Тема 6. Внешнее оценивание множества решений.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

02.03.2023

План

- Примеры множеств решений ИСЛАУ
- Предварительное оценивание множеств решений
- Внешняя оценка множества решения
- Метод Гаусса-Зайделя
- Формально-алгебраический подход
- Предобуславливание
- Линейный метод Кравчика
- Процедура Хансена-Блика-Рона

Следующая лекция

- Линейная задача о допусках
- Строение допускового множества решений
- Грубое исследование разрешимости
-

Основные задачи для интервальных линейных систем уравнений

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ и кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно найти *внутреннюю* интервальную оценку множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. (1)

и

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ и кванторных матрицы $\mathcal{A}$ и вектора β тех же размеров, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно найти *внешнюю* интервальную оценку множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. (2)

$\boxed{\text{Материал предыдущей лекции.}}$

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

Прежде чем двигаться дальше в теории, рассмотрим несколько простых задач.

Пусть для неизвестных x_1, x_2 известны их сумма и есть условия для каждой переменной по-отдельности. Если при этом еще и $x_1 \simeq x_2$, то с точностью до множителей система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{array}{cc} x_1 & \simeq 1 \\ x_1 + x_2 & \simeq 2 \\ x_2 & \simeq 1 \end{array}\right\}$$

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

«Решение» этой системы $x_1 \simeq 1, x_2 \simeq 1$.

Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.9, 2.1] \\ [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

Синтаксис вызова программы пакета `IntLinInc2D` для представления объединенного множества решений:
`[V, P1, P2, P3, P4] = EqnWeak2D(infA, supA, binf, bsup).`

Функция возвращает ориентационную матрицу `V` и 4 множества точек: `P1, P2, P3, P4`, по одному на каждый ортант на 2D-плоскости. Ориентационная матрица содержит точки пересечения множества с ортантами, множества `P1-P4` — вершины множества в каждом ортанте.

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

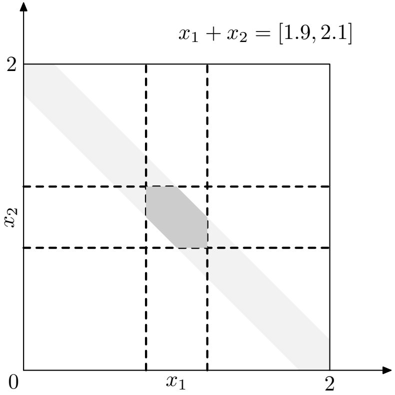


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (3). Справа — случай с более «широкой» правой частью

ИСЛАУ 2×2. Для неизвестных известны их сумма и дополнительные условия.

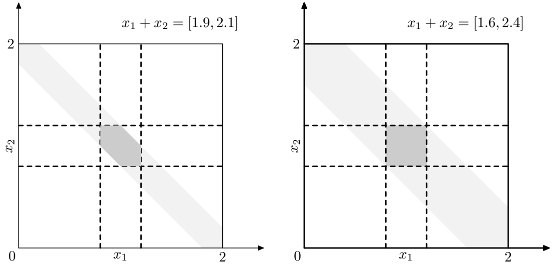


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (3). Справа — случай с более «широкой» правой частью

Если условие на сумму переменных имеет малую неопределённость, оно уточняет оценки переменных. В противном случае переменные независимы.

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

Рассмотрим следующую характерную ситуации.

Пусть для переменных x_1, x_2 известны их сумма и отношение между ними.

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 \simeq & 2 \\ \frac{x_1}{x_2} \simeq & \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

Для формальной постановки задачи зададим интервалы компонент правой части равными 0.2.

То же самое сделаем с элементами второй строки матрицы уравнения, поскольку неопределенность имеет отношение переменных.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ [2.8, 3.2] & [-2.2, -1.8] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

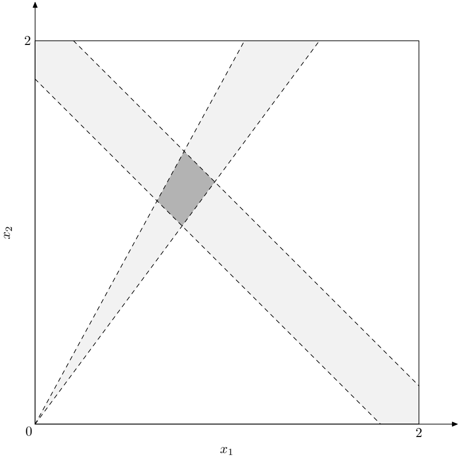


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (4).

ИСЛАУ 2×2. Для переменных известны их сумма и отношение.

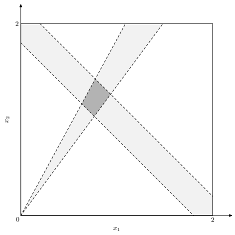


Рис.: Формирование объединенного множества решений ИСЛАУ (4).

Как и в примере с суммой переменных, одно из множеств — полоса, пересекающая оси координат. А вот вторая фигура теперь угол, с вершиной в начале координат. Его биссектриса имеет наклон, задаваемый вторым уравнением ИСЛАУ, а образующие определяются степенью неопределенности этого отношения.

