Примеры обработки измерений постоянной величины в анализе данных с интервальной неопределённостью

Методический материал

А.Н. Баженов

Всероссийский веб-семинар
«Интервальный анализ и его приложения»

20.02.2023

Мотивация

Изучение примеров решения самого простого типа задач — обработки измерения постоянной величины в случае несовместных данных.

Набраться опыта при решении реальных практических задач ...

- Массовые задачи. Данных много, ценность невысока. Можно пожертвовать частью данных, трансформировать их. Индивидуальный анализ замеров невозможен из-за объёмов. Цель построения методики — обработка «вслепую» групп выборок. Нужны просто вычислимые способы оценки, практичные функционалы качества.
- Задачи с уникальными данными. Данных мало, цена каждого измерения очень высока. Данные не должны изменяться при обработке. Графы совместности обозримы, можно индивидуально рассмотреть каждый замер.

Примеры определения постоянной в анализе данных с интервальной неопределённостью

Имеются интервальные выборки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$

Сходные задачи

- Отношение образца $\boldsymbol{X}$ к эталону $\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{X} = \beta \cdot \boldsymbol{Y}$ — Пример 1
- Расширение выборки $\boldsymbol{X}$ выборкой $\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{X} \cup \beta \cdot \boldsymbol{Y}$ — Пример 2

В обоих случаях необходимо
найти оптимальное значение (интервал) постоянной β и
оценить ширину оценки $\operatorname{wid} \boldsymbol{\beta}$

Как характеризовать интервальные оценки параметров?

Как характеризовать интервальные оценки параметра β?

Введём набор мер совместности интервальных выборок

Выбор мер совместности интервальных выборок

Набор мер совместности интервальных выборок.

Например

- (1) Размер максимальной клики — $\max \mu_j$
- (2) Величина коэффициента вариабельности по Оскорбину — k
- (3) Мера совместности Жаккара — Ji
- ...

Несопоставимые величины!

можно сравнивать только множества значений аргумента

Оптимальные оценки

- (1) Размер максимальной клики $\beta_1 = \arg\max_\beta \ \max \mu_j$
- (2) Величина коэффициента вариабельности по Оскорбину $\beta_2 = \arg\ \min_\beta k$
- (3) Мера совместности Жаккара $\beta_3 = \arg\ \max_\beta Ji$
- ...

внутренняя оценка — internal $$\boldsymbol{\beta}_{in} = \bigcap_i \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (1)$$

внешняя оценка — external $$\boldsymbol{\beta}_{ex} = \bigcup_i \boldsymbol{\beta}_i. \qquad (2)$$

Нормированные меры совместности интервальных выборок

Возьмем приведённые значения нескольких величин, так, чтобы они содержались в интервале $[0, 1]$.

- (1) Размер максимальной клики $\mathtt{T}_1 = \max \mu_j / n$, n — число элементов выборки Y
- (2) Величина коэффициента вариабельности по Оскорбину $\mathtt{T}_2 = 1/k$
- (3) Мера совместности Жаккара $\mathtt{T}_3 = \frac{1}{2}(1 + Ji)$
- ...

Можно сравнивать как множества значений аргумента, так и оперировать с численными значениями мер совместности

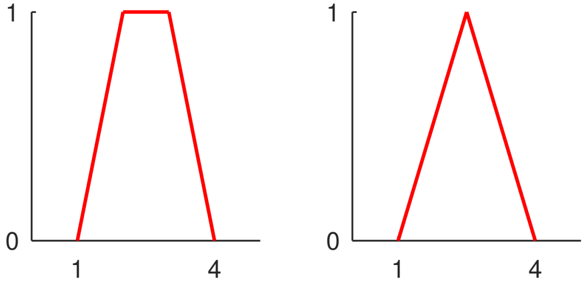
Оценки параметров

Оптимальные оценки

- (1) Размер максимальной клики $\beta_1 = \arg\max_\beta \mathrm{T}_1$
- (2) Величина коэффициента вариабельности по Оскорбину $\beta_2 = \arg\max_\beta \mathrm{T}_2$
- (3) Мера совместности Жаккара $\beta_3 = \arg\max_\beta \mathrm{T}_3$
- ...

Особенности мер совместности T_j

- (1) содержатся в интервале $[0, 1]$, значение 1 соответствует совместной выборке
- (2) графики образуют «плато» с постоянным значением меры в случае совместности выборки



Мультипликативная мера совместности

Введём мультипликативную меру совместности TP, учитывающую интервалы для нескольких величин, так, чтобы она тоже содержалась в интервале $[0, 1]$:

$$\mathrm{TP} = \prod_{j=1}^{k} \mathtt{T}_j, \tag{3}$$

TP соотвествует $\mathrm{TProduct}$,
k — общее число сомножителей (мер совместности).

