

Лекция 1. Вводная лекция. Тематика курса.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

12.01.2023

Тематика курса:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

Анализ данных с интервальной
неопределённостью

Тематика курса:



Интервальный анализ

- Учебные пособия:
Книги, изданные сотрудниками - ФТИ им. А.Ф. Иоффе
<http://www.ioffe.ru/publication/>
«Учебники»
- Новый учебник А.Н.Баженов, А.А.Карпова. «Интервальный анализ для исследователей.» ФТИ-2023.
<https://www.overleaf.com/project/60fbfd3040f1ea1505501ec6>
- Интервальный анализ — основной русскоязычный ресурс
<http://www.nsc.ru/interval/>

- Всероссийский веб-семинар «Интервальный анализ и его приложения»
<http://interval.ict.nsc.ru/WebSeminar/index.html>
- Заседание 28 ноября 2022 года
А.Н. Баженов (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург)
Интервальная таблица Менделеева элементов и изотопов
Презентация в виде PDF-файла (5 Mb)
Видеозапись семинара на хостинге RUTUBE (86 мин)
- Канал RUTUBE
<https://rutube.ru/channel/28611785/>

Обратные задачи

- Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009 — 457 стр.

Анализ данных с интервальной неопределённостью

- А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. Ижевск. «Регулярная и хаотическая динамика». 2022 — 280 стр.
- Project «Interval methods for data analysis under uncertainty»
<https://www.researchgate.net/project/Interval-methods-for-data-analysis-under-uncertainty>

Тематика курса:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

Почему?

Решение обратных задач?

Познание природы идет через объективные данные. Подавляющая часть знаний получена эмпирически, теоретические предсказания редки (Риман — ударные волны, Хевисайд — Черенковское излучение).

«Ни один европейский фантаст не придумал кенгуру.»

Почему?

с неточными и несовместными ...?

Тенденции:

Недостаток информации ведет к неопределенным выводам,
Увеличение точности измерений — к получению несовместных результатов

Почему?

... данными и моделями?

Данные бывают неточны, но:

«Приборы нас намеренно не обманывают...»

А вот за модели уже мы несём ответственность. Все задачи решаются в конкретной постановке, и только в рамках постановки решение имеет смысл.

Обратные задачи — неформальное введение

Последний номер журнала «Inverse Problems» - 2019

Последний номер журнала «Inverse Problems» — обложка.

An interdisciplinary journal combining mathematical and experimental papers on inverse problems with numerical and practical approaches to their solution.



Последний номер журнала «Inverse Problems» — первая статья

<https://iopscience.iop.org/journal/0266-5611>

Determination of a spatial load in a damped Kirchhoff–Love plate equation from final time measured data.

D Anjuna et al 2022 Inverse Problems 38 015009

In this paper, we study the inverse problem of determining an unknown spatial load $F(x)$ in the damped non-homogeneous isotropic rectangular Kirchhoff–Love plate equation

$$\rho h(x)u_{tt} + \mu(x)u_t + (D(x)(u_{x_1x_1} + \nu u_{x_2x_2}))_{x_1x_1} + (D(x)(u_{x_2x_2} + \nu u_{x_1x_1}))_{x_2x_2} + 2(1 - \nu)(D(x)u_{x_1x_2})_{x_1x_2} = F(x)G(t), \\ (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

from final time measurement data $uT(x) = u(x, T)$. Using the quasi-solution approach, the inverse problem is posed as a least square minimization problem of the Tikhonov functional, and the existence of minimum is shown ...

Обратная задача — тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и задачи по неразрушающему контролю.

Обратные задачи являются **некорректно поставленными задачами**. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее.

В функциональном анализе обратная задача представляется в виде **отображения между метрическими пространствами**.

Обратные задачи обычно формулируются в **бесконечномерных пространствах**, но ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к изменению задачи в **дискретной форме**.

В этом случае используют **метод регуляризации** для того, чтобы избежать переобучения.

Обратная задача рассматривается как «обратная» для прямой задачи, которая связывает параметры модели с данными, которые мы наблюдаем:

Параметры модели \rightarrow Данные

Обратную задачу можно концептуально сформулировать следующим образом:

Данные \rightarrow Параметры модели

- Примеры обратных задач - «на пальцах»
- Примеры обратных задач - матфизика
-

Примеры обратных задач - исторические

- Задача Фалеса о высоте египетской пирамиды
- Задача Фалеса о расстоянии до корабля
- Расстояние до Луны и Солнца
- Размер Солнца
- Геология. Остывание Земли.
- Палеорекострукции.

Примеры обратных задач - жизненные

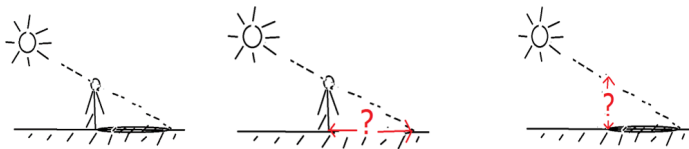
- Стереозрение
- Бинауральный эффект

Примеры обратных задач - технические

- Калибровка шкалы прибора
- Аналитические измерения

Тень предмета

Тень предмета



Прямая и обратные задачи

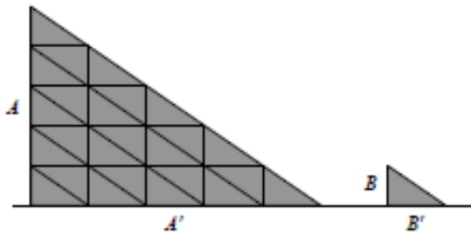
Прямая.	Источник света	— объект	\Rightarrow	тень (изображение)
Обратная.	Источник света	— объект ?	\Leftarrow	тень (изображение)

Задача Фалеса о высоте египетской пирамиды

VII в до н.э.

Высота объекта.

Пусть A, A' — пирамида и ее тень, B, B' — гномон и его тень

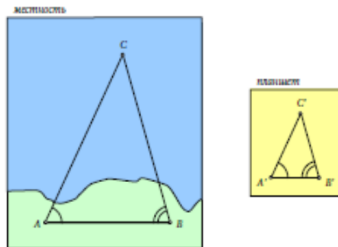


$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Rightarrow A = B \cdot \frac{A'}{B'}$$

Задача Фалеса о расстоянии до корабля

Расстояние до объекта.

