

# Уравнения математической физики

Билеты к экзамену. Поток В.И. Зубова

1 января 2022 г. 20:49

Конспект подготовлен на основе лекций В.И. Зубова и подготовленных билетов Павла Останина и Михаила Христинченко. Полный список авторов приведён в конце.

Опечатки исправлять здесь: [github.com/batmaev/umf-exam-questions](https://github.com/batmaev/umf-exam-questions)

## Содержание

<b>1</b>	<b>Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду</b>	<b>6</b>
	Приведение к каноническому виду в точке из $\mathbb{R}^n$	6
	Классификация уравнений	7
	Приведение к каноническому виду в области из $\mathbb{R}^2$	7
	Гиперболический случай	8
	Параболический случай	9
	Эллиптический случай	10
	Формальный вид уравнения характеристик	10
<b>2</b>	<b>Задача Коши в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>11</b>
	Постановка	11
	Характеристическая поверхность	13
	Теорема Ковалевской	14
	Понятие о корректности	14
	Пример Адамара	15
<b>3</b>	<b>Задача Коши для колебаний струны</b>	<b>16</b>
	Формула Даламбера	16
	Существование и единственность классического решения	16
	Область зависимости от начальных данных	16

Корректность . . . . .	17
<b>4 Полубесконечная струна с закреплённым концом</b>	<b>18</b>
Формулировка . . . . .	18
Общее решение . . . . .	18
Условия согласования . . . . .	19
Метод продолжений . . . . .	19
<b>5 Однородное волновое уравнение в <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>21</b>
Формула Пуассона-Кирхгофа . . . . .	22
<b>6 Неоднородное волновое уравнение в <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>25</b>
Метод Дюамеля . . . . .	25
Запаздывающий потенциал . . . . .	26
Общая формула Кирхгофа . . . . .	27
Принцип Гюйгенса . . . . .	27
<b>7 Волновое уравнение в <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>28</b>
Метод спуска . . . . .	28
Формула Пуассона . . . . .	29
Диффузия волн . . . . .	29
<b>8 Теорема единственности для волнового уравнения</b>	<b>30</b>
Интеграл энергии . . . . .	31
<b>9 Уравнение теплопроводности в <math>\mathbb{R}^1</math></b>	<b>32</b>
Наводящие соображения . . . . .	32
Фундаментальное решение . . . . .	35
Формула Пуассона . . . . .	35
Свойства решения . . . . .	35
<b>10 Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в <math>\mathbb{R}^n</math>. Метод Дюамеля. Существование классического решения.</b>	<b>38</b>
<b>11 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе <math>M_2(T)</math> (без доказательства)</b>	<b>42</b>

<b>12 Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.</b>	<b>46</b>
<b>13 Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.</b>	<b>53</b>
Формулировка задачи . . . . .	53
Теорема единственности . . . . .	53
Обоснование метода . . . . .	55
<b>14 Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.</b>	<b>58</b>
Формулы Грина . . . . .	58
Формулы Грина . . . . .	58
Первая формула Грина . . . . .	59
Вторая формула Грина . . . . .	59
Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона . . . . .	59
Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона . . . . .	60
<b>15 Симметричность и положительная определенность оператора <math>-\Delta</math> при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.</b>	<b>61</b>
<b>16 Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.</b>	<b>63</b>
Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. . . . .	63
Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции. . . . .	64
<b>17 Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.</b>	<b>67</b>
Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. . . . .	67
Фундаментальное решение уравнения Лапласа. . . . .	68

18 Свойства гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.	71
19 Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции	73
Теорема (принцип максимума) . . . . .	73
Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . . . .	75
Теорема единственности . . . . .	75
20 Функция Грина для задачи Дирихле (случай $\mathbb{R}^3$ ). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре	76
Функция Грина . . . . .	76
Функция Грина для шара . . . . .	77
Формула Пуассона в шаре . . . . .	78
21 Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$ )	79
Формулировка теоремы . . . . .	79
Доказательство при $\mu \geq 0$ . . . . .	79
Доказательство при $\mu < 0$ . . . . .	80
22 Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$ )	81
23 Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай $\mathbb{R}^3$ ).	83
24 Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве $C(\bar{G})$ . Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.	87
25 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором $K$ . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$ .	90
26 Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.	92
Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром . . . . .	93

27	Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и поллярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.	95
28	Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.	99
29	Понятие области с границей $C^2$ . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в $\mathbb{R}^3$	101
30	Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность	105
31	Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Формула скачка для нормальной производной	110
32	Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач	114
	Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа . . . . .	114
	Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа . . . . .	115

**Билет 1. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) 2 порядка в  $\mathbb{R}^n$  с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Приведение уравнений 2 порядка к каноническому виду на плоскости.**

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . ДУЧП 2 порядка с линейной старшей частью:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0; \quad u(x) \in C^2(\Omega); \quad a_{ij}(x) \in C(\Omega)$$

Считаем  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ , что не сужает класса, т.к.  $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ . Хотим сделать замену так, чтобы все смешанные частные производные обратились в 0. В точке это сделать можно.

Возьмём преобразование

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \in C^2(U(x^0)), \quad y^0 = y(x^0); \quad U(x^0) \rightarrow V(y^0)$$

(диффеоморфизм класса  $C^2$  окрестности  $U(x^0)$  на  $V(y^0)$ )

Будем предполагать  $\exists$  обратного:  $x = x(y)$ . Наша функция:  $u = u(x_1 \dots x_n)$ .

Введём  $\hat{u}(y) := u[x(y)] \in C^2(V(y^0))$ . Производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{уйдёт в } \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u})}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0 \\ \sum_{k,l=1}^n \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right] \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) &= 0, \\ \hat{a}_{kl}(y) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Введём матрицы:  $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|_{i,j=1}^n$ ;  $\hat{A}(y^0) = \|\hat{a}_{ij}(y^0)\|_{i,j=1}^n$ .

$J(x^0) = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{i,j=1}^n$  – в малой  $U(x^0)$  задаёт преобразование  $\hat{A}(y^0) = J(x^0) A(x^0) J(x^0)^T$

$A = A^T \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}^T$ . Вопрос в выборе  $J$  такого, что  $\hat{A}$  диагональна.

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  заданы элемент  $h$  и квадратичная форма  $\Phi(h)$ .

Введём 2 базиса:  $\begin{pmatrix} e_1 \dots e_n \\ e'_1 \dots e'_n \end{pmatrix}$  В них  $h \sim \begin{matrix} \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T \\ \eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T \end{matrix}$ ;  $\Phi \sim \begin{pmatrix} \|c_{ij}\| \\ \|\hat{c}_{ij}\| \end{pmatrix}$ ;  $\Phi(h) = \begin{pmatrix} \xi^T C \xi \\ \eta^T \hat{C} \eta \end{pmatrix}$

Пусть  $\xi = S\eta$ . Тогда  $\Phi(h) = \eta^T S^T C S \eta = \eta^T \hat{C} \eta \rightarrow \hat{C} = S^T C S$ .

Существует такой базис, что

$$\hat{C} = \text{diag}(\underbrace{+1, +1 \dots +1}_{p \text{ штук}}, \underbrace{-1, -1 \dots -1}_{q \text{ штук}}, 0, 0 \dots 0)$$

$$\Phi(h) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2$$

В равенстве  $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J(x^0)^T$  нужно взять  $J(x^0) = S^T$

Такие преобразования существуют, их много. Например,  $y = y^0 + J(x^0)(x - x^0)$

В этих переменных уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_{p+q}^2} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0.$$

## Классификация уравнений

1. *Эллиптический тип*:  $p = n$  или  $q = n$
2. *Ультрагиперболический тип*:  $p + q = n$
3. *Гиперболический тип*:  $p = 1, q = n - 1$
4. *Ультрапараболический тип*:  $p + q < n$
5. *Параболический тип*:  $q = 0, p = n - 1$

*Замечание.*  $\hat{A}(y^0) = J(x^0)A(x^0)J(x^0)^T \Rightarrow \text{sign det}(\hat{A}(y^0)) = \text{sign det}(A(x^0))$

В случае  $n = 2$  тип уравнения в точке определяется по знаку определителя:

1. *Эллиптический*:  $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \rightarrow |\hat{A}(y^0)| = 1$
2. *Гиперболический*:  $\hat{A}(y^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\hat{A}(y^0)| = -1$
3. *Параболический*:  $|\hat{A}(y^0)| = 0$ .

## Приведение уравнения 2 порядка к каноническому виду на плоскости

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^2$  уравнение  $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, \nabla u) = 0$

Для определения в точке используем  $d = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Введём преобразование  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ ,  $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$  — диффеоморфизм класса  $C^2$ .

В новых координатах  $\hat{a}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{b}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{c}(\xi, \eta)\hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$

$$\hat{A}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = JAJ^T; \quad J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

## Гиперболический случай

Выбираем  $(x^0, y^0) \in \Omega$ , пусть  $d(x^0, y^0) = ac - b^2 < 0$ . В силу непрерывности есть  $U_\varepsilon(x^0, y^0)$ , где  $d < 0$ .

Во всех точках этой окрестности тип — гиперболический.

**Определение 1.1.** *Второй канонический тип:*  $\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0$ , то есть  $\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv 0$ .

Введём переменную  $w$ , которая обозначает либо  $\xi$ , либо  $\eta$ .

Запишем *характеристическое уравнение*:

$$a(x, y)w_x^2 + 2b(x, y)w_xw_y + c(x, y)w_y^2 = 0,$$

(При  $w = \xi$  это выражение равно  $\hat{a}_{11}$ , а при  $w = \eta$  оно равно  $\hat{a}_{22}$ )

От решений хотим  $\nabla w \neq 0$ , так как если  $\nabla\eta = 0$  или  $\nabla\xi = 0$ , то  $\det(J) = 0$ .

а) Пусть  $a(x^0, y^0) \neq 0$ , для  $c(x^0, y^0) \neq 0$  рассуждения такие же.

В окрестности, где  $a(x, y) \neq 0$ , делим:

$$w_x^2 + \frac{2b}{a}w_xw_y + \frac{c}{a}w_y^2 = \left(w_x + \frac{b}{a}w_y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}w_y = \left(w_x + \lambda_+(x, y)w_y\right) \cdot \left(w_x + \lambda_-w_y\right) = 0,$$

где введены обозначения  $\lambda_\pm = \frac{1}{a}(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$ ; верно, что  $\lambda_- \neq \lambda_+ \quad \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x^0, y^0)$ , так как  $d = ac - b^2 < 0$ .

Достаточно занулить одну из скобок:  $w_x + \lambda_\pm w_y = 0$ .

Подобные уравнения 1 порядка решаются при помощи первых интегралов:

$$a_1(x, y)w_x + a_2(x, y)w_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w(x, y) — \text{ПИ системы: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a_1} = dt = \frac{dy}{a_2}$$

В нашем случае  $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_\pm} \Leftrightarrow dy - \lambda_\pm dx = 0$  — первые интегралы этого уравнения дают решение исходного уравнения характеристик. Если  $a, b, c \in C^2$ , то  $\lambda_\pm$  и первые интегралы также принадлежат  $C^2$ .

Покажем невырожденность:

$$\begin{cases} \xi_x + \lambda_+\xi_y = 0, \\ \eta_x + \lambda_-\eta_y = 0. \end{cases}$$



$$|J(x^0, y^0)| = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda_+ \xi_y & \xi_y \\ -\lambda_- \eta_y & \eta_y \end{pmatrix} = \overbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}^{\substack{\neq 0 \text{ в силу} \\ \text{гиперболичности}}} \cdot \xi_y \eta_y \neq 0$$

(если  $\xi_y = 0$ , то  $\xi_x = 0 \Rightarrow \nabla \xi = 0$ )

Итак,  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  – диффеоморфизм класса  $C^2$ . Он зануляет  $\hat{a}$  и  $\hat{c}$ . Получается уравнение во второй канонической форме.

*Замечание.* От II канонической форме к I:

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\underbrace{\xi + \eta}_{\alpha}, \underbrace{\xi - \eta}_{\beta}), \quad \hat{u}_{\xi} = \tilde{u}_{\alpha} + \tilde{u}_{\beta}, \quad u_{\xi\eta} = \tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta}$$

Тогда наше уравнение:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} + \tilde{F}(\alpha, \beta, \tilde{u}, \nabla_{\alpha\beta} \tilde{u}) = 0 \text{ — I каноническая форма}$$

- б) Если  $a(x, y) \equiv c(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^0, y^0)$ , то  $b \neq 0$ , иначе уравнение в нуле функции  $b$  – не второго порядка.

То есть уравнение уже имеет II каноническую форму, преобразование в I – выше.

- в) Если  $a \neq 0$  или  $c \neq 0$ , но  $a(x^0, y^0) = c(x^0, y^0) = 0$ , то аналогично  $b(x^0, y^0) \neq 0$ .

Заменим  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$  и получим:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\xi^0, \eta^0) &= +2b(x^0, y^0) \neq 0 \\ \hat{c}(\xi^0, \eta^0) &= -2b(x^0, y^0) \end{aligned}$$

Это случай (а).

## Параболический случай

Пусть в точке и некоторой ее окрестности тип параболический, то есть  $ac - b^2 \equiv 0$ . Ни в одной точке  $a$  и  $c$  не равны нулю одновременно, поскольку иначе  $b = 0$  и это уравнение 1 порядка. Пусть для определённости  $a \neq 0$ . Уравнение характеристик:

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \Leftrightarrow (w_x + \lambda w_y)^2 = 0, \text{ где } \lambda = \frac{b}{a}$$

Находим решение  $w = \eta(x, y) \in C^2(U(x^0, y^0))$ :  $\nabla w(x, y) \neq 0$ .

$$\begin{cases} \xi = w & \text{— эту построили} \\ \eta = \eta(x, y) & \text{— эту выбираем произвольно, чтобы был диффеоморфизм} \end{cases}$$

доказательство того, что всегда можно выбрать, опущено.

Мы взяли  $\xi$  такое, что  $\hat{c} \equiv 0$ . Покажем, что и  $\hat{b} \equiv 0$ :

$$\hat{A} = JAJ^T \Rightarrow |\hat{A}| = |J|^2 \cdot |A| = |J|^2(ac - b^2) = 0 = \underbrace{\hat{a}\hat{c}}_{=0} - \hat{b}^2 \Rightarrow \hat{b} = 0$$

Пришли к

$$\hat{a}(\xi, \eta)\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi,\eta}\hat{u}) = 0,$$

где  $\hat{a} \neq 0$ , иначе 1 порядок, а обратная замена дает второй порядок.

## Эллиптический случай

$$d(x, y) = ac - b^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in U(x^0, y^0)$$

Во всех точках окрестности выполнено  $a \neq 0$  и  $c \neq 0$ , иначе было бы  $d = -b^2 \leq 0$ .  
Характеристическое уравнение:

$$[w_x + \lambda_+ w_y][w_x + \lambda_- w_y] = 0,$$

где  $\lambda_{\pm} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \mu \pm i\nu$ ;  $\mu, \nu \in C^2$ . При этом для функций  $\lambda_+, \lambda_-$  известно  $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$ .

Получилось два линейных ДУЧП первого порядка:

$$w_x \pm \lambda_{\pm} w_y = 0$$

Представим  $w = \xi \pm i\eta \Rightarrow (\xi \pm i\eta)_x + (\mu \pm i\nu)(\xi \pm i\eta)_y = 0$

$$\begin{cases} \text{Re : } \xi_x + \mu\xi_y - \nu\eta_y = 0 \\ \text{Im : } \eta_x + \nu\xi_y + \mu\eta_y = 0 \end{cases} \quad \text{Искомая замена} \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \in C^2,$$

Невырожденность:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-\mu\xi_y + \nu\eta_y) & \xi_y \\ (-\nu\xi_y - \mu\eta_y) & \eta_y \end{vmatrix} = \nu(\xi_y^2 + \eta_y^2) \neq 0, \text{ т.к.}$$

- $\nu \neq 0$
- если  $\eta_y = \xi_y = 0$ , то в силу уравнений на действительную и мнимую части  $\xi_x = \eta_x = 0 \Rightarrow \nabla w = 0$

$$aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{\hat{a}} - \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{\hat{c}} + \underbrace{2i(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)}_{2\hat{b}} = 0$$

Откуда  $\hat{a} = \hat{c}$ ,  $\hat{b} = 0$ , то есть получаем уравнение

$$\hat{u}_{\xi\xi} + \hat{u}_{\eta\eta} + \hat{F}(\xi, \eta, \hat{u}, \nabla_{\xi\eta}\hat{u}) = 0$$

## Формальный вид уравнения характеристик

$$a \, dy \, dy - 2b \, dy \, dx + c \, dx \, dx = 0$$

Оно так выглядит из  $(dy - \lambda_+ dx)(dy - \lambda_- dx) = 0$ , то есть

$$(dy)^2 - \underbrace{(\lambda_+ + \lambda_-)}_{2b/a} \, dx \, dy + \underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{c/a} (dx)^2 = 0$$

**Билет 2. Постановка задачи Коши для уравнения 2-го порядка с частными производными в  $\mathbb{R}^n$  с линейной старшей частью. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.**

В области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  задано уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1)$$

и поверхность  $S$ :  $\omega(x) = \omega(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $\omega \in C^2(\Omega)$  и  $\text{grad}(\omega) \neq 0$  на  $\Omega$  (нет особых точек). На поверхности задано гладкое некасательное поле  $\vec{\nu} = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ ,  $\langle \vec{\nu}, \vec{n} \rangle \neq 0$ .

**Определение 2.1** (Задача Коши). В  $U(x^0) \subset \Omega$ ,  $x^0 \in S$ , найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет двум условиям:

1.  $u(x)|_{S \cap U(x^0)} = u_0(x)$
2.  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \Big|_{S \cap U(x^0)} = u_1(x)$  – выводящая производная

Здесь введена производная по направлению:  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = (\vec{\nu}, \nabla u) = \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$

Может не быть непрерывной зависимости от начальных данных. Функции  $u_0, u_1$  произвольно брать, вообще говоря, нельзя.

Далее определим характеристическую поверхность.

Пусть  $S$  – гиперплоскость  $x_n = 0$ . Нормаль  $\vec{n} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ ,  
 $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_n} = u_1(x_1, \dots, x_{n-1})$

Мы знаем значения функции на гиперплоскости.

Знаем градиент:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array} \right\} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \right\} = u_1$$

Мы знаем и вторые производные: берём указанные сверху производные и дифференцируем вдоль поверхности, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Не нашли только  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}$ . До этого мы вообще еще не использовали уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} [a_{nj} u_{x_n x_j} + a_{jn} u_{x_j x_n}] + \underbrace{a_{nn} u_{x_n x_n}}_{\text{только это слагаемое еще не определено}} + F(x, u, \nabla u) = 0$$

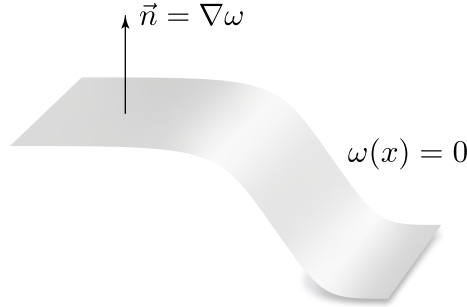
Если  $a_{nn}(x) = 0$  на нашей гиперплоскости, то эту гиперплоскость назовём **характеристической**. На характеристической гиперплоскости полученное уравнение задаёт функциональную связь  $u_0$  и  $u_1$  – эта связь называется **условием совместности**.

Теперь переходим к произвольной поверхности: заменим координаты так, чтобы локально поверхность была гиперплоскостью:

$$y = y(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_n = \omega(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  после преобразования  $\omega = 0 \Leftrightarrow y_n = 0$ .

Найдём это преобразование: возьмем  $\vec{n} = \nabla \omega(x_0)$ .



Дополним  $\vec{n}$  до базиса – получим  $\langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{n} \rangle$ . Ортогонализуем – получим  $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{n} \rangle$ . Возьмем такое преобразование:

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{cases} y_1 = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_{n-1} \\ y_n = \omega(\vec{x}) \end{cases}$$

Проверим, что якобиан не равен 0:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (e_{n-1}^T) & \dots & (e_{n-1}^T) \\ (\nabla \omega(x)^T) & \dots & (\nabla \omega(x)^T) \end{vmatrix} \stackrel{x=x_0}{=} \begin{vmatrix} (e_1^T) & \dots & (e_1^T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (e_n^T) & \dots & (e_n^T) \\ (n^T) & \dots & (n^T) \end{vmatrix}$$

Строки матрицы – компоненты ОНБ  $\Rightarrow J(x_0) \neq 0$ .

Из соображений непрерывности  $J \neq 0$  также в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Значит, это диффеоморфизм класса  $C^2$ .

В новых переменных:  $\sum_{k,l=1}^n \hat{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \hat{F}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0$

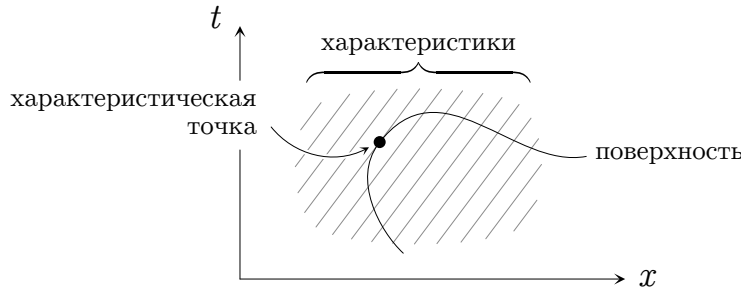
Условие характеристичности:  $0 = \hat{a}_{nn} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[x(y)] \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j}$ , где  $y_n(x) \equiv \omega(x)$

**Определение 2.2** (Характеристическая точка). Пусть дважды гладкая поверхность  $S$  задана уравнением  $\omega(x) = 0$ . ( $\omega \in C^2$ ;  $\nabla \omega \neq 0$ )

Тогда точка  $x_0 \in S$  называется характеристической, если в этой точке  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} = 0$

**Определение 2.3** (Характеристическая поверхность). Дважды гладкая поверхность называется **характеристикой**, если все её точки характеристические.

Заметим, что если поверхность  $\omega(x) = 0$  – характеристическая, то все поверхности  $\omega(x) = \text{const}$  тоже характеристические. Поэтому характеристики образуют семейства.



**Пример 2.1.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .  $S$  – прямая  $x = y$ ,  $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{u_x}{\sqrt{2}} + \frac{u_y}{\sqrt{2}} = u_1$

Производная  $\frac{du_1}{dl} = \left(\vec{l}, \nabla \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y\right] = 0$ .

Значит, любую функцию на  $S$  задать нельзя; прямая  $x = y$  – характеристика.

**Пример 2.2.**  $u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  (волновое уравнение).

Характеристическое уравнение:  $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 (\text{grad } \omega)^2 = 0$

Этому уравнению удовлетворяет  $\omega(t, x) = \underbrace{a^2 t^2 - \vec{x}^2}_{\text{конус}} = 0$ .

**Пример 2.3.**  $u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x)$  (уравнение теплопроводности).

Характеристическое уравнение:  $-a^2 [\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$

Так как  $\nabla \omega \neq 0$ , мы требуем  $\omega_t \neq 0$ .

Подходит  $\omega(t, x) = t - C = 0 \Rightarrow$  характеристики — это гиперплоскости  $t = C$

**Пример 2.4.**  $\Delta u(x) = f(x)$  (ур-е Пуассона),  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

Характеристическое уравнение:  $a^2[\omega_{x_1}^2 + \dots + \omega_{x_n}^2] = 0 \Rightarrow \omega_{x_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$ .

А мы требовали  $\nabla \omega \neq 0 \Rightarrow$  у уравнения эллиптического типа нет характеристик.

### Теорема Ковалевской

Функция  $u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$  называется **вещественно-аналитической** в  $\vec{x}_0$ , если в некоторой  $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$  она представима в виде

$$u(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| > 0} u_\alpha (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha,$$

где  $\alpha$  – мультииндекс,  $u_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$

**Теорема 2.1** (Ковалевской). Пусть в уравнении  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0$ :

- все  $a_{ij}(\vec{x})$  вещественно-аналитические в  $\vec{x}_0$
- $F(\vec{x}, u, \nabla u)$  – вещественно-аналитическая в  $(\vec{x}_0, u_0(\vec{x}_0), \nabla u(\vec{x}_0))$  соответственно
- $\omega(\vec{x})$  вещественно-аналитическая в  $\vec{x}_0$
- $\vec{x}_0$  – не характеристическая точка поверхности
- $u_0, u_1$  – вещественно-аналитические в  $\vec{x}_0$ .

Тогда:

- $\exists U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ : в ней  $\exists$  вещественно-аналитическое решение задачи Коши
- оно единственно в классе вещественно-аналитических функций.

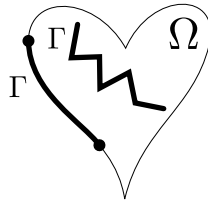
### Понятие о корректности

Рассмотрим абстрактную дифференциальную задачу:

$$\begin{cases} L u(\vec{x}) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ B_j u(\vec{x}) = g_j(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma \subset \bar{\Omega}, \quad j = 1 \dots m \end{cases} \quad (*)$$

$L = L(\vec{x}, \partial)$  – линейный дифференциальный оператор порядка  $p$

$B_j = B_j(\vec{x}, \partial)$  – конечное семейство линейных дифференциальных операторов на  $\Gamma \subset \bar{\Omega}$



**Определение 2.4.** Пусть  $F(\Omega)$  и  $U(\Omega)$  – линейные нормированные пространства функций (ЛНП) на  $\Omega$ ,  $G_1(\Gamma), \dots, G_m(\Gamma)$  – ЛНП на  $\Gamma$ .

Тогда если  $\forall f(\vec{x}) \in F(\Omega), \forall g_j(\vec{x}) \in G_j(\Gamma)$  решение краевой задачи (\*) существует, единственно в  $U(\Omega)$  и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{U(\Omega)} \leq C\|f\|_{F(\Omega)} + \sum_{j=1}^m c_j \|g_j\|_{G_j(\Gamma)} \quad (**)$$

**то задача корректна по отношению к выбранному набору пространств.**

*Замечание.* Часто говорят, что решение корректной задачи должно непрерывно зависеть от начальных данных. Но в определении лектора, которое приведено выше, вместо непрерывности по начальным данным требуется ограниченность. Так тоже правильно, потому что задача линейна, а линейные операторы непрерывны тогда и только тогда, когда они ограничены.

