

1 Просто типизированное лямбда-исчисление

Как мы уже убедились из парадокса Карри, лямбда-исчисление - это слишком мощная конструкция. Чтобы ее упорядочить, предпринимались многочисленные попытки. Сперва мы рассмотрим просто типизированное лямбда-исчисление.

Идея восходит к типизации теории множеств. Там, чтобы избежать парадоксов, можно предложить каждому множеству приписать некоторое значение (тип). Например, мы можем приписать пустому множеству тип 0, множеству, состоящему только из пустого - тип 1, и вообще, множеству, состоящему из типов a_1, a_2, \dots тип $Upb_{Ord}\{a_1, a_2, \dots\}$. При этом некоторые

Здесь мы поступим похоже, только элементарных значений (и, соответственно, типов) у нас будет не одно, а счетное количество.

Определение 1.1. Тип — это:

- Элементарный тип — маленькая греческая буква (α, β, \dots)
- Составной тип. Если τ и σ — некоторые типы, то запись вида $\tau \rightarrow \sigma$ — это также некоторый тип.

Существует два основных стиля типизации лямбда-исчисления — по Чёрчу и по Карри.

1.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Теперь мы готовы показать, что просто типизированное лямбда-исчисление в некотором смысле изоморфно импликационному фрагменту интуиционистской логики.

Заметим сперва, что T содержит в точности те же формулы, что и введенный в предыдущем параграфе язык.

Теорема 1.1. (Об изоморфизме Карри-Ховарда)

1. Если $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} M : \phi$, то $types(\Gamma) \vdash \phi$.
2. Если $\Gamma \vdash \phi$, то найдется такой $M \in \Lambda_T$, что $\{x_\phi | \phi \in \Gamma\} \vdash_{\mathcal{C}} M : \phi$.

Доказательство. Доказательство обеих частей теоремы несложно, но мы приведем доказательство второй части из методических соображений.

Покажем существование M индукцией по структуре доказательства $\Gamma \vdash \phi$. Для этого рассмотрим заключительное правило и разберем случаи.

□

2 Лямбда-исчисление по Карри

Существует второй вариант исчисления. Главное его отличие — в отсутствии типов при указании переменных в лямбда-термах. Правила типизации:

Принципиальных отличий нет, легко показать следующую теорему:

Теорема 2.1. Пусть отображение $Er : \Lambda_T \rightarrow \Lambda$ задано так: $Er(\lambda x : \sigma. A) = \lambda x. Er(A)$. Тогда (стирание):

1. Если $M \rightarrow_{\beta} N$, то $Er(M) \rightarrow_{\beta} Er(N)$
2. Если $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} M : \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} Er(M) : \alpha$.

Поднятие:

1. Если $M \rightarrow_\beta N$, то для любого $M_T \in \Lambda_T$, такого, что $Er(M_T) = M$, найдется $N_T \in \Lambda_T$, такой, что $Er(N_T) = T$ и $M_T \rightarrow_\beta N_T$.
2. Если $\Gamma \vdash_{\mathbf{k}} M : \alpha$, то найдется такой $M_T \in \Lambda_T$, что $Er(M_T) = M$ и $\Gamma \vdash_{\mathbf{q}} N : \alpha$.

Доказательство. Упражнение. □

Также, легко доказать аналоги теорем Черча-Россера и теоремы о нормализации.

Однако, несмотря на сходство, есть и отличие — типизация по Карри несколько более широкая. А именно, если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то из этого не следует $\sigma = \tau$. Скажем, справедливо $\vdash_{\mathbf{k}} \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha$ и $\vdash_{\mathbf{k}} \lambda x.x : \beta \rightarrow \beta$.

Теорема 2.2. О слабой нормализации. Пусть некоторый лямбда-терм имеет тип σ . Тогда существует конечная последовательность бета-редукций, приводящая к нормальной форме.

Лемма 2.3. Пусть A и B — лямбда-термы, а x — некоторая переменная. Тогда $h(A[x := B]) \leq \max(h(A), h(B))$.

Доказательство. □

Доказательство. Доказательство теоремы о слабой нормализации.

Мы покажем утверждение теоремы, доказав, что последовательность редукций, при которой редуцируется самый вложенный редекс максимальной степени (такой редекс $R = (\lambda x : \sigma. A^\tau)B$ выражения $E = \dots R \dots$, что $h(R) = h(E)$, и $h(A) < h(R)$, как и $h(B) < h(R)$), приводит к нормальной форме.