Пусть A, B, C — расположение маяков и корабля, A', B', C' — изображение на планшете. Расстояние AB известно.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow AC = A'C' \cdot \frac{AB}{A'B'}, BC = B'C' \cdot \frac{AB}{A'B'}$$

Расстояние до Луны и Солнца

Расстояние до объекта.

Аристарх Самосский. «О величинах и расстояниях Солнца и Луны».

III в. до н.э.

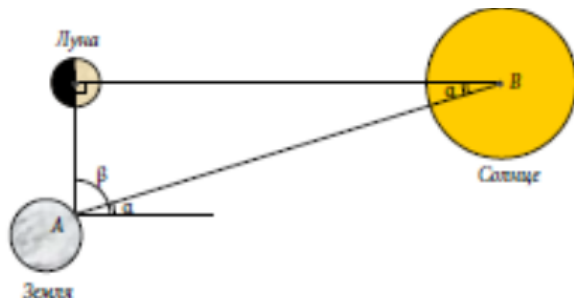
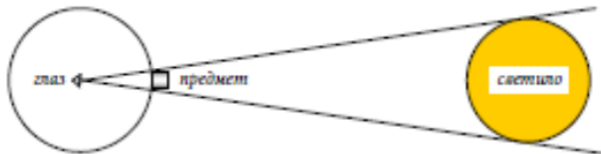


Рис. 10

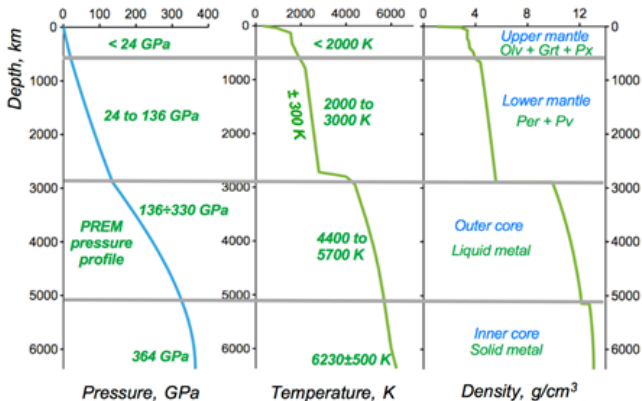
Архимед. «Исчисление песчинок». III в. до н.э.



При расчётах Архимед учитывал размер зрачка и делал специальные измерения для того, чтобы найти его. В результате измерений было получено, что угловой диаметр Солнца больше $\frac{1}{200}$ части прямого угла. Из этого измерения Архимед показывает, что диаметр Солнца больше стороны вписанного в небесную сферу тысячеугольника.

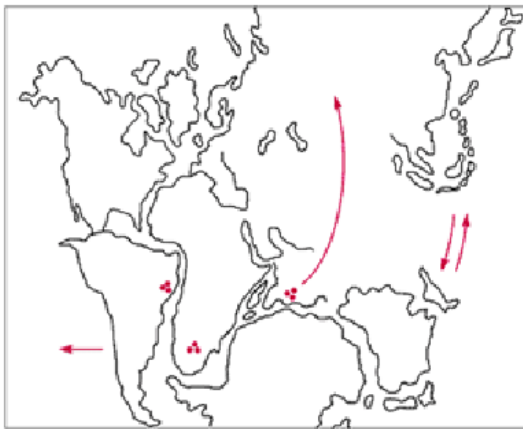
Геология. Остывание Земли.

Геология. Оценка возраста Земли. Обратная задача теплопроводности.
Середина XIX века — Кельвин ~ 10 -100 млн. лет,
Конец XIX века — Хевисайд (операционное исчисление) $\sim 1+$ млрд. лет.



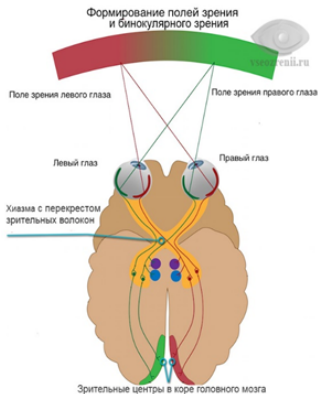
Палеореконструкции.

Вегенер. 1912. Теория дрейфа материков. Реконструкция распада Пангеи на материки



Стереозрение

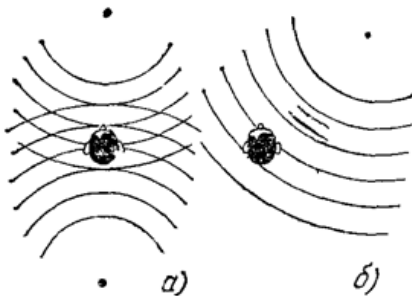
Вид зрения, при котором возможно восприятие формы, размеров и расстояния до предмета, например благодаря бинокулярному зрению (количество глаз может быть и больше 2-х, как например у ос — два сложных глаза и три простых глаза (глазка), скорпиончиков — 3-6 пар глаз)



Бинауральный эффект

Определение направления источника звука

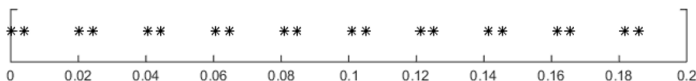
- Разница в средней амплитуде
- Разница в фазе
- Разница в спектре



Калибровка шкалы прибора

Определение цены делений прибора.

