 0$. Аналогично $X(l) = 0$.

Задача для X:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,l), \\ X(0) = X(l) = 0, \\ X(x) \not\equiv 0; \end{cases} \tag{19}$$

Поставленная задача называется *задачей Штурма-Лиувилля.*

Введем оператор A:

- $\mathrm{D}(A) = \{X \in C^2[0,l] : X(0) = X(l) = 0\}$
- $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in C[0,l]\}$
- $AX = -\Delta X = Y$

Задача Штурма-Лиувилля — это задача на собственные функции и собственные значения оператора A.

Решим ее:

- $\lambda < 0$:
  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$
  $\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}l} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0; \end{cases}$
  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\sqrt{|\lambda|}l} & 1 \end{pmatrix} = 1 - e^{2\sqrt{|\lambda|}l} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}l = 0$, противоречие.
  Итак, «$-\Delta$» с граничными условиями Дирихле не имеет отрицательных собственных значений.

- $\lambda = 0$:
  $X(x) = C_1 x + C_2$
  $\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l = 0; \end{cases}$
  Нетривиальных решений нет.

- $\lambda > 0$:
  $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
  $\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0; \end{cases}$
  $\sqrt{\lambda}l = \pi k \Rightarrow \lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$
  Функции $X_k(x) = \sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)$

Теперь для найденных λ_k решаем $\dot{\Theta}_k(t) + \lambda_k a^2 \Theta_k(t) = 0 \Rightarrow \Theta_k(t) = e^{-a^2\lambda_k t}$

Мы нашли $u_k(t,x) = e^{-a^2\lambda_k t}\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)$ — счетное число бесконечно гладких решений: u_k удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (u_k)_t - a^2(u_k)_{xx} = 0, \\ u_k(t,0) = u_k(t,l) = 0, \\ u_k(0,x) = X_k(x) = \sin\lambda_k x; \end{cases}$$

Тогда $u_A(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k u_k(t,x)$ — решение для задачи с начальным условием $u(0,x) = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k X_k(x)$.

Обозначим Ku_0 — класс функций $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k X_k(x)$ — тех, для которых умеем выписать явное решение. Пусть A_k — k-мерные векторы. Между Ku_0 и A_k есть биекция (по $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k X_k(x)$ однозначно восстанавливаем $A_k = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)dx$)

Бесконечномерный вектор подойдет уже не всегда. Как минимум ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)$ должен сойтись в замыкании области. Функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k u_k(t,x)$ должна быть нужной гладкости, а также удовлетворять уравнению 18.

Утверждение 12.2. $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum\limits_{k=1}^{+\infty}|A_k| < +\infty$ *подойдет*

Доказательство. Пусть $u_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right), \sum\limits_{k=1}^{+\infty}|A_k| < +\infty$. Тогда $\left|A_k\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)\right| \leqslant |A_k| \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно $\Rightarrow$ сумма непрерывна. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать $\Rightarrow$ по $u_0(x)$ восстанавливаем A_n:
$\int\limits_0^l u_0(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \int\limits_0^l \sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx \Rightarrow A_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx$

Теперь рассмотрим ряд $u_A(t,x) \sim \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)$

Пока не можем поставить знак равенства, поскольку еще не выяснили сходимость.

$\left|A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\right| \leqslant |A_k| \Rightarrow$ ряд сходится абсолютно и равномерно, и мы можем поставить знак равенства:

$$u_A(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

Покажем, что получилась $u_A(t,x) \in C^\infty(t > 0, 0 \leqslant x \leqslant l)$.

Возьмем прямоугольник $Q_\delta = \{(t,x) : t \geqslant \delta > 0, 0 \leqslant x \leqslant l\}$.

Формально $\dfrac{\partial u_A}{\partial t} \sim -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(t,x)$

Для краткости введём $y = \left(\dfrac{a\pi k}{l}\right)^2$.

Оценка: $|\varphi_k| \leqslant |A_k| y e^{-y\delta} = |A_k| \dfrac{1}{\delta}(y\delta) e^{-y\delta} \leqslant |A_k| \dfrac{1}{\delta e}$

Последнее неравенство следует из того, что функция xe^{-x} имеет максимум в точке $x = 1$, равный $\dfrac{1}{e}$.

Итак, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Варьируя δ, прямоугольниками Q_δ заметаем всю область $\{t > 0, 0 \leqslant x \leqslant l\}$

Для остальных производных получим то же самое — всегда будет получаться произведение многочлена на экспоненту с отрицательным показателем.

Мы научились решать задачу для $u_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$. $\square$

Докажем серию лемм.

Лемма 12.3. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператор A симметричный (самосопряжённый), т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$. Тогда:*

1. *Все собственные значения A вещественны;*
2. *Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть x_k — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_k, а x_n — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n, причем $\lambda_k \neq \lambda_n$. Тогда:

1. $\lambda_k(x_k, x_k) = (Ax_k, x_k) = (x_k, Ax_k) = (x_k, \lambda_k x_k) = \overline{\lambda_k}(x_k, x_k) \Rightarrow \lambda_k = \overline{\lambda_k} \Rightarrow \operatorname{Im}\lambda_k = 0$
2. $\lambda_k(x_k, x_n) = (Ax_k, x_n) = (x_k, Ax_n) = \overline{\lambda_n}(x_k, x_n) \underset{\text{пункт 1}}{=} \lambda_n(x_k, x_n) \Rightarrow \underbrace{(\lambda_k - \lambda_n)}_{\neq 0}(x_k, x_n) = 0 \Rightarrow$ $(x_k, x_n) = 0$

□

Лемма 12.4. *Оператор $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, определенный на $\mathrm{D}(A)$, является симметричным относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0, l]) : (u, v) = \int\limits_0^l u(x)\overline{v(x)}dx$*

Доказательство. $(Au, v) = \int\limits_0^l (-u''(x))\overline{v(x)}dx = \underbrace{-u'(x)\overline{v(x)}\Big|_0^l}_{=0,\text{ в силу определения } \mathrm{D}(A)} + \int\limits_0^l u'(x)\overline{v'(x)}dx =$ $\underbrace{u(x)\overline{v'(x)}\Big|_0^l}_{=0,\text{ в силу определения } \mathrm{D}(A)} + \int\limits_0^l u(x)\Big(-\overline{v''(x)}\Big)dx = (u, Av)$ □

Лемма 12.5. *Пусть $\{e_k\}$ — не более чем счетная ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением: $(e_k, e_j) = \delta_{kj}\underbrace{(e_k, e_k)}_{>0}$. Тогда $\forall f$ из этого пространства справедливо неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|c_k|^2(e_k, e_k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|\dfrac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}\right|^2(e_k, e_k) \leqslant (f, f)$*

Доказательство. $0 \leqslant \left(f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k, f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = (f, f) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(e_k, f) - \sum\limits_{j=1}^{n}\overline{c_j}(f, e_j) +$ $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_k\overline{c_j}(e_k, e_j) =$

$= (f,f) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\overline{c_k}(e_k,e_k) - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\overline{c_j}(e_j,e_j) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\overline{c_i}(e_i,e_i) = (f,f) - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2(e_k,e_k)$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2(e_k,e_k) \leqslant (f,f)$. □

Лемма 12.6. *Пусть два ряда* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = A$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\beta_k|^2 = B$ *сходятся. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\beta_k$ *сходится абсолютно, причем* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k\beta_k| \leqslant \sqrt{A}\sqrt{B}$

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k\beta_k| \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^2}$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем требуемое. □

Лемма 12.7. *Пусть* $v(x) \in C^1([0,l]), v(0) = v(l) = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)$, *где* $A_k = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l v(y)\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}y\right)dy$, *сходится на* $[0,l]$ *к* $v(x)$ *абсолютно и равномерно.*

Доказательство.

1. Система $\{e_k\} = \left\{\sin\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)\right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0,l])$, так как состоит из собственных функций оператора «$-\Delta$» с однородными условиями Дирихле — симметричного в $\mathbb{L}_2([0,l])$ оператора.

2. $A_k = \dfrac{(v,e_k)}{(e_k,e_k)}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя.

3. $A_k = \underbrace{-\dfrac{2}{l}\dfrac{l}{\pi k}v(y)\cos\left(\dfrac{\pi k}{l}y\right)\Big|_0^l}_{=0} + \dfrac{2}{l}\dfrac{l}{\pi k}\int\limits_0^l v'(y)\cos\left(\dfrac{\pi k}{l}y\right)dy = \dfrac{l}{\pi k}\alpha_k$, где $\alpha_k = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l v'(y)\cos\left(\dfrac{\pi k}{l}y\right)dy$.

4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$ по неравенству Бесселя, т.к. система $\{g_k\} = \left\{\cos\left(\dfrac{\pi k}{l}x\right)\right\}$ ортогональна относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2([0,l])$, так как состоит из собственных функций оператора «$-\Delta$» с однородными условиями Неймана — симметричного в $\mathbb{L}_2([0,l])$ оператора.

   Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ сходится. Тогда сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{k} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$.

Функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin\left(\dfrac{\pi k x}{l}\right)$ непрерывна.

5. Сходимость к $v(x)$: Построим

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0, l] \\ -v(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Затем продолжим на $\mathbb{R}$, сделав периодической: $\tilde{v}(x+2l) = \tilde{v}(x)$. Получаем непрерывную периодическую функцию, а во всех точках $x \in [0, l]$ $\exists\, \tilde{v}'_-(x), \tilde{v}'_+(x)$. Тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней на всей $\mathbb{R}$. В силу нечетности $\tilde{v}$, этот ряд — только по синусам, а коэффициенты Фурье равны A_k (для них совпадают формулы). Значит, на $[0, l]$ имеем $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\dfrac{\pi k}{l} x\right)$

$\square$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 12.8. *Пусть в смешанной задаче*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \end{cases}$$

функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям гладкости ($u_0 \in C^1([0, l])$) и согласования ($u_0(0) = u_0(l) = 0$). Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\dfrac{\pi k}{l} x\right) = u(t, x)$, где $A_k = \dfrac{2}{l} \int\limits_0^l u_0(x) \sin\left(\dfrac{\pi k}{l} x\right) dx$, сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q_T} = [0, T] \times [0, l]$, функция $u(t, x) \in C(\overline{Q_T}) \cap C^\infty(Q_T)$ и является классическим решением этой задачи, а любая производная при $t > 0$ от $u(t, x)$ может быть найдена почленным дифференцированием.

Билет 13. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.

Формулировка задачи

Задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ (t,x) \in Q_T = (0,T) \times (0,l), \\ u\big|_{t=0} = u_0(x);\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x),\ x \in [0,l], \\ u\big|_{x=0} = \psi_0(t),\ u\big|_{x=l} = \psi_1(t);\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{20}$$

Рассматриваем её *классическое решение* - функцию $u(t,x) \in C^2\big(Q_T\big) \cap C^1\big(\overline{Q}_T\big)$, удовлетворяющую уравнению, начальным и граничным условиям.

Теорема единственности

Теорема 13.1 (Единственности)**.** *Не может существовать более одного классического решения задачи 20.*

Единственность решения. Для двух решений $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ построим $V(t,x) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in C^2\big(Q_T\big) \cap C^1\big(\overline{Q}_T\big)$.
V - решение полностью однородной задачи:

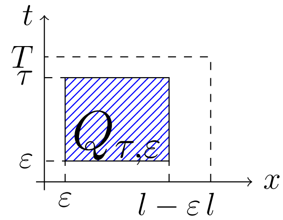
$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, \\ V\big|_{t=0} = V_t\big|_{t=0} = 0, \\ V\big|_{x=0} = V\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что $V \equiv 0$ с помощью интеграла энергии: рассмотрим функцию $I = V_t\big[V_{tt} - a^2 V_{xx}\big],\ (t,x) \in Q_T$.

$$I = V_t V_{tt} - a^2 V_t V_{xx} = \frac{1}{2}\big(V_t^2\big)_t - a^2\big(V_t V_x\big)_x + a^2 \underbrace{V_x V_{xt}}_{\frac{1}{2}\left(V_x^2\right)_t} = \underbrace{\left(\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2}\right)_t}_{F_t^1} \underbrace{-\big(a^2 V_t V_x\big)_x}_{F_x^2} \Bigg|\ \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой Грина: $\iint\limits_{\Omega} \big(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\big)\ dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} Q\ dy + P\ dx$. Для её использования требуется непрерывность производных до границы, поэтому напишем её для области: $Q_{\tau,\varepsilon} = \{(t,x)\colon\ \varepsilon < t < \tau,\ \varepsilon < x < l - \varepsilon\}$.

Доказательство.



$$0 = \iint\limits_{Q_{\tau,\varepsilon}} I\;dxdt = \iint\limits_{Q_{\tau,\varepsilon}} \operatorname{div}\vec{F}\;dxdt = \oint\limits_{\partial Q_{\tau,\varepsilon}} -\frac{V_t^2 + a^2V_x^2}{2}\;dx - a^2V_tV_x\;dt$$

Распишем интеграл по $\partial Q_{\tau,\varepsilon}$:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\left(\frac{V_t^2 + a^2V_x^2}{2}\right)\Bigg|_{t=\tau} dx - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\left(\frac{V_t^2 + a^2V_x^2}{2}\right)\Bigg|_{t=\varepsilon} dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\left(a^2V_xV_t\right)|_{x=l-\varepsilon}\;dt + \int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\left(a^2V_xV_t\right)|_{x=\varepsilon}\;dt = 0$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем :

$$\because V_t(\varepsilon, x) \to V_t(0,x) = 0 \qquad \because V_x(\varepsilon, x) \to V_x(0,x) = \frac{d}{dx}\left(V\big|_{t=0}\right) = 0 \qquad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \to \int_0^l \text{(по определению несобственного}$$

$$\because \lim_{\varepsilon\to+0} V_t(t, l-\varepsilon) = V_t(t,l) = 0 \Rightarrow \cancel{\int\limits_0^{\tau}\left(a^2V_tV_x\right)\;dt} \to 0 \quad \because \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\frac{V_t^2 + a^2V_x^2}{2}\Bigg|_{\tau=l} dx = \cancel{\int\limits_0^{l}\frac{V_t^2(0,x) + a^2V_x^2(0,x)}{2}}$$

Аналогично для $\int\limits_{\varepsilon}^{\tau}(a^2V_tV_x)\big|_{x=\varepsilon}\;dt = 0$. Поэтому получаем, что:

$$\int\limits_0^l \frac{V_t^2(\tau,x) + a^2V_x^2(\tau,x)}{2}\;dx = 0$$

Тогда $V_t^2(\tau,x) + a^2V_x(\tau,x) = 0\;\;\forall\,(x,t) \in (0,l)\times\tau$.
В любой точке $(t,x) \in Q_\tau\colon\;\vec{\nabla}V(t,x) = \vec{0} \Rightarrow V = \text{const}\;\;\forall\,(t,x) \in Q_\tau$.
На замыкании в силу непрерывности V в $\overline{Q}_\tau$ также будет $V \equiv \text{const}$, но на границе $V = 0 \Rightarrow V \equiv 0\;\;\forall\,(t,x) \in \overline{Q}_\tau$, поэтому $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

Существование решения Будем рассматривать смешанную задачу для однородного уравнения колебаний струны при закреплённых концах.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx},\; (t,x) \in Q_\tau, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x),\; u_t\big|_{t=0} = u_1(x),\; x \in [0,l], \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0,\; t \in [0,\tau]. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $-\Delta_0$:

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{X(x) \in C^2[0,l]\colon\; X(0) = X(l) = 0\}$$

У это оператора есть счётное однопараметрическое семейство собственных функий: $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l},\quad X_k = \sin(\lambda_k x),\; k \in \mathbb{N}$.

Решение будем искать в виде ряда $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$. Будем требовать выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^3[0,l],\ u_1(x) \in C^2[0,l] - \textbf{условия гладкости} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 - \text{для непрерывности решения на } \overline{Q}_\tau, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0 - \text{для принадлежности решения } C^1(\overline{Q}_\tau), \\ u_0''(0) = u_0(l)'' = 0 - \text{для принадлежности } C^2(\overline{Q}_\tau). \end{cases} \tag{21}$$

Последние три условия называются ***условиями согласования.***
Рассматриваемый оператор симметричен относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2$, значит, собственные функции ортогональны в $\mathbb{L}_2$. Разложим u_0, u_1 в ряды Фурье по X_k на $[0,l]$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k,\ A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x) X_k\, dx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k,\ B_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_1(x) X_k\, dx$$

Формально подставляем в уравнение: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\ddot{\Theta}_k + a^2\lambda_k^2 \Theta_k\Big) X_k = 0$. Из начальных условий: $\Theta_k(0) = A_k,\ \dot{\Theta_k}(0) = B_k$.
В силу ортогональности $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ получаем счётное число задач Коши:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta_k} + a^2\lambda_k^2 \Theta_k = 0, \\ \Theta_k(0) = A_k,\ \dot{\Theta_k}(0) = B_k. \end{cases}$$

Решение: $\Theta_k(t) = A_k \cos\big(\frac{a\pi k}{l}\big)t + \frac{l}{a\pi k} B_k \sin\big(\frac{a\pi k}{l}\big)t,\ t \in [0,\tau].$ $\square$

Обоснование метода

Теорема 13.2. *Пусть данные Коши $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям гладкости и согласования. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}_\tau$. Его сумма принадлежит классу $C^2(\overline{Q}_\tau)$ и является классическим решением задачи 13. Частные производные по t и x до второго порядка включительно можно вычислить почленным дифференцированием ряда.*

Доказательство.