**Пример 2.5** (Адамара). Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = u_0(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \text{ — равномерно стремится к } 0 \text{ вместе со своими производными} \\ u_y|_{y=0} = u_1(x) \equiv 0 \end{cases}$$

При  $u_0(x) \equiv 0$  решением будет  $u(x, y) \equiv 0$ .

Если задача корректна, то при  $n \rightarrow \infty$  решения должны (равномерно?) стремиться к 0.

Функции  $u_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{ch} ny$  — решения.

Но  $u_n(0, y^*) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{ch} ny^* > \frac{1}{2} e^{-\sqrt{n}} e^{ny^*} \rightarrow \infty$

Неравенство (\*\*) не выполнено.

**Билет 3. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения от начальных данных. Существование и единственность классического решения. Корректность постановки задачи.**

• Задача: 
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad -l < x < l$$

Что понимать под решением задачи?

**Определение 3.1. Классическое решение** – функция класса  $C^2$ , которая в точках указанной области удовлетворяет уравнению и заданным соотношениям.

• **Характеристическое уравнение:**  $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + at = C_1 \\ x - at = C_2 \end{cases}$$

В новых координатах  $\hat{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \hat{u} = f(\xi) + g(\eta)$ .

Возвращаясь обратно, получим  $u(t, x) = f(x + at) + g(x - at)$ .

• Решим ЗК (поверхности нигде не касаются характеристик – задача должна быть корректной):

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), \quad -l < x < l$$

$$u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), \quad -l < x < l \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{-l}^x u_1(z) dz + C = \frac{1}{a} V_1(x)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}V_1(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}V_1(x) \end{cases} \quad (-l < x < l) \quad (*)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}u_0(x + at) + \frac{1}{2a}V_1(x + at) + \frac{1}{2}u_0(x - at) - \frac{1}{2a}V_1(x - at) =$$

$$= \boxed{\frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(x) dx} - \text{формула Даламбера}$$

Решение определяется единственным образом.

Если требуется определить максимальную область, где можно написать решение, то обратимся к формулам (\*). Функции  $u_0$  и  $V$  определены лишь на  $(-l; l) \Rightarrow$  искомая область:

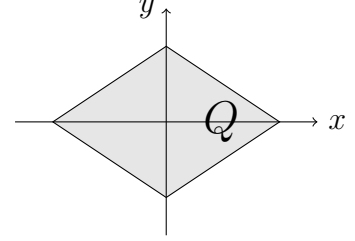


$$\begin{cases} -l < x + at < l \\ -l < x - at < l \end{cases} \quad - \text{характеристический четырехугольник } Q.$$

Нами доказана теорема:

**Теорема 3.1.** Пусть  $\begin{cases} u_0(x) \in C^2(-l; l) \\ u_1(x) \in C^1(-l; l) \end{cases}$ . Тогда ЗК имеет в  $Q$

единственное решение  $u(t, x) \in C^2(Q)$  – классическое. Оно дается формулой Даламбера.



Корректность задачи для уравнения малых колебаний струны:

- нами проверены существование и единственность классического решения.
- покажем непрерывность решения по входным данным  $u_0$  и  $u_1$ .  
Берем две задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ u|_{t=0} = u_0(x), & |x| < l \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & |x| < l \end{cases}$$

Пусть  $|u_0 - u_0| < \delta_0$ ,  $|u_1 - u_1| < \delta_1 \quad \forall x: |x| < l$ . Введем  $\begin{cases} v_0 = u_0 - u_0 \\ v_1 = u_1 - u_1 \\ v = u - u \end{cases}$

Тогда задача для  $v$ :  $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & (t, x) \in Q \\ v|_{t=0} = v_0(x), & |x| < l, |v_0| < \delta_0 \\ v_t|_{t=0} = v_1(x), & |x| < l, |v_1| < \delta_1 \end{cases}$

Согласно формуле Даламбера,

$$|v(t, x)| = \left| \frac{v_0(x + at) + v_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_1(y) dy \right| \leq \delta_0 + \delta_1 t \quad \forall (t, x) \in Q$$

- Если  $l$  конечно, то  $t \leq \frac{l}{a}$  из вида четырёхугольника  $Q$ . Устремляя  $\delta_0, \delta_1 \rightarrow 0$ , получим  $|v| \rightarrow 0$ .
- Если  $l = \infty$ : в любой конечной полосе  $t \leq T < \infty$  требуемое верно.  
Так замечаем всю плоскость.

**Билет 4. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закрепленным концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения.**

**Формулировка**

Задача (называется *начально-краевой* или *смешанной*)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & \text{по сравнению с задачей Коши это дополнительное граничное условие} \end{cases} \quad (2)$$

*Замечание.* Физический смысл: смотрим, как волна отражается от закрепленного конца

Предполагаем, что

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2[0, +\infty) \\ u_1(x) \in C^1[0, +\infty) \end{cases}$$

**Общее решение**

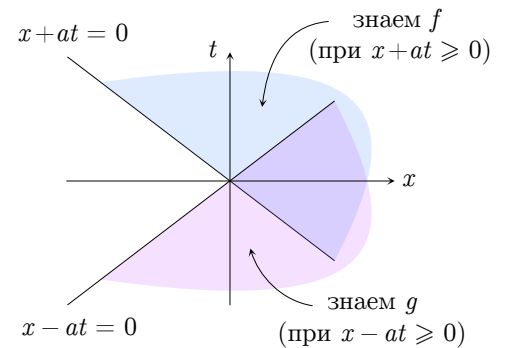
$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x + at) + g(x - at) \\ \begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Если ввести обозначение  $v_1 = \int_0^x u_1(y) dy + C$ , то при  $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}v_1(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}v_1(x) \end{aligned}$$

Граничные условия нужны для определения  $u$  в  $(x \geq 0) \cap (t \geq 0)$  (в смысле пересечения областей). Их не обязательно ставить на  $x = 0$ , можно на  $x + \alpha t = 0$ ,  $-a < \alpha < a$ , то есть там, где известна только одна из функций, а не обе.

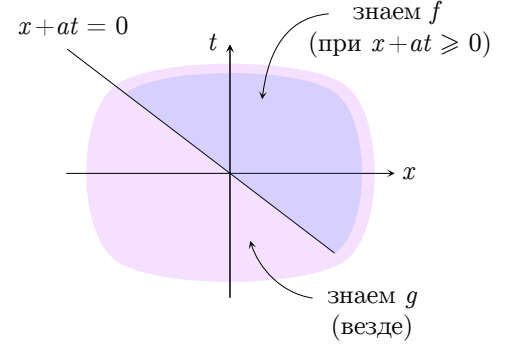
$$u|_{x=0} = f(at) + g(-at) = 0, \quad t \geq 0$$



Введем  $\xi = -at, \xi \leq 0$ , тогда  $g(\xi) = -f(-\xi)$  и суммарно:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(\xi) - \frac{1}{2a}v_1(\xi), & \xi \geq 0 \\ -\frac{1}{2}u_0(-\xi) - \frac{1}{2a}v_1(-\xi), & \xi \leq 0 \end{cases}$$

Теперь  $g$  известна везде, решение найдено при  $x + at > 0$ , то есть даже в большей области, чем мы хотели.



### Условия согласования

Чтобы  $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ , решения необходимо «сшить»

$$\begin{aligned} g(+0) &= g(-0) \\ g'(+0) &= g'(-0) \\ g''(+0) &= g''(-0) \end{aligned}$$

Распишем эти условия:

$$\begin{aligned} g(+0) = g(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} = -\frac{1}{2}u_0(0) - \cancel{\frac{1}{2a}v_1(0)} &\Rightarrow u_0(0) = 0 \\ g'(+0) = g'(-0) &\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}u'_0(0)} - \frac{1}{2a}u_1(0) = \cancel{\frac{1}{2}u'_0(0)} + \frac{1}{2a}u_1(0) &\Rightarrow u_1(0) = 0 \\ g''(+0) = g''(-0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}u''_0(0) - \frac{1}{2a}u'_1(0) = -\frac{1}{2}u''_0(0) - \frac{1}{2a}u'_1(0) &\Rightarrow u''_0(0) = 0 \end{aligned}$$

**Определение 4.1** (условия согласования). Эти условия называются условиями согласования (начальных и граничных условий)

При их выполнении решение будет классическим. Если  $u_0(0) \neq 0$ , то даже обобщенного решения не будет.

### Метод продолжений

**Теорема 4.1.** Пусть в смешанной задаче 2 функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  таковы, что

- Выполнено условие гладкости:  $u_0(x) \in C^2[0, +\infty)$ ,  $u_1(x) \in C^1[0, +\infty)$
- Выполнено условие согласования:  $u_0(0) = u_1(0) = u''_0(0) = 0$

Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение  $u(t, x) \in C^2(t \geq 0, x \geq 0)$ :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \geq at\} \\ \frac{u_0(at + x) - u_0(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} u_1(y) dy, & \{x \geq -at, x \leq at\} \end{cases} \quad (3)$$

*Доказательство.* Используем метод продолжений. Для задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \geq 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Введем

$$\hat{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \hat{u}_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \geq 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} - a^2 \hat{u}_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^1 \\ \hat{u}_t|_{t=0} = \hat{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad - \text{свели к задаче Коши}$$

Решение дается формулой Даламбера:

$$\hat{u}(t, x) = \frac{\hat{u}_0(x + at) + \hat{u}_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy$$

Покажем нечетность по  $x$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, -x) &= \frac{\hat{u}_0(-x + at) + \hat{u}_0(-x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \hat{u}_1(y) dy \\ &= \frac{\hat{u}_0(x - at) + \hat{u}_0(x + at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \hat{u}_1(y) dy = -\hat{u}(t, x) \end{aligned}$$

$$\hat{u}(t, 0) = \underbrace{\frac{\hat{u}_0(-at) + \hat{u}_0(at)}{2}}_{=0} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \hat{u}_1(y) dy = 0$$

□

**Билет 5. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ . Существование классического решения этой задачи.**

**Теорема 5.1** (Из курса мат. анализа). Пусть  $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_y \subset \mathbb{R}^m$  – ограниченные области,  $f(x, y): \bar{\Omega}_x \times \bar{\Omega}_y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\bar{\Omega}_x \times \bar{\Omega}_y)$ . Тогда  $J(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dx \in C(\bar{\Omega}_y)$

Если к тому же  $\frac{\partial f}{\partial y_k} \in C(\bar{\Omega}_x \times \bar{\Omega}_y)$ , то  $J(y)$  имеет непрерывную на  $\bar{\Omega}_y$  частную производную  $\frac{\partial J(y)}{\partial y_k}$ , которая равна  $\int_{\Omega_x} \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y) dx$ .

**Лемма 5.2.** Пусть  $g(\tau, \xi) \in C_{\tau, \xi}^{0, p} \{ \tau \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3 \}$ . Введём  $u_g(t, x, \tau)$ :

$$u_g(t, x, \tau) := \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} g(\tau, \xi) dS_\xi, \quad a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

1.  $u_g \in C_{t, x, \tau}^{p, p, 0} \{ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0 \}$
2.  $\lim_{t \rightarrow +0} u_g(t, x, \tau) = 0$
3. При  $p \geq 1$   $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = g(\tau, x)$

(Под  $C_{t, x, \tau}^{p, p, 0}$  подразумевается, что  $D_{t, x}^\alpha u_g(t, x, \tau) \in C \forall \alpha: |\alpha| \leq p$ )<sup>1</sup>

*Доказательство.* Докажем отдельно все три утверждения.

1. Сведем интеграл к интегралу по единичной сфере с центром в нуле с помощью такой замены:

$$\eta = \frac{\xi - x}{at} \Rightarrow \xi = x + at\eta, \quad |\vec{\eta}| = 1.$$

В таком случае элемент площади  $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$ . Во введенном выше интеграле получим

$$u_g(t, x, \tau) = \frac{(at)^2}{4\pi a^2 t} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta = t J_g(t, x, \tau),$$

$$\text{где } J_g(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(x + at\eta, \tau) dS_\eta$$

---

<sup>1</sup>Если расписать мультииндексы:  $\partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3} u_g(t, x, \tau) \in C \forall \alpha_i: \sum_{i=0}^3 \alpha_i \leq p$

Теперь интеграл уже по фиксированному множеству. Все выкладки справедливы при  $t > 0$ . Функция

$$\tilde{g}(t, x, \eta, \tau) = g(x + at\eta, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, |\eta| = 1, \tau \geq 0\}.$$

Тогда по теореме из начала билета  $J_g(t, x, \tau) \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \tau \geq 0\}$ .

Аналогично будет для производных в силу второй части той же теоремы и наличия соответствующих производных у функции  $g$ .

2.  $\lim_{t \rightarrow +0} U_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t J_g(t, x, \tau) = \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) = 0$  (последний предел конечен в силу непрерывности).

Можно записать

$$U_g(t, x, \tau) = \begin{cases} u_g(t, x, \tau), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \in C(\overline{\Omega}),$$

где последнее включение означает непрерывные в области и непрерывно продолжимые на границу функции.

3. При  $p \geq 1$  запишем следующее:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} u_g(t, x, \tau) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} [t J_g(t, x, \tau)] = \lim_{t \rightarrow +0} J_g(t, x, \tau) + \lim_{t \rightarrow +0} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_g(t, x, \tau) = \\ &= J_g(0, x, \tau) = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} g(\tau, x + at\eta) dS_\eta \Big|_{t=0} = g(\tau, x) \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} dS_\eta = g(\tau, x). \end{aligned}$$

□

Перейдем к решению задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad (4)$$

**Теорема 5.3** (Формула Пуассона-Кирхгофа). Пусть  $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

является классическим решением задачи (4)

*Доказательство.* В силу леммы имеем  $u|_{t=0} = 0$ ;  $u_t|_{t=0} = u_1$ .

Т.к.  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $u \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ , то сделаем замену переменной:

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta.$$

Осталось только проверить, что  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \Delta_\xi u_1(x + at\eta) dS_\eta = \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi.$$

При  $t > 0$  (использовано  $\vec{n} = \frac{\xi - x}{|\xi - x|} = \frac{\xi - x}{at} = \eta$ ):

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} u_1(x + at\eta) dS_\eta + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(x + at\eta) \eta_k \cdot dS_\eta = \\ &= \frac{u(x, t)}{t} + \frac{ta}{4\pi} \oint_{|\eta|=1} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k}(\xi) n_k(\xi) \cdot dS_\eta = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}(\xi) \cdot dS_\xi = \frac{u(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} I \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \iiint_{|\xi-x|<at} \operatorname{div}(\nabla u_1) d\xi = \oint_{|\xi-x|=at} (\nabla u_1, \vec{n}) dS_\xi = \oint_{|\xi-x|=at} \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} dS_\xi = I$$

Тогда получим

$$u_t = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint_{|\xi-x|<at} \Delta_\xi u_1(\xi) d\xi = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \left[ \oint_{|\xi-x|=\rho} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi \right] d\rho = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right] = \frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{u}{t \cdot t} + \frac{I}{4\pi at^2} - \frac{u}{t^2} - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{I_t}{4\pi at} = \\ &= \frac{I_t}{4\pi at} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \varphi(\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi at} a \varphi(at) = \frac{1}{4\pi t} \oint_{|\xi-x|=at} \Delta_\xi u_1(\xi) dS_\xi. \end{aligned}$$

Итак,  $u(x, t)$  - классическое решение. □

Рассмотрим

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3) \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Введем  $v(t, x)$ :

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

Эту задачу мы уже решили. Так как  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ , имеем  $v \in C^3\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ .

**Утверждение 5.4.**  $u(x, t) \equiv v_t(x, t) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$  дает решение задачи (5).

*Доказательство.*

$$1. \quad u_{tt} - a^2 \Delta u = \partial_t(v_{tt} - a^2 \Delta v) = \partial_t 0 = 0$$

$$2. \quad u|_{t=0} = v_t|_{t=0} = u_0(x)$$

$$3. \quad u_t|_{t=0} = v_{tt}|_{t=0} = a^2 \Delta v|_{t=0} = 0 \text{ (на гиперплоскости } t = 0: v|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{t=0} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \Big|_{t=0} \equiv 0. \text{ При этом } v_t \text{ может быть ненулевой.)}$$

□

Мы доказали следующую теорему:

**Теорема 5.5.** Функция  $u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi \right], \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{где } u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3),$

является классическим решением задачи (5).



**Билет 6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ . Метод Дюамеля. Принцип Гюйгенса.**

**Формулировка задачи**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \text{считаем, что } f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\} \quad (6)$$

**Метод Дюамеля**

Сведем задачу к задаче Коши для однородного волнового уравнения. Рассмотрим однопараметрическое семейство задач:

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x w(t, x, \tau) = 0 & t > \tau; x \in \mathbb{R}^3 \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases} \quad \tau \geq 0 \quad (7)$$

Решение задач семейства получаем по формуле Пуассона-Кирхгофа:

$$w(t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \iint_{|\xi - x| = a(t - \tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \in C_{t,x,\tau}^{2,2,0} \{t - \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

(Под  $C_{t,x,\tau}^{2,2,0}$  подразумевается, что  $D_{t,x}^\alpha w(t, x, \tau) \in C \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq 2$ )

**Утверждение 6.1.**

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \tau) d\tau \text{ — классическое решение исходной задачи.}$$

*Доказательство.*

- $u(t, x) \in C^2 \{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$
- $u|_{t=0} = 0$
- Вычислим  $u_t|_{t=0}$

Интегралы, в которых и пределы, и подынтегральная функция зависят от параметра, дифференцируются по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = f(t, b(t)) \cdot b' - f(t, a(t)) \cdot a' + \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(t, x) dx$$

В нашем случае  $a = 0$ ,  $b = t$ ,  $b' = 1$ . Поэтому

$$u_t|_{t=0} = \left( \underbrace{w(t, x, \tau)|_{\tau=t}}_{= 0 \text{ из нач. усл. в (7)}} + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \right) \Big|_{t=0} = \int_0^0 \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = 0$$

- $\Delta_x u = \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = w_t(t, x, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t w_{tt}(t, x, \tau) d\tau = f(\tau, x)|_{\tau=t} + a^2 \int_0^t \Delta_x w(t, x, \tau) d\tau \\ &= f(t, x) + a^2 \Delta_x u \end{aligned}$$

Значит, рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению. □

Мы доказали следующую теорему:

**Теорема 6.2.** Пусть в задаче (6) функция  $f(t, x)$  такова, что  $D_x^\alpha f \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ . Тогда функция

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \left[ \oint_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi \right] d\tau \quad (8)$$

является классическим решением, причем

$$D_{t,x}^\alpha u \in C \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Суть метода Дюамеля:  $f(t, x)$  — это начальные данные в каждый момент времени.

### Запаздывающий потенциал

Преобразуем формулу (8):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi a^2(t - \tau)} \oint_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\tau, \xi) dS_\xi &= \left[ \begin{array}{l} \rho = a(t - \tau) \\ \tau = t - \rho/a \\ d\tau = -d\rho/a \end{array} \right] = - \int_{at}^0 \frac{1}{4\pi a\rho} \frac{d\rho}{a} \oint_{|\xi-x|=\rho} f\left(t - \frac{\rho}{a}, \xi\right) dS_\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} d\rho \oint_{|\xi-x|=\rho} \frac{f\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dS_\xi = \boxed{\frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} d\xi} \end{aligned}$$

Выражение в рамке называется *запаздывающим потенциалом*.

## Общая задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(t, x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

**Теорема 6.3** (формула Кирхгофа). Пусть в общей задаче Коши

$$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3) \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Тогда выражение

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi)}{|\xi-x|} d\xi$$

является классическим решением общей задачи Коши;  $u(t, x) \in C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3\}$

## Принцип Гюйгенса

**Утверждение 6.4** (Принцип Гюйгенса). Возмущение, локализованное в пространстве (трёхмерном), приводит к действию, локализованному во времени.

Требуется, чтобы источники отсутствовали, т.е.  $f \equiv 0$ , а носители функций  $u_0$  и  $u_1$  были ограничены, откуда

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 = M \text{ — компакт}$$

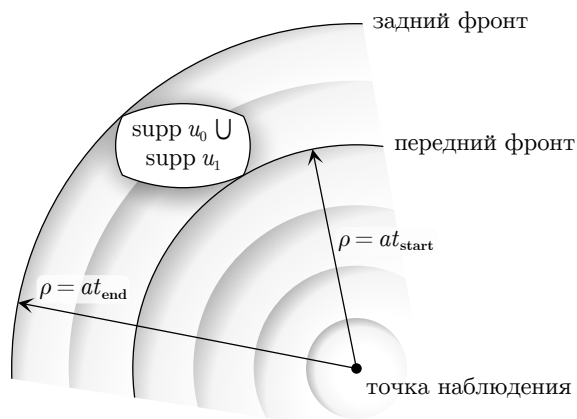
Фиксируется произвольная точка  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ .

По формуле Кирхгофа функция  $u(t, x_0)$  может быть ненулевой только внутри отрезка времени

$$\text{от } t_{\text{start}} = \frac{1}{a} \cdot \inf_{y \in M} |y - x_0| \quad \text{до } t_{\text{end}} = \frac{1}{a} \cdot \sup_{y \in M} |y - x_0|$$

(иначе под интегралами тождественный нуль).

У такого конечного возмущения есть передний и задний фронт:



Значение  $u(t, x_0) \sim$  интеграл по сфере радиусом  $|x_0 - \xi| = \rho = at$

**Билет 7. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^2$ . Метод спуска. Диффузия волн.**

Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), & t > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (9)$$

Используем **метод спуска**: перейдем в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = f(t, x_1, x_2) \\ u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для этой задачи решение мы уже знаем. Покажем, что оно не зависит от третьей переменной.

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2, x_3) = & \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_0(\xi_1, \xi_2) dS & + \underbrace{\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{|\xi-x|=at} u_1(\xi_1, \xi_2) dS}_{V(t,x)} + \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\xi-x|<at} \frac{f(t - \frac{|\xi-x|}{a}, \xi)}{|\xi-x|} d\xi \end{aligned}$$

Покажем, например, что функция  $V(t, x)$  не зависит от  $x_3$ . Сфера, по которой ведется интегрирование, разбивается на две полусферы  $S_+$  и  $S_-$ , которые задаются уравнениями

$$\xi_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2} = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}$$

Интегралы по полусферам равны, поэтому  $V(t, x) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \iint_{S^+} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$

Из матанализа известно, что если поверхность  $S$  задана в виде графика некоторой функции  $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$ ,  $(\xi_1, \xi_2) \in D$ , то поверхностный интеграл можно свести к двойному по формуле

$$\iint_S u(\xi) dS = \iint_D u(\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} d\xi_1 d\xi_2$$

В нашем случае

$$\sqrt{1 + (F'_{\xi_1})^2 + (F'_{\xi_2})^2} = \sqrt{1 + \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}$$

Получили, что

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi'-x'|<at} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi' - x'|^2}} d\xi_1 d\xi_2$$

не зависит от третьей переменной.

Аналогично для двух других слагаемых, т. к. во всех трех под знаками интегралов или производных можно выделить интеграл вида  $\oint_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi_1, \xi_2) dS_\xi$ , который, как показано выше, от  $x_3$  не зависит. Доказанное можно сформулировать как теорему:

**Теорема 7.1.** Пусть в задаче Коши (9):  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ,  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \in C_{t,x}^{0,2} \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$  Тогда функция ( $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ )

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi-x|^2}} + \\ \int_0^t \left[ \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\tau, \xi) d\xi}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \right] d\tau$$

принадлежит  $C^2 \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$  и является классическим решением задачи Коши (9).

**Определение 7.1.** *Диффузия волн* – это отсутствие принципа Гюйгенса. В  $\mathbb{R}^2$  его нет. Есть эффект последействия: передний фронт есть, а заднего нет, так как интегралы берутся не по контурам, а по всей внутренней области.

Можно привести более наглядное доказательство. Пусть носители функций  $u_0, u_1$  содержатся в некотором компакте  $M$ . Тогда, «погрузив»  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , получим, что носитель начального возмущения – неограниченный цилиндр  $\{(x_1, x_2, x_3): (x_1, x_2) \in M, x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Следовательно, начальное возмущение не ограничено в пространстве, и возмущение в любой точке не ограничено во времени (у волн, созданных цилиндром, отсутствует задний фронт)

**Билет 8. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая  $\mathbb{R}^2$ ). Метод интеграла энергии.**

**Теорема 8.1.** *Классическое решение ЗК для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^n$  единственно.*

*Доказательство (для случая  $\mathbb{R}^2$ ).* Пусть  $u_1$  и  $u_2$  - классические решения.

Тогда функция  $v(x, y, t) = u_1 - u_2$  удовлетворяет полностью однородной задаче:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Наша цель - показать, что  $v \equiv 0$  при  $t \geq 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Возьмем точку  $(x_0, y_0, t_0)$ ,  $t_0 > 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Выпустим из этой точки характеристическую поверхность — конус:

$$w(t, x) = a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad t < t_0$$

Возьмем его часть — усечённый конус  $V_T$  с нижним основанием  $\Sigma_0$ , верхним основанием  $\Sigma_T$  и боковой поверхностью  $\Gamma_T$ :



Вектор (внешней) нормали  $\vec{n}$  к этому усеченному конусу:

- на  $\Sigma_T$  :  $\vec{n} = (1 \ 0 \ 0)^T$
- на  $\Sigma_0$  :  $\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)^T$
- на  $\Gamma_T$  :  $\vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{w_t^2 + w_x^2 + w_y^2}} \begin{pmatrix} w_t \\ w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_t \\ n_x \\ n_y \end{pmatrix}$

В силу уравнения характеристик  $w_t^2 - a^2 w_x^2 - a^2 w_y^2 = 0$  (задаёт конус) имеем

$$n_t^2 = a^2(n_x^2 + n_y^2)$$

$$n_t^2 + n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_t^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Функция  $\psi = v_t(v_{tt} - a^2v_{xx} - a^2v_{yy})$  тождественно равна нулю.

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
0 &= v_tv_{tt} - a^2v_tv_{xx} - a^2v_tv_{yy} = \\
&= \frac{1}{2}(v_t^2)_t + a^2v_xv_{xt} - (a^2v_tv_x)_x + a^2v_yv_{yt} - (a^2v_tv_y)_y = \\
&= \frac{1}{2}(v_t^2)_t - (av_tv_x)_x - (av_tv_y)_y + \left(\frac{1}{2}a^2v_x^2\right)_t + \left(\frac{1}{2}a^2v_y^2\right)_t = \\
&= \left(\frac{v_t^2 + a^2v_x^2 + a^2v_y^2}{2}\right)_t + (-a^2v_tv_x)_x + (-a^2v_tv_y)_y = \\
&= F_t^{(t)} + F_x^{(x)} + F_y^{(y)} = \operatorname{div} \vec{F},
\end{aligned}$$

где введено поле  $\vec{F}$ .

