Тема 5. Множества решений интервальных задач.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

16.02.2022

ПЛАН

Теория

- Виды множеств решений
- AE-решения
- Объединенное множество решений
- Допусковое множество решений

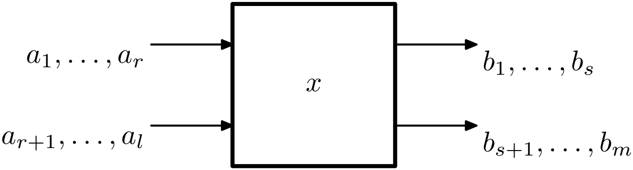
Простые примеры объединённого множества решений

- Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия
- Для неизвестных известны их сумма и отношение

- Нахождение AE-решений с помощью `IntLinInc2D`

Общий случай

Для заданных входов и выходов системы найти (или как-то оценить) её состояние.



$$F(a, x)$$

Постановки интервальных задач - формализация

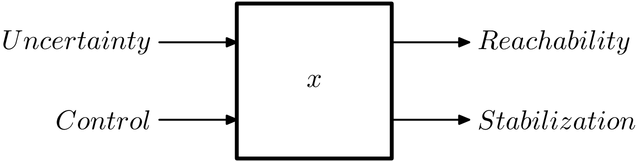
Входные воздействия

- *Возмущения* $a_1, \dots, a_r$, действуют независимо от нашей воли в пределах интервалов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$
- *Управления* $a_{r+1}, \dots, a_l$, значения которых мы сами можем устанавливать в интервалах $\boldsymbol{a}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{a}_l$

Множество выходов

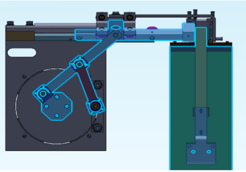
- Компоненты $b_1, \dots, b_s$, которые мы должны быть способны перевести в любое значение из заранее заданных интервалов $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_s$ (*интервалы достижимости*)
- Компоненты $b_{s+1}, \dots, b_m$, для которых должны обеспечить гарантированное попадание их значений в интервалы $\boldsymbol{b}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{b}_m$ (*интервалы стабилизации*)

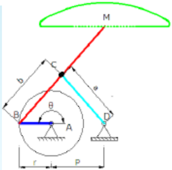
Постановки интервальных задач



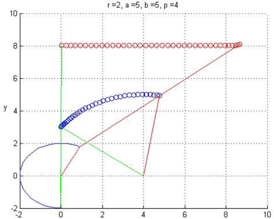
$$F(a, x)$$

3D-схема





Прямолинейное движение конечной точки механизма (шатунная кривая)



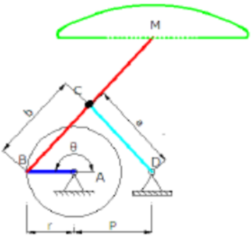
Пример. Лямбда-механизм Чебышёва

Входные воздействия

- *Возмущения* — неточности изготовления и сборки
- *Управления* —- вращения вала

Множество выходов

- *интервалы достижимости* — длина прямолинейного участка движения
- *интервалы стабилизации* — размах вертикального хода конечной точки



Пример стабилизируемого выхода

Типичным примером *стабилизируемого выхода* системы может служить температура внутри химического реактора в ряде химико-технологических процессов.
Она не должна отличаться от номинальной $\tilde{T}$ больше, чем на некоторую предписанную величину δT, но при этом любая температура из интервала

$$[\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$$

в равной степени приемлема, при этом какие-то значения температуры из этого интервала могут оказаться недостижимыми реальным процессом.

Пример стабилизируемого выхода

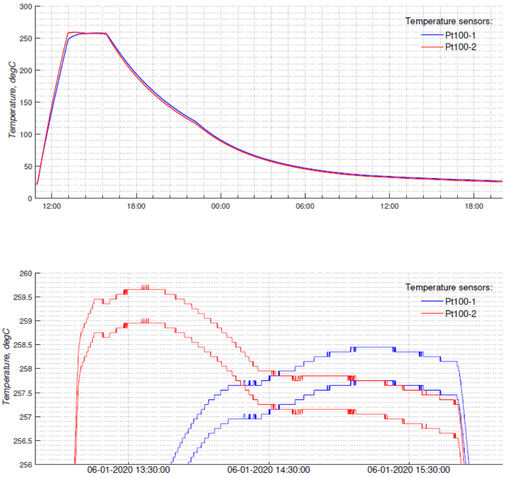


Рис. 1.1: Измерения температуры двумя датчиками. На верхнем рисунке представлены данные во всем интервале проведения эксперимента, всего около 2-х суток. На нижнем рисунке — данные в течение 2-х часового интервала после выхода на стационарный режим.

Множества решений интервальных уравнений.

Пусть зависимость «вход-состояние-выход» имеет вид

$$F(a,x) = b$$

с некоторым отображением $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$F(a,x) = \begin{pmatrix} F_1(a,x) = 0 \\ F_2(a,x) = 0 \\ \vdots \\ F_n(a,x) = 0 \end{pmatrix},$$

$$F_i(a,x) = F_i(a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$i = 1, 2, \dots, m.$$

n неизвестных, m уравнений.

Задача гарантированного оценивания внутреннего состояния

Задача гарантированного оценивания внутреннего состояния системы по значениям сигналов на её входах и выходах:

Для каких состояний x системы при любых внешних возмущениях $a_1 \in \boldsymbol{a}_1, \ldots, a_r \in \boldsymbol{a}_r$ и любых a priori заданных значениях $b_1 \in \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ мы можем выбрать соответствующие управления $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_l$ так, чтобы выходной отклик системы $F(a, x)$ был бы в точности равен на управляемых выходах $b_1, \ldots, b_s$ и находился бы внутри на стабилизируемых выходах $\boldsymbol{b}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_m$?

Задача гарантированного оценивания внутреннего состояния

Иначе, «задана интервальная система уравнений»

$$F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{b}$$

с интервальными параметрами $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_l)^T \in \mathbb{IR}^l$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)^T \in \mathbb{IR}^m$.
мы не имеем права выполнять какие-либо преобразования (приводить подобные члены, переносить члены из одной части в другую и т. п.), пока не определены точный смысл «решения» системы и то, как следует понимать эквивалентность преобразований.

Исчисление предикатов первого порядка.