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0 \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\, dx = \cancelto{0}{\frac{-2}{l}\frac{l}{\pi k}u_0(x)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\Bigg|_0^l} + \frac{l}{\pi k}\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0' \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\, dx = \cancel{\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2\frac{2}{l}u_0'(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right.}$$

$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2\int\limits_0^l u_0''(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\, dx = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \underbrace{\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0'''(x)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\, dx}_{\alpha_k} + \cancelto{0}{\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 u_0''(x)\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\Bigg|_0^l} = -\left(\frac{l}{\pi\right.$$

Примечание: α_k - коэффициенты Фурье функции $u_0'''(x)$ по ортогональной системе функций $\cos\left(\frac{\pi k}{l}\right)$ — собственных функций оператора $-\Delta_0$ с граничными условиями Неймана — тоже симметричного оператора.
Аналогично находим коэффициенты B_k:

$$B_k = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \beta_k,\ \text{где}\ \beta_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_1''(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\, dx$$

Из того, что

$$|u_k(t,x)| = |\Theta_k(t)X_k(k)| = \left|A_k\cos(a\lambda_k t) + \frac{B_k}{a\lambda_k}\sin(a\lambda_k)\right| \leqslant \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3|\alpha_k| + \frac{1}{a\lambda_k}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2|\beta_k| \leqslant \frac{c}{k^3}$$

следует абсолютная и равномерная сходимость ряда на $\overline{Q}_\tau$

1. Граничные условия: $u(t,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ldots)\sin(0) = 0,\ \ u(t,l) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ldots)\sin(\pi k) = 0.$

   Начальные условия: $u(0,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\sin(\lambda_k x) = u_0(x),\ \ u_t(0,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k\sin(\lambda_k x) = u_1(x).$

   Итак, ряд порождает непрерывную на $\overline{Q}_\tau$ функцию, удовлетворяющую начальным и граничным условиям.

2. Производные: $u_t \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{a\pi k}{l}A_k\sin(\lambda_k at) + B_k\cos(a\lambda_k t)\right]\sin(\lambda_k x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k.$

$$|V_k| \leqslant a\lambda_k|A_k| + |B_k| \leqslant \frac{a\pi k}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3|\alpha_k| + \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2|\beta_k| \leqslant \frac{\tilde{c}}{k^2} \Longrightarrow u_t \in C(\overline{Q}_\tau)$$

Значит, $u \in C(\overline{Q}_\tau)$.
$u_{tt} \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 A_k\cos(\lambda_k at) - \frac{a\pi k}{l}B_k\sin(\lambda_k at)\right]\sin(\lambda_k x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k.$

$$|w_k| = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2|u_k| \leqslant \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\left(|\alpha_k| + \frac{1}{a}|\beta_k|\right)$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно и равномерно, так как: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty, \sum\limits_{k=1} \dfrac{1}{k^2} < \infty$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{k}$ сходится абсолютно; поэтому $u(t,x) \in C^2(\overline{Q}_\tau)$. $\square$

Можно ставить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \\ u\big|_{t=0} = u_0(x),\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

при более широких условиях.

При условиях $u_0(x) \in C^2[0,l],\ u_1(x) \in C^1[0,l]$ (гладкости) и $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$ (согласования) и условиях на f: $f(t,x), f_x(t,x) \in C(\overline{Q}_\tau), f(t,0) = f(t,l) = 0$ - классическое решение задачи существует и единственно.

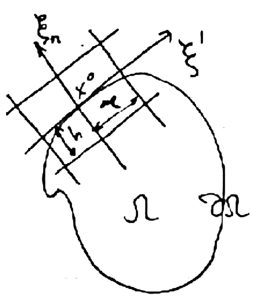
С помощью метода продолжений делаем u_0, u_1, f нечётными и 2π - периодическими, получаем задачу Коши для волнового уравнения. Решение даётся формулой Даламбера.

Билет 14. Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.

Формулы Грина

Определение 14.1. Ограниченная область Ω называется *областью с гладкой границей*, если $\forall x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$ найдутся:

- такая декартова СК , что начало в x_0, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - координаты точек в этой СК
- Окрестность $U_0(x^0) = \{\xi \colon |\xi'| < r,\ |\xi_n| < h\}$, где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, такая, что в $U_0(x^0)$ часть границы $\Gamma \bigcap U_0(x^0)$ представляется в виде: $\xi_n = F(\xi'), |\xi'| < r, F(0) = 0,\ F(\xi') \in C^1(|\xi'| < r),\ \nabla_{\xi'} F(0) = 0,$
- Множество $U_-(x^0) = U_0(x^0) \bigcap \{x\colon\ \xi_n < F(\xi')\} \in \Omega,$
  Множество $U_+(x^0) = U_0(x^0) \bigcap \{x\colon\ \xi_n \geqslant F(\xi')\} \colon\ \Omega \bigcap U_+ = \varnothing$
- Числа $r > 0$, $h > 0$ можно выбрать независимо от $x^0 \in \Gamma$.



Для ограниченных областей с гладкими границами справедлива формула Остроградского-Гаусса (F - непрерывно дифференцируемое векторное поле):

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \big(\vec{F}(x),\ \vec{n}\big)\, dS = \int\limits_{\Gamma} \big(\vec{F}(x),\ \vec{n}\big)\, dS$$

Лемма 14.1.

Формулы Грина

Пусть Ω - ограниченная область с границей класса C^1 в $\mathbb{R}^n$, тогда справедливы следующие формулы.

$$\forall u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \to \int\limits_{\Omega} (\Delta u) v\, dx = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, dS_x - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, dx$$

$$\forall u(x) \in C^2(\overline{\Omega}), v(x) \in C^2(\overline{\Omega}) \to \int\limits_{\Omega} (\Delta u) v\, dx - \int\limits_{\Omega} (\Delta v) u\, dx = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, dS_x - \oint\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u\, dS_x$$

Полученные формулы называются первой и второй формулами Грина соответственно.

Доказательство.

Первая формула Грина

Пусть $\vec{f}(x), v(x)$ - гладкие векторное и скалярное поля соответственно: $\operatorname{div}(\vec{f}\cdot v) = (\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{f}} v) + (\nabla, \vec{f}\overset{\downarrow}{v}) = v \operatorname{div}\vec{f} + (\vec{f}, \operatorname{grad} v)$.
Положим $\vec{f} = \nabla u \in C^1 \Rightarrow \operatorname{div}(v\nabla u) = v\underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u} + (\nabla u, \nabla v)$.

Интегрируем по объёму в Ω:

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u\ dx = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(v\nabla u)\ dx - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\ dx = \oint\limits_{\Gamma} (v\nabla u, \vec{n})\ ds - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\ dx$$

Заметим, что:

$$(v\nabla u, \vec{n}) = v\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{R}^n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} n_k = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x)\cdot v(x)$$

При подстановке данного результата в равенство выше немедленно получим первую формулу Грина.

Вторая формула Грина

Для получения второй формулы Грина необходимо вычесть из первой формулы Грина симметричное ему по u и v равенство:

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\ dx = \oint\limits_{\Gamma} (u\nabla v, \vec{n})\ ds - \int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla u)\ dx$$

□

Внутрення задача Дирихе для уравнения Пуассона

Пусть Ω - ограниченная область с границей Γ класса C^1, $u_0(x) \in C(\Gamma), f(x) \in C(\overline{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma} = u_0(x). \end{cases} \tag{22}$$

Классическим решением задачи Дирихле 22 называется $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

Лемма 14.2. *Не может существовать более одного классического решения задачи 22.*

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 22, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0,\ v\big|_\Gamma = 0$.
По формуле Грина:

$$\int\limits_\Omega v\cancelto{0}{\Delta v}\,dx = \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\cancelto{0}{v}\,ds - \int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla v)\,dx \Rightarrow \nabla v \equiv 0\ \ \forall\, x \in \Omega \Rightarrow v(x) = \text{const}$$

С учётом того, что $\Delta(x) = 0$ и $v(x)\big|_\Gamma = 0$, получим, что $v(x) = 0$, а значит, $u_I = u_{II}$, и решение единственно. $\square$

Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона

Пусть Ω -ограниченная область с границей класса $C^1, u_1(x) \in C(\Gamma), f(x) \in C(\overline{\Omega})$. Требуется найти $u(x)$ удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_1(x), x \in \Gamma. \tag{23}$$

Определение 14.2. *Классическое решение задачи Неймана* 23 есть такая функция $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям.

Лемма 14.3. *Любые два классические решения задачи Неймана отличаются на константу.*

Доказательство. Если $\exists u_I$ и u_{II} - классические решения задачи 23, то $v(x) = u_I - u_{II}$ есть классическое решение полностью однородной задачи: $\Delta v \equiv 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big|_\Gamma = 0$. По формуле Грина имеем:

$$\int\limits_\Omega \cancelto{0}{\Delta v}\, v\,dx = \oint\limits_\Gamma \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}} v\,dS - \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \Rightarrow v \equiv \text{const}$$

$\square$

Лемма 14.4. *Необходимым условием существования классического решения задачи Неймана является условие* $\int\limits_\Omega f(x)\,dx = \oint\limits_\Gamma u_1(x)\,dS$

Доказательство.

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx = \int\limits_\Omega \Delta u\,dx = \int\limits_\Omega \Delta u{\cdot}1\,dx = \big[\text{1-ая формула Грина}\big] = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}{\cdot}1\,ds - \cancelto{0}{\int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla 1)\,dx} = \int\limits_{\partial\Omega} u_1(x){\cdot}1\,ds$$

$\square$

Билет 15. Симметричность и положительная определенность оператора $-\Delta$ при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.

Задача на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа при однородном условии Дирихле: Найти λ и $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, где Ω - область с кусочно-гладкой границей Γ, такие, что

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u(x) \neq 0, \end{cases}$$

Утверждение 15.1 (без доказательства)**.** *Существует счетное число собственных значений* $\{\lambda_k\}_k$,
$\{\lambda_k\} \to \infty$*, причем каждому* λ_k *соответствует конечное число собственных функций.*

Формула Грина справедлива и для комплексных функций. Считаем, что $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\Omega} \overline{u} \Delta u dx = -\lambda \int\limits_{\Omega} u \overline{u} dx$$

$$\int\limits_{\Omega} \overline{u} \Delta u dx = \cancelto{0}{\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \overline{u} dS} - \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla \overline{u}) dx$$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx}$ - соотношение Рэлея.

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ (строго больше, т.к. $\nabla u = 0 \Rightarrow u = 0$). В задаче Неймана $\lambda = 0$ возможно.

Утверждение 15.2. *Оператор* $-\Delta$ *с граничными условиями Дирихле является симметричным относительно скалярного произведения в* $\mathbb{L}_2(\Omega) : (u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x) \overline{v}(x) dx$

Доказательство. Пусть $u(x), v(x)$ лежат в области определения нашего оператора

$$D_0(-\Delta) = \{u(x) : u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega);\ \Delta u(x) \in C(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Симметричность оператора означает, что

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v)\ \ \forall\, u, v \in D_0(-\Delta).$$

Проверим это:

$$(-\Delta u, v) - (u, -\Delta v) = \int\limits_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx \overset{\text{2 формула Грина}}{=} \oint\limits_{\partial\Omega} (\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v) dS = 0.$$

$\square$

Утверждение 15.3. *Собственные функции рассматриваемого оператора $u_k(x)$ и $u_m(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_k и λ_m, ортогональны относительно скалярного произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$.*

Доказательство.

$$(-\Delta u_k, u_m) = (u_k, -\Delta u_m)$$

$$\lambda_k(u_k, u_m) = \lambda_m(u_k, u_m)$$

$$\Rightarrow (\lambda_k - \lambda_m)(u_k, u_m) = 0 \Rightarrow (u_k, u_m) = 0$$

□

Билет 16. Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Задача: в круге $D = \{x||x| < R\}$ и на границе $\Gamma = \partial D$ рассматриваем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in D \longleftarrow \text{уравнение Пуассона} \\ u|_\Gamma = u_0(x), x \in \partial D \end{cases} \tag{24}$$

Сделаем замену: $x_1 = \rho\cos\varphi, x_2 = \rho\sin\varphi$.
Функция $\hat{u}(\rho,\varphi) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.
Аналогично $\hat{u}_0(\rho,\varphi) = u_0(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), \hat{f}(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.
Задача перепишется в виде:

$$\begin{cases} \hat{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\hat{u}_{\varphi\varphi} = \hat{f}(\rho,\varphi), 0 < \rho < R, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ \hat{u}(R,\varphi) = \hat{u}_0(R,\varphi) \\ \hat{u}(\rho,\varphi) = \hat{u}(\rho,\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Далее считаем $\hat{f} = 0$, то есть решаем уравнение Лапласа.
Предположение: $u_0(x) \in C^1(\Gamma)$. Предполагаем, что решение принадлежит классу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. При этом $\hat{u}$ – 2π-периодическая по $\varphi \Rightarrow$ можно разложить $\hat{u}_0, \hat{u}$ в ряды Фурье. [Если был было уравнение Пуассона – требовали бы $f \in C^1(\bar{D})$.]

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho,\varphi) \\ \hat{u}_0(R,\varphi) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a_0(\rho) \\ A_0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix}\cos k\varphi + \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix}\sin k\varphi\right], \text{где}$$
$$\begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho,\psi) \\ \hat{u}_0(R,\psi) \end{Bmatrix}\cos k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}_0,$$
$$\begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho,\psi) \\ \hat{u}_0(R,\psi) \end{Bmatrix}\sin k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}.$$

Формально подставляем в уравнение(аргументы функций опускаем – они все уже определены).

$$\frac{1}{2}\left(a'' + \frac{1}{\rho}a_0'\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[a_k'' + \frac{1}{\rho}a_k' - \frac{k^2}{\rho^2}a_k\right]\cos k\varphi + \left[b_k'' + \frac{1}{\rho}b_k' - \frac{k^2}{\rho^2}b_k\right]\sin k\varphi\right\} = 0$$

Из граничного условия:

$$\frac{1}{2}a_0(R) + \sum_k[a_k(R)\cos k\varphi + b_k(R)\sin k\varphi] = \frac{1}{2}A_0 + \sum_k[A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi]$$

В силу ортогональности тригонометрической системы в $L_2[0, 2\pi]$ имеем на a_k и b_k следующие задачи:

$$\begin{cases} a_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}a_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}a_k(\rho) = 0, 0 \leqslant \rho \leqslant R \\ a_k(R) = A_k, \ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}b_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}b_k(\rho) = 0, 0 \leqslant \rho \leqslant R \\ b_k(R) = B_k, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Будем искать только ограниченные решения – для этого одного граничного условия окажется достаточно.
Решения данных уравнений Эйлера ищем в виде $\alpha\rho^\mu$:
Для первой серии задачи: $\alpha[\mu(\mu-1) + \mu - k^2]\rho^{\mu-2} = 0 \Rightarrow \mu = \pm k$.
Общее решение:

$$a_k(\rho) = C_{1k}\rho^k + C_{2k}\rho^{-k}$$

$$a_0(\rho) = C_{10} \cdot 1 + C_{20} \cdot \ln \rho$$

Для ограниченности в круге берем $C_{2k} = C_{20} = 0 \Rightarrow a_k = C_{1k}\rho^k, C_{1k} = \frac{A_k}{R^k}, k \in \mathbb{N}_0$.
Итак,

$$\begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ b_k(\rho) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \Rightarrow \hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \tag{25}$$

Вернемся в исходные переменные. Заметим, что если ввести $z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\varphi}$, то $\rho^k \cos k\varphi = \operatorname{Re}\, z^k$,
$\rho^k \sin k\varphi = \operatorname{Im}\, z^k$.
Обозначим $\operatorname{Re}\, z^k = p_k(x_1, x_2), \operatorname{Im}\, z^k = q_k(x_1, x_2)$.

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_k}{R^k}p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k}q_k(x_1, x_2)\right] \tag{26}$$

Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

Теорема 16.1. *Пусть $u_0 \in C(\Gamma)$. Тогда:*

1. *Существует и единственно классическое решение $u(x) \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$ задачи 24 с $f \equiv 0$.*

2. *В D это решение представимо рядами 25 и 26, сходящимися в $|x| \leqslant R_1 < R$ равномерно.*

3. *Классическое решение представимо формулой Пуассона:*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\partial D} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2}u_0(\xi)dS_\xi$$

4. *Любые частные производные по x_1 и x_2 вычисляются почленным дифференцированием ряда.*

Доказательство. 1. Единственность докажем позднее (в этом билете ее нет).

2. Пусть $|u_0| < M$ на Г. Тогда:

$$|A_k| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |u_0||\cos k\psi| d\psi \leqslant 2M,\ |B_k| \leqslant 2M$$

Запишем

$$u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_k}{R^k}p_k(x_1,x_2) + \frac{B_k}{R^k}q_k(x_1,x_2)\right] = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2, \text{где}$$

$$w_1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{R_k}z^k,\ w_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{R_k}z^k$$

Оба ряда сходятся абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant R_1 < R \Rightarrow$ порождают в круге радиуса R_1 регулярные функции, что и требовалось.