Проинтегрируем полученную дивергенцию по объему усеченного конуса:

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_{V_T} \operatorname{div} \vec{F} = \oint_{\partial V_T} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma_T} \frac{v_t^2 + a^2v_x^2 + a^2v_y^2}{2} dS - \iint_{\Sigma_0} \frac{v_t^2 + a^2v_x^2 + a^2v_y^2}{2} dS + \\
&\quad + \frac{1}{2} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2v_x^2 + a^2v_y^2)n_t - 2a^2v_tv_xn_x - 2a^2v_tv_yn_y) dS = E(\Sigma_T) - E(\Sigma_0) + E(\Gamma_T)
\end{aligned}$$

В силу условий  $v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0$  имеем  $E(\Sigma_0) = 0$  (под интегралом тождественный ноль).

Тогда  $E(\Sigma_T) + E(\Gamma_T) = 0$ . Кроме того,  $E(\Sigma_T) \geq 0$  (под интегралом сумма квадратов).

Покажем, что и  $E(\Gamma_T) \geq 0$ : разделим и домножим её на  $n_t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} ((v_t^2 + a^2v_x^2 + a^2v_y^2)n_t^2 - 2a^2v_tv_xn_tn_x - 2a^2v_tv_yn_tn_y) dS = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \iint_{\Gamma_T} \left( v_t^2 \overbrace{a^2(n_x^2 + n_y^2)}^{= n_t^2} + a^2v_x^2n_t^2 + a^2v_y^2n_t^2 - 2a^2v_tv_xn_tn_x - 2a^2v_tv_yn_tn_y \right) dS \\
&= \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + 1} \iint_{\Gamma_T} ((v_tn_x - v_xn_t)^2 + (v_tn_y - v_yn_t)^2) dS \geq 0
\end{aligned}$$

Значит,  $E(\Sigma_0) = E(\Sigma_T) = E(\Gamma_T) \equiv 0$ . Из  $E(\Sigma_T) \equiv 0$  получаем:

$$v_t \equiv 0, v_x \equiv 0, v_y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{const} = v|_{t=0} = 0$$

Это верно всюду внутри усеченного конуса. Заметая такими конусами всё пространство, получим, что  $v \equiv 0$ .  $\square$

**Билет 9. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в  $\mathbb{R}^1$ . Фундаментальное решение. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции.**

$$\text{Задача: } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

### Наводящие соображения

На [консультации](#) 2021 года лектор сказал, что эту часть можно не учить. Поэтому можете сразу перейти к [формальному доказательству формулы Пуассона](#).

Итак, пусть для начала:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \tau = \alpha t, & \alpha > 0, \\ \xi = \beta x, & \beta > 0. \end{cases}$$

Пусть  $u(t, x)$  - решение задачи. Введём  $v(\tau, \xi) = u\left(\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\xi}{\beta}\right)$ . Тогда

$$1. \quad v|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & \frac{\xi}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \xi \geq 0 \\ 0, & \frac{\xi}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \xi < 0 \end{cases}$$

$$2. \quad v_\tau = \frac{1}{\alpha} u_t, \quad v_\xi = \frac{1}{\beta} u_x, \quad v_{\xi\xi} = \frac{1}{\beta^2} u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \alpha v_\tau = a^2 \beta^2 v_{\xi\xi}$$

Функция  $v$  в общем случае будет решением другой задачи Коши, но при  $\alpha = \beta^2$  — той же самой задачи Коши. Значит, решение не единственно: если  $u(t, x)$  — решение, то  $\forall \beta > 0$  функция  $v(t, x) = u\left(\frac{t}{\beta^2}, \frac{x}{\beta}\right)$  — тоже решение.

**Определение 9.1.** Множество преобразований  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$  — *однопараметрическая группа преобразований*, если:

- Это множество замкнуто относительно операции композиции:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{D} \quad \exists! \gamma \in \mathcal{D}: \quad u_\alpha \circ u_\beta = u_\gamma$$

- Оно содержит нейтральный элемент — тождественное преобразование:

$$\exists! o \in \mathcal{D} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad u_o \circ u_\alpha = u_\alpha \circ u_o = u_\alpha)$$



- У каждого элемента есть обратный, и их композиция в любом порядке даёт тождественное преобразование.

**Определение 9.2.** Функция  $I(x)$  — инвариант однопараметрической группы преобразований, если  $\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad I(x) \equiv I(u_\alpha(x))$

**Определение 9.3.** Говорят, что уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований, если все преобразования группы переводят решения этого уравнения в решения.<sup>2</sup>

**Определение 9.4.** Решение уравнения называется *автомодельным*, если оно зависит только от инвариантов некоторой допустимой группы преобразований.

**Пример 9.1.** Множество преобразований

$$\begin{cases} \tau = \beta^2 t, \\ \xi = \beta x \end{cases}$$

есть однопараметрическая группа преобразований,  $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$  — инвариант группы.

Найдём автомодельное решение  $u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = f(z)$ .

В этом случае:

$$u_t = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \left(\frac{-x}{2t^{3/2}}\right) \quad u_x = f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad u_{xx} = f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2t\sqrt{t}} f'(z) &= a^2 f''(z) \cdot \frac{1}{t} \\ \frac{f''(z)}{f'(z)} &= -\frac{1}{a^2} \frac{x}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2a^2} z \\ \ln |f'(z)| &= -\frac{z^2}{4a^2} + \tilde{C}_1 \end{aligned}$$

Получили, что  $f(z) = C_1 \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta + C_2$

**Задача была следующей:** бесконечный стержень разделён на две половины, начальные температуры половин  $T_0 = 0$  и  $T_1 = 1$ . Из физических соображений:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta}_{\sqrt{\pi}} = C_1^{-1} = 2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\frac{\eta}{2a} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}}$$

---

<sup>2</sup>В прошлых версиях файла определение гласило, что уравнение допускает группу преобразований, если оно инвариантно относительно всех преобразований группы. Но непонятно, что подразумевается под инвариантностью *уравнения*. Новое определение же опирается на инвариантность *функций*. Оно взято с [этого сайта](#).

Окончательно:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta = \frac{2a}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z/2a} e^{-\mu^2} d\mu$$

Введём **интеграл ошибок**:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1, \quad \operatorname{erf}(0) = 0$$

Тогда:

$$u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4ta^2}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

1. Мы рассмотрели модельную задачу



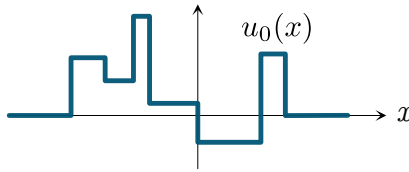
2. Увеличим ступеньку в  $u_*$  раз и сдвинем

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

3. Можем получить и решение для ступеньки конечной ширины:

$$u(t, x) = \frac{u_*}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

4. Для системы из  $N$  интервалов имеем:



$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \frac{u_{*k}}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right]$$

Последнее можно переписать в следующем виде:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1k}}{\sqrt{4a^2t}}\right) \right\}}{x_{2k} - x_{1k}} \right] u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k})$$

5. Окончательно, пусть  $u_0(x)$  финитна, непрерывна, ограничена. Разбиваем ее носитель  $\text{supp } u_0(x)$  на отрезки, аппроксимируем кусочно постоянной. Для приближенных решений справедливо:

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \left[ \Psi(t, x, \xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x - \xi}{\sqrt{4a^2t}} \right), \quad \xi_k = \frac{x_{2k} - x_{1k}}{2} \right] = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\Psi(t, x, x_{2k}) - \Psi(t, x, x_{1k})}{x_{2k} - x_{1k}} \cdot u_{*k} \cdot (x_{2k} - x_{1k}) \approx \\
&\approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi_k)^2}{4a^2 t}} \Big|_{\xi=\xi_k} u_0(\xi_k)(x_{2k} - x_{1k}) \quad \text{— Интегральная сумма Римана}
\end{aligned}$$

Предположение: решение будет

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi \quad \text{— Формула Пуассона}$$

Функция

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad \text{— фундаментальное решение (или функция источника)}$$

### Строгое доказательство

**Теорема 9.1.** Пусть  $u_0 \in C(\mathbb{R}^1)$ ,  $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$ . Тогда функция

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy$$

1. Принадлежит классу  $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^1) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$
2. Является классическим решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.  $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$

*Доказательство.*

1. В исходном интеграле для  $u(t, x)$  сделаем такую замену:

$$\frac{y-x}{\sqrt{4a^2t}} = \eta, \quad y = x + \sqrt{4a^2t} \eta, \quad dy = \sqrt{4a^2t} d\eta$$

Тогда получим

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) d\eta$$

$$u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1, \eta \in \mathbb{R}^1)$$

Оценим  $|e^{-\eta^2} u_0(x + \sqrt{4a^2t} \eta)| \leq M_0 e^{-\eta^2}$ , причем  $\int_{-\infty}^{\infty} M_0 e^{-\eta^2} d\eta$  сходится  $\Rightarrow$  исходный интеграл сходится равномерно, а значит лежит в  $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^1)$ . Отсюда следует третье утверждение теоремы.

2. Возьмем

$$u_x(t, x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) dy \quad (10)$$

Выражение под интегралом лежит в  $C(t > 0, x, y \in \mathbb{R}^1)$ .

Пусть  $x \in [-A, A]$ . Покажем равномерную сходимость интеграла серией оценок:

- (a) При  $|y| > A$ :

$$(y-x)^2 \geq (|y| - A)^2 = y^2 + A^2 - 2\frac{|y|}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}A).$$

Поскольку  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,

$$(y-x)^2 \geq y^2 + A^2 - \frac{y^2}{2} - 2A^2 = \frac{y^2}{2} - A^2$$

- (b) При  $|y| \leq A$ :  $(x-y)^2 > 0$

$$(c) \text{ При } \forall y \in \mathbb{R}: (x-y)^2 \geq \varphi_A(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} - A^2, & |y| \geq A \\ 0, & |y| < A \end{cases}$$

- (d) Кроме того,  $|y-x| \leq |y| + A$ .

Получили следующую оценку (при  $|x| < A$ ):

$$\left| \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} (y-x) u_0(y) \right| \leq \frac{M_0}{4a^3 \sqrt{\pi} t^{3/2}} (|y| + A) e^{-\frac{\varphi_A(y)}{4a^2t}}$$

Если  $t \in [t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$ , то это можно ограничить выражением  $C \cdot (|y| + A) \cdot e^{-\frac{\varphi_A(y)}{B}}$ , интеграл от которого сходится, поэтому исходный интеграл сходится равномерно.

Равномерная сходимость (по двум параметрам сразу) есть в любом прямоугольнике

$$Q = \left\{ |x| < A, \quad t \in [t_1, t_2] \right\}$$

Беря в качестве  $Q$  все возможные такие прямоугольники, получим, что производная  $u_x$  на всём множестве  $\{t > 0, x \in \mathbb{R}^1\}$  существует, непрерывна и равна интегралу (10).

Аналогично будет для любой другой производной (будет асимптотика  $|P_n(y)|e^{-\alpha y^2}$ ).

3.

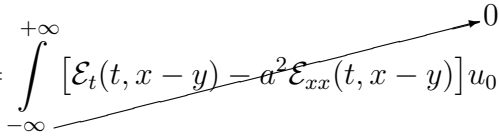
$$\mathcal{E}(t, x - y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$\mathcal{E}_x(t, x - y) = -\frac{(x - y)}{2a^2 t} \cdot \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_{xx}(t, x - y) = \left( -\frac{1}{2a^2 t} + \frac{(x - y)^2}{4a^4 t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

$$\mathcal{E}_t(t, x - y) = \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{t} + \frac{(x - y)^2}{4a^2} \frac{1}{t^2} \right) \mathcal{E}(t, x - y)$$

Тогда

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}_t(t, x - y) - a^2 \mathcal{E}_{xx}(t, x - y)] u_0(y) dy = 0.$$


Начальное условие (используя самое начало выкладок)

$$u|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} u_0(x) d\eta = u_0(x)$$

Теорема доказана. □

**Билет 10. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в  $\mathbb{R}^n$ . Метод Дюамеля. Существование классического решения.**

Задача:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - a^2 \Delta_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n), & \varphi_k(x_k) \in C(\mathbb{R}^1), \quad |\varphi(x_k)| \leq M, \quad k = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (11)$$

Напишем серию задач Коши:

$$\begin{cases} u_t^k(t, x) - a^2 u_{x_k x_k}^k(t, x) = 0, \\ u^k|_{t=0} = \varphi_k(x_k); \end{cases} \quad (12)$$

Решение каждой даётся формулой Пуассона:

$$u^k(t, x_k) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_k - y_k)^2}{4a^2 t}} \varphi_k(y_k) dy_k \quad (13)$$

Покажем, что решение всей задачи:

$$u = \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k)$$

1. Очевидно,  $u(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ ;

$$2. \quad u(0, x) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x_k);$$

$$\begin{aligned} 3. \quad u_t(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[ u_t^j(t, x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \sum_{j=1}^n \left[ a^2 u_{x_j x_j}^j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u^k(t, x_k) \right] = \\ &= a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \prod_{k=1}^n u^k(t, x_k) = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(t, x) = a^2 \Delta_x u(t, x). \end{aligned}$$

Итак, в случае разделения переменных имеем:

$$u(t, x) = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}{4a^2 t}} \prod_{k=1}^n \varphi_k(y_k) dy_1 \dots dy_n = \boxed{\left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy} \quad (14)$$

Полученная формула называется **формулой Пуассона в  $\mathbb{R}^n$** .

**Теорема 10.1.** Пусть  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $|u_0| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$u(t, x) = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy -$$

классическое решение задачи Коши 11, лежащее в классе  $C^\infty(t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$ . Кроме того,  $|u(t, x)| \leq M \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Сохраняется из предыдущего билета с заменой  $(x - y)^2 \rightarrow |x - y|^2$ .  $\square$

Зная решение однородного уравнения, можно найти решение и для неоднородного:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (15)$$

Используем метод Дюамеля. Предположения относительно  $f$ :

1.  $D_x^\alpha f(t, x) \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq 2$ ;
2.  $|f(t, x)| \leq M_0 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ ;
3.  $|D_x^\alpha f(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ .

Сводим задачу к семейству однопараметрических задач:

$$\begin{cases} v_t(t, x, \tau) - a^2 \Delta_x v(t, x, \tau) = 0, & t > \tau, x \in \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = f(\tau, x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \quad (16)$$

Решение даётся формулой Пуассона в  $\mathbb{R}^n$ :

$$v(t, x, \tau) = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t - \tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}} f(\tau, y) dy$$

$v(t, x, \tau)$  непрерывно продолжима до  $t \geq \tau$ , ограничена:  $|v(t, x, \tau)| \leq M_0$ .

Покажем, что  $u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$  — решение задачи.

Исследуем вспомогательную функцию:

$$w(\tilde{t}, x, \tau) = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \tilde{t}}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 \tilde{t}}} f(\tau, y) dy, \quad \tilde{t} > 0, \tau \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Введём  $\eta = \frac{y - x}{2a\sqrt{\tilde{t}}} \Rightarrow y = x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta \Rightarrow dy = dy_1 \dots dy_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta_1 \dots d\eta_n = (2a\sqrt{\tilde{t}})^n d\eta$ .

Тогда  $w(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$|f(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta)e^{-\eta^2}| \leq M_0 e^{-\eta^2}$  и  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} d\eta < +\infty \Rightarrow w(\tilde{t}, x, \tau)$  сходится равномерно.

Итак,  $w \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$ .

**Утверждение 10.2.** *в можно дифференцировать и вносить производную под интеграл.*

*Доказательство.*  $w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) \sim \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

$f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) \in C(\tau \geq 0, \tilde{t} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n)$

$|f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta)e^{-\eta^2}| \leq M_2 e^{-\eta^2} \Rightarrow w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau)$  сходится равномерно.

Поэтому, вместо ' $\sim$ ' можно поставить '=':

$w_{x_i}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

Аналогично и для вторых производных по  $x$ :

$w_{x_i x_j}(\tilde{t}, x, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2} f_{x_i x_j}(\tau, x + 2a\sqrt{\tilde{t}}\eta) d\eta, \quad \tilde{t} > 0$

□

Теперь производная по времени: в силу того, что уравнение

$$\begin{cases} w_{\tilde{t}} - a^2 \Delta_x w = 0, \\ w|_{\tilde{t}=0} = f(\tau, x); \end{cases}$$

выполняется везде, включая границу, получаем, что  $w_{\tilde{t}} \in C(\tilde{t} \geq 0, \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

Мы исследовали  $w$ , а цель —  $v$ . Связь этих функций:  $v(t, x, \tau) = w(t - \tau, x, \tau)$ . При условиях  $\tau \geq 0, t \geq \tau, x \in \mathbb{R}^n$  имеем непрерывность следующих функций:  $v, v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}$ . Тогда для функции

$u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau$  получаем непрерывность  $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \Rightarrow$  решение будет классическим.

Осталось проверить уравнение:  $u_t = v(t, x, t) + \int_0^t v_t(t, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t a^2 \Delta_x v d\tau = f(t, x) + a^2 \Delta_x u$

**Определение 10.1.** Пусть  $Q$  — область в  $\mathbb{R}_{t, x_1, \dots, x_n}^{n+1}$ , а  $\hat{Q} = Q \cup \{\text{некоторое подмножество } \partial Q\}$ . Обозначим  $C_{t, x}^{p, q}(\hat{Q})$  множество функций  $u(t, x)$  таких, что  $u, D_x^\alpha u, D_t^\beta u \in$



$C(Q)$ ,  $\alpha$  — мультииндекс,  $|\alpha| \leq q$ ,  $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|\beta| \leq p$ , и все эти функции допускают непрерывное продолжение на  $\hat{Q}$ .

**Теорема 10.3.** Пусть в задаче Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_x u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

а)  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $|u_0(x)| \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

б)  $f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2}(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$

в)  $|f(t, x)| \leq M_1, \quad |f_{x_i}(t, x)| \leq M_2, \quad |f_{x_i x_j}(t, x)| \leq M_2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$

Тогда функция

$$u(t, x) = \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy + \int_0^t \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}} f(\tau, y) dy \right] d\tau$$

является классическим решением задачи Коши, лежит в классе  $C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \cap C_{t,x}^{1,2}(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ . Кроме того, справедлива оценка  $|u(t, x)| \leq M_0 + tM_1$

*Доказательство.* Последний факт:  $|u| \leq M_0 + \int_0^t |v_t| d\tau \leq M_0 + M_1 t$

□

**Билет 11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши уравнения теплопроводности в классе  $M_2(T)$  (без доказательства)**

• Пусть  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $T > 0$ ,  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  - цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью  $t = \tau$  обозначим  $\Omega_\tau$

**Определение 11.1.** Параболическая граница области  $Q_T$  - множество  $\Gamma_T = \Omega_0 \cup \{[0, T] \times \partial\Omega\}$



Определим оператор  $L : Lu(t, x) = u_t - a^2 \Delta_x u$ , где  $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$

**Теорема 11.1. (Принцип максимума)** Пусть  $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , и пусть  $Lu(t, x) \leq 0$  в  $Q_T$ . Тогда  $\max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} u(t, x)$  достигается на параболической границе  $\Gamma_T$  области  $Q_T$

*Доказательство.* Возьмем усеченный цилиндр  $Q_{T-\delta}$ . Рассматриваются  $M = \max_{Q_{T-\delta}} u(t, x)$  и  $m = \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x)$ . Теорема утверждает, что  $M$  не превосходит  $m$ .

- Пусть это не так и  $m < M$ . Тогда  $\exists (t^1, x^1) \in Q_{T-\delta} \cup \Omega_{T-\delta}$  такая, что  $M = u(t^1, x^1)$ . Т.к. это точка максимума гладкой функции,  $u_{x_i x_i}(t^1, x^1) \leq 0$ , а  $u_t(t^1, x^1) \geq 0$  (Если внутри, то равенство, если на верхней кромке, то  $\geq 0$ ).

Значит, значение образа  $u(t, x)$  под действием оператора  $L$  в точке  $(t^1, x^1)$  :

$$Lu(t^1, x^1) = u_t - a^2 \Delta_x u|_{(t^1, x^1)} \geq 0.$$

Для противоречия необходимо показать, что неравенство строгое.

й

- **Строгость:** Возьмем функцию  $v_\beta(t, x) = u(t, x) + \beta|x - x^1|^2$ ,  $\beta = \frac{M - m}{2(\text{diam} Q_T)^2}$  - такая же гладкая, как  $u$ .

На параболической границе  $v_\beta \leq m + \frac{M-m}{2d^2} \cdot d^2 = \frac{M+m}{2} < M$ . Тем не менее,  $v_\beta(t^1, x^1) = M \Rightarrow$  максимум  $v_\beta$  - не на параболической границе.

Пусть он в точке  $(t^2, x^2) \notin \Gamma_{T-\delta}$ . Тогда  $Lv_\beta|_{(t^2, x^2)} = Lu|_{(t^2, x^2)} - a^2\beta 2n \boxed{\geq} 0 \Rightarrow$

$Lu|_{(t^2, x^2)} \geq a^2\beta 2n > 0 \Rightarrow$  **Противоречие** (вывод  $\boxed{\geq}$  аналогичен рамке выше)

- **Предельный переход с  $\delta \rightarrow +0$ :** Пусть  $u_* = \max_{\Gamma_T} u(t, x)$ .

Тогда  $\max_{\overline{Q_{T-\delta}}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_{T-\delta}} u(t, x) \leq \max_{\Gamma_T} u(t, x) = u_* \Rightarrow u(t, x) \leq u_*$  во всех точках  $\overline{Q_T} \setminus \Omega_T$

$u(t, x)|_{\Omega_T} = \lim_{(\hat{t}, \hat{x}) \in Q_T \rightarrow (t, x) \in \Omega_T} u(\hat{t}, \hat{x}) \boxed{\leq} u_*$

( $\boxed{\leq}$  - предельный переход в неравенствах.) Теорема доказана.

□

**Следствие.** Пусть  $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ ,  $Lu = 0 \quad \forall (t, x) \in Q_T$ . Тогда  $\max_{\overline{Q_T}} u(t, x)$  и  $\min_{\overline{Q_T}} u(t, x)$  достигаются на параболической границе  $\Gamma_T$  множества  $Q_T$

*Доказательство.* Максимум достигается, т.к.  $Lu \leq 0$ , минимум достигается, т.к.  $L(-u) \leq 0$  □

### Единственность решения задачи Коши

Вообще говоря, решение единственным будет не всегда. Но если ограничиться некоторым классом функций, то в нем решение может оказаться единственным. Введем такой класс.

- Пусть  $T > 0, \sigma \geq 0$ . **Слой толщины  $T$**  - множество  $\Pi_T = \{(t, x) : 0 < t < T; x \in \mathbb{R}^n\}$   
Обозначим  $M_\sigma(T)$  - **класс функций**  $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi_T})$  таких, что  $\forall u(t, x) \exists A > 0, \alpha \geq 0$  такие, что  $|u(t, x)| \leq A \exp^{\alpha|x|^\sigma} \quad \forall (t, x) \in \overline{\Pi_T}$

**Лемма 11.2.**  $M_\sigma(T)$  - линейное пространство, причем  $\sigma_0 \leq \sigma_1 \Rightarrow M_{\sigma_0}(T) \subset M_{\sigma_1}(T)$

*Доказательство.* Очевидно. □

**Лемма 11.3.**  $\forall T > 0$  функция  $u_T(t, x) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}, t < T, x \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

*Доказательство.* -  $u_T \in C^\infty\{t < T, x \in \mathbb{R}^n\}$

$$-\frac{\partial u_T}{\partial t} = \left[ \frac{n}{2(T-t)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)}$$

$$- \Delta_x u_T = \left[ \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{2n}{4a^2(T-t)} + \frac{1}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} \frac{4|x|^2}{4^2 a^4 (T-t)^2} \right] \exp \frac{|x|^2}{4a^2(T-t)} \Rightarrow (u_T)'_t - a^2 \Delta_x u_T = 0 \text{ ч.т.д}$$

□

• **Класс Тихонова** -  $M_2(T)$

**Лемма 11.4.** Пусть  $v(t, x)$  такова, что  $v \in M_2(T)$  и  $v$  - решение полностью однородной ЗК  $\{Lv = 0, v|_{t=0}\}$ . Тогда  $\exists T_1 \leq T : |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(x, t) \quad \forall \varepsilon > 0$

*Доказательство.*  $|v| \leq A \exp^{\alpha|x|^2} \quad \forall t, x \in \overline{\Pi_T}$ . Выбираем  $T_1 \leq T : \frac{1}{8a^2 T_1} > \alpha : T_1 = \min \left\{ T, \frac{1}{16\alpha a^2} \right\}$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и  $\omega_e^\pm(t, x) = \varepsilon u_{2T_1} \pm v(t, x)$ . Нужно показать, что  $\omega_e^\pm(t, x) > 0$ :

$$\omega_e^\pm(t, x) \geq \varepsilon u_{2T_1} - |v(t, x)| \geq \varepsilon u_{2T_1} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1 - t)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2(2T_1 - t)} - A \exp^{\alpha|x|^2} \geq$$

$$\frac{\varepsilon}{(2T_1)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{4a^2 2(T_1)} - A \exp^{\alpha|x|^2} = \frac{\varepsilon}{(2T_1)^{\frac{n}{2}}} \exp \frac{|x|^2}{8a^2(T_1)} \left[ 1 - \frac{(2T_1)^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon} A \exp^{-\left(\frac{1}{8a^2(T_1)} - \alpha\right)|x|^2} \right]$$

(для выделенной части  $\exists R > 0$  : эта часть  $< \frac{1}{2}$  при  $|x| > R$ )

Значит,  $\forall(t, x) : 0 \leq t \leq T$  и  $|x| \geq R \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$ .