Логические кванторы:
$\forall$ (квантор всеобщности, «для всех») и
$\exists$ (квантор существования, «существует»)

Переформулируем задачу гарантированного оценивания внутреннего состояния:

$$(\forall a_1 \in \boldsymbol{a}_1)\ldots(\forall a_r \in \boldsymbol{a}_r)(\forall b_1 \in \boldsymbol{b}_1)\ldots(\forall b_s \in \boldsymbol{b}_s)$$
$$(\exists a_{r+1} \in \boldsymbol{a}_{r+1})\ldots(\exists a_l \in \boldsymbol{a}_l)(\exists b_{s+1} \in \boldsymbol{b}_{s+1})\ldots(\exists b_m \in \boldsymbol{b}_m)$$
$$F(a, x) = b.$$

Множество решений на языке предикатов

Множество всех состояний x, отвечающих задаче гарантированного оценивания внутреннего состояния, будем обозначать посредством Ξ:

$$\begin{aligned}\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_1 \in \boldsymbol{a}_1) \ldots (\forall a_r \in \boldsymbol{a}_r)(\forall b_1 \in \boldsymbol{b}_1) \ldots (\forall b_s \in \boldsymbol{b}_s) \\ (\exists a_{r+1} \in \boldsymbol{a}_{r+1}) \ldots (\exists a_l \in \boldsymbol{a}_l)(\exists b_{s+1} \in \boldsymbol{b}_{s+1}) \ldots (\exists b_m \in \boldsymbol{b}_m) \\ (F(a, x) = b).\}\end{aligned}$$

Найти (или как-нибудь оценить) множество Ξ

Множество решений на языке предикатов

Найти (или как-нибудь оценить) множество Ξ

Определение. Логическая формула, выписанная после вертикальной черты в определении множества решений Ξ и задающая характеристическое свойство точек этого множества, будет называться

выделяющим предикатом

соответствующего множества решений интервальной системы уравнений

Виды множеств решений

Математически свойства и отношения, представляющие задачу $P(v)$, могут выражаться, точечными уравнениями, неравенствами и т. п. Могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

- Рассматриваемое свойство имеет место **для всех точек** из заданного интервала.
- Свойство выполняется лишь **для некоторых точек** из интервала, не обязательно всех.

Принята следующая терминология:

- в первом случае говорят о $\forall$ -типе (A-типе) неопределённости, $(\forall v \in \boldsymbol{v})P(v)$
- во втором случае говорят о $\exists$ -типе (E-типе) неопределённости, $(\exists v \in \boldsymbol{v})P(v)$.

Виды множеств решений

Рассуждения, мотивирующие использование логических кванторов и кванторного языка в отношении интервально неопределённых параметров, в равной мере приложимы не только к

интервальным алгебраическим системам,

но также к

интервальным неравенствам, интервальным дифференциальным и интегральным уравнениям и т. п.

В частности, при определении для них «решений» и «множеств решений» мы должны аккуратно принимать во внимание различие между указанными типами интервальной неопределённости.

Виды множеств решений - ОДУ

Пусть некоторый объект описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0, T], \; x(0) = x_0.$$

где t — переменная времени,
$x(t)$ — вектор-функция фазового состояния,
$u(t)$— вектор-функция управления.

Будем предполагать, что управление
$u(t)$ — кусочно непрерывная функция с областью определения $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$, значения которой принадлежат некоторому брусу. Обозначим множество всех таких функций $C([0, T], U)$.

Виды множеств решений - ОДУ

Множеством достижимости
рассматриваемой системы для момента $t = T$ называется множество всех концов $x(t)$ траекторий системы, исходящих из точки x_0 и соответствующих всевозможным управлениям $u(t)$, т. е. множество

$$\{ \; x(T) \mid (x(0) = x_0) \;\&\; (\exists u(t) \in C([0, T], U)) \; (\dot{x} = f(t, x, u)) \; \}$$

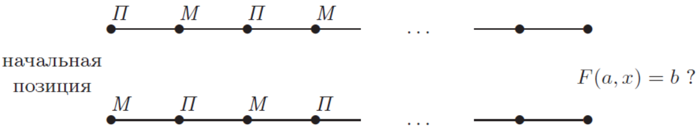
Теоретико-игровая интерпретация множеств решений

Для интерпретации множеств кванторных решений интервальных систем уравнений достаточно ограничиться простейшей игрой двух лиц, в которой

- дерево игры является *простой цепью*
- платёжные функции булевозначны, т.е принимают значения 0 или 1,
- интересы игроков (т. е. получаемые ими значения платёжных функций) диаметрально противоположны.

Такие игры называются *антагонистическими*.
Мы, следовательно, можем считать, что множество возможных исходов игры $\{\ 0,\ 1\ \}$ — это просто состояния «выигрыш-проигрыш», причём проигрыш одного игрока означает выигрыш другого и наоборот.

Рассмотрим подобную игру между игроками П (Природа) и М (Мы), в которой ходы делаются поочерёдно, один за другим, так что дерево игры есть простая цепь,и его возможные виды представлены на рисунке в зависимости от того, кто из игроков делает первый ход.



К примеру, множество решений

$$\{\ x \in \mathbb{R} \mid (\exists a_2 \in \boldsymbol{a}_2)(\forall a_1 \in \boldsymbol{a}_1)(\forall a_3 \in \boldsymbol{a}_3)(\exists a_4 \in \boldsymbol{a}_4)(\forall b_2 \in \boldsymbol{b}_2) \\ (F(a,x) = b)\ \}$$

может быть проинтерпретировано следующим образом: у игрока M (который начинает игру) существует такой первый ход a_2, что вне зависимости от ответного хода игрока П, $(F(a,x) = b)$ на котором тот выбирает последовательно значения a_1 из $\boldsymbol{a}_1$ и a_3 из $\boldsymbol{a}_3$, игрок M снова найдет подходящий ответ в виде a_4 из $\boldsymbol{a}_4$ и т. д., так что равенство $F(a,x) = b$ будет в конечном итоге достигнуто.

В первом случае (A) интервал отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором (E) он представляет собой лишь границы, «вместилище» для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала (возможно, что она принимает даже только одного значение из интервала).

Множества АЕ-решений

Для краткости вполне уместно говорить интервальная A-неопределённость, интервальная E-неопределённость и т.п.

Далее мы собираемся исследовать лишь множества решений, у которых в выделяющем предикате

все вхождения квантора всеобщности «$\forall$» предшествуют вхождениям квантора существования «$\exists$».

Можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь

AE-форму.

Множества AE-решений

Определение. Множествами *AE*-решений называются множества решений интервальных уравнений (неравенств ит. п.) для которых выделяющий предикат имеет *AE*-форму.

Имеем задачу

$$F(a, x) = b$$

«Переформулируем» её в квантором формализме, заменив численные объекты, матрицу и вектор правой части на объекты, состоящие из кванторов

$$F(\alpha, x) \longrightarrow \beta$$

Например

$$\alpha = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$$

1. Прямое указание кванторов.
Введём n-вектор $\alpha = (\alpha_i)$ и m-вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall & \text{если } \alpha_i \text{ имеет A-неопределённость,} \\ \exists & \text{если } \alpha_i \text{ имеет E-неопределённость,} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \forall & \text{если } \beta_i \text{ имеет A-неопределённость,} \\ \exists & \text{если } \beta_i \text{ имеет E-неопределённость.} \end{cases}$$

Задание разбиения индексных множеств компонент векторов задачи

2. Задание разбиений индексных множеств компонент векторов a и правой части b.
Пусть все множество индексов i- компонент a_i, т. е. множество $\{1, 2, \dots l\}$, разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots \check{\gamma}_q\}$, $p + q = l$, так, что

$$a_i \text{ имеет интервальную А-неопределённость при } i \in \hat{\Gamma},$$

$$a_i \text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } i \in \check{\Gamma}.$$

Задание разбиения индексных множеств компонент векторов задачи

Аналогичным образом введём непересекающиеся множества натуральных индексов $\hat{\Delta} = \{\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots \hat{\Delta}_s\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots \check{\Delta}_t\}$, $s + t = m$, так, что

$$b_i \text{ имеет интервальную A-неопределённость при } i \in \hat{\Delta},$$
$$b_i \text{ имеет интервальную E-неопределённость при } i \in \check{\Delta}.$$

Естественно, возможно, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$ пусты.

