

Интервальный анализ для исследователей.

Основы теории, учебные примеры и
практические применения.

А.Н. Баженов, А.А. Карпова

9 февраля 2023 г.

УДК 519.9 Р32

А в т о р ы :

А.Н. Баженов, А.А. Карпова.

Введение в анализ данных с интервальной неопределенностью. – Издательство «РХД». Серия «Интервальный анализ и его приложения». 2022. – 265 с.

Книга посвящена применению интервального анализа к решению задач науки и техники.

Главы 1 и 2 содержат основы теории и описание ряда инструментов интервального анализа. Изложение существенно опирается на монографию С.П. Шарого «Конечномерный интервальный анализ», но без деталей теории и доказательств. Глава 3 посвящена, пожалуй, самой важной теме для исследователей — обработке данных с интервальной неопределенностью. Это ещё совсем молодая ветвь математики. Книга А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый «Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью» даёт систематическое изложение вопроса. В изложении много примеров. Помимо большинства из них создано специально для книги.

Материал апробирован в учебном курсе «Численные методы в физике» для аспирантов ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН в 2018-2022 гг.

Книга предназначается для студентов и аспирантов естественнонаучных специальностей, а также для учёных и инженеров, интересующихся вопросами математической обработки экспериментов.

Оглавление

Введение	11
1 Классическая интервальная арифметика	12
1.1 Интервал и арифметические операции над ним	12
1.1.1 Независимые и связанные интервальные величины	16
1.1.2 Основная теорема интервальной арифметики . . .	16
1.1.3 Алгебраические свойства интервальных операций	17
1.1.4 Абсолютные характеристики интервала	18
1.1.5 Относительные характеристики интервала	20
1.1.6 Расстояние на множестве интервалов	21
1.1.7 Отличия интервальной арифметики от обычной .	22
1.2 Интервальные векторы и матрицы	24
1.2.1 Сложение и умножение интервальных матриц .	26
1.2.2 Алгебраические и порядковые свойства многомерных интервальных операций	31
1.2.3 Нормы интервальных матриц и векторов	33
1.2.4 Метрика и топология в интервальных пространствах	35
1.2.5 Неособенные и особенные интервальные матрицы	38
1.2.6 Сильно неособенные интервальные матрицы . .	42
1.2.7 Обратные интервальные матрицы	43
1.2.8 M - и H -матрицы	46
1.3 Интервальное оценивание областей значений функций .	47
1.3.1 Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы	48
1.3.2 Липшицевская оценка точности естественного интервального расширения	51

1.3.3	Центрированные формы интервальных оценивающих функций	55
1.3.4	Бицентрированная среднезначная форма	59
1.4	Постановки и множества решений интервальных задач	61
1.4.1	Кванторный формализм и АЕ-множества решений интервальных систем уравнений	63
1.4.2	Множества АЕ-решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений	68
1.4.3	Частные случаи множеств АЕ-решений и частичный порядок на множестве логических кванторов	70
1.4.4	Управляемое множество решений интервальных уравнений	75
1.4.5	Допусковое множество решений интервальных уравнений	82
1.4.6	Техника распознающих функционалов	89
1.5	Внешнее оценивание объединённого множества решений	95
1.5.1	Предобуславливание	96
1.5.2	Предварительное внешнее оценивание	98
1.5.3	Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя	102
1.5.4	Процедура Хансена-Блика-Рона	107
1.5.5	Формально-алгебраический подход	111
1.5.6	Интервальный метод Кравчика	114
1.6	Решение интервальной линейной задачи о допусках	117
1.6.1	Исследование разрешимости линейной задачи о допусках	119
1.6.2	Коррекция линейной задачи о допусках	122
1.6.3	Коррекция ИСЛАУ: изменение правой части	123
1.6.4	Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы	128
1.6.5	Построение бруса решения задачи	134
1.7	Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений	137
1.7.1	Одномерный интервальный метод Ньютона	138
1.7.2	Многомерный метод Ньютона	143
1.7.3	Метод Кравчика	150
1.7.4	Внешнее оценивание для интервальных уравнений и систем уравнений	165

2 Интервальная арифметика Каухера	177
2.1 Зачем и как расширять классическую интервальную арифметику?	177
2.2 Описание полной интервальной арифметики	180
2.2.1 Дуализация в арифметике Каухера	182
2.2.2 Сложение в полной интервальной арифметике	183
2.2.3 Умножение в полной интервальной арифметике	184
2.2.4 Свойства полной интервальной арифметики	186
2.2.5 Минимаксный характер полной интервальной арифметики	188
2.3 Внешнее оценивание множеств АЕ-решений ИСЛАУ	193
2.3.1 Субдифференциальный метод Ньютона	199
3 Анализ данных с интервальной неопределенностью	203
3.1 Как результаты измерений становятся интервальнозначными?	211
3.1.1 Твин	214
3.1.2 Элементы интервальной арифметики Кэхэна	215
3.2 Основные понятия интервальной статистики	217
3.2.1 Истинное значение измеряемой величины	217
3.2.2 Оценки точечные и интервальные	219
3.2.3 Накрывающие и ненакрывающие результаты измерений	220
3.3 Измерение постоянной величины	224
3.3.1 Совместность выборки и ее мера	225
3.3.2 Информационное множество	229
3.3.3 Вариабельность	234
3.3.4 Мода и медиана выборки	235
3.3.5 Варьирование интервальной неопределенности	242
3.3.6 Пример обработки интервальной выборки	244
3.4 Задача восстановления линейной зависимости	249
3.4.1 Постановка задачи	249
3.4.2 Совместность линейной функциональной зависимости	251
3.4.3 Информационное множество и коридор совместных зависимостей	254
3.4.4 Случай точечных входных переменных	260
3.4.5 Статус результата измерений	262

3.4.6 Варьирование величины неопределенности результатов измерений	267
Литература	273
Предметный указатель	281

Обозначения

При изложении материала авторами используется система обозначений, взятая из публикации [55]. Эта система обозначений основана на неформальном международном стандарте на обозначения в интервальном анализе, который был выработан в 2002 году.

Типичный список обозначений, например, такой как в книге С.П. Шарого «Конечномерный интервальный анализ» [45], дополнен необходимыми обозначениями для анализа данных с интервальной неопределённостью, введёнными в книге А.Н. Баженова, С.И. Жилина, С.И. Кумкова и С.П. Шарого «Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью» [1].

Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) обозначены в тексте полужирным и курсивным начертанием, например, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Выделение неинтервальных (точечных) величин каким-либо специальным образом не производится. Арифметические операции с интервальными величинами являются операциями соответствующих интервальных арифметик: классической интервальной арифметики \mathbb{IR} или полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KIR} .

$:=$	левая часть равенства есть обозначение для правой
$\&$	логическая конъюнкция, связка «и»
\implies	логическая импликация
\iff	логическая равносильность
\rightarrow	отображение множеств
\mapsto	правило сопоставления элементов при отображении
\leftarrow	оператор присваивания в алгоритмах
\circ	знак композиции отображений
\emptyset	пустое множество
$x \in X$	элемент x принадлежит множеству X
$x \notin X$	элемент x не принадлежит множеству X
$X \ni x$	множество X содержит элемент x
$X \not\ni x$	множество X не содержит элемент x
$X \cup Y$	объединение множеств X и Y
$X \cap Y$	пересечение множеств X и Y
$X \setminus Y$	разность множеств X и Y
$X \subseteq Y$	множество X есть подмножество множества Y
$X \subset Y$	множество X есть собственное подмножество множества Y
$X \times Y$	прямое декартово произведение множеств X и Y
\mathbb{N}	множество натуральных чисел
\mathbb{R}	множество действительных (вещественных) чисел
\mathbb{R}_+	множество неотрицательных вещественных чисел
\mathbb{IR}	классическая интервальная арифметика
\mathbb{ID}	множество интервалов, содержащихся в $D \subseteq \mathbb{R}^n$
\mathbb{KR}	полная интервальная арифметика Каухера
\mathbb{R}^n	множество вещественных n -мерных векторов
\mathbb{IR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{IR}
\mathbb{KR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{KR}
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$ -матриц
$\mathbb{IR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{IR}
$\mathbb{KR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{KR}

\mathcal{EF}	семейство элементарных функций
$\operatorname{sgn} x$	знак вещественного числа x
x^+, x^-	положительная и отрицательная части числа x
$\operatorname{sgn} \mathbf{a}$	знак интервала \mathbf{a}
$\underline{\mathbf{a}}, \inf \mathbf{a}$	левый конец интервала \mathbf{a}
$\overline{\mathbf{a}}, \sup \mathbf{a}$	правый конец интервала \mathbf{a}
$ \mathbf{a} $	абсолютная величина (магнитуда) интервала \mathbf{a}
$\operatorname{abs} \mathbf{a}$	интервальное расширение функции модуля
$\langle \mathbf{a} \rangle$	мигнитуда интервала \mathbf{a}
$\langle \mathbf{A} \rangle$	компарант интервальной матрицы \mathbf{A}
$\operatorname{mid} \mathbf{a}$	середина (медиана) интервала \mathbf{a}
$\operatorname{wid} \mathbf{a}$	ширина интервала \mathbf{a}
$\operatorname{rad} \mathbf{a}$	радиус интервала \mathbf{a}
$\operatorname{dev} \mathbf{a}$	отклонение интервала \mathbf{a} от нуля
$\operatorname{dual} \mathbf{a}$	дуальный (двойственный) к \mathbf{a} интервал
$\operatorname{opp} \mathbf{a}$	алгебраически противоположный к \mathbf{a} интервал
$\operatorname{inv} \mathbf{a}$	алгебраически обратный к \mathbf{a} интервал
$\operatorname{pro} \mathbf{a}$	правильная проекция интервала \mathbf{a}
$\operatorname{vert} \mathbf{a}$	множество крайних точек интервала \mathbf{a}
\ominus	«внутреннее» интервальное вычитание
\oslash	«внутреннее» интервальное деление
$\chi(\mathbf{a})$	функционал Рачека от интервала \mathbf{a}
Ξ_{uni}	объединённое множество решений
Ξ_{tol}	допусковое множество решений
Ξ_{ctl}	управляющее множество решений
$\Xi_{\alpha\beta}$	множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$
$\Xi_{\mathcal{A}\beta}$	множество АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$
\mathbf{A}^{-1}	обратная интервальная матрица
\mathbf{A}^c	характеристическая матрица ИСЛАУ
\mathbf{b}^c	характеристический вектор правой части ИСЛАУ
dist	метрика в интервальных пространствах
Dist	мультиметрика в интервальных пространствах
sti	стандартное погружение \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n}
$\operatorname{ran}(f, X)$	область значений функции f на множестве X
$f^\angle(\tilde{x}, x)$	наклон функции f между точками \tilde{x} и x
$\square X$	интервальная оболочка множества X
\wedge	операция минимума по включению
\vee	операция максимума по включению
И	условный экстремум по включению

I	единичная матрица соответствующих размеров
Q^\sim	знаково-блочная матрица для матрицы Q
$\ \cdot\ $	векторная или матричная норма
$\ \cdot\ _1$	1-норма векторов или подчинённая 1-норма матриц
$\ \cdot\ _2$	2-норма векторов или подчинённая 2-норма матриц
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -норма векторов или подчинённая ∞ -норма матриц
$\lambda(A)$	собственное значение матрицы A
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы A
$\sigma(A)$	сингулярное число матрицы A
$\text{diag}(A)$	диагональная матрица $n \times n$ -матрица с элементами A_1, \dots, A_n по главной диагонали
$\mathcal{N}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Ньютона
$\mathcal{K}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Кравчика
$\mathcal{H}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Хансена-Сенгупты
JK	индекс Жаккара
mode	интервальная мода
med	интервальная медиана
x^*	истинное значение измеряемой величины
\hat{x}	базовое измеренное значение величины
Ω	информационное множество задачи
Ξ	множество решений интервальной системы
Π	прогнозный коридор
Υ	коридор совместных зависимостей

Введение

Книга посвящена применению интервального анализа к решению задач науки и техники.

Главы 1 и 2 содержат основы теории и описание ряда инструментов интервального анализа. Изложение существенно опирается на монографию С.П. Шарого [45], но без деталей теории и доказательной части.

Глава 3 посвящена, пожалуй, самой важной теме для аспирантов — обработке данных с интервальной неопределенностью. Это ещё совсем молодая ветвь математики. Книга А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый «Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью» [1] — даёт систематическое изложение вопроса.

В изложении много примеров. Большинство из них создано специально для книги.

Материал апробирован в учебном курсе «Численные методы в физике» для аспирантов ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН в 2018-2022 гг.

Книга предназначается для студентов и аспирантов естественнонаучных специальностей, а также для учёных и инженеров, интересующихся вопросами математической обработки экспериментов.

Глава 1

Классическая интервальная арифметика

1.1 Интервал и арифметические операции над ним

Интервалом вещественной оси $[a, b]$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b включая их самих:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (1.1)$$

при этом a и b называются *концами интервала*.

Пример 1.1.1. Общеизвестно, что $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Число $\sqrt{3}$ является иррациональным, поэтому

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \in [1.7320, 1.7321].$$

В ходе оценки величины $\sqrt{3}$ мы получили интервал $[1.7320, 1.7321]$. Определение двусторонних ограничений интервальной величины является наиболее простым способом ее задания. ■

Важно заметить, что все элементы между двумя границами интервала являются равнозначными, а сам интервал рассматривается как целостный объект. Если $a = b$, то интервал называется *вырожденным*.

Следующим нашим шагом станет определение *арифметических операций* с базовым объектом — интервалом. Коль скоро интервалы являются множествами, не имеющими структуры, и все их элементы равноправны, то операции естественно определять «по представителям». Итогом любой бинарной операции должен быть интервал, покрывающий ВСЕ возможные результаты выполнения арифметической операции над представителями обоих интервалов:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{ x \star y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y} \}, \quad \text{где } \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \quad (1.2)$$

Определение 1.1.1 Алгебраическая система $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, обра- зованная множеством всех вещественных интервалов

$$\mathbf{a} := [\underline{a}, \bar{a}] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a} \}$$

с бинарными операциями сложения, вычитания, умножения и деления называется **классической интервальной арифметикой**.

Развернутые формы арифметических операций, определенных для интервалов, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}], \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}\}, \max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}\}], \quad (1.3c)$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}] \quad \text{для } \mathbf{y} \neq 0. \quad (1.3d)$$

Выражение (1.2) как результат выполнения арифметических операций представимо в виде

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \left[\min_{x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}} x \star y, \max_{x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}} x \star y \right], \quad \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \quad (1.4)$$

Действительно ли арифметические операции (1.3) равносильны выражению (1.4)? Результат сложения двух интервалов очевиден: сумма минимальных элементов каждого из интервалов дает левую границу интервала, сумма максимальных элементов — правую границу. В случае разности для получения левой границы результирующего интервала надо из минимума первого операнда вычесть максимум второго, правая же граница искомого интервала примет значение разности

максимального элемента первого операнда и минимального значения второго операнда. Частное двух интервалов вводится как умножение первого интервала на обратный второй.

Определение границ интервала, являющегося результатом умножения двух интервалов, является более сложным ввиду того, что знаки левых и правых границ исходных множителей могут принимать любые значения, и нужно перебрать все возможные варианты знаков сомножителей.

Выделим в \mathbb{IR} следующие подмножества:

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{a} \geq 0 \text{ & } \bar{a} \geq 0\} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ Z &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{a} \leq 0 \leq \bar{a}\} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{a} \in P\} && \text{— неположительные интервалы.} \end{aligned}$$

С учётом введённых подмножеств можно представить множество \mathbb{IR} в виде символьской формулы:

$$\mathbb{IR} = P \cup Z \cup (-P).$$

Графическое представление \mathbb{IR} приведено на Рис. 1.1:

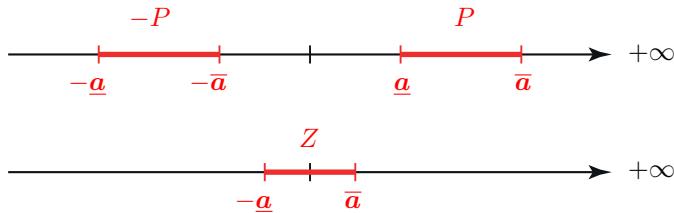


Рис. 1.1. Подмножества \mathbb{IR} в классической интервальной арифметике

После разбиения всего множества \mathbb{IR} на подмножества интервальное умножение можно определить в виде таблицы 1.1. Так называемая таблица Кэли содержит результаты умножения двух интервалов всех возможных типов.

Умножение интервала на число можно представить в виде

$$\mu \cdot \mathbf{a} := \begin{cases} [\mu \underline{a}, \mu \bar{a}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \bar{a}, \mu \underline{a}], & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.5)$$

.	$\mathbf{b} \in P$	$\mathbf{b} \in Z$	$\mathbf{b} \in -P$
$\mathbf{a} \in P$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\bar{ab}, \bar{ab}]$	$[\bar{ab}, \underline{ab}]$
$\mathbf{a} \in Z$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\min\{\underline{ab}, \bar{ab}\}, \max\{\underline{ab}, \bar{ab}\}]$	$[\bar{ab}, \underline{ab}]$
$\mathbf{a} \in -P$	$[\bar{ab}, \underline{ab}]$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\bar{ab}, \underline{ab}]$

Таблица 1.1. Интервальное умножение в классической интервальной арифметике \mathbb{IR}

Пример 1.1.2. Выполним четыре основные арифметические операции над интервалами $[-2, -1]$ и $[3, 4]$:

$$\begin{aligned} [-2, -1] + [3, 4] &= [1, 3], \\ [-2, -1] - [3, 4] &= [-6, -4], \\ [-2, -1] \cdot [3, 4] &= [-8, -3], \\ [-2, -1] / [3, 4] &= \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Умножим интервал $[3, 4]$ на -1 и сложим его с интервалом $[-2, -1]$:

$$[-2, -1] + (-1) \cdot [3, 4] = [-6, -4].$$

Таким образом, операция унарного минуса находится в согласии с определением арифметической операции вычитания интервалов, так как $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. ■

Определим *включение* интервалов друг в друга:

$$\mathbf{a} \geq \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \underline{a} \leq \bar{b} \quad \iff \quad \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \tag{1.6}$$

и рассмотрим важное свойство классической интервальной арифметики — *монотонность по включению*. Это свойство непосредственно следует из выражения (1.2). Для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{IR}$ и любых операций $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ выполняется

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}', \quad \mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \star \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' \star \mathbf{y}'. \tag{1.7}$$

Это свойство отражает неизбежное увеличение множества результатов всех возможных арифметических операций при замене интервалов \mathbf{x} и \mathbf{y} на «более широкие» интервалы \mathbf{x}' и \mathbf{y}' .

Итак, интервальная арифметика \mathbb{IR} является алгебраической системой и частично упорядоченным множеством с отношением порядка по включению « \subseteq ».

Помимо упорядочения интервалов по включению также имеет смысл распространить на множество всех интервалов из \mathbb{IR} линейный порядок « \leq » между вещественными числами. Вообще говоря, выполнить это распространение можно не единственным образом. Условимся считать, что $a \in \mathbb{IR}$ не превосходит $b \in \mathbb{IR}$ и писать « $a \leq b$ » тогда и только тогда, когда $\underline{a} \leq \underline{b}$ и $\bar{a} \leq \bar{b}$.

1.1.1 Независимые и связанные интервальные величины

Равенства в (1.3) уже не имеют места, если интервальные величины, над которыми выполняются арифметические операции, являются зависимыми.

Определение 1.1.2 *Интервальные величины a_1, \dots, a_n называются независимыми (несвязанными), если упорядоченный набор переменных (a_1, \dots, a_n) , где $a_1 \in \underline{a}_1, \dots, a_n \in \underline{a}_n$, принимает любые значения из множества $(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2 \times \dots \times \underline{a}_n) \subset \mathbb{R}^n$, являющегося результатом прямого декартова произведения интервалов $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$.*

В противном случае интервальные величины называются зависимыми (связанными).

Зависимость значительно сужает множество результатов выполнения операций сложения и умножения над интервалами по сравнению с тем же множеством, которое образуется в случае их независимости. Примеры выполнения арифметических операций над связанными интервальными величинами приведены в [2].

В дальнейшем по умолчанию будем считать, что входные интервальные данные в рассматриваемых задачах являются независимыми.

1.1.2 Основная теорема интервальной арифметики

На практике достаточно редко случается так, что нас интересует результат выполнения всего лишь одной арифметической операции над точечными или интервальными величинами. Как правило, в алгебраические выражения входят знаки различных арифметических операций.

Приведём формулировку так называемой *основной теоремы интервальнойной арифметики*, используемой при оценивании области значений сложного алгебраического выражения с интервальными переменными.

Теорема 1.1.1. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — рациональная функция вещественных аргументов x_1, x_2, \dots, x_n и для нее определен результат $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ подстановки вместо аргументов интервалов их изменения $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{IR}$ и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n\} \subseteq f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (1.8)$$

т. е. $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ содержит множество значений функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Если выражение для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то вместо включения в (1.8) выполняется точное равенство.

Доказательство данной теоремы можно найти в монографии [45].

1.1.3 Алгебраические свойства интервальных операций

В \mathbb{IR} нейтральными элементами относительно сложения и вычитания является нуль, а относительно умножения и деления — единица:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + 0 &= \mathbf{a}, & \mathbf{a} - 0 &= \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \cdot 1 &= \mathbf{a}, & \mathbf{a}/1 &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Интервальные арифметические операции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность сложения,} \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) && \text{— ассоциативность умножения,} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{— коммутативность сложения,} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} && \text{— коммутативность умножения.} \end{aligned}$$

Дистрибутивность умножения относительно сложения в общем случае отсутствует

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

однако имеет место более слабое свойство

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (1.9)$$

которое называется *субдистрибутивностью* умножения относительно сложения.

Дистрибутивность выполняется в ряде частных случаев:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq 0 \text{ или } \mathbf{b}, \mathbf{c} \leq 0. \quad (1.11)$$

1.1.4 Абсолютные характеристики интервала

Введем величины, которые естественным образом характеризуют интервал:

◊ *середина* (центр) интервала

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}), \quad (1.12)$$

◊ *радиус* интервала

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}), \quad (1.13)$$

◊ *ширина* интервала

$$\text{wid } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}. \quad (1.14)$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \text{mid } \mathbf{a} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{a},$$

что равносильно

$$\mathbf{a} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \text{mid } \mathbf{a}| \leq \text{rad } \mathbf{a}\}.$$

В том случае, если $\underline{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \text{mid } \mathbf{a} = 0$, интервал \mathbf{a} называется *уравновешенным*. Приведем некоторые свойства середины интервала:

$$\text{mid } (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{mid } \mathbf{a} \pm \text{mid } \mathbf{b}, \quad (1.15a)$$

$$\text{mid } (ab) = a \cdot \text{mid } \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}. \quad (1.15b)$$

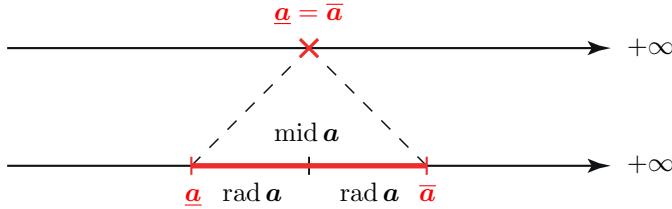


Рис. 1.2. Интервал и его характеристики

Радиус и ширина интервала характеризуют разброс точек интервала, т. е. абсолютную меру неопределенности некоторой величины, которую выражает данный интервал. Перечислим свойства радиуса интервала (аналогичные свойства справедливы и для ширины интервала):

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow \text{rad } \mathbf{a} \leq \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.16a)$$

$$\text{rad}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{a} + \text{rad } \mathbf{b}, \quad (1.16b)$$

$$\text{rad}(ab) = |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \text{ если } a \in \mathbb{R}, \quad (1.16c)$$

$$\max\{|a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}, \text{rad } \mathbf{a} \cdot |b|\} \leq \text{rad}(ab) \leq |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{a} \cdot |b|, \quad (1.16d)$$

$$\text{rad}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\text{rad } a}{\langle a \rangle |a|}, \text{ если } 0 \notin a. \quad (1.16e)$$

В выражения (1.16d) и (1.16e) были введены такие характеристики интервалов из \mathbb{IR} , как магнитуда и мигнитуда. *Магнитудой* (абсолютной величиной, *модулем*) интервала называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала a :

$$|a| := \max \{|a| \mid a \in a\} = \max \{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}. \quad (1.17)$$

Мигнитуда представляет собой наименьшее из абсолютных точек интервала a :

$$\langle a \rangle := \min \{|a| \mid a \in a\} = \begin{cases} \min \{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}, & \text{если } 0 \notin a, \\ 0, & \text{если } 0 \in a. \end{cases} \quad (1.18)$$

Свойства магнитуды и мигнитуды интервала заинтересованный читатель может найти в монографии [45].

Возведение интервала a в целочисленную степень определяется стандартным образом:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}. \quad (1.19)$$

Для любого интервала $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$ имеет место

$$\text{rad}(\mathbf{a}^n) \leq n|\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad } \mathbf{a}, \quad (1.20)$$

причем

$$\text{rad}(\mathbf{a}^n) = |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad } \mathbf{a}, \quad \text{если } 0 \in \mathbf{a}. \quad (1.21)$$

В некоторых случаях нам потребуется определение *знака* интервала:

$$\text{sgn } \mathbf{a} = \begin{cases} +, & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \geq 0 \text{ и } \bar{\mathbf{a}} \geq 0, \\ -, & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \text{ и } \bar{\mathbf{a}} \leq 0, \\ \text{не определен,} & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Значит, согласно (1.22) интервал $[0, 0]$ может иметь любой знак.

1.1.5 Относительные характеристики интервала

Помимо абсолютных характеристик интервала, таких как радиус и ширина, можно ввести величину, характеризующую относительный размах интервала. Конструкция вроде отношения $\bar{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}}$ окажется пригодной для этих целей лишь в том случае, если описываемый интервал не содержит нуль.

Для описания относительной «узости» интервала Х. Рачеком был предложен функционал следующего вида:

$$\chi(\mathbf{a}) := \begin{cases} \frac{\underline{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \leq |\bar{\mathbf{a}}|, \\ \frac{\bar{\mathbf{a}}}{\underline{\mathbf{a}}}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Для нулевого интервала $[0, 0]$ функционал χ не определён.

Ясно, что

$$-1 \leq \chi(\mathbf{a}) \leq 1,$$

и $\chi(\mathbf{a}) = 1$ тогда и только тогда, когда $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Интервал $[\chi(\mathbf{a}), 1]$ будем называть *относительным интервалом* для ненулевого интервала \mathbf{a} , а под *относительной шириной* интервала \mathbf{a} будем понимать величину $1 - \chi(\mathbf{a})$. В частности, связь функционала χ с шириной ненулевого интервала \mathbf{a} отражает соотношение

$$\text{wid } \mathbf{a} = |\mathbf{a}| (1 - \chi(\mathbf{a})).$$

1.1.6 Расстояние на множестве интервалов

Любой интервал из \mathbb{IR} можно представить не только как подмножество вещественной оси \mathbb{R} , но и точку в пространстве \mathbb{R}^2 . Определяя расстояние между интервалами как элементами \mathbb{R}^2 , необходимо учитывать «протяженность» интервалов — искомое расстояние должно быть естественным образом связано с расстоянием между их отдельными точками.

В том случае, если на \mathbb{R}^n задано некоторое расстояние d , расстояние Хаусдорфа, или *хаусдорфово расстояние*, между компактными множествами $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется как

$$d(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \}. \quad (1.24)$$

Геометрический смысл $d(A, B)$ заключается в том, что эта величина является максимумом из таких минимальных возможных неотрицательных чисел r_A и r_B , что r_B -окрестность множества A относительно расстояния d содержит B , а r_A -окрестность множества B относительно расстояния d содержит множество A .

На множестве интервалов также можно ввести хаусдорфово расстояние. Фактически оно окажется чебышевским расстоянием (максимум-расстоянием) между точками интервальной плоскости \mathbb{R}^2 , изображающими интервалы в координатах «левый конец-правый конец» [45].

Определение 1.1.3 Отображение

$$\text{dist} : \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

определяемое как

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}|\}, \quad (1.25)$$

называют расстоянием (метрикой) на множестве интервалов \mathbb{IR} .

Перечислим некоторые свойства величины $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0, \quad \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \text{ при } \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ для любых } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{c} \text{ из } \mathbb{IR},$$

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{ab}, \mathbf{ac}) \leq |\mathbf{a}| \text{dist}(\mathbf{bc}).$$

1.1.7 Отличия интервальной арифметики от обычной

Теперь, когда мы ввели понятие интервала, определили арифметические операции над ним, а также рассмотрели основные характеристики интервальных величин, обсудим более подробно отличия интервальной арифметики от обычной и проиллюстрируем эти отличия примерами.

Как известно, на поле вещественных чисел \mathbb{R} определены четыре арифметические операции; при этом операции вычитания и деления обратны операциям сложения и умножения. Однако в классической интервальной арифметике операции сложения-вычитания и умножения-деления не являются обратимыми

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{b} &\neq \mathbf{a}, \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/\mathbf{b} &\neq \mathbf{a},\end{aligned}$$

и поэтому все операции определяются самостоятельно.

Разберем отсутствие обратимости операции сложения в интервальной арифметике.

Пример 1.1.3. Предположим, что мы находимся в начале координат $x_0 = 0$. Сдвинемся из него на интервальную величину \mathbf{a} , а затем вернемся в исходную точку.

Сначала в качестве \mathbf{a} возьмем интервал нулевой ширины: $\mathbf{a} = [1, 1]$. Тогда получается, что

$$\begin{aligned}0 + \mathbf{a} - \mathbf{a} &= 0, \\ 0 + [1, 1] - [1, 1] &= 0.\end{aligned}$$

Теперь положим $\mathbf{a} = [-1, 1]$. Ситуация кардинально изменится, так как результатом выполнения арифметических действий будет величина, содержащая x_0 и характеризующаяся радиусом, равным удвоенно-му радиусу \mathbf{a} :

$$\begin{aligned}0 + \mathbf{a} - \mathbf{a} &= 2 \cdot [-\text{rad } \mathbf{a}, \text{rad } \mathbf{a}], \\ 0 + [-1, 1] - [-1, 1] &= [-2, 2].\end{aligned}$$

При многократном повторении операции ширина конечного интервала будет возрастать. ■

Из этого примера можно сделать важный вывод: противоположного, т. е. обратного по сложению, элемента для невырожденного интервала в \mathbb{IR} не существует! Радиусы (ширины) интервалов при сложении и вычитании могут только складываться (см. выражение (1.16b)). Значит, мы никогда не получим интервал нулевой ширины как результат сложения или вычитания двух интервалов из \mathbb{IR} . Аналогично при умножении невырожденного интервала на ненулевой интервал радиус произведения, как следует из (1.16d), всегда будет ненулевым.

Итак, *невырожденные интервалы не могут иметь обратных в \mathbb{IR} .* Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций имеют место более слабые «свойства сокращения»:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} &\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad 0 \notin \mathbf{a}, \quad 0 \notin \mathbf{b}, \quad 0 \notin \mathbf{c} &\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Другое отличие интервальной арифметики от обычной заключается в том, что при интервальном оценивании имеет смысл рассуждать не в терминах *выражений, задающих функции*.