Нахождение AE-решений с помощью IntLinInc2D

$$\begin{pmatrix} [-1,1] & [-1,1] \\ [-2,2] & [-2,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-2,2] \end{pmatrix} \tag{5}$$

Пусть интересует решение

$$\{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\forall A_{11} \in \boldsymbol{A}_{11})(\forall A_{12} \in \boldsymbol{A}_{12})(\forall b_2 \in \boldsymbol{b}_2)$$
$$(\exists A_{21} \in \boldsymbol{A}_{21})(\exists A_{22} \in \boldsymbol{A}_{22})(\exists b_1 \in \boldsymbol{b}_1)\ (Ax = b)\}$$

Зададим кванторные величины

$$A^q = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad b^q = \begin{pmatrix} \exists \\ \forall \end{pmatrix}.$$

Нахождение AE-решений с помощью IntLinInc2D

Подготовка переменных и вызов функции

EqnAEss2D

```
» infA=[ -1 -1 ; -2 -2 ];
» supA=[ 1 1 ; 2 2 ];
» infb=[ -1 ; -2 ];
» supb=[ 1 ; 2 ];
» Aq=[ 'A' 'A' ; 'E' 'E' ];
» bq=[ 'E' ; 'A' ];
» EqnAEss2D(infA,supA,Aq,infb,supb,bq);
```

Нахождение AE-решений с помощью IntLinInc2D

```
Number of orientation points = 4
```

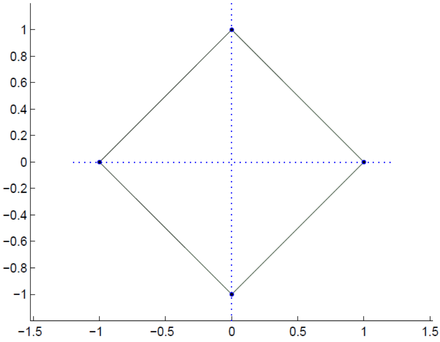


Рис.: Множество решений системы (5).

В первом ортанте

$$x + y = 1.$$

Внешняя оценка множества решений.

Учитывая труднорешаемость рассматриваемых задач, уместно разделить все численные методы для внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем уравнений на:

- методы общего назначения
- точные методы
- специализированные алгоритмы

Методы общего назначения.

= Методы, в которых на ответ не накладываются требования оптимальности или гарантированной погрешности.

Трудоёмкость этих методов, как правило, полиномиальная, и мы будем называть их *быстрыми методами* или же *методами общего назначения*

Точные методы.

Методы для нахождения оптимальных (точных) решений внешней задачи или же решений, имеющих *гарантированную погрешность*.

В силу труднорешаемости этой задачи соответствующие численные методы являются экспоненциально трудными и по своей структуре близки переборным алгоритмам дискретной оптимизации.

Будем называть их *точными методами*.

Специализированные алгоритмы для интервальных систем уравнений какого-либо частного вида (например, для блочных или ленточных ИСЛАУ и т. п.).

Распознавание множеств решений.

В общей ситуации отыскание и корректировка точки из множества решений ИСЛАУ является весьма непростым делом, и поэтому имеет имеет смысл дать набор частных рецептов для решения проблемы в тех или иных конкретных ситуациях.

Рассмотрим, прежде всего случай объединённого множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с квадратной $n \times n$-матрицей $\boldsymbol{A}$. Если она неособенная (т. е. неособенны все $A \in \boldsymbol{A}$, то точку y из $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ можно получить, решив какую-нибудь точечную систему уравнений $Ay = b$ с A из $\boldsymbol{A}$ и b из $\boldsymbol{b}$, скажем, «среднюю» систему

$$(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})x = \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}$$

.

Распознавание множеств решений.

Предположим теперь, что интервальная матрица $\mathbf{A}$ — особенная, т. е. содержит особенные точечные матрицы. Известно, что во множестве всех вещественных $n \times n$-матриц особенные матрицы образуют гладкое многообразие коразмерности 1, которое является «тощим» множеством с лебеговой мерой нуль в $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Следовательно, если все элементы данной интервальной матрицы $\mathbf{A}$ имеют ненулевые ширины, то путём подходящего варьирования элементов точечной $n \times n$-матрицы в пределах $\mathbf{A}$ мы всегда можем надеяться попасть на какую-нибудь неособенную матрицу A.

В разделе

«Интервальная регуляризация»

мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предварительное оценивание множеств решений.

Предложение.
Пусть матрицы $A, \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ таковы, что величина

$$\eta := \|I - \Lambda A\|_\infty$$

удовлетворяет $\eta \leq 1$ в некоторой матричной норме.

Тогда для решения системы $Ax = b$ в согласованной векторной норме справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1 - \eta}$$

Здесь $\|\cdot\|_\infty$ — макси-норма (Чебышёва) — максимальная разность.
Λ — матрица предобуславливания.

Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad 0 \le q < 1.$$

Матричный ряд

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n, \quad \rho(A) < 1.$$

Предложение.
Пусть матрицы $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ таковы, что величина $\eta := \|I - \Lambda \boldsymbol{A}\|_\infty$ удовлетворяет $\eta \leq 1$.