Способы описаний AE-решений

Очевидно, что если $\alpha = (\alpha_i)$ и $\beta = (\beta_i)$ — кванторные векторы, определённые в предшествующем пункте нашего списка, то

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall & i \in \hat{\Gamma}, \\ \exists & i \in \check{\Gamma} \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} \forall & i \in \hat{\Delta}, \\ \exists & i \in \check{\Delta} \end{cases}$$

Дизъюнктные разложения векторов a и b

3. Дизъюнктные (взаимнодополнительные) разложения векторов a и b. Именно, определим интервальные векторы $\boldsymbol{a}^{\forall} = (a_i)^{\forall}$ и $\boldsymbol{a}^{\exists} = (a_i)^{\exists}$ и интервальные векторы $\boldsymbol{b}^{\forall} = (b_i)^{\forall}$ и $\boldsymbol{b}^{\exists} = (b_i)^{\exists}$, тех же размеров, что a и b соответственно, следующим образом:

$$a_i^{\forall} := \begin{cases} a_i, & \alpha_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad a_i^{\exists} := \begin{cases} a_i, & \alpha_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$b_i^{\forall} := \begin{cases} b_i, & \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad b_i^{\exists} := \begin{cases} b_i, & \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

Тогда

$$a = a^{\forall} + a^{\exists}, \quad a_i^{\forall} \cdot a_i^{\exists} = 0$$
$$b = b^{\forall} + b^{\exists}, \quad b_i^{\forall} \cdot b_i^{\exists} = 0$$

для любого i.

Способы описаний АЕ-решений

Следует отметить, что три рассмотренные группы объектов, возникающих в связи с множествами АЕ-решений интервальных систем уравнений, именно

- кванторные векторы α и β
- разбиения индексных множеств векторов a и b на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$
- дизъюнктные разложения интервальных векторов $a = a^{\forall} + a^{\exists}$ и $b = b^{\forall} + b^{\exists}$

находятся во взаимно однозначном соответствии, таком что указание любого одного из пунктов этой триады немедленно определяет два других.

Определение. Пусть для интервальной системы уравнений $F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{b}$ распределение типов неопределённости по интервальным элементам параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ задаётся кванторными векторами α и β или же дизъюнктными разложениями $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\forall} + \boldsymbol{a}^{\exists}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\forall} + \boldsymbol{b}^{\exists}$ Множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid$$
$$(\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_1}) \dots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_p})(\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_1}) \dots (\forall b_{\hat{\delta}_s} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_s})$$
$$(\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_1}) \dots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_q})(\exists b_{\check{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_1}) \dots (\exists b_{\check{\delta}_t} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_t})$$
$$(F(a, x) = b)\}$$

решений с выделяющим предикатом AE-типа будем называть **множеством** AE**-решений типа** $\alpha\beta$ для интервальной системы уравнений $F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{b}$ и обозначать через $\Xi_{\alpha\beta}(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Объединённое множество решений,
образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{uni}(F, \mathrm{a}, \mathrm{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathrm{a})(\exists b \in \mathrm{b})(F(a, x) = b)\}$$

Допусковое множество решений,
образованное всеми точечными векторами x, такими что образ $F(a, x)$ попадает в правую часть $\boldsymbol{b}$ для всех $\boldsymbol{a}$

$$\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\}$$

Управляемое множество решений

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \; = \; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(F(a, x) = b) \,\}$$

образованное точечными векторами x, такими что для любого желаемого b можем найти подходящий параметр в a

Пример возникновения множеств AE-решений

Рассмотрим проблему управления качеством продукции на промышленном предприятии естественно разделить множество всех факторов (параметров), влияющих на выходные характеристики производства некоторой продукции, на следующие три подмножества:

- *проектируемые факторы* $x \in \mathbb{R}^n$, значения которых выбираются на этапе проектирования продукции,
- *факторы помех* $\nu \in \mathbb{R}^q$, значения которых мы не можем ни предсказать на стадии проектирования, ни изменить в процессе производства,
- *факторы управления производством* $u \in \mathbb{R}^p$, которые мы можем и должны использовать на стадии производства для компенсации влияний факторов помех, чтобы обеспечить желаемые выходные характеристики производства.

Пример возникновения множеств AE-решений

Типичная задача управления качеством продукции состоит в требовании достичь определённых целевых $y_i^\star$ значений рассматриваемых характеристик функционирования $y_i, i = 1, 2, \ldots, m$, в то время как зависимость y_i от факторов u, v, x описывается некоторой математической моделью

$$y_i = F_i(u, v, x), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

с известными функциями $F_i : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Доступная информация о значениях факторов помех выражена в виде интервалов их возможных значений: $[\underline{\nu}_i, \overline{\nu}_i], i = 1, 2, \ldots, q$.
Производственные факторы ui также не могут быть совершенно произвольными они конечны, т. е. мы можем выбирать их из некоторых интервалов $[\underline{u}_i, \overline{u}_i], i = 1, 2, \ldots, p$.
На выходе производственного процесса назначаем для характеристик функционирования интервалы ненулевой ширины $[\underline{y}_i, \overline{y}_i], i = 1, 2, \ldots, m$.

Пример возникновения множеств AE-решений

Основная задача управления качеством формулируется следующим образом:
Как следует выбрать проектируемые параметры $x_1, x_2, \ldots x_n$, чтобы для любых возмущающих факторов $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \ldots \tilde{\nu}_q$, лежащих в пределах интервалов $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \ldots \boldsymbol{\nu}_q$ соответственно, могли бы быть найдены такие факторы управления производством $\tilde{u}_1 \in \boldsymbol{u}_1, \tilde{u}_2 \in \boldsymbol{u}_2, \ldots \tilde{u}_p \in \boldsymbol{u}_p$, что результирующие выходные характеристики $F(\tilde{u}, \tilde{\nu}, \tilde{x})$ будут оставаться в пределах $y_i, i = 1, 2, \ldots, m$, заданных спецификацией производственного процесса?
все такие проекты $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ образуют множество

$$\begin{aligned}\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \nu_1 \in \nu_1) \ldots (\forall \nu_q \in \nu_q) \\ (\exists u_1 \in \mathrm{u}_1) \ldots (\exists u_p \in \mathrm{u}_p) \\ (\exists y_1 \in \mathrm{y}_1) \ldots (\exists y_m \in \mathrm{y}_m) \\ (F(u, \nu, x) = y) \,\}\end{aligned}$$