Пример 1.1.4. Дан прямоугольный треугольник, длины двух катетов которого a и b нам известны: $a = 3$ см и $b = 4$ см. Наша задача — найти синус угла α , противолежащего большему катету.

Выразим синус угла α через длины катетов:

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}}.$$

Подстановка в полученное выражение известных нам длин катетов приведет к ответу $\sin \alpha = 0.8$.

Теперь заменим длину катета b на интервал $\mathbf{b} = [3.5, 4.5]$. Результат замены окажется неожиданным: ответы, полученные при использовании одного и того же выражения, но до и после преобразования, заключающегося во внесении переменной b под квадратный корень, различаются! При использовании выражения до преобразования мы получим

$$\sin \alpha = [0.65, 0.98] \ni 0.8,$$

а если воспользуемся уже преобразованным выражением, то

$$\sin \alpha = [0.76, 0.83] \ni 0.8.$$

Поскольку в преобразованное выражение переменная b входит один раз, то, согласно основной теореме интервальной арифметики, именно последний результат интервального оценивания совпадает с точной областью значений выражения, определяющего искомый синус угла. ■

1.2 Интервальные векторы и матрицы

Интервальный вектор — это упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — некоторые интервалы, то

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{— интервальный вектор-столбец,}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \quad \text{— интервальная вектор-строка,}$$

а сами интервалы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются *компонентами* образуемых ими векторов.

Если $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, то левая и правая границы интервального вектора обозначаются как

$$\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_n) \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n).$$

Множество интервальных n -векторов, компоненты которых принадлежат \mathbb{IR} , будем обозначать через \mathbb{IR}^n .

Интервальные векторы, как и в традиционной теории матриц, отождествляются с интервальными матрицами размера $n \times 1$ (вектор-столбцы) или $1 \times n$ (вектор-строки). *Интервальная матрица* — это прямоугольная таблица, составленная из интервалов \mathbb{IR} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}).$$

Для интервальной матрицы \mathbf{A} аналогично случаю интервального вектора определены матрицы $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{a}}_{ij})$ и $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{a}}_{ij})$.

Операции взятия середины интервала (1.12), его радиуса (1.13), ширины (1.14) и магнитуды (1.17) к интервальным векторам и матрицам применяются покомпонентно и поэлементно. К примеру, если $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, то $\text{mid } \mathbf{A}$ и $\text{rad } \mathbf{A}$ являются точечными $m \times n$ -матрицами:

$$\text{mid } \mathbf{A} := \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}}) \quad \text{и} \quad \text{rad } \mathbf{A} := \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}}).$$

Перечислим свойства середины и радиуса интервальных матриц:

$$\text{mid } (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{mid } \mathbf{A} \pm \text{mid } \mathbf{B},$$

$$\text{mid } (\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{B}, \quad \text{mid } (\mathbf{BA}) = \text{mid } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

$$\text{rad}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{rad } \mathbf{A} + \text{rad } \mathbf{B},$$

$$\max\{|\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|\} \leq \text{rad}(\mathbf{AB}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B} + \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|,$$

$$\text{rad}(\mathbf{AB}) = |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \quad \text{rad}(\mathbf{BA}) = \text{rad } \mathbf{B} \cdot |\mathbf{A}|.$$

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами из \mathbb{IR} определяется как прямое произведение порядков по включению на отдельных компонентах этих составных объектов, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (\mathbf{a}_i) \subseteq \mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) &\iff \mathbf{a}_i \subseteq \mathbf{b}_i \quad \text{для всех } i, \\ \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \subseteq \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) &\iff \mathbf{a}_{ij} \subseteq \mathbf{b}_{ij} \quad \text{для всех } i, j. \end{aligned}$$

Следовательно, отношения « \leq », « $<$ », « \geq » и « $>$ » применительно к интервальным векторам и матрицам понимаются так же покомпонентно и поэлементно.

Интервальные векторы из \mathbb{IR}^n являются прямыми произведениями интервалов вещественной оси и могут быть изображены в виде прямоугольных параллелепипедов в пространстве \mathbb{R}^n с ребрами, параллельными осям координат. Такие объекты будем называть *брусами*.

Точечные n -векторы, i -ая компонента которых равна \underline{a}_i или \bar{a}_i , называются *вершинами интервального вектора* \mathbf{a} из \mathbb{IR}^n . Множество вершин интервального вектора обозначается как

$$\text{vert } \mathbf{a} := \{ a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{a}_i, \bar{a}_i\}, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Вершинами интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a})_{ij}$ из $\mathbb{IR}^{m \times n}$ назовем точечные $m \times n$ -матрицы, ij -ым элементом которых является \underline{a}_{ij} или \bar{a}_{ij} . Множество вершин интервальной матрицы представимо в виде

$$\text{vert } \mathbf{A} := \{ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\} \}.$$

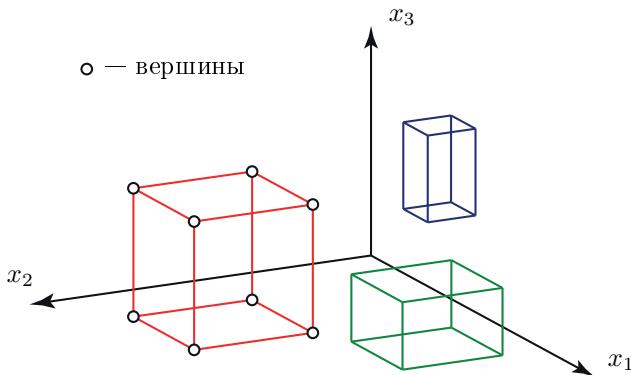


Рис. 1.3. Интервальные векторы-брюсы в \mathbb{R}^3 .

Интервальной оболочкой $\square S$ непустого ограниченного множества S в \mathbb{R}^n или $\mathbb{R}^{m \times n}$ называется наименьший по включению интервальный вектор (матрица), который содержит S . Компоненты $\square S$ являются проекциями множества S на координатные оси пространства, а сама интервальная оболочка является интервальным объектом, который наилучшим образом «охватывает» множество, служит его внешними границами. Иначе, $\square S$ — это пересечение всех интервальных векторов (матриц), содержащих S :

$$\square S = \bigcap \{\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n \mid S \subseteq \mathbf{a}\} \quad \text{или} \quad \square S = \bigcap \{\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n} \mid S \subseteq \mathbf{A}\}.$$

Наконец, при необходимости выделения из всего множества интервалов или интервальных векторов лишь тех из них, которые лежат в определенной области рассмотрения, через \mathbb{ID} будем обозначать множество всех брусов (интервальных векторов) $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n$ содержащихся в D (таких, что $\mathbf{a} \subseteq D$), где $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое подмножество пространства.

1.2.1 Сложение и умножение интервальных матриц

При определении операций сложения, вычитания и умножения над векторами и матрицами из \mathbb{IR} приходится ограничиваться более слабым требованием, чем их выполнение «по представителям», которое

имеет место в случае отдельных независимых интервалов (1.2):

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \square \{ A \star B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}, \quad \star \in \{ +, -, \cdot \}. \quad (1.26)$$

Тогда

1. Для любых интервальных матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ множество

$$\{A \pm B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$$

совпадает с интервальной матрицей $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, такой что $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \pm \mathbf{b}_{ij}$.

2. Для любых интервальных матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ множество

$$\square \{AB \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$$

совпадает с интервальной матрицей $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, такой что

$$\mathbf{c}_{ij} = \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}. \quad (1.27)$$

Напомним, что ij -ый элемент матрицы-произведения AB двух точечных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ есть

$$\sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}. \quad (1.28)$$

Подобное определение арифметических операций с интервальными матрицами (в том числе и векторами) объясняется тем, что в многомерном случае результат операции, выполняемой с интервальными матрицами, может не совпадать с множеством всевозможных результатов тех же операций между точечными представителями этих матриц.

Важным частным случаем интервального матричного умножения, результата которого совпадает с множеством всевозможных точечных произведений «по представителям», является умножение интервальной матрицы на точечный вектор:

$$\mathbf{A}b = \{Ab \mid A \in \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n. \quad (1.29)$$

Это равенство следует из того, что все выражения (1.28) для отдельных компонент пробегают интервалы (1.27) своих областей значений независимо друг от друга.

Произведение интервальной матрицы на точечный вектор может быть представлено в следующей удобной для использования форме:

$$\mathbf{A} \cdot x = [\text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x|, \text{mid } \mathbf{A} \cdot x + \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x|]. \quad (1.30)$$

«Эффект обёртывания» Эффект обёртывания заключается в неконтролируемом расширении оценивающего интервального множества по сравнению с множеством идеальных математических результатов операции, выполненных «по представителям». Этот эффект возникает вследствие несовпадения формы множества точных результатов с формой оценивающих интервалов при многократном выполнении одной и той же операции. Он типичен в многомерном случае, для которого характерно большое разнообразие конфигураций множеств, и особенно сильно проявляется в итерационных процессах либо рекуррентных вычислениях, где последовательные (поступательные) замены множества решений на более простые оценивающие множества происходят многократно.

Пример 1.2.1.

Шаговый двигатель — это двигатель постоянного тока, ротор которого совершает дискретные перемещения при последовательном приложении напряжения к обмоткам статора. Достоинствами таких двигателей являются надежность работы, возможность управления скоростью вращения в широком диапазоне, а главное, высокая точность позиционирования, что обеспечивает их востребованность при производстве 3D-принтеров и научного оборудования.

Рассмотрим часто встречающееся на практике задание — поворот на заданный угол с последующим возвращением в исходное положение. Пусть, например, эти действия выполняет шаговый двигатель Nema 17 (FL42STH) [6], который имеет угловой шаг $(1.8 \pm 0.09)^\circ$ и диаметр вала 22 мм. Такая величина углового шага означает, что оборот на 360° градусов шаговый двигатель должен совершить за 200 шагов.

Представим рассматриваемую задачу в математических терминах. Вращение объекта $x \in \mathbb{R}^2$ на плоскости на угол φ можно описать, используя матрицу поворота $R(\varphi)$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

В таком случае выполнение задания описывается последовательностью

$$T = R(\varphi) \cdot R(-\varphi) = I, \quad (1.32)$$

где $R(\varphi)$ определяется выражением (1.31), I — единичная матрица.

Однако на практике идеальный случай точного возврата в исходное положение (1.32) не реализуется. Докажем это утверждение, используя классическую интервальную арифметику \mathbb{IR} .

Будем считать, что центр координат находится в центре вала шагового двигателя. При повороте вала мы будем отслеживать изменение положения самой верхней точки вала, начальное положение которой описывается вектором $x_0 = (0, 11)^\top$. Угол поворота будем считать равным $\varphi = \pi/3$, а для учёта погрешности углового шага представим этот угол в виде интервала φ с радиусом $\text{rad } \varphi = 1.6 \cdot 10^{-3}$ рад.

В случае интервальных матриц $R(\pm\varphi)$ (1.31) матрица T в формуле (1.32) равна

$$T = \begin{pmatrix} [0.9972, 1.0028] & [-0.0032, 0.0032] \\ [-0.0032, 0.0032] & [0.9972, 1.0028] \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Определим положение верхней точки вала после одного вращения на угол φ и одного вращения на угол $-\varphi$:

$$x_1 = T \cdot x_0 = \begin{pmatrix} [-0.0352, 0.0352] \\ [10.969, 11.031] \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Кажется, что разница между начальным x_0 и конечным положениями x_1 верхней точки вала после вращений крайне мала. Но после выполнения ста вращений на угол φ и ста обратных вращений на угол $-\varphi$, конечное положение точки будет описывать уже интервальный вектор

$$x_{100} = \begin{pmatrix} [-4.7679, 4.7679] \\ [7.6773, 15.302] \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

и внешняя оценка позиционирования (1.35) составит более 5 мм! Если мы продолжим вращать вал шагового двигателя в противоположные стороны, то ширина интервального вектора x будет неуклонно расти, что иллюстрирует «эффект обертывания» и подтверждает невозможность точного возвращения вала в исходное положение. ■

Следует заметить, что элементы матрицы вращения не являются независимыми. Функции \sin и \cos имеют связанные области монотонности, и если учесть этот факт, то результаты матрично-векторного

умножения будут иными, более «узкими». Для получения данного результата необходимо использование математического аппарата, привлекающего полную интервальную арифметику Каухера.

Пример 1.2.2. Представим, что нам необходимо выполнить другое задание — поворот вала шагового двигателя на 360° . Выполним это задание двумя способами:

- В первом случае шаговый двигатель будет останавливаться каждые 60° . В качестве начального положения для выполнения следующего поворота будет выбираться его новое положение, в котором он оказывается после совершения последнего поворота.
- Во втором случае шаговый двигатель сразу совершил поворот на 360° без промежуточных остановок.

Будем считать угол φ по-прежнему интервальной величиной, имеющей радиус равный $1.6 \cdot 10^{-3}$ рад, и предположим (исключительно для наглядности), что положение верхней точки вала вместо точечного вектора $x_0 = (0, 11)^\top$ описывает интервальный вектор

$$x_0 = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] \\ [10.5, 11.5] \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.4 показаны результаты выполнения задания первым способом. Синяя пунктирная линия соответствует окружности вала шагового двигателя. Брус x_0 выделен заливкой красным цветом, и можно заметить, как он поворачивается при каждом шаге на 60° . Заливка зеленым цветом выбрана для выделения интервальной оболочки множества $\square\{R(\varphi) \cdot x_0\}$. Границы брусов $R(\varphi) \cdot x_0$, полученные в результате каждого из поворотов вала на 60° , показаны сплошной красной линией.

На Рис. 1.4 видно, что после поворота вала на 360° внешняя оценка позиционирования, представляемая бруском $R(\varphi) \cdot x_0$, в несколько раз превышает исходный брус x_0 . В то же время если вал совершил поворот сразу на 360° , то брус

$$R(360^\circ) \cdot x_0 = \begin{pmatrix} [-0.518, 0.518] \\ [10.499, 11.501] \end{pmatrix}$$

практически не будет отличаться от бруса x_0 .

Разница между внешними оценками позиционирования после выполнения одного и того же задания различными способами свидетельствует именно о проявлении эффекта обертывания и подтверждает

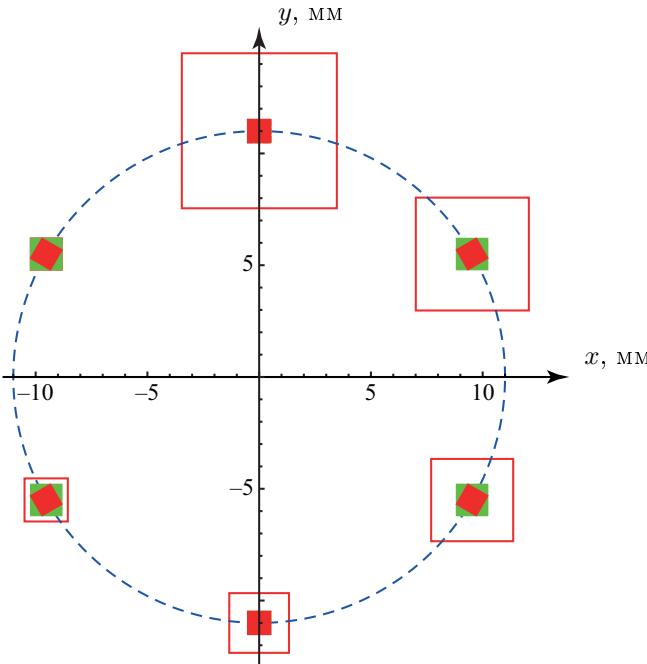


Рис. 1.4. Внешняя оценка позиционирования при совершении полного оборота валом шагового двигателя Nema 17 шагами по 60°

необходимость выполнения любых заданий на совершение движений из одного фиксированного начального положения.

■

Необходимо заметить, что эффект обёртывания может проявиться и для других операций, не распадающихся поэлементно и покомпонентно, как это происходит в случае сложения и вычитания.

1.2.2 Алгебраические и порядковые свойства многомерных интервальных операций

Для интервальных векторных и матричных операций имеет место монотонность по включению, непосредственно следующая из определений и монотонности по включению интервальных арифметических операций в \mathbb{IR} (1.7). Для любых интервальных матриц A , A' , B , B'

одинакового размера и любых операций $\star \subseteq \{+, -, \cdot, /\}$ справедливо

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}', \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}' \Rightarrow \mathbf{A} \star \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}' \star \mathbf{B}'. \quad (1.36)$$

Операция сложения. Свойствами операции сложения над любыми интервальными матрицами \mathbf{A} и \mathbf{B} одинакового размера являются

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad \text{— ассоциативность сложения,}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad \text{— коммутативность сложения.}$$

Операция умножения. Значительно более сложным является случай интервального матричного умножения, алгебраические свойства которого крайне ограничены.

Помимо коммутативности отсутствуют дистрибутивность умножения интервальных матриц по сложению и ассоциативность умножения.

Пример 1.2.3. Рассмотрим отсутствие ассоциативности умножения интервальных матриц. Возьмем три матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [2, 3] \\ [5, 6] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [4, 5] \end{pmatrix}.$$

Вычислим два произведения и сравним результаты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} [-15, 15] & [-5, 75] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} [-18, 18] & [-10, 75] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В данном примере $(\mathbf{AB})\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Подтвердим отсутствие дистрибутивности умножения интервальных векторов по сложению. Пусть теперь \mathbf{C} является не вектор-строкой, а вектор-столбцом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [4, 5] \end{pmatrix}.$$

Тогда получается, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= [1, 26], \\ \mathbf{AB} + \mathbf{AC} &= [1, 27]. \end{aligned}$$



К чему приводит отсутствие ассоциативности умножения интервальных матриц? Порядок операций в выражениях, содержащих более одной операции умножения, оказывается необходимым определять с помощью расстановки скобок, так как выражение \mathbf{ABC} может иметь различный смысл.

Обсудим отсутствие дистрибутивности интервального матричного умножения по сложению. Во-первых, несмотря на отсутствие дистрибутивности, субдистрибутивность умножения относительно сложения все же имеет место. Во-вторых, стоит отметить, что так же, как в одномерном случае (1.10), для умножения интервальных матриц справедливы следующие соотношения:

$$a(\mathbf{B}' \pm \mathbf{B}'') = a\mathbf{B}' \pm a\mathbf{B}'', \quad (1.37)$$

$$(\mathbf{a}' \pm \mathbf{a}'')\mathbf{B} = \mathbf{a}'\mathbf{B} \pm \mathbf{a}''\mathbf{B}, \quad (1.38)$$

где $a, \mathbf{a}', \mathbf{a}''$ — скаляры, $B, \mathbf{B}', \mathbf{B}''$ — матрицы или векторы. В-третьих, отсутствие в интервальных арифметиках полноценной дистрибутивности приводит к нарушению аксиомы линейного пространства

$$(\mu + \nu)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{a}$$

для вектора \mathbf{a} и скаляров $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Это говорит о том, что относительно введенных матричных операций сложения, вычитания и умножения *интервальные векторы и матрицы не образуют линейных векторных пространств* в отличие, скажем, от \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{m \times n}$. Это говорит о том, что интервальный вектор нельзя понимать так же, как вектор, используемый в линейной алгебре.

В общем, отсутствие ассоциативности и субдистрибутивность интервального матричного умножения делают интервальную матрично-векторную алгебру более бедной и «нелинейной» по сравнению с традиционной линейной алгеброй.

1.2.3 Нормы интервальных матриц и векторов

Хотя пространство \mathbb{IR}^n не обладает полноценной линейностью, в нем все же полезно ввести понятие нормы вектора или матрицы, которая, будучи обобщением абсолютной величины числа на многомерный случай, формализует такое свойство объекта, как «размер».

Нормой интервального вектора \mathbf{a} называется вещественная величина $\|\mathbf{a}\|$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, причем $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$ — неотрицательность,
- $\|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — абсолютная однородность,
- $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ — «неравенство треугольника».

Нормы интервальных векторов можно легко построить из абсолютных векторных норм в \mathbb{R}^n . Наиболее популярными векторными нормами являются:

$$\|\mathbf{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \quad (1.39a)$$

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}, \quad (1.39b)$$

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad (1.39c)$$

$$\|\mathbf{a}\|_u = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|/u_i, \quad (1.39d)$$

где $u = (u_i)$ — положительный n -вектор.

Норму (1.39c) называют *чебышёвской нормой* (максимум-нормой), а норму (1.39d) — *взвешенной чебышёвской нормой* (взвешенной максимум-нормой).

Для интервальных векторов норма $\|\cdot\|$ называется *абсолютной*, если $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|_1$, т. е. такая норма зависит только от абсолютных значений компонент вектора.

Нормой интервальной матрицы \mathbf{A} является вещественная величина $\|\mathbf{A}\|$, которая обладает следующими свойствами:

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, причем $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$ — неотрицательность,
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — абсолютная однородность,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ — «неравенство треугольника»,
- $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ — субмультипликативность.

Последняя аксиома не имеет места для векторов, так как их умножение не определено. Если понимать эту аксиому в широком смысле, то ее можно использовать для определения произведения матрицы на вектор и взаимного согласования векторных и матричных норм:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{b}\|. \quad (1.40)$$

Нормы интервальных векторов и матриц являются *согласованными* друг с другом, если для любых матриц \mathbf{A} и векторов \mathbf{b} , для которых определено произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, выполняется неравенство (1.40).

Введем некоторые матричные нормы для интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ размера $m \times n$:

- Подчинённая 1-норма определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right). \quad (1.41)$$

- Подчинённая 2-норма является величиной

$$\|\mathbf{A}\|_2 := \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|), \quad (1.42)$$

где σ_{\max} — наибольшее сингулярное число матрицы $|\mathbf{A}|$.

Напомним, что *сингулярными числами* матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называются неотрицательные квадратные корни из собственных чисел матрицы $A^\top A$. Мы будем обозначать через σ_{\min} и σ_{\max} наименьшее и наибольшее сингулярные числа матрицы, соответственно.

- ∞ -норма, подчинённая чебышёвской норме интервального вектора, определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}| \right). \quad (1.43)$$

1.2.4 Метрика и топология в интервальных пространствах

Существуют различные способы определения метрики в пространстве интервальных векторов и матриц.

Первый способ заключается в том, чтобы определить расстояние между двумя интервальными векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} (или интервальными матрицами \mathbf{A} и \mathbf{B}) как норму того интервального вектора (матрицы), на который они отличаются друг от друга. Тогда для нахождения этого интервального объекта необходимо выполнять не операцию обычного вычитания « $-$ » (1.3b), а операцию внутреннего (алгебраического) вычитания « \ominus » (2.7) в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{K}\mathbb{R}$.

Расстоянием (*метрикой*) между векторами из \mathbb{IR}^n или \mathbb{KR}^n будем считать

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \|\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}\|, \quad (1.44)$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая векторная норма на \mathbb{KR}^n .

Для пространства \mathbb{IR}^n метрика (1.44) совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусами в \mathbb{R}^n , порожденным метрикой $\text{dist}(a, b) = \|a - b\|$ на \mathbb{R}^n .

Аналогично метрику на множествах матриц из $\mathbb{IR}^{m \times n}$ и $\mathbb{KR}^{m \times n}$ можно ввести как

$$\text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \|\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — матричная норма в $\mathbb{KR}^{m \times n}$.

Другим способом задания расстояния на многомерных интервальных пространствах \mathbb{IR}^n или \mathbb{KR}^n является использование уже определенного расстояния dist (1.25) между одномерными интервалами, поскольку многомерные пространства являются прямыми произведениями метрических пространств. В этом случае расстояние между интервальными векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} можно определить одним из выражений

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \sum_{i=1}^n \text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i), \\ \text{dist}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \left(\sum_{i=1}^n (\text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит, расстояние на множестве матриц может быть введено как расстояние на прямом произведении *m*n экземпляров пространств \mathbb{IR} или \mathbb{KR} :

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \sum_{i,j} \text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}), \\ \text{dist}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \left(\sum_{i,j} (\text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В многомерных пространствах нередко бывает удобным работать с векторнозначным расстоянием — *мультиметрикой*. Для пространства

интервальных векторов \mathbb{IR}^n естественно ввести её как вектор расстояний между компонентами векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1.45)$$

а для интервальных $m \times n$ -матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$ в виде

$$\text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_{11}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{1n}, \mathbf{b}_{1n}) \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{b}_{21}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{2n}, \mathbf{b}_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{b}_{m1}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{mn}, \mathbf{b}_{mn}) \end{pmatrix}.$$

Сделаем два важных замечания. Во-первых, с топологической точки зрения все рассмотренные метрики и мультиметрики эквивалентны друг другу. Во-вторых, интервальные матрично-векторные арифметические операции являются непрерывными как в метриках, так и в мультиметриках вследствие их непрерывности в \mathbb{IR}^n и \mathbb{KR}^n .

Теоремы о сходимости вычислений. Приведем несколько фактов из математического анализа [45], которые имеют непосредственное отношение к понятию метрики (расстояния) и далее будут использоваться при обсуждении сходимости итерационных методов.

- ◊ Отображение $f : X \rightarrow X$ метрического пространства X с расстоянием $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *сжимающим* (*сжатием*), если существует неотрицательная постоянная $\alpha < 1$ такая, что для всех $x, y \in X$ имеет место неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y).$$

- ◊ Отображение $f : X \rightarrow X$ мультиметрического пространства X с мультиметрикой $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ называется *P-сжимающим* или *P-сжатием*, если существует неотрицательная $n \times n$ -матрица P со спектральным радиусом $\rho(P) < 1$, такая что для всех $x, y \in X$ имеет место

$$D(f(x), f(y)) \leq P \cdot D(x, y).$$

(Напомним, что для точечной $n \times n$ -матрицы A *спектральный радиус* $\rho(A)$ является наибольшим из абсолютных значений собственных чисел A .)

Теорема 1.2.1. (теорема Банаха о неподвижной точке) Сжимающее отображение $f : X \rightarrow X$ полного метрического пространства X в себя имеет единственную неподвижную точку. Она может быть найдена как предел последовательных приближений

$$x^{(k+1)} \leftarrow f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном приближении $x^{(0)} \in X$.

Для мультиметрических пространств аналогом теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающих отображений является теорема Шрёдера о неподвижной точке.

Теорема 1.2.2. (конечномерная теорема Шрёдера о неподвижной точке) Пусть отображение $\Phi : X \rightarrow X$ является P -сжимающим отображением полного мультиметрического пространства X с мультиметрикой $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Тогда для любого $x^{(0)}$ последовательность итераций

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

сходится к единственной неподвижной точке x^* отображения Φ в X , и имеет место оценка

$$D(x^{(k)}, x^*) \leq (I - P)^{-1}P \cdot D(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

1.2.5 Неособенные и особенные интервальные матрицы

Неособенные матрицы очень важны для различных практических приложений. Выделяют специальные типы матриц, которые гарантированно неособенны, а в некоторых случаях неотрицательны. Наиболее часто в литературе упоминаются такие классы неособенных интервальных матриц, как M - и H -матрицы.

Определение 1.2.1 Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной, если неособены все точечные $n \times n$ -матрицы $A \in A$. Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

Как определить, является ли интервальная матрица особенной или неособенной? В общем случае такая проверка представляет собой НП-трудную задачу.

Наиболее простым признаком неособенности интервальных матриц является диагональное преобладание. Интервальная матрица имеет диагональное преобладание, если все содержащиеся в ней точечные матрицы являются диагонально преобладающими. Иначе, интервальная матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ обладает *диагональным преобладанием*, если она удовлетворяет неравенствам

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.46)$$

Если же имеют место нестрогие неравенства

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.47)$$

то говорят о *слабом диагональном преобладании*.

Теорема 1.2.3. (интервальный признак Адамара). Интервальная матрица с диагональным преобладанием, удовлетворяющая (1.46), является неособенной.

Другим, более сложным, признаком неособенности интервальных матриц является критерий Баумана.

Теорема 1.2.4. (критерий Баумана) Интервальная матрица \mathbf{A} неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак, т. е.

$$(\det A') \cdot (\det A'') > 0 \quad (1.48)$$

для любых $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$.

Следующее условие особенности интервальной матрицы является необходимым и достаточным. Кроме того, нетривиальное решение приведенной ниже системы неравенств позволяет установить, какую именно особенную точечную матрицу содержит рассматриваемая интервальная матрица.

Теорема 1.2.5. Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ особенна тогда и только тогда, когда система неравенств

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.49)$$

имеет ненулевое решение.

Выражаясь неформально, интервальная матрица \mathbf{A} особенна тогда и только тогда, когда «радиус матрицы больше её среднего».

Хотя в общем случае поиск нетривиальных решений (1.49) является достаточно сложной задачей, на основе этой системы неравенств были построены несколько более полезных на практике достаточных признаков неособенности интервальных матриц.

- **признак Бекка**

Теорема 1.2.6. (признак Бекка) Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что ее середина $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенна и ее спектральный радиус

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1 \quad (1.50)$$

Тогда \mathbf{A} неособенна.

Признак Бекка обладает следующими особенностями. Во-первых, он не отличается большой чувствительностью. Во-вторых, если вычисление обратной средней матрицы $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ производятся приближенно, то проверить выполнение неравенства (1.50) оказывается невозможным.

- **признак Румпа**

Критерий, предложенный З. Румпом для определения неособенности интервальной матрицы, использует информацию о сингулярных числах матриц радиусов и середин той интервальной матрицы, неособенность которой необходимо установить.

Теорема 1.2.7. (признак Румпа) Если для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ имеет место

$$\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) \quad (1.51)$$

Тогда \mathbf{A} неособенна.

- **признак Рона-Рекса**

Признак Рона-Рекса особенности интервальной матрицы также основан на нахождении сингулярных чисел матриц радиусов и середин исследуемой интервальной матрицы.

Теорема 1.2.8. (признак Рона-Рекса) Если для интервальной матрицы \mathbf{A} имеет место

$$\sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) \geq \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (1.52)$$

то \mathbf{A} особенная.

Привлекательность критериев Румпа и Рона-Рекса заключается в том, что функция поиска сингулярных чисел матрицы включена во множество пакетов программ для математических расчетов: MATLAB, Scilab, Octave, Wolfram Mathematica и т. д.

Пример 1.2.4. Рассмотрим две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [25, 27] \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Определим, особенны ли эти матрицы.

Сначала выполним интервальную оценку их определителей:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= [1, 3] \cdot [15, 17] - [7, 9] \cdot [10, 13] = [-102, -19] \not\ni 0, \\ \det(\mathbf{B}) &= [1, 3] \cdot [25, 27] - [7, 9] \cdot [10, 13] = [-92, 11] \ni 0. \end{aligned}$$

Итак, первая матрица \mathbf{A} неособенна, а вторая матрица \mathbf{B} — особенная.

Теперь определим особенность каждой из матриц, воспользовавшись критериями Бекка (1.50), Румпа (1.51) и Рона-Рекса (1.52), и проанализируем результаты.