Аргумент, доставляющий максимум TP, будет служить оценкой бруса параметров

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{TP}} = \arg\max_{\beta} \mathrm{TP} = \arg\max_{\beta} \prod_{j=1}^{k} \mathtt{T}_j. \tag{4}$$

Экстремальная (макси) мера совместности

Введём экстремальную (макси) меру совместности, учитывающую несколько величин, так, чтобы она тоже содержалась в интервале $[0, 1]$:

$$\mathrm{TM} = \max_j \mathtt{T}_j, \tag{5}$$

TM соотвествует TMax,
k — общее число сомножителей.

Аргумент, доставляющий максимум TM, будет служить оценкой бруса параметров

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{TM}} = \arg\max_{\beta} \mathrm{TM}_{01} = \arg\max_{\beta} \; \max_j \mathtt{T}_j. \tag{6}$$

Меры совместности, α-уровень

В ряде случаев мера совместности может оказаться непоказательной. Например, информационное множество может состоять из одного вещественного числа.
Для оценки невырожденного информационного множества можно ввести α-уровень.
Так поступают, например, в статистике нечётких данных.
Используем численный характер мультипликативной меры совместности TP.

Меры совместности, α-уровень

Зададим α-уровень:

$$\alpha \in [0, \max \mathrm{TP}(\beta)]. \tag{7}$$

Оценка по α-уровню:

$$\boldsymbol{\beta}^{\alpha}_{\mathrm{TP}} = \{\beta : \mathrm{TP}(\beta) \geq \alpha\}. \tag{8}$$

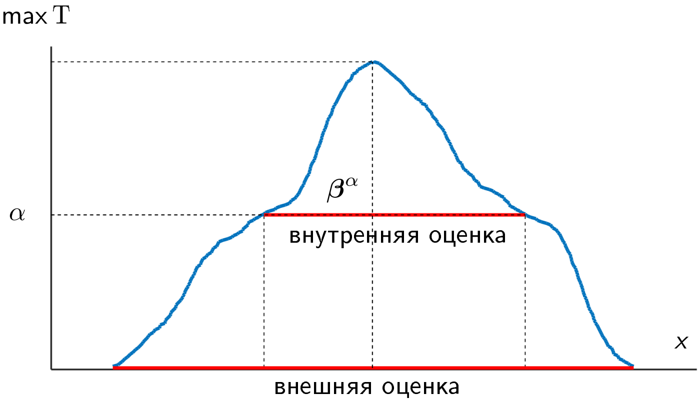
Aаналогично для TM обозначим

$$\alpha \in [0, \max \mathrm{TM}(\beta)]. \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\alpha}_{\mathrm{TM}} = \{\beta : \mathrm{TM}(\beta) \geq \alpha\}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем использовать обе меры, TP и TM. Если не нужна конкретизация, будем писать T и $\boldsymbol{\beta}^{\alpha}_{\mathrm{T}}$.

Мера совместности, α-уровень



ПРИМЕРЫ

ПРИМЕРЫ

Пример: сравнение с эталоном

Имеются интервальные выборки: рабочий образец $\boldsymbol{X}$ и эталон $\boldsymbol{Y}$

Предполагаем, что отношение показаний образца $\boldsymbol{X}$ к эталону $\boldsymbol{Y}$ есть постоянная:

$$\boldsymbol{X} = R \cdot \boldsymbol{Y} \tag{11}$$

Задача

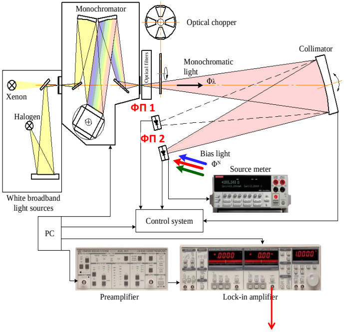
найти оптимальное значение постоянной R и
оценить ширину оценки $\mathrm{wid}\ \boldsymbol{R}$.

Величина R в примере синонимична параметру β в формулах (3) и (4).

Данные выборки.

Для датчиков солнечного излучения проводятся технологические измерения да разных длин волн и различной интенсивности (задаётся шириной диафрагмы).
https://github.com/AlexanderBazhenov/Solar-Data

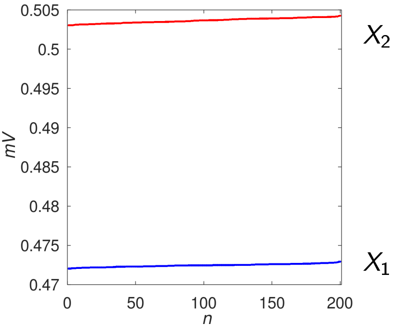
Схема установки для исследования фотоэлектрических характеристик



Измеряемый сигнал (мВ или мА), поступающий с фотоприемника ФП1 (Канал 1) или фотоприемника ФП2 (Канал 2)

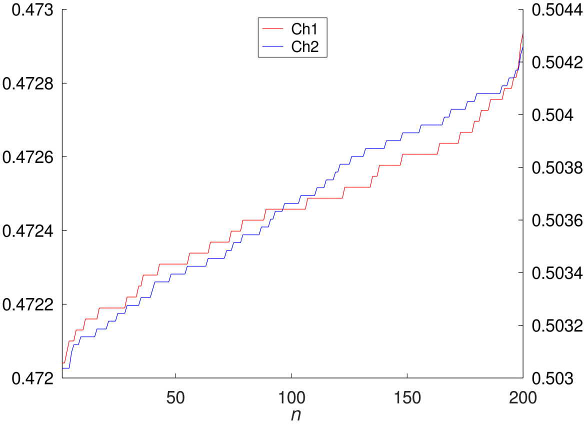
Данные выборки.