Массовая интервальная задача оценивания

Определение. Массовой интервальной задачей P (МЗ) оценивания назовём упорядоченную четверку вида

$$(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \rho),$$

$\mathcal{S}$ — **семейство множеств решений** —
отображение некоторого подмножества П интервального пространства $\mathbb{IR}^p$ в множество подмножеств $\mathbb{R}^q$, причём П описывает возможные значения интервалов параметров задачи МЗ, так что индивидуальная задача оценивания ИЗ выделяется из P путём присвоения переменным в S некоторых конкретных значений, которые определяют (в результате процесса решения или каким-нибудь другим способом) индивидуальное множество решений $\Xi \in S$;

Массовая интервальная задача оценивания

$\mathcal{E}$ — **класс оценивающих множеств**, являющийся каким-то множеством интервалов (брусов, шаров определённой нормы и т. п.), посредством которых мы собираемся оценивать и приближать множества решений из S;

$\mathcal{M}$ — **способ оценивания множеств решений**, т. е. бинарное отношение между элементами S и элементами $\mathcal{E}$, которое должно удовлетворяться в соответствии с содержательным смыслом решаемой задачи;

ρ — **неотрицательный функционал** на $S \times \mathcal{E}$ (метрика), который определяется постановкой задачи и указывает «ошибку» результата, т. е. меру близости оценивающего множества к множеству решений S.

Под решением индивидуальной задачи ИЗ будем понимать оценивающее множество $\Omega \in \mathcal{E}$, такое что удовлетворено отношение

$$\Xi \mathcal{M} \Omega$$

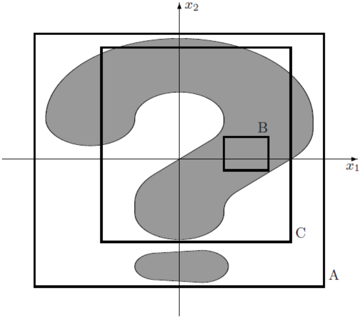
и, возможно, дополнительно выполняется некоторое условие на величину

$$\rho(\Xi, \Omega)$$

.

В современном интервальном анализе таковыми являются

- **внешнее интервальное оценивание**, когда ищется брус $E \in \mathbb{IR}^n$, объемлющий множество решений S, т. е. такой что $E \supseteq S$,
- **внутреннее интервальное оценивание**, когда ищется брус $E \in \mathbb{IR}^n$, содержащийся во множестве решений S, т. е. такой что $E \subseteq S$.



Трудоёмкость интервальных задач

Основные полученные к настоящему моменту результаты по теории сложности интервальных алгебраических задач таковы:
задача оценивания области значений полинома от многих переменных на брусе является NP-трудной;
задача нахождения глобального минимума для невыпуклых целевых функций на брусе является труднорешаемой;
задачи распознавания (проверки непустоты) объединённого множества решений ИСЛАУ и задачи его внешнего оценивания являются NP-трудными, причём они остаются NP-трудными даже в том случае, если матрица системы сильно неособенна, или если мы накладываем условия на знаки элементов матрицы, или ограничимся неплотно заполненными матрицами (в частности, NP-полны задачи распознавания и оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с трёхдиагональными матрицами и с неотрицательными матрицами);

Трудоёмкость интервальных задач

задачи распознавания и оценивания множеств AE-решений интервальных линейных систем являются NP-трудными;

задача нахождения формального решения интервальной линейной системы является NP-трудными;

задача распознавания решения нелинейной системы уравнений в заданном брусе является NP-трудной.

Линейные задачи

Детально рассмотрим простейшие интервальные задачи — системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{12} \cdot x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n} \cdot x_n = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{22} \cdot x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n} \cdot x_n = \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{m2} \cdot x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{mn} \cdot x_n = \boldsymbol{b}_m \end{cases}$$

в краткой форме,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальной $m \times n$ -матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$

Множество АЕ-решений ИСЛАУ

Определение. Множества AE-решений (или, иначе, AE-множества решений) — это множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет AE-форму, т. е. такой, что

все вхождения кванторов существования «$\exists$» предшествуют в нём вхождениям кванторов всеобщности «$\forall$».

Способы описания соответствия типов неопределённости

Как и в общем случае, для множеств AE-решений интервальных линейных систем уравнений существуют три эквивалентных способа описания соответствия типов неопределённости интервальным элементам системы:

1) указание для системы кванторной матрицы и кванторного вектора правой части,
2) разбиения индексных множеств матрицы и вектора правой части системы на подмножества, соответствующие элементам с A- и E-неопределённостями,
3) дизъюнктные разложения интервальной матрицы и правой части на слагаемые, отвечающие A- и E-неопределённостям системы.

Прямое указание кванторных матриц и вектора ИСЛАУ

Поскольку порядок кванторов в выделяющем предикате зафиксирован, то простейший способ описания типов неопределённости заключается в прямом указании того, какие логические кванторы соответствуют тем или иным элементам интервальной системы.
Именно, если ввести $m \times n$-матрицу $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ и m-вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall & \text{если } \alpha_{ij} \text{ имеет A-неопределённость,} \\ \exists & \text{если } \alpha_{ij} \text{ имеет E-неопределённость,} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \forall & \text{если } \beta_i \text{ имеет A-неопределённость,} \\ \exists & \text{если } \beta_i \text{ имеет E-неопределённость.} \end{cases}$$

то указание $\mathcal{A}$ и β полностью определяет конкретное множество AE-решений ИСЛАУ.

Задание разбиения индексных множеств элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ и правой части $\boldsymbol{b}$. Более точно, пусть множество всех индексных пар (i, j) элементов матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. множество

$$\{(1,1),(1,2),...,(m,n)\},$$

разбито на две непересекающиеся части
$\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, так, что

$$a_{ij} \text{ имеет интервальную А-неопределённость при } (i, j) \in \hat{\Gamma},$$
$$a_{ij} \text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } (i, j) \in \check{\Gamma}.$$

Задание разбиения индексных множеств

Аналогичным образом введём непересекающиеся множества натуральных индексов
$\hat{\Delta} = \{\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots \hat{\Delta}_s\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots \check{\Delta}_t\}$, $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, n\}$,
так, что

$$b_i \text{ имеет интервальную A-неопределённость при } i \in \hat{\Delta},$$
$$b_i \text{ имеет интервальную E-неопределённость при } i \in \check{\Delta}.$$

Возможно, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$ пусты.

Определим интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^{\forall} = (\boldsymbol{a}_{ij}^{\forall})$ и $\boldsymbol{A}^{\exists} = (\boldsymbol{a}_{ij}^{\exists})$ и интервальные векторы $\boldsymbol{b}^{\forall} = (b_i)^{\forall}$ и $\boldsymbol{b}^{\exists} = (b_i)^{\exists}$, тех же размеров, что a и b соответственно, следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{\forall} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \boldsymbol{a}_{ij}^{\exists} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}_{i}^{\forall} := \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \beta_{i} = \forall, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}_{i}^{\exists} := \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \beta_{i} = \exists, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

Тогда

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\forall} + \boldsymbol{A}^{\exists}, \quad \boldsymbol{a}_{ij}^{\forall} \cdot \boldsymbol{a}_{ij}^{\exists} = 0$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\forall} + \boldsymbol{b}^{\exists}, \quad \boldsymbol{b}_{i}^{\forall} \cdot \boldsymbol{b}_{i}^{\exists} = 0$$

Между тремя введёнными выше группами объектов, которые порождаются интервальной линейных системой и её множеством AE-решений, имеется взаимно однозначное соответствие.