Начнем с признака Бекка. Поскольку спектральные радиусы

$$\begin{aligned} \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) &= 0.6794 < 1, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}) &= 1.2777 > 1, \end{aligned}$$

то можно утверждать, что матрица \mathbf{A} неособенна, а к матрице \mathbf{B} признак Бекка оказывается неприменим.

Перейдем к критерию Румпа. Для сингулярных чисел интервальных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} выполняется

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) &= 2.22 > \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) = -2.87, \\ \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{B}) &= 2.22 > \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{B}) = -1.36, \end{aligned}$$

и признак Румпа свидетельствует об особенности матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Последним является критерий Рона-Рекса:

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) &= -0.22 < \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}) = 20.87, \\ \sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{B}) &= -0.22 < \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{B}) = 29.36.\end{aligned}$$

Признак Рона-Рекса указывает на неособенность обеих интервальных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Все перечисленные признаки дают лишь достаточные условия неособенности или особенности интервальной матрицы, и даже их совместное использование всех признаков может не давать однозначной информации об исследуемой интервальной матрице. ■

1.2.6 Сильно неособенные интервальные матрицы

В классической линейной алгебре невозможен случай, когда в результате умножения неособенной матрицы на другую неособенную матрицу получается особенная матрица. В интервальной арифметике такая возможность существует.

Введем понятие *сильно неособенной матрицы*. Следует заметить, что неособенность интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ еще не означает ее сильную неособенность, однако любая сильно неособенная матрица является неособенной. Если же матрица \mathbf{A} является сильно неособенной, то и любая матрица $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ также будет сильно неособенна.

Определение 1.2.2 *Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является сильно неособенной (сильно невырожденной), если интервальная матрица $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$ существует и неособенная.*

Итак, сильно неособенная матрица — это неособенная матрица, которая «выдерживает» умножение на обратную среднюю к себе. Неформально такую формулировку можно объяснить тем, что при выборе матрицы $C = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ в произведении $C\mathbf{A}$ значение диагонали будет сделано наибольшим возможным относительно внедиагональной части полученной матрицы.

Пример 1.2.5. Рассмотрим интервальные матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} (1.53) и \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [25, 27] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [21, 23] \end{pmatrix}.$$

Мы уже установили (см. стр. 41), что матрица \mathbf{A} является неособенной, а матрица \mathbf{B} — особенной. Третья матрица \mathbf{C} также неособенна:

$$\det(\mathbf{C}) = [-96, -1].$$

Какую из матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} можно считать сильно неособенной?

$$\begin{aligned}\det((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) &= [0.3167, 1.8972], \\ \det((\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}) &= [0.0208, 2.3863].\end{aligned}$$

Обе матрицы $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$ и $(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}$ существуют, однако однозначный вывод о неособенности матрицы $(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}$ сделать нельзя, поскольку левая граница ее интервальновзначного определителя близка к нулю. В таком случае сильно неособенной будет матрица \mathbf{A} .

Рассмотрим спектральные радиусы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} :

$$\begin{aligned}\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \mathbf{A}) &= 0.6794 < 1, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{C})^{-1}| \mathbf{C}) &= 0.9789 \approx 1, \\ \rho(|(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| \mathbf{B}) &= 1.2777 > 1.\end{aligned}$$

Полученное соотношение между спектральными радиусами трех интервальных матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} свидетельствует о том, что признак Бекка (1.50) проверяет сильную неособенность. ■

1.2.7 Обратные интервальные матрицы

Определение 1.2.3 Обратной интервальной матрицей для неособенной интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называют

$$\mathbf{A}^{-1} := \square\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\},$$

т. е. интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в \mathbf{A} .

Пример 1.2.6. Вычислим обратную матрицу для матрицы \mathbf{A} (1.53):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является неособенной (см. стр. 41), однако обратная интервальная матрица для нее содержит особенную матрицу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [1, 3] & [10, 13] \\ [7, 9] & [15, 17] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{17}{19}, -\frac{15}{102}\right] & \left[\frac{5}{51}, \frac{13}{19}\right] \\ \left[\frac{7}{102}, \frac{9}{19}\right] & \left[-\frac{3}{19}, -\frac{1}{102}\right] \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{A}^{-1} = [-0.3227, 0.1346] \ni 0.$$

Получается, что обратная интервальная матрица может быть особенной по той причине, что взятие внешней интервальной оценки множества всех обратных матриц вовлекает в неё лишние элементы. ■

В общем случае нахождение обратной к интервальной матрице является NP-трудной задачей. Рассмотрим в качестве примера нахождение обратной матрицы с помощью итерационного метода Шульца.

Интервальный итерационный метод Шульца. Метод Шульца представляет собой метод Ньютона для решения системы линейных алгебраических уравнений, приложенный к $X^{-1} - A = 0$:

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)}(2I - AX^{(k)}) = X^{(k)} + X^{(k)}(I - AX^{(k)}). \quad (1.54)$$

Простая интервализация метода Шульца сходится плохо, поэтому необходимо выполнение коррекции метода. Итерации

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \text{mid } \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k)}(I - \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}). \quad (1.55)$$

будем называть *интервальным методом Шульца*.

Важным фактором успеха вычислений, проводимых для обращения интервальной матрицы, является выбор начального приближения. Проиллюстрируем это утверждение.

Пример 1.2.7. Пусть у нас имеется интервальная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5.000, -4.950] & 3 \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

обратной матрицей для которой является

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [2.857, 3.000] & [0.952, 1.000] \\ [4.714, 5.000] & [1.905, 2.000] \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Найдем обратную матрицу для \mathbf{A} , используя интервальный метод Шульца. Выберем интервальную матрицу, которую в дальнейшем будем использовать в качестве начального приближения для построения итерационного процесса:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [2.500, 3.500] & [0.500, 1.500] \\ [3.500, 5.500] & [1.000, 2.500] \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{pmatrix} [1.9250, 4.0000] & [0.4750, 1.5000] \\ [3.1000, 6.5000] & [1.0750, 2.7500] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \begin{pmatrix} [2.5880, 3.3407] & [0.8090, 1.1600] \\ [4.2700, 5.5400] & [1.6700, 2.2600] \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^{(6)} &= \begin{pmatrix} [2.8536, 3.0000] & [0.9510, 1.0000] \\ [4.7073, 5.0000] & [1.90240, 2.0000] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Результаты седьмой и последующих итераций уже не отличаются от интервальной матрицы $\mathbf{X}^{(6)}$ (в третьем знаке после запятой).

Сравним найденную интервальную матрицу $\mathbf{X}^{(7)}$ с обратной матрицей \mathbf{A}^{-1} (1.57):

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} [2.857, 3.000] & [0.952, 1.000] \\ [4.714, 5.000] & [1.905, 2.000] \end{pmatrix}.$$

Расхождение между этими интервальными матрицами невелико, однако все же присутствует. Если такая точность вычислений достаточна, то интервальная матрица $\mathbf{X}^{(6)}$, найденная с помощью интервального метода Шульца, и есть искомая обратная матрица для \mathbf{A} (1.56).

Стоит заметить, что чем «ближе» интервальная матрица \mathbf{A} к точечной, тем точнее будет получаемый нами результат ее обращения с помощью интервального метода Шульца. Например, для интервальной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5.000, -4.995] & 3 \end{pmatrix}$$

обратная матрица, найденная на пятой итерации при выборе того же начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ (1.58), уже не отличается от обратной

матрицы A^{-1} (с точностью до третьего знака после запятой):

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(5)} &= \begin{pmatrix} [2.98500, 3.00000] & [0.99500, 1.00000] \\ [4.97000, 5.00000] & [1.99000, 2.00000] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} [2.98507, 3.00000] & [0.99503, 1.00000] \\ [4.97015, 5.00000] & [1.99005, 2.00000] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

■

1.2.8 M - и H -матрицы

В настоящем подразделе мы кратко рассмотрим два класса интервальных матриц с диагональным преобладанием — M - и H -матрицы, наш интерес к которым вызван тем, что они фигурируют в обсуждении работы таких интервальных итерационных методов, как интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. стр. 102) и процедура Хансена-Блика-Рона (см. стр. 107). Мы ограничимся указанием лишь тех сведений о матрицах из данных классов, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Определение 1.2.4 *Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является M -матрицей тогда и только тогда, когда ее внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор $v > 0$, такой что $Av > 0$.*

Определение 1.2.5 (*критерий Фань Цзы*)

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является M -матрицей тогда и только тогда, когда ее внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $v > 0$, такой что $Av > 0$.

Из двух вышеприведенных определений следует, что интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется M -матрицей в том случае, если каждая вещественная матрица $A \in \mathbf{A}$ является M -матрицей.

Определение 1.2.6 *Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется H -матрицей тогда и только тогда, когда ее компарант $\langle A \rangle$ является M -матрицей.*

Определение 1.2.7 Будем говорить, что точечная $n \times n$ -матрица $\langle A \rangle$ есть компарант интервальной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, если

$$ij\text{-й элемент } \langle A \rangle := \begin{cases} \langle a_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|a_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пример 1.2.8. Выберем произвольную интервальную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} [10, 11] & [-5, -3] \\ [0, 1] & [2, 4] \end{pmatrix}$$

и установим, принадлежит ли она классу M - или H -матриц.

Данная интервальная матрица A имеет диагональное преобладание в смысле определения (1.46) и, как можно сразу заметить, не является M -матрицей, так как ее внедиагональный элемент A_{21} положителен.

Определим компарант матрицы A :

$$\langle A \rangle = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Внедиагональные элементы точечной матрицы $\langle A \rangle$ неположительны. Следовательно, для того, чтобы установить принадлежность матрицы $\langle A \rangle$ классу M -матриц, а интервальной матрицы A — классу H -матриц, нам необходимо найти положительный вектор v , такой что $\langle A \rangle v > 0$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \langle A \rangle v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, точечная матрица $\langle A \rangle$ является M -матрицей в соответствии с критерием Фань Цзы. Из этого следует, что матрица A принадлежит классу интервальных H -матриц. ■

1.3 Интервальное оценивание областей значений функций

Зависимость одной величины от другой (или нескольких других) определяется функцией. В качестве примера приведем определение напряжения U по известным сопротивлению R и силе тока I :

$$U = IR.$$

Если мы рассчитываем значение *искомой* величины, зная зависимость между ней и другой величиной, определяемой в результате прямых измерений, то проводимое измерение называется *косвенным*. При этом вполне может оказаться так, что значения величины, которые мы регистрируем, являются интервальнозначными — причинам, обуславливающим интервальный характер результатов измерений, посвящен раздел 3.1 в главе 3.

Таким образом, сталкиваясь с косвенными измерениями, мы можем прийти к задаче оценивания области значений некоторой функции f , т. е. множества

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) := \{f(x) \mid x \in \mathbf{X}\},$$

где \mathbf{X} — интервал в \mathbb{R} или же интервальный вектор-брюс в \mathbb{R}^n .

Для непрерывной функции $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = \left[\min_{x \in \mathbf{X}} f(x), \max_{x \in \mathbf{X}} f(x) \right].$$

1.3.1 Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы

Под *интервальным оцениванием* мы будем понимать замену точной области значений функции её интервальной оценкой. Особенность интервального оценивания заключается в том, что нас не интересует нахождение отдельных экстремумов функции — основной задачей является «глобальная» оценка области значений функции. Эта интервальная оценка может быть как внешней, если мы оцениваем область значений как объемлющее множество, или внутренней, если имеется в виду подмножество. Далее будут рассмотрены именно внешние оценки.

В основе методов интервального оценивания областей значений функций лежат следующие *идеи*:

1. В аналитическом выражении (или алгоритме для вычисления) функции точечные значения *входных аргументов* заменяются на соответствующие им интервальные значения, а арифметические операции и элементарные функции — на свои интервальные аналогии. Результат вычисления полученного интервального выражения (или выполнения интервального алгоритма) будет содержать искомую область значений функции.

2. Исходное аналитическое выражение (или алгоритм вычисления **функции**) заменяется на другое, равносильное исходному в том или ином смысле, однако «превосходящее» его в достигаемой точности результата, удобстве использования **при интервальном оценивании** и т. д. Над полученным после замены выражением производятся действия, описанные в п. 1.

Введем **основные понятия интервального оценивания**:

- *Интервальным продолжением* точечной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ на $D \subset \mathbb{R}^n$ является интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x)$ для всех точечных аргументов $x \in D$.
- *Интервальным расширением* точечной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ на $D \subset \mathbb{R}^n$ называется интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$, если
 - (i) она является интервальным продолжением f на D ,
 - (ii) монотонна по включению на \mathbb{ID} , т. е. для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{ID}$ имеет место импликация $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y})$.
- Интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ называется *оптимальным интервальным расширением* точечной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ на $D \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \square(\text{ran}(f, \mathbf{x}))$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{ID}$, т. е. значения \mathbf{f} являются интервальными оболочками областей значений f на брусьях $\mathbf{x} \in \mathbb{ID}$.

Интересным примером, демонстрирующим разнообразие возможных интервальных расширений, является оптимальное интервальное расширение функции знака числа $\text{sgn } x$:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & \text{если } \bar{x} < 0, \\ [-1, 0], & \text{если } \underline{x} < 0 = \bar{x}, \\ [-1, 1], & \text{если } \underline{x} < 0 < \bar{x}, \\ 0, & \text{если } \underline{x} = 0 = \bar{x}, \\ [0, 1], & \text{если } \underline{x} = 0 < \bar{x}, \\ 1, & \text{если } 0 < \underline{x}. \end{cases}$$

- Интервальнозначную функцию $\mathbf{F} : \mathbb{ID} \rightarrow \mathbb{IR}^m$ будем называть *внешней оценивающей функцией* для f на $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если она удовлетворяет

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{X}) \text{ для всех } \mathbf{X} \in \mathbb{ID}.$$

- *Естественным интервальным расширением* называется интервальное расширение элементарного функционального выражения, которое получается в результате замены его аргументов на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги и расширения.

Естественное интервальное расширение точечной функции f мы будем обозначать через f_{\natural} .

- *Элементарными функциями* являются:

- ◊ абсолютная величина (модуль) $|x|$,
- ◊ степенная функция x^α ,
- ◊ показательная функция a^x , записываемая также как $\exp_a x$,
- ◊ логарифмическая функция $\log_a x$,
- ◊ круговые тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,
- ◊ обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

Семейство элементарных функций будем обозначать через \mathcal{EF} .

- *Элементарными функциональными выражениями* будем называть аналитические выражения, составленные из символов переменных, констант, четырёх арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и элементарных функций.

Заметим, что элементарное функциональное выражение жестко ассоциировано с задающим его выражением и, как следствие, способом своего вычисления (см. пример 1.1.4 на стр. 23).

Пример 1.3.1. Рассмотрим точечную функцию

$$f(x) = \arccos(x^2 - 2x + 1),$$

областью определения которой является интервал $[0, 2]$.

Поставим задачу найти ее естественное и оптимальное интервальные расширения при $x = [1, 2]$.

Нетрудно убедиться в том, что естественное интервальное расширение $f_{\natural}(x)$ исходной точечной функции $f(x)$ не существует. Это связано с тем, что функция $\arccos(x)$ определена только на интервале $[-1, 1]$:

$$[1, 2] \cdot [1, 2] - 2 \cdot [1, 2] + [1, 1] = [-2, 3].$$

Проделаем некоторые алгебраические преобразования:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 2)x + 1 = (x - 1)^2.$$

Тогда для представления $f(x) = \arccos((x - 2)x + 1)$ получаем следующее естественное интервальное расширение

$$([1, 2] - [2, 2]) \cdot [1, 2] + [1, 1] = [-1, 1] \rightarrow \arccos([-1, 1]) = [0, \pi].$$

В том случае, если заданную точечную функцию представить в виде $f(x) = \arccos((x - 1)^2)$, то

$$([1, 2] - [1, 1])^2 = [0, 1] \rightarrow f(\mathbf{x}) = \square(\tan(f, \mathbf{x})) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

и полученное интервальное расширение является оптимальным. ■

1.3.2 Липшицевская оценка точности естественного интервального расширения

Зададимся вопросом о том, насколько точна внешняя оценка области значений функции, найденная с помощью ее естественного интервального расширения f_{\natural} . Для оценки точности внешнего оценивания мы будем использовать *условие Липшица*, которое распространим на интервальные функции.

Понятие *непрерывности по Липшицу* отражает условие соразмерности изменений функции и ее аргумента: приращение функции (даже негладкой) не должно превосходить приращение аргумента более чем в определенное число раз по абсолютной величине или в заданной метрике. Как известно из математического анализа, функция $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, если для некоторой константы L имеет место

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|, \quad \forall x, y \in D.$$

Аналогичным образом определяется непрерывность по Липшицу функции нескольких переменных. Вещественная функция $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ является липшицевой, если существует вектор-строка констант $L_f \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|, \quad \forall x, y \in D.$$

Стоит заметить, что не все элементарные функциональные выражения и даже элементарные функции удовлетворяют условию Липшица. Например, не являются непрерывными по Липшицу функции x^α при $0 < \alpha < 1$ в окрестности нуля, а также функции $\arccos(x)$ и $\arcsin(x)$ в окрестностях точек $x = \pm 1$.

Введем условие липшицевости интервальной функции f .

Определение 1.3.1 *Интервальная функция $f : \mathbb{IR}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{IR}$ называется непрерывной по Липшицу на D , если существует вектор-строка констант $L_f \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ такая, что*

$$\text{dist}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq L_f \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.59)$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.

Для того, чтобы оценить точность естественного интервального расширения, необходимо установить непрерывность по Липшицу для интервальной функции f_\natural . Выполнить проверку того, является ли элементарное функциональное выражение липшицевым по форме или нет, можно непосредственно в процессе вычисления его естественного интервального расширения (а иногда даже просто по виду выражения).

Теорема 1.3.1. Пусть f — элементарное функциональное выражение от n переменных, и оно является липшицевым по форме на некотором брусе $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда естественное интервальное расширение f_\natural непрерывно по Липшицу на \mathbb{IX} . Соответствующая вектор-строка констант Липшица может быть вычислена рекуррентно по дереву Канторовича для f с помощью следующей таблицы:

$0,$	если f есть константа
i -ая строка единичной матрицы,	если $f = x_i, i = 1, 2, \dots, n$
$L_g + L_h,$	если $f = g \pm h,$
$ g_\natural(\mathbf{X}) L_h + L_g h_\natural(\mathbf{X}) ,$	если $f = g \cdot h$
$\frac{(L_g + f_\natural(\mathbf{X}) L_h)}{\langle h_\natural(\mathbf{X}) \rangle}$	если $f = g/h$
$\alpha g_\natural(\mathbf{X}) ^{\alpha-1} L_g$	если $f = g^\alpha, 1 \leq \alpha \in \mathbb{R}$
$L_\phi(g_\natural(\mathbf{X})) \cdot L_g$	если $f = \phi(g), \phi \in \mathcal{EF}$

Следствие. Пусть f — элементарное функциональное выражение от n переменных, которое является липшицевым по форме на некотором брусе $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Тогда для ширины естественного интервального расширения \mathbf{f}_\natural на любом брусе $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$ справедлива оценка

$$\text{rad } \mathbf{f}_\natural(\mathbf{x}) \leq L \cdot \text{rad } \mathbf{x}$$

с константой L , не зависящей от \mathbf{x} .

Таким образом, естественное интервальное расширение \mathbf{f}_\natural элементарного функционального выражения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, являющееся липшицевым по форме на $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$, имеет *первый порядок точности* [45]:

$$\text{dist} (\mathbf{f}_\natural(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\| \quad (1.60)$$

для любого бруса $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$ и некоторой константы C , не зависящей от \mathbf{x} .

Пример 1.3.2. Оценим и сравним точность естественных интервальных расширений \mathbf{f}_\natural двух элементарных функциональных выражений, задающих одну и ту же точечную функцию:

$$f^{(1)}(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{x} \quad \text{и} \quad f^{(2)}(x, y) = x + \frac{2y}{x}, \quad x \in [2, 5], \quad y \in [1, 3].$$

Можно убедиться, что элементарные точечные выражения $f^{(1)}(x)$ и $f^{(2)}(x)$ имеют одинаковые оптимальные интервальные расширения

$$\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [3.0, 6.2],$$

однако разные естественные интервальные расширения

$$\mathbf{f}_\natural^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [1.2, 15.5],$$

$$\mathbf{f}_\natural^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [2.4, 8.0].$$

Установим непрерывность по Липшицу естественных интервальных расширений $\mathbf{f}_\natural^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{f}_\natural^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ элементарных функциональных выражений $f^{(1)}(x, y)$ и $f^{(2)}(x, y)$ на брусе $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [2, 5] \\ [1, 3] \end{pmatrix}$.

Согласно (1.59) выберем два интервальных вектора

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [2, 2] \\ [1, 1] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} [5, 5] \\ [3, 3] \end{pmatrix}.$$

Данный выбор обусловлен тем, что точки $(2, 1)$ и $(5, 3)$ являются вершинами интервального вектора-брюса \mathbf{X} в пространстве \mathbb{R}^2 , такими что $f^{(1)}(2, 1) = f^{(2)}(2, 1) = 3.0$ и $f^{(1)}(5, 3) = f^{(2)}(5, 3) = 6.2$.

Найдем вектор расстояний между компонентами интервальных векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} (1.45):

$$\text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \binom{3}{2}.$$

Определим величину, входящую в левую часть неравенства (1.59):

$$\text{dist}\left(\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y})\right) = \text{dist}\left(\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{y})\right) = 3.2.$$

Значит,

$$3.2 \leq L_f \cdot \binom{3}{2},$$

и оба естественных интервальных расширения $\mathbf{f}_\natural^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{f}_\natural^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются липшицевыми, поскольку существует такая вектор строка L_f , что полученное неравенство выполняется. Например, $L_f = (0.5, 0.85)$.

Для того, чтобы оценить точность внешней оценки областей значений элементарных функциональных выражений $f^{(1)}(x, y)$ и $f^{(2)}(x, y)$, найденных с помощью их естественных интервальных расширений, нам необходимо определить норму $\|\text{wid } \mathbf{X}\|$, которая входит в правую часть выражения (1.60). Пусть

$$\|\text{wid } \mathbf{X}\|_1 = 3 + 2 = 5.$$

Мы могли бы выбрать любую другую норму $\|\text{wid } \mathbf{X}\|$, так как в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны друг другу.

Выполним некоторые промежуточные вычисления:

$$\text{dist}\left(\mathbf{f}_\natural^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ran}(f^{(1)}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \text{dist}([1.2, 15.5], [3.0, 6.2]) = 9.3,$$

$$\text{dist}\left(\mathbf{f}_\natural^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ran}(f^{(2)}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \text{dist}([2.4, 8.0], [3.0, 6.2]) = 1.8.$$

Используя выражение (1.60), окончательно получаем

$$9.3 \leq C \cdot 5 \rightarrow C \geq 1.86 \quad \text{для } f^{(1)}(x) = \frac{x^2 + 2y}{x},$$

$$1.8 \leq C \cdot 5 \rightarrow C \geq 0.36 \quad \text{для } f^{(2)}(x) = x + \frac{2y}{x}.$$

■

1.3.3 Центрированные формы интервальных оценивающих функций

Использование естественного интервального расширения f_\sharp для получения внешней оценки области значений точечной функции f является отражением первой из идей интервального оценивания, рассмотренных в начале раздела на стр. 48. Как выглядит реализация второй идеи и к какому результату она приводит?

Заменим исходное выражение для функции на некоторую линейную *центрированную форму*, для которой интервальная оценка области значений легко вычисляется и является точной.

Определение 1.3.2 *Будем говорить, что для функции $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ интервальная оценивающая функция $f_c(\mathbf{X})$ на $\mathbf{X} \subseteq D$ имеет центрированную форму с центром c , если для некоторой вектор-строки $\mathbf{g} \in \mathbb{IR}^{1 \times n}$, зависящей от \mathbf{X} и c , она представима в виде*

$$f_c(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X} - c)$$

или, развернуто,

$$f_c(\mathbf{X}) := f(c) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c) \cdot (\mathbf{X}_i - c_i) \quad (1.61)$$

где $\mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c)$ — некоторые интервалы, зависящие от \mathbf{X} и c .

Если коэффициенты $\mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c)$ в (1.61) выбраны такими, что

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(\mathbf{X}),$$

то

Определение 1.3.3 Дифференциальной центрированной, или среднезначной, формой интервального расширения функции f называется

$$f_{mv}(\mathbf{X}) := f(c) + f'(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{X} - c), \quad (1.62)$$

где $c \in \mathbf{X}$, а $f'(\mathbf{X})$ — внешняя интервальная оценка для производной f' на интервале \mathbf{X} .

Помимо дифференциальной существуют другие центрированные формы, одной из которых является *наклонная форма*. Предположим, что для вещественнозначной функции $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ можно найти разложение вида

$$f(x) = f(y) + f^\angle(x, y) \cdot (x - y), \quad \forall x, y \in D \quad (1.63)$$

с некоторой функцией $f^\angle(\cdot, \cdot) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Определение 1.3.4 Вектор-строка $f^\angle(x, y)$, фигурирующая в (1.63), называется *наклоном* функции f между точками x и y .

Определение 1.3.5 Интервальная функция

$$f_{sl}(\mathbf{X}, c) := f(c) + f^\angle(\mathbf{X}, c) \cdot (\mathbf{X} - c) \quad (1.64)$$

называется *наклонной формой интервальной оценивающей функции* f на \mathbf{X} с центром в точке c .

Использование наклонной формы для получения внешней оценки области значений точечной функции f является целесообразным лишь в том случае, если известен эффективный способ вычисления производных и наклонов функции, а также их интервальных оценок. В одномерном случае при $x \neq y$ наклон функции совпадает с её разделённой разностью первого порядка:

$$f^\angle(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Если $x = y$, то $f^\angle(y, y) = f'(y)$ для дифференцируемой функции f .

В многомерном случае прямая интервализация наклона невозможна по той причине, что он является не интервальным расширением обычного наклона, а внешней интервальной оценкой некоторого набора всех представителей наклонов функции между точками x и y , когда x пробегает заданный брус \mathbf{X} .

Оценку точности всех центрированных форм (1.61) определяет

Теорема 1.3.2. (теорема Кравчика-Ноймайера)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ — точечная функция, $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$, $c \in \mathbf{X}$. Предположим, что $\mathbf{g} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ — такая интервальная вектор-строка, что для любого $x \in \mathbf{X}$ имеет место

$$f(x) = f(c) + g(x - c) \text{ с некоторым } g \in \mathbf{g}. \quad (1.65)$$

Тогда интервал $f(c) + \mathbf{g}(\mathbf{X} - c)$ содержит область значений $\text{ran}(f, \mathbf{X})$ и справедлива оценка

$$\text{dist}(f(c) + \mathbf{g}(\mathbf{X} - c), \text{ran}(f, \mathbf{X})) \leq 2(\text{rad } \mathbf{g}) |\mathbf{X} - c|. \quad (1.66)$$

Если интервальная вектор-строка \mathbf{g} , входящая в выражение (1.65), вычисляется таким образом, что $\|\text{wid } \mathbf{g}\| \leq C \|\text{wid } \mathbf{X}\|$, то центрированная форма обеспечивает *второй порядок точности* оценивания области значений функции. Например, это имеет место в том случае, если при вычислении дифференциальной центрированной формы $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X})$ используются естественные интервальные расширения производных.

Следует обратить внимание на то, что общее определение центрированной формы (1.61) и определение наклонной формы (1.64) не содержат информации о каких-либо ограничениях, накладываемых на положение точки c . В том случае, если центр формы принадлежит интервалу \mathbf{X} , на котором рассматривается интервальная оценивающая функция, оценка точности наклонной формы $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c)$ также следует из вышесформулированной теоремы Кравчика-Ноймайера:

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c), \text{ran}(f, \mathbf{X})) \leq 2 \text{rad}(\mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, x)) |\mathbf{X} - c|.$$

Пример 1.3.3. Произведем интервальное оценивание области значений функции $f(x) = x^2$ при $\mathbf{x} = [1, 5]$. Для этого воспользуемся дифференциальной центрированной и наклонной формами.

Определим точную область значений функции $f(x)$:

$$\text{ran}(f, [1, 5]) = [f(1), f(5)] = [1, 25].$$

Производная и наклон равны соответственно:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x, \\ f^\angle(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y. \end{aligned}$$

Найдем область значений производной $f'(x)$ на рассматриваемом интервале:

$$\text{ran}(f', [1, 5]) = \mathbf{f}'([1, 5]) = 2 \cdot ([1, 5]) = [2, 10].$$

Производная функции $f(x)$ на интервале $[1, 5]$ положительна, значит, на функция монотонно возрастает. Заметим, что в данном случае

найденная область значений производной $f'(x)$ совпала с ее естественным и оптимальным интервальными расширениями.

Вычислим дифференциальную центрированную форму (1.62) интервального расширения функции $f(x)$, варьируя положение точки c . Выберем три различных центра $c = \underline{x}$, $c = \bar{x}$ и $c = \text{mid } \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mv}([1, 5], 1) &= f(1) + \mathbf{f}'([1, 5])([1, 5] - 1) = [1, 41] && \text{при } c = \underline{x}, \\ \mathbf{f}_{mv}([1, 5], 3) &= f(3) + \mathbf{f}'([1, 5])([1, 5] - 3) = [-11, 29] && \text{при } c = \text{mid } \mathbf{x}, \\ \mathbf{f}_{mv}([1, 5], 5) &= f(5) + \mathbf{f}'([1, 5])([1, 5] - 5) = [-15, 25] && \text{при } c = \bar{x}. \end{aligned}$$

Теперь выполним вычисление наклонной формы (1.64) интервального расширения функции $f(x)$, также изменяя положение центра c :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{sl}([1, 5], 1) &= f(1) + \mathbf{f}^\angle([1, 5], 1)([1, 5] - 1) = [1, 25] && \text{при } c = \underline{x}, \\ \mathbf{f}_{sl}([1, 5], 3) &= f(3) + \mathbf{f}^\angle([1, 5], 3)([1, 5] - 3) = [-7, 25] && \text{при } c = \text{mid } \mathbf{x}, \\ \mathbf{f}_{sl}([1, 5], 5) &= f(5) + \mathbf{f}^\angle([1, 5], 5)([1, 5] - 5) = [-15, 25] && \text{при } c = \bar{x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, \underline{x}) &= [1, 41], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \underline{x}) &= [1, 25], \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [-11, 29], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [-7, 25], \\ \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, \bar{x}) &= [-15, 25], & \mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \bar{x}) &= [-15, 25]. \end{aligned}$$

Можно заметить, что $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \underline{x})$ совпала с точной областью значений функции $f(x) = x^2 = [1, 25]$. Этот результат не следует обобщать на случаи оценивания областей значений других функций, поскольку он является исключительно особенностью данного примера. ■

Из рассмотренного примера можно сделать три вывода. Во-первых, значение внешней оценки существенно зависит от центра разложения. Во-вторых, при одном и том же выбранном центре наклонная центрированная форма $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, c)$ приводит к получению более узкого интервала, который является областью значений интервальной функции, чем дифференциальная центрированная форма $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$. Можно показать что, всегда имеет место включение

$$\mathbf{f}^\angle(\mathbf{x}, c) \subseteq \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \quad (1.67)$$

В-третьих, можно заметить, что точная область значений функции получается в результате пересечения внешних оценок $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \underline{x})$ и $\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{x}, \bar{x})$.

