Тема 9. Интервальный анализ — практика.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

09.03.2023

ПЛАН

- Задание 1 — особенность матриц
- Задание 2 — исследование переопределённой ИСЛАУ

Задание 2 — особенность матриц

Задание 1 — особенность матриц

На примере матрицы 2×2

Пусть дана точечная матрица A. Найти радиус $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}$, при которой $\boldsymbol{A}$ содержит особенные.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Матрица особеная, если

$$\det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} \ \ni 0$$

Представим выражение в виде

$$\det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{R},$$

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}.$

Задание 1 — вычисление знака определителя

По признаку Баумана, если матрица особенная, знаки крайних определителей различаются.

Вычисление определителя как суммы двух функций:

-	$\overline{\boldsymbol{R}}$	$\underline{\boldsymbol{R}}$
$\underline{\boldsymbol{L}}$	1	2
$\overline{\boldsymbol{L}}$	3	4

В таком виде определитель — монотонная функция двух переменных.

Задание 1 — вычисление знака определителя

Вычисление определителя — 16 вариантов:

Таблица. Вычисление определителя

-	$\overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$	$\overline{\boldsymbol{c}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$	$\underline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$	$\underline{\boldsymbol{c}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$
$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$	1	2	3	4
$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}$	5	6	7	8
$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$	9	10	11	12
$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}$	13	14	15	16

Вычисление знака определителя — пример

Рассмотрим пример

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rad} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы крайних матриц 0 или 2.

-	4	0	0	0
0	-4	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
4	0	0	0	4

$$\det \boldsymbol{A} = [-4, 4] \ni 0$$

Вычисление знака определителя — пример

$$\det(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}) = -0.1$$

Проверив что при нулевом радиусе, когда матрица $\boldsymbol{A}$ оказывается точечной, она не является особенной, будем увеличивать радиус с определённым шагом, и проверять, не стала ли расширяющаяся интервальная матрица содержать особенную.

Для проверки будем использовать критерий Баумана, проверяя знаки определителей крайних матриц получающейся интервальной матрицы A.

Вычисление знака определителя — пример

Напомним критерий Баумана.

Теорема (критерий Баумана). Интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак, т. е.

$$(detA') \cdot (detA'') > 0$$

для любых $A', A'' \in \mathtt{vert}\boldsymbol{A}$.

Вычисление знака определителя — пример

Рассмотрим пример

$$\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Пусть } \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

-	$\simeq 1.3$	$\simeq 1.1$	$\simeq 1.1$	$\simeq 0.9$
$\simeq 0.8$	$\simeq -0.5$	$\simeq -0.3$	$\simeq -0.3$	$\simeq -0.1$
$\simeq 1.0$	$\simeq -0.3$	$\simeq -0.1$	$\simeq -0.1$	$\simeq 0.1$
$\simeq 1.0$	$\simeq -0.3$	$\simeq -0.1$	$\simeq -0.1$	$\simeq 0.1$
$\simeq 1.2$	$\simeq -0.1$	$\simeq 0.1$	$\simeq 0.1$	$\simeq 0.3$

$$\det \boldsymbol{A} = [-0.5, 0.3] \ni 0$$

Значит, можно уменьшать радиус матрицы.

Вычисление знака определителя — пример

Коль скоро при $\varepsilon = 0$ определитель отрицателен, будем искать при каком ε, его значение будет положительно для одной из крайних матриц. Для этого произведение элементов матрицы на главной диагонали должно превысить произведение элементов дополнительной диагонали.

$$a_{11} \cdot a_{22} > a_{12} \cdot a_{21}$$

или

$$(1+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon) > (1-\varepsilon) \cdot (1.1-\varepsilon)$$

С точностью до членов 2-го порядка получаем:

$$4 \cdot \varepsilon > 0.1 \quad \text{или} \quad \varepsilon > 1/40.$$

Вычисление знака определителя — пример

Продолжаем. Уменьшим радисы элементов матрицы

$$\mathrm{mid}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathrm{rad}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.025 \end{pmatrix}$$

-	$\overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$	$\overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$	$\overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$	$\underline{\boldsymbol{c}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$
$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$	-0.2025	-	-	-
$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}$	-	-	-	-
$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$	-	-	-	-
$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}$	-	-	-	0.0025

$$\det \boldsymbol{A} = [-0.2025, 0.0025] \ni 0$$

Можно уменьшать радиус матрицы.