Множество AE-решений ИСЛАУ кванторного типа $\alpha\beta$

Определение. Пусть для интервальной $m \times n$-системы линейных алгебраических уравнений заданы кванторные $m \times n$-матрица α и m-вектор β и ассоциированные с ними разбиения индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \ldots \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \ldots \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$ и $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \ldots \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \ldots \check{\delta}_s\}, r + s = m$.
Множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_1}) \ldots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \boldsymbol{a}_{\hat{\gamma}_p})(\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_1}) \ldots (\forall b_{\hat{\delta}_s} \in \boldsymbol{b}_{\hat{\delta}_s}) \\ (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_1}) \ldots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \boldsymbol{a}_{\check{\gamma}_q})(\exists b_{\check{\delta}_1} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_1}) \ldots (\exists b_{\check{\delta}_t} \in \boldsymbol{b}_{\check{\delta}_t}) \\ Ax = b\} \end{aligned}$$

будем называть множеством AE-решений типа $\alpha\beta$ для интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ (либо AE-множеством решений типа $\alpha\beta$).

Основные множества решений ИСЛАУ

Объединённое множество решений, образованное решениями всех точечных систем $Ax = b$

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathrm{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}$$

Допусковое множество решений, образованное всеми точечными векторами x, такими что образ $F(a, x)$ попадает в правую часть $\mathbf{b}$ для всех $\mathbf{a}$

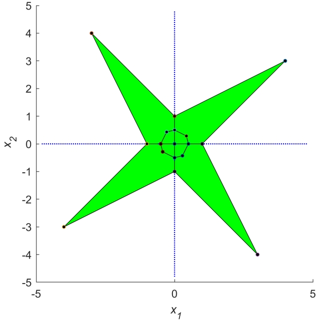
$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}$$

Управляемое множество решений,

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \; = \; \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathrm{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \, \right\}$$

образованное точечными векторами x, такими что для любого желаемого b можем найти подходящий параметр в a

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-2,1] & [2,4] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$



Количество решений ИСЛАУ

Пусть i-ая строка матрицы α целиком состоит из кванторов всеобщности $\forall$ и соответствующим элементом кванторного вектора β также является $\forall$.
Тогда $\Xi_{\alpha\beta}(A, b) = \emptyset$, если среди элементов $a_{1j}, \ldots, a_{in}, b_i$ имеется хотя бы один интервал с ненулевой шириной.

Из-за этого $C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m - 1$ штук множеств AE-решений интервальной линейной $m \times n$-системы оказываются заведомо пустыми (здесь C_m^k — это биномиальные коэффициенты).

Количество решений ИСЛАУ

Таким образом, количество «нетривиальных» множеств AE-решений для таких систем уравнений уменьшается до

$$2^{m(n+1)} - 2m + 1 = 2^m(2^{mn} - 1) + 1$$

.

Например, для интервальной линейной 2×2-системы уравнений можно рассматривать

$$2^2(2^4 - 1) + 1 = 61$$

множество AE-решений.

Как уменьшить количество рассматриваемых вариантов?

— Упорядочить.

Всегда

$$\Xi_{\alpha\beta}(A, b) \;\subseteq\; \Xi_{Uni}(A, b),$$

т. е.

объединенное множество решений является наиболее широким

в семействе всех множеств AE-решений для интервальных систем уравнений, и это наблюдение может быть обобщено.

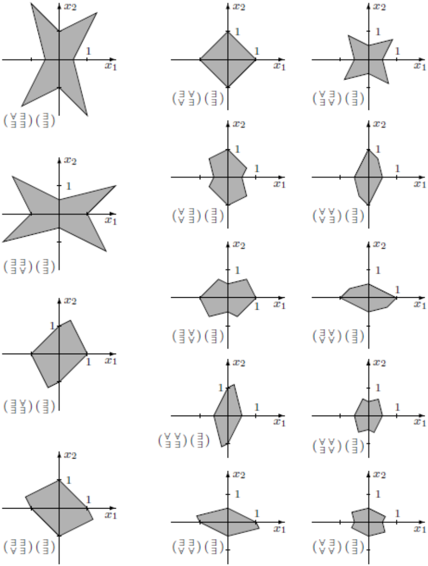
Именно, если на множестве логических кванторов $\{\forall, \exists\}$ ввести частичный порядок «$\neg$ », положив

$$\forall \neg \exists$$

а отношения $\alpha \neg \alpha', \beta \neg \beta', \alpha\beta \neg \alpha'\beta'$ договориться понимать покомпонентно и поэлементно, то для любых A и b имеет место импликация

$$\alpha\beta \neg \alpha'\beta' \Rightarrow \Xi_{\alpha\beta}(A, b) \subseteq \Xi_{\alpha'\beta'}(A, b)$$

Основные множества решений ИСЛАУ Барта-Нудинга



Свойство

$$\alpha\beta \neg \alpha'\beta' \Rightarrow \Xi_{\alpha\beta}(A,b) \subseteq \Xi_{\alpha'\beta'}(A,b)$$

может оказаться очень полезным при исследовании множеств кванторных решений интервальных систем уравнений.
Если мы уже обнаружили, к примеру, что для системы

$$\varXi_{\begin{pmatrix}\exists & \exists\\ \exists & \exists\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\forall\\ \exists\end{pmatrix}} = \varXi_{\begin{pmatrix}\exists & \forall\\ \forall & \exists\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\exists\\ \forall\end{pmatrix}} = \emptyset$$

то, посредством «ослабления», в смысле порядка, кванторов в выделяющем предикате, можно заключить, что управляемое множество решений $\varXi_{ctl}$ также пусто, и пустыми являются еще 45 множеств решений системы, получающиеся из вышеупомянутых трёх путем комбинирования кванторов перед элементами матрицы.