Выборки X_1, X_2 соответственно относятся к испытываемому датчику и эталону.
Данные показаны так , как они считываются с прибора, в виде вещественных чисел.
Число отсчётов в выборках равно 200.



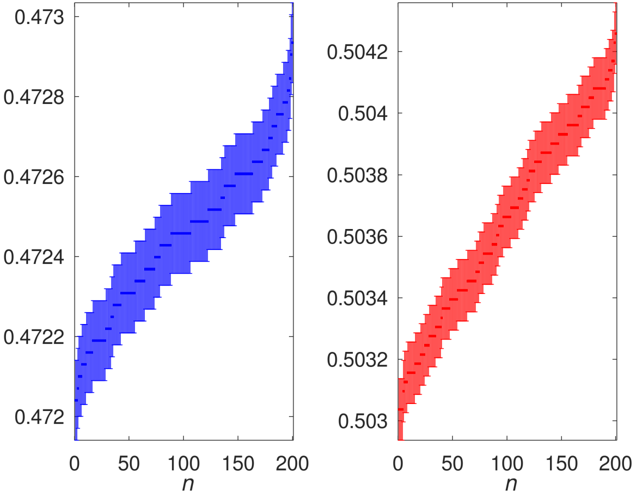
Данные выборки.

Более крупный масштаб



Данные выборки с интервальной неопределенностью.

Данные выборки с учётом неопределённости измерения



Оценки для исходных выборок.

Внешняя оценка

$$\boldsymbol{J}_1 = [0.47194, 0.47304], \quad \boldsymbol{J}_2 = [0.50293, 0.50436];$$
$$\text{wid}\ \boldsymbol{J}_1 = 0.0011, \quad \text{wid}\ \boldsymbol{J}_2 = 0.0014.$$

Мера совместности

$$\text{Ji}(\boldsymbol{X}_1) = -0.634, \quad \text{Ji}(\boldsymbol{X}_2) = -0.719.$$

Найдём внешнюю оценку величины $\boldsymbol{R}$ и ширину интервала оценки:

$$\boldsymbol{R}_{out} = \frac{\boldsymbol{J}_2}{\boldsymbol{J}_1} = [1.0632, 1.0687]; \quad \text{wid}\ \boldsymbol{R}_{out} = 0.0055. \tag{12}$$

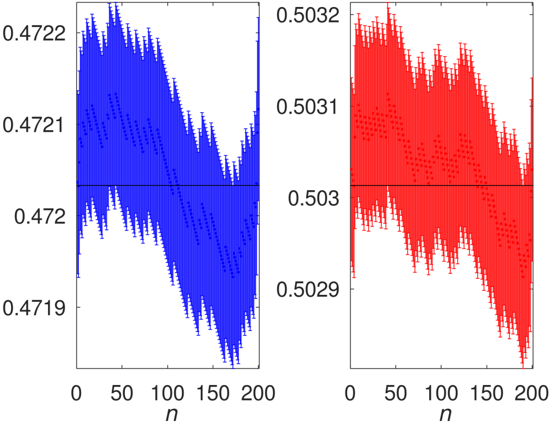
Разумеется, эта оценка весьма грубая и требует уточнения.