Точное значение $\varepsilon = 1/41 = 0.024390$.

Задание 2

Задание 2

Исследование переопределённой ИСЛАУ

- Исследовать разрешимость
- Построить множества решений
- Построить график Tol

Достичь разрешимости за счет коррекции

- правой части ИСЛАУ
- матрицы ИСЛАУ

Задание 2 — мотивация

Рассмотрим задачу (например, спектральный анализ) для двух неизвестных (например, концентраций двух элементов).

Пусть известны

- сумма концентраций с неравными весами
- отношение концентраций
- грубая оценка содержания одного элемента

Аналитические данные:

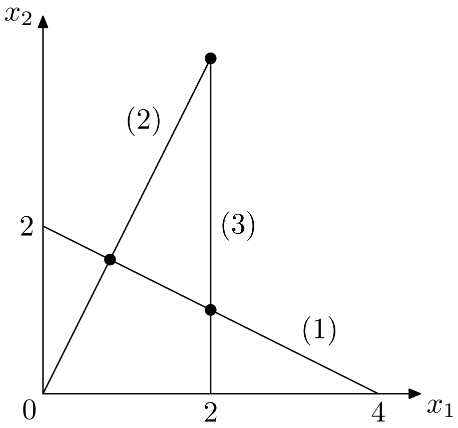
$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 & \simeq & 4 & \text{— измерение,} \\ \frac{x_2}{x_1} & \simeq & 2 & \text{— исходная смесь,} \\ x_1 & \simeq & 2 & \text{— оценка «на глаз».} \end{cases}$$

Математическая постановка — уравнения

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 4 \tag{1}$$
$$2 \cdot x_1 - x_2 = 0 \tag{2}$$
$$x_1 = 2. \tag{3}$$

Задание 2 — графики уравнений

Математическая постановка — графическое представление.



На рисунке рядом с прямыми приведены номера уравнений, пересечения прямых обозначены точками.

Задание 2 — интервальная постановка

Из графиков видно, что задача неразрешима $\longrightarrow$

Надо дать «свободу» уравнениям.

Введём ненулевые радиусы элементов матрицы и вектора правой части.

Имеем СЛАУ

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 4 \\
2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 &= 0 \\
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 2,
\end{aligned}
$$

Зададим произвольно радиусы матрицы и правой части

$$
\mathrm{rad}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Задание 2 — интервальная постановка

Трансформируем СЛАУ в ИСЛАУ

$$\begin{aligned} [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 2.5] \cdot x_2 &= [3.0, 5.0] \\ [1.5, 2.5] \cdot x_1 + [-1.5, -0.5] \cdot x_2 &= [-1.0, 1.0] \\ [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [-0.5, 0.5] \cdot x_2 &= [1.0, 3.0]. \end{aligned}$$

Интервальная постановка — Matlab / Octave

Matlab

```
startintlab
```

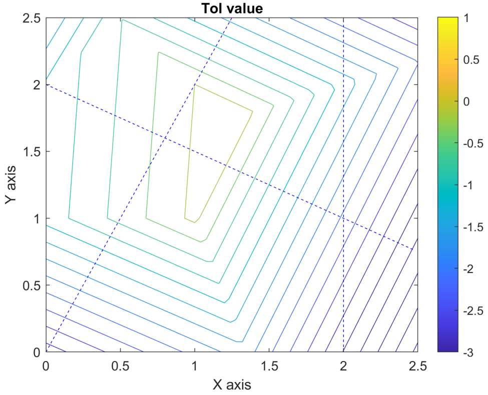
Octave

```
pkg load interval
```

```
midA = [1 2; 2 -1; 1 0]
radA = 0.5
supA = midA + radA
infA = midA - radA
midb = [4; 0; 2]
radb = 1
supb = midb + radb
infb = midb - radb
A=infsup(infA, supA)
b=infsup(infb, supb)
```

Распознающий функционал — перебор

Организуем перебор значений Tol. На рисунке — линии уровня Tol.



Прямые (1)-(3) показаны пунктиром. Линии уровня параллельны прямым уравнений.

Распознающий функционал — анализ

В текущей постановке допусковое множество решений ИСЛАУ пусто.