Тогда объединённое множество решений $\Xi_{Uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ содержится в брусе

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \ldots [-\theta, \theta])^T \in \mathbb{IR}^n,$$

$$\text{таком что} \quad \theta = \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1-\eta}.$$

Пример

Пример. Для интервальной системы уравнений Барта-Нудинга

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

возьмем в качестве матрицы Λ обратную к средней матрице системы, т.е.

$$\Lambda = (\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Lambda \boldsymbol{A} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11,26] & [-10,10] \\ [-10,10] & [11,26] \end{pmatrix}, \quad \Lambda \boldsymbol{b} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [-14,14] \\ [-14,14] \end{pmatrix}$$

Итак,

$$\eta := \|I - \Lambda A\|_\infty = \frac{35}{37}, \quad \|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty = \frac{28}{37}$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1-\eta} = \frac{\frac{28}{37}}{1-\frac{28}{37}} = 14,$$

и брусом, содержащим объединённое множество решений рассматриваемой ИСЛАУ является

$$x = \begin{pmatrix} [-14, 14] \\ [-14, 14] \end{pmatrix}$$

Оценка грубая, потому что $\eta \sim 1$.

Пример

Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений [4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [3,6] & [-5,2] \\ [-5,7] & [-3,-1] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

и найдем внешнюю оценку для объединенного множества решений этой ИСЛАУ.

Пример

Для этого в качества матрицы Λ возьмем обратную к средней матрице системы:

$$\Lambda = (\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Lambda\boldsymbol{A} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} [-9, 39] & [-17, 17] \\ [-57, 57] & [-1, 31] \end{pmatrix},$$

$$\Lambda\boldsymbol{b} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} [-11, 11] \\ [-13, 13] \end{pmatrix}.$$

Пример

Получаем

$$\eta := \|I - \Lambda A\|_\infty = \frac{73}{15}, \quad \|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty = \frac{13}{15}.$$

Поскольку $\eta > 1$, мы не можем дать предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ с такими матрицей $\boldsymbol{A}$ и вектором $\boldsymbol{b}$.

Этот результат согласуется с изображением объединенного множества решений. Поскольку форма объединенного множества решений является незамкнутой, то, вероятно, дать внешнюю оценку множеству решений ИСЛАУ оказывается невозможным.

Частичный порядок на множестве логических кванторов

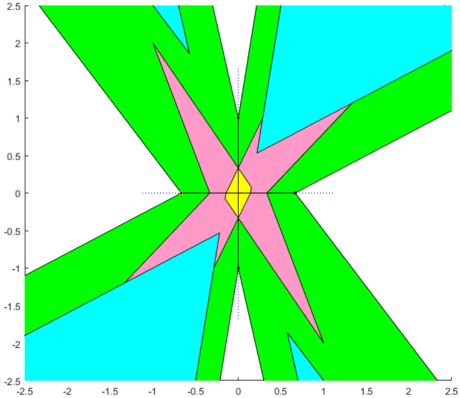


Рис.: Множества решений исследуемой ИСЛАУ. Кванторная матрица
$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$

Выберем другие интервальные матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{b}$ [4]:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-6,-5] & [2,3] \\ [5,7] & [3,10] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-3,1] \\ [-1,5] \end{pmatrix}.$$

Пример

Повторим все вычисления:

$$\Lambda = (\operatorname{mid} \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Lambda \boldsymbol{A} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [90, 113] & [-24, 24] \\ [-17, 17] & [57, 146] \end{pmatrix}, \quad \Lambda \boldsymbol{b} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [-18, 64] \\ [-47, 67] \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\eta := \| I - \Lambda A \|_\infty = \frac{123}{203}, \quad \| \Lambda \boldsymbol{b} \|_\infty = \frac{134}{203}$$

Пример

Здесь $\eta < 1$. Следовательно, можно сделать оценку

$$\theta = \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1-\eta} = \frac{\frac{134}{203}}{1-\frac{123}{203}} = \frac{67}{40},$$

и брусом, содержащим объединённое множество решений рассматриваемой ИСЛАУ (33), является

$$x = \begin{pmatrix} [-1.675, 1.675] \\ [-1.675, 1.675] \end{pmatrix}.$$

О том, насколько приблизительной является полученная внешняя оценка множества решений, можно судить по рисунку. Объединенное множество решений ИСЛАУ выделено зеленым цветом, а границы его внешней оценки обозначены красной линией.

Пример

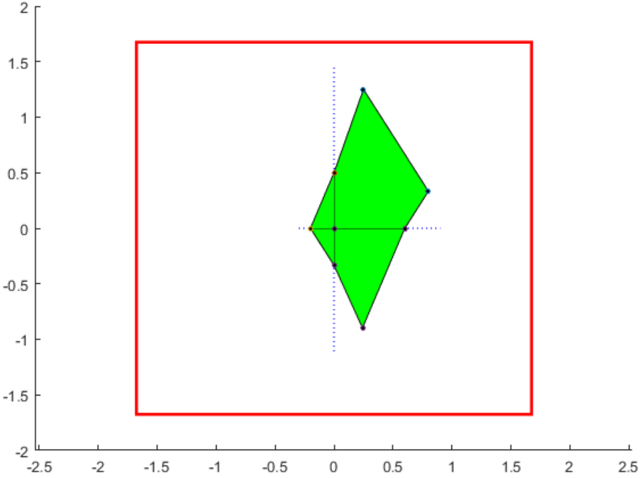


Рис.: Объединенное множество решений и его внешняя оценка.