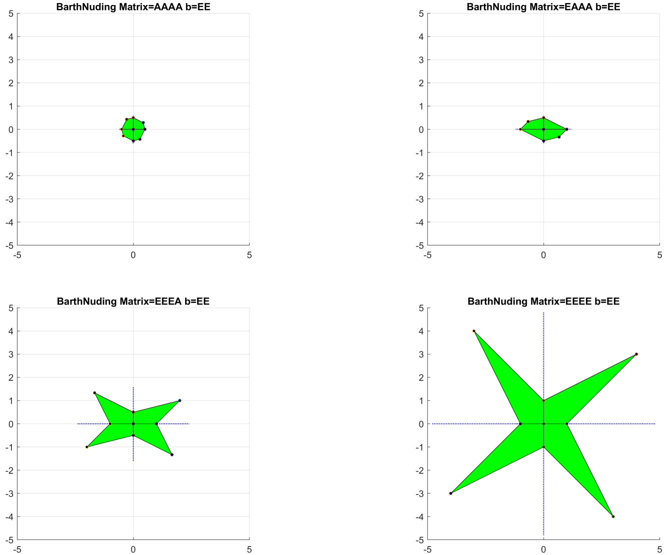
Свойство

$$\alpha\beta \neg \alpha'\beta' \Rightarrow \Xi_{\alpha\beta}(A, b) \subseteq \Xi_{\alpha'\beta'}(A, b)$$

может оказаться очень полезным при исследовании множеств кванторных решений интервальных систем уравнений.

Рассуждения, использованные нами при выводе свойства, в равной степени приложимы и к общим нелинейным интервальным системам уравнений,

Частичный порядок на множестве логических кванторов



На рис. последовательно представлены решения ИСЛАУ Барта-Нудинга со следующими кванторными матрицами:

$$A_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exists & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix} \right\}.$$

Видно, как увеличивается множество решений, показанное зелёной заливкой, при последовательном изменении кванторов всеобщности на кванторы существования в кванторной матрице.

Пример А.Карповой, 2021

Дана ИСЛАУ — А.Карпова, 2021

$$\begin{pmatrix} [3,6] & [-5,2] \\ [-5,7] & [-3,-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-1,1] \end{pmatrix}.$$

Частичный порядок на множестве логических кванторов

Выберем несколько сочетаний кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}.$$

Первая, вторая и третья комбинации кванторных матрицы и вектора входят в определения объединенного, допускового и управляемого множеств решений ИСЛАУ, соответственно.

Четвертая комбинация кванторных матрицы и вектора была выбрана произвольно.

Частичный порядок на множестве логических кванторов

Множества решений $(x_1, x_2)^\top$, соответствующие каждому из указанных сочетаний кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β, представлены на Рис.

Этот рисунок следует понимать как многослойный, т. е. различные множества AE-решений не «вырезают» части друг друга, а лишь визуально накладываются.

Зеленым цветом выделено объединенное множество решений $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Желтый цвет использован для обозначения допускового множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Голубой цвет соответствует управляемому множеству решений $\Xi_{ctl}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Розовый цвет выбран для выделения множества решений ИСЛАУ с произвольно выбранными кванторными матрицей $\mathcal{A}_4$ и вектором β_4.

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$$

Частичный порядок на множестве логических кванторов

Как мы видим на Рис., среди множеств AE-решений объединенное множество является самым широким, а допусковое — самым узким.

$$\begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}.$$

Объяснить полученный результат можно следующим образом: множество AE-решений расширяется при «ослаблении» (в смысле порядка) кванторов в выделяющем предикате.

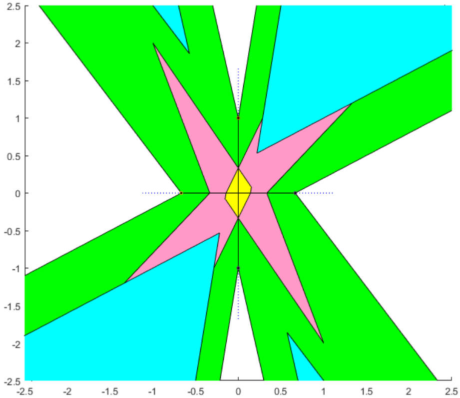


Рис.: Множества решений исследуемой ИСЛАУ. Кванторная матрица $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$

Заменим в кванторной матрице $\mathcal{A}_4$ один из кванторов $\exists$, являющийся элементом (1, 2), на квантор $\forall$.

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$$

Тогда множество решений ИСЛАУ с произвольно выбранной кванторной матрицей $\mathcal{A}$ и измененным вектором β уменьшится, что показано на Рис. 3 выделением фиолетовым цветом.

Замена последнего квантора $\exists$ в кванторной матрице $\mathcal{A}_4$ на квантор $\forall$ приведет нас к получению допускового множества AE-решений.

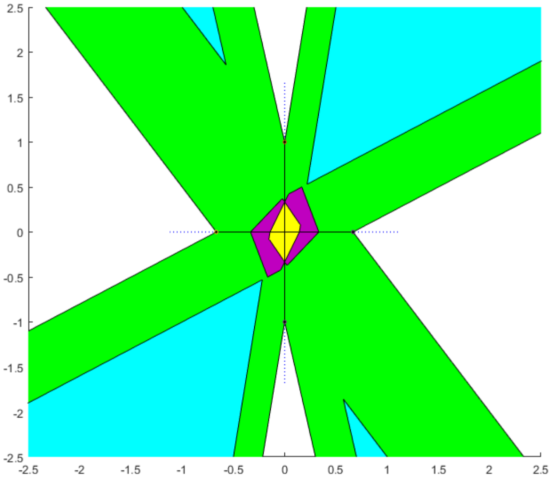


Рис.: Множества решений исследуемой ИСЛАУ с измененной кванторной матрицей $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$

Займёмся выводом различных эквивалентных характеризаций (описаний) множеств AE-решений интервальных линейных систем.

Теорема.

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{\hat{A}\in\boldsymbol{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\boldsymbol{b}^{\forall}} \bigcup_{\check{A}\in\boldsymbol{A}^{\exists}} \bigcup_{\check{b}\in\boldsymbol{b}^{\exists}} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b} \right\}$$

В частности, если $\boldsymbol{A}$ — неособенная интервальная матрица, то

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigcap_{\hat{A}\in\boldsymbol{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\boldsymbol{b}^{\forall}} \bigcup_{\check{A}\in\boldsymbol{A}^{\exists}} \bigcup_{\check{b}\in\boldsymbol{b}^{\exists}} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b})$$

Объединённое множество решений ИСЛАУ

Например, для объединённого множества решений ИСЛАУ с неособенной матрицей A имеем

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \bigcup_{b \in \mathbf{b}} A^{-1} b$$

что и обуславливает его название.

Аналитические характеризации множеств AE-решений ИСЛАУ

Фундаментальным результатом теории является
Теорема. Точка x принадлежит множеству AE-решений тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A}^{\forall} \cdot x - \boldsymbol{b}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists} \cdot x$$

где «$\cdot$» — интервальное матричное умножение.

Теорема обобщает все частные характеризации для различных множеств решений интервальных линейных систем — характеризацию Бека для объединённого множества решений, характеризации для допускового множества решений и управляемого множества решений.

$$\boldsymbol{\Omega}^{\forall} \subseteq \boldsymbol{\Omega}^{\exists}, \qquad \text{где } \boldsymbol{\Omega} - \text{невязка } \boldsymbol{A} \cdot x - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

Характеризация в полной интервальной арифметике Каухера

Определение. Интервальные матрицу $\boldsymbol{A}^c$ и вектор $\boldsymbol{b}^c$, определяемые посредством

$$\boldsymbol{A}^c = \boldsymbol{A}^\forall + \texttt{dual}\ \boldsymbol{A}^\exists, \quad \boldsymbol{b}^c = \texttt{dual}\ \boldsymbol{b}^\forall + \boldsymbol{b}^\exists$$

станем называть характеристическими для множества AE-решений ИСЛАУ, задаваемого дизъюнктными разложениями $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{A}^\forall$ и $\boldsymbol{A}^\exists$ и $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{b}^\forall$ и $\boldsymbol{b}^\exists$.