Необходима коррекция ИСЛАУ. Расширять допуски правой части или уменьшать радиусы элементов матрицы.

ИСЛАУ

$$\begin{aligned}
[0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 2.5] \cdot x_2 &= [3.0, 5.0] \\
[1.5, 2.5] \cdot x_1 + [-1.5, -0.5] \cdot x_2 &= [-1.0, 1.0] \\
[0.5, 1.5] \cdot x_1 + [-0.5, 0.5] \cdot x_2 &= [1.0, 3.0].
\end{aligned}$$

Распознающий функционал — анализ

ПЛАН

- частные решения: по отдельности и парами
- структура графика распознающего функционала
- анализ образующих «по уравнениям»

КОРРЕКЦИЯ

- расширение правой части
- уменьшение радиусов элементов матрицы

Распознающий функционал — tolsolvty

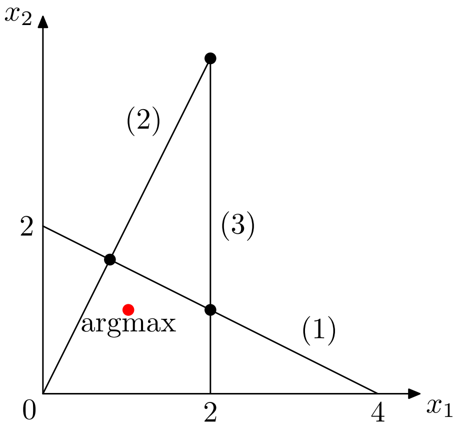
[Tolmax,argmax,envs,ccode] = tolsolvty(infA, supA, infb, supb)

Допусковое множество решений интервальной линейной системы пусто
Tolmax = -1
argmax = 1
1 envs =
1 -1
2 -1
3 -1

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathtt{argmax} = \begin{pmatrix} [2.0000,\ 4.0001] \\ [-0.0001,\ 2.0000] \\ [-0.0001,\ 2.0001] \end{pmatrix} \notin \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [3.0000,\ 5.0001] \\ [-1.0000,\ 1.0000] \\ [1.0000,\ 3.0000] \end{pmatrix}$$

Графики уравнений и положение argmax

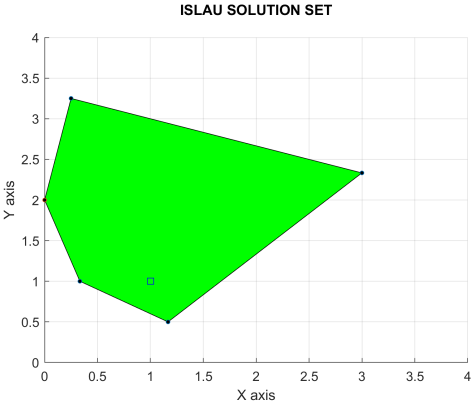
Графики уравнений и положение argmax.



Максимум распознающего функционала находится вне области пересечения прямых СЛАУ.

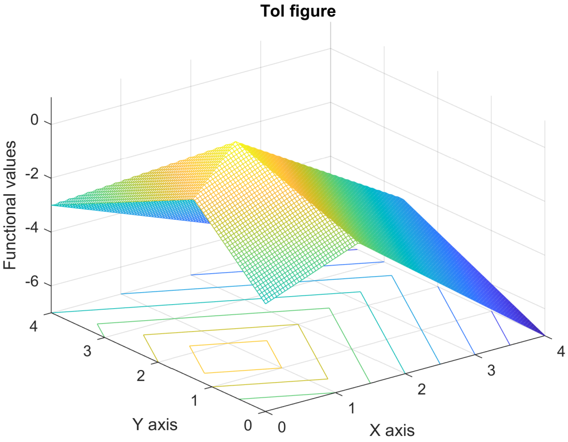
Множества решений

Множества решений, объединённое (зелёное) и допусковое (красное)