Характеризация Бека

Предложение (характеризация Бека). Пусть в интервальной линейной системе уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$
матрица $\boldsymbol{A}$ сильно неособенна и
$\hat{x}$ — решение её «средней системы»

$$(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})x = \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}.$$

Тогда объединённое множество решений $\Xi_{Uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ заключено в интервальном векторе $[\hat{x} - \Delta, \hat{x} + \Delta]$, где

$$\Delta = \left(I - \left|(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1}\right| \cdot \mathrm{rad}\ \boldsymbol{A}\right)^{-1} \left|(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1}\right| (\mathrm{rad}\ \boldsymbol{A}|\hat{x}| + \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}). \tag{6}$$

При $\mathrm{rad}\ \boldsymbol{A} = 0$

$$\Delta = \left|(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1}\right| \cdot \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}.$$

Пример

Вернемся к ранее рассмотренной ИСЛАУ с интервальными матрицей $\boldsymbol{A}$ и вектором $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-6,-5] & [2,3] \\ [5,7] & [3,10] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-3,1] \\ [-1,5] \end{pmatrix}.$$

Найдем брус внешней оценки множества решений данной ИСЛАУ, пользуясь способом Бекка.

Сначала убедимся в том, что матрица $\boldsymbol{A}$ действительно является сильно неособенной

$$\det\left((\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\right) = [0.458, 1.641].$$

$$0 \notin \det\left((\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\right).$$

Пример

Далее найдем решение «средней системы»:

$$\hat{x} = \frac{2}{203}\begin{pmatrix} 23 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Определим величину Δ по формуле (6):

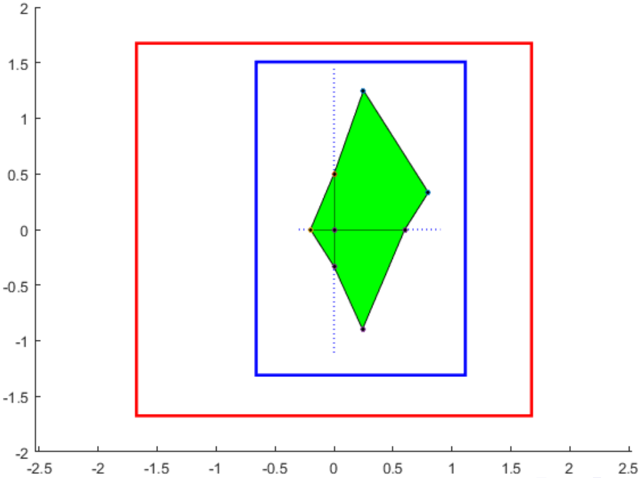
$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.887 \\ 1.409 \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем в качестве внешней оценки множества решений ИСЛАУ брус

$$\begin{pmatrix} [-0.660, 1.113] \\ [-1.310, 1.507] \end{pmatrix}.$$

Пример

На Рис. границы внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ, полученные при использовании способа Бекка, обозначены синей линией.



Пример

Как видно на Рис., способ Бекка позволил получить более точную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ, чем способ, основанный на использовании подчиненной чебышевской нормы.

Однако стоит повторно заметить, что способ Бекка может использоваться для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ только в случае *сильной неособенности* матрицы $\boldsymbol{A}$.

Внешнее оценивание объединённого множества решений.

Обращаясь к вычислению внешней оценки множеств решений интервальной линейной системы

$$\boldsymbol{A} \cdot x = \boldsymbol{b} \tag{7}$$

отметим, что она находится особенно просто в случаях, когда матрица $\boldsymbol{A}$ имеет верхнюю или нижнюю треугольную форму.

Тогда оптимальная внешняя оценка множества решений ИСЛАУ может быть вычислена с помощью процесса последовательного нахождения компонент и подстановки их в соседнее уравнение, где присутствует лишь одна дополнительная неизвестная переменная. В вычислительной линейной алгебре этот процесс называют *прямой подстановкой* для нижней треугольной матрицы и *обратной подстановкой* для верхней треугольной матрицы.

Внешнее оценивание объединённого множества решений.

Если для интервальной линейной системы уравнений (7) с квадратной матрицей $\boldsymbol{A}$ известна обратная $\boldsymbol{A}^{-1}$, то внешняя оценка объединённого множества решений этой системы может быть вычислена как $\boldsymbol{A}^{-1}b$. При этом включение

$$\square\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \boldsymbol{A}^{-1}b \tag{8}$$

обращается в *равенство для точечных матриц* A, что вытекает из свойств интервального матричного умножения.

Но для существенно интервальных матриц $\boldsymbol{A}$ левая и правая части включения (8) могут заметно различаться, даже если в качестве обратной интервальной матрицы мы возьмём оптимальную внешнюю оценку множества всех обратных точечных матриц.

Пример. [3] Рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Для неё обратная матрица:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{6},1] & [-\frac{1}{2},1] \\ [-1,\frac{1}{2}] & [\frac{1}{6},1] \end{pmatrix} \tag{10}$$

Внешнее оценивание объединённого множества решений.

Умножая полученную обратную матрицу (10) на вектор правой части системы (9), получим

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{6}, 1] & [-\frac{1}{2}, 1] \\ [-1, \frac{1}{2}] & [\frac{1}{6}, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-\frac{5}{6}, & 4] \\ [-\frac{11}{6}, & 3] \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

тогда как оптимальной внешней оценкой множества решений является более узкий брус

$$\begin{pmatrix} [0, & 4] \\ [-1, & 3] \end{pmatrix}.$$

Предложение. (лемма Ноймайера) Оптимальная внешняя интервальная оценка множества решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ квадратной интервальной линейной системы $\boldsymbol{A} \cdot x = \boldsymbol{b}$ не может в общем случае быть представлена, как произведение $\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ с какой-то интервальной матрицей $\boldsymbol{G}$, не зависящей от правой части системы $\boldsymbol{b}$.

$$\nexists \boldsymbol{G} : \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}.$$

Результат леммы Ноймайера — ещё одно свидетельство того, что интервальная линейная алгебра «существенно нелинейна», и эффективные методы решения внешней задачи для ИСЛАУ должны быть устроены совсем не так, как методы решения точечных СЛАУ в традиционной вычислительной линейной алгебре.