Предобработка

Предобработка

«Спрямляем» данные, контролируем интервальную моду

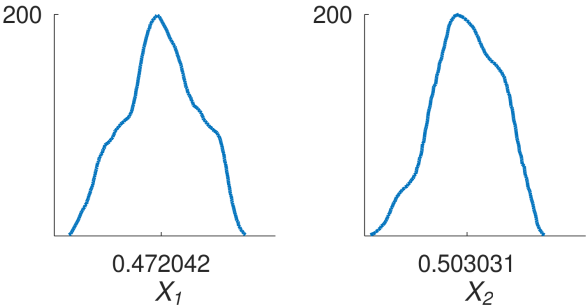
Простая модель дрейфа



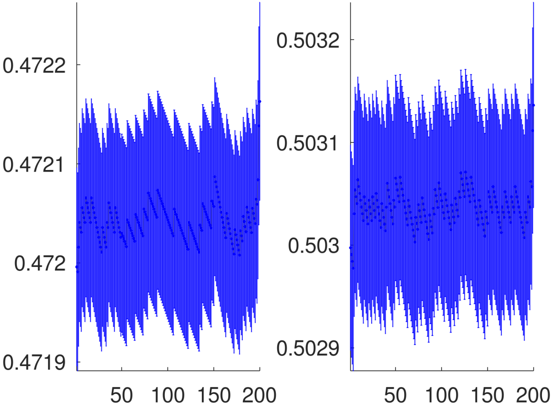
Предобработка — простая модель дрейфа

График частот элементарных подинтервалов

Мода — вырожденный интервал



Кусочно-линейная модель дрейфа

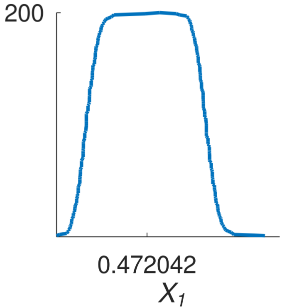


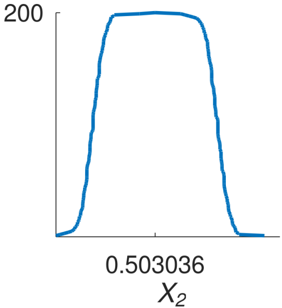
Предобработка — кусочно-линейная модель дрейфа

График частот элементарных подинтервалов

Мода — невырожденный интервал

$$\boldsymbol{I}_1 = [0.47206, 0.4721]; \quad \boldsymbol{I}_2 = [0.50303, 0.50308];$$
$$\mathrm{wid}\ \boldsymbol{J}_1 = 0.00003, \quad \mathrm{wid}\ \boldsymbol{J}_2 = 0.00004.$$





Оценки выборок с вычитанием тренда

$$\boldsymbol{I}_1 = [0.47206, 0.4721]; \quad \boldsymbol{I}_2 = [0.50303, 0.50308]; \tag{13}$$

$$\text{wid}\ \boldsymbol{I}_1 = 0.00003, \quad \text{wid}\ \boldsymbol{I}_2 = 0.00004. \tag{14}$$

Как видим в (13), информационные интервалы практически вырождены. Это результат «наиболее экономного» вычитания дрейфа: совместность замеров в выборках сжато в точку.

Внешние оценки:

$$\boldsymbol{J}_1 = [0.47189, 0.47227], \quad \boldsymbol{J}_2 = [0.50287, 0.50324]; \tag{15}$$

$$\text{wid}\ \boldsymbol{J}_1 = 0.0004, \quad \text{wid}\ \boldsymbol{J}_2 = 0.0004. \tag{16}$$

Оценки выборок с вычитанием тренда

Оценки величины $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_{inn} = \frac{\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{I}_1} = [1.0655, 1.0657], \qquad \text{wid}\ \boldsymbol{R}_{inn} = 0.0001; \tag{17}$$

$$\boldsymbol{R}_{out} = \frac{\boldsymbol{J}_2}{\boldsymbol{J}_1} = [1.0648, 1.0665], \qquad \text{wid}\ \boldsymbol{R}_{out} = 0.0016. \tag{18}$$

Внешняя оценка информационного интервала $\boldsymbol{R}$ (18) в 3.5 раза уже, чем (12) с исходными данными.

Постановка задачи оптимизации с использованием мер совместности.

Поставим задачу наилучшим образом совместить обе выборки. Будем исходить из того, что данные рассматриваемых выборок связаны множителем R.

$$\boldsymbol{X}_2 = R \cdot \boldsymbol{X}_1 \tag{19}$$

Неизвестный множитель R варьируется в некотором интервале, который можно взять, например, как внешнюю оценку информационного интервала в формуле (18).

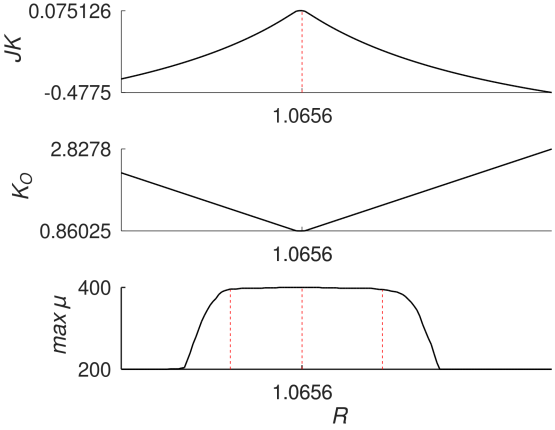
Постановка задачи оптимизации с использованием мер совместности.

Найдём оценку R из набора условий

$$R^{opt} = \arg_R \begin{cases} \mathrm{Ji} \longrightarrow \max, \\ \max \mu_i \longrightarrow \max, \\ k_O \longrightarrow \min\,. \end{cases} \tag{20}$$

k_O — минимальный корректирующий множитель в методе центра неопределённости (Оскорбина)

Графики мер совместности.



Коэффициент Жаккара Ji и минимальный корректирующий множитель k_O имеют узкие экстремумы в области $R^{opt} = 1.0656$.

Постановка задачи оптимизации с использованием нормированных мер совместности.