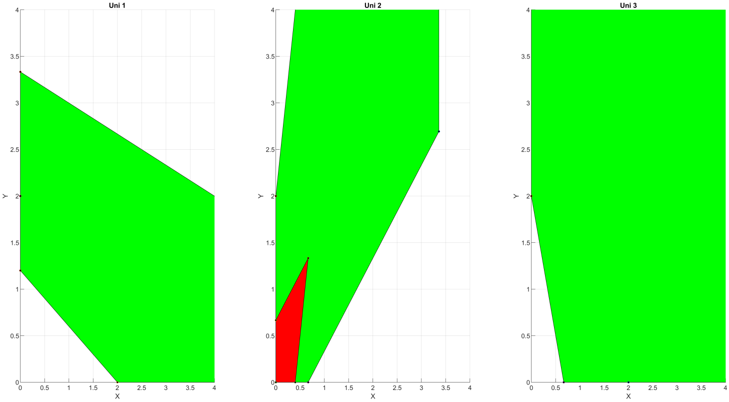


Допусковое множество пусто

График Tol

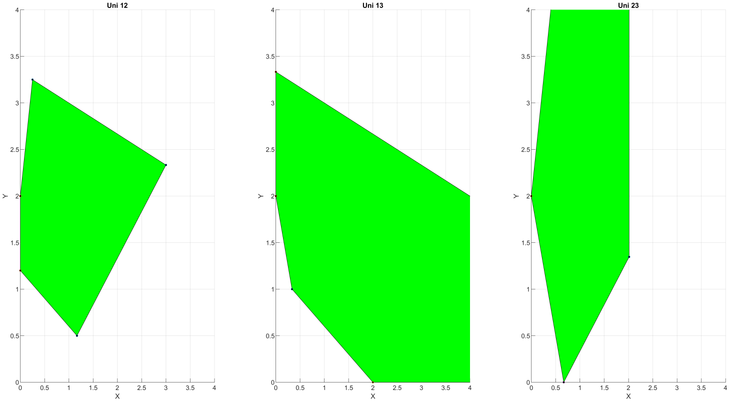


Множества решений для отдельных уравнений



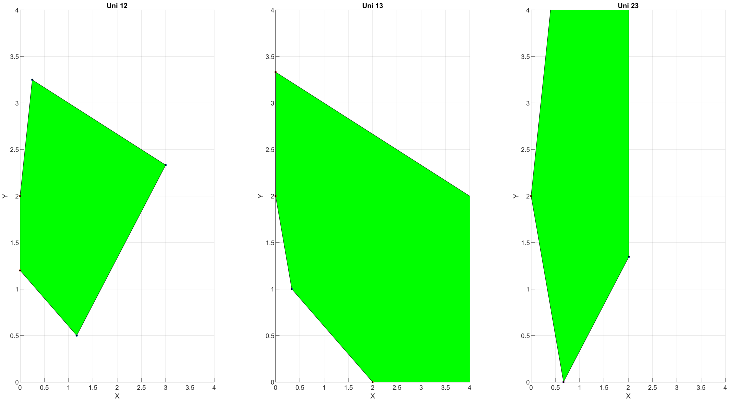
Только для 2-го уравнения допусковое множество непусто

Множества решений для отдельных уравнений



Все допусковое множества пусты

Множества решений для пар уравнений



Все допусковое множества пусты

Промежуточный финиш

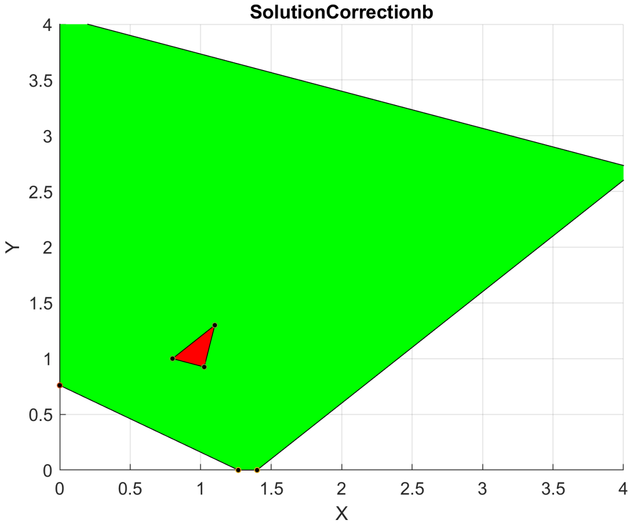
$$\boxed{\text{В исходной постановке задача не имеет решения}}$$