Теорема. Точка $x \in \mathbb{R}^n$принадлежит множеству AE-решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A}^c \cdot x \subseteq \boldsymbol{b}^c$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Будет совершенно корректным говорить, что множество AE-решений (некоторой) ИСЛАУ задаётся характеристическими матрицей и вектором правой части, и писать $\Xi(\boldsymbol{A}^c, \boldsymbol{b}^c)$, не указывая явно эту систему и распределение типов неопределённостей в ней.

Характеризация Рона множеств AE-решений

Теорема. (характеризация Рона множеств AE-решений) Точка x принадлежит множеству AE-решений тогда и только тогда, когда

$$|(\text{mid } \boldsymbol{A}) \cdot x - \text{mid } \boldsymbol{b}| \leq \left(\text{rad } \boldsymbol{A}^{\exists} - \text{rad } \boldsymbol{A}^{\forall}\right) \cdot |x| + \left(\text{rad } \boldsymbol{b}^{\exists} - \text{rad } \boldsymbol{b}^{\forall}\right)$$

Доказательство.
На основе

$$\boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow |\text{mid } \boldsymbol{p} - \text{mid } \boldsymbol{q}| \leq \text{rad } \boldsymbol{q} - \text{rad } \boldsymbol{p}$$

Характеризация Оеттли-Прагера

Частный случай — эквивалентность

$$x \in \Xi_{Uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \Leftrightarrow |\ (\mathrm{mid}\ \mathbf{A})x - \mathrm{mid}\ \mathbf{b}\ | \leq \mathrm{rad}\ \mathbf{A} \cdot |x| + \mathrm{rad}\ \mathbf{b}$$

для объединённого множества решений ИСЛАУ называют *характеризацией Оеттли-Прагера*.

Для точечной матрицы

$$x \in \Xi_{Uni}(A, \mathbf{b}) \Leftrightarrow |\ Ax - \mathrm{mid}\ \mathbf{b}\ | \leq \mathrm{rad}\ \mathbf{b}$$

Выпуклые полиэдральные множества

Определение. Выпуклым полиэдральным множеством в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств $\mathbb{R}^n$, т. е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида

$$h_{(i)}^T x \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

где $h_{(i)}^T \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ и p — некоторый натуральный номер.

Определение. Вершинами интервального вектора $\boldsymbol{a}$ из $\mathbb{IR}$ будем называть точечные n-векторы, i-ая компонента которых равна $\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}$ или $\overline{\boldsymbol{a}}_{ij}$. Множество вершин интервального вектора обозначаем как

$$\mathtt{vert}\ \boldsymbol{a} := \{a \in \mathbb{IR} \mid a_i \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}_i}\}, i = 1, 2, \dots, n.\}$$

Определение. Вершинами интервальной матрицы $A = (a_{ij}$ из $\mathbb{IR}^{m \times n}$ назовём точечные $m \times n$-матрицы, ij-ым элементом которых является $\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}$ или $\overline{\boldsymbol{a}}_{ij}$. Множество вершин интервальной матрицы обозначаем как

$$\mathtt{vert}\ \boldsymbol{A} := \{A \in \mathbb{IR}^{m \times n}\ |A = (a_{ij})\ a_{ij} \in \{\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}\}\}$$

Теорема. Для любых кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β пересечение множества AE-решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{IR}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^{m}$, с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ является выпуклым полиэдральным множеством, чьи вершины — это решения точечных линейных $m \times n$-систем $Ax = b$, уравнения которых являются либо угловыми (вершинными) линейными уравнениями вида

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i,$$
$$\text{где } (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots \tilde{a}_{in}) \in \mathtt{vert}\,\boldsymbol{A}_{i:},\ \ \tilde{b}_i \in \mathtt{vert}\,\boldsymbol{b}_i$$

либо уравнениями координатных гиперплоскостей вида $x_i = 0$ для каких-то $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Доказательство конструктивно и указывает, как нетрудно понять, способ рисования множеств решений ИСЛАУ в случае двух или даже трех измерений. Действительно, нужно строить эти множества решений «по ортантам», последовательно фиксируя нужным образом знаки компонент точки, соответствующие её принадлежности тому или иному ортанту пространства $\mathbb{R}^n$.

Выпуклые полиэдральные множества — IntLinIncXX

В отдельно взятом ортанте можно выписать систему неравенств вида,

$$\begin{cases} A'x \geq b', \\ A''x \leq b'', \\ \text{условие на знаки } x_i, i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

определяющую пересечение множества решений с этим ортантом, а затем решить её графически. В итоге полная картинка множества решений собирается из получившихся кусков (некоторые из которых могут оказаться пустыми) [2].

Допусковое множество решений может оказаться пустым, если интервалы правой части слишком узки в сравнении с интервалами элементов матрицы.
Всегда имеет место отношение

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}),$$

т.е., допусковое множество решений всегда является подмножеством объединённого множества решений.

Основные задачи для интервальных линейных систем уравнений

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ и кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно найти *внутреннюю* интервальную оценку множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

(1)

и

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ и кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно найти *внешнюю* интервальную оценку множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

(2)

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

Прежде чем двигаться дальше в теории, рассмотрим несколько простых задач.

Пусть для неизвестных x_1, x_2 известны их сумма и есть условия для каждой переменной по-отдельности. Если при этом еще и $x_1 \simeq x_2$, то с точностью до множителей система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{array}{cc} x_1 & \simeq 1 \\ x_1 + x_2 & \simeq 2 \\ x_2 & \simeq 1 \end{array}\right\}$$

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

«Решение» этой системы $x_1 \simeq 1, x_2 \simeq 1$.

Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; b = \begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.9, 2.1] \\ [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

Синтаксис вызова программы пакета `IntLinInc2D` для представления объединенного множества решений:
`[V, P1, P2, P3, P4] = EqnWeak2D(infA, supA, binf, bsup).`

Функция возвращает ориентационную матрицу `V` и 4 множества точек: `P1, P2, P3, P4`, по одному на каждый ортант на 2D-плоскости. Ориентационная матрица содержит точки пересечения множества с ортантами, множества `P1-P4` — вершины множества в каждом ортанте.