Пересечение различных интервальных результатов, полученных при разложении относительно разных центров c — это прием, которым можно пользоваться почти всегда для получения наилучшей внешней оценки области значений функции. Однако гарантировать получение таким образом точной области значений функции невозможно.

1.3.4 Бицентрированная среднезначчная форма

Результаты, свидетельствующие о существовании оптимального выбора центра разложения и получении наилучшей внешней оценки области определения точечной функции как пересечения двух интервалов, приводят к идее построения конструкции, называемой *бицентрированной среднезначчной формой* интервального расширения функции f .

Определение 1.3.6 Будем называть выражение

$$\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c_\star) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c^*) \quad (1.68)$$

бицентрированной среднезначчной формой функции $f(x)$ на брусе \mathbf{x} .

Ответ на вопрос о происхождении и назначении точек c_\star и c^* дает

Теорема 1.3.3. (теорема Баумана) Пусть

$$\begin{aligned} p_i &:= \text{cut}\left(\frac{\text{mid } \mathbf{f}'_i(\mathbf{x})}{\text{rad } \mathbf{f}'_i(\mathbf{x})}, [-1, 1]\right), \\ (c_\star)_i &:= \text{mid } \mathbf{x}_i - p_i \cdot \text{rad } \mathbf{x}_i, \\ (c^*)_i &:= \text{mid } \mathbf{x}_i + p_i \cdot \text{rad } \mathbf{x}_i, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда

$\inf \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c)$ достигает своего максимума по c в точке c^* ,

$\sup \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c)$ достигает своего минимума по c в точке c_\star ,

$\text{rad } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c)$ достигает своего минимума по c в точке $\text{mid } \mathbf{x}$.

В теореме Баумана фигурирует функция *резки* $\text{cut} : \mathbb{R} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}$, действующая как

$$\text{cut}(x, \bar{x}) := \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } x > \bar{x}, \\ x, & \text{если } x < \underline{x}, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Когда $0 \notin f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и функция $f(x)$ является монотонной по всем переменным, то $p_i \in \{-1, 1\}$, c_* , c^* — угловые точки бруса \mathbf{x} и

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c_*) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c^*) = \square\{f(c_*), f(c^*)\} = \text{ran}\{f, \mathbf{x}\}.$$

Напоследок заметим, что в силу выполняющегося включения (1.67) еще более узкую внешнюю оценку области значений точечной функции $f(x)$, чем та, которую дает бицентрированная среднезначная форма, можно получить путем пересечения наклонных форм. Разумеется, уточнение внешней оценки будет достигаться за счет увеличения вычислительных затрат.

Пример 1.3.4. Вернемся к функции $f(x) = x^2$ и произведем интервальное оценивание области ее значений при $\mathbf{x} = [1, 5]$, используя бицентрированную среднезначающую форму (1.68).

Начнем с поиска величины

$$\frac{\text{mid } \mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\text{rad } \mathbf{f}'(\mathbf{x})} = 1.5.$$

Тогда

$$p_i := \text{cut}(1.5, [-1, 1]) = 1 \quad \rightarrow \quad c_* = 1, \quad c^* = 5.$$

Результат дальнейших действий нам уже известен (см. стр. 58):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mv}([1, 5]) &= f(1) + \mathbf{f}'([1, 5])([1, 5] - 1) = [1, 41] && \text{при } c_* = 1, \\ \mathbf{f}_{mv}([1, 5]) &= f(5) + \mathbf{f}'([1, 5])([1, 5] - 5) = [-15, 25] && \text{при } c^* = 5. \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c_*) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}, c^*) = [1, 25].$$

Итак, бицентрированная среднезначающая форма оценки позволила получить точную область значений функции $f(x) = x^2$. ■

1.4 Постановки и множества решений интервальных задач

Принципиальным аспектом применения интервального анализа является получение в результате проведения вычислений двусторонних ограничений. Как мы уже видели в §1.3.1, результат вычисления зависит от вида используемого выражения. В более общем контексте, результат вычислений является неким множеством, непустота и размер которого зависит от постановки задачи.

Для обсуждения постановок интервальных задач и их решений мы воспользуемся моделью, различные аспекты которой подробно обсуждаются в книге [45]. Эта модель описывает процесс математического моделирования статической системы как это принято в теории управления, на языке входов, «чёрного ящика» и выходов. При этом как входы, так и выходы имеют интервальные неопределённости и, кроме этого, разные свойства, что важно для постановок задач. Выбор различных типов входов и выходов позволяет ввести понятия «интервальная задача» и «множество решений интервальной задачи».

Рассмотрим некоторую статическую систему с входным сигналом a и выходным сигналом b . На внутреннее состояние этой системы x действуют возмущения, влияние которых мы имеем возможность и желаем минимизировать посредством соответствующих управлений для достижения системой необходимых характеристик функционирования.

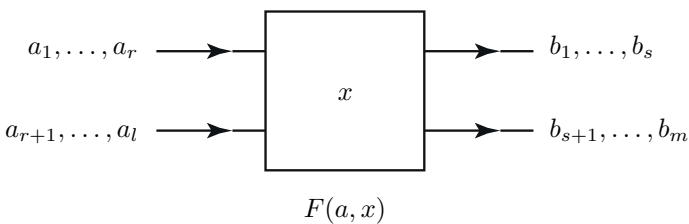


Рис. 1.5. Структурная схема статической системы управления [45].

Как сказано выше, входы и выходы могут иметь разную природу. На языке теории систем обозначим их следующим образом:

- *Возмущения (неконтролируемые неопределённости)* a_1, \dots, a_r находятся в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$.

- Параметры *управления* a_{r+1}, \dots, a_l можно задавать в интервалах $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_l$.
- За счёт выбора параметров управления для компонент b_1, \dots, b_s надо обеспечить попадание в любое значение из заранее заданных интервалов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$. Их называют *интервалами достижимости*, а выходы этого типа — *управляемыми*.
- Для *стабилизируемых* выходов обязательно надо попасть, независимо от значений внешних *возмущений* мы должны обеспечить факт попадание значений компонент b_{s+1}, \dots, b_m в интервалы $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$, называемые *интервалами стабилизации*.

Наличие и количество входов и выходов разной природы может быть различным, что порождает различные типы постановки задач и множества решений. В дальнейшем мы будем обращаться к схеме Рис. 1.5 при обсуждении частных случаев множеств решений интервальных задач, например в §1.4.4 и §1.4.5.

Наша задача — оценка внутреннего состояния x рассматриваемой статической системы для заданных входов a и выходов b .

Пусть внутреннее состояние x системы, входной сигнал a и выходной сигнал b описываются вещественными векторами $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^l$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что зависимость вход-состояние-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \quad (1.69)$$

с некоторым отображением $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$F(a, x) = \begin{pmatrix} F_1(a, x) \\ F_2(a, x) \\ \vdots \\ F_m(a, x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F_i(a, x) = F_i(a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Предполагаем, что выражения $F_i(a, x)$ являются функциональными выражениями, которые определены в области значений x и в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l$, а выходы b также имеют интервальную неопределенность. Тем самым задана *интервальная система уравнений*:

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \quad (1.70)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_l)^\top \in \mathbb{IR}^l$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{IR}^m$.

Выражение (1.70) формально описывает совокупность точечных систем уравнений $F(a, x) = b$ с коэффициентами $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Конкретный смысл (1.70) приобретает, когда определён смысл «решения» интервальной системы уравнений и то, какие эквивалентные преобразования системы допустимы.

1.4.1 Кванторный формализм и АЕ-множества решений интервальных систем уравнений

Что же представляет собой *решение интервальной системы уравнений*? Для ответа на этот вопрос переформулируем задачу оценки внутреннего состояния статической системы Рис. 1.5 следующим образом: «для каких состояний x система, функционально описываемая выражениями (1.70), удовлетворяет поставленным условиям на входы и выходы?»

Одним из способов описания поставленной задачи является использование языка *исчисления предикатов* с логическими кванторами \forall (квантор всеобщности, «для всех») и \exists (квантор существования, «существует»):

$$\begin{aligned} & (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \dots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \dots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) \\ & (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \dots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \dots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\ & \quad (F(a, x) = b). \end{aligned}$$

Будем использовать символ Ξ для обозначения множества всех состояний x , которые удовлетворяют выписаной формуле.

$$\begin{aligned} \Xi := \{x \in \mathbb{R}^n \mid & \\ & (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \dots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \dots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) \\ & (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \dots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \dots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\ & \quad (F(a, x) = b)\}. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Итак, множество Ξ можно назвать *множеством решений* интервальной системы уравнений (1.70). Таким образом, задача оценки внутреннего состояния системы x для заданных входов a и выходов b сводится к его *обнаружению и оцениванию*.

Определение 1.4.1 Логическая формула, выписанная после вертикальной черты в определении множества решений (1.71) и задающая

характеристическое свойство точек этого множества, называемое выделяющим предикатом соответствующего множества решений интервальной системы уравнений (1.70).

Из определения выделяющего предиката следует, что множество Ξ решений интервальной системы уравнений (1.70) не единственно. Если задана функциональная зависимость F и интервальные вектора a и b фиксированы, выбор логических кванторов « \forall » и « \exists » при различных параметрах a и b в (1.70) определяет конкретное *множество кванторных решений* интервальной системы уравнений.

Сильные и слабые свойства. Пусть имеется интервал v , обладающий некоторым свойством $P(v)$. Способ задания свойств точек интервала при этом не важен (уравнения, неравенства и т. д.). Рассмотрим важное понятие.

Если свойство $P(v)$ интервала v имеет место

- для *всех* точек заданного интервала, то $P(v)$ — *сильное свойство*. В этом случае пишут $(\forall v \in v)P(v)$ и говорят о *\forall -типе (A -типе) неопределенности*.
- для *некоторых* точек из интервала, не обязательно всех, то $P(v)$ является *слабым свойством*. Тогда пишут $(\exists v \in v)P(v)$, подразумевая *\exists -типе (E -типе) неопределенности*.

Для краткости интервальную неопределенность А-типа можно называть *интервальной А-неопределенностью*, а интервальную неопределенность Е-типа — *интервальной Е-неопределенностью*.

Таким образом, имеется два принципиально разных случая: в одном из них интервал v отождествляется с совокупностью всех своих точек, в другом — служит «внешними границами» некоторой величины, которая может принимать лишь некоторые значения из него.

Применительно к множествам решений системы (1.70) использование в выделяющем предикате кванторов « \forall » или \exists », относящиеся к различным интервальным параметрам порождает различные множества решений. Следует заметить, что кванторы разных типов не коммутируют друг с другом. В целом, различные сочетания логических кванторов и их порядок в выделяющем предикате порождает огромное количество самых разных множеств решений интервальной системы уравнений (1.70). Из всего этого многообразия наиболее изученным

является тип множеств решений с определенным порядком логических кванторов в выделяющем предикате — *множество АЕ-решений*, таких как множество Ξ (1.71).

Определение 1.4.2 Выделяющий предикат имеет АЕ-форму, если в нем все вхождения квантора всеобщности « \forall » предшествуют вхождениям квантора существования « \exists ».

Определение 1.4.3 Множества решений интервальных уравнений (неравенств и т. п.), для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму, называются множествами АЕ-решений (или АЕ-множествами решений).

Как описать для множеств АЕ-решений распределение различных типов неопределенности по интервальным параметрам системы уравнений (1.71)? Для этого существуют три способа:

1. Прямое указание кванторов

В записи (1.71) параметры задачи a, b представлены в векторном виде. Введём сопутствующие им векторы n -вектор $\alpha = (\alpha_i)$ и m -вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов:

$$\begin{aligned}\alpha_i &:= \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases} \\ \beta_i &:= \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases}\end{aligned}$$

Указание векторов α, β и интервальной системы уравнений (1.70) позволяет полностью определить множество АЕ-решений.

2. Разбиение индексных множеств компонент векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

Альтернативный способ — выделять не сами компоненты, а выделить два множества натуральных индексов. Зададим разбиение всего множества индексов i компонент a_i , т. е. множества $\{1, 2, \dots, l\}$, на две непересекающиеся части

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma} &:= \{\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_p\} \text{ и } \check{\Gamma} := \{\check{\gamma}_1, \check{\gamma}_2, \dots, \check{\gamma}_q\}, \\ \hat{\Gamma} \cup \check{\Gamma} &= \{1, 2, \dots, l\}, \quad p + q = l\end{aligned}$$

так, что

- a_i имеет интервальную А-неопределённость при $i \in \hat{\Gamma}$,
- a_i имеет интервальную Е-неопределённость при $i \in \check{\Gamma}$.

Аналогичным образом введём непересекающиеся множества натуральных индексов

$$\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_s\} \text{ и } \check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \check{\delta}_2, \dots, \check{\delta}_t\},$$

$$\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, m\}, \quad s + t = m$$

так, что

- b_i имеет интервальную А-неопределённость при $i \in \hat{\Delta}$,
- b_i имеет интервальную Е-неопределённость при $i \in \check{\Delta}$.

Если $\alpha = (\alpha_i)$ и $\beta = (\beta_i)$ — кванторные векторы, определённые в п. 1 данного списка, то

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall, & i \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & i \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

и задание $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ и $\check{\Delta}$ позволяет полностью описать соответствующее множество АЕ-решений интервальной системы уравнений. Некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ и $\check{\Delta}$ могут быть пустыми.

3. Дизъюнктное разложение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

Для алгебраического рассмотрения удобно оперировать непосредственно с интревальными векторами. В связи с этим, введём интервальные векторы $\mathbf{a}^{\forall} = (\mathbf{a}_i^{\forall})$ и $\mathbf{a}^{\exists} = (\mathbf{a}_i^{\exists})$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^{\forall} = (\mathbf{b}_i^{\forall})$ и $\mathbf{b}^{\exists} = (\mathbf{b}_i^{\exists})$ тех же размеров, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, следующим образом:

$$\mathbf{a}_i^{\forall} := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \alpha_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_i^{\exists} := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \alpha_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_i^{\forall} := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^{\exists} := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Тогда для любого i

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}, \quad \mathbf{a}^{\forall} \cdot \mathbf{a}_i^{\exists} = 0, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}, \quad \mathbf{b}^{\forall} \cdot \mathbf{b}_i^{\exists} = 0.\end{aligned}$$

Интервальные элементы системы, соответствующие неопределенности А-типа, оказываются сосредоточены в векторах \mathbf{a}^{\forall} и \mathbf{b}^{\forall} , а неопределенности Е-типа — в векторах \mathbf{a}^{\exists} и \mathbf{b}^{\exists} .

Все три рассмотренные группы объектов находятся во взаимно однозначном соответствии.

Определение 1.4.4 Пусть для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ распределение типов неопределённости по интервальным элементам параметров \mathbf{a} и \mathbf{b} задаётся кванторными векторами α и β , соответствующими разбиениями индексных множеств векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} или дизьюнктными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$.

Множество

$$\begin{gathered}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_{\gamma_1} \in \mathbf{a}_{\gamma_1}) \dots (\forall a_{\gamma_p} \in \mathbf{a}_{\gamma_p})(\forall b_{\delta_1} \in \mathbf{b}_{\delta_1}) \dots (\forall b_{\delta_s} \in \mathbf{b}_{\delta_s}) \\ (\exists a_{\tilde{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\tilde{\gamma}_1}) \dots (\exists a_{\tilde{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\tilde{\gamma}_q})(\exists b_{\tilde{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\tilde{\delta}_1}) \dots (\exists b_{\tilde{\delta}_t} \in \mathbf{b}_{\tilde{\delta}_t}) \\ (F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b})\}\end{gathered}$$

будем называть множеством AE -решений типа $\alpha\beta$ для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и обозначать через $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Теперь, когда мы установили, что представляет собой «решение» интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ (1.70), кратко обсудим вопрос об эквивалентности преобразований над ней. Если над точечной системой уравнений $F(a, x) = b$, $a \in \mathbf{a}$, $b \in \mathbf{b}$ мы осуществляем какие-то эквивалентные преобразования, не изменяющие символы переменных x и параметров a , b , то множество истинности выделяющего предиката относительно x остается неизменным. Тогда, получая в результате преобразований систему уравнений $\tilde{F}(a, x) = b$ и находя соответствующую ей интервальную систему $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, мы можем быть уверены в том, что множества решений систем $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ совпадают.

1.4.2 Множества АЕ-решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений

До настоящего момента мы говорили только о таких интервальных системах уравнений, левая часть которых содержит интервальный вектор $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top$, и не уточняли, каким именно элементарным функциональным выражением задана зависимость F .

Перейдем к рассмотрению *интервальных систем линейных алгебраических уравнений* (ИСЛАУ) вида

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}x_1 + \mathbf{a}_{m2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (1.72)$$

с интервалами \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_j , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, или, кратко,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1.73)$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ — интервальная матрица размеров $m \times n$, а $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ является интервальным m -вектором.

Понятия и обозначения, введенные ранее при описании интервальной системы уравнений (1.70), **естественным образом** переносятся на случай ИСЛАУ: разница заключается лишь в том, что величины, имеющие отношение к интервальному вектору \mathbf{a} , становятся матричными.

Определение 1.4.5 Множества АЕ-решений (или АЕ-множества решений) — это множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму, т. е. такой, что все вхождения кванторов всеобщности « \forall » предшествуют в нем вхождениям кванторов существования « \exists ».

Для множеств АЕ-решений ИСЛАУ можно использовать описание соответствия типов неопределённости интервальным элементам системы уравнений рассмотренными выше равнозначными способами:

1. указанием кванторной матрицы \mathcal{A} и кванторного вектора правой части β для системы (1.73),
2. разбиением индексных множеств матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} системы (1.73) на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$, соответствующие элементам с А- и Е-неопределенностями,

3. дизъюнктными разложениями интервальной матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} на слагаемые \mathbf{A}^{\forall} , \mathbf{A}^{\exists} , \mathbf{b}^{\forall} и \mathbf{b}^{\exists} , отвечающие А- и Е-неопределенностям системы (1.73).

Определение 1.4.6 Пусть для интервальной $m \times n$ -системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ распределение типов интервальной неопределенности задается кванторными $m \times n$ -матрицей \mathcal{A} и m -вектором β , а также ассоциированными с ними разбиениями индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} := \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$, $r + s = m$.

Множеством АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$ интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ назовем множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \dots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \dots (\forall b_{\hat{\delta}_r} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_r}) \\ (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \dots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \dots (\exists b_{\check{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_s}) \\ (Ax = b)\} \end{aligned} \quad (1.74)$$

или, что эквивалентно, множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \\ (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall \check{A} \in \mathbf{A}^{\exists})(\exists \hat{b} \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^{\exists}) \\ ((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$ – соответствующие дизъюнктные разбиения матрицы ИСЛАУ и ее правой части.

Множества АЕ-решений интервальных систем линейных уравнений можно описывать и другими равносильными способами. Например, множество $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.74) представимо в виде

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^{\forall}} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^{\exists}} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^{\exists}} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b} \right\}. \quad (1.75)$$

Аналитическая характеристика множеств АЕ-решений ИСЛАУ. Важным инструментом исследования решений является аналитическая характеристика множеств АЕ-решений ИСЛАУ.

Фундаментальным результатом теории в этом вопросе является следующая теорема [35].

Теорема 1.4.1. Точка x принадлежит множеству решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x, \quad (1.76)$$

где « \cdot » — интервальное матричное умножение.

Эта теорема обобщает все частные характеристизации для различных множеств решений ИСЛАУ: для объединённого, допускового и управляющего (см. [45]).

Условие теоремы 1.4.2 можно переформулировать в виде линейных неравенств с модулями:

Теорема 1.4.2. (характеризация Рона множеств АЕ-решений) Точка x принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| \leq (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}).$$

Таким образом, если $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, то под решением интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (1.73), характеризуемой кванторной матрицей \mathcal{A} и вектором β тех же размеров, что \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, мы будем понимать *поиск внешней и внутренней интервальных оценок* множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Установление пустоты или непустоты различных множеств АЕ-решений является весьма важным вопросом, требующего отдельного обсуждения.

Заметим также, что конструкция (1.76) указывает на возможность характеристики ИСЛАУ более общего типа. Для этого необходимо использование более общей алгебраической системы, полной интервальной арифметики (Каухера), см. §2.3. Тогда конструкция (1.76) переформулируется в виде (2.19) и даёт возможность применения дополнительных методов получения оценок множеств решений.

1.4.3 Частные случаи множеств АЕ-решений и частичный порядок на множестве логических кванторов

Как уже было упомянуто, семейство множеств кванторных решений интервальных систем уравнений весьма обширно. В частности, в се-

мейство множеств АЕ-решений интервальных линейных систем (1.73) входят $2^{m(n+1)}$ множеств, из которых заведомо непустыми являются $2^{m(n+1)} - (2^m - 1)$ множеств (Пусты 2^m множеств с кванторами \forall в векторе β). Тогда, оказывается, для ИСЛАУ с матрицей A размером 3×3 необходимо рассматривать 4089 непустых множеств АЕ-решений!

По этой причине для интервальных линейных систем вида (1.73) принято выделять три частных случая, представляющие собой крайние точки всего семейства множеств АЕ-решений:

- обединённое множество решений

$$\Xi_{uni}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (1.77)$$

- допусковое множество решений

$$\Xi_{tol}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (1.78)$$

- управляемое множество решений

$$\Xi_{ctl}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b)\}. \quad (1.79)$$

Четвертая крайняя точка

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax = b)\},$$

представляет больший интерес при рассмотрении интервальных неравенств.

Размеры различных АЕ-множеств решений ИСЛАУ. Для практики очень важен вопрос как соотносятся между собой размеры различных АЕ-множеств решений ИСЛАУ (1.73). Введём частичный порядок « \preceq » на множестве логических кванторов $\{\forall, \exists\}$:

$$\forall \preceq \exists. \quad (1.80)$$

Отношения $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}'$, $\beta \preceq \beta'$ поимаются покомпонентно и поэлементно. Тогда для любых A и b справедливо

$$\mathcal{A}\beta \preceq \mathcal{A}'\beta' \Rightarrow \Xi_{\mathcal{A}\beta}(A, b) \subseteq \Xi_{\mathcal{A}'\beta'}(A, b). \quad (1.81)$$

Рассмотрим, как меняются АЕ-множества решений ИСЛАУ при изменении кванторной матрицы \mathcal{A} и вектора β .

Пример 1.4.1. Данна интервальная система линейных уравнений [14]

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Будем изменять кванторную матрицу \mathcal{A} и проследим, как эти изменения отражаются на множествах АЕ-решений.

Выберем несколько сочетаний кванторных матрицы \mathcal{A} и вектора β :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \forall & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}.$$

Комбинации кванторных матрицы и вектора $\mathcal{A}_1\beta_1$, $\mathcal{A}_2\beta_2$ и $\mathcal{A}_3\beta_3$ входят в определения объединенного (1.77), допускового (1.78) и управляемого (1.79) множеств решений ИСЛАУ, соответственно. Четвертая комбинация кванторных матрицы и вектора выбрана произвольной.

Множества решений $(x_1, x_2)^\top$, соответствующие каждому из сочетаний кванторных матрицы \mathcal{A} и вектора β , представлены на Рис. 1.6(а). Уточним, что этот рисунок следует понимать как многослойный, т. е. различные множества АЕ-решений визуально накладываются друг на друга. Пунктирной линией на Рис. 1.6(а) показаны границы той части множества $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которую «накрывает» управляемое множество АЕ-решений ИСЛАУ. **Проверено**

Как мы видим на Рис. 1.6(а), среди четырех множеств АЕ-решений объединенное множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является самым широким, а допусковое $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — самым узким. Объяснить полученный результат можно следующим образом: множество АЕ-решений расширяется при «ослаблении» (в смысле порядка) кванторов в выделяющем предикате.

В качестве подтверждения данного утверждения заменим в кванторной матрице \mathcal{A}_4 один из кванторов « \exists » на квантор « \forall »

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$$

и увидим, что множество $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, показанное на Рис. 1.6(б), действительно уменьшилось в размере по сравнению с тем множеством на Рис. 1.6(а), которое соответствует прежней кванторной матрице \mathcal{A}_4 . ■

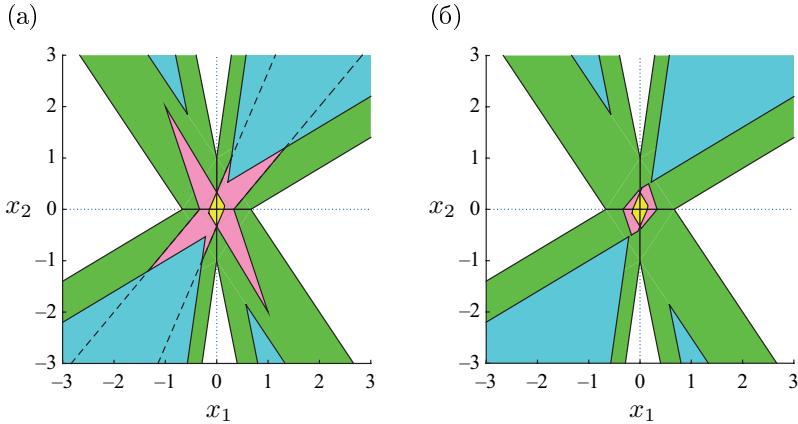


Рис. 1.6. Множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (зеленый цвет), $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (голубой цвет) и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (желтый цвет) ИСЛАУ (1.82), построенные с использованием функции MixQtr2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]. Розовым цветом выделено множество $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Кванторные матрицы $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$ (а) и $\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \forall & \forall \\ \exists & \forall \end{pmatrix}$ (б)

Пример 1.4.2. Попробуем для ИСЛАУ (1.82) изменять кванторный вектор β при неизменной кванторной матрице \mathcal{A} .

Выберем следующую кванторную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}$$

и будем дополнять ее одним кванторным вектором β из набора

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \forall \\ \exists \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} \exists \\ \forall \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} \forall \\ \forall \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.7(а) показаны множества АЕ-решений ИСЛАУ (1.82) $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующие комбинациям кванторных матрицы и вектора $\mathcal{A}\beta_1$ и $\mathcal{A}\beta_4$. Множества $\Xi_{\mathcal{A}\beta_2}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{\mathcal{A}\beta_3}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ представлены на Рис. 1.7(б). Пунктирной линией на Рис. 1.7(б) показаны границы той части множества $\Xi_{\mathcal{A}\beta_3}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которая оказалась «накрытой» множеством $\Xi_{\mathcal{A}\beta_2}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Как и ожидалось, объединенное множество решений является самым широким множеством АЕ-решений ИСЛАУ, а управляемое мно-

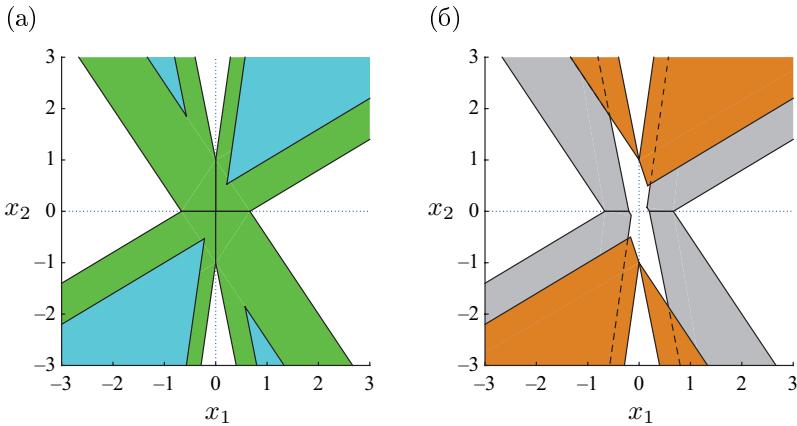


Рис. 1.7. Множества АЕ-решений ИСЛАУ (1.82), соответствующие кванторной матрице $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \exists & \exists \\ \exists & \exists \end{pmatrix}$ и различным кванторным векторам β_1 (зеленый цвет) и β_4 (голубой цвет) (а), β_2 (оранжевый цвет) и β_3 (серый цвет) (б). Для построения множеств АЕ-решений была использована функция `MixQtr2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27]

жество решений — самым узким. Причиной этому является расширение множества АЕ-решений при «ослаблении» кванторов в выделяющем предикате, однако в отличие от предыдущего примера замена кванторов « \forall » на кванторы « \exists » производилась не в кванторной матрице \mathcal{A} , а в кванторном векторе β . Тем не менее, результат оказался аналогичным, и мы проследили последовательное превращение объединенного множества решений в управляемое множество решений ИСЛАУ. ■

Пример 1.4.3. Вернемся к ИСЛАУ (1.82), для которой выберем определенное сочетание кванторных матрицы и вектора:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \forall & \exists \\ \forall & \exists \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \forall \\ \exists \end{pmatrix}.$$

В этом случае множество АЕ-решений ИСЛАУ (1.82) будет состоять только из двух точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

Обсудим полученное множество АЕ-решений ИСЛАУ:

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathcal{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall A_{11} \in \mathcal{A}_{11})(\forall A_{21} \in \mathcal{A}_{21})(\forall b_{11} \in \mathbf{b}_{11}) \\ (\exists A_{12} \in \mathcal{A}_{12})(\exists A_{22} \in \mathcal{A}_{22})(\exists b_{21} \in \mathbf{b}_{21})(Ax = b)\}.$$

Проанализируем, как формируется данное АЕ-множество решений ИСЛАУ. Тот факт, что $x_1 = 0$, позволяет исключить из рассмотрения элементы A_{11} и A_{21} интервальной матрицы A и элементы A_{11} и A_{21} кванторной матрицы \mathcal{A} .

Тогда

- (1) равенство произведения некоторого элемента (точечного или интервального), принадлежащего A_{12} , и x_2 должно выполняться для каждого элемента из b_{11} ,
- (2) равенство произведения некоторого элемента, принадлежащего A_{22} , и x_2 должно выполняться для некоторого элемента из b_{21} .

Подставим точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ в ИСЛАУ (1.82):

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-5, 2] \\ [-3, -1] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 5] \\ [1, 3] \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем существенное различие между уравнениями ИСЛАУ, вносимое выбором кванторного вектора β :

$$\begin{aligned} \beta_1 = \forall & \quad [-5, 2] \supseteq b_1 & [-2, 5] \supseteq b_1 & \quad b_1 = [-2, 2], \\ \beta_2 = \exists & \quad [-3, -1] \cap b_2 = -1 & [1, 3] \cap b_2 = 1, & \quad b_2 = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Для уравнения $A_{12} \cdot x_2 = b_1$ имеет место включение интервала b_1 в интервальнозначные результаты подстановки точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$ в ИСЛАУ (1.82). В то же время для уравнения $A_{22} \cdot x_2 = b_2$ происходит лишь пересечение интервала b_2 с интервалами-результатами подстановки, результатом которого является одна из границ b_2 . Поэтому, если мы заменим в выбранном кванторном векторе β квантор « \exists » на « \forall », оставив неизменной при этом кванторную матрицу \mathcal{A} , то решение ИСЛАУ (1.82) окажется пустым множеством. ■

1.4.4 Управляемое множество решений интервальных уравнений

Рассмотрим управляемое множество решений интервальных линейных систем $\Xi_{ctl}(A, b)$ (1.79), которое образовано всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать матрицу

$A \in \mathbf{A}$, удовлетворяющую $Ax = b$. Это множество решений носит название управляемого потому, что является множеством решений задачи оценивания внутреннего состояния статической системы управления, обсуждавшейся в начале раздела 1.4, для случая, когда все входы системы оказываются управляемыми, а все выходы — управляемыми.