Интервальный метод Гаусса.

Метод исключения Гаусса и его многочисленные модификации являются популярнейшими алгоритмами вычислительной линейной алгебры.
Для системы линейных уравнений выполнение метода Гаусса состоит из двух этапов — прямого хода и обратного хода (называемого также обратной подстановкой).

Заменим в алгоритмах все величины на интервальные, а арифметические операции — на операции интервальной арифметики. Получающийся при этом алгоритм, называется

интервальным методом Гаусса.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя.

Поскольку в этом итерационном процессе компоненты нового внешнего приближения насчитываются последовательно друг за другом, начиная с самой первой, то мы можем организовывать

пересечение старой и новой оценок

также по мере вычисления компонент и сразу же привлекать уточнённые новые компоненты для расчёта других компонент следующего приближения.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя.

Именно так делается в известном

итерационном методе Гаусса-Зейделя

для решения систем линейных уравнений. В интервальном случае это имеет даже больший смысл, так как в силу монотонности арифметических операций и пересечения по включению немедленно приведёт к получению более узких (точнее, не более широких) интервальных результатов.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя.

Вход
Интервальная линейная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$
Брус $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{IR}^n$, ограничивающий
желаемую часть объединённого множества решений $\Xi_{uni}(A, b)$.
Константа $\varepsilon \geq 0$
Выход
Уточнённая внешняя оценка $x = (\tilde{x}_1 \dots, \tilde{x}_n)^T \supseteq \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \cap \boldsymbol{x}$
для части множества решений, содержащейся в $\boldsymbol{x}$, либо
информация множество $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ не пересекает исходный брус $\boldsymbol{x}$.

Алгоритм

$q \leftarrow +\infty$

DO WHILE ($q \geq \varepsilon$)

DO FOR $i = 1$ TO n

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i \leftarrow \boldsymbol{x}_i \cap \left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_i \right) / \boldsymbol{a}_{ii}.$$

IF ($\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \varnothing$) THEN

STOP, сигнализируя множество решений $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

не пересекает брус $\boldsymbol{x}$

END IF

END DO

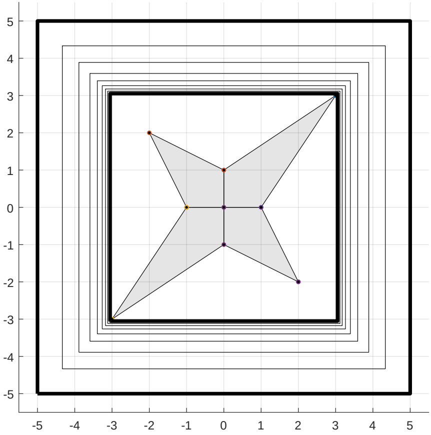
$q \leftarrow$ расстояние между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n)^T$;

$\boldsymbol{x} \leftarrow \overline{\boldsymbol{x}}$

END DO

Пример. Интервальный метод Гаусса-Зейделя. [2]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1,2] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-5,5] \\ [-5,5] \end{pmatrix}$$



Пример. Интервальный метод Гаусса-Зейделя. [4]

Рассмотрим ИСЛАУ [4], в которой

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [4,5] & [-2,-1] \\ [2,3] & [6,7] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [4,5] \\ [7,8] \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Найдем внешнюю оценку для объединенного множества решений ИСЛАУ (12) интервальным методом Гаусса-Зейделя.

Пример. Интервальный метод Гаусса-Зейделя.

В качестве начального приближения $\boldsymbol{X}^{(0)}$ возьмем грубую предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений:

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1-\eta} = \begin{pmatrix} [-1.78, 1.78] \\ [-1.78, 1.78] \end{pmatrix}.$$

На Рис. 9 объединенное множество решений ИСЛАУ выделено зеленым цветом, а результаты первой и миллионной итераций ограничены синей и черной линиями, соответственно. Объединенное множество решений ИСЛАУ было построено при использовании функции `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для `MATLAB` [1].

Укажем интервальные векторы, являющиеся результатами первой и миллионной итераций:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} [0.088, 2.140] \\ [0.083, 1.304] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(1000000)} = \begin{pmatrix} [0.848, 1.775] \\ [0.239, 1.051] \end{pmatrix}.$$

Пример. Интервальный метод Гаусса-Зейделя.

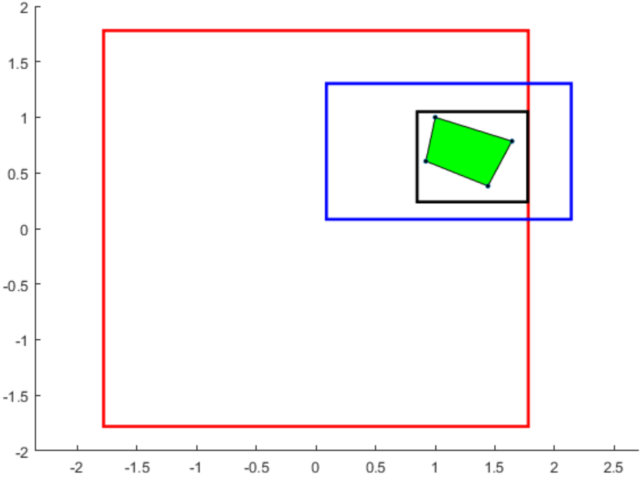


Рис.: Объединенное множество решений ИСЛАУ (12) и его внешняя оценка, уточненная с помощью интервального метода Гаусса-Зейделя.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя - сводка.