Коррекция переопределённой ИСЛАУ

КОРРЕКЦИЯ

- расширение правой части
- уменьшение радиусов элементов матрицы

Коррекция — расширение правой части



Коррекция — расширение правой части

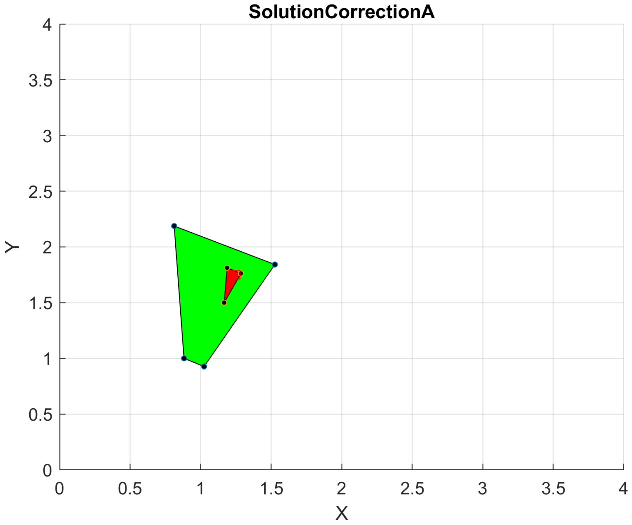
$$\text{rad}\, \boldsymbol{b} = 2.1$$

Tolmax = 0.1
argmax =
1
1

Правая часть существенно расширена

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [3.0,\ 5.0] \\ [-1.0,\ 1.0] \\ [1.0,\ 3.0] \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.9,\ 6.1] \\ [-2.1,\ 2.1] \\ [-0.1,\ 4.1] \end{pmatrix}$$

Коррекция — уменьшение радиусов элементов матрицы



Коррекция — уменьшение радиусов элементов матрицы

$$\mathrm{rad}\, \boldsymbol{A} = 0.0625$$

Tolmax = 0.0625
argmax =
1.25
1.75

Матрица близка к точечной

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.5,\ 1.5] & [1.5,\ 2.5] \\ [1.5,\ 2.5] & [-1.5,\ -0.5] \\ [0.5,\ 1.5] & [-0.5,\ 0.5] \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.94,\ 1.06] & [1.94,\ 2.06] \\ [1.94,\ 2.06] & [-1.06,\ -0.94] \\ [0.94,\ 1.064] & [-0.06,\ 0.06] \end{pmatrix}$$

Итоги достижения разрешимости

За счет коррекции правой части

$$\begin{pmatrix} [0.5,\ 1.5] & [1.5,\ 2.5] \\ [1.5,\ 2.5] & [-1.5,\ -0.5] \\ [0.5,\ 1.5] & [-0.5,\ 0.5] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1.9,\ 6.1] \\ [-2.1,\ 2.1] \\ [-0.1,\ 4.1] \end{pmatrix}$$

$\texttt{Tolmax} = 0.1$, $\texttt{argmax} = [1; 1]$.

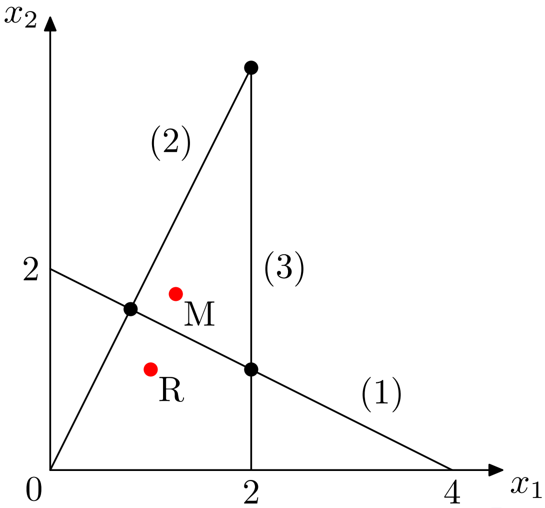
За счет коррекции матрицы

$$\begin{pmatrix} [0.94,\ 1.06] & [1.94,\ 2.06] \\ [1.94,\ 2.06] & [-1.06,\ -0.94] \\ [0.94,\ 1.064] & [-0.06,\ 0.06] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [3.0,\ 5.0] \\ [-1.0,\ 1.0] \\ [1.0,\ 3.0] \end{pmatrix}$$

$\texttt{Tolmax} = 0.0625$, $\texttt{argmax} = [1.25; 1.75]$.