3. Докажем формулу Пуассона:

$$\hat{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\hat{u}_0(R,\psi)d\psi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\hat{u}_0(\psi)(\cos k\psi\cdot\cos k\varphi + \sin k\psi\sin k\varphi)d\psi\left(\frac{\rho}{R}\right)^k =$$

$$= (\text{сходимость равномерная}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}2\cos k(\psi-\varphi)\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\right]\hat{u}_0(\psi)d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ik(\psi-\varphi)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}e^{ik(\psi-\varphi)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\right]\hat{u}_0(\psi)d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}p^k + \sum_{k=1}^{\infty}\bar{p}^k\right]\hat{u}_0(\psi)d\psi$$

Под интегралом ($|p| = |\bar{p}| = \frac{\rho}{R} < 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty}p^k + \sum_{k=1}^{\infty}\bar{p}^k = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-\bar{p}} - 1 = \frac{1-p+1-\bar{p}-1+p+\bar{p}-p\bar{p}}{(1-p)(1-\bar{p})} = \frac{1-|p|^2}{1-(p+\bar{p})+p\bar{p}} =$$

$$= \frac{1-|p|^2}{1-2\operatorname{Re}p+|p|^2} = \frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\psi-\varphi)+\frac{\rho^2}{R^2}} = \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\psi)} =$$

$$= \frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^2},\ \begin{matrix} x = (\rho,\varphi) \\ \xi = (R,\psi)\end{matrix}$$

Итак,

$$\hat{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\psi)}\hat{u}_0(\psi)d\psi$$

$$\Longleftrightarrow u(x) = \frac{1}{2\pi R}\oint_\Gamma\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^2}u_0(\xi)dS_\xi$$

Заметим, что при $u_0 \equiv 1$ мы получим ядро Пуассона:

$$1 \equiv \frac{1}{2\pi R}\oint_\Gamma\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^2}dS_\xi$$

Покажем, что $u(x) \in C(\bar{D})$.
Пусть $x \in D \cap \{x : |x - x^0| < \delta_{n_0}\}$, где $x_0 \in \Gamma$, а δ_{n_0} выбрано так, чтобы $|u_0(x) - u_0(x^0)| \leqslant \varepsilon$.

$$u(x) - u(x^0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_\Gamma \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^2} \big(u_0(\xi) - u_0(x^0)\big) dS_\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi R} \left(\int_{\left\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| < \delta_{n_0}\right\}} + \int_{\left\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| \geqslant \delta_{n_0}\right\}} \right) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^2} \big(u_0(\xi) - u_0(x^0)\big) dS_\xi = I_< + I_\geqslant$$

$$|I_<| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int_{(<)} \frac{|R^2 - |x|^2|}{|x-\xi|^2} \big|u_0(\xi) - u_0(x^0)\big| dS_\xi \leqslant \varepsilon \cdot \{\text{ядро Пуассона}\} = \varepsilon$$

$$|I_\geqslant| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{\min |\xi - x|^2} \cdot 2M \cdot \int_{(\geqslant)} dS_\xi \leqslant 4MR \frac{R - |x|)}{\min |\xi - x|^2}, \text{где } R + |x| \leqslant 2R \text{ и } \int_{(\geqslant)} dS_\xi \leqslant 2\pi R$$

$$|\xi - x| = \left|\xi - x^0 + x^0 - x\right| \geqslant \left|\xi - x^0\right| - \left|x^0 - x\right| > \delta_{n_0} - \frac{\delta_{n_0}}{2} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow |I_\geqslant| \leqslant 16MR \frac{R - |x|}{\delta_{n_0}^2}$$

Возьмем $\delta_n = \min\left\{\frac{\delta_{n_0}}{2}, \varepsilon \delta_{n_0}^2\right\}$. Тогда при $\left|x - x^0\right| < \delta_n$ будем иметь $R - |x| \leqslant \left|x^0 - x\right| < \delta_n \Rightarrow$

Итак, при $|x^0 - x| < \delta_n : |u(x) - u(x^0)| \leqslant |I_<| + |I_\geqslant| \leqslant \varepsilon + 16MR\varepsilon$.
Непрерывность доказана.

4. Дифференцируемость:
$u = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2$.
Вспомогательный факт: $\tilde{w}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z) \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{u}_{x_1} + i\tilde{v}_{x_1} \Rightarrow \tilde{u}_{x_1} = (\operatorname{Re} \tilde{w})_{x_1} = \operatorname{Re}(\tilde{w}_z)$
В нашем случае:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} w_1(z) = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^\infty \frac{A_k}{R^k} \left(z^k\right)'_z = \sum_{k=0}^\infty \frac{A_k}{R^k} \operatorname{Re} \frac{dz^k}{dz} = \sum_{k=0}^\infty \frac{A_k}{R^k} \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} z^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{A_k}{R^k} (p_k)'_{x_1}(x_1, x_2)$$

Аналогично для B_k и для производного любого порядка.

$\square$

Билет 17. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.

Рассматривается уравнение Пуассона в $\mathbb{R}^3$: $\Delta u(x) = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, где Ω – область.

Определение 17.1 (Гармоническая функция)**.** Функция $u(x)$ называется гармонической в $\Omega \in R^3$, если
$u(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u(x) \equiv 0$ на Ω.

Удобно перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta. \end{cases}$$

Уравнение примет вид:

$$0 = \Delta\hat{u}(r,\theta,\varphi) = \hat{u}_{rr} + \frac{2}{r}\hat{u}_r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\hat{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\varphi^2}\right]$$

В квадратных скобках написан оператор Лапласа-Бельтрани от функции $\hat{u}$.
Решение зависящее от r, удовлетворяет уравнению Эйлера:

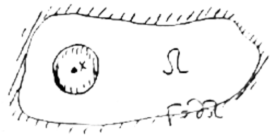
$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\hat{u}_r = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = r^\mu \Rightarrow \mu(\mu-1) + 2\mu = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Функция $\hat{u}(r) = \frac{1}{r}$ – гармоническая всюду кроме 0.

Лемма 17.1 (Интегральное представление решения уравнения Пуассона)**.** *Пусть Ω – область с кусочно-гладкой границей Γ. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \Delta u \in C(\bar{\Omega})$. Тогда для $\forall x \in \Omega$ $u(x)$ представима в виде суммы трех потенциалов (объемного Ньютонова, простого слоя, двойного слоя):*

$$u(x) = \underbrace{\int_\Omega\left(-\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)\Delta u(y)dy}_{\text{объёмный Ньютоновый потенциал}} - \underbrace{\oint_\Gamma\left(-\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n_y}}dS_y}_{\text{потенциал простого слоя}} + \underbrace{\oint_\Gamma\frac{\partial}{\partial\vec{n_y}}\left(-\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)u(y)dS_y}_{\text{потенциал двойного слоя}}$$

Доказательство. Берем $x \in G, \varepsilon > 0$ такое, что $\bar{B}(x,\varepsilon) \subset \Omega$ (B – открытый шар в $\mathbb{R}^3$). Строим область $\Omega_x^\varepsilon = \Omega\backslash\bar{B}(x,\varepsilon), \partial\Omega_x^\varepsilon = \Gamma \cup \gamma$, где $\gamma = \partial B(x,\varepsilon)$.



В Ω_x^ε ядро $K_3(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty$ $(\Delta K_3(x,y) \equiv 0)$. Используем 2 формулу Грина:

$$\int_{\Omega_x^\varepsilon} \Delta u(y) K_3(x,y) dy - \int_{\Omega_x^\varepsilon} u(y) \Delta K_3(x,y) dy =$$
$$= \oint_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y + \oint_\gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y - \oint_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y - \oint_\gamma u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\Omega_x^\varepsilon} f(y) K_3(x,y) dy + \oint_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y - \oint_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y =$$
$$= \oint_\gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y - \oint_\gamma u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y$$

Offtop 17.1. *интеграл от* $\frac{1}{|x|^\alpha}$ *сходится при* $\alpha < n = \dim \mathbb{R}^n$. *У нас* $n = 3, \alpha = 1$.

Устремляем $\varepsilon \to 0$:

1. $\int_{\Omega_x^\varepsilon} \to \int_\Omega$ в силу последнего замечания.

2. $\oint_\gamma u(y) \dfrac{\partial}{\partial \vec{n_y}} \Big(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \Big) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint (u(y) - u(x) + u(x)) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_\gamma (u(y) - u(x)) dS_y +$ $u(x)$
   $\dfrac{\partial}{\partial \vec{n_y}} \Big(-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \Big) \to \frac{1}{4\pi} \Big(-\dfrac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \Big) \Big|_{\rho=\varepsilon}$
   $\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \Big| \oint_\gamma (u(y) - u(x)) dS_y \Big| \leqslant \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot \max\limits_{|y-x| \leqslant R} |u(y) - u(x)| \cdot \oint_\gamma dS_y \to 0$

3.
$$\left| \oint_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} K_3(x,y) dS_y \right| \leqslant \frac{1}{4\pi\varepsilon} M \int_\gamma dS_y = M\varepsilon \to 0$$
$$\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n_y}} \right| = |(\nabla u, \vec{n})| \leqslant |\nabla u| \cdot |n| \leqslant M, \text{ так как } \nabla u \in C\big(\overline{\Omega}\big)$$

Итак, после предельного перехода получим требуемое соотношение □

Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Экскурс в обобщенные функции

Определение 17.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство пробных (основных) функций:
$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi(x)$ – компакт.

Определение 17.3. В $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ вводится сходимость по следующему правилу: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \to \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff$

- $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ \mathcal{D}^\alpha \varphi_k \rightrightarrows \mathcal{D}^\alpha \varphi$
- $\exists A > 0 : \varphi_k(x) \equiv 0$ при $|x| > A\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ (у всех функций общий носитель)

Пример функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}}, |x| \leqslant \varepsilon \\ 0, |x| > \varepsilon \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \neq \varnothing$$

Определение 17.4. Обобщенная функция f над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – всякий линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Определение 17.5. Линейный функционал: $(f, \alpha\varphi + \mu\psi) = \alpha(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$

Определение 17.6. Непрерывный функционал: $\forall \{\varphi_k\} \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(\varphi_k) \to f(\varphi)$

По определению $\forall \lambda, \mu$ -чисел, $\ \forall\, f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенная функция $F = \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(F, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$

Определение 17.7 (сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \to f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{\iff} (f_k, \varphi) \to (f, \varphi),\ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (слабая* сходимость).

Определение 17.8. Функция $f(x)$ называется локально интегрируемой, если

$$\forall\, B > 0 \quad \exists \int\limits_{|x|<B} |f(x)| dx < \infty$$

Каждая такая $f(x)$ порождает обобщенную функцию $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$.
Если существует локально интегрируемая $f(x)$ такая, что обобщенная функция f представляется в виде $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$, то $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется регулярной.

Лемма 17.2 (Дюбуа-Реймон)**.** *Если f и g непрерывны и порождают одну обобщенную функцию, то $f \equiv g$. Если f и g разрывны, то они совпадают почти всюду.*

Определение 17.9 (δ-функция)**.** $(\delta, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi(0)$

δ-функция не является регулярной.
Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.
Правило дифференцирования: $(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$.
В частном случае $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta\varphi)$

Теорема 17.3. *Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp}\varphi \subset B(0, A)$. Возьмем $\Omega = B(0, A+1)$. По теореме об интегральном представлении

$$\begin{aligned}\varphi(0) = \int_{|y|<A+1} E(y)\Delta_y\varphi(y)dy + \cancel{\oint_{|y|=A+1} \varphi(y)\frac{\partial E(y)}{\partial \vec{n_y}}} dS_y - \cancel{\oint_{|y|=A+1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vec{n_y}}} E(y)dS_y = \\ = (E, \Delta_x\varphi(x)) = (\Delta E, \varphi(x))\end{aligned}$$

Что и требовалось. □

Определение 17.10. Функция $E(x)$ называется фундаментальным решением оператора Лапласа.

Билет 18. Свойства гармонических функций в $\mathbb{R}^3$: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.

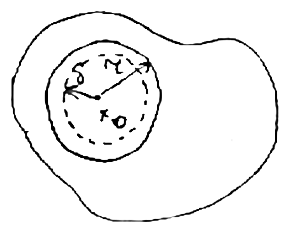
Определение 18.1. Функция $u(x)$ гармоническая в $\Omega \in \mathbb{R}^3$, если

1. $u(x) \in C^2(\Omega)$
2. $\Delta u(x) = 0 \ \ \forall\, x \in \Omega$

Теорема 18.1. *Всякая функция $u(x)$, гармоническая в области Ω, является в Ω бесконечно дифференцируемой, т.е. $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Возьмем $x_0 \in \Omega$ и $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Представим $u(x)$ суммой:

$$u(x) = -\oint\limits_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} dS_y + \oint\limits_{|y-x_0|=r} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) dS_y$$



Теперь берем $B_\delta(x_0) \subsetneq B_r(x_0)$. Будем обозначать $S(x_0, r)$ сферу $\partial B_r(x_0)$. Если $x \in \overline{B}_\delta(x_0), y \in S(x_0, r)$, то $|x-y| \geqslant r - \delta > 0$.
Рассмотрим в $\overline{B}_\delta(x_0)$

$$u_0(x) = \oint\limits_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} dS_y.$$

Напишем

$$\tilde{u_0}(x) = \oint\limits_{|y-x_0|=r} D_x^\alpha\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}} dS_y$$

Заметим, что $\frac{-1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0) \times S(x_0, r)) \Rightarrow$ записанные частные производные непрерывны, интеграл $\tilde{u_0}$ существует $\Rightarrow \tilde{u_0}(x) = D_x^\alpha u_o(x)$.
Теперь берем

$$u_2(x) = \oint\limits_{|y-x_0|=r} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) = \sum_1^n n_k \frac{\partial}{\partial \vec{y_k}}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)$$

В $\overline{B}_\delta(x_0)$ запишем

$$\tilde{u_2}(x) = \sum_1^3 \oint u_0(y) n_k(y) D_x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \vec{y_k}}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\right) dS_y$$

Записанные частные производные непрерывны, интеграл $\tilde{u_2}(x)$ существует $\Rightarrow \tilde{u_2}(x) = D_x^\alpha u_2(x)$. Итак, для $u_0(x)$ и $u_2(x)$ существуют частные производные любого порядка. Значит, $u(x) \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0))$, где
x_0 - произвольная точка из Ω. $\Rightarrow u(x) \in C^\infty(\Omega)$ □

Теорема 18.2 (Теорема о среднем)**.** *Пусть $u(x)$, гармоническая в шаре $B_r(x_0)$ и $u(x) \in C^1(\overline{B}_r(x_0))$. Тогда $u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|y-x_0|=r} u(y)dS_y$. (в центре - среднее по значениям на сфере)*

Доказательство.

$$u(x_0) = -\oint\limits_{|y-x_0|=r} \left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|}\right)\frac{\partial u}{\partial \vec{n_y}}dS_y + \oint\limits_{|y-x_0|=r} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|}\right)dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|}\right) \overset{\rho=|x_0-y|}{=} \frac{-1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{4\pi r^2},$$

тогда

$$\oint\limits_{|y-x_0|=r} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n_y}}\left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|}\right)dS_y = \frac{1}{4\pi r^2}\oint\limits_{|y-x_0|=r} u(y)dS_y.$$

Покажем, что потенциал простого слоя равен нулю.

$$-\oint\limits_{|y-x_0|=r}\left(\frac{-1}{4\pi|x_0-y|}\right)\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}}dS_y = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\oint\limits_{|y-x_0|=r}\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n_y}}dS_y = \frac{1}{4\pi r}\oint\limits_{|y-x_0|=r}(\nabla u(y), \vec{n}(y))dS_y \overset{\text{ф-ла Остр.-Гаусса}}{=}$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\oint\limits_{|y-x_0|<r}\operatorname{div}(\nabla u)dy = \frac{1}{4\pi r}\oint\limits_{|y-x_0|<r}\Delta u dy = 0$$

□

Теорема 18.3 (Обратная теорема о среднем)**.** *Пусть $u(x) \in C(\Omega)$ и $u(x)$ обладает свойством среднего $\forall x \in \Omega$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$ - произвольная область. Тогда $u(x)$ - гармоническая функция на Ω.*

Доказательство. $\forall x_0 \in \Omega\ \ \exists\, r > 0 : \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Рассмотрим решение

$$v(x) = \frac{1}{4\pi R}\oint\limits_{|y|=r}\frac{r^2-|x|^2}{|y-x|^3}u(y)dS_y$$

$$\text{для задачи}\begin{cases}\Delta u(x) = 0, |x| < r\\ v|_{|x|=r} = u|_{|x|=r}\end{cases}$$

Введем $w(x) = u(x) - v(x)$, $w(x) \in C(|x| \leqslant r)$, получим что $w(x)$ удовлетворяет свойству среднего. Тогда по принципу максимума (для функции, удовлетворяющей свойству среднего, будет доказан в следующем билете) $|w(x)| \leqslant \max\limits_{|y-x|=r}|w(y)| = 0 \Rightarrow u(x) = v(x)\ \ \forall\, x\colon |x| < r$ □

Билет 19. Билет 19.Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции

Теорема (принцип максимума)

Теорема 19.1. (Принцип максимума) *Если $u(x)$ - гармоническая в области Ω и достигает max или min значения в точке $a \in \Omega$, то $u(x) \equiv u(a) \ \ \forall\, x \in \Omega$*

Offtop 19.1. *Теорема справедлива в $\mathbb{R}^n$*

Доказательство. •

- Докажем вспомогательное локальное

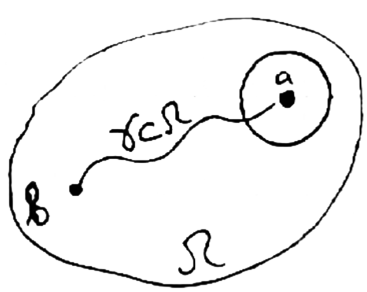
  Утверждение 19.2. *Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ достигает максимума в точке a, а так же удовлетворяет* **свойству среднего***:*

  $$u(a) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint\limits_{|y-a|=r} u(y)\, dS_y \ \ \forall\, r : 0 < r < d_a = dist(a, \mathbb{R}^3 \backslash \Omega)$$

  Тогда $u(x) \equiv u(a) \ \ \forall\, x \in B(a, d_a)$

  Доказательство. $u(a) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint\limits_{|y-a|=r} u(y) \quad dS_y = \frac{u(a)}{4\pi r^2} \oint\limits_{|y-a|=r} \quad dS_y + \frac{1}{4\pi r^2} \oint\limits_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) \quad dS_y = u(a) + \frac{1}{4\pi r^2} \oint\limits_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) \quad dS_y \Rightarrow \oint\limits_{|y-a|=r} \underbrace{(u(y) - u(a))}_{\leq 0,\ \text{непрерывна}} dS_y = 0 \Leftrightarrow \quad u(y) = u(a) \ \ \forall\, y : |y-a| = r < d_a$ □

- **Докажем саму теорему**

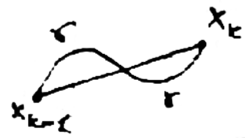
  

  Соединим a и b кусочно-гладкой кривой. Эту кривую параметризуем натуральным параметром(параметризация кривой длиной её дуги): $x = x(s), x(0) = a, x(L) = b$. **Обозначим** $d = dist\{\gamma = x; \partial\Omega\} > 0$ (d действительно > 0 : если $d = 0$, то $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \gamma : \rho(x_n, \partial\Omega) \to 0$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся $\{x_{n_k}\} = \{y_k\}$(γ -

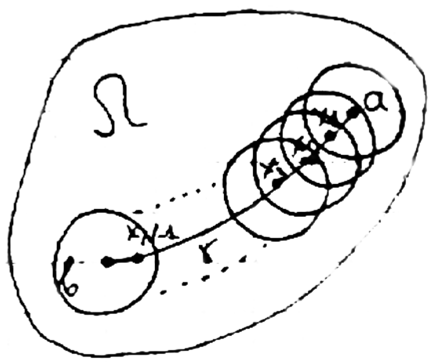
ограничено). Пусть $y_k \to y_0$. Тогда y_0 - предельная для $\partial\Omega$ в силу замкнутости $y_0 \in \gamma \cup \partial\Omega \Rightarrow$ противоречие)

Разобьем $[0, L]$ на части размера $\Delta S = \dfrac{L}{N}$

Пусть $\{S_k = k\Delta S, x_k = x(S_k)\}$. Число N выберем так, чтобы $\Delta S = \dfrac{L}{N} < d$



Заметим, что $|x_k - x_{k-1}| \boxed{\leqslant} s_k - s_{k-1} < d(\boxed{\cdot}$ - кратчайшее расстояние между точками это отрезок).