Но  $\omega_e^\pm(t, x)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности  $\Rightarrow$  на  $\Gamma_{T_1}$  достигаются максимум и минимум  $\omega_e^\pm(t, x) \Rightarrow$  он строго  $> 0 \Rightarrow \omega_e^\pm(t, x) > 0$  всюду в полосе  $(0, T_1)$ . Итак,  $\mp v(t, x) \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \Rightarrow |v| \leq \varepsilon u_{2T_1}(t, x) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow v \equiv 0$  в  $\overline{\Pi_{T_1}}$

□

**Теорема 11.5.** Задача Коши  $Lu = f(x, t), u|_{t=0} = u_0(x)$  в классе Тихонова не может иметь более одного решения в полосе  $\Pi_T$

*Доказательство.* Пусть существует два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Возьмем  $v(t, x) = u_2 - u_1$ . Функция  $v$  удовлетворяет полностью однородной ЗК и лежит в классе Тихонова  $\Rightarrow$  в

полосе  $\Pi_{T_1}$ , где  $T_1$  определено из предыдущей леммы, будет  $v \equiv 0$ .  
 Если  $T \leq T_1$ , то все доказано. В противном случае вводим:  
 $w(t, x) = v(t + T_1, x)$ . Она удовлетворяет:

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta_x w = 0 \\ w|_{t=0} = 0, T_1 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (17)$$

$\Rightarrow$  в полосе  $(0, T_1)$  получим  $w \equiv 0$

( $T_1$  определяется  $\frac{1}{8a^2\alpha} \Rightarrow$  одно и то же)

Так за конечное число шагов  $N = \lceil \frac{T}{T_1} \rceil$  мы покроем всю  $\Pi_T$

□

**Билет 12. Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.**

Рассмотрим смешанную (начально-краевую) задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x), & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (18)$$

Рассматриваем ее классическое решение — функцию  $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , где  $Q_T = \{(t, x) : t \in (0, T); x \in (0, l)\}$ , удовлетворяющую в  $Q_T$  уравнению, начальному и граничным условиям.

**Теорема 12.1** (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 18*

*Доказательство.* Если  $u_1, u_2$  — классические решения, то  $v = u_1 - u_2$  — классическое решение полностью однородной задачи. На параболической границе  $\Gamma_T = \{t = 0, x \in [0, l]\} \cup \{x = 0, t \in [0, T]\} \cup \{x = l, t \in [0, T]\}$   $v|_{\Gamma_T} = 0$ . Но на  $\Gamma_T$  достигается максимум и минимум  $v$  в  $Q_T$  в силу принципа максимума  $\Rightarrow v \equiv 0$   $\square$

Частный случай, указанный в билете:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & 0 < t < T; \end{cases}$$

Из непрерывности естественно требовать выполнение условий согласования:  $u_0(0) = u_0(l) = 0$ . Оказывается, в таких условиях решение существует.

*Метод Фурье* — поиск решения в виде ряда по собственным функциям стационарного оператора.

Придём к этой идее. Будем искать решение  $Lu = u_t - a^2 u_{xx} = 0$  методом разделения переменных:

$$u(t, x) = \Theta(t)X(x), \quad u(t, x) \neq 0.$$

Подставляем:  $\dot{\Theta}(t)X(x) - a^2\Theta(t)X''(x) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\Theta}(t)}{a^2\Theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}$ , т.к. равенство выполнено  $\forall(t, x) \in Q_T$

Получаем на функции  $\Theta$  и  $X$  следующие уравнения:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \dot{\Theta}(t) + \lambda a^2 \Theta(t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Из начального условия  $u(t, 0) = \Theta(t)X(0) \quad \forall t \in (0, T) \Rightarrow X(0) = 0$ . Аналогично  $X(l) = 0$ .

Задача для  $X$ :

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0, \\ X(x) \not\equiv 0; \end{cases} \quad (19)$$

Поставленная задача называется *задачей Штурма-Лиувилля*.

Введем оператор  $A$ :

- $D(A) = \{X \in C^2[0, l] : X(0) = X(l) = 0\}$
- $\text{Im}(A) = \{Y \in C[0, l]\}$
- $AX = -\Delta X = Y$

Задача Штурма-Лиувилля — это задача на собственные функции и собственные значения оператора  $A$ .

Решим ее:

- $\lambda < 0$ :

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}}$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|l}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|l}} = 0; \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|l}} & e^{-\sqrt{|\lambda|l}} \end{pmatrix} = 1 - e^{2\sqrt{|\lambda|l}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|l} = 0, \text{ противоречие.}$$

Итак, « $-\Delta$ » с граничными условиями Дирихле не имеет отрицательных собственных значений.

- $\lambda = 0$ :

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l = 0; \end{cases}$$

Нетривиальных решений нет.

- $\lambda > 0$ :

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Функции } X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

Теперь для найденных  $\lambda_k$  решаем  $\dot{\Theta}_k(t) + \lambda_k a^2 \Theta_k(t) = 0 \Rightarrow \Theta_k(t) = e^{-a^2 \lambda_k t}$

Мы нашли  $u_k(t, x) = e^{-a^2 \lambda_k t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$  — счетное число бесконечно гладких решений:  $u_k$  удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (u_k)_t - a^2(u_k)_{xx} = 0, \\ u_k(t, 0) = u_k(t, l) = 0, \\ u_k(0, x) = X_k(x) = \sin \lambda_k x; \end{cases}$$

Тогда  $u_A(t, x) = \sum_{k=1}^N A_k u_k(t, x)$  — решение для задачи с начальным условием  $u(0, x) = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$ .

Обозначим  $Ku_0$  — класс функций  $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$  — тех, для которых умеем выписать явное решение. Пусть  $A_k$  —  $k$ -мерные векторы. Между  $Ku_0$  и  $A_k$  есть биекция (по  $u_0 = \sum_{k=1}^N A_k X_k(x)$ )

однозначно восстанавливаем  $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$

Бесконечномерный вектор подойдет уже не всегда. Как минимум ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)$  должен сойтись в замыкании области. Функция  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(t, x)$  должна быть нужной гладкости, а также удовлетворять уравнению 18.

**Утверждение 12.2.**  $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$  подойдет

*Доказательство.* Пусть  $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ ,  $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$ . Тогда  $\left| A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right| \leq |A_k| \Rightarrow$  по теореме Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно  $\Rightarrow$  сумма непрерывна. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать  $\Rightarrow$  по  $u_0(x)$  восстанавливаем  $A_n$ :  $\int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx$

Теперь рассмотрим ряд  $u_A(t, x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$

Пока не можем поставить знак равенства, поскольку еще не выяснили сходимость.



$\left| A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right| \leq |A_k| \Rightarrow$  ряд сходится абсолютно и равномерно, и мы можем поставить знак равенства:

$$u_A(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

Покажем, что получилась  $u_A(t, x) \in C^\infty(t > 0, 0 \leq x \leq l)$ .

Возьмем прямоугольник  $Q_\delta = \{(t, x) : t \geq \delta > 0, 0 \leq x \leq l\}$ .

Формально  $\frac{\partial u_A}{\partial t} \sim - \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(t, x)$

Для краткости введём  $y = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2$ .

Оценка:  $|\varphi_k| \leq |A_k| y e^{-y\delta} = |A_k| \frac{1}{\delta} (y\delta) e^{-y\delta} \leq |A_k| \frac{1}{\delta e}$

Последнее неравенство следует из того, что функция  $xe^{-x}$  имеет максимум в точке  $x = 1$ , равный  $\frac{1}{e}$ .

Итак, по теореме Вейерштрасса, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Варьируя  $\delta$ , прямоугольниками  $Q_\delta$  замечаем всю область  $\{t > 0, 0 \leq x \leq l\}$

Для остальных производных получим то же самое — всегда будет получаться произведение многочлена на экспоненту с отрицательным показателем.

Мы научились решать задачу для  $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ . □

Докажем серию лемм.

**Лемма 12.3.** Пусть в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  оператор  $A$  симметричный (самосопряжённый), т.е.  $(Ax, y) = (x, Ay)$ . Тогда:

1. Все собственные значения  $A$  вещественны;
2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

*Доказательство.* Пусть  $x_k$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_k$ , а  $x_n$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_n$ , причем  $\lambda_k \neq \lambda_n$ . Тогда:

1.  $\lambda_k(x_k, x_k) = (Ax_k, x_k) = (x_k, Ax_k) = (x_k, \lambda_k x_k) = \overline{\lambda_k}(x_k, x_k) \Rightarrow \lambda_k = \overline{\lambda_k} \Rightarrow \text{Im } \lambda_k = 0$
2.  $\lambda_k(x_k, x_n) = (Ax_k, x_n) = (x_k, Ax_n) = \overline{\lambda_n}(x_k, x_n) \underset{\text{пункт 1}}{=} \lambda_n(x_k, x_n) \Rightarrow \frac{(\lambda_k - \lambda_n)(x_k, x_n)}{\neq 0} = 0 \Rightarrow (x_k, x_n) = 0$

□

**Лемма 12.4.** Оператор  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ , определенный на  $D(A)$ , является симметричным относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2([0, l]) : (u, v) = \int_0^l u(x) \overline{v(x)} dx$

*Доказательство.*  $(Au, v) = \int_0^l (-u''(x)) \overline{v(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{-u'(x) \overline{v(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u'(x) \overline{v'(x)} dx = \underset{=0, \text{ в силу определения } D(A)}{\overline{u(x) \overline{v'(x)}} \Big|_0^l} + \int_0^l u(x) \overline{(-v''(x))} dx = (u, Av)$

□

**Лемма 12.5.** Пусть  $\{e_k\}$  — не более чем счетная ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением:  $(e_k, e_j) = \delta_{kj} \overbrace{(e_k, e_k)}^{>0}$ . Тогда  $\forall f$  из этого пространства

справедливо неравенство Бесселя:  $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} \right|^2 (e_k, e_k) \leq (f, f)$

*Доказательство.*  $0 \leq \left( f - \sum_{k=1}^n c_k e_k, f - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, f) - \sum_{j=1}^n \overline{c_j} (f, e_j) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \overline{c_j} (e_k, e_j) =$

$= (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k \bar{c}_k(e_k, e_k) - \sum_{j=1}^n c_j \bar{c}_j(e_j, e_j) + \sum_{i=1}^n c_i \bar{c}_i(e_i, e_i) = (f, f) - \sum_{k=1}^n |c_k|^2(e_k, e_k)$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , получаем  $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2(e_k, e_k) \leq (f, f)$ .  $\square$

**Лемма 12.6.** Пусть два ряда  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = A$ ,  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\beta_k|^2 = B$  сходятся. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \beta_k$  сходится абсолютно, причем  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \sqrt{A} \sqrt{B}$

*Доказательство.*  $\sum_{k=1}^n |\alpha_k \beta_k| \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\beta_k|^2}$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , получаем требуемое.  $\square$

**Лемма 12.7.** Пусть  $v(x) \in C^1([0, l])$ ,  $v(0) = v(l) = 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ , где  $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l v(y) \sin\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy$ , сходится на  $[0, l]$  к  $v(x)$  абсолютно и равномерно.

*Доказательство.* 1. Система  $\{e_k\} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$  ортогональна относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2([0, l])$ , так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Дирихле — симметричного в  $\mathbb{L}_2([0, l])$  оператора.

2.  $A_k = \frac{(v, e_k)}{(e_k, e_k)}$ , ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 < +\infty$  по неравенству Бесселя.

$$3. A_k = \underbrace{-\frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} v(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) \Big|_0^l}_{=0} + \frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy = \frac{l}{\pi k} \alpha_k, \quad \text{где } \alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l v'(y) \cos\left(\frac{\pi k}{l} y\right) dy.$$

4. Ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$  по неравенству Бесселя, т.к. система  $\{g_k\} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$  ортогональна относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2([0, l])$ , так как состоит из собственных функций оператора « $-\Delta$ » с однородными условиями Неймана — симметричного в  $\mathbb{L}_2([0, l])$  оператора.

Ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  сходится. Тогда сходится абсолютно ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k| < +\infty$ .

Функция  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$  непрерывна.

5. Сходимость к  $v(x)$ : Построим

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in [0, l] \\ -v(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Затем продолжим на  $\mathbb{R}$ , сделав периодической:  $\tilde{v}(x + 2l) = \tilde{v}(x)$ . Получаем непрерывную периодическую функцию, а во всех точках  $x \in [0, l]$   $\exists \tilde{v}'_-(x), \tilde{v}'_+(x)$ . Тогда ряд Фурье этой функции сходится к ней на всей  $\mathbb{R}$ . В силу нечетности  $\tilde{v}$ , этот ряд — только по синусам, а коэффициенты Фурье равны  $A_k$  (для них совпадают формулы). Значит, на  $[0, l]$  имеем

$$v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$$

□

Таким образом, доказана теорема:

**Теорема 12.8.** Пусть в смешанной задаче

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

функция  $u_0(x)$  удовлетворяет условиям гладкости ( $u_0 \in C^1([0, l])$ ) и согласованная ( $u_0(0) = u_0(l) = 0$ ). Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = u(t, x)$ , где  $A_k =$

$\frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$ , сходится абсолютно и равномерно в  $\overline{Q_T} = [0, T] \times [0, l]$ , функ-

ция  $u(t, x) \in C(\overline{Q_T}) \cap C^\infty(Q_T)$  и является классическим решением этой задачи, а любая производная при  $t > 0$  от  $u(t, x)$  может быть найдена почленным дифференцированием.

**Билет 13. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.**

**Формулировка задачи**

**Задача:**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (t, x) \in Q_T = (0, T) \times (0, l), \\ u|_{t=0} = u_0(x); \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t); & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (20)$$

Рассматриваем её *классическое решение* - функцию  $u(t, x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ , удовлетворяющую уравнению, начальным и граничным условиям.

**Теорема единственности**

**Теорема 13.1** (Единственности). *Не может существовать более одного классического решения задачи 20.*

**Единственность решения.** Для двух решений  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  построим  $V(t, x) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ .

$V$  - решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, \\ V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что  $V \equiv 0$  с помощью интеграла энергии: рассмотрим функцию  $I = V_t[V_{tt} - a^2 V_{xx}]$ ,  $(t, x) \in Q_T$ .

$$I = V_t V_{tt} - a^2 V_t V_{xx} = \frac{1}{2} (V_t^2)_t - a^2 (V_t V_x)_x + a^2 \underbrace{V_x V_{xt}}_{\frac{1}{2} (V_x^2)_t} = \underbrace{\left( \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right)_t}_{F_t^1} - \underbrace{(a^2 V_t V_x)_x}_{F_x^2} \Big| \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой Грина:  $\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \Omega} Q dy + P dx$ . Для её использования требуется непрерывность производных до границы, поэтому напомним её для области:  $Q_{\tau, \varepsilon} = \{(t, x): \varepsilon < t < \tau, \varepsilon < x < l - \varepsilon\}$ .

Доказательство.



$$0 = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} I \, dx dt = \iint_{Q_{\tau, \varepsilon}} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dt = \oint_{\partial Q_{\tau, \varepsilon}} -\frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \, dx - a^2 V_t V_x \, dt$$

Распишем интеграл по  $\partial Q_{\tau, \varepsilon}$ :

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left( \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\tau} dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left( \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \right) \Big|_{t=\varepsilon} dx - \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=l-\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_x V_t) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$$

В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем :

$$\begin{aligned} \because V_t(\varepsilon, x) \rightarrow V_t(0, x) = 0 \quad \because V_x(\varepsilon, x) \rightarrow V_x(0, x) = \frac{d}{dx}(V|_{t=0}) = 0 \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \rightarrow \int_0^l \quad (\text{по определению несобственного}) \\ \because \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_t(t, l - \varepsilon) = V_t(t, l) = 0 \Rightarrow \int_0^{\tau} (a^2 V_t V_x) \, dt \quad \because \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{V_t^2 + a^2 V_x^2}{2} \Big|_{t=l} dx = \int_0^l \frac{V_t^2(0, x) + a^2 V_x^2(0, x)}{2} dx \end{aligned}$$

Аналогично для  $\int_{\varepsilon}^{\tau} (a^2 V_t V_x) \Big|_{x=\varepsilon} dt = 0$ . Поэтому получаем, что:

$$\int_0^l \frac{V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x)}{2} dx = 0$$

Тогда  $V_t^2(\tau, x) + a^2 V_x^2(\tau, x) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, l) \times \tau$ .

В любой точке  $(t, x) \in Q_{\tau}$ :  $\vec{\nabla} V(t, x) = \vec{0} \Rightarrow V = \text{const} \quad \forall (t, x) \in Q_{\tau}$ .

На замыкании в силу непрерывности  $V$  в  $\overline{Q}_{\tau}$  также будет  $V \equiv \text{const}$ , но на границе  $V = 0 \Rightarrow V \equiv 0 \quad \forall (t, x) \in \overline{Q}_{\tau}$ , поэтому  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ .

**Существование решения** Будем рассматривать смешанную задачу для однородного уравнения колебаний струны при закреплённых концах.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t, x) \in Q_{\tau}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор  $-\Delta_0$ :

$$\mathcal{D}(-\Delta) = \{X(x) \in C^2[0, l]: X(0) = X(l) = 0\}$$

У этого оператора есть счётное однопараметрическое семейство собственных функций:  $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$ ,  $X_k = \sin(\lambda_k x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Решение будем искать в виде ряда  $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$ . Будем требовать выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^3[0, l], \quad u_1(x) \in C^2[0, l] - \text{условия гладкости} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 - \text{для непрерывности решения на } \overline{Q}_\tau, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0 - \text{для принадлежности решения } C^1(\overline{Q}_\tau), \\ u_0''(0) = u_0''(l) = 0 - \text{для принадлежности } C^2(\overline{Q}_\tau). \end{cases} \quad (21)$$

Последние три условия называются **условиями согласования**.

Рассматриваемый оператор симметричен относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2$ , значит, собственные функции ортогональны в  $\mathbb{L}_2$ . Разложим  $u_0, u_1$  в ряды Фурье по  $X_k$  на  $[0, l]$ :

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) X_k dx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) X_k dx$$

Формально подставляем в уравнение:  $\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k) X_k = 0$ . Из начальных условий:  $\Theta_k(0) = A_k$ ,  $\dot{\Theta}_k(0) = B_k$ .

В силу ортогональности  $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  получаем счётное число задач Коши:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_k + a^2 \lambda_k^2 \Theta_k = 0, \\ \Theta_k(0) = A_k, \quad \dot{\Theta}_k(0) = B_k. \end{cases}$$

Решение:  $\Theta_k(t) = A_k \cos\left(\frac{a\pi k}{l}\right)t + \frac{l}{a\pi k} B_k \sin\left(\frac{a\pi k}{l}\right)t, \quad t \in [0, \tau]$ . □

## Обоснование метода

**Теорема 13.2.** Пусть данные Коши  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  удовлетворяют условиям гладкости и согласования. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x)$  сходится абсолютно и равномерно в  $\overline{Q}_\tau$ . Его сумма принадлежит классу  $C^2(\overline{Q}_\tau)$  и является классическим решением задачи 13. Частные производные по  $t$  и  $x$  до второго порядка включительно можно вычислить почленным дифференцированием ряда.

Доказательство.

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \frac{-2}{l} \frac{l}{\pi k} u_0(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l + \frac{l}{\pi k} \frac{2}{l} \int_0^l u_0' \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \frac{2}{l} u_0'(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l - \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int_0^l u_0''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \underbrace{\frac{2}{l} \int_0^l u_0'''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx}_{\alpha_k} + \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 u_0''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \alpha_k + \frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 u_0''(x) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \Big|_0^l$$

Примечание:  $\alpha_k$  - коэффициенты Фурье функции  $u_0'''(x)$  по ортогональной системе функций  $\cos\left(\frac{\pi k}{l}\right)$  — собственных функций оператора  $-\Delta_0$  с граничными условиями Неймана — тоже симметричного оператора.

Аналогично находим коэффициенты  $B_k$ :

$$B_k = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \beta_k, \text{ где } \beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1''(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$$

Из того, что

$$|u_k(t, x)| = |\Theta_k(t) X_k(x)| \leq \left| A_k \cos(a\lambda_k t) + \frac{B_k}{a\lambda_k} \sin(a\lambda_k t) \right| \leq \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \frac{1}{a\lambda_k} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{c}{k^3}$$

следует абсолютная и равномерная сходимость ряда на  $\overline{Q}_\tau$

$$1. \text{ Граничные условия: } u(t, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(0) = 0, \quad u(t, l) = \sum_{k=1}^{\infty} (\dots) \sin(\pi k) = 0.$$

$$\text{Начальные условия: } u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\lambda_k x) = u_1(x).$$

Итак, ряд порождает непрерывную на  $\overline{Q}_\tau$  функцию, удовлетворяющую начальным и граничным условиям.

$$2. \text{ Производные: } u_t \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\frac{a\pi k}{l} A_k \sin(\lambda_k at) + B_k \cos(a\lambda_k t) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k.$$

$$|V_k| \leq a\lambda_k |A_k| + |B_k| \leq \frac{a\pi k}{l} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |\alpha_k| + \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |\beta_k| \leq \frac{\tilde{c}}{k^2} \implies u_t \in C(\overline{Q}_\tau)$$

Значит,  $u \in C(\overline{Q}_\tau)$ .

$$u_{tt} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 A_k \cos(\lambda_k at) - \frac{a\pi k}{l} B_k \sin(\lambda_k at) \right] \sin(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

$$|w_k| = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 |u_k| \leq \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \left(|\alpha_k| + \frac{1}{a} |\beta_k|\right)$$



Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$  сходится абсолютно и равномерно, так как:  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ , а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$  сходится абсолютно; поэтому  $u(t, x) \in C^2(\overline{Q}_\tau)$ .  $\square$

Можно ставить задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

при более широких условиях.

При условиях  $u_0(x) \in C^2[0, l]$ ,  $u_1(x) \in C^1[0, l]$  (гладкости) и  $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$  (согласования) и условиях на  $f$ :  $f(t, x), f_x(t, x) \in C(\overline{Q}_\tau)$ ,  $f(t, 0) = f(t, l) = 0$  - классическое решение задачи существует и единственно.

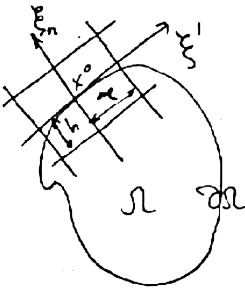
С помощью метода продолжений делаем  $u_0, u_1, f$  нечётными и  $2\pi$  - периодическими, получаем задачу Коши для волнового уравнения. Решение даётся формулой Даламбера.

**Билет 14. Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие её разрешимости.**

### Формулы Грина

**Определение 14.1.** Ограниченная область  $\Omega$  называется *областью с гладкой границей*, если  $\forall x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$  найдутся:

- такая декартова СК, что начало в  $x_0$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  - координаты точек в этой СК
- Окрестность  $U_0(x^0) = \{\xi: |\xi'| < r, |\xi_n| < h\}$ , где  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ , такая, что в  $U_0(x^0)$  часть границы  $\Gamma \cap U_0(x^0)$  представляется в виде:  $\xi_n = F(\xi'), |\xi'| < r, F(0) = 0, F(\xi') \in C^1(|\xi'| < r), \nabla_{\xi'} F(0) = 0$ ,
- Множество  $U_-(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n < F(\xi')\} \in \Omega$ ,  
Множество  $U_+(x^0) = U_0(x^0) \cap \{x: \xi_n \geq F(\xi')\}: \Omega \cap U_+ = \emptyset$
- Числа  $r > 0, h > 0$  можно выбрать независимо от  $x^0 \in \Gamma$ .



Для ограниченных областей с гладкими границами справедлива формула Остроградского-Гаусса ( $F$  - непрерывно дифференцируемое векторное поле):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS = \int_{\Gamma} (\vec{F}(x), \vec{n}) dS$$

**Лемма 14.1.**

### Формулы Грина

Пусть  $\Omega$  - ограниченная область с границей класса  $C^1$  в  $\mathbb{R}^n$ , тогда справедливы следующие формулы.

$$\forall u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

$$\forall u(x) \in C^2(\bar{\Omega}), v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v dx - \int_{\Omega} (\Delta v)u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS_x - \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u dS_x$$

Полученные формулы называются *первой и второй формулами Грина* соответственно.

*Доказательство.*

### Первая формула Грина

Пусть  $\vec{f}(x), v(x)$  - гладкие векторное и скалярное поля соответственно:  $\operatorname{div}(\vec{f} \cdot v) = (\nabla, \vec{f}v) + (\nabla, \vec{f}^\downarrow v) = v \operatorname{div} \vec{f} + (\vec{f}, \operatorname{grad} v)$ .

Положим  $\vec{f} = \nabla u \in C^1 \Rightarrow \operatorname{div}(v \nabla u) = v \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u} + (\nabla u, \nabla v)$ .

Интегрируем по объёму в  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \oint_{\Gamma} (v \nabla u, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx$$

Заметим, что:

$$(v \nabla u, \vec{n}) = v \sum_{k=1}^{\dim \mathbb{R}^n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} n_k = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \cdot v(x)$$

При подстановке данного результата в равенство выше немедленно получим первую формулу Грина.

### Вторая формула Грина

Для получения второй формулы Грина необходимо вычесть из первой формулы Грина симметричное ему по  $u$  и  $v$  равенство:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \oint_{\Gamma} (u \nabla v, \vec{n}) \, ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) \, dx$$

□

### Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть  $\Omega$  - ограниченная область с границей  $\Gamma$  класса  $C^1$ ,  $u_0(x) \in C(\Gamma)$ ,  $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ . Требуется найти  $u(x)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = u_0(x). \end{cases} \quad (22)$$

Классическим решением задачи Дирихле [22](#) называется  $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , удовлетворяющая уравнению и начальным условиям.

**Лемма 14.2.** *Не может существовать более одного классического решения задачи [22](#).*

*Доказательство.* Если  $\exists u_I$  и  $u_{II}$  - классические решения задачи 22, то  $v(x) = u_I - u_{II}$  есть классическое решение полностью однородной задачи:  $\Delta v \equiv 0$ ,  $v|_{\Gamma} = 0$ .

По формуле Грина:

$$\int_{\Omega} v \Delta v dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx \Rightarrow \nabla v \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow v(x) = \text{const}$$

С учётом того, что  $\Delta(x) = 0$  и  $v(x)|_{\Gamma} = 0$ , получим, что  $v(x) = 0$ , а значит,  $u_I = u_{II}$ , и решение единственно.  $\square$

### Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона

Пусть  $\Omega$  -ограниченная область с границей класса  $C^1$ ,  $u_1(x) \in C(\Gamma)$ ,  $f(x) \in C(\bar{\Omega})$ . Требуется найти  $u(x)$  удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_1(x), x \in \Gamma. \quad (23)$$

**Определение 14.2.** Классическое решение задачи Неймана 23 есть такая функция  $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , удовлетворяющая уравнению и граничным условиям.