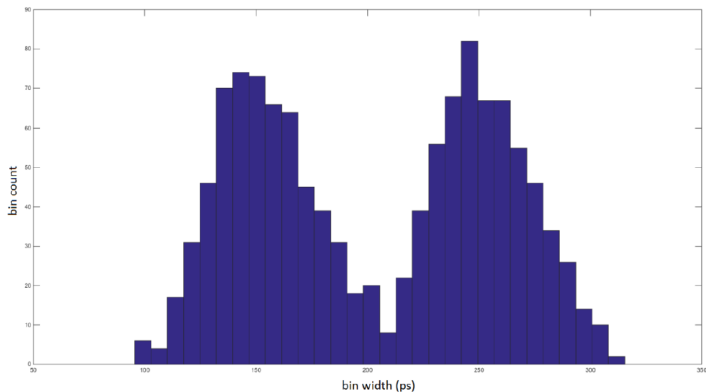
Например, измеритель временных распределений — цифровой осциллограф производит неравноотстоящие отсчеты:



Время, нс

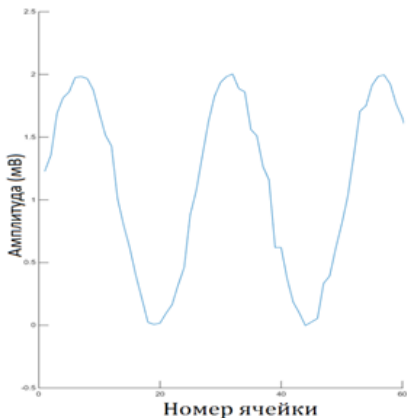
Длина буфера — 1024 «ячейки», надо измерить «длину» каждой из них.

Типичный пример гистограммы цены делений



Калибровка шкалы прибора

Определение шкалы – подача «калибра», сигнала с известными характеристиками. Точных генераторов линейно растущих сигналов с частотой десятки Меггерц не выпускается. Поэтому используются линейные участки эталонного гармонического сигнала.



Калибровка шкалы прибора [1]

На прибор подаются гармонические сигналы

$$y = A \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

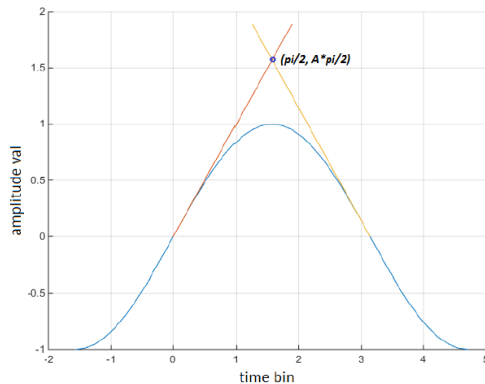
ω - частота. Известна с высокой точностью.

По амплитудным значениям находятся параметры сигнала (A, φ_0) .

Зная параметры сигнала, вычисляем временную шкалу:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta \left(a \sin\left(\frac{y_i}{A}\right) \right)}{\omega},$$

Определение амплитуды



Определение временной шкалы

Пусть на полупериоде лежат отсчеты $0, 1, \dots, n$ и в буфере данных помещается $1, 2, \dots, k$ таких полупериодов длиной d .

$\{I_{kn}^+\}$ — множество точек лежащих на одной прямой с положительным наклоном.

Каждая точка $asin(y)$ будет удовлетворять равенству:

$$asin(y_i) = a^+ \cdot i + b + d * k,$$

Найдем индексы i точек прямых

Определение временной шкалы

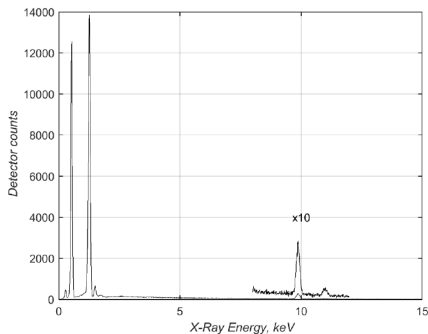
Интервалы из спецификации $\mathbf{i} = [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$,
 $\mathbf{y} = [y - 0.015|y|, y + 0.015|y|]$.

СЛАУ

$$\begin{pmatrix} i_0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ i_j & 1 & k \\ \dots & \dots & \dots \\ i_n & 1 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Найдем a, b, d для $\{I_{kn}^+\}, \{I_{kn}^-\}$

Измерение содержания германия и молибдена [2]



В сильных пиках наблюдается сумма элементов, в слабых — отдельные элементы:

$$a_{ij} \ll a_{ij}$$

Масс-спектр газа в технологической установке

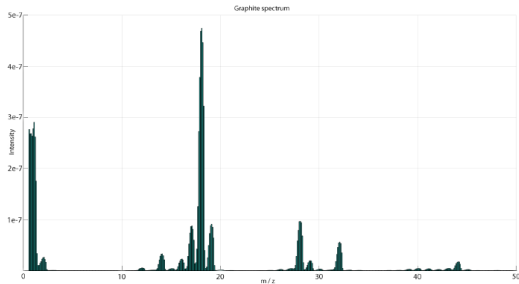
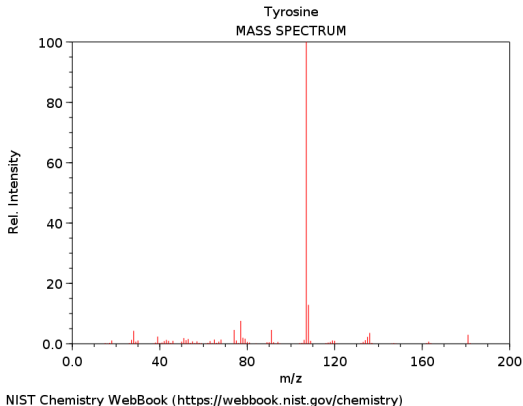


Рис. 1: Спектр графита во время нагрева

В составе смеси присутствуют известные вещества x_1, x_2, \dots
неизвестные вещества x_p, \dots

$$b_j = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + \dots + ?? \cdot x_p + \dots$$



Протеомика – наука, изучающая белковый состав биологических объектов, а также модификации и структурно-функциональные свойства белковых молекул. Схема идентификации:

$$M \rightarrow \{m\}$$

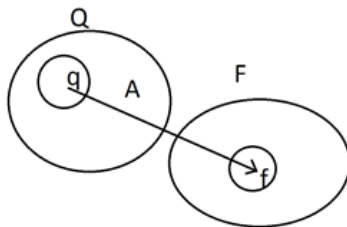
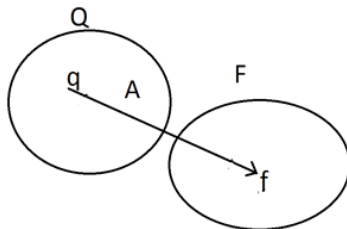
Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F : $A : Q \rightarrow F$.

Определение.