Рассмотрим шары $B_d(x_k)_{k=0}^N$. В силу $|x_k - x_{k-1}|) < d$ верно $x_{k+1} \in B_d(x_k)$. Примем утверждение 19.2 к первому шару. Как следствие $u(x_1) = u(a) \Rightarrow$ утверждение 19.2 применимо уже ко второму шару. В цепочке шаров конечное число $\Rightarrow$ добираемся до точки b - теорема доказана.

□

• Заметим, что достаточно было потребовать свойство среднего и непрерывность, вместо гармоничности.

Следствие. *Пусть Ω - ограниченная область, а $u(x)$ - гармоническая в Ω и непрерывная на $\overline{\Omega}$. Тогда $u(x)$ достигает max и min на $\partial\Omega$, т.е.* $\min\limits_{y\in\partial\Omega} u(y) \leqslant u(x) \leqslant \max\limits_{y\in\partial\Omega} u(y)$

Доказательство. Либо максимум/минимум на границе, либо $u(x) \equiv const$ в Ω □

Следствие. *Для указанной в следствии 19* $u(x) \hookrightarrow |u(x)| \leqslant \max\limits_{y\in\partial\Omega} |u(y)|$

Доказательство.

$$\begin{cases} u(x) \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u(y) \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} |u(y)| \\ -u(x) \leqslant \max\limits_{\partial\Omega}(-u(y)) \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} |u(y)| \end{cases} \tag{27}$$

$\Rightarrow |u(x)| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} |u(y)|$ □

Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Ω - ограниченная область

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u(x)|_{\partial\Omega} = u_0(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{28}$$

Определение 19.1. Классическое решение задачи Дирихле - функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению и граничному условию.(раньше было $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^{\boxed{1}}(\overline{\Omega})$, единица была нужна для формул Грина, теперь убираем ее)

Теорема единственности

Теорема 19.3. *(единственности) Не может существовать более 1 классического решения задачи Дирихле(28).*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - классические решения (28). Тогда $v(x) = u_1 - u_2$ - классическое решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(x) \equiv 0, x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{29}$$

Согласно принципу максимума, $|v(x)| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega}|v(x)| = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$ □

Билет 20. Функция Грина для задачи Дирихле (случай $\mathbb{R}^3$). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

Функция Грина

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ — некоторое классическое решение задачи:

$$\begin{cases} \triangle u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_0(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Запишем интегральное представление:

$$u = \int_\Omega \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) \triangle u(y) dy - \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) \frac{\partial u(y)}{\partial \overrightarrow{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) dS_y$$

Рассмотрим задачу при фиксированном $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \triangle_y g(x,y) = 0, & \forall\, y \in \Omega \\ g(x,y)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Если $\partial\Omega \in C^2$, то решение существует (пока не можем это доказать).

Используем вторую формулу Грина:

$$\int_\Omega \triangle_y u(y) g(x,y) dy - \int_\Omega u(y) \underbrace{\triangle_y g(x,y)}_{=0} dy =$$

$$= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \overrightarrow{n}_y} g(x,y) dS_y - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x,y)}{\partial \overrightarrow{n}_y} u(y) dS_y$$

Отсюда получаем

$$\int_\Omega g(x,y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} \underbrace{\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) \frac{\partial u(y)}{\partial \overrightarrow{n}_y}}_{wanted\ to\ find} dS_y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x,y)}{\partial \overrightarrow{n}_y} u(y) dS_y = 0$$

Тогда

$$u(x) = \int_\Omega \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)\right) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}_y} \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)\right) dS_y$$

Функция Грина, по определению:

$$G(x,y) \triangleq \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)$$

Она симметрична и имеет ту же особенность, что и $\frac{-1}{4\pi|x-y|}$

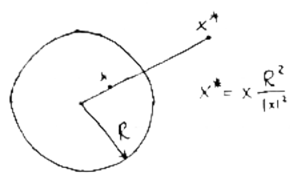
Функция Грина для шара

Получим функцию Грина для шара:

$$\begin{cases} \triangle_y g(x,y) = 0, y \in \Omega \\ g(x,y)|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Будем обозначать x^* точку, инверсную точке x относительно окружности $|y| = R$.

$$x^* = x\frac{R^2}{|x|^2}$$

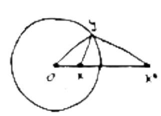


Покажем, что решением является функция:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4\pi R}, & x = 0 \end{cases}$$

Функция $g(x,y)$ - гармоническая по y в шаре $|y| < R$ (особенность $y = x^*$ лежит вне шара, т.к. $x*$ лежит внутри него).

Посмотрим значение функции g на границе:



Заметим, что $\triangle OXY \sim \triangle OYX*$, т.к. $\angle XOY$- общий, и $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|x^*|}$.

Из подобия $\frac{|y-x|}{|y-x^*} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{R}$.

Значит, $\left.\frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}\right|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi y}$, что и требовалось.

Формула Пуассона в шаре

Получим формулу Пуассона решения задачи Дирихле в шаре:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\underbrace{f(y)}_{=0}dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \overrightarrow{n}_y}dS_y$$

Преобразуем последний интеграл:

$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \overrightarrow{n}_y} = \sum_{k=1}^3 n_k(y)\left.\frac{\partial G}{\partial y_k}\right|_{|y|=R} = \sum_{k=1}^3 n_k(y)\frac{\partial}{\partial y_k}\left[-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{R}{|x|}\frac{1}{|y-x^*|}\right)\right] = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^3 \underbrace{\frac{y_k}{R}}_{=n_k(y)}\left[\frac{y_k-x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|}\frac{y_k-x_k^*}{|y-x^*|^3}\right]$

Вспомним, что $\left.\frac{R}{|x|\cdot|y-x^*|}\right|_{|y|=R} = \frac{1}{|x-y|}$:

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \overrightarrow{n}_y}\right|_{|y|=R} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4\pi}\frac{y_k}{R}\left[\frac{y_k-x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|}\left(\frac{|x|}{R}\right)^3\frac{y_k-x_k^*}{|y-x|^3}\right] = \frac{1}{4\pi R|y-x|^3}\sum_{k=1}^3 y_k\left[y_k - x_k - \frac{|x|^2}{R^2}(y_k-x_k^*)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi R|y-x|^3}\left[\langle y, y-x\rangle - \frac{|x|^2}{R^2}\langle y, y-x^*\rangle\right] = \frac{1}{4\pi R|y-x|^3}\left[\underbrace{\langle y,y\rangle}_{=R^2} - \langle y,x\rangle - \frac{|x|^2}{R^2}\underbrace{\langle y,y\rangle}_{=R^2} + \underbrace{\frac{|x|^2}{R^2}\langle y,x^*\rangle}_{=\langle y,x\rangle}\right] =$$

$$= \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|y-x|^3}$$

Итак, **формула Пуассона для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре**:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R}\oint_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^3}u_0(y)dS_y$$

Билет 21. Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$)

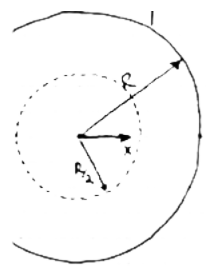
Формулировка теоремы

Теорема 21.1. (Теорема Лиувилля) *Функция $u(x)$, гармоническая в $\mathbb{R}^3$ ($\Delta u = 0$) и имеющая на бесконечности рост не выше степенного (т.е. $|u(x)| \leq C(1+|x|)^\mu$), является многочленом от x_1, x_2, x_3 степени не выше μ.*

Доказательство при $\mu \geq 0$

Общая идея - доказать, что все производные степени выше μ равны нулю.

1. Выберем $x \in \mathbb{R}^3, R > 0$ так, чтобы $R > 2|x|$:



   В области $|x| < R$ $u(x)$ - гармоническая, а $u(x)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$.

   Тогда применима формула Пуассона для шара:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y$$

   В силу выбора R имеем $|y - x| \geq |y| - |x| \geq \frac{R}{2} > 0$.

   Можем записать:

$$\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3} \right) u(y) dS_y$$

2. Докажем по индукции, что

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \mathcal{D}_x^\alpha \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} \right] = \frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x-y|^{3+2|\alpha|}},$$

   где P_α - однородный многочлен степени $|a| + 2$ от $R, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$.

   - База:

$$\mathcal{D}_x^{(0,0,0)} \left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} \right] = \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{|x-y|^3}$$

- Переход. Пусть требуемое верно $\forall\alpha : |a| \leq k$. Возьмём $\hat{\alpha} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\mathcal{D}_x^{\hat{\alpha}}\left[\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{P_\alpha(R,x,y)}{|x-y|^{3+2|\alpha|}}\right] = \frac{\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_1}\cdot|x-y|^2 - (3+2|\alpha|)\cdot P_\alpha\cdot(x_1-y_1)}{|x-y|^{3+2(|\alpha|+1)}} = \frac{P_{\hat{\alpha}}(R,x,y)}{|x-y|^{3+2|\hat{\alpha}|}}$$

3. Покажем теперь, что $\forall |x| \leq \frac{R}{2},\ \ \forall\, |y| = R,\ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ справедлива оценка:

$$\left|\mathcal{D}_x^{\alpha}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3}\right)\right| \leq \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}}.$$

   Действительно, $|P_\alpha| \leq \tilde{C}_\alpha R^{|a|+2}$, а $|x-y|^{3+2|\alpha|} \geq \left(\frac{R}{2}\right)^{3+2|\alpha|} = \hat{C}_\alpha R^{3+2|\alpha|}$. Отсюда следует требуемая оценка.

4. Теперь докажем, что $\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0\ \ \forall\, \alpha\colon |\alpha| > \mu$.

$$|\mathcal{D}_x^\alpha u(x)| = \frac{1}{4\pi R}\left|\oint_{|y|=R}\mathcal{D}_x^\alpha\left(\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^3}\right)u(y)dS_y\right| \leq \frac{1}{4\pi R}\cdot C\cdot(1+|x|)^\mu\cdot\frac{C_\alpha}{R^{1+|a|}}\cdot 4\pi R^2 \leq$$

$$\leq \frac{C\cdot C_\alpha\cdot(1+R)^\mu}{R^{|\alpha|}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \ \text{Значит,}\ \ \mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}^3, |\alpha| > \mu.$$

5. Для гармонической в $\mathbb{R}^3$ функции $u(x)$ справедливо представление:

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\underbrace{\mathcal{D}_x^\alpha u(0)}_{=0} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} =$$

$$= u(0) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\mathcal{D}_x^\alpha u(0)x^\alpha,$$

   где $m = [\mu], \alpha! \triangleq \alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!, x^\alpha \triangleq x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$.

Доказательство при $\mu < 0$

Пусть $\mu < 0$. Тогда т.к. $|u(x)| \leq C(1+|x|)^\mu, \mu < 0$, то $|u(x)| \leq C(1+|x|)^0 \equiv C_1$.

По предыдущему пункту, $u(x)$ - полином степени 0, т.е. константа.

Но $|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{|\mu|}} \Rightarrow u(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$.

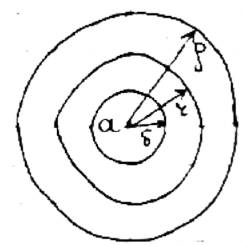
Билет 22. Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$)

Теорема 22.1. (об устранимой особой точке). *Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\mathring{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^3$ и $u(x) = o(E(x-a))$ при $x \to a$, где $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$. Тогда $u(x)$ можно так доопределить в точке a, что она будет гармонической в $B_\rho(a) = \{x : |x-a| < \rho\}$.*

Доказательство.

1. $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \Leftrightarrow |x| \cdot u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

2. Возьмём $r < \rho$.



Функция $u(x)$ непрерывна на $\partial B_r(a)$.

Построим гармоническую функцию:

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y \in C(|x| \le r)$$

.

3. Считаем $a = 0$. Покажем, что $u(x) \equiv \hat{u}(x)$ при $0 < |x| \le r$. Строим $v(x) = u(x) - \hat{u}(x)$. Эта функция гармоническая в $\mathring{B}_r(a)$, непрерывная на $(0 < |x| \le r)$, а также $v(x) \equiv 0 \ \ \forall\, x :$ $|x| = r$ и $|x| \cdot v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

4. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функции $W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x)$.

   Функции $W_\varepsilon^\pm$ также гармонические в $(0 < |x| < r)$, непрерывны на $(0 < |x| \le r)$, а $W_\varepsilon^\pm(x)|_{|x|=r} = \frac{\varepsilon}{|x|} > 0$.

5. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\forall x : \quad |x| \le \delta \to |x| \cdot |v(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   При $|x| \le \delta$:

$$W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x) \ge \frac{\varepsilon}{|x|} - |v(x)| \ge \frac{\varepsilon}{|x|}\left[1 - \frac{|x| \cdot |v(x)|}{\varepsilon}\right] \ge \frac{\varepsilon}{|x|}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{\varepsilon}{2|x|} > 0$$

6. При $\delta \le |x| \le r$ функции $W_\varepsilon^\pm(x)$ — гармонические в $(\delta < |x| < r)$ и непрерывны на замыкании этой ограниченной области $\Rightarrow$ по принципу максимума максимум и минимум достигаются на границе.

   Значит, $W_\varepsilon^\pm(x) > 0$ при $\delta \le |x| \le r$.

   Итак, $W_\varepsilon^\pm(x)$ положительна в $(0 < |x| \le r) \Rightarrow |v(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|}$ в $(0 < |x| \le r)$.

   Значит, $v(x) \equiv 0$ при $0 < |x| \le r \Rightarrow v(x)$ можно продолжить на $|x| \le r$, положив $v(0) = 0$, ч.т.д.

Билет 23. Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай $\mathbb{R}^3$).

Пусть x лежит в окрестности ∞, т.е. $|x| > R > 0$, а y лежит в окрестность нуля. Считаем $y \neq 0$. Тогда между этими окрестностями есть биекция - инверсия: $x^* = x\frac{R^2}{|x|^2}, x = x^*\frac{R^2}{|x^*|^2}; |x||x^*| = R^2$

Лемма 23.1. *Если функция $u(x)$ гармоническая в окрестности $\infty: \ |x| > R$ в $\mathbb{R}^n$, то функция $u^*(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \cdot u(\frac{R^2}{|y|^2}y)$ будет гармонической в проколотой окрестности нуля. Если $u^*(y)$ гармоническая в проколотой окрестности нуля, то $u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \cdot u^*(\frac{R^2}{|x|^2}x)$-гармоническая в окрестности ∞.*

Определение 23.1. Преобразование $u(x) \longmapsto u^*(y)$ и $u^*(y) \longmapsto u(x)$ называется **преобразованием** Кельвина.

Доказательство. Пусть $x \in U_\varepsilon(\infty), y \in U_\delta(0), |x| = \rho, |y| = r, x = y\frac{R^2}{|y|^2}$.
Перейдем в сферическую систему. Лемму докажем в одну сторону.
$x = (x_1, x_2, x_3)$
$y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\begin{cases} x_1 = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = \rho\cos\theta \end{cases}, \begin{cases} y_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ y_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ y_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

Тогда $\hat{u}^*(r,\theta,\varphi) = \frac{R}{r}\hat{u}(\frac{R^2}{r},\theta,\varphi)$:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r,\theta,\varphi) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\hat{u}^*(r,\theta,\varphi)) + \frac{1}{r}\underbrace{\Delta'_{\theta,\varphi}}_{\substack{\text{оп-р Лапласа} \\ \text{-Бельтрани}}}\hat{u}^*(r,\theta,\varphi)\right] = \frac{R}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\hat{u}(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho},\theta,\varphi)\right] + \frac{R}{r^3}\Delta'_{\theta,\varphi}\hat{u}(\underbrace{\frac{R^2}{r}}_{\rho},\theta,\varphi)$$

Вспомогательная выкладка:

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\partial\hat{u}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi)$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\rho^2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi)\right] = \frac{\rho^2}{R^4}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi)\right]$$

С учетом выкладки имеем:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r,\theta,\varphi) = \frac{\rho^3}{R^5}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi)\right] + \frac{\rho^3}{R^5}\Delta'_{\theta,\varphi}\hat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\rho^5}{R^5}\Delta_x\hat{u}(\rho,\theta,\varphi) = 0$$

$\square$

Теорема 23.2. *Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в окрестности бесконечности $|x| > R$ и $u(x) \to 0, x \to \infty$. Тогда $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ и $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$ при $x \to \infty$*

Доказательство. Применим к нашей функции прямое преобразование Кельвина: $u^*(y) = \frac{R}{|y|}u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right)$. Эта функция гармоническая в проколотой окрестности нуля: $0 < |y| < R$. Далее, $|y|u^*(y) = Ru\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right) \to 0, y \to 0$ (аргумент $\to \infty$) $\Rightarrow u^*(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right), y \to 0$.