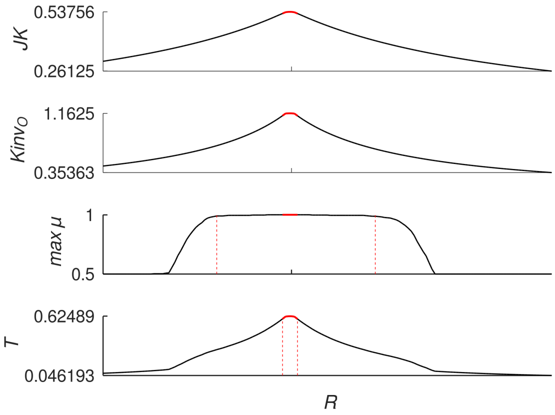
Мультипликативная мера совместности, учитывающий интервалы для нескольких величин:

$$\mathrm{TP} = \prod_{j=1}^{k} \mathtt{T}_j, \tag{3}$$

Аргумент, доставляющий максимум TP, будет служить оценкой бруса параметров

$$\boldsymbol{\beta} = \arg\max_{\beta} \mathrm{TP} = \arg\max_{\beta} \prod_{j=1}^{k} \mathtt{T}_j. \tag{4}$$

Графики нормированных функционалов качества.



Оценка по α-уровню:

$$\boldsymbol{\beta} = \{\beta : \mathrm{TP} \geq \alpha\}. \tag{8}$$

Зададимся для определённости параметром уровня $\alpha = 0.985$.

$$\text{Внутренняя оценка } R_{in} = [1.0656, 1.0657]; \tag{21}$$

$$\text{внешняя оценка } R_{out} = [1.0654, 1.0659]. \tag{22}$$

Эти оценки также можно представить в виде твина с порядком по включению в форме Нестерова

$$\boldsymbol{R}^{\alpha}_{\subseteq} = \big[\,[1.0656, 1.0657], [1.0654, 1.0659]\,\big]. \tag{23}$$

Для характеризации результатов введём «относительную узость твина» ρ:

$$\rho(\boldsymbol{X}_{\subseteq}) = \mathrm{Ji}(\boldsymbol{X}_{in}, \boldsymbol{X}_{out}). \tag{24}$$

Таблица: Относительная узость твина $\boldsymbol{R}^{\alpha}_{\subseteq}$ для исходных данных и со скорректированной выборкой

Тип обработки	$\boldsymbol{R}^{\alpha}_{\subseteq}$	$\rho(\boldsymbol{R}^{\alpha}_{\subseteq})$
Исходные данные	$[1.0632, 1.0687]$	0
Учёт тренда	$\big[[1.0656, 1.0657], [1.0654, 1.0659]\big]$	0.2

Заключение по примеру 1

Предложен способ решения массовой задачи сравнения образца с эталоном с использованием нормированных функционалов качества.

Приём апробирован на задаче калибровки датчиков солнечного излучения в ФТИ им.А.Ф.Иоффе РАН.
Набор данных — https://github.com/AlexanderBazhenov/Solar-Data
Для расчётов использован мультипликативный параметр качества с α-уровнем.

Пример: расширение выборки

Имеются интервальные выборки: основная выборка $\boldsymbol{X}$ и дополнительная $\boldsymbol{Y}$, полученная в несколько худших условиях

Предполагаем, что отношение основной $\boldsymbol{X}$ и дополнительной $\boldsymbol{Y}$ выборок есть постоянная:

$$\boldsymbol{X} = \beta \cdot \boldsymbol{Y} \tag{25}$$

Предполагаем, что объединённая выборка

$$\boldsymbol{X} \cup \beta \cdot \boldsymbol{Y} \tag{26}$$

есть постоянная величина

найти оптимальное значение постоянной β и
оценить ширину оценки $\mathrm{wid}\, \boldsymbol{\beta}$

Данные. Публикация [3]

Реакция $n + p \to d + \gamma$. Измерение циркулярной поляризации γ-квантов [3]

Beam condition	# of group	Spectral region		
		Compton $\delta_1^{true}(\times 10^5)$	Photopeak $\delta_2^{true}(\times 10^5)$	Background $\delta_3(\times 10^5)$
polarized	1	-3.1 ± 2.7	-4.4 ± 2.7	4.2 ± 6.7
	2	-0.2 ± 2.1	-3.4 ± 1.9	-3.2 ± 4.8
	3	-4.0 ± 2.1	-6.9 ± 2.4	12.1 ± 9.0
	4	-2.1 ± 2.5	-1.2 ± 2.4	12.4 ± 7.2
	5	-3.7 ± 1.9	-1.0 ± 2.7	9.4 ± 5.1
	6	-1.7 ± 3.7	-10.8 ± 3.5	1.0 ± 12.4
	7	-5.7 ± 2.8	-10.2 ± 2.8	-0.6 ± 6.1
	8	-2.8 ± 1.9	-6.3 ± 2.0	3.9 ± 4.3
	9	-8.0 ± 4.0	-10.4 ± 4.1	10.3 ± 10.0
	10	-2.1 ± 3.9	0.6 ± 3.4	-4.8 ± 10.6
	11	-3.6 ± 2.6	-1.8 ± 2.0	4.6 ± 4.2
	12	-7.2 ± 2.5	-6.6 ± 2.1	-5.7 ± 4.6
	13		-4.9 ± 2.1	13.0 ± 3.0
	14		-6.0 ± 2.4	8.4 ± 4.6
	15		-4.0 ± 2.7	10.6 ± 5.5
	final value of δ^{true}	-3.5 ± 0.7	-4.8 ± 0.8	5.8 ± 1.7
	$\chi^2/(N-1)$	0.67	1.47	1.49
depolarized	final value of δ^{true}	0.6 ± 0.8	1.1 ± 0.7	3.0 ± 1.8
	$\chi^2/(N-1)$	1.83	1.24	0.50