Рассмотрим, что произойдет с количеством редексов высоты $h(R)$ в результате редукции R . Рассмотрим некоторый редекс P в новом выражении $F = \dots A[x := B] \dots$, получающемся из E путем редукции R . Он может:

- находиться целиком вне результата редукции редекса R , тогда он никак не изменится при данной редукции;
- являться правой частью внешнего редекса $F = \dots (\lambda y : \theta. Q)A[x := B] \dots$. В этом случае, поскольку тип переменной x совпадает с типом терма B , изменения высоты данного редекса не произойдет;
- являться левой частью внешнего редекса $F = \dots A^\theta[x := B]Q^\rho \dots$. В этом случае неизбежно $A = \lambda y : \rho. C^\theta$ для некоторого C , и $h(A[x := B]Q) = h(\rho \rightarrow \theta) < h((\lambda x : \sigma. \lambda y : \rho. C)BQ) = h(\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \theta)$, то есть, в этом случае появившийся редекс будет иметь высоту, меньшую $h(R)$;
- находиться целиком внутри результата редукции. Заметим, что из $R : \sigma \rightarrow \tau$ следует, что $h(R) = h(\sigma \rightarrow \tau) > h(\sigma)$, и по принципу построения последовательности редукций, $h(R) > h(A)$ и $h(R) > h(B)$. Тогда, воспользовавшись леммой, заключаем $h(A[x := B]) \leq \max(h(A), h(B), h(\sigma)) < h(R)$.

Таким образом, поскольку сам редекс R будет разрушен, и никаких новых редексов данной или большей высоты не добавится, количество редексов высоты $h(R)$ уменьшится минимум на 1.

Рассмотрим функцию $m(E) = (h(E), n_E(h(E)))$, где $n_E(x)$ — количество редексов высоты x в формуле E . Если $n_E(h(E)) > 1$, то редукция самого вложенного редекса степени $h(E)$ уменьшит $n_E(h(E))$ минимум на 1, если же их остался один — то редукция устранил их совсем, не добавив новых. Значит, мы получим строго убывающую последовательность $m(E)$, ограниченную снизу: она прервется, когда в выражении не останется ни одного редекса. То есть, данная последовательность редукций приведет выражение к нормальной форме. □

3 О классе функций, определимых в просто типизированном лямбда-исчислении

Определение 3.1. Назовем расширенным полиномом функцию

Лемма 3.1. Если в выражении X^ξ , находящемся в нормальной форме, подтерм T^τ не является свободной переменной выражения T , и $T \neq X$, то всегда найдется такой подтерм S^σ , что $h(\sigma) > h(\tau)$, причем $\sigma = \tau \rightarrow \rho$ или $\sigma = \rho \rightarrow \tau$.

Доказательство. Рассмотрим подтерм T . Возможны следующие варианты:

1. T — это некоторая переменная x (она обязана быть связанной по условию леммы). То есть T — часть выражения $S = \lambda x : \tau. \dots x \dots$. Тогда $S : \tau \rightarrow \rho$, и $h(\tau \rightarrow \rho) > h(\tau)$.
2. T — это некоторая абстракция $T = \lambda x : \sigma. P^\pi$. Тогда заметим, что по условию $T \neq X$. Значит, T входит в некоторое более общее выражение — либо в абстракцию $S^{v \rightarrow \tau} = \lambda y : v. T$, либо в применение $S^{\tau \rightarrow v} T$ (применение вида TA является редексом и потому невозможно).
3. T — это некоторое применение $T = S^v \rightarrow \tau Y$.

□

Теорема 3.2. При фиксированном типе для целых чисел $\nu = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ в типизированном исчислении по Чёрчу класс двуместных функций ограничен расширенными полиномами.

Доказательство. Рассмотрим некоторый лямбда-терм $Ra^\nu b^\nu f^{\alpha \rightarrow \alpha} : \alpha \rightarrow \alpha$, здесь a и b — переменные, содержащие чёрчевские нумералы (аргументы функции), f — первый аргумент чёрчевского нумерала.