В силу теоремы об аналитической характеризаций АЕ-множеств решений интервальных систем линейных уравнений (1.76)

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x,$$

мы можем дать эквивалентное определение управляемого множества решений в виде

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{A}x \supseteq \mathbf{b})\},$$

если учтем, что для управляемого множества решений $\mathbf{A}^{\forall} = 0$ и $\mathbf{b}^{\exists} = 0$.

Перечислим некоторые особенности управляемого множества решений ИСЛАУ:

1. Как нам уже известно,

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

и если \mathbf{A} — неособенная интервальная матрица, то $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ограничено одновременно с $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

2. Нулевой вектор может принадлежать управляемому множеству решений только в том случае, если $\mathbf{b} = 0$, т. е. $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{A} \cdot 0 = 0$.

Рассмотрим, какие существуют способы исследования управляемого множества решений ИСЛАУ. Сначала надо установить его пустоту или непустоту.

Теорема 1.4.3. (теорема Лакеева-Носкова [16]) Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит управляемому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$, где векторы $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \frac{\underline{\mathbf{A}}x'}{\overline{\mathbf{A}}x''} \leq \frac{\mathbf{b}}{\bar{\mathbf{b}}}, \\ -\frac{\overline{\mathbf{A}}x'}{\underline{\mathbf{A}}x''} \leq -\frac{\mathbf{b}}{\underline{\mathbf{b}}}, \\ x', x'' \geq 0, \end{cases} \quad (1.83)$$

а также условию дополнительности $(x')^\top x'' = 0$.

Для оценки непустоты управляющего множества решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и определения количественной меры того, насколько устойчивым является совместность получаемого решения ИСЛАУ, можно использовать критерий, основанный на функционале Рачека χ (1.23).

Теорема 1.4.4. Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены условия

$$(i) \quad \mathbf{b}_i \neq 0,$$

$$(ii) \quad -1 < \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \leq \chi(\mathbf{b}_i).$$

Если «средняя система» линейных уравнений $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ совместна, то её решение принадлежит управляемому множеству решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (которое, соответственно, непусто).

Характеристикой совместности решения ИСЛАУ, представляемого множеством $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т. е. степени ее разрешимости, может служить близость к нулю величины

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0. \quad (1.84)$$

Существенным недостатком теоремы о принадлежности решения «средней системы» линейных уравнений управляемому множеству решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ является ее недостаточная чувствительность как признака непустоты управляемого множества. Проиллюстрируем это утверждение двумя примерами.

Пример 1.4.4. Рассмотрим ИСЛАУ вида (1.73), в которой

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [1, 3] & [6, 7] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Очевидно, что заданная ИСЛАУ удовлетворяет требованиям $\mathbf{b}_i \neq 0$ и $\mathbf{a}_{ij} \neq 0$, которые сформулированы в условии теоремы 1.4.4.

Вычислим функционалы Рачека (1.23) для всех элементов интервальных матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} ИСЛАУ:

$$\begin{aligned} -1 &< \max \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{1}{2}, \\ -1 &< \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Как мы видим, условие (ii) теоремы о решении «средней системы» для второго неравенства не выполняется. Тем не менее, точка $(1, \frac{3}{13})$, являющаяся решением «средней системы»

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 2 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

принадлежит непустому управляемому множеству решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.85), которое показано на Рис. 1.8 заливкой зеленым цветом. Положение точки $(1, \frac{3}{13})$ на Рис. 1.8 отмечено красным крестиком.

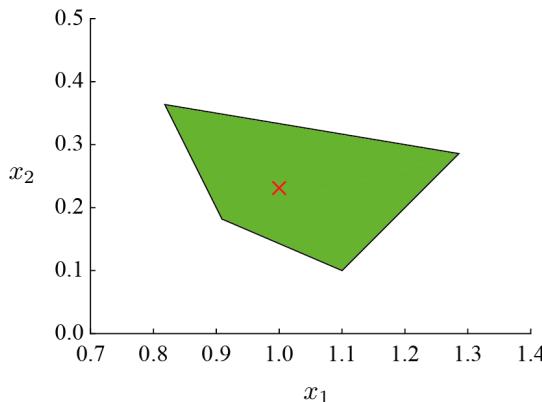


Рис. 1.8. Управляемое множество решений ИСЛАУ (1.85) с выделенным решением «средней системы» ($\text{mid } \mathbf{A}$) $x = \mathbf{b}$. Для построения множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ была использована функция EqnCtl2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

■

Пример 1.4.5. Данна ИСЛАУ вида (1.73), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-1, 0] & [0, 1] \\ [0, 1] & [1, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

И условие (i), и условие (ii) теоремы о принадлежности решения «средней системы» ($\text{mid } \mathbf{A}$) $x = \mathbf{b}$ управляемому множеству решений

для данной ИСЛАУ выполняются:

$$-1 < \max\{0, 0\} \leq 1,$$

$$-1 < \max\left\{0, \frac{1}{2}\right\} \leq 1.$$

Управляемое множество решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.86) состоит всего лишь из двух точек $(0, 1)$ и $(0, 2)$.

Найдем решение ее «средней системы»

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Им является точка $(-0.5, 1.5)$, которая не принадлежит управляемому множеству решений ИСЛАУ (1.86).

Проверим принадлежность точки $(-0.5, 1.5)$ управляемому множеству решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.86), используя условия, сформулированные в теореме Лакеева-Носкова. Для этого представим вектор $x = (-0.5, 1.5)^\top$ как разность двух векторов x' и x'' :

$$x = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = x' - x''.$$

Можно убедиться в том, что

$$x' \geq 0, \quad x'' \geq 0, \quad (x')^\top x'' = (0.0 \quad 1.5) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = 0.$$

Подставим найденные вектора x' и x'' в неравенства системы (1.83):

$$\underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix},$$

$$-\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} 0.0 & -1.0 \\ -1.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -3.0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}},$$

$$-\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} -1.0 \\ -2.0 \end{pmatrix} = -\bar{\mathbf{b}}.$$

Получается, что согласно теореме Лакеева-Носкова точка $(-0.5, 1.5)$ принадлежит управляемому множеству решений ИСЛАУ (1.86). ■

Пример 1.4.6. Рассмотрим три ИСЛАУ с одинаковым интервальным вектором правой части \mathbf{b} :

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}, \quad (1.87a)$$

$$\begin{pmatrix} [-2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}, \quad (1.87b)$$

$$\begin{pmatrix} [-2, 5] & [1, 2] \\ [-7, 5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [4, 7] \end{pmatrix}. \quad (1.87c)$$

Интервальная матрица \mathbf{A} ИСЛАУ (1.87a) отличается от интервальной матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ (1.87b) тем, что элемент последней A_{11} является нульсодержащим. В матрице \mathbf{A} ИСЛАУ (1.87c) нульсодержащими по сравнению с матрицей \mathbf{A} ИСЛАУ (1.87a) являются уже два интервальных элемента A_{11} и A_{21} .

Проверим выполнение условий (i) и (ii) теоремы 1.4.4

$$\text{для ИСЛАУ (1.87a): } -1 < \max \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.87b): } -1 < \max \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.87c): } -1 < \max \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ -\frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{4}{7}.$$

Заметим, что условие (ii) не выполняется ни для одной из ИСЛАУ.

Рассчитаем для четырех ИСЛАУ значения величины $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.84),

играющей роль «показателя совместности»:

$$\text{для ИСЛАУ (1.87a): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.87b): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7},$$

$$\text{для ИСЛАУ (1.87c): } \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right\} = -\frac{2}{7}.$$

Несмотря на то, что значения величины $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ одинаковы и отрицательны, множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.87a)–(1.87c), представленные на Рис. 1.9, непусты и различаются по размеру. Уточним, что данное изображение управляемых множеств решений нужно понимать как многослойное: множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.87b) и ИСЛАУ (1.87c) визуально «накладываются» друг на друга.

Однако, как мы убедились, для каждой из интервальных систем уравнений (1.87a)–(1.87c) происходит нарушение условия (ii) теоремы о принадлежности решения «средней системы» управляемому множеству решений ИСЛАУ. Значит, если условия (i) и (ii) теоремы 1.4.4 не выполняются, использование величины $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ для характеризации устойчивости совместности решения ИСЛАУ не приводит к получению достоверной информации о степени ее разрешимости. Например, в случае ИСЛАУ (1.82) нарушены оба условия теоремы 1.4.4, однако ее управляемое множество решений непусто и показано на Рис. 1.6.

Вернемся к ИСЛАУ (1.87a) и заменим в ней элемент b_2 интервального вектора правой части \mathbf{b} на интервал $[7, 8]$:

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Для данной ИСЛАУ выполняются оба условия теоремы 1.4.4:

$$-1 < \max \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{3}{4},$$

$$-1 < \max \left\{ \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\} \leq \frac{7}{8},$$

и положительно значение «показателя совместности»

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \frac{7}{8} - \frac{6}{7} \right\} = \frac{1}{56}.$$

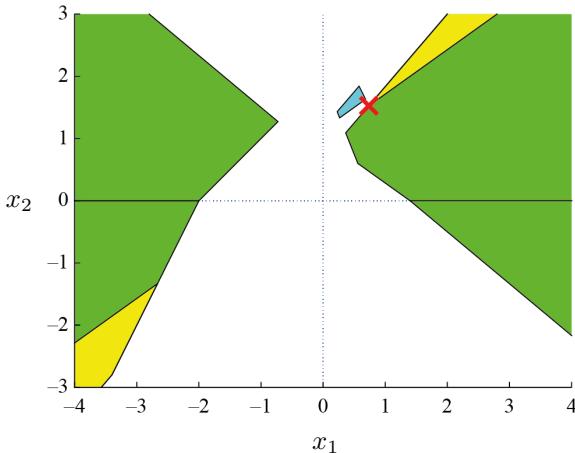


Рис. 1.9. Множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ решений ИСЛАУ:

(1.87b) (желтый цвет), ИСЛАУ (1.87c) (зеленый цвет), а также ИСЛАУ (1.87a) с интервальным элементом $\mathbf{b}_2 = [7, 8]$ (голубой цвет).

Множество $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.87a) представлено единственной точкой $(0.737, 1.526)$, положение которой отмечено красным крестиком. Для построения множеств $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ была использована функция EqnCtl12D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

Непустое управляемое множество решений ИСЛАУ (1.87a) с измененным элементом \mathbf{b}_2 также показано на Рис. 1.9. ■

1.4.5 Допусковое множество решений интервальных уравнений

Возвращаясь к теореме об аналитической характеристизации множеств АЕ-решений ИСЛАУ (1.76), можно утверждать, что эквивалентным определением допускового множества решений (1.78) является

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}\}, \quad (1.88)$$

т. е. множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ образовано всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение \mathbf{Ax} попадает в \mathbf{b} для любой $A \in \mathbf{A}$.

Данное множество АЕ-решений называется допусковым по той причине, что оно является множеством решений задачи оценивания внут-

ренного состояния статической системы управления, структурная схема которой показана на Рис. 1.5, для случая, когда все входные воздействия являются возмущающими, все выходы — стабилизируемыми; при этом входные и выходные отклики связаны между собой линейной зависимостью. Допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ высоко востребовано для разнообразных практических приложений и обладает таким важным достоинством, как наибольшая устойчивость к возмущениям среди всех АЕ-множеств решений.

Введение частичного порядка « \preceq » на множестве логических квантов $\{\forall, \exists\}$ (1.80) позволило нам убедиться в том, что допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ уже управляемого множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и тем более объединенного множества АЕ-решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ. Достаточно часто допусковое множество решений оказывается пустым: произведение $\mathbf{A}x$ может быть слишком «широким» и потому не «умещаться» в вектор правой части \mathbf{b} .

Зададимся вопросом о том, каким образом можно описать допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ — установить принадлежность ему некоторой точки x или же пустоту/непустоту этого множества. В частности, последний вопрос крайне важен для решения интервальной линейной задачи о допусках, обсуждающейся в разделе 1.6, для исследования ее разрешимости.

Теорема 1.4.5. (теорема И. А. Шарой о строении допускового множества решений [26]) Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда она является решением системы двусторонних линейных неравенств

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i \leq ax \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ a \in \text{vert } \mathbf{A}_i, \\ i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.89)$$

где вектор-строки a пробегают все возможные вершины интервальных строк матрицы \mathbf{A} . Количество неравенств в этой системе не превосходит суммы числа вершин во всех интервальных векторах $\text{vert } \mathbf{A}_i$, $i = 1, \dots, m$, и, тем более, не превосходит $m \cdot 2^n$.

Теорема 1.4.6. (теорема Рона о допусковом множестве решений [57]) Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$, где n -векторы x' и x'' удовлетворяют системе линейных

неравенств

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \bar{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (1.90)$$

Пример 1.4.7. Установим принадлежность точки $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)^\top$ допусковому множеству решений следующей ИСЛАУ, используя условия теорем И. А. Шарой и Рона:

$$\begin{pmatrix} [-7, -3] & [-3, -1] \\ [2, 4] & [1, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Выпишем точечные матрицы, необходимые для записи системы двусторонних линейных неравенств:

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система из восьми ($2 \cdot 2^2 = 8$) линейных неравенств (1.89), фигурирующая в теореме И. А. Шарой, примет вид:

$$\begin{cases} -1 \leq -7x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -3x_1 - x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -7x_1 - x_2 \leq 3, \\ -1 \leq -3x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -5 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ -5 \leq 4x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ -5 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ -5 \leq 4x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Подстановка значений $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = -\frac{4}{3}$ позволяет установить, что точка $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ действительно принадлежит допусковому множеству решений ИСЛАУ (1.91). Более того, как показывает выполнение третьего и четвертого неравенств системы, эта точка является вершиной допускового множества решений. Множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.91) с отмеченной точкой $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ представлено на Рис. 1.10.

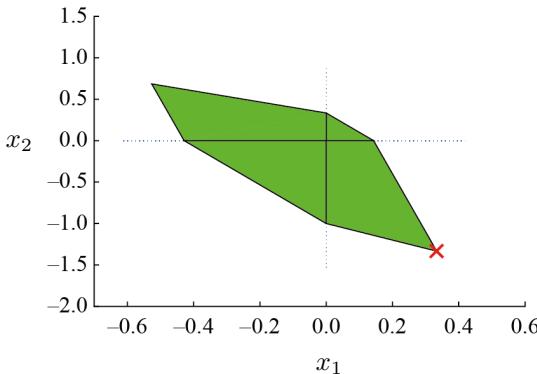


Рис. 1.10. Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.91) с выделенной вершиной $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$. Для построения множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ была использована функция EqnTo1D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

Перейдем к выполнению проверки принадлежности выбранной точки допусковому множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ с использованием условий, сформулированных в теореме Рона. Представим вектор $x = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})^\top$ как разность двух векторов $x', x'' \geq 0$:

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Подставим найденные вектора x' и x'' в неравенства системы (1.90):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \bar{\mathbf{A}}x'' &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\bar{\mathbf{b}}. \end{aligned}$$

Как показывают результаты вычислений, точка $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ удовлетворяет условиям теоремы Рона (1.90) и, следовательно, принадлежит допусковому множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.91). ■

«Антагонизм» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ Рассмотрим интересную связь между двумя множествами $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которая выражается в их поочередном

существовании для одной и той же ИСЛАУ при выполнении определенных условий, накладываемых на интервальные элементы матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} . Вывод об «антагонистическом сосуществовании» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ можно сделать, например, на основе результатов сравнения систем линейных неравенств (1.83) и (1.90), которые фигурируют в теоремах Лакеева-Носкова и Рона (см. стр. 76 и стр. 84, соответственно):

$$\begin{array}{ll} x \in \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) & x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}'' \leq \underline{\mathbf{b}} & \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}'' \geq \underline{\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}' - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}'' \geq \bar{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}' - \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}'' \leq \bar{\mathbf{b}} \end{array}$$

В фокусе нашего внимания будут находиться критерии пустоты (или непустоты) множеств $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, основанные на функционале Рачека. Формулировка условий, выполнение которых необходимо для непустоты управляемого множества решений ИСЛАУ и принадлежности ему решения «средней системы» ($\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$, приведена на стр. 77. Для допускового множества решений ИСЛАУ также существуют условия его пустоты, основанные на сравнении «относительной узости» элементов интервальных матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} .

Теорема 1.4.7. Пусть в системе уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены следующие условия

$$(i) \quad 0 \notin \mathbf{b}_i,$$

$$(ii) \quad \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} < \chi(\mathbf{b}_i).$$

Тогда допусковое множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ пусто.

Сравним между собой условия (i) и (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7. Верхние строки в нижеприведенной записи относятся к критерию непустоты управляемого множества решений, а нижние — соответствуют критерию пустоты допускового множества решений ИСЛАУ.

условие (i) $\mathbf{b}_i \neq 0$,

$$0 \notin \mathbf{b}_i,$$

условие (ii) $-1 < \max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \leq \chi(\mathbf{b}_i)$,

$$\max \{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} < \chi(\mathbf{b}_i),$$

Оказывается, что условие непустоты множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ «отражает» условие пустоты множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Обсуждению устойчивости обнаруженной антагонистической связи между двумя АЕ-множествами решений ИСЛАУ и вкладе выполнения каждого из условий (i) и (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7 в ее поддержание посвящен следующий

Пример 1.4.8. Вернемся к рассмотрению ИСЛАУ (1.87а) с измененным элементом \mathbf{b}_2 :

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

Как нам уже известно (см. стр. 81), элементы интервальных матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} ИСЛАУ (1.92) удовлетворяют обоим условиям теоремы 1.4.4, причем имеет место $0 \notin \mathbf{b}_1, 0 \notin \mathbf{b}_2$. Управляемое множество решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ данной ИСЛАУ показано на Рис. 1.9, а допусковое множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является пустым.

Теперь рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [-3, 7] & [-1, 3] \\ [-1, 4] & [-2, 1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

Можно убедиться в том, что для интервалов, являющихся элементами матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} ИСЛАУ (1.93), выполняются условия (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7

$$\begin{aligned} -1 &< \max \left\{ -\frac{3}{7}, -\frac{1}{3} \right\} \leq -\frac{1}{3}, \\ -1 &< \max \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right\} \leq -\frac{1}{5}, \end{aligned}$$

однако не выполняется условие $0 \notin \mathbf{b}_i, i = 1, 2$. Как результат, управляемое и допусковое множества решений ИСЛАУ (1.93), представленные на Рис. 1.11(а), одновременно непусты.

Почему это происходит? Для ответа на данный вопрос выберем некоторую произвольную точку $(0.3, 1.4)$ из управляемого множества решений ИСЛАУ (1.92), «антагонизм» множеств $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ которой мы наблюдаем, и подставим ее в ИСЛАУ:

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} [2.0, 4.3] \\ [6.3, 8.3] \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\chi([2.0, 4.3]) = 0.465 < 0.750 = \chi([3, 4]),$$

$$\chi([6.3, 8.3]) = 0.759 < 0.875 = \chi([7, 8]).$$

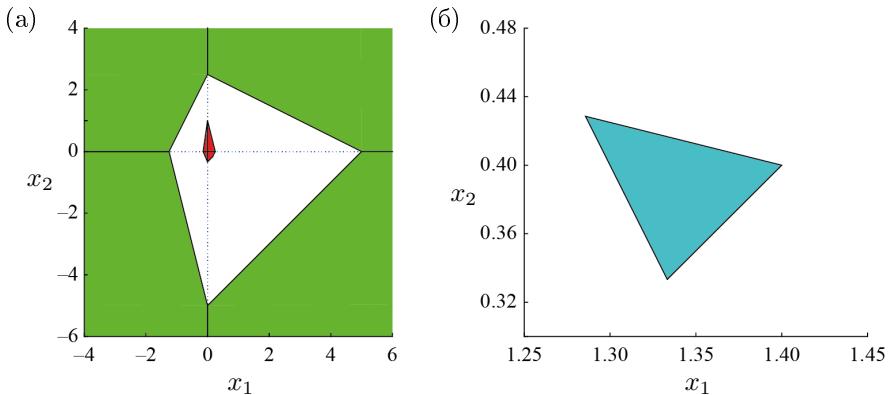


Рис. 1.11. Управляемое (зеленый цвет) и допусковое (красный цвет) множества решений ИСЛАУ (1.93) (а) и управляемое множество решений ИСЛАУ (1.94) (б). Данные множества АЕ-решений были построены с использованием функции EqnTo12D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

Можно заметить, что если $\mathbf{A}x \supseteq \mathbf{b}$, то $\chi((\mathbf{A}x)_i) < \chi(\mathbf{b}_i)$, причем $\chi(\mathbf{b}_i) > 0$. Напротив, если $\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$, то для существования непустого допускового множества решений должно иметь место $\chi((\mathbf{A}x)_i) > \chi(\mathbf{b}_i)$.

Теперь выберем некоторую точку из допускового множества решений ИСЛАУ (1.93) — например, точку $(0.1, 0.2)$. В таком случае

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} [-0.5, 1.3] \\ [-0.5, 0.6] \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-5, 1] \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

$$\chi([-0.5, 1.3]) = -0.385 < -0.333 = \chi([-1, 3]),$$

$$\chi([-0.5, 0.6]) = -0.833 < -0.200 = \chi([-5, 1]).$$

Мы получили, что $\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$, однако $\chi((\mathbf{A}x)_i) < \chi(\mathbf{b}_i)$. Нарушение установленной нами закономерности между включением произведения $\mathbf{A}x$ в вектор правой части \mathbf{b} ИСЛАУ и ожидаемым соотношением между значениями «относительных ширин» χ составляющих эти вектор столбцы интервалов происходит именно потому, что $0 \in \mathbf{b}_1$, $0 \in \mathbf{b}_2$.

Перейдем к рассмотрению следующей ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [1, 3] & [4, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

Компоненты вектора \mathbf{b} данной ИСЛАУ уже не содержат нуль, однако для нее оказывается нарушенным условие (ii) теорем 1.4.4 и 1.4.7:

$$\begin{aligned} -1 &< \max \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \leq \frac{1}{3}, \\ -1 &< \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{7} \right\} \leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Тем не менее, допусковое множество решений ИСЛАУ (1.94) пусто, а ее непустое множество $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ представлено на Рис. 1.11(б). ■

1.4.6 Техника распознающих функционалов

Настоящий подраздел уместно начать со следующей

Теорема 1.4.8. Пересечение множества AE -решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$, с каждым из ортантов пространства \mathbb{R}^n для любых кванторных матрицы \mathcal{A} и вектора β является выпускным полиэдральным множеством. Его вершины — это решения точечных линейных $m \times n$ -систем $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, уравнения которых являются либо угловыми (вершинными) линейными уравнениями вида

$\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i$, где $(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}) \in \text{vert } \mathbf{A}_i$, $\tilde{b}_i \in \text{vert } \mathbf{b}_i$, либо уравнениями координатных гиперплоскостей вида $x_i = 0$ для некоторых индексов $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Определение 1.4.7 Выпуклым полиэдральным множеством в \mathbb{R}^n называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств \mathbb{R}^n , т. е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида

$$h_{(i)}^\top \mathbf{x} \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где $h_{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ и p — некоторый натуральный номер.

Из теоремы 1.4.8 следует, что, решая системы линейных неравенств размера $2m + n$

$$\begin{cases} A'x \geq b', & A' \in \text{vert } \mathbf{A}, \quad b' \in \text{vert } \mathbf{b}, \\ A''x \leq b'', & A'' \in \text{vert } \mathbf{A}, \quad b'' \in \text{vert } \mathbf{b}, \\ \text{условие на знаки } x_i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

на каждом из ортантов \mathbb{R}^n , множество $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ можно «собрать по частям» из решений всех полученных систем неравенств, или, выражаясь строго, представить как объединение не более 2^n (по числу ортантов) выпуклых полиэдральных множеств. Однако установление таким образом пустоты или непустоты множества $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ оказывается задачей, сложность которой растет экспоненциально с n . Значит, использование такого подхода будет эффективным только в случае малых размерностей интервальных систем линейных уравнений. Кроме того, исследование различных множеств АЕ-решений ИСЛАУ удобнее проводить, работая с целыми интервалами, а не их отдельными вершинами.

В работах [31], [33] и [37] был предложен иной подход к определению пустоты/непустоты множества $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Он основан на использовании *распознающих функционалов*, которые позволяют «распознать» принадлежность некоторой точки x определенному АЕ-множеству решений ИСЛАУ по знаку своих значений. В рамках этого подхода исследование разрешимости ИСЛАУ сводится к решению задачи безусловной максимизации (на всем пространстве \mathbb{R}^n) распознающего функционала. Такие известные распознающие функционалы, как Uni, Ctr или Tol, рассмотренные нами далее, связаны с соответствующими множествами решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.77), $\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.78) и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.79). Если найденное значение максимума распознающего функционала больше либо равно нулю, то ИСЛАУ разрешима, а аргументы распознающего функционала, на которых распознающий функционал принимает неотрицательные значения, лежат в соответствующем множестве АЕ-решений ИСЛАУ. Если же максимум распознающего функционала отрицателен, то ИСЛАУ неразрешима.

Приведем ряд теорем и явные выражения для различных распознающих функционалов.

Теорема 1.4.9. Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный вектор, и выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \quad (1.95)$$

задается функционал $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x **объединенному множеству решений** $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функци-

ционала Uni,

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т. е. множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является лебеговым множеством $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ функционала Uni.

Другой функционал, также позволяющий установить принадлежность некоторой точки x объединенному множеству решений ИСЛАУ, был предложен авторами работы [38]:

$$\begin{aligned} \text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} & \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n (\text{rad } \mathbf{a}_{ij}) |x_j| - \right. \\ & \left. - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\text{mid } \mathbf{a}_{ij}) x_j \right| \right\}. \end{aligned}$$

При любых $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \text{Uss}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Функционалы Uss и Uni различаются тем, что последний лучше учитывает правую часть ИСЛАУ и всегда ограничен сверху. В то же время достоинством распознающего функционала Uss является то, что его выражение является более «простым», поскольку в нем не используется довольно сложная операция взятия магнитуды интервала (1.18).

Принадлежность некоторой точки x **управляемому множеству решений ИСЛАУ** распознает функционал Ctr:

$$\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \text{rad } \mathbf{a}_{ij} - \left| \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n x_j \text{ mid } \mathbf{a}_{ij} \right| \right\}. \quad (1.96)$$

Для функционала Ctr справедливо

$$x \in \Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

и управляемое множество решений $\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ является лебеговым множеством $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ функционала Ctr.

Распознающий функционал Tol позволяет устанавливать принадлежность точек **допусковому множеству решений** $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Он

играет важную роль в исследовании разрешимости линейной задачи о допусках, решение которой подробно обсуждается в разделе 1.6.

Теорема 1.4.10. Пусть даны интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный вектор правой части \mathbf{b} , а выражением

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1.97)$$

определяется функционал $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol .

Как и функционал Uni , распознающий функционал Tol достигает конечного максимума на всем пространстве \mathbb{R}^n .

Пример 1.4.9. Установим, принадлежит ли произвольно выбранная точка $(x_1, x_2) = (0.5, 1)$ объединенному, управляемому и допусковому множествам АЕ-решений ранее рассмотренной ИСЛАУ (1.82):

$$\begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ данной ИСЛАУ изображены на Рис. 1.6(а), который приведен на стр. 73. Принадлежность точки $(0.5, 1)$ каждому из множеств АЕ-решений можно определить путем визуальной оценки ее положения относительно выделенных множеств, однако мы воспользуемся в этих целях распознающими функционалами Uni (1.95), Ctr (1.96) и Tol (1.97).

Распознающий функционал объединенного множества имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Uni}(x) = \min \{ & 2 - \langle 0 - ([3, 6] \cdot x_1 + [-5, 2] \cdot x_2) \rangle, \\ & 1 - \langle 0 - ([-5, 7] \cdot x_1 + [-3, -1] \cdot x_2) \rangle \}, \end{aligned}$$

и его трехмерный и контурный графики представлены на Рис. 1.12.

Вместо единичного глобального максимума распознающего функционала Uni на Рис. 1.12 мы видим плато — целую область таких значений x_1 и x_2 , при которых $\text{Uni} \geq 0$. Форма этой области совпадает с

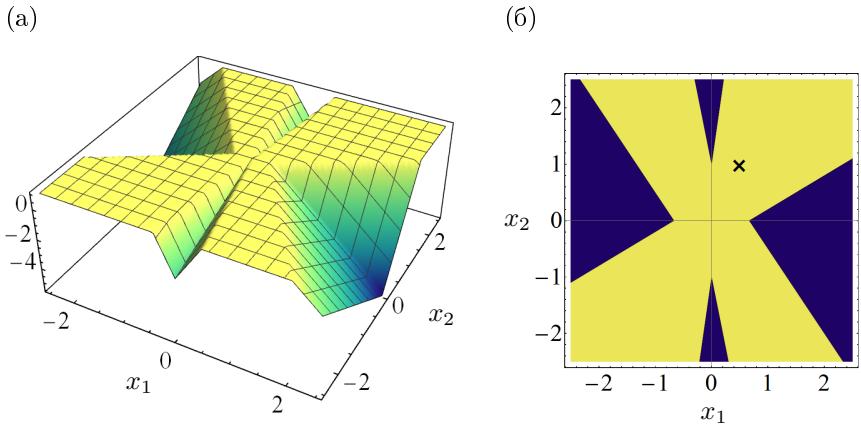


Рис. 1.12. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано черным крестиком, области $\text{Uni} < 0$ и $\text{Uni} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно

формой объединенного множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ, выделенного на Рис. 1.6 заливкой зеленым цветом. Поскольку

$$\text{Uni}(0.5, 1) = 1 > 0,$$

то точка $(0.5, 1)$ принадлежит множеству $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.82).

Распознающий функционал управляемого множества есть

$$\begin{aligned} \text{Ctr}(x) = \min \{ & (|x_1| \cdot 1.5 + |x_2| \cdot 3.5) - |[-2, 2] - (x_1 \cdot 4.5 - x_2 \cdot 1.5)|, \\ & (|x_1| \cdot 6.0 + |x_2| \cdot 1.0) - |[-1, 1] - (x_1 \cdot 1.0 - x_2 \cdot 2.0)| \}. \end{aligned}$$

Путем подстановки значений $x_1 = 0.5$ и $x_2 = 1$ легко убедиться, что

$$\text{Ctr}(0.5, 1) = 1.5 > 0,$$

а значит, точка $(0.5, 1)$ принадлежит управляемому множеству решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.82). Трехмерный и контурный графики распознающего функционала Ctr представлены на Рис. 1.13.