Принципиальная проблема метода Гаусса-Зейделя

— зависимость процесса от *величины диагональных элементов*.

При их малости, а тем более при близости к нулю система будет плохо обусловлена и давать очень грубое приближение.

Если в интервальной системе линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ имеет диагональное преобладание, то в применении к этой ИСЛАУ любой начальный интервальный вектор $\boldsymbol{X}$ с достаточно большой чебышёвской нормой $\|\boldsymbol{X}\|_\infty$ улучшается (т. е. уменьшается в размерах) интервальным методом Гаусса-Зейделя.

Теорема (теорема Барта-Нудинга) Если в интервальной системе линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ является M-матрицей, то интервальный метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней интервальной оценке множества решений $\Xi_{Uni}(\boldsymbol{A}x, \boldsymbol{b})$ из любого начального приближения.

M-матрица — см. Лекцию 3.

Развиваемый в этом параграфе подход к задаче внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ мы называем формально-алгебраическим (или, кратко, формальным подходом), потому что он сводит исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений.

Предложение Пусть Λ — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d},$$

где $\boldsymbol{C} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d} = \Lambda\boldsymbol{b}$.

Теорема Майера-Варнке.

Теорема (теорема Майера-Варнке). Пусть $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{IR}^n$,

$$\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \boldsymbol{C})(\exists d \in \boldsymbol{d})(x = Cx + d)\}$$

— множество решений интервальной линейной системы уравнений $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, а $x^\star \in \mathbb{IR}^n$ — формальное решение этой системы. Тогда (i) для любой линейной системы $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, с $C \in \boldsymbol{C}$ и $d \in \boldsymbol{d}$ по крайней мере одно её решение содержится в брусе $x^\star$;
(ii) включение $\Xi \subset x^\star$ имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица $(I - \boldsymbol{C})$ неособенна.

Формально-алгебраический подход.

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы в рекуррентном виде.
Заметим, что задача вычисления формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача нахождения решения некоторого уравнения, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе — интервальной арифметике $\mathbb{IR}$.
К сожалению, воспользоваться теоремой Майера-Варнке мы можем не всегда, так как формальное решение системы в рекуррентном виде, получающейся из исходной ИСЛАУ, не всегда существует в $\mathbb{IR}^n$.

Формально-алгебраический подход.

Для интервального уравнения

$$[3,4]x = [0,3]$$

множеством решений является интервал $[0,\ 1]$.
В то же время, для $\Lambda = 1$ переход к уравнению рекуррентном виде даёт

$$x = [-3,-2]x + [0,3],$$

и это уравнение не имеет правильных формальных решений в $\mathbb{IR}$.
В полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$ формальное решение уравнения существует и равно неправильному интервалу $[2,-1]$.
Для $\Lambda = \frac{1}{4}$ имеем

$$x = [0,\tfrac{1}{4}] + [0,\tfrac{3}{4}],$$

и существует правильное формальное решение $[0,1]$, дающее оптимальную оценку множества решений исходного интервального уравнения.

Теорема (теорема Апостолатоса-Кулиша). Если матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что

$$\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1,$$

то для любого вектора $\boldsymbol{d} \in \mathbb{IR}^n$ интервальная линейная система уравнений

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$$

имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$x^{(k+1)} \leftarrow \boldsymbol{C}x^{(k)} + \boldsymbol{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе $x^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений рассматриваемой интервальной системы.

Предобуславливание.

Позволим матрице Λ быть произвольной точечной $n \times n$-матрицей, а не только диагональной, и станем придавать интервальной матрице системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ требуемые свойства с помощью так называемого предобуславливания — одновременного домножения матрицы и вектора правой части слева на $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$. При этом вместо исходной системы

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

мы получаем предобусловленную интервальную систему

$$(\Lambda \boldsymbol{A})x = \Lambda \boldsymbol{b}.$$

Предобуславливание обратной средней матрицей.

Предложение (лемма Миллера) Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. При предобуславливании её обратной средней матрицей расстояние между интервальными оболочками множеств решений исходной и предобусловленной систем удовлетворяет оценке

$$\texttt{dist}\,(\Box\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}), \Box\Xi(\Lambda\boldsymbol{A}, \Lambda\boldsymbol{b})) \leq C(\max\{\|wid\,\boldsymbol{A}\|, \|wid\,\boldsymbol{b}\|\})^2,$$

где $\Lambda = (\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1}$, С — некоторая константа, зависящая от выбора расстояния `dist`, а также векторной и матричной норм в правой части выписанного неравенства.

Предобуславливание обратной средней матрицей.

При предобуславливании обратной средней ряд методов для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ (метод Гаусса, метод Кравчика и др.) приобретает

второй порядок точности,

а не первый, как это имеет место для их исходных версий.

Предобуславливание обратной средней матрицей.

