

## Домашние задания по курсу «Теория типов»

1. На вход вашей программе дается файл `task1.in`, содержащий лямбда-выражение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{Выражение} \rangle &::= [\langle \text{Применение} \rangle] \backslash \langle \text{Переменная} \rangle \cdot \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Применение} \rangle \\ \langle \text{Применение} \rangle &::= \langle \text{Применение} \rangle \langle \text{Атом} \rangle | \langle \text{Атом} \rangle \\ \langle \text{Атом} \rangle &::= \langle \text{'('} \langle \text{Выражение} \rangle \text{'')'} | \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= \langle \text{'a' ... 'z'} \rangle \{ \langle \text{'0' ... '9'} \rangle^* \{ \langle \text{'_'} \rangle^* \}\end{aligned}$$

Аргументы-переменные в применении должны разделяться пробелом. В остальных случаях пробелы могут отсутствовать. Любые пробелы между нетерминальными символами (кроме пробела, разделяющего аргументы в применении) — а также начальные и конечные пробелы в строке — должны игнорироваться. Символы табуляции, возврата каретки и перевода строки должны трактоваться как пробелы.

Требуется расставить все недостающие скобки вокруг всех абстракций и применений, и напечатать получившийся результат в файле `task1.out`.

Например:

`'\a.\b.a b c (\d.e \f.g) h'`

должно превратиться в

`'(\a.(\b.(((a b) c) (\d.(e (\f.g)))) h))'`

2. В файле `task2.in` задано некоторое лямбда-выражение, требуется найти список свободных переменных в нем и напечатать в алфавитном порядке, по идентификатору на строке.
3. В файле `task3.in` задана подстановка в некоторое лямбда-выражение в следующем синтаксисе (расширение определения из первой задачи):

$$\langle \text{Условие} \rangle ::= \langle \text{Выражение} \rangle \langle \text{'['} \langle \text{Переменная} \rangle \text{' := '} \langle \text{Выражение} \rangle \text{' ]'} \rangle$$

Требуется в выходном файле `task3.out` привести результат подстановки, либо указать фразу «Нет свободы для подстановки для переменной»  $\langle \text{Переменная} \rangle$ .

4. В файле `task4.in` дано лямбда-выражение, имеющее нормальную форму, требуется нормализовать его и результат записать в файл `task4.out`.
5. Преобразовать лямбда-выражение в комбинаторное выражение в базисе *SKI*.

На вход в файле `task5.in` задано лямбда-выражение, выведите в файл `task5.out` бета-эквивалентное ему выражение в базисе *SKI*. Результирующее выражение должно соответствовать грамматике для лямбда-выражений, но не должно содержать лямбда-абстракций. В качестве значений можно использовать только большие буквы 'S', 'K' и 'I' и свободные переменные из исходного выражения.

6. Унификация термов. На вход в файле `task6.in` задан список уравнений в алгебраических термах, по уравнению на строке. Каждое уравнение соответствует следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
\langle \text{Уравнение} \rangle &::= \langle \text{Терм} \rangle '=' \langle \text{Терм} \rangle \\
\langle \text{Терм} \rangle &::= \langle \text{Функция} \rangle '(' \langle \text{Терм} \rangle \{ ',' \langle \text{Терм} \rangle^* \} ')' \mid \langle \text{Переменная} \rangle \\
\langle \text{Функция} \rangle &::= ('a' \dots 'h') \{ '0' \dots '9' \}^* \{ '\cdot' \}^* \\
\langle \text{Переменная} \rangle &::= ('i' \dots 'z') \{ '0' \dots '9' \}^* \{ '\cdot' \}^*
\end{aligned}$$

Решите эту систему уравнений и выведите в файл task6.out наиболее общую подстановку, по строке на каждую переменную, используя следующую грамматику:

$$\langle \text{Строка подстановки} \rangle ::= \langle \text{Переменная} \rangle '=' \langle \text{Терм} \rangle$$

7. Просто типизированное лямбда-исчисление. На вход в файле task7.in задано лямбда-выражение. Выведите в файл task7.out какой-нибудь наиболее общий тип для этого выражения в просто типизированном лямбда-исчислении (если этот тип существует), или укажите, что выражение типа не имеет.

Результат должен соответствовать следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
\langle \text{Ответ} \rangle &::= \langle \text{Тип} \rangle '\backslash n' \langle \text{Контекст} \rangle \mid \text{‘Лямбда-выражение не имеет типа.’} \\
\langle \text{Контекст} \rangle &::= \{ \langle \text{Переменная} \rangle ':' \langle \text{Тип} \rangle '\backslash n' \}^* \\
\langle \text{Тип} \rangle &::= \langle \text{Терм} \rangle \mid \langle \text{Терм} \rangle '->' \langle \text{Тип} \rangle \\
\langle \text{Терм} \rangle &::= \langle \text{Перем} \rangle \mid '(' \langle \text{Тип} \rangle ')' \\
\langle \text{Перем} \rangle &::= ('a' \dots 'z') \{ '0' \dots '9' \}^* \{ '\cdot' \}^*
\end{aligned}$$