Задача $Aq=F$ корректна на паре топологических пространств Q и F , если:

- 1) условие существования решения для любого f из F : $R(A) = F$
- 2) условие единственности решения. Решение q единственно в Q :
 $A^{-1} : F \rightarrow Q$
- 3) условие устойчивости решения. Оператор обратного преобразования непрерывен: $A^{-1} : F_{\delta} \rightarrow Q_{\delta}$

Корректность задачи по Адамару - 1904



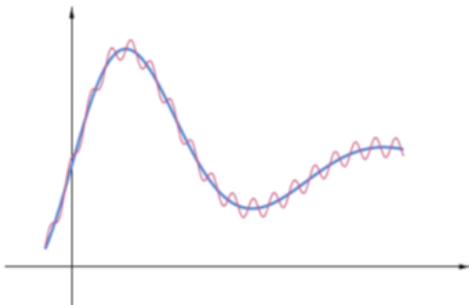
Некорректные задачи

Некорректно поставленная задача - это задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.

Пример - Задача дифференцирования.

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

$$F'(x) = f'(x) + \cos(nx) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$$



Пары корректных и некорректных задач [3]

Корректные задачи

Некорректные задачи

Арифметика

Умножение на малое число
 $Aq = f$

Деление на малое число
 $A^{-1}f = q \quad (A \ll 1)$

Алгебра

Умножение на матрицу
 $Aq = f$

Решение системы
 $Aq = f$
 A — плохоусловлена, вырождена,
прямоугольная

Анализ

Интегрирование
 $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi) d\xi$

Дифференцирование
 $q(x) = f'(x)$

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи

Некорректные задачи

Дифференциальные уравнения

Задача Штурма-Лиувилля

Обратная задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} u''(x) - q(x)u(x) &= \lambda u(x) \\ u(0) - hu'(0) &= 0 \\ u(1) - Hu'(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\{ \lambda_n, \|u_n\|^2 \} \rightarrow q$$

Определение $q(x)$
по спектральным данным

Интегральная геометрия

Определение интеграла
от функции $q(x, y)$
вдоль кривой $\Gamma(x, y)$

Определение $q(x, y)$
по семейству интегралов
 $\int_{\Gamma(x,y)} q(x, y) ds = f(\xi, \eta)$

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи

Некорректные задачи

Дифференциальные уравнения

Ур-я Вольтерра и Фредгольма
второго рода

$$q(x) + \int_0^x K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$$

$$q(x) + \int_a^b K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$$

Ур-я Вольтерра и Фредгольма
первого рода

$$\int_0^x K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$$

$$\int_a^b K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$$

1943 – А.Н.Тихонов ДАН [5]

Теорема. Пусть некоторая совокупность элементов $\{x\}$, образующая метрическое пространство \mathbb{R} , непрерывно отображается на некоторую другую совокупность элементов $\{x^*\}$, образующую метрическое пространство \mathbb{R}^* .

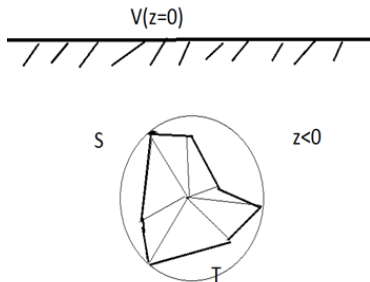
Если это отображение $x^* = f(x)$ взаимно однозначно, непрерывно, и если отображаемое пространство \mathbb{R} компактно, то обратное отображение $x = f^{-1}(x^*)$ также непрерывно.

Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

Потенциал

$$V = \int_T \frac{dm}{s}, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Одна из прямых задач теории потенциала заключается в том, что требуется вычислить на поверхности $z = 0$ потенциал ограниченного тела, заполненного однородной массой плотности m , лежащего ниже этой поверхности ($z < 0$).



Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

- 1 Каждое тело принадлежит заданной ограниченной поверхности S , лежащей в области $z < 0$.
- 2 Каждое тело звездно относительно своего центра тяжести, так что уравнение поверхности Γ , ограничивающей тело T , может быть представлено в сферической системе координат с центром в точке в виде $z = f(s, q)$.
- 3 Функция $f(s, q)$ имеет производные ограниченные числом, общим для всех тел класса R .

Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

Теорема. П.С.Новикова: различным телам T_1 и T_2 , звездным относительно их центра тяжести, не могут соответствовать одинаковые потенциалы.

Теорема. Какова бы ни была степень точности ε и класс тел R , можно указать такое число $d(\varepsilon)$, что если значение потенциалов (или их производных) $V_1(x, y)$ и $V_2(x, y)$ двух каких-либо тел T_1 и T_2 из класса R отличаются при $z = 0$ меньше, чем на $d(\varepsilon)$

$$\|V_1(x, y) - V_2(x, y)\| \leq d(\varepsilon),$$

то сами тела отстоят друг от друга меньше, чем на ε

$$\rho(T_1, T_2) \leq \varepsilon.$$

Метод подбора — решение набора прямых задач и выбирается вариант, наиболее подходящий по какому-то критерию.

- Необходимо установить теорему единственности прямого соответствия.
- Совпадение вычисленного и наблюдаемого полей не является абсолютным (хотя бы в силу приближенности подбора). Таким образом, мы должны еще убедиться в устойчивости обратной задачи (или непрерывности обратного отображения), т. е. в том, что при малом отклонении вспомогательного поля от наблюдаемого соответствующее ему строение среды не может сильно отличаться от действительного.

Метод Лаврентьева. 1959 [6].

Пусть

$$Ax = b$$

— операторное уравнение.

Небольшое возмущение оператора $A + \alpha I$ отодвигает спектр собственных значений от нуля, при этом несущественно влияет на решение.

$$(A + \alpha I)x = b$$
$$\text{cond}(A + \alpha I) = \frac{\lambda_{\max} + \alpha}{\lambda_{\min} + \alpha} < \text{cond}(A)$$

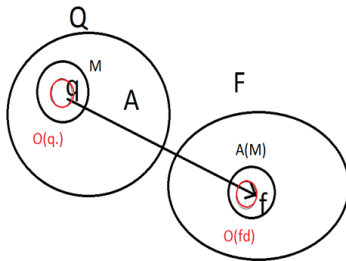
Условно корректные задачи

Определение (условная корректность, корректность по Тихонову).