Пример. Для интервальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{37}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

интервальная система, предобусловленная с помощью Λ,

$$\tfrac{2}{37}\begin{pmatrix} [11,26] & [-10,10] \\ [-10,10] & [11,26] \end{pmatrix} x = \tfrac{2}{37}\begin{pmatrix} [7,14] \\ [4,11] \end{pmatrix}$$

При этом

$$\|I - \Lambda \boldsymbol{A}\| = \tfrac{1}{37}\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$$

собственные числа этой матрицы равны $\frac{1}{37}(15 \pm 20)$, т. е. $\frac{35}{37} \simeq 0.945$ и $-\frac{5}{37} \simeq -0.135$, так что можем применить для внешнего оценивания её множества решений формальный подход. Его результатом является

$$([-11.44, 12, 58], [-11.62, 12.43])^T$$

Пример.

Рассмотрим ИСЛАУ [4], в которой

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [5,9] & [0,0] \\ [0,0] & [6,7] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [2,6] \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Воспользуемся формальным подходом к нахождению внешней оценки объединенного множества решений этой ИСЛАУ.

Пример.

Легко убедиться, что множеством решением системы уравнений

$$\begin{cases} [5, 9]x_1 & = [1, 2], \\ [6, 7]x_2 & = [2, 6] \end{cases}$$

является брус

$$x = (x_1, x_2)^\top = \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{5}\right] \\ \left[\frac{2}{7}, 1\right] \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Пример.

Выберем в качестве масштабирующей матрицы Λ следующую диагональную матрицу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение ИСЛАУ примет вид

$$x = \begin{pmatrix} [-3.5, -1.5] & [0, 0] \\ [0, 0] & [-2.5, -2] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.5, 1] \\ [1, 3] \end{pmatrix}.$$

Пример.

Оказывается, что уравнения

$$\begin{cases} [-3.5, -1.5]x_1 & = [0.5, 1], \\ [-2.5, -2]x_2 & = [1, 3] \end{cases}$$

не имеют формальных решений в $\mathbb{IR}^n$, и интерпретировать эти решения с помощью теоремы Майера-Варнке невозможно!

Пример.

В полной интервальной арифметике Каухера решениями данной системы уравнений являются «неправильные» (в классической интервальной арифметике) интервалы

$$x_1 = \left[\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right], \; x_2 = \left[\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right].$$

Заметим, что при таком выборе матрицы Λ мы имеем $\rho(|\boldsymbol{C}|) = 3.5 > 1$.

Пример.

Добьемся того, чтобы вспомогательная интервальная система имела решения в $\mathbb{IR}^n$.

Для этого изменим матрицу Λ:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} = 0.05 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Тогда формальным решением системы в рекуррентном виде

$$x = \begin{pmatrix} [0.55, 0.75] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0.65, 0.7] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.05, 0.1] \\ [0.1, 0.3] \end{pmatrix}$$

является правильный вектор

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{5}\right] \\ \left[\frac{2}{7}, 1\right] \end{pmatrix},$$

который в точности совпадает с множеством решений (14) исходной ИСЛАУ (13).

Пример.

При этом

$$\rho(|\boldsymbol{C}|) = \rho\left(\begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\right) = 0.75 < 1.$$

Значит, необходимым условием существования правильного формального решения системы при $\operatorname{rad} \boldsymbol{d} > 0$ является

$$\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1,$$

т. е. спектральный радиус матрицы $|\boldsymbol{C}|$ должен быть *строго меньше единицы*.

Достичь этого удается путем подбора подходящей матрицы Λ.

Предобуславливание.

Располагая более детальной информацией об интервальной матрице системы или об алгоритме, можно строить предобуславливающие матрицы, лучшие чем «обратная средняя».

Например, в интервальном методе Гаусса-Зейделя существует возможность выбирать даже оптимальные (в том или ином смысле) предобуславливатели, которые перевычисляются для каждого отдельного шага алгоритма.

Предобуславливание.

Как следует выбирать предобуславливатели для общих интервальных линейных систем? Насколько при этом расширяется сфера приложимости тех или иных методов для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ?

Если предобусловленная система уравнений решается каким-то быстрым методом, то, может быть, имеет смысл предобуславливать ИСЛАУ не один раз?

С помощью одного предобуславливания мы получим более точную оценку множества решений по одной компоненте, а с помощью другого предобуславливания — по другой.

Предобуславливание.

Тем самым предобуславливающие матрицы подбираются из условия оптимизации оценки по отдельно взятой компоненте, а в целом описанная процедура может быть названа

мультипредобулавливанием.

Всё это очень интересные открытые вопросы, которые ещё ждут своего разрешения.

Итерационный процесс

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} \leftarrow T(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

называется

стационарным,

если оператор T не зависит от номера шага k.

Говорят также, что метод

одношаговый

в случае, когда каждый член итерационной последовательности $\{\ \boldsymbol{x}^{(k)}\ \}$ зависит только от одного предшествующего ему члена.

Стационарные итерационные методы.

Итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow C(\mathbf{x}^{(k)}) + d, \quad k = 0, 1, \ \ldots$$

сходится, когда

$$\rho(|C|) \leq 1,$$

то есть спектральный радиус матрицы $|C|$, составленой из модулей элементов C, меньше единицы.

В методе Кравчика выбирают интервальный вектор начального приближения $\boldsymbol{x}^(0)$ так, чтобы $\boldsymbol{x}^{(0)} \supseteq \Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и затем итерируют:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} \leftarrow \left(\Lambda \boldsymbol{b} + (I - \Lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cap \boldsymbol{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ \ldots$$

с некоторой фиксированной матрицей $\Lambda \in \mathbb{R}^n$, фактически, она является предобуславливающей матрицей для исходной ИСЛАУ).