- Воспользуемся теоремой об устранимой точке и доопределим $u^*(y)$ в нуле. Теперь $u^*(y)$ – гармоническая в $|y| < R \Rightarrow$ в $|y| \leqslant \frac{R}{2}$ есть непрерывность вплоть до границы любых производных $\Rightarrow\ \forall\, \alpha\ \exists\, M_\alpha\colon |D^\alpha u^*(y)| \leqslant M_\alpha\ \forall\, y\colon |y| \leqslant \frac{R}{2}$

- Пусть $|x| \geqslant 2R, y = x^* \Rightarrow |x^*| = |y| \leqslant \frac{R}{2}$. Тогда $u(x) = u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right) = \frac{R}{|x||y|}u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right) = \frac{R}{|x|}u^*(y)$. Можем оценить: $|u(x)| \leqslant \frac{R}{|x|}M_0 \Rightarrow u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), x \to \infty$.

- Возьмем теперь $\alpha = (1, 0, 0)$:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = D^\alpha u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R}{|x|}u^*(y)\right) = -\frac{R}{|x|^3}x_1 u^*(y) + \frac{R}{|x|}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_1} =$$
$$= -\frac{R}{|x|^3}x_1 u^*(y) + \frac{R^3}{|x|^3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k}\left[\delta_k^1 - 2\frac{x_1 x_k}{|x|^2}\right]$$

Оценка:

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right| \leqslant R\frac{x_1}{|x|}\frac{1}{|x|^2}\underbrace{|u^*(y)|}_{\leqslant M_0} + \frac{R^3}{|x|^3}\sum_{k=1}^{3}\underbrace{\left|\frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k}\right|}_{\leqslant M_{(1,0,0)}}\left[\delta_k^1 + 2\frac{|x_1|\cdot|x_k|}{|x|^2}\right] \leqslant \frac{C}{|x|^2}$$

Итак, $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Аналогично, по индукции, и для других производных.

□

Постановка внешних задач.

Определение 23.2. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется внешней, если $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} = \Omega_1$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$

Определение 23.3. Внешнюю область в Ω будем называть внешней областью с гладкой (кусочно-гладкой) границей, если $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ – область с (кусочно-гладкой) границей.

Внешняя задача Дирихле Найти $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \;\; \forall\, x \in \Omega \\ u|_\Gamma = u_0(x), \;\; x \in \Gamma \\ u(x) \to_{|x| \to \infty} 0 \end{cases}$$

Такое решение называется **классическим**

Внешнаяя задача Неймана Найти $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \;\; \forall\, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_\Gamma = u_1(x), \;\; x \in \Gamma \\ u(x) \to_{|x| \to \infty} 0 \end{cases}$$

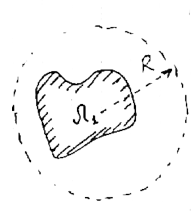
Такое решение называется **классическим**

Отличие постановок внешних и внутренних задач - $u(x) \to 0$ во внешних задачах. Для внутренней задачи Неймана - даже при выполнении условий разрешимости $\oint u_1(x) dS_x = 0$ решение не единственно

Теорема 23.3. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Дирихле*

Доказательство. Если $u_1, \; u_2$ - классические решения, то $v(x) = u_1 - u_2$ -удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} v(x)|_\Gamma = 0 \\ v(x) \to_{|x| \to \infty} 0 \; (\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \widetilde{R}(\varepsilon) \colon \;\; \forall\, x \colon |x| > \widetilde{R}(\varepsilon) \to |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



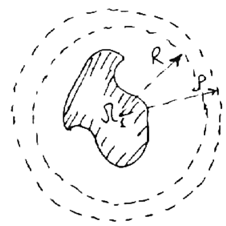
Строим сферу радиуса $R \geqslant \widetilde{R}(\varepsilon), \Omega_1 \subset B_R(o)$. По следствию из принципа максимума $|v(x)| \leqslant \max\limits_{\partial \Omega_1 \cup \partial B_R(0)} |v(y)| \leqslant \varepsilon$

Т.к. $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, имеем $v(x) \equiv 0$ в $\Omega \cup \Gamma$ □

Теорема 23.4. *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Неймана*

Доказательство. Если $u_1, \;\; u_2$ - классические решения, то $\underbrace{v(x) = u_1 - u_2}_{\text{гармоническая в } \Omega \text{ и } C^2(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)}$ - удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_\Gamma = 0 \\ v(x) \to_{|x| \to \infty} 0 \; (\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \widetilde{R}(\varepsilon) \colon \;\; \forall\, x : |x| > \widetilde{R}(\varepsilon) \to |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Возьмем $R:\ \Omega_1 \subset B_R(0),\ \rho > R$. По I-ф-лу Грина для v

$$\cancelto{0}{\int\limits_{B_R(0)\backslash\Omega_1} \Delta v \cdot v \cdot dx} = \cancelto{0}{\oint\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{\vec{n}}} v(x) dS_x} + \oint\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{\vec{n}}} v(x) dS_x - \int\limits_{B_R(0)\backslash\Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Получили $\int\limits_{B_R(0)\backslash\Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{\vec{n}}} v(x) dS_x$. Далее $\int\limits_{B_R(0)\backslash\Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{B_\rho(0)\backslash\Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint\limits_{\partial B_\rho(0)} \left|\frac{\partial v}{\partial \vec{\vec{n}}}\right| |v(x)| dS_x \leqslant$ (теорема об асимптотике гармонических функций) $\leqslant \frac{C_1}{\rho^2} \cdot \frac{C_2}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 \to 0$ при $\rho \to \infty$.

Итак, $\nabla v(x) \equiv 0 \Rightarrow v(x) \equiv const = 0$, ч.т.д. $\square$

Билет 24. Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.

Определение 24.1 (Интегральное уравнение Фредгольма второго рода)**.** Уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)u(y)dy + f(x)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Здесь:

- $x \in \bar{G}$, G — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$;
- $f(x) \in C(\bar{G})$ — задана;
- $K(x,y) : (\bar{G} \times \bar{G}) \to \mathbb{R}$.
- λ — числовой параметр;
- $u(x) \in C(\bar{G})$ — искомая функция.

Определение 24.2 (Интегральный оператор)**.** Оператор K такой, что

$$(Ku)(x) = \int_G K(x,y)u(y)dy,$$

называется интегральным оператором с ядром $K(x,y)$.

Теорема 24.1. *Если ядро $K(x,y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то оператор K ограничен в $C(\bar{G})$ и имеет место оценка*

$$\|K\| \leq \max_{x\in G} \int_G |K(x,y)|dy \leq \max_{x,y\in \bar{G}} |K(x,y)| mesG$$

Доказательство. Если $K(x,y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, то $K : C(G) \to C(G)$.
$\|Ku\|_{C(\bar{G})} = \max_{\bar{G}} |(Ku)(x)| = \max_{\bar{G}} |\int_G K(x,y)u(y)dy| \leq \max_{\bar{G}} \int_G |K(x,y)||u(y)|dy \leq \max_{x\in\bar{G}} \max_{y\in\bar{G}} |u(y)| \int_G |K(x,y)|dy = \|u\|_{C(\bar{G})} \max_{x\in\bar{G}} \int_G |K(x,y)|dy \Rightarrow \|K\| = \sup_{\|u\|_{C(\bar{G})}=1} \frac{\|Ku\|_{C(\bar{G})}}{\|u\|_{C(\bar{G})}} \leq \max_{x\in\bar{G}} \int_G |K(x,y)|dy$

□

Определение 24.3 (Полярное ядро)**.** Ядро $K(x,y)$ называется полярным, если его можно представить в виде $K(x,y) = \frac{\kappa(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ $\forall\, x, y \in \bar{G},\ x \neq y$, где $\kappa \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, $\alpha < n$ — размерность пространства.

Лемма 24.2 (Признак полярного ядра)**.** *Ядро K является полярным* $\Leftrightarrow$ $K(x,y) \in C((\bar{G} \times \bar{G}) \backslash \{x = y\})$ *и* $|K(x,y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\beta}$ $\forall\, x, y \in \bar{G}, x \neq y, B > 0, \beta < n$.

Доказательство. ($\Rightarrow$): Пусть ядро полярное. Тогда $\exists B : |\kappa| \leq B$ на $\bar{G} \times \bar{G}$ и $|K| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha}$.

($\Leftarrow$): Пусть $\beta < n \Rightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 : \beta + \varepsilon < n$. Рассмотрим $\kappa = \begin{cases} K(x,y)|x-y|^{\beta+\varepsilon}, & x, y \in G, x \neq y; \\ 0, & x = y \in G. \end{cases}$

Построенная κ непрерывна в $(\bar{G} \times \bar{G}) \backslash \{x = y\}$.

Возьмем $x^0, y^0 \in G, x^0 \neq y^0 : |\kappa(x,y) - \kappa(x^0, x^0)| = |\kappa(x,y)| \leq |K||x-y|^{\beta+\varepsilon} \leq \frac{B}{|x-y|^\beta}|x-y|^{\beta+\varepsilon} \leq B|x-y|^\varepsilon = B|(x-x^0)-(y-y^0)|^\varepsilon \leq B(|x-x^0|+|y-y^0|)^\varepsilon \Rightarrow \kappa$ непрерывна всюду в $\bar{G} \times \bar{G}$.

Очевидно из определения κ, что можем записать $K(x,y) = \frac{\kappa(x,y)}{|x-y|^{\beta+\varepsilon}}$, т.е. это ядро – полярное по определению. $\square$

Определение 24.4 (Транспонированное ядро)**.** Ядром, транспонированным к ядру $K(x,y)$, называется ядро $K'(x,y) = K(y,x)$. Соответствующий оператор K' так же называют транспонированным.

Теорема 24.3. *Интегральный оператор K с полярным ядром является ограниченным оператором в $C(\bar{G})$. Справедлива оценка: $\|K\| \leq \sup_{x \in G} \int_G |K(x,y)|dy$. $\forall\, \varepsilon > 0$ оператор K можно представить в виде суммы $K = K_\varepsilon^{cont} + K_\varepsilon^{pol}$, где $\|K_\varepsilon^{pol}\| \leq \varepsilon$, $\|(K_\varepsilon^{pol})'\| \leq \varepsilon$, K_ε^{cont} — и.о. с непрерывным ядром, K_ε^{pol} — и.о. с полярным ядром.*

Доказательство.

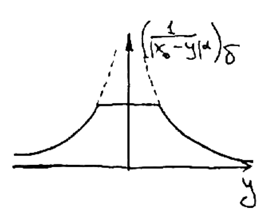
1. Пусть $\psi(y) = K(x,y)u(y)$. Функция ψ непрерывна при $y \neq x$.

   В особенности: $|\psi(y)| = |K(x,y)||u(y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha}\|u\|_{C(\bar{G})}$ – интегрируема, т.к. $\alpha < n$.

   Значит, порождается функция $\varphi(x) = \int_G \psi(y)dy = \int_G K(x,y)u(y)dy$ — этот интеграл существует $\forall x \in \bar{G}$.

2. Определим $\delta-$срезку функции $\frac{1}{|x-y|^\alpha}$:

$$\left(\frac{1}{|x-y|^\alpha}\right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha}, & |x-y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta^\alpha}, & |x-y| < \delta. \end{cases} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$



3. Представим $K(x,y) = K_\delta^1(x,y) + K_\delta^2(x,y)$, где $K_\delta^1(x,y) = \kappa(x,y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha})_\delta$,

$$K_\delta^2(x,y) = \begin{cases} 0, & |x-y| \geq \delta; \\ \kappa(x,y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha}), & |x-y| < \delta. \end{cases}$$

4. Выберем произвольно $u(x) \in C(\bar{G})$ и рассмотрим $\|K_\delta^2 u\|_{C(\bar{G})}$:

   $\|K_\delta^2 u\| = \max_{x\in G} |\int_{|y-x|<\delta} \kappa(x,y)(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha})u(y)dy| \leq B\|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|y-x|<\delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B\|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|z|<\delta} \frac{dz}{|z|^\alpha}$.

   Замена $\begin{cases} x_k = r\sin\varphi_1 ... \sin\varphi_{k-1}\cos\varphi_k, \quad k = 1,\dots,n-1; \\ x_n = r\sin\varphi_1 ... \sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$ где $\varphi_k \in [0,\Pi], \varphi_n \in [0,2\Pi]$

   Якобиан $J = \frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-1}$. Получили:

   $$\|K_\delta^2 a\| \leq C_1\|u\|_{C(G)} \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr = C\|u\|_{C(G)}\delta^{n-\alpha} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

   Получили $K_\delta^2 u \to Ku$ по норме $\Rightarrow Ku \in C(\bar{G})$.

5. $\|K\| \leq \|K_\delta^1\| + \|K_\delta^2\| \leq C\delta^{n-\alpha} + \|K_\delta^1\| < \infty \Rightarrow K$ — ограничен.

   Для транспонированного ядра все рассуждения аналогичны, т.к. полярное ядро $K = \frac{\kappa(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ при замене x на y изменяет только непрерывный числитель κ.

$\square$

Билет 25. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K. Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I-\lambda K)^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \overline{G} \tag{1}$$

Теорема 25.1. *Пусть в интегральном уравнении (1) ядро K полярное и выполнено* $|\lambda|\cdot\|K\| < 1$*, тогда:*

- $\forall f \in C(G)$ *(1) имеет единственное решение* $u(x) \in C(\overline{G})$*. Это решение при фиксированном* λ_{fix} *представимо абсолютно сходящимся в* $C(\overline{G})$ *рядом Неймана:*

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i K^i f(x),\ x \in G$$

- *Оператор* $I - \lambda K$ *отображает всё* $C(\overline{G})$ *на всё* $C(\overline{G})$ *и имеет на* $C(\overline{G})$ *непрерывный обратный оператор* $(I-\lambda K)^{-1}$*, причём* $\|(I-\lambda K)^{-1}\| \leqslant (1-|\lambda|\cdot\|K\|)^{-1}$

Доказательство. 1. Отметим, что оператор λK сжимающий: $\|\lambda K\| = |\lambda|\cdot\|K\| < 1$.

Построим итерационный процесс:

$$u_0 = f(x)$$

$$u_1 = f(x) + \lambda K u_0(x) = f(x) + \lambda K f(x)$$

$$\dots$$

$$u_n = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i K^i f(x)$$

$$\dots$$

Все $u_k(x) \in C(\overline{G})$, причем $u_k = S_k$ – k-я частичная сумма ряда Неймана. Далее,

$$\left\|\lambda^i K^i f(x)\right\|_{C(\overline{G})} \leqslant \left|\lambda^i\right| \cdot \|K\|^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = (|\lambda|\cdot\|K\|)^i \|f\|_{C(\overline{G})} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \left\|\lambda^i K^i f(x)\right\|_{C(\overline{G})} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} (|\lambda|\cdot\|K\|)^i \|f\| = \frac{\|f\|}{1-|\lambda|\cdot\|K\|}.$$

Указанный в условии ряд сходится абсолютно в банаховом пространстве $C(\overline{G}) \Longrightarrow$ он сходится $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\ \ \exists\, u(x) \in C(\overline{G}) : \|U - U_n\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0 \Longrightarrow U_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{C(\overline{G})}} U$

- Покажем что U – решение: $U_n = f + \lambda K U_{n-1}$, при этом $U_n \longrightarrow U$ а $\lambda K U_{n-1} \longrightarrow \lambda K U$ в силу непрерывности оператора K.

- Единственность: пусть U_I, U_{II} – решения, обозначим $V = U_I - U_{II} \in \overline{G}$. При этом V удовлетворяет однородному уравнению $V = \lambda KV,\ x \in C(\overline{G})$. Тогда

$$\|V\| \leqslant |\lambda| \cdot \|K\| \cdot \|V\| \longrightarrow (1 - |\lambda| \cdot \|K\|) \cdot \|V\| \leqslant 0 \longrightarrow \|V\| = 0 \longrightarrow V \equiv 0$$

2. $u = \lambda Ku + f \longleftrightarrow (I - \lambda K)u = f$. То, что $I - \lambda K$ отображает всё $C(\overline{G})$, – ясно. Согласно пункту 1 $\forall f \in C(\overline{G})\ \ \exists!\ u(x)$ – решение, значит оператор отображает всё $C(\overline{G})$ на всё $C(\overline{G})$. Значит, существует обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$. Он ограничен т.к.

$$\left\|(I - \lambda K)^{-1} f\right\|_{C(\overline{G})} = \|U\|_{C(\overline{G})} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \left\|\lambda^i K^i f\right\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} < \infty$$

$\square$

Билет 26. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \overline{G} \tag{1}$$

Определение 26.1. Интегральное уравнение вида

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x,y)v(y)dy + g(x),\ x \in \overline{G}, K'(x,y) = K(y,x)$$

называется союзным уравнению (1).