Нашей последней задачей является определение принадлежности точки $(0.5, 1)$ самому узкому из множеств АЕ-решений ИСЛАУ (1.82),

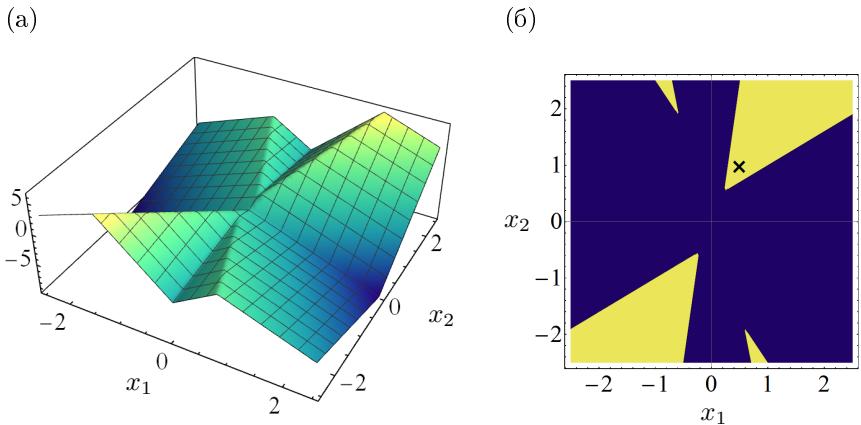


Рис. 1.13. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано черным крестиком, области $\text{Ctr} < 0$ и $\text{Ctr} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно

каким является допусковое множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Визуальная оценка Рис. 1.6 позволяет утверждать, что точка $(0.5, 1)$ допусковому множеству решений ИСЛАУ (1.82) не принадлежит. Подтвердим этот факт.

Распознающий функционал допускового множества имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Tol} = \min \{ & 2 - |0 - ([3, 6] \cdot x_1 + [-5, 2] \cdot x_2)|, \\ & 1 - |0 - ([-5, 7] \cdot x_1 + [-3, -1] \cdot x_2)| \}, \end{aligned}$$

и его трехмерный и контурный графики показаны на Рис. 1.14.

Так как

$$\text{Tol}(0.5, 1) = -4.5,$$

то точка $(0.5, 1)$ действительно не принадлежит допусковому множеству решений ИСЛАУ (1.82).

Таким образом, использование функционалов Uni (1.95), Ctr (1.96) и Tol (1.97) позволило успешно распознать истинную принадлежность точки $(0.5, 1)$ множествам $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{ctr}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.82) и непринадлежность этой точки множеству $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Следует заметить, что задача, которая имеет большее значение в интервальном анализе и в связи с этим решается значительно чаще — это

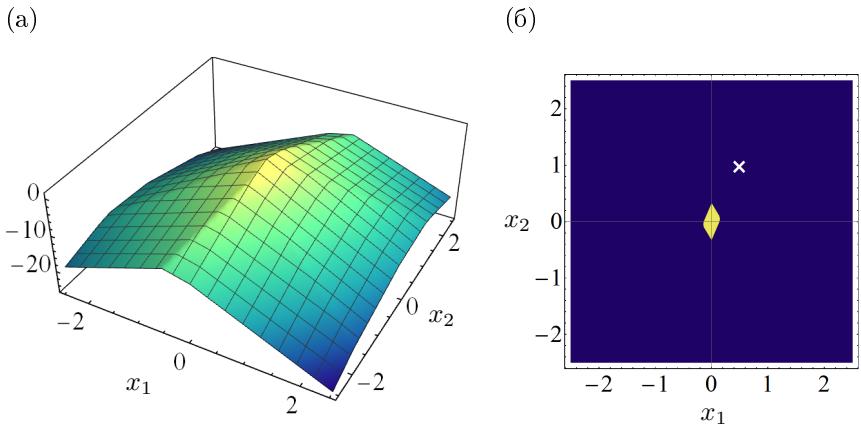


Рис. 1.14. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано белым крестиком, области $\text{Tol} < 0$ и $\text{Tol} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно.

не распознание принадлежности некоторой определенной точки тому или иному множеству АЕ-решений, а проверка пустоты или непустоты конкретных множеств решений ИСЛАУ. В этих случаях, как уже обсуждалось ранее, требуется нахождение глобального максимума распознающего функционала, и может оказаться полезным представление его поверхности в трехмерном пространстве. Например, несмотря на непустоту объединенного, управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ (1.82), мы убедились в том, что распознающий функционал Uni не имеет единственного глобального максимума, функционал Csl достигает его при бесконечно больших x , и только Tol имеет конечный глобальный максимум: $\text{Tol}(0, 0) = 1$. ■

1.5 Внешнее оценивание объединённого множества решений

В конце подраздела 1.4.2 мы договорились понимать под решением интервальной системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (1.73), которая ха-

рактеризуется кванторной матрицей \mathcal{A} и вектором β тех же размеров, что \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, поиск внешней и внутренней интервальных оценок множества решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Что такое *внешняя* и *внутренняя* интервальные оценки множества АЕ-решений ИСЛАУ? Это значит, что в первом случае мы ищем некое *подмножество*, а во втором — *объемлющее множество* для оценивания множества $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Поскольку самыми простыми оценивающими множествами являются интервальные векторы, то задачи внешнего и внутреннего интервального оценивания представляют собой, по сути, *нахождение брусов*, которые либо содержатся в множестве $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (внутренняя оценка), либо содержат его (внешняя оценка).

Внешнее оценивание множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.77) является одной из старейших задач интервального анализа и имеет высокую практическую важность. Она является NP-трудной так же, как и распознавание пустоты этого множества. Для нахождения внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ существует широкое разнообразие численных методов, различающихся своей трудоемкостью:

1. *Точные (оптимальные) методы* нацелены на точное решение задачи внешнего оценивания или её решение с гарантированной погрешностью. При этом рост трудоемкости (вычислительная сложность) в зависимости от размерности решаемой задачи этих методов может расти экспоненциально.
2. *Методы общего назначения* не претендуют на оптимальность. В силу этого, их можно строить так, что они будут иметь полиномиальную трудоемкость.

В данном разделе мы рассмотрим несколько итерационных численных методов для внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ из категории методов общего назначения.

1.5.1 Предобусловливание

К процедуре предобусловливания прибегают для того, чтобы изменить свойства интервальной матрицы ИСЛАУ (1.73) и при этом каким-то образом «улучшить» результат работы численного метода по внешнему оцениванию ее объединенного множества решений.

Под *предобусловливанием* мы будем понимать одновременное домножение слева обеих частей интервальной $n \times n$ -системы линейных

уравнений $\Lambda \mathbf{A}x = \mathbf{b}$ на точечную матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(\Lambda \mathbf{A})x = \Lambda \mathbf{b}, \quad (1.98)$$

Входящая в предобусловленную ИСЛАУ (1.98) матрица Λ называется *предобуславливающей матрицей* или *предобуславливателем*.

Поскольку в общем случае имеет место

$$\Lambda \mathbf{A} \supseteq \{\Lambda A \mid A \in \mathbf{A}\}, \quad \Lambda \mathbf{b} \supseteq \{\Lambda b \mid b \in \mathbf{b}\},$$

то объединенное множество решений предобусловленной интервальной линейной системы (1.98) включает в себя соответствующее множество решений исходной ИСЛАУ (1.73):

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}).$$

Как выбрать предобуславливающую матрицу? В рамках некоторых интервальных методов, к которым относится, например, формально-алгебраический подход (см. стр. 111), на предобуславливатель косвенным образом накладываются определенные ограничения, не позволяющие выбирать его произвольным. Достаточно часто в качестве матрицы Λ выбирают обратную к средней матрице ИСЛАУ, т. е. выполняется «предобуславливание обратной средней»:

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}.$$

При таком выборе предобуславливателя средней матрицей $\text{mid}(\Lambda \mathbf{A})$ системы уравнений (1.98) является единичная матрица I , а в матрице $I - \Lambda \mathbf{A}$ все элементы являются уравновешенными интервалами.

Предобуславливание обратной средней имеет несколько неочевидных преимуществ:

- Если средняя матрица предобусловленной ИСЛАУ (1.98) является диагональной, то с помощью процедуры Хансена-Рона-Блика (см. стр. 107) можно очень быстро получить оптимальную внешнюю оценку объединенного множества решений.
- Размеры объединенных множеств решений исходной и предобусловленной ИСЛАУ отличаются на величину второго порядка малости относительно ширины матрицы \mathbf{A} и правой части \mathbf{b} :

$$\text{dist}(\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \square \Xi(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b})) \leq C (\max \{\|\text{wid } \mathbf{A}\|, \|\text{wid } \mathbf{b}\|\})^2,$$

где $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$, C — некоторая константа, зависящая от выбора расстояния dist , а также векторной и матричной норм в правой части неравенства.

Данный результат носит название *леммы Миллера*.

- Предобуславливание обратной средней позволяет увеличить точность интервального численного метода. Например, после выполнения данной процедуры метод Гаусса (см. стр. 102) и метод Кравчика (см. стр. 114), являющиеся методами первого порядка точности, приобретают уже второй порядок точности.

Если нам известна некоторая информация об интервальной матрице ИСЛАУ или алгоритме используемого численного метода, которая влияет на выбор нами предобуславливателя, то мы можем отказаться от $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ в пользу другого, более подходящего варианта. В дальнейшем при нахождении внешних оценок множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ с помощью различных интервальных методов мы будем пользоваться именно предобуславливанием обратной средней.

1.5.2 Предварительное внешнее оценивание

Быстрое нахождение приблизительной внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ оказывается полезным в том случае, когда нам необходимо задать некоторое начальное приближение, которое будет использовано для его дальнейшего уточнения. Кроме того, иногда простого предварительного внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ оказывается вполне достаточно для получения представления о решении поставленной интервальной задачи.

В настоящем подразделе мы познакомимся с двумя способами предварительного внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ:

Предложение. Пусть матрицы $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ таковы, что величина $\eta := \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_\infty$ удовлетворяет $\eta < 1$ для подчинённой чебышёвской матричной нормы $\|\cdot\|_\infty$. Тогда объединённое множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ содержится в брусе $\mathbf{x} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top \in \mathbb{IR}^n$, таком что

$$\theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta}. \quad (1.99)$$

Предложение. (внешняя оценка Х. Бекка)

Пусть в интервальной линейной системе уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A}

сильно неособенна и \hat{x} — решение её «средней системы»

$$(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Тогда объединённое множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ заключено в интервальном векторе $[\hat{x} - \Delta, \hat{x} + \Delta]$, где

$$\Delta = (I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A}|\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}). \quad (1.100)$$

Пример 1.5.1. Рассмотрим ИСЛАУ (1.82)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 6] & [-5, 2] \\ [-5, 7] & [-3, -1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

и найдем внешнюю оценку для ее объединенного множества решений.

В качестве предобуславливающей матрицы Λ возьмем обратную к средней матрице интервальной системы уравнений:

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 4.5 & -1.5 \\ 1.0 & -2.0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Lambda \mathbf{A} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} [-9, 39] & [-17, 17] \\ [-57, 57] & [-1, 31] \end{pmatrix}, \quad \Lambda \mathbf{b} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} [-11, 11] \\ [-13, 13] \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\eta := \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_\infty = \frac{73}{15}, \quad \|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty = \frac{13}{15}.$$

Поскольку $\eta > 1$, то мы не можем найти предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (1.82). Этот результат согласуется с изображением объединенного множества решений данной интервальной системы, которое представлено на Рис. 1.6. Форма множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.82) является незамкнутой, и потому выполнить внешнее оценивание оказывается невозможным.

Выберем ИСЛАУ с другими матрицей \mathbf{A} и вектором \mathbf{b} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-6, -5] & [2, 3] \\ [5, 7] & [3, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-3, 1] \\ [-1, 5] \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

Повторим все вычисления:

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -5.5 & 2.5 \\ 6.0 & 6.5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

В таком случае

$$\Lambda \mathbf{A} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [90, 113] & [-24, 24] \\ [-17, 17] & [57, 146] \end{pmatrix}, \quad \Lambda \mathbf{b} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} [-18, 64] \\ [-47, 67] \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$\eta := \|I - \Lambda A\|_\infty = \frac{123}{203}, \quad \|\Lambda b\|_\infty = \frac{134}{203}$$

Поскольку $\eta < 1$, то при использовании выражения (1.99) можно получить внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.101):

$$\theta = \frac{\|\Lambda b\|_\infty}{1 - \eta} = \frac{67}{40},$$

и, значит, интервальным вектором-брюсом, содержащим объединенное множество решений ИСЛАУ (1.101), является

$$x = \left(\begin{array}{c} [-1.675, 1.675] \\ [-1.675, 1.675] \end{array} \right).$$

Теперь для предварительного внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ (1.101) воспользуемся способом Х. Бекка. В первую очередь нам необходимо убедиться в том, что интервальная матрица \mathbf{A} является сильно неособенной:

$$\det((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = [0.458, 1.641] \not\ni 0,$$

следовательно, матрица \mathbf{A} действительно сильно неособенна.

Далее найдем решение «средней системы» $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$:

$$\hat{x} = \frac{2}{203} \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Определим величину Δ по выражению (1.100):

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{108}{203} & -\frac{48}{203} \\ -\frac{34}{203} & \frac{114}{203} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{26}{203} & \frac{10}{203} \\ \frac{24}{203} & \frac{22}{203} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{439}{203} \\ \frac{25}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.887 \\ 1.409 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\hat{x} - \Delta = \begin{pmatrix} -0.660 \\ -1.310 \end{pmatrix}, \quad \hat{x} + \Delta = \begin{pmatrix} 1.113 \\ 1.507 \end{pmatrix},$$

то получается, что предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.101) содержит брус

$$x = \left(\begin{array}{c} [-0.660, 1.113] \\ [-1.310, 1.507] \end{array} \right).$$

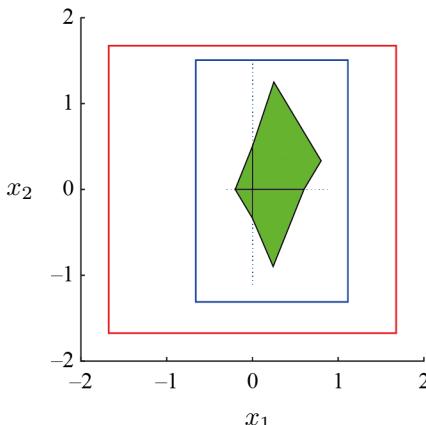


Рис. 1.15. Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.101), а также его внешние оценки, полученные способом, основанным на использовании подчиненной чебышевской матричной нормы (1.99) (красная линия), и способом Х. Бекка (1.100) (синяя линия). Для построения объединенного множества решений ИСЛАУ была использована функция `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27]

О том, насколько грубыми являются полученные внешние оценки множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.101), можно судить по Рис. 1.15. Как видно на данном рисунке, способ Х. Бекка позволил получить более узкую внешнюю интервальную оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (1.101), чем способ, основанный на использовании подчиненной чебышевской матричной нормы. Однако стоит повторно заметить, что способ Х. Бекка может использоваться для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ только в том случае, если матрица \mathbf{A} является сильно неособенной. ■

1.5.3 Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса и его модификации являются мощными инструментами линейной алгебры. Для системы линейных уравнений вида $Ax = b$ с $n \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$ и n -вектором $b = (b_i)$ выполнение метода Гаусса состоит из двух этапов — прямого хода и обратного хода.

Если мы заменим в алгоритме метода Гаусса все точечные величины и арифметические операции их интервальными аналогами, то придем к *интервальному методу Гаусса*. В силу основной теоремы интервальной арифметики (см. стр. 17) брус $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$, полученный в результате применения интервального метода Гаусса к ИСЛАУ $Ax = b$ с неособенной матрицей $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, содержит все возможные решения точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и является внешней оценкой множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Стоит заметить, что для успешной работы данного численного метода диагональные элементы a_{jj} , возникающие на прямом и обратном ходах, не должны содержать нуль, т. е. $0 \notin a_{jj}$.

Интервальный аналог метода Гаусса достаточно редко используется для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ. Одной из причин этому является тот факт, что в соответствии с (1.60) интервальный метод Гаусса имеет первый порядок точности:

$$\text{dist}(\square\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}), IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})) \leq C \max\{\|\text{wid } \mathbf{A}\|, \|\text{wid } \mathbf{b}\|\},$$

где $IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — результат применения интервального метода Гаусса к системе $Ax = b$, а C — некоторая положительная константа, зависящая от выбора матричных и векторных норм, а также расстояния dist . Поэтому при достаточно широких интервальных компонентах матрицы и вектора ИСЛАУ качество внешнего оценивания ее объединенного множества решений с помощью интервального метода Гаусса будет невысоким. Вторая причина отказа от использования интервального метода Гаусса заключается в том, что он позволяет получить далеко не оптимальный результат внешнего оценивания множеств $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ таких ИСЛАУ, вся интервальность которых сосредоточена в векторе правой части \mathbf{b} , или ИСЛАУ с сильно неособенными матрицами \mathbf{A} .

Ввиду указанных недостатков интервального метода Гаусса, который является прямым методом решения ИСЛАУ, в интервальном анализе предпочтение отдается итерационным методам, одним из которых является *интервальный метод Гаусса-Зейделя*, псевдокод которого представлен в Табл. 1.2. Обычно его применяют после выполнения

предварительного предобуславливания.

Обсудим некоторые вопросы, касающиеся практической реализации интервального метода Гаусса-Зейделя:

- ◊ *Почему в процессе итерирования оказывается, что внешней оценкой объединенного множества решений ИСЛАУ вида $Ax = b$ является пустое множество?* Такой результат свидетельствует о том, что выбранное начальное приближение вообще не пересекает оцениваемое множество решений. Чтобы избежать появления этой ошибки, в качестве начального приближения можно выбирать предварительную внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ (см. стр. 98). Такая внешняя оценка определяется или способом, основанном на использовании подчиненной чебышевской нормы (1.99), или способом Х. Бекка (1.100).
- ◊ *Позволяет ли интервальный метод Гаусса-Зейделя «сузить» брус \mathbf{X} , выбранный в качестве начального приближения?* Ответ на этот вопрос зависит от того, имеет ли матрица \mathbf{A} ИСЛАУ диагональное преобладание. Если матрица \mathbf{A} является
 - *H*-матрицей, то результатом работы интервального метода Гаусса-Зейделя с любым начальным вектором \mathbf{X} , который обладает достаточно большой чебышевской нормой $\|\mathbf{X}\|_\infty$, окажется брус более узкий, чем \mathbf{X} . В ином случае улучшение вектора \mathbf{X} может и не произойти.
 - *M*-матрицей, то с помощью интервального метода Гаусса-Зейделя будет получена оптимальная внешняя оценка множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ при любом выборе такого начального приближения, которое содержит данное множество.

Пример 1.5.2. Рассмотрим ИСЛАУ (1.73), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [4, 5] & [-2, -1] \\ [2, 3] & [6, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [4, 5] \\ [7, 8] \end{pmatrix}. \quad (1.102)$$

Найдем внешнюю оценку для множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102), используя интервальный метод Гаусса-Зейделя.

В качестве начального приближения \mathbf{X}_0 для построения итерационного процесса мы возьмем предварительную внешнюю оценку объ-

Таблица 1.2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Брус $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)^\top \in \mathbb{IR}^n$, ограничивающий желаемую часть объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Некоторая константа $\varepsilon > 0$.

Выход

Уточнённая внешняя оценка \mathbf{X}' для пересечения множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с бруском \mathbf{X} , либо информация «исходный брус \mathbf{X} не пересекает множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})».$

Алгоритм

$q \leftarrow +\infty;$

DO WHILE ($q \geq \varepsilon$)

DO FOR $i = 1$ TO n

$$\mathbf{X}'_i \leftarrow \mathbf{X}_i \cap \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}'_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j \right) / \mathbf{a}_{ii};$$

IF ($\mathbf{X}'_i = \emptyset$) THEN

STOP, сигнализируя «множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

не пересекает брус \mathbf{X} »

END IF

END DO

$q \leftarrow$ расстояние между векторами \mathbf{X} и $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)^\top$;

$\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}'$;

END DO

единенного множества решений, определяемую выражением (1.99):

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [-1.78, 1.78] \\ [-1.78, 1.78] \end{pmatrix}.$$

Добьемся ли мы в результате итерирования уменьшения бруса начального приближения \mathbf{X}_0 в размере? Проверим, является ли матрица \mathbf{A} ИСЛАУ (1.102) диагонально преобладающей, и если это так, то принадлежит ли она классу H - или M -матриц (см. стр. 46).

В соответствии с условием (1.46) интервальная матрица \mathbf{A} действительно имеет диагональное преобладание

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad \langle [4, 5] \rangle &= 4 > 2 = |[-2, -1]|, \\ i = 2 : \quad \langle [6, 7] \rangle &= 6 > 3 = |[2, 3]|, \end{aligned}$$

однако не является M -матрицей, потому что ее элемент A_{21} положителен. Значит, следует выполнить проверку принадлежности интервальной матрицы \mathbf{A} классу H -матриц.

Согласно критерию Фань Цзы, приведенному на стр. 46, компарант матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ (1.102) является M -матрицей

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathbf{A} \rangle v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} > 0,$$

а значит, интервальная матрица \mathbf{A} является H -матрицей. Это говорит о том, что в результате итераций мы можем ожидать сужения выбранного бруса начального приближения \mathbf{X}_0 .

Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102), его предварительная внешняя оценка \mathbf{X}_0 , а также результат шестой итерации \mathbf{X}_6 интервального метода Гаусса-Зейделя показаны на Рис. 1.16. Результаты, получаемые на каждом этапе итерационного процесса, приведены в таблице 1.3.

Заметим, что в процессе итерирования пересечение старого и нового значений одной и той же интервальной компоненты бруса \mathbf{X}_i выполнялось сразу же после вычисления нового значения этой компоненты; полученный результат пересечения использовался для расчета нового значения другой компоненты того же бруса \mathbf{X}_i и т. д.

Подводя итоги, можно заключить, что применение интервально-го метода Гаусса-Зейделя позволило значительно улучшить начальный брус \mathbf{X}_0 , который был получен в результате предварительного внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102). ■

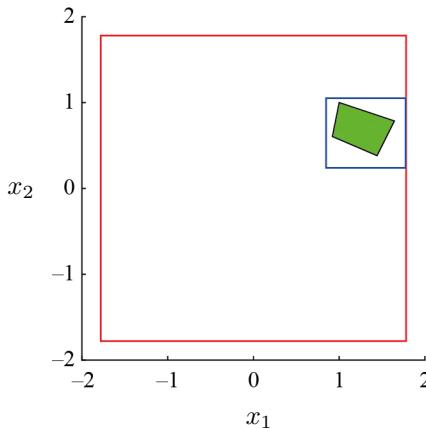


Рис. 1.16. Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102), вектор начального приближения \mathbf{X}_0 (красная линия), а также результат шестой итерации \mathbf{X}_6 интервального метода Гаусса-Зейделя (синяя линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ было построено с использованием функции EqnWeak2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

i	\mathbf{X}_i	\mathbf{X}'_i	Dist($\mathbf{X}_i, \mathbf{X}'_i$)
1	$\begin{pmatrix} [-1.78000, 1.78000] \\ [-1.78000, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.78000] \\ [0.23714, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.62743 \\ 2.01714 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.78000] \\ [0.23714, 1.78000] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.77543] \\ [0.23714, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00457 \\ 0.72914 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} [0.84743, 1.77543] \\ [0.23714, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77543] \\ [0.23910, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00039 \\ 0.00196 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77543] \\ [0.23910, 1.05086] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77536] \\ [0.23910, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00007 \\ 0.00013 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} [0.84782, 1.77536] \\ [0.23910, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00003 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05072] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \end{pmatrix}$

Таблица 1.3. Уточнение внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.102) с помощью интервального итерационного метода Гаусса-Зейделя

1.5.4 Процедура Хансена-Блика-Рона

Процедура Хансена-Блика-Рона замечательна тем, что имеет невысокую вычислительную сложность и в том случае, если средняя матрица ИСЛАУ является диагональной, позволяет получить оптимальную внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Однако эта процедура используется для внешнего оценивания объединенного множества решений только таких интервальных линейных систем уравнений, матрица \mathbf{A} которых принадлежит специальному классу H -матриц (см. стр. 46).

Теорема 1.5.1. Пусть в интервальной линейной системе $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ является интервальной H -матрицей и пусть

$$u_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|)_i, \quad d_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii} \quad (1.103a)$$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle - 1/d_i, \quad \beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i| \quad (1.103b)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ содержится в интервальном векторе $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$ с компонентами

$$x_i = \frac{\mathbf{b}_i + \beta_i[-1, 1]}{\mathbf{a}_{ii} + \alpha_i[-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.104)$$

Если же средняя матрица для \mathbf{A} диагональна, то \mathbf{x} — оптимальная внешняя оценка множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Пример 1.5.3. Рассмотрим ИСЛАУ, в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [3, 5] \\ [-6, -4] & [5, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}. \quad (1.105)$$

Наша задача — найти внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ этой ИСЛАУ, воспользовавшись процедурой Хансена-Блика-Рона.

Чтобы произвести внешнее оценивание $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, нам придется выполнить предобуславливание, потому что матрица \mathbf{A} ИСЛАУ (1.105) не принадлежит классу H -матриц. Ее компарант

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

не является M -матрицей, несмотря на то, что матрица $\langle \mathbf{A} \rangle$ имеет неположительные внедиагональные элементы и тем самым удовлетворяет критерию Фань Цзы (см. стр. 46). Поскольку интервальная матрица \mathbf{A}

не является диагонально преобладающей, то мы не сможем подобрать точечный вектор $v > 0$ такой, чтобы имело место $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$.

Однако «ценой» внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ (1.105) путем выполнения процедуры Хансена-Блика-Рона с дополнительным этапом предобуславливания будет неоптимальность интервальной оценки множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$: как указано в подразделе 1.5.1, $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$, а найденный нами в дальнейшем брус \mathbf{X} будет внешней оценкой именно множества $\Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$.

В качестве предобуславливателя Λ выберем обратную к средней матрице ИСЛАУ (1.105), т. е. $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda\mathbf{A} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} [62, 108] & [-35, 35] \\ [-16, 16] & [60, 110] \end{pmatrix}, \\ \Lambda\mathbf{b} &= \frac{1}{85} \begin{pmatrix} [-33, 14] \\ [22, 56] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Теперь, когда матрица $\Lambda\mathbf{A}$ является H -матрицей

$$\langle \Lambda\mathbf{A} \rangle = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 62 & -35 \\ -16 & 60 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \Lambda\mathbf{A} \rangle v = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 27 \\ 44 \end{pmatrix},$$

мы можем воспользоваться процедурой Хансена-Блика-Рона для нахождения внешней оценки множества $\Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$. Более того, полученная интервальная оценка будет оптимальной, так как средняя матрица $\text{mid}(\Lambda\mathbf{A})$ предобусловленной ИСЛАУ является единичной:

$$\text{mid}(\Lambda\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Выполним необходимые промежуточные вычисления для нахождения компонент бруса внешней оценки $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^\top$:

$$\langle \Lambda\mathbf{A} \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{255}{158} & \frac{595}{632} \\ \frac{34}{79} & \frac{527}{316} \end{pmatrix}, \quad |\Lambda\mathbf{b}| = \begin{pmatrix} \frac{33}{85} \\ \frac{56}{85} \end{pmatrix}, \quad \langle \Lambda\mathbf{A} \rangle^{-1} |\Lambda\mathbf{b}| = \begin{pmatrix} \frac{197}{158} \\ \frac{100}{79} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\left[-\frac{33}{85}, \frac{14}{85} \right] + \left(\frac{197}{158} / \frac{255}{158} - \frac{33}{85} \right) \cdot [-1, 1]}{\left[\frac{62}{85}, \frac{108}{85} \right] + \left(\frac{62}{85} - 1 / \frac{255}{158} \right) \cdot [-1, 1]} = \left[-\frac{197}{158}, \frac{70}{79} \right],$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\left[\frac{22}{85}, \frac{56}{85} \right] + \left(\frac{100}{79} / \frac{527}{316} - \frac{56}{85} \right) \cdot [-1, 1]}{\left[\frac{60}{85}, \frac{110}{85} \right] + \left(\frac{60}{85} - 1 / \frac{527}{316} \right) \cdot [-1, 1]} = \left[\frac{209}{1845}, \frac{100}{79} \right].$$

На Рис. 1.17(а) показаны множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105) и оптимальная внешняя оценка \mathbf{X} множества $\Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$, $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$, полученная в результате применения процедуры Хансена-Блика-Рона к ИСЛАУ (1.105) после ее предобуславливания. ■

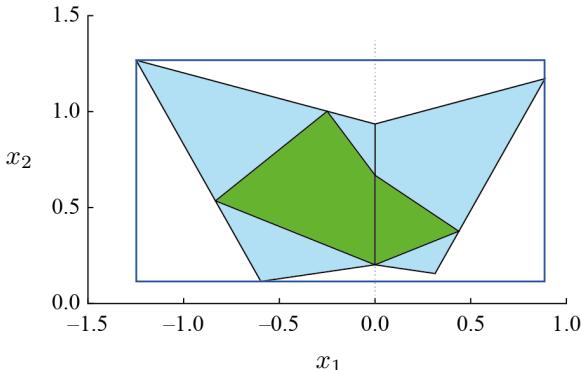


Рис. 1.17. Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105) (зеленый цвет), а также множество $\Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$, $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ (голубой цвет) и его оптимальная внешняя оценка \mathbf{X} , полученная в результате выполнения процедуры Хансена-Блика-Рона (синяя линия). Множества АЕ-решений ИСЛАУ были построены с использованием функции EqnWeak2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

Пример 1.5.4. Попробуем найти внешнюю оценку объединенного множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102) с помощью *мультиметода*, который представляет собой последовательное применение процедуры Хансена-Блика-Рона и интервального итерационного метода Гаусса-Зейделя к ИСЛАУ (1.102).

Как мы выяснили в подразделе 1.5.3, интервальный метод Гаусса-Зейделя позволяет добиться сужения бруса начального приближения в том случае, если матрица \mathbf{A} интервальной линейной системы принадлежит классу H -матриц. Если с помощью процедуры Хансена-Блика-Рона мы найдем внешнюю оценку объединенного множества решений ИСЛАУ, интервальная матрица \mathbf{A} которой является H -матрицей, а матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ не диагональна, то сможем далее улучшить найденный интервальный вектор \mathbf{X} в ходе итерационного процесса интервально-го метода Гаусса-Зейделя. Уточненный таким образом брус внешней

оценки множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102) представляется интересным сравнить с интервальным вектором, который мы можем получить, выполняя предобуславливание ИСЛАУ (1.102) обратной к средней матрице системы и применяя затем к предобусловленной ИСЛАУ (1.102) процедуру Хансена-Блика-Рона.