Y

X

Не вошло в обработку

Вошло в обработку

Данные. Публикация [3]

Реакция $n + p \rightarrow d + \gamma$. Спектральные диапазоны γ-квантов $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$

Volume 289, number 1,2 PHYSICS LETTERS

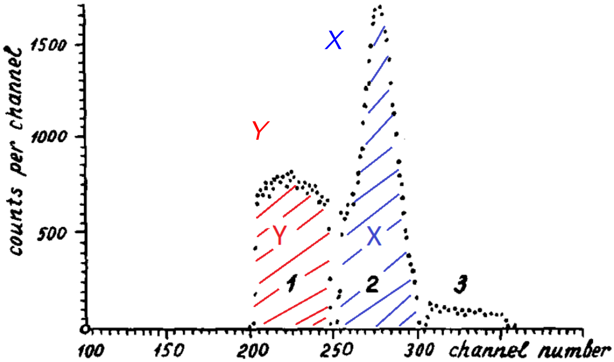
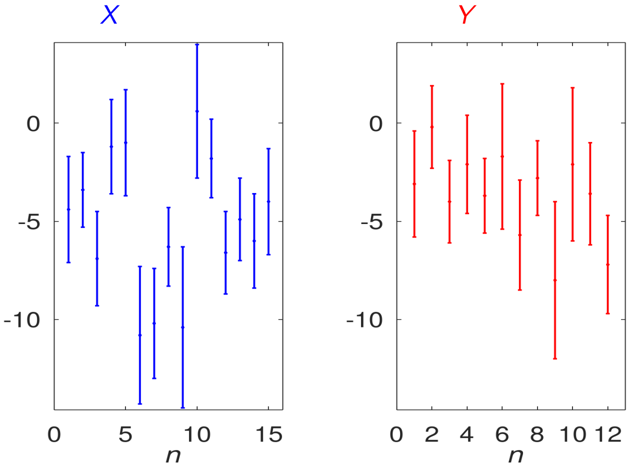


Fig. 3. Energy spectrum of γ-quanta gated by the single channel analyzers.

Диаграммы рассеяния

Базовая выборка $\boldsymbol{X}$ показана синим цветом, дополнительная выборка $\boldsymbol{Y}$ — красным.



Внешние оценки:

$$\boldsymbol{J}_1 = [-14.5, 4], \quad \boldsymbol{J}_2 = [-12, 2]; \tag{27}$$

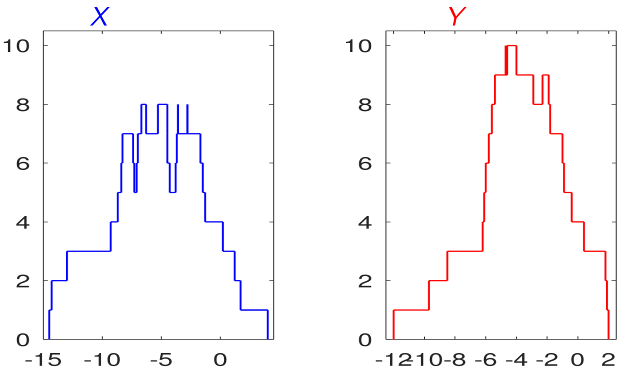
$$\mathrm{wid}\ \boldsymbol{J}_1 = 18.5, \quad \mathrm{wid}\ \boldsymbol{J}_2 = 14. \tag{28}$$

Меры совместности :

$$\mathrm{Ji}(\boldsymbol{X}) = -0.25, \tag{29}$$

$$\mathrm{Ji}(\boldsymbol{Y}) = -0.17. \tag{30}$$

Значения мер совместности (29) и (30) отрицательны, что свидетельствует об отсутствии совместности в интервальных выборок $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.