Согласно свойству слабой нормализации, данный терм имеет нормальную форму N . Рассмотрим ее. Заметим, что если T^τ — подтерм N , то он обязан соответствовать одному из следующих вариантов:

Тип	Возможный вид терма
ν	a, b
$\alpha \rightarrow \alpha$	$f, aS_1^{\alpha \rightarrow \alpha}, bS_1^{\alpha \rightarrow \alpha}, \lambda x : \alpha. S_1^{\alpha \rightarrow \alpha}(S_2^{\alpha \rightarrow \alpha} \dots S_n^{\alpha \rightarrow \alpha}(y) \dots)$
α	f , связанная переменная $y : \alpha$, $S_1^{\alpha \rightarrow \alpha}(T^\alpha)$

Доказать это можно разбором случаев с использованием индукции и предыдущей леммы, для примера разберем случай $h(\tau) \geq 2$.

- Если $h(\tau) \geq 3$, то $T = a$ или $T = b$. Пусть это не так, и существуют такие P^π , что $P \neq a$, $P \neq b$ и $h(\pi) \geq 3$. Возьмем среди таких P подтерм с типом максимальной глубины. Однако, по лемме в нем неизбежно найдется такой S^σ , что $h(\sigma) > h(\pi)$, что противоречит максимальнойности $h(\pi)$.
- Если $h(\tau) = 2$, то τ имеет вид либо $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$, либо $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$. По лемме найдется такой S^σ , что $\sigma = \tau \rightarrow \rho$ или $\sigma = \rho \rightarrow \tau$. В любом из случаев не найдется такого ρ , что $\nu = \sigma$, то есть $S \neq a$ и $S \neq b$, что невозможно по предыдущему пункту.

Теперь рассмотрим весь терм N . Он имеет тип $\alpha \rightarrow \alpha$. Введем обозначение $\bar{m} = \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f^m x$. Покажем по индукции, что $N[a := \bar{m}, b := \bar{n}] =_\beta \lambda f x. f^{\bar{E}(m, n)} x$.

Т.о., в выражении возможны 3 только типа элементарных формул, типов α , $\alpha \rightarrow \alpha$ и $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$.

Про вариант $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ мы уже разобрались, теперь рассмотрим $\alpha \rightarrow \alpha$.

Это может быть либо f , либо $aS^{\alpha \rightarrow \alpha}$, либо $bS^{\alpha \rightarrow \alpha}$, либо их комбинация: $\lambda x : \alpha. S_1^{\alpha \rightarrow \alpha}(S_2^{\alpha \rightarrow \alpha} \dots S_n^{\alpha \rightarrow \alpha}(x))$

□

3.1 Импликационный фрагмент интуиционистской логики

Рассмотрим следующее исчисление, являющееся подмножеством интуиционистской логики, содержащим только импликацию. Это исчисление генценовского типа.

Формула — либо маленькая буква греческого алфавита, либо выражение вида $\phi \rightarrow \psi$.

Аксиомы и правила вывода:

1. Схема аксиом:

$$\overline{\Gamma, \phi \vdash \phi}$$

2. Введение импликации:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}$$

3. Удаление импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Следующая теорема покажет, что если некоторая формула (составленная только из импликаций и переменных) выводима в интуиционистской логике, то она выводима и в импликационном ее фрагменте.

Теорема 3.3. Модели Крипке корректны и полны для данного исчисления.

Доказательство. Корректность моделей Крипке для данного исчисления следует из их корректности для полного исчисления. Для полноты же нам достаточно показать, что если неверно $\Gamma \vdash \alpha$, то найдется модель Крипке, в которой неверно и $\Gamma \Vdash \alpha$. Построим такую модель.

В качестве миров в этой модели мы возьмем множества формул, замкнутых относительно выводимости: $D(\Gamma) = \{\alpha \mid \Gamma \vdash \alpha\}$. Отношение вынуждения определим так: $\Gamma \Vdash p$, если $p \in \Gamma$. Наследование же миров будем рассматривать по включению: $\Gamma < \Delta$, если $\Gamma \in \Delta$.

Покажем, что так заданная модель — корректна и полна. То есть, $\Gamma \vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \Vdash \alpha$. Сделаем это индукцией по структуре формулы α .

- $\alpha = x$. Тогда, по определению, $\Gamma \vdash x$ эквивалентно $x \in \Gamma$ и эквивалентно $\Gamma \Vdash x$.
- $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$.

Сперва покажем полноту. Пусть $\Gamma \Vdash \beta \rightarrow \gamma$. Значит (определение вынуждения импликации в моделях Крипке) $D(\Gamma \cup \beta) \Vdash \gamma$. Раз так, то $\Gamma, \beta \vdash \gamma$ (предположение индукции). По правилу введения импликации тогда $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$.