Определение 26.2. Ядро $K(x,y) \in \big(C(\overline{G}) \times C(\overline{G})\big)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x,y) = \sum_{i=i}^{N} a_i(x)b_i(y),\ a_i, b_i \in C(\overline{G})$$

Будем считать что $\{a_1...a_n\}$ и $\{b_1...b_n\}$ – линейно независимые наборы (если это не так, то уменьшим N). Будем теперь рассматривать уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(x)b_i(y)\right] u(y)dy + f(x),\ x \in \overline{G} \tag{2}$$

- Введем в $C(\overline{G})$ билинейную форму $\langle u; v\rangle = \int_G u(x)v(x)dx\ \ \forall\, u, v \in C(\overline{G})$
- Введем также следующие обозначения:
  - $\mu_{ij} = \langle b_i; a_j\rangle;\ A = \|\mu_{ij}\|_{i,j}^{N}$
  - $\varphi_i = \langle b_i; f\rangle;\ \vec{\varphi} = \|\varphi_1...\varphi_N\|^T$
  - $c_i = \langle b_i; u\rangle;\ \vec{c} = \|c_1...c_N\|^T$ (3)
-

  Лемма 26.1 (об эквивалентности)**.** *Пусть $u(x) \in C(\overline{G})$ – решение уравнения (2). Тогда $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i a_i(x) + f(x),\ x \in \overline{G}$, где $\vec{(c)}$ определяется (3) и удовлетворяет системе $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. Обратно, если $\vec{(c)}$ – некоторое решение системы $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$ то $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i a_i(x) + f(x),\ x \in \overline{G}$ является решением интегрального уравнения.*

  Доказательство. 1. Пусть $u(x)$ решение интегрального уравнения. Тогда

  $$u(x) = \lambda \int_G \left[\sum_{i=i}^{N} a_i(x)b_i(y)\right] u(y)dy + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i(x)c_i + f(x)$$

Домножим на b_i и проинтегрируем по G:

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} c_j + \varphi_i \Longleftrightarrow \vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{\varphi}$$

2. Обратно, если $c_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} c_j + \varphi_i,\ i = \overline{1, N}$ то рассмотрим $u_*(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i(x) c_i + f(x)$. Подставим в уравнение:

$$u_* - \lambda \int_G K(x,y) u_*(y) dy - f(x) =$$

$$= u_* - \lambda \int_G \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(y) \right] u_*(y) dy - f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \left[c_j - \int_G b_j(y) u_*(y) dy \right] =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \underbrace{\int_G b_j(y) a_i(y) dy}_{\mu_{ji}} - \underbrace{\int_G b_j(y) f(y) dy}_{\varphi_i} \right] =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \underbrace{\left[c_j - \lambda \sum_{i=1}^{N} \mu_{ji} c_i - \varphi_j \right]}_{0}$$

□

Таким образом, исследование интегральных уравнений с вырожденным ядром эквивалентно иссследованию системы $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$.

Offtop 26.1. *Отметим что для союзного уравнения* $v(x) = \lambda \sum_{j=1}^{N} b_j(x) \underbrace{\int_G a_j(y) v(y) dy}_{d_j} + g(y)$ *соответствующей системой является* $(E - \lambda A^T)\vec{d} = \vec{\varphi}$, *где* $\vec{\varphi} = \int_G \vec{a}(y) g(y) dy$.

Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром

Пусть $D(\lambda) = det(E - \lambda A) = det(E - \lambda A^T)$. Ясно что $D(\lambda) \not\equiv 0$ т.к. $D(0) = 1$. $D(\lambda)$ есть многочлен $P(\lambda)$, $degP \leqslant N \longrightarrow$ он имеет p действительных корней $\lambda_1 .. \lambda_p$, $0 \leqslant p \leqslant N$.

- Если $D(\lambda) \neq 0$ то $\forall k : \lambda_k \neq \lambda \longrightarrow$ у уравнения $(E - \lambda A) - \vec{c} = \vec{\varphi}$ решение существует и оно единственно. Аналогичное утверждение верно и для союзного уравнения.

- Если $\exists k : \lambda_k = \lambda \rightarrow Rg(E - \lambda A) = Rg(E - \lambda A^T) = r < N$

Пусть $m = N - r > 0$. Тогда базис в пространстве решений $(E - \lambda A)\vec{c}$ обозначим как $\vec{c}_1..\vec{c}_n$ а базис в пространстве решений $(E - \lambda A^t)\vec{d} = 0$ обозначим как $\vec{d}_1..\vec{d}_n$. Соответствующие им решения обозначим $u_1..u_m$ и $v_1..v_m$ соответственно $(u_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x)c_{j,k},\ v_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x)d_{j,k})$.

Покажем что $u_1..u_n$ базис решения однородного уравнения. Пусть

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\lambda \sum_{j=1}^n a_j(x)c_{j,i}\right] = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^m \alpha_i c_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{c}_i = 0$$

Значит система $u_1..u_m$ – линейно независима.

Определение 26.3 (Собственные функции и собственные числа оператора K)**.** Функция $u(x) \in C(\overline{G}),\ u \not\equiv 0$ удовлетворяющая уравнению

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)u(y)dy,\ x \in C(\overline{G})$$

называется собственной функцией ядра K или собственной функцией оператора K. Соответствующие собственным функциям λ называются характеристическими числами ядра/оператора K.

Свойства характеристических чисел:

- $\lambda \neq 0$ (иначе $u \equiv 0$).
- λ – не собственное значение оператора: $u = \lambda K u \Leftrightarrow Ku = \frac{1}{\lambda}u \Rightarrow\Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$ – собственное значение.
- Собственные значения K и K' совпадают.

Рассмотрим систему $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$. По теореме Фредгольма эта система совместна тогда и только тогда, когда каждое решение сопряженной однородной системы $(E - \lambda A^T)\vec{d} = \vec{0}$ ортогонально $\vec{\varphi}$:

$$\left\langle \vec{\varphi}; \vec{d} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^N \varphi_j d_j = 0 \Longleftrightarrow \int_G f(y)\left[\sum_{j=1}^N b_j(y)d_j\right]dy = 0 \Longleftrightarrow \int_G f(y)v(y)dy = 0$$

Получили что интегральное уравнение с вырожденным ядром совместно тогда и только тогда, когда f ортогонально каждому решению однородного союзного уравнения.

Сформулируем все полученные и доказанные выше результаты в виде теорем Фредгольма:

Теорема 26.2 (Первая теорема Фредгольма)**.** *Если $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему однозначно разрешимы при любых правых частях из $C(\overline{G})$.*

Теорема 26.3 (Вторая теорема Фредгольма)**.** *Если $D(\lambda) = 0$, то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему имеют одинаковое число линейно независимых решений $m = N - Rg(E - \lambda A)$*

Теорема 26.4 (Третья теорема Фредгольма)**.** *Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешения интегрального уравнения с вырожденным ядром необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x) \in C(\overline{G})$ был ортогонален всем решениям союзного уравнения.*

Билет 27. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \overline{G} \tag{1}$$

и ему союзное

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x,y)v(y)dy + g(x),\ x \in \overline{G}, K'(x,y) = K(y,x) \tag{2}$$

Теорема 27.1 (Первая теорема Фредгольма (Теорема Фредгольма об альтернативах))**.** *Либо интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в $C(\overline{G})$ для каждой функции $f(x)$ из $C(\overline{G})$ либо соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.*

Теорема 27.2 (Вторая теорема Фредгольма)**.** *Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он же имеет место и для уравнения (2). Как однородное уравнение соответствующее (1) так и однородное уравнение соответствующее (2) имеют конечные числа линейно независимых собственных функций, причем эти числа совпадают.*

Теорема 27.3 (Третья теорема Фредгольма)**.** *Если для уравнения (1) имеет место второй случай альтернативы, то неоднородное уравнение (1) разрешимо в $C(\overline{G})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие "ортогональности":*

$$\int_G f(y)v(y)dy = 0$$

Теорема 27.4. *В любом круге $|\lambda| < R$ на $\mathbb{C}$ у ядра уравнения (1) имеется не более чем конечное количество характеристических чисел. Единственная возможная точка накопления характеристических чисел – бесконечно удаленная точка.*

Билет посвящен доказательству этих теорем.

Теорема 27.5 (Апроксимационная теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $W(x) \in C(\overline{G})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon(x)$ – многочлен от $x_1..x_n$ такой, что $\|h(x) - P_\varepsilon(x)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$.*

Будем использовать данный факт из анализа.

Лемма 27.6. *Пусть K – интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x,y)$ $K(x,y) \in \left\langle C(\overline{G}); C(\overline{G})\right\rangle$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ этот оператор можно представить в виде $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{H}{K}_\varepsilon$, $\left\|\overset{H}{K}_\varepsilon\right\| < \varepsilon$, $\left\|\overset{H}{K}{}'_\varepsilon\right\| < \varepsilon$*

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ найдем $P_\varepsilon(x,y)$ от $x_1..x_n, y_1..y_n : \|K(x,y) - P_\varepsilon(x,y)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$. Тогда $\left\|\overset{H}{K_\varepsilon}\right\| \leqslant \|K(x,y) - P_\varepsilon(x,y)\|_{C(\overline{G})} \cdot mesG = \varepsilon \cdot mesG$. При этом оператор $\overset{B}{\Phi_\varepsilon}$ имеет вырожденное ядро P_ε. □

Лемма 27.7. *Пусть* K *– интегральный оператор с полярным ядром* $K(x,y)$ $K(x,y) \in \left\langle C(\overline{G}); C(\overline{G})\right\rangle$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ *этот оператор можно представить в виде* $K = \overset{B}{\Phi_\varepsilon} + \overset{\Pi}{Q_\varepsilon}$, $\left\|\overset{\Pi}{Q_\varepsilon}\right\| < \varepsilon$, $\left\|\overset{\Pi}{Q'_\varepsilon}\right\| < \varepsilon$

Доказательство. Представим K в виде суммы $\overset{H}{K_\varepsilon} + \overset{\Pi}{K_{\frac{\varepsilon}{2}}}$. По предыдущей лемме $\overset{H}{K} = \Phi + \overset{H}{K_{\frac{\varepsilon}{2}}}$. Значит, $K = \Phi + \overset{H}{K_{\frac{\varepsilon}{2}}} + \overset{\Pi}{K_{\frac{\varepsilon}{2}}} = \Phi + \overset{\Pi}{Q_\varepsilon}$, $\left\|\overset{\Pi}{Q_\varepsilon}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Перейдем к теоремам Фредгольма.

Пусть $R > 0, \overline{D_R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$.

- Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2R},\ K = \Phi + Q,\ P = P(x,y) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) b_j(y),\ \|Q\|, \left\|Q'\right\| < \varepsilon$
- Представим уравнение $u = \lambda K u + f$ в виде $(I - \lambda K)u = \lambda \Phi u + f$, аналогично, его союзное уравнение $v = \lambda K' v + g$ представим в виде $(I - \lambda K')v = \lambda \Phi' v + g$. Далее представим эти уравнения в следующей форме:
$$(I - \lambda Q)u = \lambda \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \int_G b_j(y) u(y) dy + f(x)$$
$$(I - \lambda Q')v = \lambda \sum_{j=1}^{N} b_j(x) \int_G a_j(y) v(y) dy + g(x)$$
- Q – оператор с малой нормой: $|\lambda| \cdot \|Q\| \leqslant \frac{|\lambda|}{2R} < 1$. Аналогичные рассуждения верны и для оператора Q', а значит операторы $(I - \lambda Q), (I - \lambda Q')$ непрерывно обратимы. Перепишем уравнения:
$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{N} \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1} a(x)}_{\hat{a}_j(x,\lambda)} \int_G b_j(y) u(y) dy + \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1} f(x)}_{\hat{f}(x)} = \lambda \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j(x,\lambda) \int_G b_j(y) u(y) dy + \hat{f}(x,\lambda)$$
$$v(x) = ... = \lambda \sum_{j=1}^{N} \hat{b}_j(x,\lambda) \int_G a_j(y) u(y) dy + \hat{g}(x,\lambda)$$
Это уравнения с вырожденными ядрами, их решение эквивалентно решению систем:
$$(E - \lambda \hat{A})\vec{c} = \vec{\varphi};\ \hat{A}(\lambda) = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^{N};\ \mu_{i,j} = \langle b_i; \hat{a}_j\rangle;\ \varphi_i = \left\langle b_i; \hat{f}\right\rangle$$
$$(E - \lambda \hat{A}')\vec{d} = \vec{\varphi};\ \hat{A}'(\lambda) = \left\|\mu'_{ij}\right\|_{i,j=1}^{N};\ \mu'_{i,j} = \left\langle a_i; \hat{b}_j\right\rangle;\ \varphi_i = \langle a_i; \hat{g}\rangle$$

Лемма 27.8. *Пусть K – полярное ядро такое, что $\|\lambda K\| < 1$. Тогда $\forall a, b \in C(\overline{G}) \longrightarrow \langle (I-\lambda K)^{-1}a; b\rangle = \int_G (I-\lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx$ – регулярная функция при $|\lambda| < \|K\|^{-1}$. Если дополнительно выполнено $|\lambda| \cdot \left\|K'\right\| < 1$, то $[(I-\lambda K)^{-1}a; b] = \left[a; (I-\lambda K')^{-1}b\right]$.*

Доказательство.

$$(I-\lambda K)^{-1}a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j a(x) \Longrightarrow \int_G (I-\lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx = \int_G \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j(a(x))b(x)}_{\text{сход. равномерно}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[\int_G K^j\right.$$

Полученный ряд сходится абсолютно т.к. справедлива оценка

$$\left|\lambda^j \int_G K^j(a(x))b(x)dx\right| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \cdot mesG \cdot \underbrace{\left|\lambda^j \cdot \|K\|^j\right|}_{q_j;\, q<1}$$

Докажем теперь вторую часть:

$$\left\|\lambda K'\right\| < 1 \Longrightarrow \ \exists\, (I-\lambda K')^{-1} \in \mathcal{L}(C(\overline{G})) \Longrightarrow (I-\lambda K')^{-1}b = \sum_{j=0}^{inf} \lambda^j (K')^j b(x)$$

Тогда:

$$\left\langle (I-\lambda K)^{-1}a; b\right\rangle \overset{*}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left\langle K^j a; b\right\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left\langle a; (K')^j b\right\rangle = \left\langle a; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b\right\rangle = \left\langle a; (I-\lambda K')^{-1}b\right\rangle$$

Докажем (*):

$$\langle Ku; v\rangle = \int_G \int GK(x,y)u(y)dyv(x)dx =$$

$$= \int_G u(y)\left[\int GK(x,y)v(x)d(x)\right]dy = [x \to y; y \to x; (**)] =$$

$$= \int_G u(x)\left[\int G \underbrace{K(y,x)}_{K'(x,y)} v(y)dy\right]dx = \left\langle u; K'v\right\rangle$$

Где переход (**) верен по т. Фубини-Тонелли. □

Лемма 27.9. *Матрица $\hat{A}'(\lambda)$ является транспонированной к матрице $\hat{A}(\lambda)$. Элементы $\hat{m}u_{ij}$ матрицы $\hat{A}$ – регулярные в круге $|\lambda| < 2R$ функции λ.*

Доказательство.

$$|\lambda| < 2R \Longrightarrow |\lambda| \cdot \|Q\| < 1,\ |\lambda| \cdot \left\|Q'\right\| < 1$$

$$\hat{\mu}'_{ij} = \left\langle a_i; (I-\lambda Q')^{-1}b_j\right\rangle = \left\langle (I-\lambda Q)^{-1}a_i; b_j\right\rangle = \hat{\mu}_{ji}$$

Регулярность следует из предыдущей леммы. □

- Рассмотрим $D(\lambda) = det(E - \lambda\hat{A}(\lambda)) = det(E - \lambda\hat{A}'(\lambda))$. Это регулярная в круге $|\lambda| < 2R$ функция, $D(0) = 1 \Longrightarrow D(\lambda) \not\equiv 0$.

  В круге $|\lambda| < R$ может быть только конечное число нулей λ_k иначе по теореме о единственности имели бы $D(\lambda) \equiv 0$.

  Если λ не корень $D(\lambda) = 0$ то оба уравнения однозначно разрешимы.

  Если же λ – корень $D(\lambda) = 0$, то оба уравнения имеют конечномерные пространства решений одной размерности.

  Таким образом, мы доказали следующие эквивалентности:

  – разрешимость исходного уравнения

  – разрешимость системы

  $$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y)u(y)dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

  – разрешимость $(E - \lambda\hat{A}')\vec{d} = \vec{\varphi}$

Осталась третья теорема: условие разрешимости: $\vec{\varphi} \perp \vec{d}_{\text{одн}}$ – любому решению $\left[E - \lambda\hat{A}'(\lambda)\right] = \vec{0}$ т.е.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N} \hat{\varphi} d_j}_{0} = \sum_{j=1}^{N} \left\langle b_j; \hat{f} \right\rangle d_j = \sum_{j=1}^{N} \left\langle b_j; (I - \lambda Q)^{-1} f \right\rangle_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left\langle f; (I - \lambda Q')^{-1} b_j \right\rangle_j = \left\langle f, \sum_{j=1}^{N} \underbrace{(I - \lambda Q')^{-1} b_j}_{\hat{b_j}} d_j \right\rangle = \langle f; v \rangle = \int_G f v dx = 0$$

Билет 28. Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.

- Функция $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$ является решением в обобщенных функциях уравнения $\triangle E(x) = \delta(x)$. Эту запись нужно понимать следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{-1}{4\pi|y|}\right)\Delta_y\varphi(y)\mathrm{d}y = \varphi(0),\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Определение 28.1. Функция $\vartheta(x)$ вида $\vartheta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y$ называется *объемным ньютоновым потенциалом*.