**Лемма 14.3.** Любые два классические решения задачи Неймана отличаются на константу.

*Доказательство.* Если  $\exists u_I$  и  $u_{II}$  - классические решения задачи 23, то  $v(x) = u_I - u_{II}$  есть классическое решение полностью однородной задачи:  $\Delta v \equiv 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0$ . По формуле Грина имеем:

$$\int_{\Omega} \Delta v v dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v ds - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \Rightarrow v \equiv \text{const}$$

$\square$

**Лемма 14.4.** Необходимым условием существования классического решения задачи Неймана является условие  $\int_{\Omega} f(x) dx = \oint_{\Gamma} u_1(x) ds$

*Доказательство.*

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} \Delta u \cdot 1 dx = [1\text{-ая формула Грина}] = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot 1 ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla 1) dx = \int_{\partial\Omega} u_1(x) \cdot 1 ds$$

$\square$

**Билет 15. Симметричность и положительная определенность оператора  $-\Delta$  при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.**

Задача на собственные функции и собственные значения оператора Лапласа при однородном условии Дирихле: Найти  $\lambda$  и  $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , где  $\Omega$  - область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , такие, что

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u(x) \neq 0, \end{cases}$$

**Утверждение 15.1** (без доказательства). *Существует счетное число собственных значений  $\{\lambda_k\}_k$ ,  $\{\lambda_k\} \rightarrow \infty$ , причем каждому  $\lambda_k$  соответствует конечное число собственных функций.*

Формула Грина справедлива и для комплексных функций. Считаем, что  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = -\lambda \int_{\Omega} u \bar{u} dx$$

$$\int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \bar{u} dS - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{u}) dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} - \text{соотношение Рэлея.}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$  (строго больше, т.к.  $\nabla u = 0 \Rightarrow u = 0$ ). В задаче Неймана  $\lambda = 0$  возможно.

**Утверждение 15.2.** *Оператор  $-\Delta$  с граничными условиями Дирихле является симметричным относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2(\Omega)$ :  $(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx$*

*Доказательство.* Пусть  $u(x), v(x)$  лежат в области определения нашего оператора

$$D_0(-\Delta) = \{u(x) : u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \Delta u(x) \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Симметричность оператора означает, что

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) \quad \forall u, v \in D_0(-\Delta).$$

Проверим это:

$$(-\Delta u, v) - (u, -\Delta v) = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx \stackrel{\text{2 формула Грина}}{=} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} u - \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v \right) dS = 0.$$

□

**Утверждение 15.3.** Собственные функции рассматриваемого оператора  $u_k(x)$  и  $u_m(x)$ , соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_k$  и  $\lambda_m$ , ортогональны относительно скалярного произведения в  $\mathbb{L}_2(\Omega)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}(-\Delta u_k, u_m) &= (u_k, -\Delta u_m) \\ \lambda_k(u_k, u_m) &= \lambda_m(u_k, u_m) \\ \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_m)(u_k, u_m) &= 0 \Rightarrow (u_k, u_m) = 0\end{aligned}$$

□

**Билет 16. Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.**

**Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.**

Задача: в круге  $D = \{x \mid |x| < R\}$  и на границе  $\Gamma = \partial D$  рассматриваем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in D \leftarrow \text{уравнение Пуассона} \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), x \in \partial D \end{cases} \quad (24)$$

Сделаем замену:  $x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi$ .

Функция  $\hat{u}(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ .

Аналогично  $\hat{u}_0(\rho, \varphi) = u_0(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \hat{f}(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ .

Задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \hat{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\hat{u}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\hat{u}_{\varphi\varphi} = \hat{f}(\rho, \varphi), 0 < \rho < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \hat{u}(R, \varphi) = \hat{u}_0(R, \varphi) \\ \hat{u}(\rho, \varphi) = \hat{u}(\rho, \varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Далее считаем  $\hat{f} = 0$ , то есть решаем уравнение Лапласа.

Предположение:  $u_0(x) \in C^1(\Gamma)$ . Предполагаем, что решение принадлежит классу  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . При этом  $\hat{u} - 2\pi$ -периодическая по  $\varphi \Rightarrow$  можно разложить  $\hat{u}_0, \hat{u}$  в ряды Фурье. [Если было бы уравнение Пуассона – требовали бы  $f \in C^1(\bar{D})$ .]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \varphi) \\ \hat{u}_0(R, \varphi) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} a_0(\rho) \\ A_0 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} \cos k\varphi + \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} \sin k\varphi \right], \text{ где} \\ \begin{Bmatrix} a_k(\rho) \\ A_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \cos k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}_0, \\ \begin{Bmatrix} b_k(\rho) \\ B_k \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \hat{u}(\rho, \psi) \\ \hat{u}_0(R, \psi) \end{Bmatrix} \sin k\psi d\psi, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Формально подставляем в уравнение (аргументы функций опускаем – они все уже определены).

$$\frac{1}{2} \left( a'' + \frac{1}{\rho} a' \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ a_k'' + \frac{1}{\rho} a_k' - \frac{k^2}{\rho^2} a_k \right] \cos k\varphi + \left[ b_k'' + \frac{1}{\rho} b_k' - \frac{k^2}{\rho^2} b_k \right] \sin k\varphi \right\} = 0$$

Из граничного условия:

$$\frac{1}{2} a_0(R) + \sum_k [a_k(R) \cos k\varphi + b_k(R) \sin k\varphi] = \frac{1}{2} A_0 + \sum_k [A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi]$$

В силу ортогональности тригонометрической системы в  $L_2[0, 2\pi]$  имеем на  $a_k$  и  $b_k$  следующие задачи:

$$\begin{cases} a_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}a_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}a_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ a_k(R) = A_k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_k''(\rho) + \frac{1}{\rho}b_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}b_k(\rho) = 0, 0 \leq \rho \leq R \\ b_k(R) = B_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Будем искать только ограниченные решения – для этого одного граничного условия окажется достаточно.

Решения данных уравнений Эйлера ищем в виде  $\alpha\rho^\mu$ :

Для первой серии задачи:  $\alpha[\mu(\mu - 1) + \mu - k^2]\rho^{\mu-2} = 0 \Rightarrow \mu = \pm k$ .

Общее решение:

$$a_k(\rho) = C_{1k}\rho^k + C_{2k}\rho^{-k}$$

$$a_0(\rho) = C_{10} \cdot 1 + C_{20} \cdot \ln \rho$$

Для ограниченности в круге берем  $C_{2k} = C_{20} = 0 \Rightarrow a_k = C_{1k}\rho^k, C_{1k} = \frac{A_k}{R^k}, k \in \mathbb{N}_0$ .

Итак,

$$\begin{cases} a_k(\rho) \\ b_k(\rho) \end{cases} = \begin{cases} A_k \\ B_k \end{cases} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \Rightarrow \hat{u}(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \quad (25)$$

Вернемся в исходные переменные. Заметим, что если ввести  $z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\varphi}$ , то  $\rho^k \cos k\varphi = \operatorname{Re} z^k$ ,

$\rho^k \sin k\varphi = \operatorname{Im} z^k$ .

Обозначим  $\operatorname{Re} z^k = p_k(x_1, x_2), \operatorname{Im} z^k = q_k(x_1, x_2)$ .

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] \quad (26)$$

**Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.**

**Теорема 16.1.** Пусть  $u_0 \in C(\Gamma)$ . Тогда:

1. Существует и единственно классическое решение  $u(x) \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$  задачи 24 с  $f \equiv 0$ .
2. В  $D$  это решение представимо рядами 25 и 26, сходящимися в  $|x| \leq R_1 < R$  равномерно.
3. Классическое решение представимо формулой Пуассона:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\partial D} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_\xi$$

4. Любые частные производные по  $x_1$  и  $x_2$  вычисляются почленным дифференцированием ряда.



*Доказательство.* 1. Единственность докажем позднее (в этом билете ее нет).

2. Пусть  $|u_0| < M$  на  $\Gamma$ . Тогда:

$$|A_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u_0| |\cos k\psi| d\psi \leq 2M, \quad |B_k| \leq 2M$$

Запишем

$$u(x_1, x_2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_k}{R^k} p_k(x_1, x_2) + \frac{B_k}{R^k} q_k(x_1, x_2) \right] = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2, \text{ где}$$

$$w_1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} z^k, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{R^k} z^k$$

Оба ряда сходятся абсолютно и равномерно в круге  $|z| \leq R_1 < R \Rightarrow$  порождают в круге радиуса  $R_1$  регулярные функции, что и требовалось.

3. Докажем формулу Пуассона:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(R, \psi) d\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_0(\psi) (\cos k\psi \cdot \cos k\varphi + \sin k\psi \sin k\varphi) d\psi \left(\frac{\rho}{R}\right)^k = \\ &= (\text{сходимость равномерная}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos k(\psi - \varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik(\psi-\varphi)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k \right] \hat{u}_0(\psi) d\psi \end{aligned}$$

Под интегралом ( $|p| = |\bar{p}| = \frac{\rho}{R} < 1$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}^k &= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-\bar{p}} - 1 = \frac{1-p+1-\bar{p}-1+p+\bar{p}-p\bar{p}}{(1-p)(1-\bar{p})} = \frac{1-|p|^2}{1-(p+\bar{p})+p\bar{p}} = \\ &= \frac{1-|p|^2}{1-2\operatorname{Re} p + |p|^2} = \frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R} \cos(\psi-\varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2}, \quad x = (\rho, \varphi) \\ &\quad \xi = (R, \psi) \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} \hat{u}_0(\psi) d\psi \\ \iff u(x) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} u_0(\xi) dS_{\xi} \end{aligned}$$

Заметим, что при  $u_0 \equiv 1$  мы получим ядро Пуассона:

$$1 \equiv \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} dS_{\xi}$$

Покажем, что  $u(x) \in C(\bar{D})$ .

Пусть  $x \in D \cap \{x : |x - x^0| < \delta_{n_0}\}$ , где  $x_0 \in \Gamma$ , а  $\delta_{n_0}$  выбрано так, чтобы  $|u_0(x) - u_0(x^0)| \leq \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} u(x) - u(x^0) &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \left( \int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| < \delta_{n_0}\}} + \int_{\{\xi \in \Gamma : |\xi - x^0| \geq \delta_{n_0}\}} \right) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} (u_0(\xi) - u_0(x^0)) dS_{\xi} = I_{<} + I_{\geq} \end{aligned}$$

$$|I_{<}| \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{(<)} \frac{|R^2 - |x|^2|}{|x - \xi|^2} |u_0(\xi) - u_0(x^0)| dS_{\xi} \leq \varepsilon \cdot \{\text{ядро Пуассона}\} = \varepsilon$$

$$|I_{\geq}| \leq \frac{1}{2\pi R} \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{\min|\xi - x|^2} \cdot 2M \cdot \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 4MR \frac{R - |x|}{\min|\xi - x|^2}, \text{ где } R + |x| \leq 2R \text{ и } \int_{(\geq)} dS_{\xi} \leq 2\pi R$$

$$|\xi - x| = |\xi - x^0 + x^0 - x| \geq |\xi - x^0| - |x^0 - x| > \delta_{n_0} - \frac{\delta_{n_0}}{2} = \frac{\delta_{n_0}}{2} \Rightarrow |I_{\geq}| \leq 16MR \frac{R - |x|}{\delta_{n_0}^2}$$

Возьмем  $\delta_n = \min\left\{\frac{\delta_{n_0}}{2}, \varepsilon \delta_{n_0}^2\right\}$ . Тогда при  $|x - x^0| < \delta_n$  будем иметь  $R - |x| \leq |x^0 - x| < \delta_n \Rightarrow$

Итак, при  $|x^0 - x| < \delta_n : |u(x) - u(x^0)| \leq |I_{<}| + |I_{\geq}| \leq \varepsilon + 16MR\varepsilon$ .

Непрерывность доказана.

#### 4. Дифференцируемость:

$u = \operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Im} w_2$ .

Вспомогательный факт:  $\tilde{w}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z) \Rightarrow \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{u}_{x_1} + i\tilde{v}_{x_1} \Rightarrow \tilde{u}_{x_1} = (\operatorname{Re} \tilde{w})_{x_1} = \operatorname{Re} (\tilde{w}_z)$

В нашем случае:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} w_1(z) = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (z^k)'_z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \operatorname{Re} \frac{dz^k}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^k} (p_k)_{x_1}'(x_1, x_2)$$

Аналогично для  $B_k$  и для производного любого порядка.

□

**Билет 17. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.**

**Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.**

Рассматривается уравнение Пуассона в  $\mathbb{R}^3$ :  $\Delta u(x) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u(x) = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , где  $\Omega$  – область.

**Определение 17.1** (Гармоническая функция). Функция  $u(x)$  называется гармонической в  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , если  $u(x) \in C^2(\Omega)$  и  $\Delta u(x) \equiv 0$  на  $\Omega$ .

Удобно перейти в сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Уравнение примет вид:

$$0 = \Delta \hat{u}(r, \theta, \varphi) = \hat{u}_{rr} + \frac{2}{r} \hat{u}_r + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \right]$$

В квадратных скобках написан оператор Лапласа-Бельтрами от функции  $\hat{u}$ . Решение зависящее от  $r$ , удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\hat{u}_{rr} + \frac{1}{r^2} \hat{u}_r = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = r^\mu \Rightarrow \mu(\mu - 1) + 2\mu = 0 \Rightarrow \hat{u}(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

Функция  $\hat{u}(r) = \frac{1}{r}$  – гармоническая всюду кроме 0.

**Лемма 17.1** (Интегральное представление решения уравнения Пуассона). Пусть  $\Omega$  – область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Пусть  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\Delta u \in C(\bar{\Omega})$ . Тогда для  $\forall x \in \Omega$   $u(x)$  представима в виде суммы трех потенциалов (объемного Ньютонова, простого слоя, двойного слоя):

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} \left( -\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy}_{\text{объёмный Ньютоновы́й потенциал}} - \underbrace{\oint_{\Gamma} \left( -\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y}_{\text{потенциал простого слоя}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( -\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) u(y) dS_y}_{\text{потенциал двойного слоя}}$$

*Доказательство.* Берем  $x \in G, \varepsilon > 0$  такое, что  $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$  ( $B$  – открытый шар в  $\mathbb{R}^3$ ). Строим область  $\Omega_x^\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$ ,  $\partial \Omega_x^\varepsilon = \Gamma \cup \gamma$ , где  $\gamma = \partial B(x, \varepsilon)$ .



В  $\Omega_x^\varepsilon$  ядро  $K_3(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty$  ( $\Delta K_3(x, y) \equiv 0$ ). Используем 2 формулу Грина:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x^\varepsilon} \Delta u(y) K_3(x, y) dy - \int_{\Omega_x^\varepsilon} u(y) \Delta K_3(x, y) dy = \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y + \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \\ &\iff \int_{\Omega_x^\varepsilon} f(y) K_3(x, y) dy + \oint_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y = \\ &= \oint_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y - \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \end{aligned}$$

**Offtop 17.1.** интеграл от  $\frac{1}{|x|^\alpha}$  сходится при  $\alpha < n = \dim \mathbb{R}^n$ . У нас  $n = 3, \alpha = 1$ .

Устремляем  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

1.  $\int_{\Omega_x^\varepsilon} \rightarrow \int_{\Omega}$  в силу последнего замечания.

$$\begin{aligned} 2. \oint_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint (u(y) - u(x) + u(x)) dS_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y + \\ &+ u(x) \oint_{\gamma} 1 dS_y \\ \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-y|} \right) &\rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \left| \oint_{\gamma} (u(y) - u(x)) dS_y \right| &\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \cdot \max_{|y-x| \leq \varepsilon} |u(y) - u(x)| \cdot \oint_{\gamma} dS_y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} K_3(x, y) dS_y \right| &\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} M \int_{\gamma} dS_y = M\varepsilon \rightarrow 0 \\ \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} \right| &= |(\nabla u, \vec{n})| \leq |\nabla u| \cdot |n| \leq M, \text{ так как } \nabla u \in C(\overline{\Omega}) \end{aligned}$$

Итак, после предельного перехода получим требуемое соотношение □

## Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Экскурс в обобщенные функции

**Определение 17.2.**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  – пространство пробных (основных) функций:

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ supp } \varphi(x) \text{ – компакт.}$

**Определение 17.3.** В  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  вводится сходимость по следующему правилу:  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \iff$

- $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathcal{D}^\alpha \varphi_k \rightrightarrows \mathcal{D}^\alpha \varphi$
- $\exists A > 0 : \varphi_k(x) \equiv 0$  при  $|x| > A \quad \forall k \in \mathbb{N}$  (у всех функций общий носитель)

Пример функции из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$$

**Определение 17.4.** Обобщенная функция  $f$  над  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  – всякий линейный непрерывный функционал над  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

**Определение 17.5.** Линейный функционал:  $(f, \alpha\varphi + \mu\psi) = \alpha(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$

**Определение 17.6.** Непрерывный функционал:  $\forall \{\varphi_k\} \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(\varphi_k) \rightarrow f(\varphi)$

По определению  $\forall \lambda, \mu$  - чисел,  $\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  обобщенная функция  $F = \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  
 $(F, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$

**Определение 17.7** (сходимость в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ).  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{\iff} (f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (слабая\* сходимость).

**Определение 17.8.** Функция  $f(x)$  называется локально интегрируемой, если

$$\forall B > 0 \quad \exists \int_{|x| < B} |f(x)| dx < \infty$$

Каждая такая  $f(x)$  порождает обобщенную функцию  $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ .

Если существует локально интегрируемая  $f(x)$  такая, что обобщенная функция  $f$  представляется в виде  $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ , то  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  называется регулярной.

**Лемма 17.2** (Дюбуа-Реймон). Если  $f$  и  $g$  непрерывны и порождают одну обобщенную функцию, то  $f \equiv g$ . Если  $f$  и  $g$  разрывны, то они совпадают почти всюду.

**Определение 17.9** ( $\delta$ -функция).  $(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$

$\delta$ -функция не является регулярной.

Обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Правило дифференцирования:  $(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \varphi)$ .

В частном случае  $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta \varphi)$

**Теорема 17.3.** Функция  $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$  является решением в обобщенных функциях уравнения  $\Delta E(x) = \delta(x)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp}\varphi \subset B(0, A)$ . Возьмем  $\Omega = B(0, A+1)$ . По теореме об интегральном представлении

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \int_{|y| < A+1} E(y) \Delta_y \varphi(y) dy + \oint_{|y|=A+1} \varphi(y) \frac{\partial E(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y - \oint_{|y|=A+1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vec{n}_y} E(y) dS_y = \\ &= (E, \Delta_x \varphi(x)) = (\Delta E, \varphi(x))\end{aligned}$$

Что и требовалось. □

**Определение 17.10.** Функция  $E(x)$  называется фундаментальным решением оператора Лапласа.

**Билет 18. Свойства гармонических функций в  $\mathbb{R}^3$ : бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.**

**Определение 18.1.** Функция  $u(x)$  гармоническая в  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , если

1.  $u(x) \in C^2(\Omega)$
2.  $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

**Теорема 18.1.** Всякая функция  $u(x)$ , гармоническая в области  $\Omega$ , является в  $\Omega$  бесконечно дифференцируемой, т.е.  $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ .

*Доказательство.* Возьмем  $x_0 \in \Omega$  и  $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ . Представим  $u(x)$  суммой:

$$u(x) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$



Теперь берем  $B_\delta(x_0) \subsetneq B_r(x_0)$ . Будем обозначать  $S(x_0, r)$  сферу  $\partial B_r(x_0)$ . Если  $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$ ,  $y \in S(x_0, r)$ , то  $|x-y| \geq r - \delta > 0$ .

Рассмотрим в  $\overline{B}_\delta(x_0)$

$$u_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y.$$

Напишем

$$\tilde{u}_0(x) = \oint_{|y-x_0|=r} D_x^\alpha \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Заметим, что  $\frac{-1}{4\pi|x-y|} \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0) \times S(x_0, r)) \Rightarrow$  записанные частные производные непрерывны, интеграл  $\tilde{u}_0$  существует  $\Rightarrow \tilde{u}_0(x) = D_x^\alpha u_0(x)$ .

Теперь берем

$$u_2(x) = \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) = \sum_1^n n_k \frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right)$$

В  $\overline{B}_\delta(x_0)$  запишем

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_1^3 \oint u_0(y) n_k(y) D_x^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \vec{y}_k} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \right) dS_y$$

Записанные частные производные непрерывны, интеграл  $\tilde{u}_2(x)$  существует  $\Rightarrow \tilde{u}_2(x) = D_x^\alpha u_2(x)$ .  
Итак, для  $u_0(x)$  и  $u_2(x)$  существуют частные производные любого порядка. Значит,  $u(x) \in C^\infty(\overline{B}_\delta(x_0))$ , где  $x_0$  - произвольная точка из  $\Omega$ .  $\Rightarrow u(x) \in C^\infty(\Omega)$   $\square$

**Теорема 18.2** (Теорема о среднем). Пусть  $u(x)$ , гармоническая в шаре  $B_r(x_0)$  и  $u(x) \in C^1(\overline{B}_r(x_0))$ . Тогда  $u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y$ . (в центре - среднее по значениям на сфере)

*Доказательство.*

$$u(x_0) = - \oint_{|y-x_0|=r} \left( \frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \stackrel{\rho=|x_0-y|}{=} \frac{-1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4\pi r^2},$$

тогда

$$\oint_{|y-x_0|=r} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) dS_y = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-x_0|=r} u(y) dS_y.$$

Покажем, что потенциал простого слоя равен нулю.

$$- \oint_{|y-x_0|=r} \left( \frac{-1}{4\pi|x_0-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{|y-x_0|=r} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|=r} (\nabla u(y), \vec{n}(y)) dS_y \stackrel{\text{Ф-ла Остр.-Гаусса}}{=} \\ = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \operatorname{div}(\nabla u) dy = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y-x_0|<r} \Delta u dy = 0$$

$\square$

**Теорема 18.3** (Обратная теорема о среднем). Пусть  $u(x) \in C(\Omega)$  и  $u(x)$  обладает свойством среднего  $\forall x \in \Omega$ , где  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  - произвольная область. Тогда  $u(x)$  - гармоническая функция на  $\Omega$ .

*Доказательство.*  $\forall x_0 \in \Omega \exists r > 0 : \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ . Рассмотрим решение

$$v(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y$$

$$\text{для задачи} \begin{cases} \Delta u(x) = 0, |x| < r \\ v|_{|x|=r} = u|_{|x|=r} \end{cases}$$

Введем  $w(x) = u(x) - v(x)$ ,  $w(x) \in C(|x| \leq r)$ , получим что  $w(x)$  удовлетворяет свойству среднего. Тогда по принципу максимума (для функции, удовлетворяющей свойству среднего, будет доказан в следующем билете)  $|w(x)| \leq \max_{|y-x|=r} |w(y)| = 0 \Rightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x: |x| < r$   $\square$



**Билет 19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции**

**Теорема (принцип максимума)**

**Теорема 19.1. (Принцип максимума)** Если  $u(x)$  - гармоническая в области  $\Omega$  и достигает  $\max$  или  $\min$  значения в точке  $a \in \Omega$ , то  $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in \Omega$

**Offtop 19.1.** Теорема справедлива в  $\mathbb{R}^n$

Доказательство. •

- Докажем вспомогательное локальное

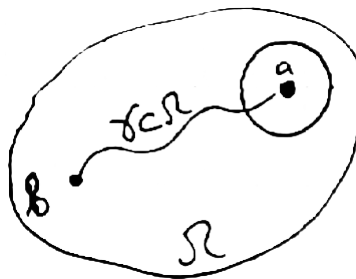
**Утверждение 19.2.** Пусть  $u(x) \in C^2(\Omega)$  достигает максимума в точке  $a$ , а так же удовлетворяет свойству среднего:

$$u(a) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y \quad \forall r : 0 < r < d_a = \text{dist}(a, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$$

Тогда  $u(x) \equiv u(a) \quad \forall x \in B(a, d_a)$

Доказательство. 
$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} u(y) dS_y = \frac{u(a)}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} dS_y + \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = u(a) + \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y \Rightarrow \\ &\oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\oint_{|y-a|=r} (u(y) - u(a)) dS_y}_{\leq 0, \text{ непрерывна}} = 0 \Leftrightarrow u(y) = u(a) \quad \forall y : |y - a| = r < d_a \quad \square \end{aligned}$$

- Докажем саму теорему



Соединим  $a$  и  $b$  кусочно-гладкой кривой. Эту кривую параметризуем натуральным параметром (параметризация кривой длиной её дуги):  $x = x(s), x(0) = a, x(L) = b$ . Обозначим  $d = \text{dist}\{\gamma = x; \partial\Omega\} > 0$  ( $d$  действительно  $> 0$  : если  $d = 0$ , то  $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \gamma : \rho(x_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Выделим из  $\{x_n\}$  сходящуюся  $\{x_{n_k}\} = \{y_k\}(\gamma -$

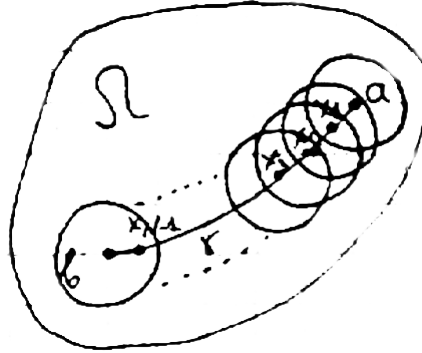
ограничено). Пусть  $y_k \rightarrow y_0$ . Тогда  $y_0$  - предельная для  $\partial\Omega$  в силу замкнутости  $y_0 \in \gamma \cup \partial\Omega \Rightarrow$  противоречие)

Разобьем  $[0, L]$  на части размера  $\Delta S = \frac{L}{N}$

Пусть  $\{S_k = k\Delta S, x_k = x(S_k)\}$ . Число  $N$  выберем так, чтобы  $\Delta S = \frac{L}{N} < d$



Заметим, что  $|x_k - x_{k-1}| \leq s_k - s_{k-1} < d(\cdot)$  - кратчайшее расстояние между точками этого отрезка).



Рассмотрим шары  $B_d(x_k)_{k=0}^N$ . В силу  $|x_k - x_{k-1}| < d$  верно  $x_{k+1} \in B_d(x_k)$ . Примем утверждение 19.2 к первому шару. Как следствие  $u(x_1) = u(a) \Rightarrow$  утверждение 19.2 применимо уже ко второму шару. В цепочке шаров конечное число  $\Rightarrow$  добираемся до точки  $b$  - теорема доказана.

□

• Заметим, что достаточно было потребовать свойство среднего и непрерывность, вместо гармоничности.