Выберем предобуславливатель $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ и повторим все вычисления, выполненные в предыдущем примере для ИСЛАУ (1.105). Полученная оптимальная внешняя оценка объединенного множества решений ИСЛАУ (1.102)

$$\mathbf{X}_{\text{оптим}} = \begin{pmatrix} [0.87992, 1.68360] \\ [0.36853, 1.08111] \end{pmatrix}$$

почти не отличается от результата работы интервального метода Гаусса-Зейделя с исходной, непредобусловленной ИСЛАУ (1.102), которым является интервальный вектор \mathbf{X}_6 , приведенный в таблице 1.3:

$$\mathbf{X}_{\Gamma_3} = \begin{pmatrix} [0.84783, 1.77536] \\ [0.23913, 1.05073] \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к использованию мультиметода для внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102). Откажемся от предобуславливания ИСЛАУ обратной средней и повторим все ранее выполненные вычисления с использованием величин (1.103a) и (1.103b). Поскольку интервальная матрица

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4.5 & -1.5 \\ 2.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

непредобусловленной ИСЛАУ (1.102) не является диагональной, то интервальный вектор \mathbf{X}_0 , который получается в результате применения процедуры Хансена-Блика-Рона к ИСЛАУ (1.102) и станет начальным приближением для построения итераций интервального метода Гаусса-Зейделя, намного шире, чем брусы $\mathbf{X}_{\text{оптим}}$ и \mathbf{X}_{Γ_3} :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} [0.22222, 2.55556] \\ [0.38235, 2.61111] \end{pmatrix}.$$

На третьем этапе итерационных вычислений интервального метода Гаусса-Зейделя ($\text{dist}_1(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}'_3) < 10^{-5}$) мы получаем следующую внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102):

$$\mathbf{X}_{\text{мультим}} = \begin{pmatrix} [0.87647, 1.77059] \\ [0.38235, 1.04118] \end{pmatrix}.$$

Сравнивая между собой интервальные векторы $\mathbf{X}_{\text{оптим}}$, $\mathbf{X}_{\text{ГЗ}}$ и $\mathbf{X}_{\text{мультим}}$, можно убедиться в «жизнеспособности» мультиметода, представляющего собой сочетание процедуры Хансена-Блика-Рона и интервального метода Гаусса-Зейделя, а также его пригодности для внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102). ■

1.5.5 Формально-алгебраический подход

Идея *формально-алгебраического* или, кратко, *формального* подхода заключается в том, чтобы, отказавшись от работы с исходной ИСЛАУ, внешнее оценивание множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ которой выполняется, перейти к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы уравнений. Согласно работе [36], *формальное решение* интервальной системы уравнений можно определить как интервальный вектор, в результате подстановки которого в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (классической интервальной арифметики \mathbb{IR} , полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KR} или какой-либо другой) каждое уравнение системы превращается в равенство. Достоинством формально-алгебраического подхода является универсальность, поскольку его общая теоретическая схема применима к задачам как внешнего, так и внутреннего интервального оценивания, а выбор способов и численных методов, которые могут быть использованы для нахождения формального решения, не ограничен.

Предложение. Пусть Λ — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}, \quad (1.106)$$

где $\mathbf{C} = I - \Lambda \mathbf{A}$, $\mathbf{d} = \Lambda \mathbf{b}$.

В основе формального подхода к решению задачи внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ лежат следующие три теоремы:

Теорема 1.5.2. (теорема Майера-Варнке) Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^n$,

$$\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{C} \in \mathbf{C})(\exists \mathbf{d} \in \mathbf{d})(x = \mathbf{Cx} + \mathbf{d})\}$$

— множество решений интервальной линейной системы уравнений $x = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$, а $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ — формальное решение этой системы. Тогда

- для любой линейной системы $x = Cx + d$ с $C \in \mathbf{C}$ и $d \in \mathbf{d}$ по крайней мере одно её решение содержится в брусе \mathbf{x}^* ;
- включение $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица $(I - C)$ неособенна.

Теорема 1.5.3. (теорема Апостолатоса-Кулиша)

Если матрица $C \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\rho(|C|) < 1$, то для любого вектора $d \in \mathbb{IR}^n$ интервальная линейная система уравнений

$$x = Cx + d$$

имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе $\mathbf{x}^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений рассматриваемой интервальной системы.

Теорема 1.5.4. (теорема Алефельда-Херцбергера)

Пусть в интервальной системе уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x)$$

отображение $G : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$, действующее по правилу $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, является сжимающим, а выражения для компонент $G_i(\mathbf{a}, x)$ являются элементарными функциональными выражениями, определенными для рассматриваемых значений аргументов \mathbf{a} и x . Тогда правильное формальное решение интервальной системы уравнений $x = G(\mathbf{a}, x)$ существует, единственно и является внешней интервальной оценкой ее множества решений $\Xi(G, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a}) (x = G(a, x))\}$.

Несмотря на то, что формулировка теоремы Майера-Варнке является более общей, она не поглощает теоремы Апостолатоса-Кулиша и Алефельда-Херцбергера. Различие между этими тремя теоремами проявляется в том случае, когда $\text{rad } \mathbf{d}_i = 0$ для некоторых $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Например, условия теоремы Апостолатоса-Кулиша могут не выполняться, однако путем специального подбора данных интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (1.106) можно добиться успешного внешнего оценивания множества решений с помощью формально-алгебраического метода, основанного на теореме Майера-Варнке [36].

Точность оценок множеств решений, получаемых с помощью формального подхода, характеризует следующее

Предложение. Пусть в условиях теорем Апостолатоса-Кулиша или Майера-Варнке матрица \mathbf{C} неотрицательна. Тогда правильное формальное решение интервальной линейной системы $x = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$ является оптимальной внешней оценкой её множества решений.

Пример 1.5.5. Рассмотрим ИСЛАУ (1.73), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [5, 9] & [0, 0] \\ [0, 0] & [6, 7] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

Воспользуемся формальным подходом к нахождению внешней оценки множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ этой ИСЛАУ, которым, как можно убедиться, является брус $x = (x_1, x_2)^\top = ([\frac{1}{9}, \frac{2}{5}], [\frac{2}{7}, 1])^\top$.

Выберем в (1.106) диагональную масштабирующую матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда интервальная система уравнений $x = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$ примет вид

$$x = \begin{pmatrix} [-3.5, -1.5] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [-2.5, -2.0] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.5, 1.0] \\ [1.0, 3.0] \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что данная система уравнений не имеет формальных решений в \mathbb{IR}^n — ими являются «неправильные» интервалы

$$x_1 = \left[\frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right], \quad x_2 = \left[\frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right],$$

которые являются элементами полной интервальной арифметики Каухера $\mathbb{K}\mathbb{R}$. Значит, интерпретировать полученные решения с помощью теоремы Майера-Варнке невозможно!

Добьемся того, чтобы вспомогательная интервальная система уравнений имела решения в \mathbb{IR}^n . Для этого изменим матрицу Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} = 0.05 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда формальным решением системы в рекуррентном виде

$$x = \begin{pmatrix} [0.55, 0.75] & [0.00, 0.00] \\ [0.00, 0.00] & [0.65, 0.70] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0.05, 0.10] \\ [0.10, 0.30] \end{pmatrix}$$

является правильный вектор $\left(\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{7}, 1\right]\right)^\top$, который в точности совпадает с объединенным множеством решений исходной ИСЛАУ (1.107).

Сравним спектральные радиусы матриц $|\mathbf{C}|$ в обоих случаях:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-3.5, -1.5] & [0.0, 0.0] \\ [0.0, 0.0] & [-2.5, -2.0] \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|\mathbf{C}|) = 3.50 > 1,$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [0.55, 0.75] & [0.00, 0.00] \\ [0.00, 0.00] & [0.65, 0.70] \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|\mathbf{C}|) = 0.75 < 1.$$

Значит, необходимым условием существования правильного формального решения системы (1.106) при $\text{rad } \mathbf{d} > 0$ является

$$\rho(|\mathbf{C}|) < 1,$$

т. е. спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$ должен быть *меньше единицы*. Достичь этого можно путем подбора подходящей матрицы A . ■

1.5.6 Интервальный метод Кравчика

Интервальный итерационный *метод Кравчика* объединяет в себе элементы итерационных методов и процедур, которые были рассмотрены в предыдущих подразделах:

- *предобуславливание* (подраздел 1.5.1),
- *предварительное внешнее оценивание* объединенного множества решений ИСЛАУ (подраздел 1.5.2 и, если матрица A ИСЛАУ принадлежит классу интервальных H -матриц, подраздел 1.5.4),
- *вычисление формального решения* интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (см. теорему Апостолатоса-Кулиша на стр. 112, подраздел 1.5.5).

Важным достоинством интервального метода Кравчика является независимость его итерационного процесса от величины диагональных элементов. Данный метод также может быть использован для решения нелинейных уравнений и их систем.

Итак, последовательность шагов при компьютерной реализации интервального метода Кравчика имеет следующий вид:

- Выбирается вектор начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Грубую внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ можно найти, воспользовавшись выражением (1.99). В частном случае сильной неособенности интервальной матрицы \mathbf{A} для этой цели также пригодно выражение (1.100). Наконец, если интервальная матрица системы является H -матрицей, а средняя матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ недиагональна, то результат вычисления величин, определяемых выражением (1.104), также можно считать предварительной внешней оценкой объединенного множества решений ИСЛАУ.

- Выбирается предобуславливатель $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Как правило, выполняется предобуславливание обратной к средней матрице ИСЛАУ: $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$.

- Организуются итерации

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \left(\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} \right) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.108)$$

В качестве критерия остановки итераций можно выбрать выполнение одного из условий:

$$\text{Dist} \left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^* \right) \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \text{dist} \left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^* \right) \leq \varepsilon$$

для некоторой векторной или скалярной величины $\varepsilon > 0$.

Теорема 1.5.5. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ и матрица $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такова, что для некоторой матричной нормы величина $\eta := \|I - \Lambda \mathbf{A}\|$ удовлетворяет условию $\eta < 1$. Тогда для всякого начального приближения, содержащего множество решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, предел \mathbf{x}^* итераций метода Кравчука (1.108) удовлетворяет следующей оценке в согласованной векторной норме

$$\|\text{rad } \square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\| \leq \|\text{rad } \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \|\text{rad } \square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\|.$$

Пример 1.5.6. Рассмотрим ИСЛАУ (1.105), в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [3, 5] \\ [-6, -4] & [5, 10] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 6] \end{pmatrix}.$$

Найдем внешнюю оценку объединенного множества решений данной ИСЛАУ, используя интервальный метод Кравчика.

Как нам уже известно (см. стр. 107), матрица \mathbf{A} ИСЛАУ (1.105) не относится к интервальным H -матрицам, а значит, к ней «напрямую», т. е. без выполнения предобуславливания, не применима процедура Хансена-Блика-Рона для внешнего оценивания множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. По этой же причине мы не можем воспользоваться интервальным методом Гаусса-Зейделя для нахождения внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.105). По сути, в нашем арсенале интервальных методов остается только итерационный метод Кравчика, который тесно связан с формально-алгебраическим подходом к внешнему оцениванию объединенного множества решений.

В первую очередь для организации итерационного процесса нам необходимо выбрать начальное приближение. Им станет ранее найденный (см. стр. 108) с помощью предобуславливания ИСЛАУ (1.105) обратной средней и применения процедуры Хансена-Блика-Рона брус

$$\mathbf{X}_{\text{ХБР}} = \begin{pmatrix} \left[-\frac{197}{158}, \frac{79}{79} \right] \\ \left[\frac{209}{1845}, \frac{100}{79} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1.24684, 0.88608] \\ [0.11328, 1.26582] \end{pmatrix}.$$

В качестве предобуславливателя выберем матрицу $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$.

Важным нюансом в использовании интервального метода Кравчика является выполнение условия

$$\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) < 1,$$

которое обеспечивает сходимость итерационного процесса к единственному формальному решению из \mathbb{IR}^n интервальной системы уравнений $x = (I - \Lambda \mathbf{A})x + \Lambda \mathbf{b}$. Интервальный метод Кравчика «наследует» это условие от теоремы Апостолатоса-Кулиша, приведенной на стр. 112.

Найдем спектральный радиус ρ матрицы $|I - \Lambda \mathbf{A}|$:

$$|I - \Lambda \mathbf{A}| = \begin{pmatrix} \frac{23}{85} & \frac{7}{17} \\ \frac{16}{85} & \frac{5}{17} \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) = 0.561 < 1.$$

Таким образом, сходимость интервального метода Кравчика обеспечена, однако результат итерационных вычислений показывает, что

брус $\mathbf{X}_{\text{ХБР}}$ с его помощью не будет улучшен:

$$\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{X}_{\text{ХБР}} = \begin{pmatrix} [-1.24684, 1.02331] \\ [-0.34818, 1.26582] \end{pmatrix},$$

$$(\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{X}_{\text{ХБР}}) \cap \mathbf{X}_{\text{ХБР}} = \mathbf{X}_{\text{ХБР}}.$$

Теперь попробуем взять в качестве начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ для построения итераций интервального метода Кравчика предварительную внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105), которая определяется выражением (1.99):

$$\theta = \frac{\frac{56}{85}}{1 - \frac{58}{85}} = \frac{56}{27} \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} [-2.07407, 2.07407] \\ [-2.07407, 2.07407] \end{pmatrix}.$$

Выбирая такое начальное приближение, мы получим следующую внешнюю оценку множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105) на [двадцать второй](#) итерации интервального метода Кравчика:

$$\mathbf{X}^{(20)} = \begin{pmatrix} [-1.24684, 1.02331] \\ [-0.34818, 1.26583] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}^{(22)}, \mathbf{X}^{(23)}) = \begin{pmatrix} 2.33269 \cdot 10^{-6} \\ 1.64524 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Как видно на Рис. 1.18, найденный брус $\mathbf{X}^{(20)}$ немного шире интервального вектора $\mathbf{X}_{\text{ХБР}}$. Тем не менее, использование интервального метода Кравчика позволило нам выполнить внешнее оценивание объединенного множества решений ИСЛАУ (1.105) так, что мы оказались избавлены от необходимости следить за принадлежностью матрицы \mathbf{A} классам M - и H -матриц, вычислять компарант $\langle \mathbf{A} \rangle$, проверять ее диагональность точечной средней матрицы $\text{mid } \mathbf{A}$ и т. д. ■

1.6 Решение интервальной линейной задачи о допусках

Интервальная линейная задача о допусках (или, сокращенно, ЛЗД) заключается в нахождении (по возможности, большего) бруса, который содержится в допусковом множестве решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.78) ИСЛАУ. Фактически, решая ЛЗД, мы выполняем внутреннее оценивание множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы линейных уравнений (1.73).

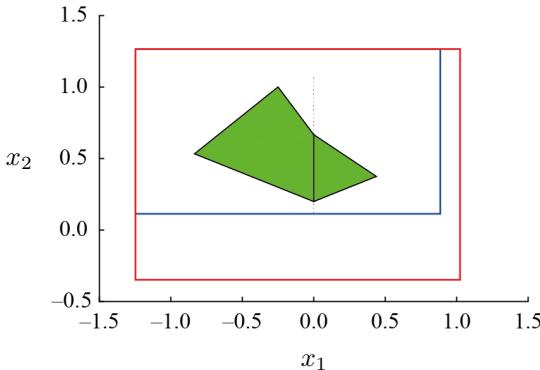


Рис. 1.18. Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105), брус \mathbf{X}_{XBR} (синяя линия), а также интервальный вектор $\mathbf{X}^{(20)}$, полученный с помощью интервального метода Кравчика (красная линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ было построено с использованием функции EqnWeak2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

Откуда взялось такое название задачи? Как было указано в §1.4.5, допусковое множество решений ИСЛАУ является множеством решений задачи оценивания внутреннего состояния статической системы управления (см. Рис. 1.5), характеризуемой линейной связью вход-выход, для случая, когда все входные воздействия являются возмущающими, а все выходы — стабилизируемыми. Если в рассматриваемой статической системе входные воздействия x и выходные отклики y связаны линейной зависимостью $y = Ax$, где $A = (a_{ij})$ — точечная вещественная матрица размера $m \times n$, и значения x и y имеют интервальную неопределенность, то допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ образовано такими $x \in \mathbb{R}^n$, при которых независимо от конкретных значений $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ значения выходных откликов y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ попадают в интервалы неопределенности y_1, y_2, \dots, y_n , называемые *допусками*.

Решение ЛЗД можно разделить на следующие этапы:

1. **исследование разрешимости ЛЗД** (§1.6.1), в результате проведения которого делается вывод о пустоте/непустоте допусково-

го множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ,

2. **коррекция ЛЗД** (§1.6.2–§1.6.4), выполняемая с целью достичь разрешимости поставленной интервальной задачи,
3. **построение бруса решения ЛЗД** (§1.6.5).

1.6.1 Исследование разрешимости линейной задачи о допусках

Линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, если допусковое множество решений ИСЛАУ пусто.

Из §1.4.5 и §1.4.6 нам известно, что установить принадлежность точки $x \in \mathbb{R}^n$ множеству $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы можно двумя способами:

- 1) проверить выполнение для точки x условий теоремы И. А. Шарой и/или теоремы Рона в результате подстановки этой точки в системы линейных неравенств (1.89) и/или (1.90), соответственно.
- 2) «распознать» принадлежность точки x множеству $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с помощью распознающего функционала Tol (1.97).

Для исследования разрешимости ЛЗД, заключающегося в установлении $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ или $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, мы выберем второй способ, основанный на использовании функционала Tol . Некоторые причины, по которым данный способ предпочтительнее представления множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ как решения системы двусторонних линейных неравенств, приведены в §1.4.6. Вдобавок к этим причинам выбранный нами способ имеет неочевидные, но весьма весомые преимущества, которые проявятся, когда мы перейдем к выполнению коррекции ЛЗД.

Посмотрим, как «строится» распознающий функционал Tol:

$$x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq \mathbf{b}_i = [\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i, \text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В последней записи можно узнать выражение, которое определяет распознающий функционал

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Поскольку

$$\text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i = -\underline{\mathbf{b}}_i, \quad \text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{b}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то функционал Tol представляет собой нижнюю огибающую не более чем $m \cdot 2^{n+1}$ линейных функций, в которые $\underline{\mathbf{b}}_i$ и $\bar{\mathbf{b}}_i$ входят как свободные члены, а верхние и нижние границы интервальнозначных элементов матрицы \mathbf{A} — как коэффициенты перед аргументами функций.

Распознающий функционал Tol непрерывен по всем своим аргументам и непрерывен по Липшичу (см. стр. 52), потому что в него входят только липшицевые функции, а также достигает конечного максимума на всем пространстве \mathbb{R}^n . Последнее свойство функционала Tol является крайне важным для его *безусловной максимизации*, в которой заключается полное исследование разрешимости ЛЗД.

Итак, укажем последовательность действий, которую необходимо выполнить при исследовании разрешимости интервальной линейной задачи о допусках с помощью распознающего функционала Tol:

1. Решение задачи абсолютной максимизации

Нахождение точки абсолютного максимума $\tau \in \mathbb{R}^n$ функционала Tol (1.97) и его значения в этой точке $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$.

2. Определение разрешимости ЛЗД

- если $T \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т. е. линейная задача о допусках для ИСЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ совместна, и точка τ принадлежит допусковому множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$;
- если $T > 0$, то $\tau \in \text{int } \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, причем принадлежность точки τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных в матрице \mathbf{A} и векторе \mathbf{b} ;
- если $T < 0$, то $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т. е. линейная задача о допусках для ИСЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ несовместна.

На сегодняшний день существует достаточно много эффективных численных методов для решения задачи максимизации негладких вогнутых функционалов, каким является распознающий функционал Tol . Это свидетельствует о том, что данный способ исследования разрешимости ЛЗД является доступным и практичным. Если же размерность линейной задачи о допусках невелика, то для максимизации функционала Tol можно использовать методы прямого поиска.

Пример 1.6.1. Вернемся к ИСЛАУ (1.92)

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix},$$

ранее рассмотренную в подпараграфе ««Анtagонизм» управляемого и допускового множеств решений ИСЛАУ» в §1.4.5. Мы уже знаем, что допусковое множество решений ИСЛАУ (1.92) пусто, а ее непустое управляемое множество решений $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ показано на Рис. 1.9.

Подтвердим пустоту множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.92), которая равнозначна неразрешимости ЛЗД для данной интервальной линейной системы уравнений, используя функционал Tol (1.97).

Распознающий функционал допускового множества решений есть

$$\begin{aligned} \text{Tol} = \min \{ & 0.5 - | 3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot x_1 + [1.0, 2.0] \cdot x_2) |, \\ & 0.5 - | 7.5 - (-[7.0, -5.0] \cdot x_1 + [6.0, 7.0] \cdot x_2) | \}, \end{aligned}$$

и его трехмерный и контурный графики представлены на Рис. 1.19.

На Рис. 1.19 хорошо видна многогранность поверхности распознающего функционала. Максимум функционала Tol равен -0.785 и достигается в точке $(0.354, 1.508)^\top$. Значит, допусковое множество решений ИСЛАУ (1.92) действительно пусто, и ЛЗД несовместна. ■

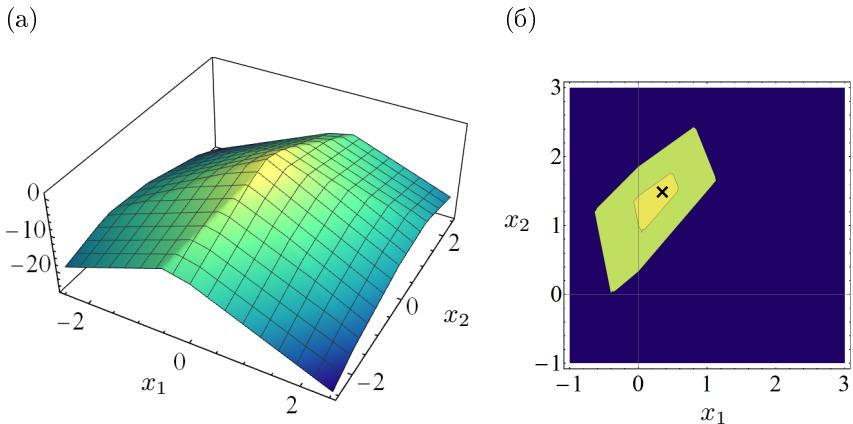


Рис. 1.19. Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.92). Положение точки $(0.354, 1.508)$ показано на трехмерном и контурном графиках черной точкой и черным крестиком. Области $Tol < -5$, $-5 \leq Tol < -2$ и $Tol \geq -2$ выделены синим, светло-зеленым и желтым цветами, соответственно

1.6.2 Коррекция линейной задачи о допусках

Если речь идет о решении практической задачи, то отрицательный результат, заключающийся в несовместности ЛЗД, малоинтересен. Гораздо большей ценностью обладает информация о том, насколько задача неразрешима и какие изменения над ее данными необходимо произвести, чтобы все же достичь разрешимости.

Несовместность линейной задачи о допусках может иметь разные причины. Если входные данные ЛЗД достоверны, то, как было ранее отмечено в §1.4.5, частой причиной пустоты допускового множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ является слишком большая «ширина» произведения $\mathbf{A}x$, не позволяющая ему «уместиться» в \mathbf{b} .

Следовательно, для достижения разрешимости ЛЗД можно

- ▷ расширять интервальные компоненты вектора правой части \mathbf{b} ,
- ▷ сужать интервальные элементы матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ.

Такая процедура изменения входных данных ЛЗД для достижения ее совместности называется *коррекцией*.

1.6.3 Коррекция ИСЛАУ: изменение правой части

Первый, технически более простой, подход к достижению разрешимости ЛЗД заключается в коррекции вектора \mathbf{b} и направлен на ослабление ограничений в правой части ИСЛАУ, т. е. расширение допусков.

Равномерное уширение всех компонент вектора правой части ИСЛАУ Пусть матрица \mathbf{A} ИСЛАУ неизменна, и значения $\text{mid } \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ зафиксированы. Тогда расширение вектора \mathbf{b} путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознавающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K,$$

причем $\text{Arg max } \text{Tol}$ — положение точки T — не изменится.

Неравномерное уширение всех компонент вектора правой части ИСЛАУ Если «размахи» интервальных компонент вектора правой части \mathbf{b} различаются значительно, то более целесообразным подходом к достижению разрешимости ЛЗД будет их расширение на неодинаковые величины. Меру, пропорционально которой увеличивается радиус каждой компоненты вектора \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, определяет величина v_i , называемая весом. Весы формируют масштабирующий вектор

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m), \quad v_i \geq 0.$$

Неравномерно уширенный вектор \mathbf{b} ИСЛАУ представим в виде

$$\mathbf{b} + Kv([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

где K — некоторая постоянная.

Существует ли способ избежать перебора вручную в процессе поиска таких значений K , которые обеспечивают разрешимость ЛЗД? Если масштабирующий вектор v задан, то мы можем произвести абсолютную максимизацию функционала $\text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.109) и выбрать

$$K \geq |V|, \quad V = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

$$\text{Tol}_v(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (1.109)$$

Стоит заметить, что, выбирая неравномерное уширение вектора правой части \mathbf{b} ИСЛАУ, мы должны ожидать изменения Arg max Tol .

Характеристика совместности ЛЗД В §1.4.4 нами была введена величина $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.84), служащая количественной мерой разрешимости ИСЛАУ, решением которой является множество $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\}.$$

Поскольку множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ являются своеобразными «антагонистами» по отношению друг к другу (см. §1.4.5), то $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ при $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.

Использование техники распознающих функционалов позволяет выбрать другую, значительно более «чувствительную» характеристику совместности интервальной линейной задачи о допусках:

$$\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_0(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

$$\text{Tol}_0(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ |\mathbf{b}_i|^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (1.110)$$

Если $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0$, то ЛЗД несовместна; в противоположном случае $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ ЛЗД разрешима. В целом, для того, чтобы ответить на вопрос о степени (не-)разрешимости ЛЗД, нужно найти модуль $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Пример 1.6.2. Рассмотрим ИСЛАУ (1.92):

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.92) является пустым (см. стр. 121): $\max_{\mathbb{R}^2} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.785$, $\text{Arg max Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (0.354, 1.508)$.

Сначала добьемся разрешимости ЛЗД путем равномерного уширения радиусов компонент вектора правой части \mathbf{b} .

Выберем $K = 5$:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix}.$$

ИСЛАУ (1.92) с равномерно уширенной правой частью имеет вид

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

В результате равномерного уширения вектора \mathbf{b} ИСЛАУ (1.92) безусловный максимум распознающего функционала Tol становится равным $4.215 = -0.785 + 5.000$ в точке $(0.354, 1.508)$. Следовательно, ЛЗД для ИСЛАУ (1.111) разрешима. На Рис. 1.20(а) показаны поверхности распознающего функционала Tol до и после коррекции вектора правой части \mathbf{b} ИСЛАУ (1.92). Можно заметить, что после равномерного уширения вектора \mathbf{b} ИСЛАУ (1.92) форма поверхности распознающего функционала Tol не изменилась. Контурный график функционала Tol, построенный для ИСЛАУ (1.111), представлен на Рис. 1.20(б).

Теперь произведем неравномерное уширение интервальных компонент вектора правой части ИСЛАУ (1.92) для того, чтобы достичь разрешимости линейной задачи о допусках.

Выберем произвольный масштабирующий вектор

$$v = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и максимизируем функционал Tol_v (1.109) для ИСЛАУ (1.92):

$$\begin{aligned} \text{Tol}_v &= \min \{ 2.0 \cdot (0.5 - |3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot x_1 + [1.0, 2.0] \cdot x_2)|), \\ &\quad 0.5 \cdot (0.5 - |7.5 - (-[7.5, -5.0] \cdot x_1 + [6.0, 7.0] \cdot x_2)|) \}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$V = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -1.5, \quad \text{Arg max } \text{Tol}_v = (0.25, 1.75),$$

то постоянную K , входящую в неравномерно уширенный вектор \mathbf{b} , мы можем выбрать так же равной $K = 5.0 \geq 1.5 = |V|$.

ИСЛАУ (1.92) с неравномерно уширенным вектором \mathbf{b} имеет вид

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0.5, 6.5] \\ [-3, 18] \end{pmatrix}. \quad (1.112)$$

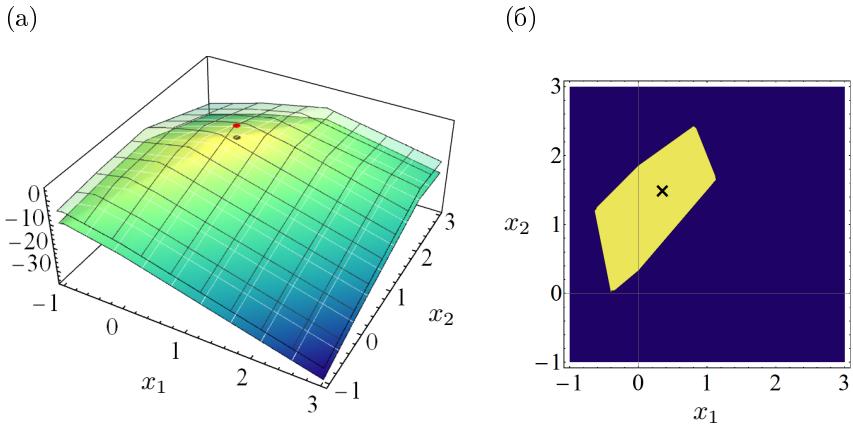


Рис. 1.20. (а) Трехмерные графики функционала Tol , построенные для ИСЛАУ (1.92) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) равномерного уширения компонент вектора \mathbf{b} . Положения точек $(0.354, 1.508, -0.785)$ и $(0.354, 1.508, 4.215)$ выделены черной и красной точками, соответственно. (б) Контурный график распознающего функционала Tol , построенный для ИСЛАУ (1.111). Области $Tol < 0$ и $Tol \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки $(0.354, 1.508)$ отмечено черным крестиком

Неравномерное расширение интервального вектора \mathbf{b} правой части приводит к тому, что максимальное значение распознающего функционала Tol становится равным 1.831 и достигается в точке $(0.008, 2.315)$. Множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.112) непусто, а значит, разрешимость ЛЗД достигнута. На Рис. 1.21(а) показаны поверхности функционала Tol до и после неравномерного уширения вектора \mathbf{b} ИСЛАУ (1.92). Видно, что в отличие от случая равномерного уширения вектора правой части ИСЛАУ (1.92) формы поверхности и положения безусловных максимумов распознающего функционала Tol до и после неравномерного уширения вектора \mathbf{b} не совпадают. В дополнение к приведенным трехмерным графикам на Рис. 1.21(б) представлен контурный график функционала Tol , построенный для ИСЛАУ (1.112).