Моды интервальных выборок ***X***, ***Y*** являются мультиинтервалами:

$$\mathrm{mode}\,\boldsymbol{X} = [-6.7, -6.3] \cup [-5.3, -4.5] \cup -3.6 \cup -2.8 \tag{31}$$

$$\mathrm{mode}\,\boldsymbol{Y} = -4.7 \cup [-4.6, -4]. \tag{32}$$

$$\mathrm{mode}\,\boldsymbol{X} \cap \mathrm{mode}\,\boldsymbol{Y} = [-4.6, -4.5]. \tag{33}$$

Анализ графа совместности.

Максимальные совместные подвыборки $\boldsymbol{X}$

$$\begin{aligned} K_{12} &= \{\, 1, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15\}, \\ K_{14} &= \{\, 1, 2, 3, 8, 12, 13, 14, 15\}, \\ K_{20} &= \{\, 1, 2, 4, 5, 11, 13, 14, 15\}, \\ K_{22} &= \{\, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 15\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Мощности всех максимальных компонент связности выборки равны 8.

Постановка задачи оптимизации с использованием функционалов качества.

Поставим задачу наилучшим образом совместить обе выборки. Будем исходить из того, что данные рассматриваемых выборок связаны в виде

$$R = \frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}}, \tag{35}$$

по физическим данным [3] $R \geq 1$ — неизвестный множитель.

Обозначим объединённую выборку как $\boldsymbol{XY}$

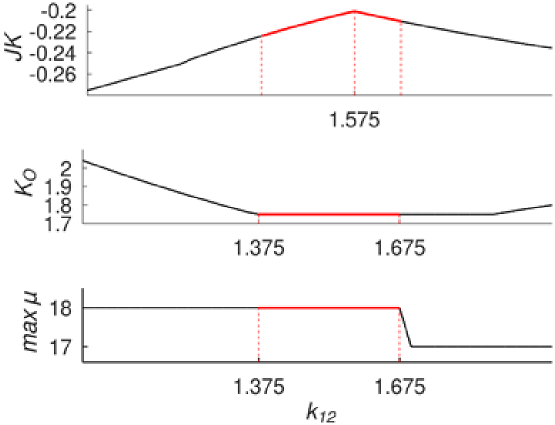
$$\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{X} \cup R \cdot \boldsymbol{Y}. \tag{36}$$

Постановка задачи оптимизации с использованием мер совместности

Найдём оценку R из набора условий

$$R^{opt} = \arg_R \begin{cases} \mathrm{Ji} \longrightarrow \max, \\ \max \mu_i \longrightarrow \max, \\ k_O \longrightarrow \min\,. \end{cases} \tag{37}$$

Графики мер совместности.



Оценки параметра β

В целом задача несовместна. Чтобы как-то оценить возьмем области экстремумов коэффициента вариабельности по Оскорбину k_O и размера максимальной клики $\max \mu_j$. Пересечение оценок является интервалом $[1.375, 1.675]$.

$$\bigcap_i \boldsymbol{\beta}_i = [1.575, 1.575] \cap [1.375, 1.675] = 1.575, \tag{38}$$

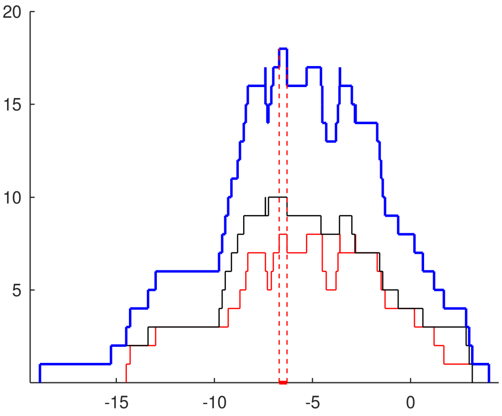
$$\bigcup_i \boldsymbol{\beta}_i = [1, 1.875]. \tag{39}$$

Индекс Жаккара имеет экстремум в виде вырожденного интервала $[1.575, 1.575]$, который принадлежит интервалу $[1.375, 1.675]$.
Для результирующей выборки $\boldsymbol{XY}$ (36) значение индекса Жаккара равно

$$\mathrm{Ji}(\boldsymbol{XY}) = -0.20. \tag{40}$$

График частот элементарных подинтервалов объединённой выборки

красный цвет - график для $\boldsymbol{X}$, чёрный — для $R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y}$



Мода интервальной выборки $\boldsymbol{X} \cup R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y}$

Анализ графа совместности

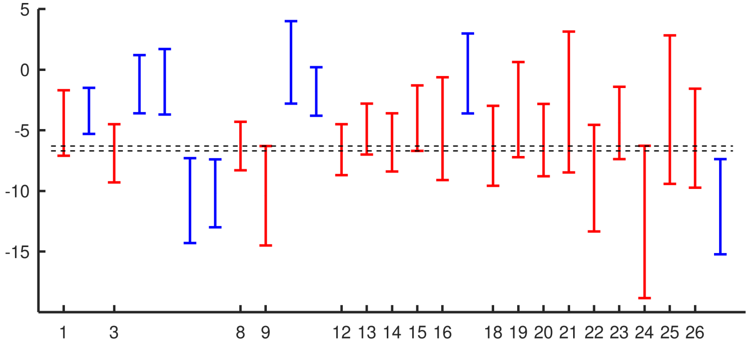
Наибольшая совместная подвыборка содержит номера измерений

$$K = \{1, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\} \qquad (42)$$

в выборке $\boldsymbol{XY}$. Нумерация элементов выборки $R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y}$ начинается с номера 16.
Размер наибольшей совместной подвыборки, равный 18, является максимально возможным, поскольку по-отдельности размеры максимальных совместных подвыборок в выборках $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ равны 8 и 10.