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

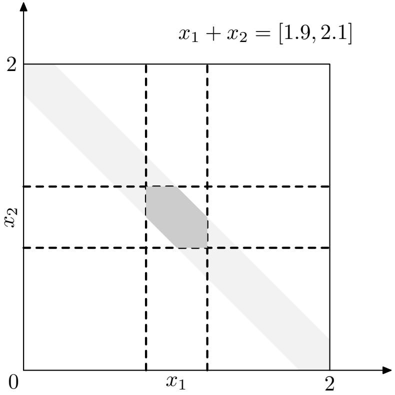


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (3). Справа — случай с более «широкой» правой частью

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

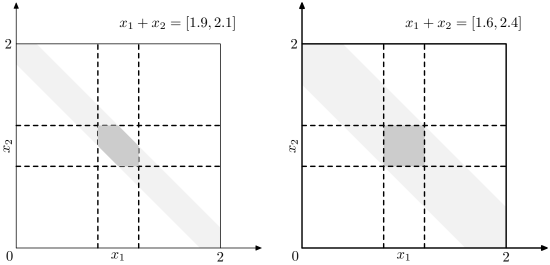


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (3). Справа — случай с более «широкой» правой частью

Если условие на сумму переменных имеет малую неопределённость, оно уточняет оценки переменных. В противном случае переменные независимы.

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

Рассмотрим следующую характерную ситуации.

Пусть для переменных x_1, x_2 известны их сумма и отношение между ними.

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 \simeq & 2 \\ \frac{x_1}{x_2} \simeq & \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.2.

То же самое сделаем с элементами второй строки матрицы уравнения, поскольку неопределенность имеет отношение переменных.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ [2.8, 3.2] & [-2.2, -1.8] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

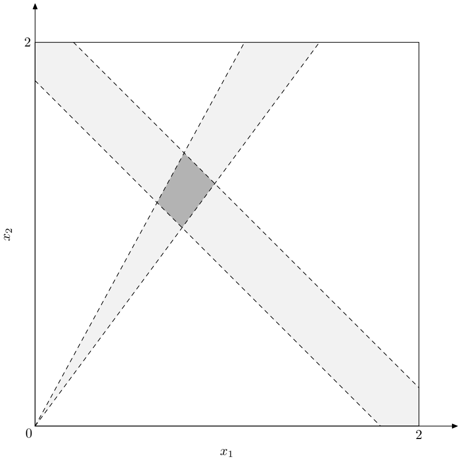


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (4).

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

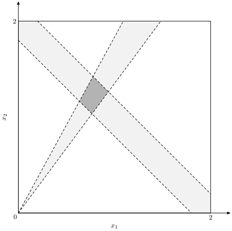


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (4).

Как и в примере с суммой переменных, одно из множеств — полоса, пересекающая оси координат. А вот вторая фигура теперь угол, с вершиной в начале координат. Его биссектриса имеет наклон, задаваемый вторым уравнением ИСЛАУ, а образующие определяются степенью неопределенности этого отношения.

Нахождение AE-решений с помощью IntLinInc2D

$$\begin{pmatrix} [-1,1] & [-1,1] \\ [-2,2] & [-2,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \tag{5}$$

Пусть интересует решение

$$\{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\forall A_{11} \in \boldsymbol{A}_{11})(\forall A_{12} \in \boldsymbol{A}_{12})(\forall b_2 \in \boldsymbol{b}_2)$$
$$(\exists A_{21} \in \boldsymbol{A}_{21})(\exists A_{22} \in \boldsymbol{A}_{22})(\exists b_1 \in \boldsymbol{b}_1)\ (Ax = b)\}$$

Зададим кванторные величины

$$A^q = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad b^q = \begin{pmatrix} \exists \\ \forall \end{pmatrix}.$$

Нахождение AE-решений с помощью IntLinInc2D

Подготовка переменных и вызов функции

EqnAEss2D

```
» infA=[ -1 -1 ; -2 -2 ];
» supA=[ 1 1 ; 2 2 ];
» infb=[ -1 ; -2 ];
» supb=[ 1 ; 2 ];
» Aq=[ 'A' 'A' ; 'E' 'E' ];
» bq=[ 'E' ; 'A' ];
» EqnAEss2D(infA,supA,Aq,infb,supb,bq);
```

```
Number of orientation points = 4
```

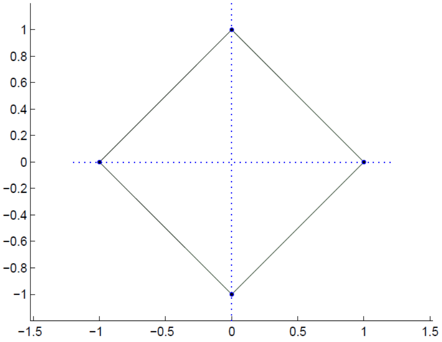


Рис.: Множество решений системы (5).

В первом ортанте

$$x + y = 1.$$

Для нахождения границ множеств решений в арифметике Каухера решается задача интервального включения

$$\mathbf{C}x \subseteq \mathbf{d}$$

$\mathbf{C} = [\underline{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{C}}] \in \mathbb{KR}^{2m}$ — интервальная матрица с границами $\underline{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{C}}$;
$x \in \mathbb{R}^2$ — вещественный вектор неизвестных;
$\mathbf{d} = [\underline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}}] \in \mathbb{KR}^m$ — интервальный вектор с границами $\underline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}}$;
$m \in N$ — натуральное положительное число;
включение «$\subseteq$» соответствует покомпонентному выполнению неравенств $\underline{\mathbf{C}x} \geq \underline{\mathbf{d}}$ и $\overline{\mathbf{C}x} \leq \overline{\mathbf{d}}$, $\underline{\mathbf{C}x}$ и $\overline{\mathbf{C}x}$ левые и правые границы интервального вектора $\mathbf{C}x = [\underline{\mathbf{C}x}, \overline{\mathbf{C}x}]$.

Имена функций для решения интервальных систем.

Тип	Слабое	Допусковое	Упр-е	Сильное	Кванторное
$Ax = b$	EqnWeak2D	EqnTol2D	EqnCtl2D	EqnStrong2D	EqnAEss2D
$Ax \geq b$	GeqWeak2D	GeqTol2D	GeqCtl2D	GeqStrong2D	GeqQtr2D
$Ax \leq b$	LeqWeak2D	LeqTol2D	LeqCtl2D	LeqStrong2D	LeqQtr2D
$Ax\sigma b$	MixWeak2D	MixTol2D	MixCtl2D	MixStrong2D	MixQtr2D

Таблица: Имена функций для решения интервальных систем.

MixQtr2D.

Наиболее гибкий синтаксис имеет функция `MixQtr2D`.

[V,P1,P2,P3,P4] = MixQtr2D(infA, supA, Aq, infb, supb, bq, relations)

В качестве входных параметров она принимает, помимо численных значений матриц и векторов `infA`, `supA`, `infb`, `supb`, кванторные матрицу и вектор `Aq`, `bq`, что даёт возможность получать решения для смешанных типов решений.

Помимо этого, задавая параметр `relations`, можно для каждого условия описать тип уравнения или неравенства: '=', '>', '<'.

Литература

- Barth W., Nuding E. Optimale Losung von Intervallgleichungssystemen // Computing. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- Шарая И.А. Пакет IntLinIncXX для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя и тремя неизвестными: Программное обеспечение, доступное на http://www.nsc.ru/interval/sharaya