Линейный метод Кравчика.

В методе Кравчика обычно берут:

$$\Lambda = (\mathtt{mid}\ \boldsymbol{A})^{-1},$$

а начальную внешнюю оценку множества решений находят каким-либо из способов оценки. Например, если $\eta = \|I - \Lambda A\|_\infty \leq 1$ можно взять начальным приближением брус

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \ldots [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{\|\Lambda \boldsymbol{b}\|_\infty}{1 - \eta}$$

Важное достоинство метода Кравчика

независимость процесса от величины диагональных элементов.

Этот метод используется также и для решения нелинейных уравнений и их систем. Из выражения для величины начального приближения видно, что чем ближе $\Lambda \boldsymbol{A}$ к единичной матрице, тем более широким можно брать начальный брус.

Рассмотрим ту же ИСЛАУ, что и в примере для метода Гаусса-Зайделя.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1,2] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-5,5] \\ [-5,5] \end{pmatrix}$$

Для данного примера

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.6687 & 0.0372 \\ 0.0372 & 0.6687 \end{pmatrix}, \quad I - \Lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-0.3561, 0.3561] & [-0.4087, 0.4087] \\ [-0.4087, 0.4087] & [-0.3561, 0.3561] \end{pmatrix}$$

$$\Lambda \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-0.7059, 0.7059] \\ [-0.7059, 0.7059] \end{pmatrix}$$

Интервальный метод Кравчика

Обсудим выражение, даваемое формулой. Первое слагаемое $\Lambda \boldsymbol{b}$ — константа, и сходимость зависит от выражения $(I - \Lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)}$.
Найдем спектральный радиус оператора $|I - \Lambda \boldsymbol{A}|$.

$$|I - \Lambda \boldsymbol{A}| = \left| \begin{pmatrix} [-0.3561, 0.3561] & [-0.4087, 0.4087] \\ [-0.4087, 0.4087] & [-0.3561, 0.3561] \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 0.3561 & 0.4087 \\ 0.4087 & 0.3561. \end{pmatrix}$$

Спектральный радиус $\rho\left(|I - \Lambda \boldsymbol{A}|\right) = 0.76 \leq 1$, поэтому итерационный процесс сходящийся.
Первая итерация дает сужение бруса $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} [-4.5295, 4.5295] \\ [-4.5295, 4.5295] \end{pmatrix} \subset \boldsymbol{x}^{(0)}$$

и в дальнейшем процесс сходится, как и в методе Гаусса-Зайделя. — см. слайд 52.

Процедурой Хансена-Блика-Рона называют метод нахождения внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем уравнений, в основе которого лежит следующий результат:

Теорема Пусть в интервальной линейной системе $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. матрица $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$является интервальной H-матрицей и пусть

$$u_i = (\langle \boldsymbol{A} \rangle^{-1} |b|)_i, \qquad d_i = (\langle \boldsymbol{A} \rangle^{-1})_{ii}$$
$$\alpha_i = \langle \boldsymbol{a}_{ii} \rangle - 1/d_i \quad \beta_i = u_i/d_i - |\boldsymbol{b}_i|$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ содержится в интервальном векторе $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_i)$ с компонентами

$$x_i = \frac{\boldsymbol{b}_i + \beta_i[-1, 1]}{\boldsymbol{a}_{ii} + \alpha_i[-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если же средняя матрица для $\boldsymbol{A}$ диагональна, то $\boldsymbol{x}$ — оптимальная внешняя оценка множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Для лучшего уяснения смысла интервальных оценок полезно следующее рассуждение. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с матрицей $A = (a_{ij})$, в которой диагональ существенно преобладает над остальной, внедиагональной, частью матрицы, так что

$$|a_{ii}| \gg \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом матрица A является «почти диагональной», и, пренебрегая внедиагональными членами линейных уравнений из системы $Ax = b$, мы можем приближённо представить её решение как

$$x_i \simeq \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Процедура Хансена-Блика-Рона

Более точное выражение для i-ой компоненты решения должно учитывать вклад недиагональных элементов матрицы A и компонент b, отличных от i-ой, и потому необходимо имеет вид:

$$x_i = \frac{b_i + \beta_i}{a_{ii} + \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Но если мы знаем оценки сверху для их абсолютных значений, то можно предъявить двусторонние оценки решений, переписав точные равенства в интервальной форме в виде включений

$$x_i \in \frac{b_i + \beta_i[-1, 1]}{a_{ii} + \alpha_i[-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Процедура Хансена-Блика-Рона

Замечательным свойством процедуры Хансена Блика-Рона является невысокая вычислительная сложность. Фактически, её наиболее трудоёмкая часть — это обращение компаранта $\langle \boldsymbol{A} \rangle$, которое для $n \times n$-матриц типично выполняется за $O(n^3)$ операций.
Ещё одно достоинство процедуры Хансена-Блика-Рона — хорошая состыковка с популярным предобуславливанием «обратной средней».
В этом случае матрица ИСЛАУ получает среднюю единичную матрицу, и процедура Хансена-Блика-Рона находит оптимальную внешнюю оценку множества решений такой системы.

Литература

- Шарая И.А. Пакет IntLinIncXX для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя и тремя неизвестными: Программное обеспечение, доступное на http://www.nsc.ru/interval/sharaya
- Баженов А.Н. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие.: учебное пособие. Санкт-Петербург, 2020. https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info
- С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2021. http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf
- А.Карпова, ФТИ, 2021.