Задача называется условно-корректной на множестве M , если

- Решение единственно на множестве M
- Имеет место условная устойчивость

Множество M называется множеством корректности задачи.



Определение Регуляризующий алгоритм для задачи (два параметра)

$$\sup_{\|f - f_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \rightarrow 0$$

$f_\delta \in F$ и $A_h \in A$.

Определение Регуляризующее семейство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha f = q_T$$

- Оператор R непрерывен по параметру
- Оператор R сходится

Минимизация функционала Тихонова

Используется:

- Пробное решение q_0
- Стабилизирующий функционал Ω

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f\|^2 + \alpha\Omega(q - q_0)$$

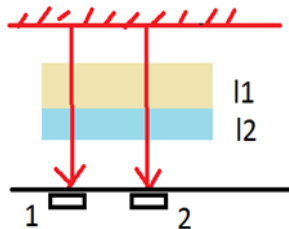
Уход от реального решения

- Роль СЛАУ в прикладной математике. Линеаризация задач
- Типы прямоугольных СЛАУ, недоопределенные и переопределенные системы. Фреймы. Базисы Рисса. Связь с обусловленностью. Переход разных типов друг в друга.
- Обусловленность СЛАУ. Алгебраическая проблема собственных чисел. Кратные собственные числа.
- Особые виды матриц СЛАУ. Положительно определенные симметричные матрицы, теория Фробениуса. Матрицы вращения. Связь с задачей пеленга.
- Методы решения плохообусловленных линейных задач: I_1 , МНК, Лаврентьев, Годунов, сингулярное разложение

Обратные задачи интегральной геометрии

- Предмет интегральной оптики
- Задача Радона. Задача Абеля
- Примеры на задачу Абеля

Объект в параллельных лучах



Пусть имеется объем, состоящий из двух полупрозрачных частей с параллельными границами, за которым расположен равномерный источник света.

За объемом расположены 2 чувствительных элемента.

Вопрос состоит в том, можно ли из интенсивности света, попадающих в детекторы, понять толщину отдельных частей?

Объект в параллельных лучах

Ослабление света в среде при $\alpha l \ll 1$:

$$I = I_0 e^{-\alpha l} \simeq I_0(1 - \alpha l)$$

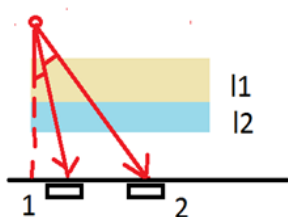
Пусть $I_0 = 1$, d_1, d_2 - сигналы на детекторах

$$\begin{cases} 1 - I_1 \alpha_1 - I_2 \alpha_2 = d_1 \\ 1 - I_1 \alpha_1 - I_2 \alpha_2 = d_2 \end{cases} \iff \begin{cases} I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 = 1 - d_1 \\ I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 0$$

Система вырождена, решение не определено

Прохождение света – верная геометрия

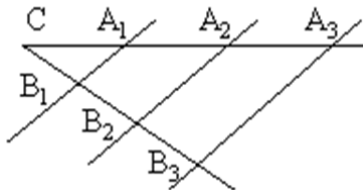


$$\begin{cases} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)} \alpha_1 + \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \alpha_2 = 1 - d_1 \\ \frac{l_1}{\cos(\varphi_2)} \alpha_1 + \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \alpha_2 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)} \alpha_1 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \alpha_2 \\ \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)} \alpha_1 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \end{pmatrix}$$
$$\det(A) = 0$$

Прохождение света – веерная геометрия

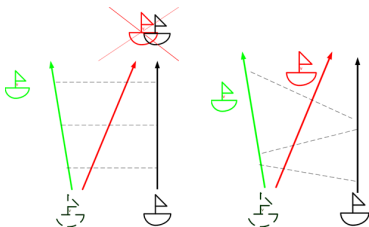
Для объема с параллельными границами областей и веерным расположением хорд наблюдения задача всегда не имеет решения. Этот математический факт – следствие теоремы Фалеса: параллельные прямые отсекают пропорциональные отрезки на лучах. Если прямые параллельны, длины отрезков, отсекаемые ими на сторонах угла, пропорциональны.



Определение курса чужого корабля по пеленгам – задача о столкновении

А.Н.Крылов. Собрание сочинений. т. VI «Астрономия» [4]

определить курс, ход и расстояние до чужого корабля, взяв четыре пеленга его, заметив соответствующие моменты и зная путь своего корабля. Ход чужого корабля предполагается равномерным, курс его — прямолинейным.



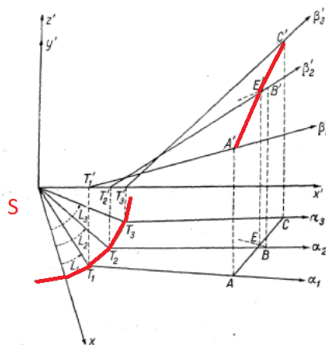
При равномерном движении наблюдателя задача не имеет решения

Определение траектории кометы

А.Н.Крылов. Собрание сочинений. т. VI «Астрономия»

S — Солнце, T — траектория движения Земли (эллипс)

ABC - траектория движения кометы (парабола)



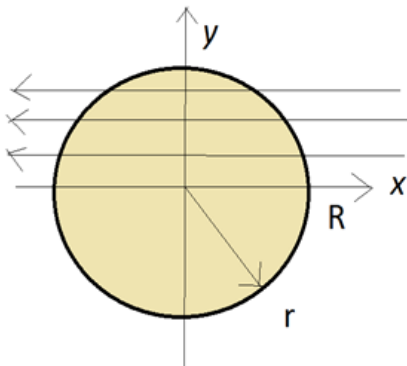
Фиг. 11.

Криволинейность траекторий снимает вырождение (Фалеса)

Задача Абеля

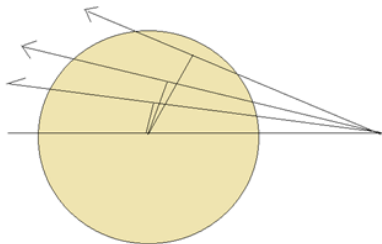
Наблюдение в параллельных лучах

Начало XIX века. Абель рассмотрел интегральное преобразование функции вдоль прямой и поставил вопрос о возможности восстановления радиальной зависимости по наблюдениям вдоль прямых.