Замечание. Это свёртка фундаментального решения с функцией $-4\pi\rho(x)$

Теорема 28.1. *1. Пусть $\rho(x)$ — кусочно-непрерывная, ограниченная, финитная. Тогда $\vartheta(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и $\vartheta(x) = O\Big(\frac{1}{|x|}\Big)$ при $x \to \infty$.*

2. Если $\exists$ область $\Omega \subset \mathbb{R}^3 :\ \rho(x) \in C^1(\Omega)$, то $\vartheta(x) \in C^2(\Omega)$ и $\triangle\vartheta(x) = -4\pi\rho(x),\ x \in \Omega$.

Доказательство. Доказательство проведем в менее общей постановке: считаем $\rho \in C^\infty$ и *supp* ρ компактом.

- $\exists C : |\rho(x)| \leqslant C\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^3$. Считаем, что *supp* $\rho \subset B_A(0)$. Берем $x : |x| > 2A$. Тогда если $|y| \leqslant A$, то $|y| < \frac{|x|}{2}$.
- Оценка:

$$|\vartheta(x)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{|y|<A} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y\Big| \leqslant \int\limits_{|y|<A} \frac{|\rho(y)|}{|x-y|}\mathrm{d}y \leqslant \frac{c}{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|y|<A} \frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{8}{3}\frac{\pi c A^3}{|x|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta(x) = O\bigg(\frac{1}{|x|}\bigg).$$

- Пользуемся утверждением из анализа: *Пусть $F(x,y)$ и $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y),\ j = \overline{1,n}$ непрерывны на $\Omega \times G$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $g(x)$ абсолютно интегрируема: $\int\limits_G |g(x)|\mathrm{d}x < \infty|$. Тогда $\int\limits_G F(x,y)g(y)\mathrm{d}y \in C^1(\overline{\Omega})$ и*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_G F(x,y)g(y)\mathrm{d}y = \int\limits_G \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y)g(y)\mathrm{d}y$$

.

- Пусть $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\exists A : \rho(x) \equiv 0 \;\; \forall\, x : |x| > A$. Пусть

$$\Omega = \{x : |x| < R\}; \quad F(x,y) = \rho(x+y)$$

$$G = \{y : |y| < R + A\}; \quad g(y) = \frac{1}{|y|}.$$

При $|x| < R,\ |y| > A + R \hookrightarrow |x+y| \;\geqslant\; |y| - |x| \;\geqslant\; A + R - R = A \;\Rightarrow\; \rho(x+y) \equiv 0.$

- $$\vartheta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x+y)}{|y|} \mathrm{d}y = \int\limits_{|y|<R+A} \frac{\rho(x+y)}{|y|} \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = \int\limits_{|y|<R+A} \frac{\partial \rho(x+y)}{\partial x_j} \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y;$$

Также для остальных производных.

- $$\Delta\vartheta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tfrac{\Delta_x \rho(x+y)}{|y|} \mathrm{d}y = -4\pi \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\tfrac{-1}{4\pi|y|}\right) \underbrace{\Delta_y \rho(x+y)}_{\substack{\Big\| \\ \Delta_x \rho(x+y)}} \mathrm{d}y = -4\pi \langle \delta(y),\ \rho(x+y) \rangle = -4\pi\rho(x).$$

$\square$

Билет 29. Понятие области с границей C^2. Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в $\mathbb{R}^3$

Определение 29.1. Область с границей Γ класса C^2 - ограниченная область ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$), удовлетворяющая условиям :

- $\forall x^0 \in \Gamma\ \exists$ декартова с.к.(ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в x^0 и функция $F_{x^0}(\xi')$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi'| \leqslant r$ т.что
  - $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leqslant r);\ F_{x^0}(0,0) = 0,\ \frac{\partial F_x}{\partial \xi_i}(0,0) = 0,\ i = 1,2$
  - Множество $\sum_{x^0} = \{x:\ \xi_3 = F_{x^0}(\xi'), |\xi'| \leqslant r\} \subset \Gamma$
  - Множество $\mathrm{U}^-_{x^0} = \{x:\ F_{x^0}(\xi') - h < \xi_3 < F_{x^0}(\xi'),\ |\xi'| < r\} \subset \Omega$
  - Множество $\mathrm{U}^+_{x^0} = \{x:\ F_{x^0}(\xi') < \xi_3 < F_{x^0}(\xi') + h,\ |\xi'| < r\}$ не пересекается с Ω
- $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leqslant r) \Rightarrow \left|\dfrac{\partial F_x}{\partial \xi_i}\right| \leqslant M_1; \left|\dfrac{\partial^2 F_x}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right| \leqslant M_2, |\xi'| \leqslant r$
- Постоянные $r > 0,\ h > 0$ и M_1, M_2 можно выбрать не зависящими от $x^0 \in \Gamma$ и от с.к. ξ

Определение 29.2. Указанную с.к. и окрестность $U_{x^0} = \mathrm{U}^-_{x^0} \cup \mathrm{U}^+_{x^0}$ назовем **подходящим для** X^0, а ξ' - **локальными координатами** на куске $\sum_{x^0}$ границы Γ.

Определение 29.3. Неограниченная область называется **внешней областью с границей Γ**$\in C^2$, если $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}$ есть ограниченная область с границей $\in C^2$.

Определение 29.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$- область с границей Γ класса C^2. Функция вида $V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \dfrac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y$ называется **потенциалом простого слоя**.

Теорема 29.1. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. *Тогда:*

1. $V^0(x) \in C(\mathbb{R}^3)$
2. $V^0(x)$ *гармоническая в* $\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma$
3. $V^0(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *при* $x \to \infty$

Доказательство. 2. Пусть $x^1 \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma,\ \delta_1 = \operatorname{dist}\{x^1, \Gamma\} > 0$

Возьмем шар $B(x^1, \frac{\delta_1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^1| < \frac{\delta_1}{2}\}$. Тогда расстояние от произвольной точки $x \in \overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}$ до $\forall y \in \Gamma$ не меньше $\frac{\delta_1}{2} : |x-y| \geqslant |x^1 - y| - |x - x^1| \geqslant \delta_1 - \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$

Поэтому $\frac{1}{|x-y|} \in C^\infty(\underbrace{\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}}_{x} \times \underbrace{\Gamma}_{y}) \Rightarrow \mathcal{D}_x^\alpha \frac{1}{|x-y|} \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma)$

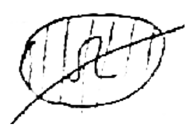
По теореме о дифференцировании интеграла по параметру (формулировка в билете 5) имеем

$$\mathcal{D}_x^\alpha V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \mathcal{D}_x^\alpha \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma) \ \ \forall\, \alpha\text{-мультииндекса}$$

В частности, $\triangle_x V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \triangle_x (\frac{1}{|x-y|}) \mu(y) dS_y = 0$, что и требовалось.

1. Если $x \in \Gamma$, то $\frac{1}{|x-y|}$ - полярное ядро, следовательно, интегральный оператор с полярным ядром переводит непрерывную функцию $\mu(y)$ в непрерывную $\Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\Gamma)$.

   Мы уже доказали, что $V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma) \Rightarrow$ осталось показать непрерывность в областях Ω следующего вида:



Построим для этого последовательность функций, равномерно сходящихся к $V^{(0)}(x)$:

Пусть $\left(\frac{1}{|x-y|}\right)_\delta - \delta$-срезка функции $\frac{1}{|x-y|}$:

$$\left(\frac{1}{|x-y|}\right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|}, & \text{если } |x-y| \geqslant \delta; \\ \frac{1}{\delta}, & \text{если } |x-y| < \delta. \end{cases}$$

$V_\delta^{(0)}(x) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x-y|}\right)_\delta \mu(y) dS_y \in C(\overline{\Omega})$

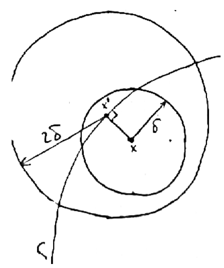
Будем выбирать $0 < \delta < \frac{d}{2}$(d – из свойств области с границей класса C^2) – такое число, что $\forall x^0 \in \Gamma \to B(x^0, d) \subset U_{x^0}$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| = \left| \int_\Gamma \left(\frac{1}{|x-y|} - \left(\frac{1}{|x-y|}\right)_\delta \right) \mu(y) dS_y \right|$$

Если $x : |x-y| \geqslant \delta$, то $\left(\dfrac{1}{|x-y|} - \left(\dfrac{1}{|x-y|}\right)_\delta\right) = 0$

В противном случае она равна $\left|\int_\Gamma \underbrace{(\dfrac{1}{|x-y|} - \dfrac{1}{\delta})}_{>0} \underbrace{\mu(y)}_{|\mu(y)| \leqslant ||\mu||_{C(\Gamma)} = C} dS_y\right| \geqslant C \int\limits_{\substack{y\in\Gamma \\ |x-y|<\delta}} \dfrac{dS_y}{|x-y|}$

Нам осталось оценить интеграл $\int\limits_{\substack{y\in\Gamma \\ |x-y|<\delta}} \dfrac{dS_y}{|x-y|}$



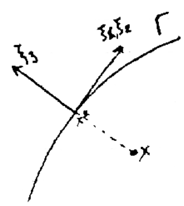
Пусть $x^* = \pi_\Gamma(x)$. Построим $B(x,\delta)$ и $B(x^*, 2\delta)$.

Ясно, что т.к. $|x - x^*| < \delta \Rightarrow B(x,\delta) \subset B(x^*, 2\delta)$.

Увеличивая область интегрирования, запишем:

$$\int_{\substack{y\in\Gamma \\ |x-y|<\delta}} \frac{dS_y}{|x-y|} \leqslant \int\limits_{\substack{y\in\Gamma \\ |x^*-y|<2\delta}} \frac{dS_y}{|x^*-y|}$$

По определению числа d имеем $B(x^*, 2\delta \subset U_{x^*})$.



Свяжем с x^* локальную систему координат и функцию $F_{x^*}(\xi_1, \xi_2)$

Т.к. $y \in \Gamma, y = (\xi_1, \xi_2, F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))$

Т.к. $x^* = \pi_\Gamma(x)$, точка x имеет ненулевую компоненту только по $\xi_3\ :\ x = (0, 0, x_3)$

Оценки: $|x-y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_3 - F_{x^*}(\xi_1,\xi_2))^2 \leqslant \xi_1^2 + \xi_2^2$
$|x^*-y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (F_{x^*}(\xi_1,\xi_2))^2 \leqslant \xi_1^2 + \xi_2^2 \Rightarrow$ расширяем область интегрирования до

$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < 2\delta$

$$\left|V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x)\right| \geqslant C \int\limits_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}<2\delta} \frac{\sqrt{1+(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_1}(\xi_1,\xi_2))^2+(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_2}(\xi_1,\xi_2))^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 \leqslant$$

$$C\sqrt{1+2M_1^2} \int\limits_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}<2\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$$

В полярной системе координат $\binom{\xi_1}{\xi_2} = r\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ последний интеграл примет вид $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\delta} \frac{rdr}{r} = 4\pi\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Итак, $\underbrace{V_\delta^{(0)}(x)}_{\in C(\overline{\Omega})} \rightrightarrows_{\delta\to 0} V^{(0)}(x) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3)$.

3. $\mu(x) \in \Gamma \Rightarrow |\mu(x)| \leqslant ||\mu||_\Gamma = C \;\; \forall\, x \in \Gamma$

   Возьмем сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри этой сферы. Тогда $\forall y \in \Gamma \to |y| \leqslant R$.

   При $x \to \infty \;\; \to |x| \geqslant 2R \;\; \Rightarrow y \leqslant \frac{|x|}{2} \;\; \Rightarrow |V^0(x)| \leqslant \int_\Gamma \frac{|\mu(y)|}{|x-y|} dS_y \leqslant \frac{2C}{|x|} \underbrace{\int_\Gamma dS_y}_{\tilde{\mathbf{C}}} \Rightarrow V^0(x) =$

   $O(\frac{1}{|x|})$ при $x \to \infty$.

$\square$

Билет 30. Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность

Пусть Γ - граница класса C^2 ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Определение 30.1. Функция вида $V^{(2)}(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\nu(y)dS_y$ называется *потенциалом двойного слоя*

Сразу будет удобно переписать определение в иной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \sum_{k=1}^{3} n_k(y)\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|} = \sum_{k=1}^{3}\frac{n_k(y)(x_k-y_k)}{|x-y|^3} = \frac{(x-y,\bar{n}_y)}{|x-y|^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(x) = \int\limits_{\Gamma}\frac{(x-y,\bar{n}_y)}{|x-y|^3}\nu(y)dS_y$$

Лемма 30.1. *Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда:*

а) $V^{(2)}(x)$ - гармоническая функция в в $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma$;

б) $V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \to \infty$

Доказательство.

а)

$$V^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\Gamma} \underbrace{n_k(y)}_{\substack{\in C(\Gamma)\\ \text{т.к.}\Gamma\in C^2}} \underbrace{\nu(y)}_{\substack{\in C(\Gamma)\\ \text{по}\\ \text{условию}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|}}_{\substack{-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-y|}\\ \in C\left((\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)\times\Gamma\right)}} dS_y = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Gamma} \underbrace{n_x(y)\nu(y)\frac{1}{|x-y|}dS_y}_{\substack{\text{потенциал простого слоя с}\\ \mu = n_k\cdot\nu\in C(\Gamma)\\ \Downarrow\\ \text{является гармонической}\\ \text{функцией в } R^3\backslash\Gamma}}$$

Остаётся воспользоваться тем, что производная гармонической функции - гармоническая.

б) Возьмём сразу сферу радиуса R такую, что Γ лежит внутри сферы. При

$$|x| \to \infty \Rightarrow |x| > 2R \Rightarrow |y| \leqslant \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x-y|^2 \geqslant (|x|-|y|)^2 \geqslant \frac{|x|}{4}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\right| \leqslant \frac{|x-y|\cdot|\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|V^{(2)}(x)\right| = \left|\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\nu(y)dS_y\right| \leqslant \frac{4}{|x|^2}\int\limits_{\Gamma}|\nu(y)|dS_y \leqslant 4\|\nu(y)\|_{C(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}dS_y\cdot\frac{1}{|x|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{при} x \to \infty$$

□

Лемма 30.2. *Если Ω ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, то $\forall x, y \in \Gamma, x \neq y$, справедлива оценка*

$$\left|\frac{(x-y, n(y))}{|x-y|^2}\right| \leqslant \frac{M}{|x-y|}$$

Доказательство. Пусть d - число из определения поверхности с границей $\Gamma \in C^2$:

- если $|x-y| \geqslant d$, то $\dfrac{|(x-y,\bar{n}_y)|}{|x-y|^3} \leqslant \dfrac{1}{|x-y|^2} \leqslant \dfrac{1}{d}\dfrac{1}{|x-y|}$
- если $|x-y| < d$, то свяжем y с локальной системой координат. В этой системе: $y = (0,0,0)$, $x = (\xi_1, \xi_2, F(\xi_1,\xi_2))$, $\bar{n}_y = (0,0,1) \Rightarrow$ $|x-y, \bar{n}_y)| = |F_y(\xi_1,\xi_2)| \leqslant M_2(\xi_1^2+\xi_2^2) \leqslant M_2(\xi_1^2+\xi_2^2+F_y^2(\xi_1,\xi_2) = M_2|x-y|^2$, что и требовалось.

□

Лемма 30.3. *Пусть $\nu(x) \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя $V^{(2)} \in C(\Gamma)$*

Доказательство. Используем признак полярного ядра (билет №24). В силу леммы $|K(x,y)| \leqslant \frac{M}{|x-y|}$ и $K(x,y) = \dfrac{(x-y,\bar{n}_y)}{|x-y|^2} \in C((\Gamma\times\Gamma)\backslash\{x=y\})$ Оператор с полярным ядром переводит непрерывные функции в непрерывные, а $\nu \in C(\Gamma) \Rightarrow V^{(2)}(x) \in C(\Gamma)$

□

Наша цель - описать скачок $V^{(2)}(x)$ при переходе через границу. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 30.4. *Пусть Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Тогда интеграл $V^{(2)}_{GAUSS}(x) = \int\limits_\Gamma \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\dfrac{1}{|x-y|}\right)\nu(y)\cdot 1\cdot dS_y = \dfrac{(x-y,\bar{n}_y)}{|x-y|^3}dS_y$ - (интеграл Гаусса) равен*

$$\begin{cases} -4\pi, x \in \Omega \\ -2\pi, x \in \Gamma \\ 0, x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega} \end{cases}$$

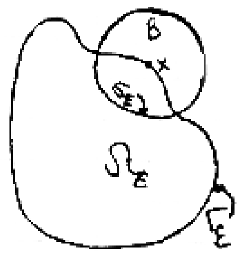
Доказательство. 1) Пусть $x \in \Omega$. Возьмём $u(x) \equiv 1$ и запишем представление этой функции в виде суммы трёх потенциалов:

$$u(x) \equiv 1 = \int\limits_\Omega \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\underbrace{\Delta 1}_{=0}dy + \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\bar{n}_y}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)u(y)dS_y - \int\limits_\Gamma \left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right)\underbrace{\frac{\partial u(y)}{\bar{n}_y}}_{=0} = -\frac{1}{4\pi}V^{(2)}_{GAUSS}(x)$$

2) Пусть $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$ Возьмём $u(y) \equiv 1$ и $v(y) = \frac{1}{|x-y|}$ и воспользуемся для этих функций первой формулой Грина:

$$\int\limits_\Omega \underbrace{\Delta_y v(y)}_{=0}\cdot u(y)dy = \underbrace{\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\bar{n}_y}v(y)u(y)dS_y}_{=V^{(2)}_{GAUSS}(x)} - \underbrace{\int\limits_\Omega (\nabla_y v(y), \nabla 1)dy}_{=0} \Rightarrow V^{(2)}_{GAUSS}(x) = 0$$

3) Пусть $x \in \Gamma$. Введём $B = B(x, \varepsilon), \Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{B}, \Gamma_\varepsilon = \Gamma \backslash B, \sigma_\varepsilon = \partial B \cap \bar{\Omega}$ Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon \Rightarrow x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}_\varepsilon$



Согласно второму пункту можем написать $\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y = 0$ Значит

$$\underbrace{\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y}_{\to \int\limits_{\Gamma} \text{ при } \varepsilon \to 0} + \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y = 0$$

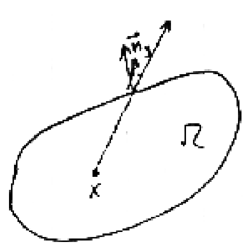
Покажем, что

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y \to 2\pi \text{ при } \varepsilon \to 0 \ \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} = \frac{|x-y||\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Поэтому $\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} dS_y$

При малых ε кусок границы Γ внутри $\to$ к полуплоскости $\Rightarrow \sigma_\varepsilon \to$ к полусфере.
Поэтому $\int\limits_{\sigma_\varepsilon} dS_y = 2\pi\varepsilon^2(1 + O(1))$, что и требовалось $\square$

Offtop : Геометрический смысл интеграла Гаусса: $\frac{(y-x, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y = \frac{dS_y cos\beta}{|x-y|^2} = d\Omega$



– телесный угол, под которым из точки x видна часть dS_y. Интеграл Гаусса есть сумма всех таких углов со знаком "минус". Поэтому геометрически последняя лемма очевидна.