Диаграмма рассеяния объединённой выборки.

Красным цветом дана максимальная совместная подвыборка



Мода интервальной выборки $\boldsymbol{X} \cup R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y}$

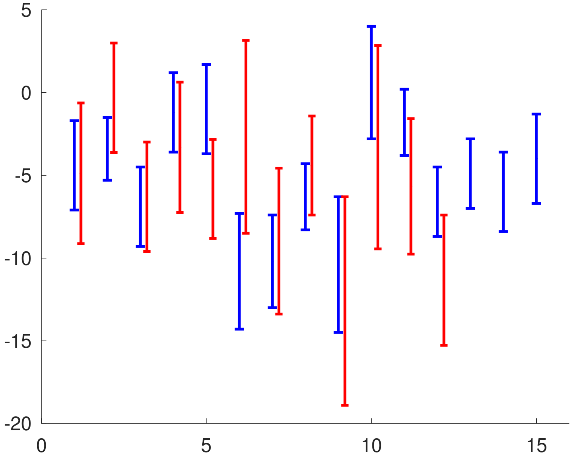
$$\mathrm{mode}\ \boldsymbol{XY} = [-6.7, -6.3]. \tag{41}$$

Пары замеров объединённой выборки.

Таблица: Коэффициенты Жаккара для пар выборок исходных данных $(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i)$ и со скорректированной выборкой $(\boldsymbol{X}_i, R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y})$

Пары замеров	$\mathrm{Ji}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i)$	$\mathrm{Ji}(\boldsymbol{X}_i, R_{opt} \cdot \boldsymbol{Y}_i)$
1-16	0.612	0.637
2-17	0.111	0.255
3-18	0.216	0.728
4-19	0.690	0.502
5-20	0.260	0.083
6-21	-0.117	0.068
7-22	0.109	0.637
8-23	0.054	0.447
9-24	0.543	0.653
10-25	0.460	0.419
11-26	0.438	0.224
12-27	0.769	0.123

Пары замеров



Результаты

Мы не можем для данного примера привести аналог Табл. 1, поскольку внутренняя оценка вырождена. Однако добавление дополнительных данных привело к увеличению относительного размера максимальной компоненты связности.

Таблица: Относительный размер клики для исходных данных и с расширенной выборкой

Тип обработки	$\max_\beta \mu_j/n$	$\mathrm{T}_1(\beta) = \max_\beta \mu_j/n$
Исходные данные	$8/15$	0.5333
С расширенной выборкой	$18/27$	0.6667

Результаты

Предложен способ расширения массива данных для проблемы [3].

Размер максимальной компоненты связности возрос
с 8 (из 15) до 18 (из 27).

Расширенная выборка $\boldsymbol{XY}$ унимодальна и является подмножеством мультиинтервала исходной выборки:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{mode}\,\boldsymbol{X} &= [-6.7, -6.3] \cup [-5.3, -4.5] \cup -3.6 \cup -2.8,\\
\mathrm{mode}\,\boldsymbol{XY} &= [-6.7, -6.3],\\
\mathrm{mode}\,\boldsymbol{XY} &\subseteq \mathrm{mode}\,\boldsymbol{X}.
\end{aligned}
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено два варианта задач оценивания интервальных выборок

- Массовые задача — Калибровка датчика относительно эталона. Данных много, ценность невысока. Можно пожертвовать частью данных, трансформировать их. Использование функционалов качества.
  Приём апробирован на задаче калибровки датчиков солнечного излучения в ФТИ им.А.Ф.Иоффе РАН.
  Набор данных — https://github.com/AlexanderBazhenov/Solar-Data
- Задачи с уникальными данными — измерение физической постоянной. Данных мало, цена каждого измерения очень высока. Исходные данные не должны изменяться при обработке. Графы совместности обозримы, можно рассмотреть каждый замер. Проведена подстройка «по месту» для данных из публикации [3].

Литература

А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. РХД. Серия «Интервальный анализ и его приложения» — готовится к изданию.

Баженов А.Н., Тельнова А.Ю. Обобщение коэффициента Жаккара для анализа данных с интервальной неопределённостью // Измерительная техника. 2022. № 12. С. 15–22.

Circular polarization of γ-quanta in the $np \to d\gamma$ reactions with polarized neutrons / A. N. Bazhenov [et al.] // Physics Letters B. — 3 September 1992. Vol. 289. — No. 1–2. — P. 17-21.