Задача Абеля

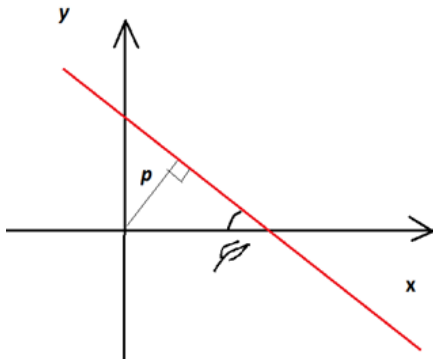
Веерная геометрия. Лучи не параллельны.



Если область симметрична, задача сводится к предыдущей, поскольку каждая хорда наблюдения находится на определенном расстоянии от центра.

Задача Радона

В 1917 Радон ввел преобразование вдоль прямых, пересекающих замкнутую область. Его работа послужила основой для развития компьютерной томографии. Преобразованием Радона функции двух переменных называется интеграл от функции по прямой L



Задача Радона

Уравнение прямой

$$x = p \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + t \cos \varphi$$

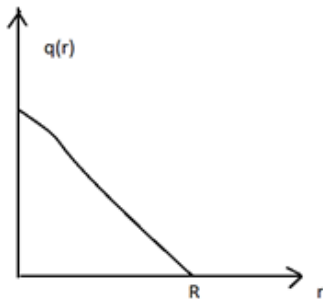
Преобразование Радона

$$f(p, \varphi) = \int_{L(p, \varphi)} q(x, y) dl$$

$$f(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi) dt$$

Задача Радона

Задача обращения преобразования Радона для радиально-симметричной функции, ограниченной радиусом R .



$$q(x, y) \rightarrow q_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = q_0(r)$$

Задача Радона

Подставляем $q(x, y) = q_0(r)$ в формулу для преобразования Радона

$$f(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi) dt$$

$$f(p, \varphi) = f(p) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - p^2}} q_0(\sqrt{p^2 + t^2}) dt, |p| < R$$

$$\text{введем } \theta = \sqrt{p^2 + t^2}$$

Формально можно представить исходную функцию q как производную интеграла по всем хордам наблюдения.

$$q_0(s) = -\frac{1}{\pi s} \frac{d}{ds} \int_s^R p \sqrt{p^2 - s^2} f(p) dp$$

Формально можно представить исходную функцию q как производную интеграла по всем хордам наблюдения.

$$q_0(s) = -\frac{1}{\pi s} \frac{d}{ds} \int_s^R p \sqrt{p^2 - s^2} f(p) dp$$

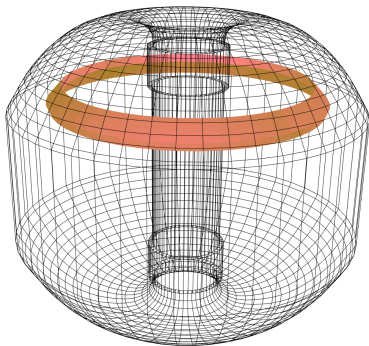
Нереалистичный подход.

Численное дифференцирование даёт крайне неустойчивые результаты.

Светимость плазмы 2d - токамак «Глобус-М»

Пространственная модель вакуумной камеры токамака «Глобус-М» и криволинейный элемент Ω_k разбиения объёма плазмы.

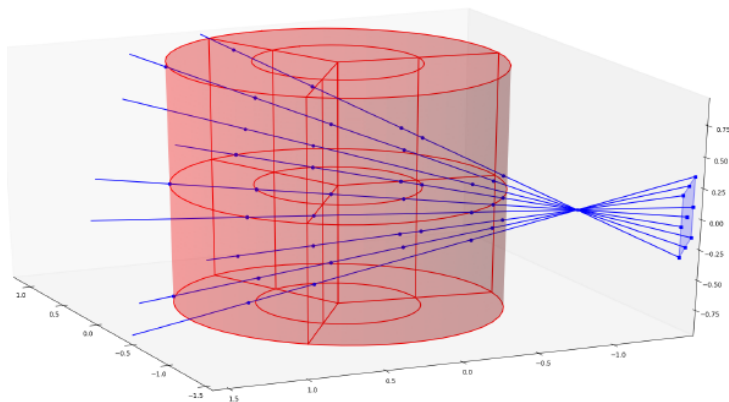
П.Затылкин, 2018.



Светимость плазмы 3d - токамак «Глобус-М»

Пространственная модель вакуумной камеры токамака «Глобус-М» и криволинейный элемент Ω_k разбиения объёма плазмы.

Н. Суханов, 2020.



- Интервальный анализ как база решения задач с неопределенностью в данных и моделях
- Инструменты интервального анализа
- Практика

Идейная часть

- классическая и полная интервальная арифметика
- постановки задач
- множества решений

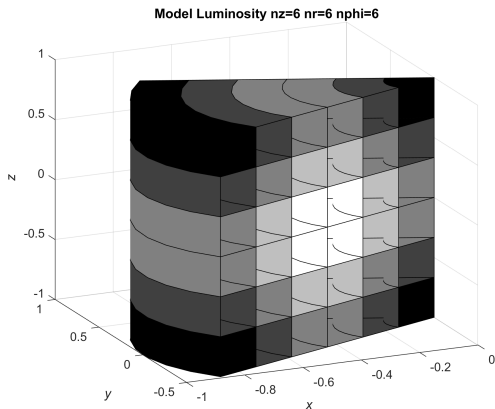
- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плохообусловленных задач
- Решение несовместных задач
- Решение нелинейных систем и глобальная оптимизация
- Задачи оптики, механики, etc

«Учение без размышления вредно, размышление без учения опасно.»

- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плохообусловленных задач
- Решение несовместных задач

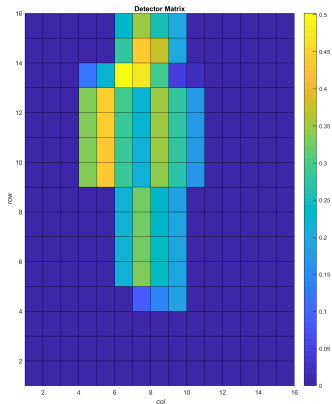
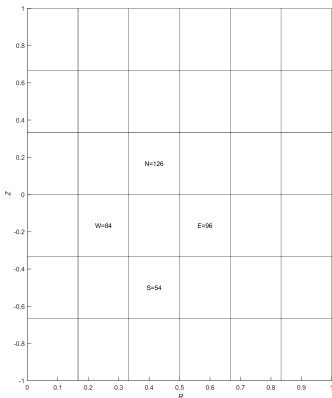
ПРИМЕР

Задача малоракурсной томографии. Разбиение пространства в цилиндрической геометрии $6 \times 6 \times 6$. Представим одну шестую объёма — ломтик 6×6 .



ПРИМЕР

Рассмотрим свечение кольца малого радиуса (сегменты 54, 84, 126, 96) — полоидальное вращение и его образ на матричном детекторе 16×16 .



ПРИМЕР

Имеем задачу с матрицей 256×4 . Если отбросить строки матрицы, в которых нет наших переменных, останется матрица 66×4 .

При попытке решить ее приведением матрицы к квадратной ($A^T A$),

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ A^T A \cdot x &= A^T b \\ (A^T A) \cdot x &= A^T b \end{aligned}$$

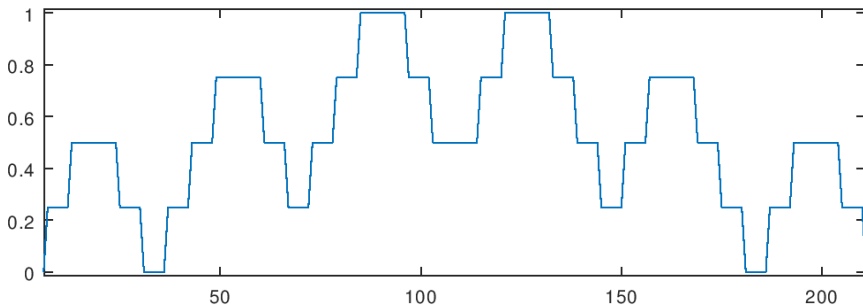
Результат получается неудовлетворительный.

Тем не менее, с использованием аппарата линейного программирования, задача решается точно:

$$(\dots, x_{54}, \dots, x_{84}, \dots, x_{96}, \dots, x_{126} \dots) = (\dots, 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1 \dots)$$

ПРИМЕР

Рассмотрим более общий случай — свечение «ломтика» 6×6 , с предыдущих слайдов, повернутого 6 раз вокруг оси Oz .



Имеем задачу с матрицей 256×126 .

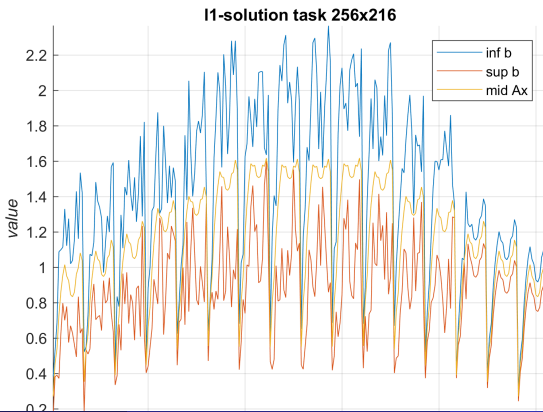
В правую часть внесем случайные погрешности

ПРИМЕР

МНК здесь неприменима вообще — матрица вырождена.

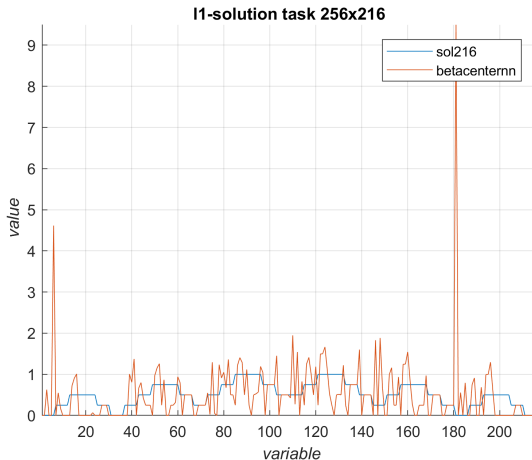
Снова попробуем решить задачу линейного программирования с условием неотрицательности решений.

С точки зрения удовлетворения уравнений всё замечательно. Для каждого уравнения $\underline{b} < Ax < \bar{b}$



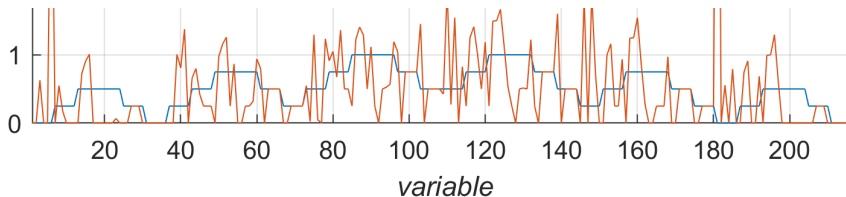
ПРИМЕР

Однако само решение неудовлетворительно (по оси абсцисс — номера переменных $1 \dots 216$).



ПРИМЕР

Не будем обращать внимание на 2 выброса



Имеется некоторая часть переменных, восстановленных точно. Из остальных переменных часть приравнена к 0 — это работа условной оптимизации, иначе были бы отрицательные решения. Часть переменных существенно, в несколько раз, больше модельных значений.

Возвращаемся к 1-му слайду:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

При наличии 256 уравнений была сделана попытка найти 216 неизвестных. Возможно ли это? В какой постановке?

Имеем несколько вопросов:

- Как учесть неточность данных?
- Как работать с несовместными данными?
- Достаточно ли в уравнениях информации? = Насколько ортогональны строки матрицы?
- Каков «эффективный» ранг матрицы? = В каком количестве собственных векторов содержится, например, 90% вариации (энергии) сигнала?

Анализ данных с интервальной неопределённостью

Общий план

- Общие понятия
- Обработка константы (физической величины)
- Задача восстановления зависимостей
- Выбросы и их выявление

Теория:

А.Н. БАЖЕНОВ, С.И. ЖИЛИН, С.И. КУМКОВ, С.П. ШАРЫЙ.
Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. РХД.
Серия «Интервальный анализ и его приложения». Ижевск. 2023. с.280.