12. Расширенное лямбда-исчисление. На вход программы в файле task12.in задается выражение в лямбда-исчислении с конструкцией let. Выражение соответствует следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
\langle \text{Выражение} \rangle &::= \text{‘let’} \langle \text{Переменная} \rangle '=' \langle \text{Выражение} \rangle \text{‘in’} \langle \text{Выражение} \rangle \\
&\mid \langle \text{Абстракция} \rangle \\
\langle \text{Абстракция} \rangle &::= [ \langle \text{Применение} \rangle ] '\backslash' \langle \text{Переменная} \rangle '.' \langle \text{Абстракция} \rangle \\
&\mid \langle \text{Применение} \rangle \\
\langle \text{Применение} \rangle &::= \langle \text{Применение} \rangle \langle \text{Терм} \rangle \mid \langle \text{Терм} \rangle \\
\langle \text{Терм} \rangle &::= '(' \langle \text{Выражение} \rangle ')' \\
&\mid \langle \text{Переменная} \rangle \\
&\mid \text{‘F’} \mid \text{‘T’} \mid \text{‘If’} \mid \text{‘Y’} \mid \text{‘Plus’} \mid \text{‘Minus’} \mid \text{‘Eq’} \mid \{ '0' \dots '9' \}^+ \\
&\mid \text{‘<’} \langle \text{Выражение} \rangle ',' \langle \text{Выражение} \rangle \text{‘>’} \mid \text{‘PrL’} \mid \text{‘PrR’} \\
&\mid \text{‘InL’} \mid \text{‘InR’} \mid \text{‘Case’} \\
\langle \text{Переменная} \rangle &::= ('a' \dots 'z') \{ '0' \dots '9' \}^* \{ '\cdot' \}^*
\end{aligned}$$

Аналогично простым лямбда-выражениям, если подряд указаны какие-либо идентификаторы или ключевые слова 'let' и 'in', то они будут разделяться пробелом.

Любые другие пробелы — а также начальные и конечные пробелы в строке — должны игнорироваться. Символы табуляции, возврата каретки и перевода строки должны трактоваться как пробелы.

Требуется нормализовать выражение. Для переменных особого вида следует применять следующие правила редукции:

Исходное выражение	Бета-редукция выражения
'If T t e'	't'
'If F t e'	'e'
'Plus x y'	$(x + y) \% 2^{63}$ , если $x, y$ — числа, иначе — ошибка
'Minus x y'	$(x - y) \% 2^{63}$ , если $x, y$ — числа, иначе — ошибка
'Eq x y'	если $x, y$ — не числа, то ошибка; если $x = y$ , то 'T', иначе 'F'
'Y f'	'f (Y f)'
'PrL <a,b>'	'a'
'PrR <a,b>'	'b'
'Case (InL x) l r'	'l x'
'Case (InR y) l r'	'r y'

Частичное применение переменных особого вида допускается (в этом случае имеет место классический карринг). Если какое-то применение переменной особого вида отсутствует в списке (например, 'If 0 1 2') — то его редукция должна приводить к ошибке.

В качестве примеров к программе должны быть приложены выражения для вычисления:

- по числу  $n$  ( $0 \leq n \leq 91$ ) вычислить  $n$ -е число Фибоначчи  $F_n$  (подсказка:  $F_{91} = 7540113804746346429$ )
- по числу  $n$  вернуть упорядоченную пару  $\langle a, b \rangle$ , где  $a$  — число цифр в двоичном разложении  $n$  (без ведущих нулей), а  $b$  — сумма цифр в двоичном разложении.

### 13. Алгоритм $W$ .

На вход программе передается файл task13.in, содержащий расширенное лямбда-выражение. Требуется применить алгоритм  $W$  и выдать в выходной файл результирующий тип и контекст в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Ответ} \rangle &::= \langle \text{Тип} \rangle \backslash \mathbf{n} \langle \text{Контекст} \rangle \mid \text{Лямбда-выражение не имеет типа.} \\
 \langle \text{Контекст} \rangle &::= \{ \langle \text{Переменная} \rangle \backslash \langle \text{Тип} \rangle \backslash \mathbf{n} \}^* \\
 \langle \text{Тип} \rangle &::= \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \rightarrow \langle \text{Тип} \rangle \\
 \langle \text{Дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Конъюнкция} \rangle \\
 &\quad \mid \langle \text{Конъюнкция} \rangle \\
 \langle \text{Конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Конъюнкция} \rangle \& \langle \text{Атом} \rangle \mid \langle \text{Атом} \rangle \\
 \langle \text{Атом} \rangle &::= \langle \text{Переменная} \rangle \mid \mathbf{Bool} \mid \mathbf{Int} \mid ( \langle \text{Тип} \rangle ) \\
 \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\mathbf{a} \dots \mathbf{z}) \{ \mathbf{0} \dots \mathbf{9} \}^* \{ \mathbf{'\`'} \}^*
 \end{aligned}$$

У выражений особого вида должны быть следующие особые типы:

Имя	Тип
T,F	$Bool$
If	$\forall a (Bool \rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a)$
$0, 1, \dots, 2^{63} - 1$	$Int$
Plus	$Int \rightarrow Int \rightarrow Int$
Minus	$Int \rightarrow Int \rightarrow Int$
Eq	$Int \rightarrow Int \rightarrow Bool$
$< x^a, y^b >$	$a \& b$
PrL	$\forall a \forall b (a \& b \rightarrow a)$
PrR	$\forall a \forall b (a \& b \rightarrow b)$
InL	$\forall a \forall b (a \rightarrow a b)$
InR	$\forall b \forall b (b \rightarrow a b)$
Case	$\forall a \forall b \forall c (a b \rightarrow (a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow c)$
Y	$\forall a ((a \rightarrow a) \rightarrow a)$

Убедитесь, что решения для примеров из предыдущей задачи правильно типизируются.