**Следствие.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область, а  $u(x)$  - гармоническая в  $\Omega$  и непрерывная на  $\bar{\Omega}$ . Тогда  $u(x)$  достигает  $\max$  и  $\min$  на  $\partial\Omega$ , т.е.  $\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$

*Доказательство.* Либо максимум/минимум на границе, либо  $u(x) \equiv \text{const}$  в  $\Omega$

□

**Следствие.** Для указанной в следствии 19  $u(x) \hookrightarrow |u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(y) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \\ -u(x) \leq \max_{\partial\Omega} (-u(y)) \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)| \end{cases} \quad (27)$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u(y)|$$

□

## Новая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$\Omega$  - ограниченная область

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u(x)|_{\partial\Omega} = u_0(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

**Определение 19.1.** Классическое решение задачи Дирихле - функция  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющая уравнению и граничному условию. (раньше было  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^{\boxed{1}}(\overline{\Omega})$ , единица была нужна для формул Грина, теперь убираем ее)

### Теорема единственности

**Теорема 19.3.** (единственности) Не может существовать более 1 классического решения задачи Дирихле (28).

*Доказательство.* Пусть  $u_1$  и  $u_2$  - классические решения (28). Тогда  $v(x) = u_1 - u_2$  - классическое решение полностью однородной задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(x) \equiv 0, x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

Согласно принципу максимума,  $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |v(x)| = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$

□

**Билет 20. Функция Грина для задачи Дирихле (случай  $\mathbb{R}^3$ ). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре**

**Функция Грина**

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  - ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Пусть  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  — некоторое классическое решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_0(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Запишем интегральное представление:

$$u = \int_{\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \Delta u(y) dy - \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y$$

Рассмотрим задачу при фиксированном  $x \in \Omega$ :

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, & \forall y \in \Omega \\ g(x, y)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Если  $\partial\Omega \in C^2$ , то решение существует (пока не можем это доказать).

Используем вторую формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_y u(y) g(x, y) dy - \int_{\Omega} u(y) \Delta_y g(x, y) dy &= \\ &= 0 \\ &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} g(x, y) dS_y - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \vec{n}_y} u(y) dS_y = 0$$

*wanted to find*

Тогда

$$u(x) = \int_{\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y) \right) dS_y$$

**Функция Грина**, по определению:

$$G(x, y) \triangleq \frac{-1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$$

Она симметрична и имеет ту же особенность, что и  $\frac{-1}{4\pi|x-y|}$

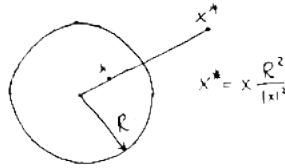
## Функция Грина для шара

Получим функцию Грина для шара:

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, y \in \Omega \\ g(x, y)|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi|x-y|} \end{cases}$$

Будем обозначать  $x^*$  точку, инверсную точке  $x$  относительно окружности  $|y| = R$ .

$$x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$$

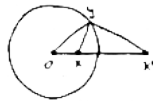


Покажем, что решением является функция:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4\pi R}, & x = 0 \end{cases}$$

Функция  $g(x, y)$  - гармоническая по  $y$  в шаре  $|y| < R$  (особенность  $y = x^*$  лежит вне шара, т.к.  $x^*$  лежит внутри него).

Посмотрим значение функции  $g$  на границе:



Заметим, что  $\triangle OXY \sim \triangle OYX^*$ , т.к.  $\angle XOY$ - общий, и  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|x^*|}$ .

Из подобия  $\frac{|y-x|}{|y-x^*|} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{R}$ .

Значит,  $\frac{R}{4\pi|x||y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{4\pi y}$ , что и требовалось.

## Формула Пуассона в шаре

Получим формулу Пуассона решения задачи Дирихле в шаре:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \oint_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} dS_y$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial G}{\partial y_k} \Big|_{|y|=R} = \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left[ -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|y-x|} - \frac{R}{|x|} \frac{1}{|y-x^*|} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{y_k}{R} \left[ \frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \frac{y_k - x_k^*}{|y-x^*|^3} \right] \end{aligned}$$

Вспомним, что  $\frac{R}{|x| \cdot |y-x^*|} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{|x-y|}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} \Big|_{|y|=R} &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4\pi} \frac{y_k}{R} \left[ \frac{y_k - x_k}{|y-x|^3} - \frac{R}{|x|} \left( \frac{|x|}{R} \right)^3 \frac{y_k - x_k^*}{|y-x|^3} \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \left[ y_k - x_k - \frac{|x|^2}{R^2} (y_k - x_k^*) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[ \langle y, y-x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \langle y, y-x^* \rangle \right] = \frac{1}{4\pi R |y-x|^3} \left[ \underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} - \langle y, x \rangle - \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=R^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|x|^2}{R^2} \underset{=\langle y, x \rangle}{\langle y, x^* \rangle} \right] = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R |y-x|^3} \end{aligned}$$

Итак, **формула Пуассона для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:**

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u_0(y) dS_y$$

## Билет 21. Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$ )

### Формулировка теоремы

**Теорема 21.1. (Теорема Лиувилля)** Функция  $u(x)$ , гармоническая в  $\mathbb{R}^3$  ( $\Delta u = 0$ ) и имеющая на бесконечности рост не выше степенного (т.е.  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu$ ), является многочленом от  $x_1, x_2, x_3$  степени не выше  $\mu$ .

### Доказательство при $\mu \geq 0$

Общая идея - доказать, что все производные степени выше  $\mu$  равны нулю.

1. Выберем  $x \in \mathbb{R}^3, R > 0$  так, чтобы  $R > 2|x|$ :



В области  $|x| < R$   $u(x)$  - гармоническая, а  $u(x)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ .

Тогда применима формула Пуассона для шара:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} u(y) dS_y$$

В силу выбора  $R$  имеем  $|y - x| \geq |y| - |x| \geq \frac{R}{2} > 0$ .

Можем записать:

$$\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left( \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y$$

2. Докажем по индукции, что

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \mathcal{D}_x^\alpha \left[ \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}},$$

где  $P_\alpha$  - однородный многочлен степени  $|\alpha| + 2$  от  $R, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ .

- База:

$$\mathcal{D}_x^{(0,0,0)} \left[ \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{|x - y|^3}$$

- Переход. Пусть требуемое верно  $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$ . Возьмём  $\hat{\alpha} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3)$ :

$$\mathcal{D}_x^{\hat{\alpha}} \left[ \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{P_\alpha(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\alpha|}} \right] = \frac{\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_1} \cdot |x - y|^2 - (3 + 2|\alpha|) \cdot P_\alpha \cdot (x_1 - y_1)}{|x - y|^{3+2(|\alpha|+1)}} = \frac{P_{\hat{\alpha}}(R, x, y)}{|x - y|^{3+2|\hat{\alpha}|}}$$

3. Покажем теперь, что  $\forall |x| \leq \frac{R}{2}, \forall |y| = R, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  справедлива оценка:

$$\left| \mathcal{D}_x^\alpha \left( \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \right) \right| \leq \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}}.$$

Действительно,  $|P_\alpha| \leq \tilde{C}_\alpha R^{|a|+2}$ , а  $|x - y|^{3+2|\alpha|} \geq \left(\frac{R}{2}\right)^{3+2|\alpha|} = \hat{C}_\alpha R^{3+2|\alpha|}$ . Отсюда следует требуемая оценка.

4. Теперь докажем, что  $\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| > \mu$ .

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_x^\alpha u(x)| &= \frac{1}{4\pi R} \left| \oint_{|y|=R} \mathcal{D}_x^\alpha \left( \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^3} \right) u(y) dS_y \right| \leq \frac{1}{4\pi R} \cdot C \cdot (1 + |x|)^\mu \cdot \frac{C_\alpha}{R^{1+|\alpha|}} \cdot 4\pi R^2 \leq \\ &\leq \frac{C \cdot C_\alpha \cdot (1 + R)^\mu}{R^{|\alpha|}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Значит, } \mathcal{D}_x^\alpha u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| > \mu. \end{aligned}$$

5. Для гармонической в  $\mathbb{R}^3$  функции  $u(x)$  справедливо представление:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \\ &= u(0) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}_x^\alpha u(0) x^\alpha, \end{aligned}$$

где  $m = [\mu], \alpha! \triangleq \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!, x^\alpha \triangleq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ .

### Доказательство при $\mu < 0$

Пусть  $\mu < 0$ . Тогда т.к.  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\mu, \mu < 0$ , то  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^0 \equiv C_1$ .

По предыдущему пункту,  $u(x)$  - полином степени 0, т.е. константа.

Но  $|u(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{|\mu|}} \Rightarrow u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$ .

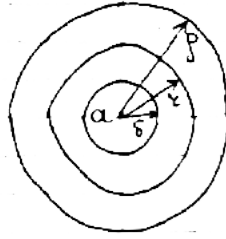


## Билет 22. Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$ )

**Теорема 22.1. (об устранимой особой точке).** Пусть  $u(x)$  - гармоническая в  $\mathring{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^3$  и  $u(x) = o(E(x-a))$  при  $x \rightarrow a$ , где  $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ . Тогда  $u(x)$  можно так доопределить в точке  $a$ , что она будет гармонической в  $B_\rho(a) = \{x : |x-a| < \rho\}$ .

**Доказательство.**

1.  $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \Leftrightarrow |x| \cdot u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
2. Возьмём  $r < \rho$ .



Функция  $u(x)$  непрерывна на  $\partial B_r(a)$ .

Построим гармоническую функцию:

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{4\pi r} \oint_{|y|=r} \frac{r^2 - |x|^2}{|y-x|^3} u(y) dS_y \in C(|x| \leq r)$$

3. Считаем  $a = 0$ . Покажем, что  $u(x) \equiv \hat{u}(x)$  при  $0 < |x| \leq r$ . Строим  $v(x) = u(x) - \hat{u}(x)$ . Эта функция гармоническая в  $\mathring{B}_r(a)$ , непрерывная на  $(0 < |x| \leq r)$ , а также  $v(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| = r$  и  $|x| \cdot v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .
4. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим функции  $W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x)$ .

Функции  $W_\varepsilon^\pm$  также гармонические в  $(0 < |x| < r)$ , непрерывны на  $(0 < |x| \leq r)$ , а  $W_\varepsilon^\pm(x)|_{|x|=r} = \frac{\varepsilon}{|x|} > 0$ .

5. Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы  $\forall x : |x| \leq \delta \rightarrow |x| \cdot |v(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

При  $|x| \leq \delta$ :

$$W_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon}{|x|} \mp v(x) \geq \frac{\varepsilon}{|x|} - |v(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[ 1 - \frac{|x| \cdot |v(x)|}{\varepsilon} \right] \geq \frac{\varepsilon}{|x|} \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{\varepsilon}{2|x|} > 0$$

6. При  $\delta \leq |x| \leq r$  функции  $W_\varepsilon^\pm(x)$  — гармонические в  $(\delta < |x| < r)$  и непрерывны на замыкании этой ограниченной области  $\Rightarrow$  по принципу максимума максимум и минимум достигаются на границе.

Значит,  $W_\varepsilon^\pm(x) > 0$  при  $\delta \leq |x| \leq r$ .

Итак,  $W_\varepsilon^\pm(x)$  положительна в  $(0 < |x| \leq r) \Rightarrow |v(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|}$  в  $(0 < |x| \leq r)$ .

Значит,  $v(x) \equiv 0$  при  $0 < |x| \leq r \Rightarrow v(x)$  можно продолжить на  $|x| \leq r$ , положив  $v(0) = 0$ , ч.т.д.

**Билет 23. Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа (случай  $\mathbb{R}^3$ ).**

Пусть  $x$  лежит в окрестности  $\infty$ , т.е.  $|x| > R > 0$ , а  $y$  лежит в окрестность нуля. Считаем  $y \neq 0$ . Тогда между этими окрестностями есть биекция - инверсия:  $x^* = x \frac{R^2}{|x|^2}$ ,  $x = x^* \frac{R^2}{|x^*|^2}$ ;  $|x||x^*| = R^2$

**Лемма 23.1.** Если функция  $u(x)$  гармоническая в окрестности  $\infty$ :  $|x| > R$  в  $\mathbb{R}^n$ , то функция  $u^*(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \cdot u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right)$  будет гармонической в проколотой окрестности нуля. Если  $u^*(y)$  гармоническая в проколотой окрестности нуля, то  $u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \cdot u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right)$ -гармоническая в окрестности  $\infty$ .

**Определение 23.1.** Преобразование  $u(x) \mapsto u^*(y)$  и  $u^*(y) \mapsto u(x)$  называется **преобразованием Кельвина**.

*Доказательство.* Пусть  $x \in U_\varepsilon(\infty)$ ,  $y \in U_\delta(0)$ ,  $|x| = \rho$ ,  $|y| = r$ ,  $x = y \frac{R^2}{|y|^2}$ .

Перейдем в сферическую систему. Лемму докажем в одну сторону.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3).$$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = \rho \cos \theta \end{cases}, \begin{cases} y_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ y_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ y_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

Тогда  $\hat{u}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{r} \hat{u}\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)$ :

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \hat{u}^*(r, \theta, \varphi)) + \frac{1}{r^2} \underbrace{\Delta'_{\theta, \varphi}}_{\text{оп-р Лапласа -Бельтрани}} \hat{u}^*(r, \theta, \varphi) \right] = \frac{R}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \underbrace{\hat{u}\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)}_{\rho} \right] + \frac{R}{r^3} \Delta'_{\theta, \varphi} \underbrace{\hat{u}\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right)}_{\rho}$$

Вспомогательная выкладка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ -\frac{\rho^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] = \frac{\rho^2}{R^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] \end{aligned}$$

С учетом выкладки имеем:

$$\widehat{\Delta_y u^*}(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho^3}{R^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) \right] + \frac{\rho^3}{R^5} \Delta'_{\theta, \varphi} \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\rho^5}{R^5} \Delta_x \hat{u}(\rho, \theta, \varphi) = 0$$

□

**Теорема 23.2.** Пусть  $u(x)$  – гармоническая функция в окрестности бесконечности  $|x| > R$  и  $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ . Тогда  $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$  и  $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$

*Доказательство.* Применим к нашей функции прямое преобразование Кельвина:  $u^*(y) = \frac{R}{|y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right)$ . Эта функция гармоническая в проколотой окрестности нуля:  $0 < |y| < R$ .

Далее,  $|y|u^*(y) = Ru\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  (аргумент  $\rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow u^*(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right), y \rightarrow 0$ .

- Воспользуемся теоремой об устранимой точке и доопределим  $u^*(y)$  в нуле. Теперь  $u^*(y)$  – гармоническая в  $|y| < R \Rightarrow$  в  $|y| \leq \frac{R}{2}$  есть непрерывность вплоть до границы любых производных  $\Rightarrow \forall \alpha \exists M_\alpha: |D^\alpha u^*(y)| \leq M_\alpha \forall y: |y| \leq \frac{R}{2}$
- Пусть  $|x| \geq 2R, y = x^* \Rightarrow |x^*| = |y| \leq \frac{R}{2}$ . Тогда  $u(x) = u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x||y|} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R}{|x|} u^*(y)$ .  
Можем оценить:  $|u(x)| \leq \frac{R}{|x|} M_0 \Rightarrow u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), x \rightarrow \infty$ .
- Возьмем теперь  $\alpha = (1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} &= D^\alpha u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{R}{|x|} u^*(y) \right) = -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R}{|x|} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{R}{|x|^3} x_1 u^*(y) + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \left[ \delta_k^1 - 2 \frac{x_1 x_k}{|x|^2} \right] \end{aligned}$$

Оценка:

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right| \leq R \frac{x_1}{|x|} \frac{1}{|x|^2} \underbrace{|u^*(y)|}_{\leq M_0} + \frac{R^3}{|x|^3} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\left| \frac{\partial u^*(y)}{\partial y_k} \right|}_{\leq M_{(1,0,0)}} \left[ \delta_k^1 + 2 \frac{|x_1| \cdot |x_k|}{|x|^2} \right] \leq \frac{C}{|x|^2}$$

Итак,  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ . Аналогично, по индукции, и для других производных.

□

Постановка внешних задач.

**Определение 23.2.** Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  называется внешней, если  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} = \Omega_1$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$

**Определение 23.3.** Внешнюю область в  $\Omega$  будем называть внешней областью с гладкой (кусочно-гладкой) границей, если  $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  – область с (кусочно-гладкой) границей.

**Внешняя задача Дирихле** Найти  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = u_0(x), \quad x \in \Gamma \\ u(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

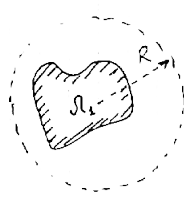
Такое решение называется **классическим**

Отличие постановок внешних и внутренних задач -  $u(x) \rightarrow 0$  во внешних задачах. Для внутренней задачи Неймана - даже при выполнении условий разрешимости  $\oint u_1(x) dS_x = 0$  решение не единственно

**Теорема 23.3.** *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Дирихле*

*Доказательство.* Если  $u_1, u_2$  - классические решения, то  $v(x) = u_1 - u_2$  - удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} v(x)|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Строим сферу радиуса  $R \geq \tilde{R}(\varepsilon), \Omega_1 \subset B_R(o)$ . По следствию из принципа максимума  $|v(x)| \leq \max_{\partial\Omega_1 \cup \partial B_R(0)} |v(y)| \leq \varepsilon$

Т.к.  $\varepsilon > 0$  было выбрано произвольно, имеем  $v(x) \equiv 0$  в  $\Omega \cup \Gamma$  □

**Теорема 23.4.** *Не может существовать более 1 классического решения внешней задачи Неймана*

*Доказательство.* Если  $u_1, u_2$  - классические решения, то

$$\underbrace{v(x) = u_1 - u_2}_{\text{гармоническая в } \Omega \text{ и } C^2(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)} \quad -$$

удовлетворяет полностью однородной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0 \\ v(x) \rightarrow_{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{R}(\varepsilon): \forall x: |x| > \tilde{R}(\varepsilon) \rightarrow |v(x)| < \varepsilon) \end{cases}$$



Возьмем  $R : \Omega_1 \subset B_R(0)$ ,  $\rho > R$ . По I-ф-лу Грина для  $v$

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} \Delta v \cdot v \cdot dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x + \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x - \int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Получили  $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} v(x) dS_x$ . Далее  $\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx \leq$

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_1} |\nabla v(x)|^2 dx = \oint_{\partial B_R(0)} \left| \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right| |v(x)| dS_x \leq (\text{теорема об асимптотике гармонических функций}) \leq \frac{C_1}{\rho^2} \cdot \frac{C_2}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

Итак,  $\nabla v(x) \equiv 0 \Rightarrow v(x) \equiv \text{const} = 0$ , ч.т.д. □

**Билет 24. Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области, их непрерывность в пространстве  $C(\bar{G})$ . Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.**

**Определение 24.1** (Интегральное уравнение Фредгольма второго рода). Уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Здесь:

- $x \in \bar{G}$ ,  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ ;
- $f(x) \in C(\bar{G})$  — задана;
- $K(x, y) : (\bar{G} \times \bar{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\lambda$  — числовой параметр;
- $u(x) \in C(\bar{G})$  — искомая функция.

**Определение 24.2** (Интегральный оператор). Оператор  $K$  такой, что

$$(Ku)(x) = \int_G K(x, y)u(y)dy,$$

называется интегральным оператором с ядром  $K(x, y)$ .

**Теорема 24.1.** Если ядро  $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ , то оператор  $K$  ограничен в  $C(\bar{G})$  и имеет место оценка

$$\|K\| \leq \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \leq \max_{x, y \in \bar{G}} |K(x, y)|mesG$$

*Доказательство.* Если  $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ , то  $K : C(G) \rightarrow C(G)$ .

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{C(\bar{G})} &= \max_{\bar{G}} |(Ku)(x)| = \max_{\bar{G}} \left| \int_G K(x, y)u(y)dy \right| \leq \max_{\bar{G}} \int_G |K(x, y)||u(y)|dy \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \max_{y \in \bar{G}} |u(y)| \int_G |K(x, y)|dy = \|u\|_{C(\bar{G})} \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \Rightarrow \|K\| = \sup_{\|u\|_{C(\bar{G})}=1} \frac{\|Ku\|_{C(\bar{G})}}{\|u\|_{C(\bar{G})}} \leq \\ &\max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|dy \end{aligned}$$

□

**Определение 24.3** (Полярное ядро). Ядро  $K(x, y)$  называется полярным, если его можно представить в виде  $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y$ , где  $\kappa \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ ,  $\alpha < n$  — размерность пространства.

**Лемма 24.2** (Признак полярного ядра). Ядро  $K$  является полярным  $\Leftrightarrow K(x, y) \in C((\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\})$  и  $|K(x, y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\beta} \quad \forall x, y \in \bar{G}, x \neq y, B > 0, \beta < n$ .

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ): Пусть ядро полярное. Тогда  $\exists B : |\kappa| \leq B$  на  $\bar{G} \times \bar{G}$  и  $|K| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha}$ .

( $\Leftarrow$ ): Пусть  $\beta < n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \beta + \varepsilon < n$ . Рассмотрим  $\kappa = \begin{cases} K(x, y)|x - y|^{\beta+\varepsilon}, & x, y \in G, x \neq y; \\ 0, & x = y \in G. \end{cases}$

Построенная  $\kappa$  непрерывна в  $(\bar{G} \times \bar{G}) \setminus \{x = y\}$ .

Возьмем  $x^0, y^0 \in G, x^0 \neq y^0 : |\kappa(x, y) - \kappa(x^0, y^0)| = |\kappa(x, y)| \leq |K||x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq \frac{B}{|x-y|^\beta}|x - y|^{\beta+\varepsilon} \leq B|x - y|^\varepsilon = B|(x - x^0) - (y - y^0)|^\varepsilon \leq B(|x - x^0| + |y - y^0|)^\varepsilon \Rightarrow \kappa$  непрерывна всюду в  $\bar{G} \times \bar{G}$ .

Очевидно из определения  $\kappa$ , что можем записать  $K(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^{\beta+\varepsilon}}$ , т.е. это ядро – полярное по определению.  $\square$

**Определение 24.4** (Транспонированное ядро). Ядром, транспонированным к ядру  $K(x, y)$ , называется ядро  $K'(x, y) = K(y, x)$ . Соответствующий оператор  $K'$  так же называют транспонированным.

**Теорема 24.3.** *Интегральный оператор  $K$  с полярным ядром является ограниченным оператором в  $C(\bar{G})$ . Справедлива оценка:  $\|K\| \leq \sup_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy$ .  $\forall \varepsilon > 0$  оператор  $K$  можно представить в виде суммы  $K = K_\varepsilon^{cont} + K_\varepsilon^{pol}$ , где  $\|K_\varepsilon^{pol}\| \leq \varepsilon$ ,  $\|(K_\varepsilon^{pol})'\| \leq \varepsilon$ ,  $K_\varepsilon^{cont}$  — и.о. с непрерывным ядром,  $K_\varepsilon^{pol}$  — и.о. с полярным ядром.*

*Доказательство.*

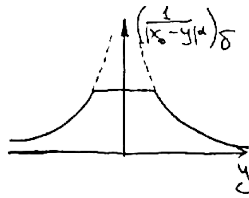
1. Пусть  $\psi(y) = K(x, y)u(y)$ . Функция  $\psi$  непрерывна при  $y \neq x$ .

В особенности:  $|\psi(y)| = |K(x, y)||u(y)| \leq \frac{B}{|x-y|^\alpha} \|u\|_{C(\bar{G})}$  — интегрируема, т.к.  $\alpha < n$ .

Значит, порождается функция  $\varphi(x) = \int_G \psi(y) dy = \int_G K(x, y)u(y) dy$  — этот интеграл существует  $\forall x \in \bar{G}$ .

2. Определим  $\delta$ —срезку функции  $\frac{1}{|x-y|^\alpha}$  :

$$\left( \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha}, & |x-y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta^\alpha}, & |x-y| < \delta. \end{cases} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$



3. Представим  $K(x, y) = K_\delta^1(x, y) + K_\delta^2(x, y)$ , где  $K_\delta^1(x, y) = \kappa(x, y) \left( \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right)_\delta$ ,

$$K_\delta^2(x, y) = \begin{cases} 0, & |x-y| \geq \delta; \\ \kappa(x, y) \left( \frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha} \right), & |x-y| < \delta. \end{cases}$$



4. Выберем произвольно  $u(x) \in C(\bar{G})$  и рассмотрим  $\|K_\delta^2 u\|_{C(\bar{G})}$ :

$$\|K_\delta^2 u\| = \max_{x \in G} \left| \int_{|y-x| < \delta} \kappa(x, y) \left( \frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha} \right) u(y) dy \right| \leq B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|y-x| < \delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B \|u\|_{C(\bar{G})} \int_{|z| < \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha}.$$

Замена  $\begin{cases} x_k = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k, & k = 1, \dots, n-1; \\ x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}, \end{cases}$  где  $\varphi_k \in [0, \Pi]$ ,  $\varphi_n \in [0, 2\Pi]$

Якобиан  $J = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}$ . Получили:

$$\|K_\delta^2 a\| \leq C_1 \|u\|_{C(G)} \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr = C \|u\|_{C(G)} \delta^{n-\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Получили  $K_\delta^2 u \rightarrow Ku$  по норме  $\Rightarrow Ku \in C(\bar{G})$ .

5.  $\|K\| \leq \|K_\delta^1\| + \|K_\delta^2\| \leq C\delta^{n-\alpha} + \|K_\delta^1\| < \infty \Rightarrow K$  — ограничен.

Для транспонированного ядра все рассуждения аналогичны, т.к. полярное ядро  $K = \frac{\kappa(x, y)}{|x-y|^\alpha}$  при замене  $x$  на  $y$  изменяет только непрерывный числитель  $\kappa$ .

□

**Билет 25. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором  $K$ . Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора  $(I - \lambda K)^{-1}$ .**

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

**Теорема 25.1.** Пусть в интегральном уравнении (1) ядро  $K$  полярное и выполнено  $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$ , тогда:

- $\forall f \in C(G)$  (1) имеет единственное решение  $u(x) \in C(\overline{G})$ . Это решение при фиксированном  $\lambda_{fix}$  представимо абсолютно сходящимся в  $C(\overline{G})$  рядом Неймана:

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i K^i f(x), \quad x \in G$$

- Оператор  $I - \lambda K$  отображает всё  $C(\overline{G})$  на всё  $C(\overline{G})$  и имеет на  $C(\overline{G})$  непрерывный обратный оператор  $(I - \lambda K)^{-1}$ , причём  $\|(I - \lambda K)^{-1}\| \leq (1 - |\lambda| \cdot \|K\|)^{-1}$

*Доказательство.* 1. Отметим, что оператор  $\lambda K$  сжимающий:  $\|\lambda K\| = |\lambda| \cdot \|K\| < 1$ .