Графики уравнений и положение argmax

Графики уравнений и положение `argmax` для случая с коррекцией правой части R(ight) и матрицы M(atrix).

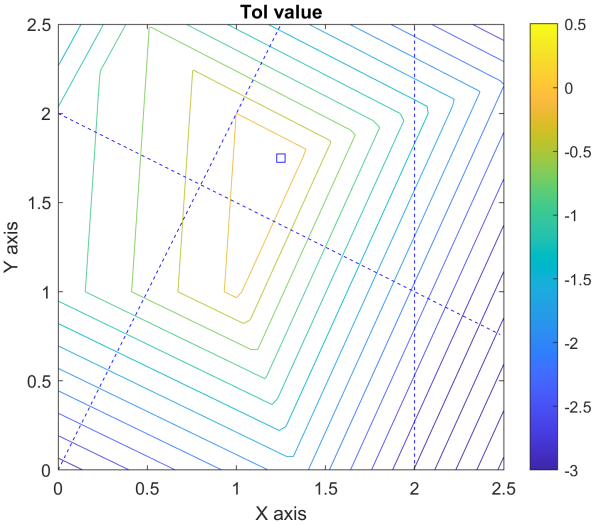


Графики уравнений и положение argmax

Аргумент R (коррекция правой части) совпадает с найденным ранее `argmax`,
а аргумент M (коррекция матрицы) смещён и находится внутри треугольника, образованного пересечением прямых (1)-(3) уравнений СЛАУ.

Это означает, что за счёт регулирования ширины элементов матрицы можно управлять аргументом решения.

Распознающий функционал — линии уровня



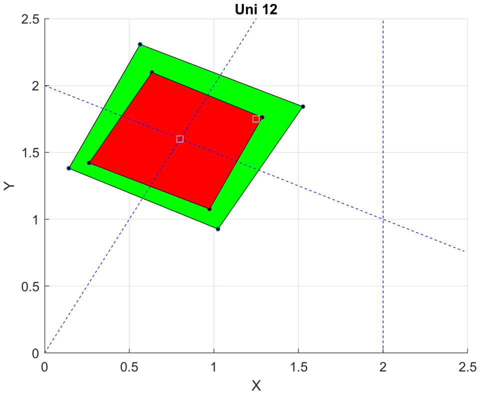
Обсуждение

Распознающий функционал дал решение на краю линий уровня. Такое решение будет неустойчиво к возмущениям системы уравнений.

Можно ли получить решение с расположением argmax в центре допускового множества?

Частное решение — уравнения 1 и 2

Решим ИСЛАУ без уравнения (3)



Белые квадраты — argmax для частной и полной ИСЛАУ.
В полной ИСЛАУ уравнение (3) «оттягивает» решение на край допускового множества.

Образующие распознающего функционала

Как выразить математически факт «дальнодействующего» влияния уравнения (3)?

$$\operatorname{Tol}(x) = \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

Образующие

$$\mathtt{Env}_i(x) = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle$$

Образующие распознающего функционала — график

Образующие

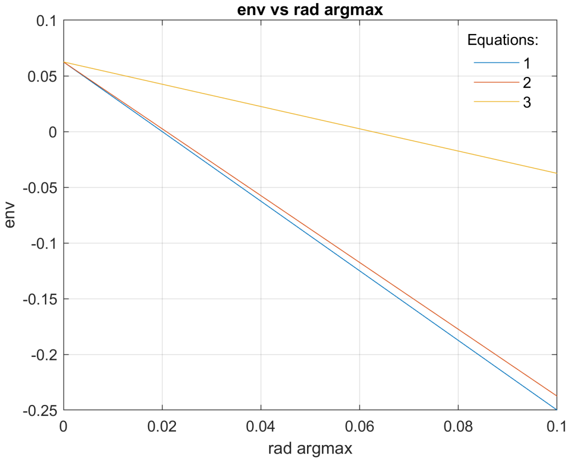


График уравнения (3) — самый пологий

Частное решение — уравнения 1 и 2

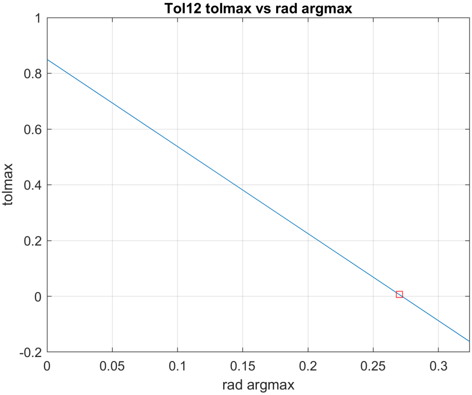
Решим ИСЛАУ без уравнения (3)

