# Тема 2. Введение в интервальный анализ. Интервальные арифметики


А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

*a_bazhenov@inbox.ru*


19.01.2023

# Последний слайд предыдущей лекции

Интервальный анализ.
Классическая интервальная арифметика.

# Было декларировано

В предыдущей лекции было декларировано освоение инструментов:

- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плоообусловленных задач
- Решение несовместных задач

Первая реакция научного руководителя одного из аспирантов:
«А может последний пункт опустить?!»

# Было декларировано

Анализ данных:

- Обработка физ. величины (константы):
- Оценка среднего, моды, медианы, совместности
- Восстановление зависимостей:
- Линейный случай
- Общий случай

# ПЛАН

- Неформальное введение
- Введение в вопрос. Первый «интервальщик»
- Сведения об интервальном анализе.
- Мотивации интервального анализа
- Понятие интервала
- Классическая интервальная арифметика
- Независимые и связанные интервальные величины
- Основная теорема интервальной арифметики
- Характеристики интервалов и их свойства
- Алгебраические свойства интервальных операций
- Полная интервальная арифметика

# ПЛАН — Добавка 2023

Различные способы описания неопределённости

- Интервалы — Нечёткие данные — Функции распределений
- Нечёткие данные

# Различные способы описания неопределённости

- Интервалы — внешние границы
- Нечёткие данные — функции принадлежности, неаналитические
- Функции распределений — максимально полное описание

# Нечёткие данные

При нечётком описании результатов измерений и наблюдений мы полагаем, что вместо их точных значений нам известны так называемые

*функции принадлежности* нечётких чисел,

возникающих в результате измерений.

# Нечёткие множества

*Нечётким множеством* называется множество $X$, образованное элементами произвольной природы, которое дополнено так называемой *функцией принадлежности*

$$\mu : X \to [0, 1],$$

значение которой $\mu(x)$ на элементе $x \in X$ показывает «степень принадлежности» $x$ множеству $X$.

# Функция принадлежности

У стандартной функции принадлежности множества (называемой также *индикаторной функцией* множества) значения могут быть равны только 0 или 1:
0 соответствует состоянию «не является элементом множества»,
а 1 соответствует состоянию «принадлежит множеству».

Допущение для функции $\mu$ непрерывного ряда значений из интервала $[0, 1]$ позволяет характеризовать ситуации с «частичной принадлежностью» множеству $X$, когда мы не вполне уверены, принадлежит ли элемент множеству. В новой ситуации мы можем оперировать количественной мерой этой принадлежности и строить на её основе наши выводы и заключения.

# Функция принадлежности

Для построения содержательной теории нечёткого вывода и нечётких неопределённостей обычно ограничивают общность функции принадлежности $\mu$, требуя, чтобы она была *квазивогнутой*.

Напомним, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется квазивогнутой, если для любых аргументов $x$, $y$ и всякого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \geq \min\big\{f(x), f(y)\big\}.$$

# Нечёткие числа

Можно показать, что выписанное условие равносильно тому, что все множества уровня $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}$ функции $f$ являются выпуклыми. В одномерном случае они являются интервалами.

Нечёткие множества с квазивогнутыми функциями принадлежности называются *нечёткими числами*, и они могут быть эквивалентным образом заданы как семейства вложенных друг в друга интервалов, которые соответствуют различными уровням принадлежности.

# Нечёткие числа

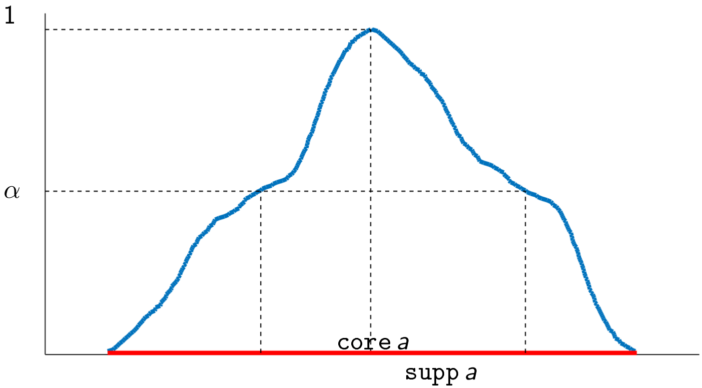


Рис.: Нечёткое число $a$

# Нечёткие числа

**Definition**

Множество нечётких значений нечеткого числа *a*, степени принадлежности которых числу *a* больше, либо равны $\alpha$ называются нечёткими значениями $\alpha$-уровня.

**Definition**

$\alpha$-срезом нечёткого числа будем называть те нечёткие значения, степени принятия которых даны нечётким числом равны $\alpha$.

# $\alpha$-уровни и срезы нечёткого множества

**Definition**

Множество нечётких значений нечеткого числа *a*, степени принадлежности которых числу *a* больше, либо равны $\alpha$ называются нечёткими значениями $\alpha$-уровня.

**Definition**

$\alpha$-срезом нечёткого числа будем называть те нечёткие значения, степени принятия которых даны нечётким числом равны $\alpha$.

*Ядро* или *центр* нечёткого множества $a$

$$\operatorname{core} a = \{x \in a | \mu(x) = 1\}. \tag{1}$$

*Основание* нечёткого множества $a$

$$\operatorname{supp} a = \{x \in a | \mu(x) > 0\}. \tag{2}$$

Если $\operatorname{supp} \mathrm{a} < \infty$, то основание называется *компактным основанием*.

# Нечёткие множества — положение в анализе данных

Нечёткое или размытое описание неопределённости является одной из возможных альтернатив вероятностному описанию в тех ситуациях, когда мы не можем разумно задать или определить вероятностную функцию распределения погрешностей, как какой-то случайной величины.

Нечёткие методы являются в определённом смысле промежуточной степенью подробности описания данных и результатов их обработки между интервалами или брусами, прямыми декартовыми произведениями интервалов, а также надстройками над интервалами (мультиинтервалы, твины) и функциональными зависимостями, типичными для теоретико-вероятностной статистики.

# Нечёткие интервалы

## Definition

Нечёткое множество $a$, для которого выполняются условия квазивогнутости, а ядро является отрезком, называется нечётким интервалом.

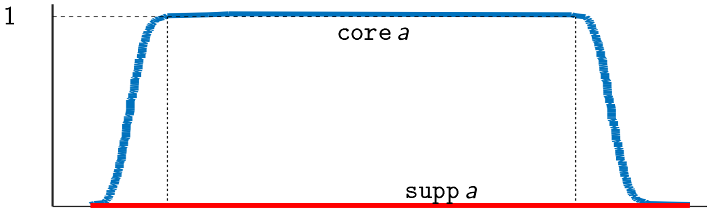


Рис.: Нечёткий интервал $a$

Арифметика интервалов существенно проще и в силу этого разработана в практическом плане гораздо шире и конструктивней.

Под «простотой» имеется в виду компактное, в виде одного числового интервала, или пары интервалов, описание данных и множеств решений.

Под конструктивностью имеется в виду возможность использования интервальных объектов и переменных как составляющих функциональных выражений: уравнений и неравенств и их систем.

Такую «простую» возможность арифметики нечётких множеств предоставляют в весьма ограниченном виде. Из-за необходимости функционального параметризованного описания функций принадлежности, выкладки с нечёткими множествами с получением численных результатов очень непросты.