Обработка константы

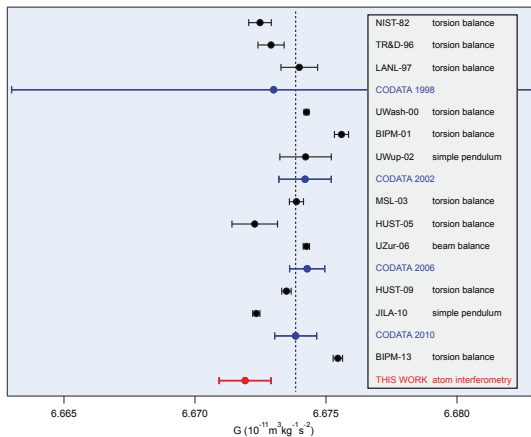


Рис.: Результаты измерений гравитационной константы.

Задача восстановления зависимостей

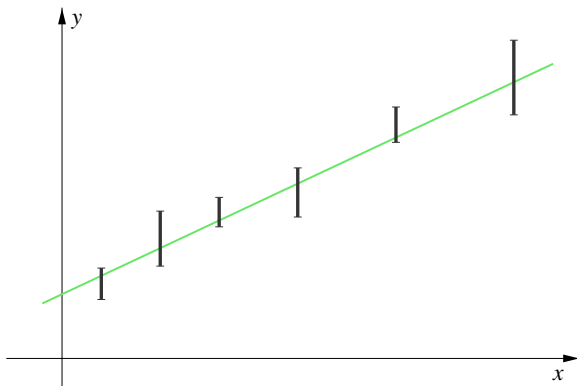


Рис.: Частный случай задачи восстановления линейной зависимости по неточным данным, когда входные переменные измеряются точно.

Задача восстановления зависимостей

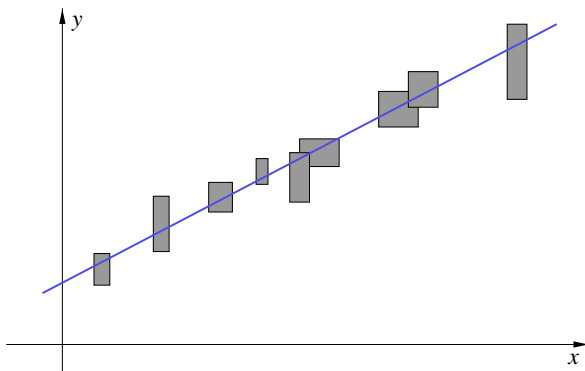


Рис.: Наглядная иллюстрация задачи восстановления линейной зависимости по данным с интервальной неопределённостью.

Диаграмма рассеяния данных для вращения шагового двигателя «вперёд-назад».

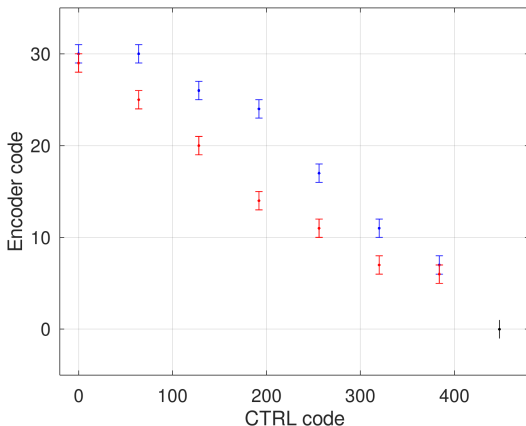


Рис.: Диаграмма рассеяния движения «вперёд-назад».

Коридор совместных зависимостей.

Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне интервала имеющихся данных



Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне интервала имеющихся данных

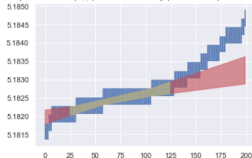


Рис. 8. Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне внутренней части для Ch1 и Ch2

Диаграмма рассеяния и коридор совместности

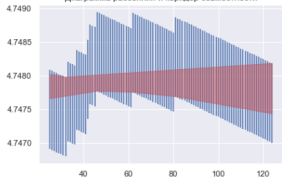


Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне интервала имеющихся данных

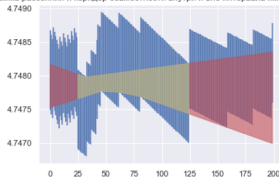


Рис. 9. Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне внутренней части для эталона после устранения дрейфовой составляющей Ch1 и Ch2

Рис.: Коридор совместных зависимостей и предсказание влево-вправо.

Статус измерений. Диаграмма «плечо-размах»

Диаграмма рассеяния и коридор совместности внутри и вне интервала имеющихся данных

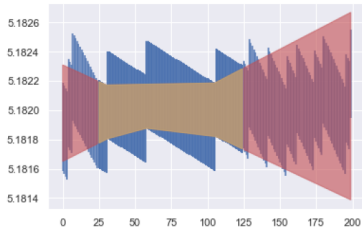


Диаграмма статусов наблюдений эталона, радиус=0.0003

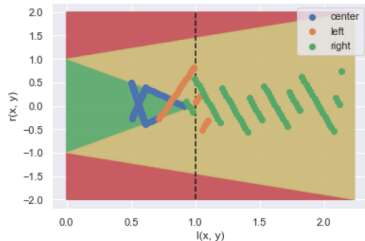








Рис.: Статус измерений для ломаной.

Интервальный анализ. Классическая интервальная арифметика.

-  Билев, Ф.А. Исследование применения интервального подхода к задаче калибровки шкалы измерителя с нерегулярными отсчетами: бакалаврская работа: Санкт-Петербург, 2017. — стр.31. elib.spbstu.ru/dl/2/v17-6574.pdf/download/v17-6574.pdf
-  Баженов А.Н., Затылкин П.А. Измерительная техника. 2019
-  Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009 — 457 стр.
-  «Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 6. Астрономия»
-  Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. // Доклады АН СССР. - 1943. – Т.39., №5.- с.195-198.
-  Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // Доклады АН СССР. - 1959. – Т.127., №1.- с.31-33.