$$
\begin{aligned}
[0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 2.5] \cdot x_2 &= [3.0, 5.0] \\
[1.5, 2.5] \cdot x_1 + [-1.5, -0.5] \cdot x_2 &= [-1.0, 1.0]
\end{aligned}
$$

Tolmax = 0.85
argmax = (0.8, 1.6)
envs =
2 0.85
1 0.85

График Tolmax в зависимости от rad argmax

Построим график Tolmax в зависимости от rad (***argmax***)



Tol = 0 при радиусе argmax

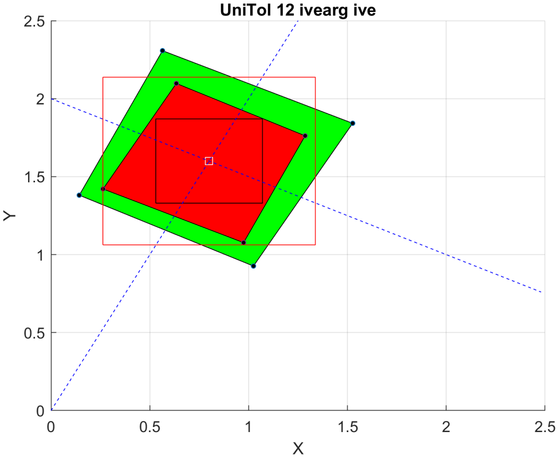
$$\mathtt{ivearg} = 0.27$$

Внутренняя оценка множества решения для ИСЛАУ без уравнения (3)

$$\mathtt{ive} = \sqrt{n} \cdot \mathtt{Tolmax} \cdot \frac{\|\mathtt{argmax}\|}{\|b\|}$$

$$\mathtt{ive} = 0.53759$$

Внешняя оценка множества решения для ИСЛАУ без уравнения (3) — красный квадрат



Внешняя и внутренняя оценки множества решения

Достоинство оценок `ive` и `ivearg` —
основаны на `Tolmax` и `argmax`, можно использовать различные методы оптимизации

Промежуточный финиш 2

Задача имеет непустое допусковое множество при уменьшении радиусов элементов матрицы.

Без уравнения (3) аргумент максимума распознающего функционала расположен в «центре» допускового множества.

Задание 2 — переосмысление

Вернёмся к исходной постановке задачи для двух неизвестных (например, концентраций двух элементов).

Пусть известны

- сумма концентраций с неравными весами
- отношение концентраций
- грубая оценка содержания одного элемента

Задание 2 — математическая постановка

Математическая постановка — уравнения

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 &= 4 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 &= 2. \end{aligned}$$

Мы рассматривали ИСЛАУ

$$\begin{aligned} [0.5, 1.5]\cdot x_1 + [1.5, 2.5]\cdot x_2 &= [3.0, 5.0] \\ [1.5, 2.5]\cdot x_1 + [-1.5, -0.5]\cdot x_2 &= [-1.0, 1.0] \\ [0.5, 1.5]\cdot x_1 + [-0.5, 0.5]\cdot x_2 &= [1.0, 3.0]. \end{aligned}$$

Задание 2 — уточнение интервальной постановки

Переосмыслить радиусы элементов матрицы и данных

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{11} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{12} \cdot x_2 &= \boldsymbol{b}_1 \\
\boldsymbol{a}_{21} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{22} \cdot x_2 &= \boldsymbol{b}_2 \\
\boldsymbol{a}_{31} \cdot x_1 + \boldsymbol{a}_{32} \cdot x_2 &= \boldsymbol{b}_3 .
\end{aligned}$$

Литература

- С.П. Шарый, М.Л. Смольский.
  `http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/tolsolvty.m`
- М.Л. Смольский. Реализация свободно распространяемой программы tolsolvty на языке программирования Python 3.
  `https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty`
- А. Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие / СПбГПУ. — Санкт-Петербург, 2020.
  https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info