Построим итерационный процесс:

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x) \\ u_1 &= f(x) + \lambda K u_0(x) = f(x) + \lambda K f(x) \\ &\dots \\ u_n &= f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i K^i f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Все  $u_k(x) \in C(\overline{G})$ , причем  $u_k = S_k$  –  $k$ -я частичная сумма ряда Неймана. Далее,

$$\begin{aligned} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq |\lambda|^i \cdot \|K\|^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\|_{C(\overline{G})} \implies \\ \implies \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f(x)\|_{C(\overline{G})} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (|\lambda| \cdot \|K\|)^i \|f\| = \frac{\|f\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}. \end{aligned}$$

Указанный в условии ряд сходится абсолютно в банаховом пространстве  $C(\overline{G}) \implies$  он сходится  $\implies$

$$\implies \exists u(x) \in C(\overline{G}) : \|U - U_n\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies U_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{C(\overline{G})}} U$$

- Покажем что  $U$  – решение:  $U_n = f + \lambda K U_{n-1}$ , при этом  $U_n \longrightarrow U$  а  $\lambda K U_{n-1} \longrightarrow \lambda K U$  в силу непрерывности оператора  $K$ .

- Единственность: пусть  $U_I, U_{II}$  – решения, обозначим  $V = U_I - U_{II} \in \overline{G}$ . При этом  $V$  удовлетворяет однородному уравнению  $V = \lambda K V$ ,  $x \in C(\overline{G})$ . Тогда

$$\|V\| \leq |\lambda| \cdot \|K\| \cdot \|V\| \longrightarrow (1 - |\lambda| \cdot \|K\|) \cdot \|V\| \leq 0 \longrightarrow \|V\| = 0 \longrightarrow V \equiv 0$$

2.  $u = \lambda K u + f \longleftrightarrow (I - \lambda K)u = f$ . То, что  $I - \lambda K$  отображает всё  $C(\overline{G})$ , – ясно. Согласно пункту 1  $\forall f \in C(\overline{G}) \exists! u(x)$  – решение, значит оператор отображает всё  $C(\overline{G})$  на всё  $C(\overline{G})$ . Значит, существует обратный оператор  $(I - \lambda K)^{-1}$ . Он ограничен т.к.

$$\|(I - \lambda K)^{-1}f\|_{C(\overline{G})} = \|U\|_{C(\overline{G})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda^i K^i f\|_{C(\overline{G})} \leq \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} < \infty$$

□

**Билет 26. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.**

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

**Определение 26.1.** Интегральное уравнение вида

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, \quad K'(x, y) = K(y, x)$$

называется союзным уравнению (1).

**Определение 26.2.** Ядро  $K(x, y) \in (C(\overline{G}) \times C(\overline{G}))$  называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y), \quad a_i, b_i \in C(\overline{G})$$

Будем считать что  $\{a_1 \dots a_N\}$  и  $\{b_1 \dots b_N\}$  – линейно независимые наборы (если это не так, то уменьшим  $N$ ). Будем теперь рассматривать уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G \left[ \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (2)$$

- Введем в  $C(\overline{G})$  билинейную форму  $\langle u; v \rangle = \int_G u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in C(\overline{G})$
- Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} - \mu_{ij} &= \langle b_i; a_j \rangle; \quad A = \|\mu_{ij}\|_{i,j}^N \\ - \varphi_i &= \langle b_i; f \rangle; \quad \vec{\varphi} = \|\varphi_1 \dots \varphi_N\|^T \\ - c_i &= \langle b_i; u \rangle; \quad \vec{c} = \|c_1 \dots c_N\|^T \end{aligned} \quad (3)$$

•

**Лемма 26.1** (об эквивалентности). Пусть  $u(x) \in C(\overline{G})$  – решение уравнения (2). Тогда  $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$ ,  $x \in \overline{G}$ , где  $(\vec{c})$  определяется (3) и удовлетворяет системе  $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$ . Обратно, если  $(\vec{c})$  – некоторое решение системы  $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$  то  $u(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i a_i(x) + f(x)$ ,  $x \in \overline{G}$  является решением интегрального уравнения.

*Доказательство.* 1. Пусть  $u(x)$  решение интегрального уравнения. Тогда

$$u(x) = \lambda \int_G \left[ \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(y) \right] u(y)dy + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x)c_i + f(x)$$

Домножим на  $b_i$  и проинтегрируем по  $G$ :

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i \iff \vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{\varphi}$$

2. Обратно, если  $c_i = \lambda \sum_{j=1}^N \mu_{ij} c_j + \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  то рассмотрим  $u_*(x) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) c_i + f(x)$ . Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} u_* - \lambda \int_G K(x, y) u_*(y) dy - f(x) &= \\ &= u_* - \lambda \int_G \left[ \sum_{i=1}^N a_i(x) b_i(y) \right] u_*(y) dy - f(x) = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[ c_j - \int_G b_j(y) u_*(y) dy \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \left[ c_j - \lambda \sum_{i=1}^N c_i \underbrace{\int_G b_j(y) a_i(y) dy}_{\mu_{ji}} - \underbrace{\int_G b_j(y) f(y) dy}_{\varphi_j} \right] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \underbrace{\left[ c_j - \lambda \sum_{i=1}^N \mu_{ji} c_i - \varphi_j \right]}_0 = \end{aligned}$$

□

Таким образом, исследование интегральных уравнений с вырожденным ядром эквивалентно исследованию системы  $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$ .

**Offtop 26.1.** Отметим что для союзного уравнения  $v(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \underbrace{\int_G a_j(y) v(y) dy}_{d_j} + g(x)$

соответствующей системой является  $(E - \lambda A^T) \vec{d} = \vec{\varphi}$ , где  $\vec{\varphi} = \int_G \vec{a}(y) g(y) dy$ .

### Разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром

Пусть  $D(\lambda) = \det(E - \lambda A) = \det(E - \lambda A^T)$ . Ясно что  $D(\lambda) \neq 0$  т.к.  $D(0) = 1$ .  $D(\lambda)$  есть многочлен  $P(\lambda)$ ,  $\deg P \leq N \longrightarrow$  он имеет  $p$  действительных корней  $\lambda_1 \dots \lambda_p$ ,  $0 \leq p \leq N$ .

- Если  $D(\lambda) \neq 0$  то  $\forall k : \lambda_k \neq \lambda \longrightarrow$  у уравнения  $(E - \lambda A) \vec{c} = \vec{\varphi}$  решение существует и оно единственно. Аналогичное утверждение верно и для союзного уравнения.
- Если  $\exists k : \lambda_k = \lambda \rightarrow Rg(E - \lambda A) = Rg(E - \lambda A^T) = r < N$

Пусть  $m = N - r > 0$ . Тогда базис в пространстве решений  $(E - \lambda A)\vec{c}$  обозначим как  $\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n$  а базис в пространстве решений  $(E - \lambda A^t)\vec{d} = 0$  обозначим как  $\vec{d}_1 \dots \vec{d}_n$ . Соответствующие им решения обозначим  $u_1 \dots u_m$  и  $v_1 \dots v_m$  соответственно  $(u_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) c_{j,k}, v_k(x) = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) d_{j,k})$ .

Покажем что  $u_1 \dots u_m$  базис решения однородного уравнения. Пусть

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0 \iff \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[ \lambda \sum_{j=1}^n a_j(x) c_{j,i} \right] = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i c_{i,j} = 0 \iff \sum_{i=0}^m \alpha_i \vec{c}_i = 0$$

Значит система  $u_1 \dots u_m$  — линейно независима.

**Определение 26.3** (Собственные функции и собственные числа оператора  $K$ ). Функция  $u(x) \in C(\overline{G})$ ,  $u \neq 0$  удовлетворяющая уравнению

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y) u(y) dy, \quad x \in C(\overline{G})$$

называется собственной функцией ядра  $K$  или собственной функцией оператора  $K$ . Соответствующие собственным функциям  $\lambda$  называются характеристическими числами ядра/оператора  $K$ .

Свойства характеристических чисел:

- $\lambda \neq 0$  (иначе  $u \equiv 0$ ).
- $\lambda$  — не собственное значение оператора:  $u = \lambda K u \Leftrightarrow K u = \frac{1}{\lambda} u \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$  — собственное значение.
- Собственные значения  $K$  и  $K'$  совпадают.

Рассмотрим систему  $(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{\varphi}$ . По теореме Фредгольма из линейной алгебры (2 сем) эта система совместна тогда и только тогда, когда каждое решение сопряженной однородной системы  $(E - \lambda A^T)\vec{d} = \vec{0}$  ортогонально  $\vec{\varphi}$ :

$$\langle \vec{\varphi}; \vec{d} \rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^N \varphi_j d_j = 0 \iff \int_G f(y) \left[ \sum_{j=1}^N b_j(y) d_j \right] dy = 0 \iff \int_G f(y) v(y) dy = 0$$

Получили что интегральное уравнение с вырожденным ядром совместно тогда и только тогда, когда  $f$  ортогонально каждому решению однородного союзного уравнения.

Сформулируем все полученные и доказанные выше результаты в виде теорем Фредгольма:

**Теорема 26.2** (Первая теорема Фредгольма). Если  $D(\lambda) \neq 0$ , то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему однозначно разрешимы при любых правых частях из  $C(\overline{G})$ .

**Теорема 26.3** (Вторая теорема Фредгольма). Если  $D(\lambda) = 0$ , то интегральное уравнение с вырожденным ядром и союзное к нему имеют одинаковое число линейно независимых решений  $m = N - \text{Rg}(E - \lambda A)$

**Теорема 26.4** (Третья теорема Фредгольма). Если  $D(\lambda) = 0$ , то для разрешения интегрального уравнения с вырожденным ядром необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f(x) \in C(\overline{G})$  был ортогонален всем решениям союзного уравнения.

**Билет 27. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.**

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_G K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \overline{G} \quad (1)$$

и ему союзное

$$v(x) = \lambda \int_G K'(x, y)v(y)dy + g(x), \quad x \in \overline{G}, K'(x, y) = K(y, x) \quad (2)$$

**Теорема 27.1** (Первая теорема Фредгольма (Теорема Фредгольма об альтернативах)). *Либо интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в  $C(\overline{G})$  для каждой функции  $f(x)$  из  $C(\overline{G})$  либо соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.*

**Теорема 27.2** (Вторая теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он же имеет место и для уравнения (2). Как однородное уравнение соответствующее (1) так и однородное уравнение соответствующее (2) имеют конечные числа линейно независимых собственных функций, причем эти числа совпадают.*

**Теорема 27.3** (Третья теорема Фредгольма). *Если для уравнения (1) имеет место второй случай альтернативы, то неоднородное уравнение (1) разрешимо в  $C(\overline{G})$  тогда и только тогда, когда выполнено условие "ортогональности":*

$$\int_G f(y)v(y)dy = 0$$

**Теорема 27.4.** *В любом круге  $|\lambda| < R$  на  $\mathbb{C}$  у ядра уравнения (1) имеется не более чем конечное количество характеристических чисел. Единственная возможная точка накопления характеристических чисел – бесконечно удаленная точка.*

Билет посвящен доказательству этих теорем.

**Теорема 27.5** (Аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , а  $W(x) \in C(\overline{G})$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon(x)$  – многочлен от  $x_1 \dots x_n$  такой, что  $\|h(x) - P_\varepsilon(x)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$ .*

Будем использовать данный факт из анализа.

**Лемма 27.6.** *Пусть  $K$  – интегральный оператор с непрерывным ядром  $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  этот оператор можно представить в виде  $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{H}{K}_\varepsilon$ ,  $\left\| \overset{H}{K}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$ ,  $\left\| \overset{H}{K}'_\varepsilon \right\| < \varepsilon$*

*Доказательство.* По  $\varepsilon > 0$  найдем  $P_\varepsilon(x, y)$  от  $x_1..x_n, y_1..y_n : \|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} < \varepsilon$ . Тогда  $\left\| \overset{H}{K}_\varepsilon \right\| \leq \|K(x, y) - P_\varepsilon(x, y)\|_{C(\overline{G})} \cdot \text{mes}G = \varepsilon \cdot \text{mes}G$ . При этом оператор  $\overset{B}{\Phi}_\varepsilon$  имеет вырожденное ядро  $P_\varepsilon$ .  $\square$

**Лемма 27.7.** Пусть  $K$  – интегральный оператор с полярным ядром  $K(x, y) \in \langle C(\overline{G}); C(\overline{G}) \rangle$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  этот оператор можно представить в виде  $K = \overset{B}{\Phi}_\varepsilon + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$ ,  $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| < \varepsilon$ ,  $\left\| \overset{\Pi}{Q}'_\varepsilon \right\| < \varepsilon$

*Доказательство.* Представим  $K$  в виде суммы  $\overset{H}{K}_\varepsilon + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . По предыдущей лемме  $\overset{H}{K} = \Phi + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Значит,  $K = \Phi + \overset{H}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \overset{\Pi}{K}_{\frac{\varepsilon}{2}} = \Phi + \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon$ ,  $\left\| \overset{\Pi}{Q}_\varepsilon \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$   $\square$

Перейдем к теоремам Фредгольма.

Пусть  $R > 0, \overline{D_R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$ .

- Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2R}$ ,  $K = \Phi + Q$ ,  $P = P(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j(x)b_j(y)$ ,  $\|Q\|, \|Q'\| < \varepsilon$
- Представим уравнение  $u = \lambda Ku + f$  в виде  $(I - \lambda Q)u = \lambda \Phi u + f$ , аналогично, его союзное уравнение  $v = \lambda K'v + g$  представим в виде  $(I - \lambda Q')v = \lambda \Phi'v + g$ . Далее представим эти уравнения в следующей форме:

$$(I - \lambda Q)u = \lambda \sum_{j=1}^N a_j(x) \int_G b_j(y)u(y)dy + f(x)$$

$$(I - \lambda Q')v = \lambda \sum_{j=1}^N b_j(x) \int_G a_j(y)v(y)dy + g(x)$$

- $Q$  – оператор с малой нормой:  $|\lambda| \cdot \|Q\| \leq \frac{|\lambda|}{2R} < 1$ . Аналогичные рассуждения верны и для оператора  $Q'$ , а значит операторы  $(I - \lambda Q), (I - \lambda Q')$  непрерывно обратимы. Перепишем уравнения:

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}a(x)}_{\hat{a}_j(x, \lambda)} \int_G b_j(y)u(y)dy + \underbrace{(I - \lambda Q)^{-1}f(x)}_{\hat{f}(x)} = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y)u(y)dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

$$v(x) = \dots = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{b}_j(x, \lambda) \int_G a_j(y)u(y)dy + \hat{g}(x, \lambda)$$

Это уравнения с вырожденными ядрами, их решение эквивалентно решению систем:

$$(E - \lambda \hat{A})\vec{c} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}(\lambda) = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu_{i,j} = \langle b_i; \hat{a}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle b_i; \hat{f} \rangle$$

$$(E - \lambda \hat{A}')\vec{d} = \vec{\varphi}; \quad \hat{A}'(\lambda) = \|\mu'_{ij}\|_{i,j=1}^N; \quad \mu'_{i,j} = \langle a_i; \hat{b}_j \rangle; \quad \varphi_i = \langle a_i; \hat{g} \rangle$$



**Лемма 27.8.** Пусть  $K$  – полярное ядро такое, что  $\|\lambda K\| < 1$ . Тогда  $\forall a, b \in C(\overline{G}) \longrightarrow \langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle = \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx$  – регулярная функция при  $|\lambda| < \|K\|^{-1}$ . Если дополнительно выполнено  $|\lambda| \cdot \|K'\| < 1$ , то  $[(I - \lambda K)^{-1}a; b] = [a; (I - \lambda K')^{-1}b]$ .

*Доказательство.*

$$(I - \lambda K)^{-1}a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j a(x) \implies \int_G (I - \lambda K)^{-1}a(x)b(x)dx = \int_G \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j(a(x))b(x)}_{\text{сход. равномерно}} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[ \int_G K^j a(x)b(x)dx \right]$$

Полученный ряд сходится абсолютно т.к. справедлива оценка

$$\left| \lambda^j \int_G K^j(a(x))b(x)dx \right| \leq \|a\| \cdot \|b\| \cdot \text{mes}G \cdot \underbrace{|\lambda|^j \cdot \|K\|^j}_{q_j; q < 1}$$

Докажем теперь вторую часть:

$$\|\lambda K'\| < 1 \implies \exists (I - \lambda K')^{-1} \in \mathcal{L}(C(\overline{G})) \implies (I - \lambda K')^{-1}b = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b(x)$$

Тогда:

$$\langle (I - \lambda K)^{-1}a; b \rangle \stackrel{*}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle K^j a; b \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \langle a; (K')^j b \rangle = \left\langle a; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K')^j b \right\rangle = \langle a; (I - \lambda K')^{-1}b \rangle$$

Докажем (\*):

$$\begin{aligned} \langle Ku; v \rangle &= \int_G \int G K(x, y) u(y) dy v(x) dx = \\ &= \int_G u(y) \left[ \int G K(x, y) v(x) d(x) \right] dy = [x \rightarrow y; y \rightarrow x; (**)] = \\ &= \int_G u(x) \left[ \int G \underbrace{K(y, x)}_{K'(x, y)} v(y) dy \right] dx = \langle u; K'v \rangle \end{aligned}$$

Где переход (\*\*) верен по т. Фубини-Тонелли. □

**Лемма 27.9.** Матрица  $\hat{A}'(\lambda)$  является транспонированной к матрице  $\hat{A}(\lambda)$ . Элементы  $\hat{m}_{ij}$  матрицы  $\hat{A}$  – регулярные в круге  $|\lambda| < 2R$  функции  $\lambda$ .

*Доказательство.*

$$|\lambda| < 2R \implies |\lambda| \cdot \|Q\| < 1, |\lambda| \cdot \|Q'\| < 1$$

$$\hat{\mu}'_{ij} = \langle a_i; (I - \lambda Q')^{-1}b_j \rangle = \langle (I - \lambda Q)^{-1}a_i; b_j \rangle = \hat{\mu}_{ji}$$

Регулярность следует из предыдущей леммы. □

- Рассмотрим  $D(\lambda) = \det(E - \lambda \hat{A}(\lambda)) = \det(E - \lambda \hat{A}'(\lambda))$ . Это регулярная в круге  $|\lambda| < 2R$  функция,  $D(0) = 1 \implies D(\lambda) \not\equiv 0$ .

В круге  $|\lambda| < R$  может быть только конечное число нулей  $\lambda_k$  иначе по теореме о единственности имели бы  $D(\lambda) \equiv 0$ .

Если  $\lambda$  не корень  $D(\lambda) = 0$  то оба уравнения однозначно разрешимы.

Если же  $\lambda$  – корень  $D(\lambda) = 0$ , то оба уравнения имеют конечномерные пространства решений одной размерности.

Таким образом, мы доказали следующие эквивалентности:

- разрешимость исходного уравнения
- разрешимость системы

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \hat{a}_j(x, \lambda) \int_G b_j(y) u(y) dy + \hat{f}(x, \lambda)$$

- разрешимость  $(E - \lambda \hat{A}') \vec{d} = \vec{\varphi}$

Осталась третья теорема: условие разрешимости:  $\vec{\varphi} \perp \vec{d}_{\text{одн}}$  – любому решению  $[E - \lambda \hat{A}'(\lambda)] = \vec{0}$  т.е.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=1}^N \hat{\varphi} d_j}_0 &= \sum_{j=1}^N \langle b_j; \hat{f} \rangle d_j = \sum_{j=1}^N \langle b_j; (I - \lambda Q)^{-1} f \rangle_j = \\ &= \sum_{j=1}^N \langle f; (I - \lambda Q')^{-1} b_j \rangle_j = \left\langle f, \sum_{j=1}^N \underbrace{(I - \lambda Q')^{-1} b_j}_{\hat{b}_j} d_j \right\rangle = \langle f; v \rangle = \int_G f v dx = 0 \end{aligned}$$

**Билет 28. Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.**

- Функция  $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}$  является решением в обобщенных функциях уравнения  $\Delta E(x) = \delta(x)$ . Эту запись нужно понимать следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{-1}{4\pi|y|} \right) \Delta_y \varphi(y) dy = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

**Определение 28.1.** Функция  $\vartheta(x)$  вида  $\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$  называется объемным ньютоновым потенциалом.

*Замечание.* Это свёртка фундаментального решения с функцией  $-4\pi\rho(x)$

**Теорема 28.1.** 1. Пусть  $\rho(x)$  — кусочно-непрерывная, ограниченная, финитная. Тогда  $\vartheta(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$  и  $\vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

2. Если  $\exists$  область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  :  $\rho(x) \in C^1(\Omega)$ , то  $\vartheta(x) \in C^2(\Omega)$  и  $\Delta\vartheta(x) = -4\pi\rho(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

*Доказательство.* Доказательство проведем в менее общей постановке: считаем  $\rho \in C^\infty$  и  $\text{supp } \rho$  компактом.

- $\exists C : |\rho(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ . Считаем, что  $\text{supp } \rho \subset B_A(0)$ . Берем  $x : |x| > 2A$ . Тогда если  $|y| \leq A$ , то  $|y| < \frac{|x|}{2}$ .
- Оценка:

$$\begin{aligned} |\vartheta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| = \\ &= \left| \int_{|y| < A} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \right| \leq \int_{|y| < A} \frac{|\rho(y)|}{|x-y|} dy \leq \frac{c}{\frac{|x|}{2}} \int_{|y| < A} \frac{dy}{1} = \frac{8\pi c A^3}{3|x|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vartheta(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

- Пользуемся утверждением из анализа: Пусть  $F(x, y)$  и  $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)$ ,  $j = \overline{1, n}$  непрерывны на  $\Omega \times G$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^m$ . Пусть  $g(x)$  абсолютно интегрируема:  $\int_G |g(x)| dx < \infty$ . Тогда  $\int_G F(x, y) g(y) dy \in C^1(\overline{\Omega})$  и

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_G F(x, y) g(y) dy = \int_G \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) g(y) dy$$

- Пусть  $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  и  $\exists A : \rho(x) \equiv 0 \quad \forall x : |x| > A$ . Пусть

$$\Omega = \{x : |x| < R\}; \quad F(x, y) = \rho(x + y)$$

$$G = \{y : |y| < R + A\}; \quad g(y) = \frac{1}{|y|}.$$

При  $|x| < R, |y| > A + R \hookrightarrow |x + y| \geq |y| - |x| \geq A + R - R = A \Rightarrow \rho(x + y) \equiv 0$ .

•

$$\vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy = \int_{|y| < R+A} \frac{\rho(x + y)}{|y|} dy \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = \int_{|y| < R+A} \frac{\partial \rho(x + y)}{\partial x_j} \frac{1}{|y|} dy;$$

Также для остальных производных.

•

$$\Delta \vartheta(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \rho(x + y)}{|y|} dy = -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{-1}{4\pi|y|} \right) \underbrace{\Delta_y \rho(x + y)}_{\parallel \Delta_x \rho(x + y)} dy = -4\pi \langle \delta(y), \rho(x + y) \rangle = -4\pi \rho(x)$$

□

**Билет 29. Понятие области с границей  $C^2$ . Потенциал просто слоя. Его свойства. Непрерывность в  $\mathbb{R}^3$**

**Определение 29.1.** Область с границей  $\Gamma$  класса  $C^2$  - ограниченная область ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ), удовлетворяющая условиям :

- $\forall x^0 \in \Gamma \exists$  декартова с.к.  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  с началом в  $x^0$  и функция  $F_{x^0}(\xi')$ , где  $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $|\xi'| \leq r$  т.ч. что
  - $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r)$ ;  $F_{x^0}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i}(0, 0) = 0$ ,  $i = 1, 2$
  - Множество  $\sum_{x^0} = \{x : \xi_3 = F_{x^0}(\xi'), |\xi'| \leq r\} \subset \Gamma$
  - Множество  $U_{x^0}^- = \{x : F_{x^0}(\xi') - h < \xi_3 < F_{x^0}(\xi'), |\xi'| < r\} \subset \Omega$
  - Множество  $U_{x^0}^+ = \{x : F_{x^0}(\xi') < \xi_3 < F_{x^0}(\xi') + h, |\xi'| < r\}$  не пересекается с  $\Omega$
- $F_{x^0}(\xi') \in C^2(|\xi'| \leq r) \Rightarrow \left| \frac{\partial F_{x^0}}{\partial \xi_i} \right| \leq M_1; \left| \frac{\partial^2 F_{x^0}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq M_2, |\xi'| \leq r$
- Постоянные  $r > 0$ ,  $h > 0$  и  $M_1, M_2$  можно выбрать не зависящими от  $x^0 \in \Gamma$  и от с.к.  $\xi$

**Определение 29.2.** Указанную с.к. и окрестность  $U_{x^0} = U_{x^0}^- \cup U_{x^0}^+$  назовем **подходящим** для  $X^0$ , а  $\xi'$  - **локальными координатами** на куске  $\sum_{x^0}$  границы  $\Gamma$ .

**Определение 29.3.** Неограниченная область называется **внешней областью с границей**  $\Gamma \in C^2$ , если  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  есть ограниченная область с границей  $\in C^2$ .

**Определение 29.4.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - область с границей  $\Gamma$  класса  $C^2$ . Функция вида  $V^{(0)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y$  называется **потенциалом простого слоя**.

**Теорема 29.1.** Пусть  $\mu(x) \in C(\Gamma)$ . Тогда:

1.  $V^0(x) \in C(\mathbb{R}^3)$
2.  $V^0(x)$  гармоническая в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$
3.  $V^0(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$

*Доказательство.* 2. Пусть  $x^1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ,  $\delta_1 = \text{dist}\{x^1, \Gamma\} > 0$



Возьмем шар  $\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^1| < \frac{\delta_1}{2}\}$ . Тогда расстояние от произвольной точки  $x \in \overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}$  до  $\forall y \in \Gamma$  не меньше  $\frac{\delta_1}{2} : |x - y| \geq |x^1 - y| - |x - x^1| \geq \delta_1 - \frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_1}{2}$

Поэтому  $\frac{1}{|x - y|} \in C^\infty(\underbrace{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})}_x \times \underbrace{\Gamma}_y) \Rightarrow \mathcal{D}_x^\alpha \frac{1}{|x - y|} \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma)$

По теореме о дифференцировании интеграла по параметру (формулировка в билете 5) имеем

$$\mathcal{D}_x^\alpha V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \mathcal{D}_x^\alpha \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y \in C(\overline{B(x^1, \frac{\delta_1}{2})} \times \Gamma) \quad \forall \alpha\text{-мультииндекса}$$

В частности,  $\Delta_x V^{(0)}(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left( \frac{1}{|x - y|} \right) \mu(y) dS_y = 0$ , что и требовалось.