Лемма 30.5. *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с границей* $\Gamma \in C^2$. *Пусть* $x^o \in \Gamma$. *Тогда* $\forall x : (x \in \mathbb{R}^3) \cap \left(|x - x^o| < \dfrac{d_*}{2}\right)$ *верно* $\displaystyle\int\limits_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y < K, d_* = \frac{1}{2} min\left(d, \frac{2}{M_2}\right)$

Без доказательства

Лемма 30.6. *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с границей* $\Gamma \in C^2$. *Пусть* $x^o \in \Gamma$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to x^o} W(x, x^o) = W(x^o, x^o)$, *где* $W(x, x^o) = \displaystyle\int\limits_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y$, *а* $\nu(x) \in C(\Gamma)$

Доказательство. Требуется показать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall\, x : |x - x^o| < \delta_\varepsilon \to |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| < \varepsilon$. Функция $\nu(x)$ непрерывна на компакте, следовательно она и равномерно непрерывна на нём. Значит $\exists \beta = \beta(\varepsilon) : \quad \forall\, y \in \Gamma : |y - x^o| < \delta \to |\nu(y) - \nu(x^o)| < \varepsilon$. Выберем $\beta \leqslant \dfrac{d_*}{2}$

$$|W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| = \left| \int\limits_\Gamma \left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right) (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|y-x^o|<\beta} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\leqslant K+K} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leqslant \varepsilon} dS_y +$$

$$\int\limits_{\Gamma \setminus (|y-x^o|<\beta)} \underbrace{\left(\frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\substack{\leqslant \psi(x); \psi(x^o)=0 \\ \Downarrow \\ \exists \delta_1 : \|\psi(x)\| < \varepsilon, \\ \text{если} |x - x^o| < \delta_1}} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leqslant 2\|\nu\|_{C(\Gamma)}} dS_y$$

Значит, при $|x - x^o| \leqslant max\left(\dfrac{d_*}{2}, \delta_1(\varepsilon)\right)$ имеет место оценка $|W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| \leqslant 2K\varepsilon + 2\varepsilon\|\nu\|_{C(\Gamma)}$ □

Теперь можно перейти к описанию скачка потенциала.

Теорема 30.7. *Пусть* Ω *- ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с границей* $\Gamma \in C^2$, *а* $\nu(x) \in C(\Gamma)$. *Тогда потенциал двойного слоя* $V^{(2)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ *и* $V^{(2)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ *(можно непрерывно продолжить на замыкания). Обозначим* $\forall x^o \in \Gamma : V_+^{(2)}(x^o) = \lim\limits_{x \in \Omega, x \to x^o} V^{(2)}(x); V_-^{(2)}(x^o) = \lim\limits_{x \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}, x \to x^o} V^{(2)}(x)$ *Тогда* $V_\pm^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) \mp 2\pi\nu(x^o)$

Доказательство.

$$V^{(2)}(x) = W(x, x^o) + \nu(x^o) \int\limits_\Gamma \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y$$

$$V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x\in\Omega, x\to x^o} V^{(2)}(x) = \underbrace{\lim_{x\in\Omega, x\to x^o} W(x, x^o)}_{\substack{W(x^o,x^o)\\ \text{в силу леммы}}} + \nu(x^o) \lim_{x\in\Omega, x\to x^o} \underbrace{\int\limits_\Gamma \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3}\nu(y)dS_y}_{\text{при } x\in\Omega \text{ это } 4\pi} = W(x^o, x^o) - 4\pi\nu(x^o)$$

Далее, если $x^o \in \Gamma$, то $V^{(2)}(x^o) = W(x^o, x^o) + \nu(x^o) \int\limits_\Gamma \frac{(x^o - y, \bar{n}_y)}{|x^o - y|^3}\nu(y)dS_y = W(x^o, x^o) - 2\pi\nu(x^o)$

Поэтому $V_+^{(2)}(x^o) = V_(^{(2)} x^o) - 2\pi\nu(x^o)$ Это, в частности, означает, что $V^{(2)}(x)$ можно непрерывно продолжить до $\bar{\Omega}$. Для стремления $x \to x^o$ извне доказательство аналогично:

$$V_-^{(2)}(x^o) = \underbrace{\lim_{x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega, x\to x^o} W(x, x^o)}_{\substack{W(x^o,x^o)\\ \text{в силу леммы}}} + \lim_{x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega,\ x\to x^o} \nu(x^o) \underbrace{\int\limits_\Gamma \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3}\nu(y)dS_y}_{\text{при } x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega \text{ это } 0} = W(x^o, x^o) = V^{(2)}(x^o) + 2\pi\nu(x^o)$$

Это, в частности, означает, что $V^{(2)}$ можно непрерывно продолжить до $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ $\square$

Билет 31. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью Формула скачка для нормальной производной

Мотивация: во внутренней задаче Неймана (билет 14) ищется решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ уравнения

$$\Delta u = f(x), x \in \Omega$$

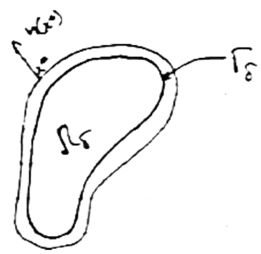
при условии

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_r = u_1(x),$$

где $u_1 \in C(\Gamma)$.

Но существуют примеры гармонических в области функций, градиент которых нельзя продолжить по непрерывности на замыкание этой области. Можно расширить понятие классического решения.

Пусть $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^2$



Пусть $x^o \in \Gamma$, а $n(\vec{x^o})$ - нормаль к Γ в x^o Т.к. $\Gamma \in C^2$, $n(\vec{x^o})$ - непрерывная функция по x^o. Проведем через x^o прямую $x = x^o + n(\vec{x^o})t, t \in \mathbb{R}$

Распишем произведенеие

$$(\vec{n}(x^o), \nabla u) = \sum_{k=1}^{3} n_x(x^o)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}$$

Определение 31.1. Говорят, что $u(x)$ имеет **правильную нормальную производную** по направлению внешней нормали на Γ из Ω, если

1. $\forall x^o \in \Gamma$ существует конечный предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o) \equiv \lim_{x=x^o+\vec{n}(x^o)t, x\in\Omega, x\to x^o} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

2. Этот предел равномерный по $x^o \in \Gamma$

Лемма 31.1. *Если u(x) имеет ПНП по нормали $\vec{n}(x^o)$ из Ω на Γ, то*

1. *$u(x)$ имеет обычную производную по нормали $\vec{n}(x^o)$ в точке $x^o \in \Gamma$, и эта производная совпадает с ПНП*

2. *ПНП $\in C(\Gamma)$*

Доказательство. Обычная производная по нормали

$$\lim_{x \to x^o, x = x^o + \vec{n}(x^o)t} \frac{u(x^o) - u(x)}{|x^o - x|} = \lim_{t<0, t \to 0} \frac{u(x^o - u(x^o + \vec{n}(x^o)t))}{-t} = \lim_{t<0. t \to 0} \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}$$

- этот предел существует по условию.

Покажем непрерывность: Пусть δ мало, $0 < \delta < \delta_o, x = x^o - \delta n(x^o)$

Пусть $V_\delta(x^o) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) =$

$$= \sum_{k=1}^{3} n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) => V_\delta(x^*) \in C(\Gamma)$$

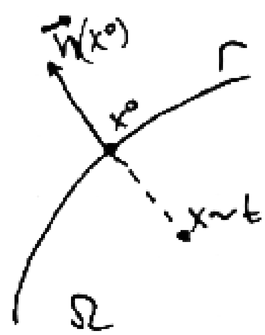
$n_k(x^o)$ непрерывна, т.к. $\Gamma \in C^2$

По определению ПНП: $V_\delta \rightrightarrows$ ПНП => она также непрерывная на Γ. □

• После расширения определения классического решения встает вопрос о единственности решения. При исследовании этого вопроса мы использовали формулы Грина. Дли них требовалось гладкость $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Покажем, как обобщить эти факты с помощью ПНП.

• Пусть Ω - ограниченная область с границей $\mathbb{R}^3$, граница $G \in C^2, 0 < \delta < \delta_\mu$

$\Gamma_\delta = x : x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$ - граница класса уже C^1, т.к. $\vec{n}\ inC^1$



Лемма 31.2. *Пусть Ω - ограниченная область с границей $G \in C^2, u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, а у $u(x)$ $\exists$ ПНП по направлению внешней нормали $\vec{n}(x^o), \Delta u \in C(\Omega)$. Тогда*

$$\int_\Omega (\Delta u) u dx = \oint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) u(x) dS - \int_\Omega |\nabla|^2 dx$$

Доказательство. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) => u(x) \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\Omega_\delta) =>$

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta u(x)) u(x) dx(1) = \oint_{G_\delta} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS(2) - \int_{\Omega_\delta} |\nabla u(x)|^2 dx(3)$$

$\lim_{\delta\to 0}(1) = \int_\Omega \Delta u dx$, т.к. $\Delta u(x)$ и $u(x) \in C(\bar\Omega)$

$\lim_{\delta\to 0}(2) = \int_{G_\delta} \frac{\partial u}{\partial \vec n} u(x) dS$

$\lim_{\delta\to 0}(3) = \lim_{x=x^o-\delta\vec n x^o} \int_{\Omega_\delta} |\nabla u(x)|^2 dx$

• С учетом сделанного обобщения все сделанные ранее рассуждения о внутренних и внешних задачах верны и для расширенного понятия классического решения. □

Теорема 31.3 (Кореектная постановка внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа)**.** *Ω - ограниченная область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, имеющую ПНП и удовлетворяющую*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec n}|_G = u_1(x) \in C(G) \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 31.4 (Корректная постановка внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа)**.** *Ω - внешняя область, граница $G \in C^2$. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ имеющую ПНП и удовлетворяющую*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec n}|_\Gamma = u_1(x) \in C(\Gamma) \\ u(x)_{x\to\infty} \to 0 \end{cases} \tag{31}$$

• Рассмотрим потенциал простого слоя

Ω - ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2; x = x^o - \delta\vec n(x^o); 0 < \delta < \delta^*$

$$V^* = \int_\Gamma \frac{\mu(x)}{|x-y|} dS_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec n}(x) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_\Gamma \frac{\mu(x)}{|x-y|} dS_y = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_G \frac{1}{|x-y|} \mu(y) dS_y$$

$$\sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} \mu(y) dS_y = \oint_\Gamma \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{y_k - x_k}{|x-y|^3} \mu(y) dS_y = \oint_\Gamma \frac{(y-x, \vec n(x^o))}{|x-y|^3} \mu(y) dS_y$$

Обозначим $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec n}\right)_\pm (x^o) = \lim_{x=x^o\mp\delta\vec n(x)}, \delta \to +0 \frac{\partial V^o}{\partial \vec n(x^o)}(x)$

$\frac{\partial V^o)}{\partial \vec n}(x^o)(1) = \int_\Gamma \frac{(y-x^o, \vec n(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y, x^o \in G(2)$

(1) - прямое значение нормальной производной

(2) - полярное ядро => $\forall \mu(x) \in C(G)$, $\forall\, x^o \in \Gamma$ этот интеграл существует, и более того $(1) \in C(\Gamma)$

Теорема 31.5. *У потенциала простого слоя $V^o(x)$ с плотностью $\mu(x) \in C(\Gamma)$ существует ПНП на Γ:*

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec n}_+(x^o)\right) \text{и} \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec n}_-(x^o)\right),$$

причем имеет место формула скачка

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_{\pm}(x^o)\right) = \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) \pm 2\pi\mu(x^o)$$

Следствие. $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_+ (x^o) - \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_- (x^o) = 4\pi\mu(x^o), x^o \in \Gamma$

$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_+ (x^o) + \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_= (x^o)\right], x \in \Gamma$

Билет 32. Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач

Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3\ \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3\ \Omega)$ имеющую ПНП по направлению внешней нормали, и такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in R^3\ \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})_-|_r = u_1(x), x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ u(x) \to 0, x \to \infty \end{cases} \tag{32}$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$u(x) = \int_G \frac{\mu(x)}{|x-y|} dS_y$. Свойства $\Delta u(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty} u(x) \to 0$ выполнены.

Кроме того, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3|\Omega) \cap C(R^3|\Omega)$ и имеет ПНП. Нужно проверить $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})_-|_r = u_1(x), x \in G$.

• Пусть

$$x^o \in G \Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})_-(x^o) = -2\pi\mu(x^o) + \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o - y|^3}\mu(y)dS_y = u_1(x^o)$$

$\mu(x^o) = \frac{1}{2\pi}\int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^2}\mu(y)dS_y - \frac{1}{2\pi}u_1(x^o), x^o \in G$ - Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с интегральным оператором и полярным ядром.

Уравнение однозначно разрешимо $\Leftrightarrow$ уравнение $\mu_*(x^o) = \frac{1}{2\pi}\int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3}\mu(y)dS_y \equiv 0$ имеет только тривиальное решение.

Для этого покажем, что $V_*(x) = \int_G \frac{\mu(x)}{|x-y|}dS_y \equiv 0$

Ясно, что уравнение на μ_* получается таким же образом как и уравнение на μ, но из задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in R^3|\Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = 0, x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ u(x) \to 0 \end{cases} \tag{33}$$

В силу единственности решение этой задачи $V_* = 0(x \in \mathbb{R}^3|\Omega)$. Но $V_* \in C(\mathbb{R}^3) \Rightarrow X_* \equiv 0$ на $X \in \mathbb{R}^3|\Omega$ Функция V_* удовлетворяет внутренней задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta V_* = 0 \ \ \forall\, x \in \Omega \\ V_*(x) = 0 \ \ \forall\, x \in G \end{cases} \tag{34}$$

$\Rightarrow V_* \equiv 0 \ \ \forall\, x \in \Omega$

Итак, $V_*(x) \equiv 0 \ \ \forall \ \in R^3$.

Но $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_+(x^o) - (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = 4\pi\mu_*(x^o), x^o \in G \Rightarrow \mu_*(x^o) \equiv 0 \ \ \forall\, x^o \in G$

Итак, по теореме Фредгольма об альтернативе уравнение

(*) $\mu(x^o) = \frac{1}{2\pi}\int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3}\mu(y)dS_y - \frac{1}{2\pi}u_1(x^o), x \in G$ однозначно разрешимо

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ такую, что:

1)$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega$

2)$u|_r = u_0(x), x \in G(u_o(x) \in C(G))$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3}\nu(y)dS_y, \nu(x) \in C(G)$

Условия $\Delta u = 0 \in \Omega$ и $u(x) \in C^2(G) \cap C(\bar{\Omega})$ уже выполнены. Осталось проверить $u|_r = u_0(x), x \in G$

• Для потенциала двойного слоя справедлива формула скачка: $u_+(x^o) = u(x^o) - 2\pi\nu(x^o) \Rightarrow u_0(x^o) = \int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3}\nu(y)dS_y - 2\pi\nu(x^o)$

$\Rightarrow \nu(x^o) = \int_x \frac{(y-x,\vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3}\nu(y)dS_y - \frac{u_0(x^o)}{2\pi}, x^o \in G$ Ядро, транспонированное к тому, что стоит в (*)

Т.к. (*) однозначно разрешмимо, это уравнение тоже имеет единственное решение

Теорема 32.1. *Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $G \in C^2$. Тогда у внутренней задачи Дирихле $\forall u_1 \in C(G)$, а также у внешней задачи Неймана $\forall u_0 \in C(G)$ существует единственное классическое решение*

Делали:

- Иванычев Сергей, 376 группа
- Погодин Роман, 374 группа
- Нагайко Иван, 372 группа
- Рязанов Андрей, 374 группа
- Федоряка Дмитрий, 374 группа
- Багно Богдан, 376 группа
- Изутин Никита, 378 группа
- Ермолова Марина, 373 группа
- Хасянов Расул, 371 группа
- Михальченко Егор, 371 группа
- Шлёнский Владислав, 374 группа
- Цветкова Ольга, 374 группа
- Молибог Игорь, 374 группа
- Чигринский Виктор, 374 группа
- Леонтьев Семён, 377 группа
- Кильянов Александр, 372 группа
- Тернов Лёха, 228 группа