Теперь покажем корректность. Пусть $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ и в некотором мире $\Gamma_n \geq \Gamma$ выполнено $\Gamma_n \Vdash \beta$. Раз $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, то $\Gamma_n \vdash \beta \rightarrow \gamma$. Раз $\Gamma_n \Vdash \beta$, то $\Gamma_n \vdash \beta$ (по полноте, доказанной выше). Тогда $\Gamma_n \vdash \gamma$ (по правилу удаления импликации), и, следовательно, $\Gamma_n \Vdash \gamma$ (по индукционному предположению). Значит, и $\Gamma_n \Vdash \beta \rightarrow \gamma$.

□

4 Основные задачи

Можно задаться вопросом: что мы можем получить с этой теории? Традиционно рассматривают следующие три задачи:

1. Задача проверки типов — проверить, выполнено ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для данных Γ , M и σ .
2. Задача восстановления (синтеза) типов (типизируемости) — проверить, возможно ли для данного лямбда-выражения M найти такие Γ и σ , что $\Gamma \vdash M : \sigma$.
3. Задача населенности типа — проверить, найдется ли для данного типа σ терм M , такой, что $\vdash M : \sigma$.

Для просто типизируемого лямбда-исчисления существует алгоритмическое решение для всех трех задач. Сейчас мы познакомимся с ним.

5 Синтез типа и обитаемость типа

Прежде чем перейти к более сложным типовым системам, нам осталось ответить на важный вопрос о наличии эффективных процедур, позволяющих определить, существует ли лямбда-выражение, имеющее некоторый тип в некотором контексте: $\Gamma \vdash ? : \sigma$

Определение 5.1. Мы будем называть некоторый тип σ в контексте Γ *обитаемым*, если найдется такое выражение M , что $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Теорема 5.1. Задача определения обитаемости типа — разрешима.

Доказательство. Для доказательства предоставим разрешающий алгоритм. □

6 Упорядоченные пары и алгебраические типы данных

Сперва попробуем расширить понятие типа экстенсивно: через добавление новых связок, не изменяя порядка исчисления. Естественные кандидаты здесь — конъюнкция и дизъюнкция, для которых изоморфизм Карри-Ховарда предлагает следующие аналоги:

Конструкция	Связка	Операции
Упорядоченная пара	$\alpha \& \beta$	$\pi_1 : \alpha \& \beta \rightarrow \alpha$ $\pi_2 : \alpha \& \beta \rightarrow \beta$ $\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
Алгебраический тип	$\alpha \vee \beta$	$in_1 : \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ $in_2 : \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ $case : (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$

7 Исчисление 1-го порядка

Более радикальный путь усиления теории — рассмотрение исчислений 1-го и высших порядков. Подробно на теориях 1-го порядка мы останавливаться не будем, единственное, отметим, что такая теория будет требовать определение выражений двух сортов: предметных и логических. Аналогом с точки зрения изоморфизма Карри-Ховарда для логических значений будут типы, а предметными выражениями могут быть любые выражения над не-типовыми значениями: например, над строками, целыми числами и т.п.

Аналог предиката в данном случае — это функция, отображающая значение предметного множества в тип. Такой тип, зависящий от предметной переменной, называется *зависимым*.

Самый, видимо, известный пример подобного — шаблоны в C++. Если мы будем рассматривать значения, представимые в откомпилированном коде, в качестве элементов предметного множества, типы — как значения пропозициональных переменных, а шаблоны, параметризованные элементарными значениями — как предикаты, то мы как раз получим исчисление с зависимыми типами.

Например, шаблону

```
template <int a>
struct X { int v[a]; };
```

мы могли бы сопоставить тип: $X : \forall a$.

Хотя, конечно, система типов в C++ значительно сложнее и в приведенное исчисление 1-го порядка не помещается в точности: например, мы проигнорировали в формализации, что аргументы шаблонов имеют тип (и получается, что кванторы ограничены некоторым подмножеством предметного множества).

8 Исчисление 2-го порядка

Те же шаблоны из C++ позволяют задавать и более сильные операции: отображения из типов в типы. Такие типы (зависящие от других типов) в логике имеют аналогом предикаты, зависящие от других логических значений. Это уже — исчисление предикатов 2-го порядка. Изучение такого исчисления и соответствующей ему системы типов и будет нашей ближайшей целью.

8.1 Импликационный фрагмент интуиционистского исчисления второго порядка

8.2 Система F

Определение 8.1.