1. Если  $x \in \Gamma$ , то  $\frac{1}{|x - y|}$  - полярное ядро, следовательно, интегральный оператор с полярным ядром переводит непрерывную функцию  $\mu(y)$  в непрерывную  $\Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\Gamma)$ .

Мы уже доказали, что  $V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \Rightarrow$  осталось показать непрерывность в областях  $\Omega$  следующего вида:



Построим для этого последовательность функций, равномерно сходящихся к  $V^{(0)}(x)$ :

Пусть  $\left( \frac{1}{|x - y|} \right)_\delta$  -  $\delta$ -срезка функции  $\frac{1}{|x - y|}$ :

$$\left( \frac{1}{|x - y|} \right)_\delta = \begin{cases} \frac{1}{|x - y|}, & \text{если } |x - y| \geq \delta; \\ \frac{1}{\delta}, & \text{если } |x - y| < \delta. \end{cases}$$

$$V_\delta^{(0)}(x) = \int_\Gamma \left( \frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \mu(y) dS_y \in C(\overline{\Omega})$$

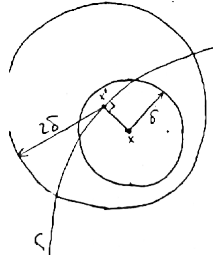
Будем выбирать  $0 < \delta < \frac{d}{2}$  ( $d$  - из свойств области с границей класса  $C^2$ ) - такое число, что  $\forall x^0 \in \Gamma \rightarrow B(x^0, d) \subset U_{x^0}$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| = \left| \int_\Gamma \left( \frac{1}{|x - y|} - \left( \frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) \mu(y) dS_y \right|$$

Если  $x : |x - y| \geq \delta$ , то  $\left( \frac{1}{|x - y|} - \left( \frac{1}{|x - y|} \right)_\delta \right) = 0$

В противном случае она равна  $\left| \int_\Gamma \underbrace{\left( \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{\delta} \right)}_{>0} \underbrace{\mu(y)}_{|\mu(y)| \leq \|\mu\|_{C(\Gamma)} = C} dS_y \right| \leq C \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$

Нам осталось оценить интеграл  $\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|}$



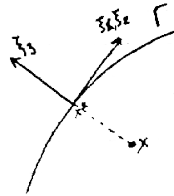
Пусть  $x^* = \pi_\Gamma(x)$ . Построим  $B(x, \delta)$  и  $B(x^*, 2\delta)$ .

Ясно, что т.к.  $|x - x^*| < \delta \Rightarrow B(x, \delta) \subset B(x^*, 2\delta)$ .

Увеличивая область интегрирования, запишем:

$$\int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x - y| < \delta}} \frac{dS_y}{|x - y|} \leq \int_{\substack{y \in \Gamma \\ |x^* - y| < 2\delta}} \frac{dS_y}{|x^* - y|}$$

По определению числа  $\delta$  имеем  $B(x^*, 2\delta) \subset U_{x^*}$ .



Свяжем с  $x^*$  локальную систему координат и функцию  $F_{x^*}(\xi_1, \xi_2)$

Т.к.  $y \in \Gamma, y = (\xi_1, \xi_2, F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))$

Т.к.  $x^* = \pi_\Gamma(x)$ , точка  $x$  имеет ненулевую компоненту только по  $\xi_3$ , то есть  $x = (0, 0, x_3)$ .

Оценки:  $|x - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_3 - F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \geq \xi_1^2 + \xi_2^2$

$|x^* - y|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (F_{x^*}(\xi_1, \xi_2))^2 \geq \xi_1^2 + \xi_2^2 \Rightarrow$  расширяем область интегрирования до

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta$$

$$\left| V^{(0)}(x) - V_\delta^{(0)}(x) \right| \leq C \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{x^*}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2)\right)^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} d\xi_1 d\xi_2 \leq$$

$$C \sqrt{1 + 2M_1^2} \int_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < 2\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

В полярной системе координат  $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  последний интеграл примет вид  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\delta} \frac{r dr}{r} = 4\pi\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Итак,  $\underbrace{V_\delta^{(0)}(x)}_{\in C(\bar{\Omega})} \Rightarrow_{\delta \rightarrow 0} V^{(0)}(x) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow V^{(0)}(x) \in C(\mathbb{R}^3)$ .

3.  $\mu(x) \in \Gamma \Rightarrow |\mu(x)| \leq \|\mu\|_\Gamma = C \quad \forall x \in \Gamma$

Возьмем сферу радиуса  $R$  такую, что  $\Gamma$  лежит внутри этой сферы. Тогда  $\forall y \in \Gamma \rightarrow |y| \leq R$ .

При  $x \rightarrow \infty \rightarrow |x| \geq 2R \Rightarrow y \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |V^0(x)| \leq \int_\Gamma \frac{|\mu(y)|}{|x-y|} dS_y \leq \frac{2C}{|x|} \underbrace{\int_\Gamma dS_y}_{\tilde{C}} \Rightarrow V^0(x) =$

$O\left(\frac{1}{|x|}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

□



**Билет 30. Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через границу, на которой задаётся плотность**

Пусть  $\Gamma$  - граница класса  $C^2$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

**Определение 30.1.** Функция вида  $V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y$  называется *потенциалом двойного слоя*

Сразу будет удобно переписать определение в иной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) &= \sum_{k=1}^3 n_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{k=1}^3 \frac{n_k(y)(x_k - y_k)}{|x-y|^3} = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y \end{aligned}$$

**Лемма 30.1.** Пусть  $\nu(x) \in C(\Gamma)$ . Тогда:

а)  $V^{(2)}(x)$  - гармоническая функция в  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ;

б)  $V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$  при  $|x| \rightarrow \infty$

*Доказательство.*

а)

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} \underbrace{n_k(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{т.к. } \Gamma \in C^2}} \underbrace{\nu(y)}_{\substack{\in C(\Gamma) \\ \text{по условию}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{-\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-y|} \\ \in C((\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times \Gamma)}} dS_y = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Gamma} \underbrace{n_x(y) \nu(y) \frac{1}{|x-y|}}_{\substack{\text{потенциал простого слоя с} \\ \mu = n_k \cdot \nu \in C(\Gamma) \\ \downarrow \\ \text{является гармонической} \\ \text{функцией в } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma}} dS_y \end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться тем, что производная гармонической функции - гармоническая.

б) Возьмём сразу сферу радиуса  $R$  такую, что  $\Gamma$  лежит внутри сферы. При

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow |x| > 2R \Rightarrow |y| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2 \geq \frac{|x|^2}{4}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \leq \frac{|x-y| \cdot |\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V^{(2)}(x)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) \nu(y) dS_y \right| \leq \frac{4}{|x|^2} \int_{\Gamma} |\nu(y)| dS_y \leq 4 \|\nu(y)\|_{C(\Gamma)} \int_{\Gamma} dS_y \cdot \frac{1}{|x|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

□

**Лемма 30.2.** Если  $\Omega$  ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ , то  $\forall x, y \in \Gamma, x \neq y$ , справедлива оценка

$$\left| \frac{(x - y, n(y))}{|x - y|^2} \right| \leq \frac{M}{|x - y|}$$

*Доказательство.* Пусть  $d$  - число из определения поверхности с границей  $\Gamma \in C^2$ :

- если  $|x - y| \geq d$ , то  $\frac{|(x - y, \bar{n}_y)|}{|x - y|^3} \leq \frac{1}{|x - y|^2} \leq \frac{1}{d} \frac{1}{|x - y|}$
- если  $|x - y| < d$ , то свяжем  $y$  с локальной системой координат. В этой системе:  
 $y = (0, 0, 0)$ ,  $x = (\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2))$ ,  $\bar{n}_y = (0, 0, 1) \Rightarrow$   
 $|x - y, \bar{n}_y| = |F_y(\xi_1, \xi_2)| \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq M_2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + F_y^2(\xi_1, \xi_2)) = M_2|x - y|^2$ , что и требовалось.

□

**Лемма 30.3.** Пусть  $\nu(x) \in C(\Gamma)$ . Тогда потенциал двойного слоя  $V^{(2)} \in C(\Gamma)$

*Доказательство.* Используем признак полярного ядра (билет №24). В силу леммы  $|K(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|}$  и  $K(x, y) = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^2} \in C((\Gamma \times \Gamma) \setminus \{x = y\})$  Оператор с полярным ядром переводит непрерывные функции в непрерывные, а  $\nu \in C(\Gamma) \Rightarrow V^{(2)}(x) \in C(\Gamma)$

□

Наша цель - описать скачок  $V^{(2)}(x)$  при переходе через границу. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 30.4.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ . Тогда интеграл  $V_{GAUSS}^{(2)}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x - y|} \right) \nu(y) \cdot 1 \cdot dS_y = \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} dS_y$  - (интеграл Гаусса) равен

$$\begin{cases} -4\pi, x \in \Omega \\ -2\pi, x \in \Gamma \\ 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

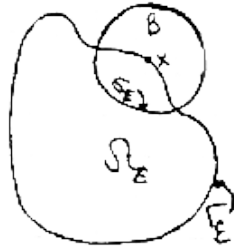
*Доказательство.* 1) Пусть  $x \in \Omega$ . Возьмём  $u(x) \equiv 1$  и запишем представление этой функции в виде суммы трёх потенциалов:

$$u(x) \equiv 1 = \int_{\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\Delta 1}_{=0} dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) u(y) dS_y - \int_{\Gamma} \left( \frac{-1}{4\pi|x - y|} \right) \underbrace{\frac{\partial u(y)}{\partial \bar{n}_y}}_{=0} = -\frac{1}{4\pi} V_{GAUSS}^{(2)}(x)$$

2) Пусть  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  Возьмём  $u(y) \equiv 1$  и  $v(y) = \frac{1}{|x - y|}$  и воспользуемся для этих функций первой формулой Грина:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\Delta_y v(y)}_{=0} \cdot u(y) dy = \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} v(y) u(y) dS_y}_{=V_{GAUSS}^{(2)}(x)} - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla_y v(y), \nabla 1) dy}_{=0} \Rightarrow V_{GAUSS}^{(2)}(x) = 0$$

3) Пусть  $x \in \Gamma$ . Введём  $B = B(x, \varepsilon)$ ,  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}$ ,  $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus B$ ,  $\sigma_\varepsilon = \partial B \cap \bar{\Omega}$  Тогда  $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon \Rightarrow x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$



Согласно второму пункту можем написать  $\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = 0$  Значит

$$\underbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y}_{\rightarrow \int_{\Gamma} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0} = 0$$

Покажем, что

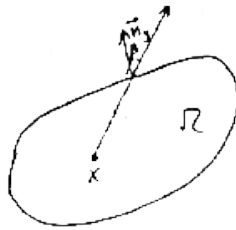
$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y \rightarrow 2\pi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} = \frac{|x-y||\bar{n}_y|}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Поэтому } \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} dS_y$$

При малых  $\varepsilon$  кусок границы  $\Gamma$  внутри  $\rightarrow$  к полуплоскости  $\Rightarrow \sigma_\varepsilon \rightarrow$  к полусфере.

Поэтому  $\int_{\sigma_\varepsilon} dS_y = 2\pi\varepsilon^2(1 + O(1))$ , что и требовалось □

**Offtop** : Геометрический смысл интеграла Гаусса:  $\frac{(y-x, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y = \frac{dS_y \cos \beta}{|x-y|^2} = d\Omega$



– телесный угол, под которым из точки  $x$  видна часть  $dS_y$ . Интеграл Гаусса есть сумма всех таких углов со знаком ”минус”. Поэтому геометрически последняя лемма очевидна.

**Лемма 30.5.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$ . Пусть  $x^o \in \Gamma$ . Тогда

$$\forall x : (x \in \mathbb{R}^3) \cap \left( |x - x^o| < \frac{d_*}{2} \right) \text{ верно } \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y < K, d_* = \frac{1}{2} \min \left( d, \frac{2}{M_2} \right)$$

Без доказательства

**Лемма 30.6.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$ . Пусть  $x^o \in \Gamma$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x^o} W(x, x^o) = W(x^o, x^o), \text{ где } W(x, x^o) = \int_{|y-x^o|<d_*} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y, \text{ а } \nu(x) \in C(\Gamma)$$

*Доказательство.* Требуется показать, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - x^o| < \delta_\varepsilon \rightarrow |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| < \varepsilon$ . Функция  $\nu(x)$  непрерывна на компакте, следовательно она и равномерно непрерывна на нём. Значит  $\exists \beta = \beta(\varepsilon) : \quad \forall y \in \Gamma : |y - x^o| < \delta \rightarrow |\nu(y) - \nu(x^o)| < \varepsilon$ . Выберем  $\beta \leq \frac{d_*}{2}$

$$\begin{aligned} |W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| &= \left| \int_{\Gamma} \left( \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right) (\nu(y) - \nu(x^o)) dS_y \right| \leq \\ &\leq \int_{|y-x^o|<\beta} \underbrace{\left( \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\leq K+K} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq \varepsilon} dS_y + \\ &\quad \int_{\Gamma \setminus (|y-x^o|<\beta)} \underbrace{\left( \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} - \frac{(x^o-y, \bar{n}_y)}{|x^o-y|^3} \right)}_{\substack{\leq \psi(x); \psi(x^o)=0 \\ \downarrow \\ \exists \delta_1: \|\psi(x)\| < \varepsilon, \\ \text{если } |x-x^o| < \delta_1}} \underbrace{(\nu(y) - \nu(x^o))}_{\leq 2\|\nu\|_{C(\Gamma)}} dS_y \end{aligned}$$

Значит, при  $|x - x^o| \leq \max \left( \frac{d_*}{2}, \delta_1(\varepsilon) \right)$  имеет место оценка  $|W(x, x^o) - W(x^o, x^o)| \leq 2K\varepsilon + 2\varepsilon\|\nu\|_{C(\Gamma)}$  □

Теперь можно перейти к описанию скачка потенциала.

**Теорема 30.7.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$ , а  $\nu(x) \in C(\Gamma)$ . Тогда потенциал двойного слоя  $V^{(2)}(x) \in C(\bar{\Omega})$  и  $V^{(2)}(x) \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$  (можно непрерывно продолжить на замыкания). Обозначим  $\forall x^o \in \Gamma : V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x); V_-^{(2)}(x^o) =$

$$\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) \text{ Тогда } V_{\pm}^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) \mp 2\pi\nu(x^o)$$

*Доказательство.*

$$V^{(2)}(x) = W(x, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x-y, \bar{n}_y)}{|x-y|^3} \nu(y) dS_y$$

$$V_+^{(2)}(x^o) = \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} V^{(2)}(x) = \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o) + \nu(x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} \underbrace{\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \Omega \text{ это } 4\pi} = W(x^o, x^o) - 4\pi\nu(x^o)$$

Далее, если  $x^o \in \Gamma$ , то  $V^{(2)}(x^o) = W(x^o, x^o) + \nu(x^o) \int_{\Gamma} \frac{(x^o - y, \bar{n}_y)}{|x^o - y|^3} \nu(y) dS_y = W(x^o, x^o) - 2\pi\nu(x^o)$

Поэтому  $V_+^{(2)}(x^o) = V^{(2)}(x^o) - 2\pi\nu(x^o)$  Это, в частности, означает, что  $V^{(2)}(x)$  можно непрерывно продолжить до  $\bar{\Omega}$ . Для стремления  $x \rightarrow x^o$  извне доказательство аналогично:

$$V_-^{(2)}(x^o) = \underbrace{\lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} W(x, x^o)}_{\substack{W(x^o, x^o) \\ \text{в силу леммы}}} + \lim_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, x \rightarrow x^o} \nu(x^o) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{(x - y, \bar{n}_y)}{|x - y|^3} \nu(y) dS_y}_{\text{при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ это } 0} = W(x^o, x^o) = V^{(2)}(x^o) + 2\pi\nu(x^o)$$

Это, в частности, означает, что  $V^{(2)}$  можно непрерывно продолжить до  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

□

**Билет 31. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью Формула скачка для нормальной производной**

Мотивация: во внутренней задаче Неймана (билет 14) ищется решение  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  уравнения

$$\Delta u = f(x), x \in \Omega$$

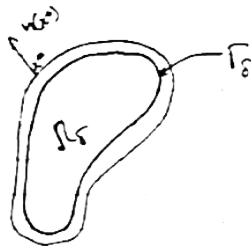
при условии

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_r = u_1(x),$$

где  $u_1 \in C(\Gamma)$ .

Но существуют примеры гармонических в области функций, градиент которых нельзя продолжить по непрерывности на замыкание этой области. Можно расширить понятие классического решения.

Пусть  $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$



Пусть  $x^o \in \Gamma$ , а  $\vec{n}(x^o)$  - нормаль к  $\Gamma$  в  $x^o$ . Т.к.  $\Gamma \in C^2$ ,  $\vec{n}(x^o)$  - непрерывная функция по  $x^o$ . Проведем через  $x^o$  прямую  $x = x^o + \vec{n}(x^o)t, t \in \mathbb{R}$

Распишем произведение

$$(\vec{n}(x^o), \nabla u) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

**Определение 31.1.** Говорят, что  $u(x)$  имеет **правильную нормальную производную** по направлению внешней нормали на  $\Gamma$  из  $\Omega$ , если

1.  $\forall x^o \in \Gamma$  существует конечный предел

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o) \equiv \lim_{x=x^o+\vec{n}(x^o)t, x \in \Omega, x \rightarrow x^o} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$$

2. Этот предел равномерный по  $x^o \in \Gamma$

**Лемма 31.1.** Если  $u(x)$  имеет ПНП по нормали  $\vec{n}(x^o)$  из  $\Omega$  на  $\Gamma$ , то

1.  $u(x)$  имеет обычную производную по нормали  $\vec{n}(x^o)$  в точке  $x^o \in \Gamma$ , и эта производная совпадает с ПНП
2. ПНП  $\in C(\Gamma)$

*Доказательство.* Обычная производная по нормали

$$\lim_{x \rightarrow x^o, x = x^o + \vec{n}(x^o)t} \frac{u(x^o) - u(x)}{|x^o - x|} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{u(x^o) - u(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{-t} = \lim_{t < 0, t \rightarrow 0} \frac{du(x^o + \vec{n}(x^o)t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}(x^o)}$$

- этот предел существует по условию.

Покажем непрерывность: Пусть  $\delta$  мало,  $0 < \delta < \delta_o, x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$

Пусть  $V_\delta(x^o) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) =$

$$= \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^o - \delta \vec{n}(x^o)) \Rightarrow V_\delta(x^*) \in C(\Gamma)$$

$n_k(x^o)$  непрерывна, т.к.  $\Gamma \in C^2$

По определению ПНП:  $V_\delta \Rightarrow$  ПНП  $\Rightarrow$  она также непрерывная на  $\Gamma$ . □

• После расширения определения классического решения встает вопрос о единственности решения. При исследовании этого вопроса мы использовали формулы Грина. Для них требовалась гладкость  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Покажем, как обобщить эти факты с помощью ПНП.

• Пусть  $\Omega$  - ограниченная область с границей  $\mathbb{R}^3$ , граница  $G \in C^2, 0 < \delta < \delta_\mu$

$\Gamma_\delta = x : x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$  - граница класса уже  $C^1$ , т.к.  $\vec{n} \in C^1$



**Лемма 31.2.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область с границей  $G \in C^2, u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , а у  $u(x) \ni$  ПНП по направлению внешней нормали  $\vec{n}(x^o), \Delta u \in C(\Omega)$ . Тогда

$$\int_{\Omega} (\Delta u) u dx = \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) u(x) dS - \int_{\Omega} |\nabla|^2 dx$$

*Доказательство.*  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow u(x) \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\Omega_\delta) \Rightarrow$

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta u(x)) u(x) dx(1) = \oint_{G_\delta} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS(2) - \int_{\Omega_\delta} |\nabla u(x)|^2 dx(3)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(1) = \int_{\Omega} \Delta u dx, \text{ т.к. } \Delta u(x) \text{ и } u(x) \in C(\bar{\Omega})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(2) = \int_{G_{\delta}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u(x) dS$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(3) = \lim_{x=x^o - \delta \vec{n}(x^o)} \int_{\Omega_{\delta}} |\nabla u(x)|^2 dx$$

• С учетом сделанного обобщения все сделанные ранее рассуждения о внутренних и внешних задачах верны и для расширенного понятия классического решения.  $\square$

**Теорема 31.3** (Корректная постановка внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа).  $\Omega$  - ограниченная область, граница  $G \in C^2$ . Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_G = u_1(x) \in C(G) \end{cases} \quad (30)$$

**Теорема 31.4** (Корректная постановка внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа).  $\Omega$  - внешняя область, граница  $G \in C^2$ . Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  имеющую ПНП и удовлетворяющую

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = u_1(x) \in C(\Gamma) \\ u(x)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (31)$$

• Рассмотрим потенциал простого слоя

$\Omega$  - ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ ;  $x = x^o - \delta \vec{n}(x^o)$ ;  $0 < \delta < \delta^*$

$$V^* = \int_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x - y|} dS_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_{\Gamma} \frac{\mu(x)}{|x - y|} dS_y = \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \oint_G \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dS_y$$

$$\sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^3 n_k(x^o) \frac{y_k - x_k}{|x - y|^3} \mu(y) dS_y = \oint_{\Gamma} \frac{(y - x, \vec{n}(x^o))}{|x - y|^3} \mu(y) dS_y$$

Обозначим  $\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{\pm}(x^o) = \lim_{x=x^o \mp \delta \vec{n}(x^o), \delta \rightarrow +0} \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}(x^o)}(x)$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o)(1) = \int_{\Gamma} \frac{(y - x^o, \vec{n}(x^o))}{|x^o - y|^3} \mu(y) dS_y, x^o \in G(2)$$

(1) - прямое значение нормальной производной

(2) - полярное ядро  $\Rightarrow \forall \mu(x) \in C(G), \forall x^o \in \Gamma$  этот интеграл существует, и более того  $(1) \in C(\Gamma)$

**Теорема 31.5.** У потенциала простого слоя  $V^o(x)$  с плотностью  $\mu(x) \in C(\Gamma)$  существует ПНП на  $\Gamma$ :

$$\left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{+}(x^o) u \left(\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}\right)_{-}(x^o),$$



причем имеет место формула скачка

$$\left( \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}_{\pm}(x^o) \right) = \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) \pm 2\pi\mu(x^o)$$

**Следствие.**  $\left( \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{+}(x^o) - \left( \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{-}(x^o) = 4\pi\mu(x^o), x^o \in \Gamma$

$$\frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}}(x^o) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{+}(x^o) + \left( \frac{\partial V^o}{\partial \vec{n}} \right)_{-}(x^o) \right], x \in \Gamma$$

**Билет 32.** Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач

### Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа

Найти функцию  $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$  имеющую ПНП по направлению внешней нормали, и такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (32)$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$u(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y$ . Свойства  $\Delta u(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \rightarrow 0$  выполнены.

Кроме того,  $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$  и имеет ПНП. Нужно проверить  $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_r = u_1(x), x \in G$ .

• Пусть

$$x^o \in G \Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = -2\pi\mu(x^o) + \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y = u_1(x^o)$$

$\mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^2} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x^o \in G$  - Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с интегральным оператором и полярным ядром.

Уравнение однозначно разрешимо  $\Leftrightarrow$  уравнение  $\mu_*(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y \equiv 0$  имеет только тривиальное решение.

Для этого покажем, что  $V_*(x) = \int_G \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y \equiv 0$

Ясно, что уравнение на  $\mu_*$  получается таким же образом как и уравнение на  $\mu$ , но из задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ (\frac{\partial v}{\partial \vec{n}})|_r = 0, x \in G; u_1(x) \in C(G) \\ v(x) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (33)$$

В силу единственности решение этой задачи  $V_* = 0 (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ . Но  $V_* \in C(\mathbb{R}^3) \Rightarrow X_* \equiv 0$  на  $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  Функция  $V_*$  удовлетворяет внутренней задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta V_* = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ V_*(x) = 0 \quad \forall x \in G \end{cases} \quad (34)$$

$\Rightarrow V_* \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$

Итак,  $V_*(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

Но  $(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_+(x^o) - (\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_-(x^o) = 4\pi\mu_*(x^o), x^o \in G \Rightarrow \mu_*(x^o) \equiv 0 \quad \forall x^o \in G$

Итак, по теореме Фредгольма об альтернативе уравнение

$$(*) \mu(x^o) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2\pi} u_1(x^o), x \in G \text{ однозначно разрешимо}$$

### Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  такую, что:

$$1) \Delta u(x) = 0, x \in \Omega$$

$$2) u|_r = u_0(x), x \in G (u_0(x) \in C(G))$$

Решение этой задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y, \nu(x) \in C(G)$$

Условия  $\Delta u = 0 \in \Omega$  и  $u(x) \in C^2(G) \cap C(\bar{\Omega})$  уже выполнены. Осталось проверить  $u|_r = u_0(x), x \in G$

• Для потенциала двойного слоя справедлива формула скачка:  $u_+(x^o) = u(x^o) - 2\pi\nu(x^o) \Rightarrow u_0(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - 2\pi\nu(x^o)$

$$\Rightarrow \nu(x^o) = \int_x \frac{(y-x, \vec{n}(x^o))}{|x^o-y|^3} \nu(y) dS_y - \frac{u_0(x^o)}{2\pi}, x^o \in G \text{ Ядро, транспонированное к тому, что стоит в } (*)$$

Т.к. (\*) однозначно разрешимо, это уравнение тоже имеет единственное решение

**Теорема 32.1.** Пусть  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $G \in C^2$ . Тогда у внутренней задачи Дирихле  $\forall u_1 \in C(G)$ , а также у внешней задачи Неймана  $\forall u_0 \in C(G)$  существует единственное классическое решение

### Делали:

- Иwanyчев Сергей, 376 группа
- Погодин Роман, 374 группа
- Нагайко Иван, 372 группа
- Рязанов Андрей, 374 группа
- Федоряка Дмитрий, 374 группа
- Багно Богдан, 376 группа
- Изутин Никита, 378 группа
- Ермолова Марина, 373 группа
- Хасянов Расул, 371 группа
- Михальченко Егор, 371 группа
- Шлёнский Владислав, 374 группа
- Цветкова Ольга, 374 группа
- Молибог Игорь, 374 группа
- Чигринский Виктор, 374 группа
- Леонтьев Семён, 377 группа
- Кильянов Александр, 372 группа
- Тернов Лёха, 228 группа