Теперь найдем значения величины $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, модуль которой является количественной мерой неразрешимости ЛЗД для ИСЛАУ (1.92) и мерой разрешимости ЛЗД для двух ИСЛАУ (1.111) и (1.112). Безуслов-

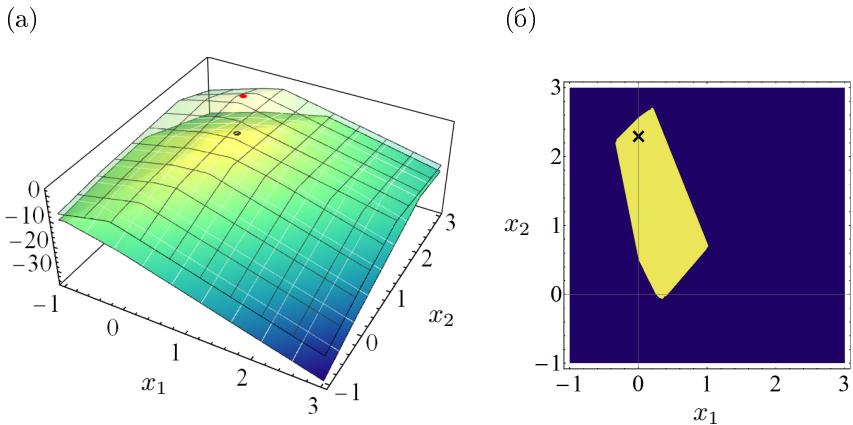


Рис. 1.21. (а) Трехмерные графики функционала Tol , построенные для ИСЛАУ (1.92) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) неравномерного уширения вектора \mathbf{b} . Положения точек $(0.354, 1.508, -0.785)$ и $(0.008, 2.315, 1.831)$ выделены черной и красной точками, соответственно. (б) Контурный график распознающего функционала Tol , построенный для ИСЛАУ (1.112). Области $Tol < 0$ и $Tol \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки $(0.008, 2.315)$ отмечено черным крестиком

ные максимумы функционала Tol_0 (1.110), а также значения величины $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.84) для данных интервальных линейных систем равны

до коррекции

$$\text{ИСЛАУ (1.92): } \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.193, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.018,$$

после коррекции

$$\text{ИСЛАУ (1.111): } \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.371, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.722,$$

$$\text{ИСЛАУ (1.112): } \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.274, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -1.024.$$

Напомним, что ЛЗД разрешима, если $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, и отрицательные значения $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ свидетельствуют о непустоте допускового множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ. Получается, что использование обеих количественных характеристик степени разрешимости ЛЗД позволило нам корректно установить случаи несовместности и совместности линейной задачи о допусках для всех трех ИСЛАУ (1.92), (1.111), (1.112). Заметим, что для каждой интервальной системы уравнений оба услов-

вия (i) и (ii) теоремы 1.4.7 (см. стр. 86) либо выполняются, либо не выполняются, что обеспечивает достоверность информации о знаках найденных значений $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Что касается ответа на вопрос о том, какая из ЛЗД — для ИСЛАУ (1.111) или ИСЛАУ (1.112) — «более совместна», то предпочтение стоит отдать результату, полученному с использованием величины $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$: ЛЗД для ИСЛАУ (1.111) «имеет больший запас» устойчивой разрешимости, чем ЛЗД для ИСЛАУ (1.112). ■

1.6.4 Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы

Обсудим, как можно добиться разрешимости ЛЗД путем коррекции интервальной матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ, для которой имеет место

$$\text{rad } \mathbf{b}_i > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \text{rad } \mathbf{a}_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Как и в случае коррекции вектора правой части \mathbf{b} ИСЛАУ путем его равномерного и неравномерного уширения, мы рассмотрим два приема — равномерное и неравномерное сужение интервальных элементов матрицы \mathbf{A} — и проиллюстрируем их применение примерами.

Идея коррекции матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ заключается в том, чтобы заменить ее интервальной матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ такой, что

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) &< \text{rad } \mathbf{A}, \\ \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) &= \text{mid } \mathbf{A}, \end{aligned}$$

и тем самым достичь разрешимости ЛЗД для ИСЛАУ с интервальными матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ и неизменным вектором правой части \mathbf{b} . Операция, обозначаемая через « \ominus » (2.7), называется внутренним вычитанием в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{K}\mathbb{R}$ (см. стр. 183).

Матрица \mathbf{E} , которая вычитается с помощью операции « \ominus » из матрицы \mathbf{A} исходной ИСЛАУ, является матрицей размера $m \times n$ с уравновешенными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$, причем значения точечных величин e_{ij} удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq e_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad \text{для всех } i, j, \tag{1.113a}$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} |\tau_j| = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.113b}$$

где K — положительная постоянная, τ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ — аргументы безусловного максимума распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0.$$

Поскольку для двух интервалов s и x из \mathbb{IR} таких, что $\text{rad } x \geq \text{rad } s$, имеет место $|x \ominus s| = |x| - |s|$, то

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = K + T,$$

и, выбирая $K \geq |T|$, мы обеспечиваем разрешимость ЛЗД для интервальной линейной системы с новой матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ и вектором \mathbf{b} .

Если же мы выберем постоянную K такой, что $0 < K \leq \Delta$,

$$\Delta := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |\tau_j| \text{rad } a_{ij} \right\} > 0, \quad (1.114)$$

то после коррекции линейная задача о допусках для ИСЛАУ с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ и вектором \mathbf{b} будет «более разрешима», чем она была для ИСЛАУ с тем же интервальным вектором \mathbf{b} и матрицей \mathbf{A} .

Стоит заметить, что система уравнений (1.113a)–(1.113b) недоопределена, а значит, интервальную $m \times n$ -матрицу \mathbf{E} такую, что множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, можно выбрать неединственным образом.

Все вышеизложенное относилось к случаю равномерного сужения интервальных элементов матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ, для которой ЛЗД неразрешима. Теперь сделаем несколько комментариев относительно неравномерного сужения элементов интервальной матрицы \mathbf{A} . Для уменьшения радиусов интервальных элементов, расположенных в различных строках матрицы \mathbf{A} , пропорционально заданным величинам $v_i > 0$, так же, как в случае неравномерного уширения вектора \mathbf{b} ИСЛАУ, можно ввести масштабирующий вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^\top$. Тогда, решая систему уравнений (1.113a)–(1.113b), в которой e_{ij} заменены на $v_i e_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$ мы можем построить матрицу $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, интервальная линейная задача с которой (и неизменным вектором \mathbf{b}) разрешима.

Пример 1.6.3. Вернемся к ИСЛАУ (1.92):

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [7, 8] \end{pmatrix}.$$

Как нам известно из ранее рассмотренного примера (см. стр. 124), линейная задача о допусках для ИСЛАУ (1.92) несовместна:

$$T = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.785 \rightarrow |T| = 0.785,$$

$$\tau = \text{Arg} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (0.354, 1.508) \rightarrow |\tau_1| = 0.354, |\tau_2| = 1.508.$$

Поочередно прибегнем к равномерному и неравномерному сужению интервальных элементов матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ (1.92) для достижения разрешимости ЛЗД. Начнем с равномерного сужения матрицы \mathbf{A} .

Первым шагом в решении системы уравнений (1.113a)–(1.113b) будет нахождение точечной матрицы

$$\text{rad } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Значит, для построения интервальной матрицы \mathbf{E} с уравновешенными интервальными элементами $e_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ необходимо выбрать такое значение $e = e_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, которое удовлетворяет следующей системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq e \leq 1.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{11}, \\ 0 \leq e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{12}, \text{rad } \mathbf{a}_{22}, \\ 0 \leq e \leq 1.0 = \text{rad } \mathbf{a}_{21}, \\ 0.354 \cdot e + 1.508 \cdot e = K \geq |T| = 0.785 \end{array} \right| \rightarrow 0.422 \leq e \leq 0.500$$

Остановим свой выбор на значении $e = 0.5$.

Перейдем к нахождению матрицы $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$. Согласно (2.7) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ominus \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [2 - (-0.5), 5 - 0.5] & [1 - (-0.5), 2 - 0.5] \\ [-7 - (-0.5), -5 - (0.5)] & [6 - (-0.5), 7 - 0.5] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = \begin{pmatrix} [2.5, 4.5] & [1.5, 1.5] \\ [-6.5, -5.5] & [6.5, 6.5] \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

Для того, чтобы установить разрешимость ЛЗД для ИСЛАУ (1.92) с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, максимизируем распознающий функционал

$$\begin{aligned} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &= \min \{0.5 - |3.5 - ([2.5, 4.5] \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2)|, \\ &\quad 0.5 - |7.5 - ([-6.5, -5.5] \cdot x_1 + 6.5 \cdot x_2)|\}. \end{aligned}$$

Безусловный максимум функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b})$ достигается в точке $(0.354, 1.508)$ и равен $0.146 = T + K = -0.785 + 1.862e$. В связи с тем, что $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) > 0$, для интервальной линейной системы с вектором \mathbf{b} и матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, полученной в результате коррекции правой части ИСЛАУ (1.92), ЛЗД является разрешимой.

Теперь произведем неравномерное сужение интервальных элементов матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ (1.92). Выберем веса v_i , пропорционально которым будет происходить уменьшение радиусов интервалов в первой и второй строках матрицы, и сформируем масштабирующий вектор v :

$$v = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{diag } v = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

В случае неравномерного сужения матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ интервальная матрица \mathbf{E} размера $m \times n$, вычитаемая из матрицы \mathbf{A} с помощью операции « \ominus », может быть представлена в виде

$$\mathbf{E} = \text{diag } v \cdot \begin{pmatrix} [-e, e] & [-e, e] \\ [-e, e] & [-e, e] \end{pmatrix},$$

Значение e определяется после решения системы неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq v_1 \cdot e \leq 1.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{11}, \\ 0 \leq v_1 \cdot e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{12}, \\ 0 \leq v_2 \cdot e \leq 1.0 = \text{rad } \mathbf{a}_{21}, \\ 0 \leq v_2 \cdot e \leq 0.5 = \text{rad } \mathbf{a}_{22}, \\ 0.354 \cdot v_1 \cdot e + 1.508 \cdot v_1 \cdot e \geq 0.785 = |T|, \\ 0.354 \cdot v_2 \cdot e + 1.508 \cdot v_2 \cdot e \geq 0.785 = |T| \end{array} \right| \rightarrow 0.468 \leq e \leq 0.5.$$

Мы выберем $e = 0.5$ и запишем

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} [-0.50, 0.50] & [-0.50, 0.50] \\ [-0.45, 0.45] & [-0.45, 0.45] \end{pmatrix}.$$

Тогда результатом операции « \ominus » является матрица

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = \begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.55, -5.45] & [6.45, 6.55] \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

Проверим, разрешима ли ЛЗД для ИСЛАУ (1.92) с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, полученной в результате неравномерного сужения матрицы \mathbf{A} . Так как

безусловным максимумом распознающего функционала

$$\begin{aligned} \text{Tol} = \min \{ & 0.5 - |3.5 - ([2.50, 4.50] \cdot x_1 + [1.50, 1.50] \cdot x_2)|, \\ & 0.5 - |7.5 - ([-6.55, -5.45] \cdot x_1 + [6.45, 6.55] \cdot x_2)| \} \end{aligned}$$

является точка $(0.358, 1.498, 0.142)$, то множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$.

Напоследок обсудим, какой запас устойчивой разрешимости имеют интервальные линейные системы с матрицами (1.115) и (1.116), полученными в результате равномерного и неравномерного сужения матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ (1.92). Найдем для всех трех ИСЛАУ безусловные максимумы функционала Tol_0 (1.110) и значения величины $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (1.84):

до коррекции

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.193, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.018,$$

после коррекции

$$\begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.50, -5.50] & [6.50, 6.50] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.035, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.250,$$

$$\begin{pmatrix} [2.50, 4.50] & [1.50, 1.50] \\ [-6.55, -5.45] & [6.45, 6.55] \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.029, \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.250.$$

ЛЗД разрешима, если $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, и $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0$ означает непустоту допускового множества решений ИСЛАУ. Несмотря на то, что для двух ИСЛАУ с интервальными матрицами (1.115) и (1.116) не выполняется условие (ii) теоремы 1.4.7 (см. стр. 86), использование обеих характеристик степени разрешимости ЛЗД позволило нам верно определить, с какими интервальными матрицей и вектором линейная задача о допусках разрешима или неразрешима. На Рис. 1.22 показаны непустые допусковые множества решений ИСЛАУ с матрицами (1.115) и (1.116) после выполнения коррекции исходных данных ЛЗД. Видно, что допусковое множество решений ИСЛАУ с матрицей (1.116) меньше, чем то же множество ИСЛАУ (1.115). Значит, для последней интервальной линейной системы ЛЗД более разрешима. На этом основании можно утверждать, что величина $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, являющаяся безусловным максимумом функционала Tol_0 (1.110), является более точной количественной характеристикой степени разрешимости ЛЗД. ■

Ab- и bA-стратегии достижения разрешимости линейной задачи о допусках Как мы убедились, уширение вектора правой части \mathbf{b}

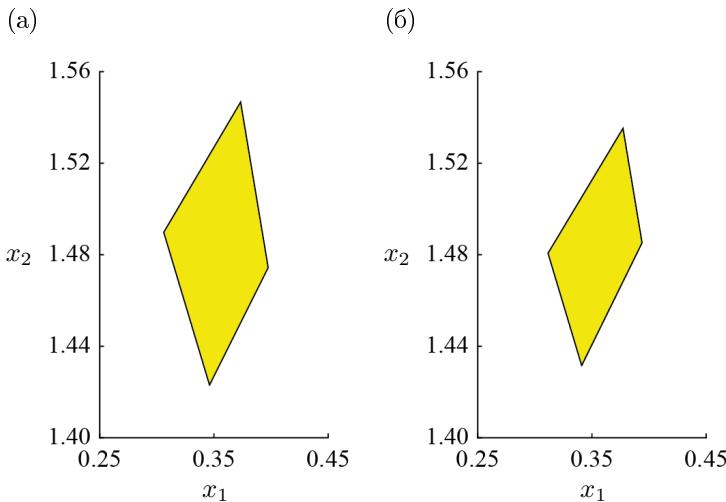


Рис. 1.22. Допусковые множества решений двух ИСЛАУ с матрицей (1.115) (а) и (1.116) (б), полученными в результате коррекции матрицы ИСЛАУ (1.92). Для построения множеств АЕ-решений использовалась функция `EqnTo12D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27]

и сужение интервальной матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ, выполняемые независимо друг от друга, приводят к разрешимости ЛЗД. Если же мы применим оба приема к одной и той же интервальной линейной системе поочередно, то разрешимость линейной задачи о допусках будет достигнута комбинированным способом. В зависимости от порядка изменения матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} ИСЛАУ мы будем прибегать к Ab- или bA-типу коррекции данных ЛЗД, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы \mathbf{A} в случае выполнения коррекции Ab-типа или уширение компонент вектора \mathbf{b} при выборе bA-коррекции — не обязательно должен приводить к разрешимости линейной задачи о допусках.

Авторами работы [24] была продемонстрирована техника комбинированной Ab-стратегии для достижения разрешимости ЛЗД, предложенная С. П. Шарым [31]. В работе [24] разрешимость ЛЗД была достигнута путем коррекции правой части и матрицы ИСЛАУ, а также комбинацией этих способов, и, кроме того, показаны закономерности изменения положения решения ИСЛАУ $\text{Arg} \max \text{Tol}$ в зависимости от способа коррекции элементов интервальной матрицы системы.

1.6.5 Построение бруса решения задачи

После того, как разрешимость ЛЗД с матрицей \mathbf{A} и вектором \mathbf{b} установлена и достигнута, можно переходить к последнему из трех этапов решения линейной задачи о допусках — построению бруса решения.

«*Центровой подход*» к внутреннему оцениванию допускового множества решений ИСЛАУ, развиваемый многочисленными авторами, заключается в выборе некоторой точки $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и ее использовании в качестве *центра* искомого бруса внутренней оценки. Мы рассмотрим «центровой подход» в том виде, в каком он был предложен авторами работы [25] В. В. Шайдуровым и С. П. Шарым. К достоинствам метода В. В. Шайдурова, предназначенного для конструирования бруса решения ЛЗД вокруг заданного центра, можно отнести простоту и удобство компьютерной реализации, однако точность внутренней оценки, получаемой с помощью данного метода, в существенной мере зависит от ширины матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ: чем она меньше, тем выше точность.

Алгоритм метода В. В. Шайдурова для построения бруса внутренней оценки множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ имеет следующий вид:

1. Выбрать некоторую точку $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

2. Для выбранной точки y вычислить

$$r_i = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.117)$$

3. Определить величину $\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} r_i$.

4. Построить интервальный вектор

$$y + \varrho \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top,$$

который является внутренней оценкой допускового множества решений ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, т. е. $(y + \varrho \mathbf{e}) \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Пример 1.6.4. Используя метод В. В. Шайдурова, построим брус внутренней оценки множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.111)

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [1, 2] \\ [-7, -5] & [6, 7] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 9] \\ [2, 13] \end{pmatrix},$$

которая была получена в результате коррекции ИСЛАУ (1.92) путем равномерного уширения интервальных компонент вектора \mathbf{b} .

Нашим первым шагом будет выбор некоторой точки — центра будущего бруса внутренней оценки — из допускового множества решений ИСЛАУ (1.111), изображенного на Рис. 1.20. Выберем $y = (-0.2, 0.5)$ и проверим принадлежность данной точки множеству $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, для чего определим в ней значение распознающего функционала Tol (1.97):

$$y = (-0.2, 0.5) \rightarrow Tol(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1.5 > 0.$$

Вычислим значения величин r_1 и r_2 , определяемых в (1.117):

$$r_1 = \frac{5.5 - |3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot (-0.2) + [1.0, 2.0] \cdot 0.5)|}{5 + 2} = 0.214,$$

$$r_2 = \frac{5.5 - |7.5 - ([-7.0, -5.0] \cdot (-0.2) + [6.0, 7.0] \cdot 0.5)|}{7 + 7} = 0.143.$$

Значит,

$$\varrho = \min(r_1, r_2) = 0.143,$$

и бруском решения ЛЗД для ИСЛАУ (1.111) является

$$y + \varrho \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix} + 0.143 \cdot \begin{pmatrix} [-1.0, 1.0] \\ [-1.0, 1.0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.343, -0.057] \\ [0.357, 0.643] \end{pmatrix}$$

Теперь выберем в качестве центра бруса внутренней оценки множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.111) точку $y = (0.354, 1.508)$, которая, как мы ранее установили (см. стр. 125), является аргументом безусловного максимума распознающего функционала Tol : $Tol(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = 4.215$.

В таком случае

$$r_1 = \frac{5.5 - |3.5 - ([2.0, 5.0] \cdot 0.354 + [1.0, 2.0] \cdot 1.508)|}{5 + 2} = 0.602,$$

$$r_2 = \frac{5.5 - |7.5 - ([-7.0, -5.0] \cdot 0.354 + [6.0, 7.0] \cdot 1.508)|}{7 + 7} = 0.301.$$

Получается, что $\varrho = r_2 = 0.301$, и ввнутренней оценкой допускового множества решений ИСЛАУ (1.111) является интервальный вектор

$$y + \varrho \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0.354 \\ 1.508 \end{pmatrix} + 0.301 \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.053, 0.655] \\ [1.207, 1.809] \end{pmatrix}.$$

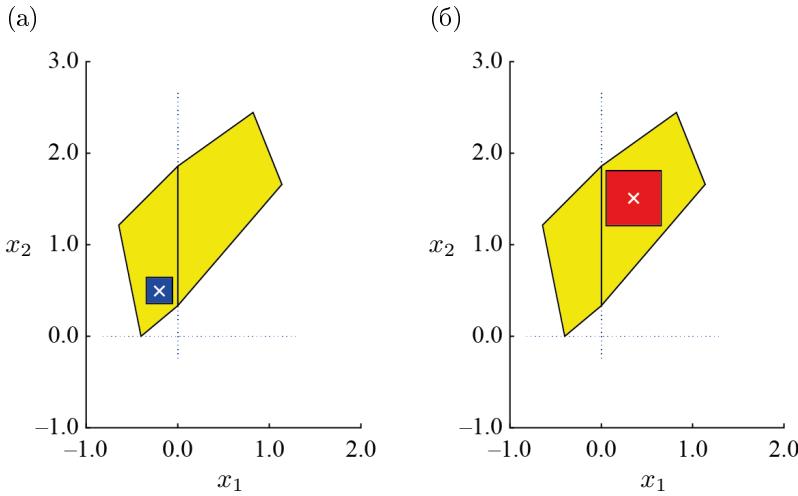


Рис. 1.23. Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.111) и брусы его внутренней оценки, построенные вокруг точек $(-0.2, 0.5)$ (а) и $(0.354, 1.508)$ (б) с помощью метода В. В. Шайдурова. Положения центров оценивающих брусов выделены белыми крестиками. Для построения множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ была использована функция EqnTol2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]

На Рис. 1.23 показаны множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.111), а также брусы его внутренней оценки, построенные вокруг двух разных центров $y = (-0.2, 0.5)$ и $y = (0.354, 1.508)$.

Почему размер бруса, центр которого находится в точке $(-0.2, 0.5)$, значительно меньше размера бруса, сконструированного вокруг точки $(0.354, 1.508)$? Можно заметить, что числитель величины r (1.117), значение которой задает «размахи» результирующего интервального вектора по осям x_1 и x_2 , представляет собой выражение, определяющее распознавающий функционал Tol (1.97), в то время как знаменателем этой величины является сумма модулей интервальных элементов, расположенных в одной строке интервальной матрицы \mathbf{A} ИСЛАУ. Знаменатель величины r не зависит от положения центра, вокруг которого строится брус-решение ЛЗД, и, следовательно, размер получаемой внутренней оценки множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ полностью определяется значением распознавающего функционала Tol в точке, которая

служит центром оценивающего бруса. Поэтому можно утверждать, что при использовании метода В. В. Шайдурова размер бруса внутренней оценки допускового множества решений ИСЛАУ (1.111) с центром в точке (0.354, 1.508) является максимально большим. Подробное рассмотрение методологии внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ дано в главах 6 и 11 книги [45]. Различные виды оценок множеств решений обсуждаются в работах [41], [42].

В завершение рассмотрения вопроса о построении бруса решения ЛЗД с помощью метода В. В. Шайдурова сделаем еще один комментарий, касающийся определения центра оценивающего бруса. На практике выбор его положения диктуется конкретными требованиями к входным данным линейной задачи о допусках, и потому нельзя однозначно утверждать, что центр в точке $\text{Arg max } \text{Tol}$ будет «лучшим» выбором по той причине, что он позволяет получить оценивающий брус максимально большого размера. Хотя, конечно, в определении задачи линейной задачи о допусках, данном на стр. 117, фигурирует именно нахождение *по возможности большего* бруса, который содержится в допусковом множестве решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ. ■

1.7 Решение интервальных систем нелинейных алгебраических уравнений

Численное решение простейшего нелинейного точечного уравнения с одной переменной вида $f(x) = 0$ состоит из двух этапов:

- 1) **отделение корней** нелинейного уравнения, заключающееся в установлении аналитическим или графическим способом приближенных значений искомых корней или интервалов, каждый из которых содержит лишь один корень нелинейного уравнения,
- 2) **уточнение приближенных значений корней** до заданной степени точности с помощью выбранного итерационного метода: метода половинного деления (метода бисекции), метода простой итерации, метода Ньютона, метода хорд и проч.

Рассмотрим, как интервальные численные методы могут быть использованы для нахождения решений точечных нелинейных уравнений и систем точечных нелинейных уравнений, а также внешнего оценивания объединенного множества решений интервальных нелинейных

уравнений и их систем. Далее нам предстоит познакомиться с различными модификациями интервального метода Ньютона — одномерного и многомерного. Отдельное внимание будет уделено интервальному методу Кравчика, частным случаем которого является итерационный метод Кравчика для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ вида $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (см. стр. 114).

1.7.1 Одномерный интервальный метод Ньютона

Итак, пусть имеется функция

$$f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R},$$

интервал локализации \mathbf{X} нуля x^* которой нам известен

$$f(x^*) = 0,$$

и, кроме того, функция f дифференцируема на интервале \mathbf{X} .

Тогда для любой точки $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях справедливо

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(\xi) \quad (1.118)$$

где ξ — некоторая точка между \tilde{x} и x^* .

Поскольку мы знаем, что $f(x^*) = 0$, то можем записать

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi)}, \quad f'(\xi) \neq 0.$$

Пользуясь включением $f'(\xi) \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$, где $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$ — какая-либо интервальная оценка производной от функции f на интервале локализации \mathbf{X} , мы можем интерваллизовать последнее равенство:

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})}, \quad 0 \notin \mathbf{f}'(\mathbf{X}). \quad (1.119)$$

Определение 1.7.1 Пусть заданы функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и интервальная оценивающая функция \mathbf{f}' для её производной. Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{X})} \quad (1.120)$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона для f .

Итерационная формула интервального метода Ньютона имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \\ \tilde{x}^{(k)} &\in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.121)$$

Выбор пересечения $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ в качестве нового, более точного интервала локализации корня x^* нелинейного точечного уравнения $f(x) = 0$ на каждой итерации обусловлен тем, что любой нуль функции f на интервале \mathbf{X} лежит также в $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$, и можно ожидать, что результирующий интервал $(\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}))$ будет хотя бы не хуже \mathbf{X} .

Если итерационный процесс одномерного интервального метода Ньютона организован правильно, то на каждом шаге вычислений мы будем получать интервал $\mathbf{X}^{(k)}$ все меньшей ширины. При достижении требуемой точности локализации решения, т. е. ширины $\mathbf{X}^{(k)}$, итерационное уточнение корня заданного нелинейного уравнения прекращается. Так же, как у обычного неинтервального метода Ньютона, асимптотический порядок сходимости интервального метода Ньютона к нулю функции f на интервале \mathbf{X} является квадратичным.

Какие проблемные ситуации могут возникать при выполнении итераций одномерного интервального метода Ньютона?

1. $0 \in f'(\mathbf{X})$

В этом случае необходим выход за рамки классической интервальной арифметики \mathbb{IR} : например, деление на нульсодержащие интервалы допускается в интервальной арифметике Кэхэна, некоторые сведения о которой приведены в §3.1.2.

2. $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})^{(k)} = \emptyset$

Получение пустого пересечения $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$ сигнализирует о том, что на $\mathbf{X}^{(k)}$, а следовательно, и изначально выбранном интервале локализации \mathbf{X} , отсутствует решение нелинейного уравнения $f(x) = 0$. После получения пустого пересечения вычислительный процесс должен быть прекращен, так как арифметические операции с пустым множеством не определены.

$$3. \quad \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)}$$

«Застаивание» — весьма неблагоприятный сценарий развития итераций. Эта ситуация возникает в том случае, если

$$\mathbf{X}^{(k)} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}).$$

Устранить «застаивание» можно путем дробления исходного интервала локализации \mathbf{X} на несколько подинтервалов, к которым поочередно применяется интервальный метод Ньютона, и последующего объединения полученных результатов. Часто используемым приемом является дробление интервала \mathbf{X} на два равных интервала — так называемая *бисекция*:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' \cup \mathbf{X}''.$$

Для того, чтобы закончить обсуждение интервального метода Ньютона, следует заметить, что наряду с одномерным интервальным оператором Ньютона можно ввести *наклонный* интервальный оператор Ньютона как отображение $\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$, действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, \tilde{x})}, \quad 0 \notin \mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, \tilde{x}). \quad (1.122)$$

Пример 1.7.1. Воспользуемся интервальным методом Ньютона для численного решения уравнения

$$x^3 e^x = 0.5. \quad (1.123)$$

В первую очередь построим график функции

$$f(x) = 0.5 - x^3 e^x \quad (1.124)$$

для того, чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$ и установить интервалы их локализации. Согласно Рис. 1.24, единственный корень данного уравнения принадлежит интервалу

$$\mathbf{X} = [0.1, 1.0].$$

Отметим, что на выбранном интервале \mathbf{X} функция $f(x)$, а также ее первая и вторая производные по x непрерывны. Кроме того, на данном отрезке обе функции $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свой знак.

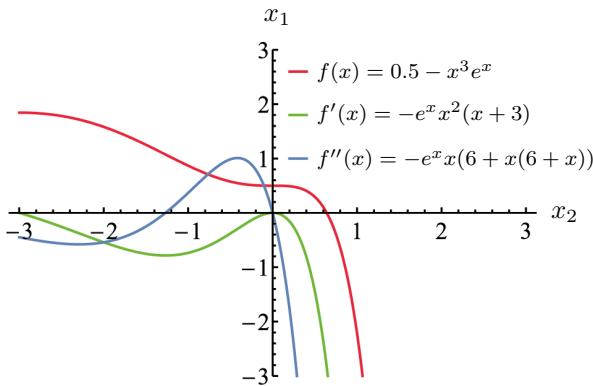


Рис. 1.24. Графики функции $f(x) = 0.5 - x^3 e^x$, а также ее первой и второй производной по x , построенные для численного решения уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона

Как мы убедились (см. пример на стр. 50), качество интервальной оценки области значения функции в значительной степени зависит от вида выражения, которое ее задает. По этой причине интервальной оценивающей функцией для первой производной функции $f(x)$ (1.124) по x нам послужит естественное интервальное расширение f'_\natural функции

$$f'(x) = -e^x x^2(x + 3),$$

так как в выражении, ее задающем, приведены подобные слагаемые.

Наконец, для организации вычислительного процесса нам необходимо определиться с выбором некоторой точки $\tilde{x} \in \mathbf{X}$. Мы поочередно остановимся на $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$, $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$ и $\tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}$. Результаты, получаемые на каждой итерации одномерного интервального метода Ньютона, приведены в таблицах 1.4, 1.5 и 1.6.

В зависимости от того, какая точка интервала локализации \mathbf{X} выбрана в качестве \tilde{x} , решение нелинейного уравнения (1.123)

$$x^\star = 0.64101$$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$
0	[0.10000, 1.00000]	[0.14588, 14.66190]
1	[0.14588, 1.00000]	[0.19154, 6.55397]
2	[0.19154, 1.00000]	[0.23674, 3.65748]
3	[0.23674, 1.00000]	[0.28118, 2.33882]
4	[0.28118, 1.00000]	[0.32446, 1.65048]
5	[0.32446, 1.00000]	[0.36610, 1.25969]
6	[0.36610, 1.00000]	[0.40557, 1.02587]
7	[0.40557, 1.00000]	[0.44235, 0.88147]
8	[0.44235, 0.88147]	[0.49252, 0.79079]
9	[0.49252, 0.79079]	[0.55077, 0.71215]
10	[0.55077, 0.71215]	[0.60554, 0.66327]
11	[0.60554, 0.66327]	[0.63532, 0.64400]
12	[0.63532, 0.64400]	[0.64086, 0.64108]
13	[0.64086, 0.64108]	[0.64101, 0.64101]
14	[0.64101, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.4. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x} = \underline{\mathbf{X}}$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$
0	[0.10000, 1.00000]	[0.56946, 6.72712]
1	[0.56946, 1.00000]	[0.51139, 0.73330]
2	[0.56946, 0.73330]	[0.63664, 0.64417]
3	[0.63664, 0.64417]	[0.64010, 0.64102]
4	[0.64010, 0.64102]	[0.64101, 0.64101]
5	[0.64101, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.5. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$

достигается после выполнения разного числа итераций:

$$\begin{aligned} k = 14 & \quad \tilde{x} = \underline{\mathbf{X}}, \quad \text{dist}\left(\mathbf{X}^{(14)}, \mathbf{X}^{(15)}\right) = 9.08047 \cdot 10^{-8}, \\ k = 5 & \quad \tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}, \quad \text{dist}\left(\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}\right) = 4.07588 \cdot 10^{-11} \\ k = 6 & \quad \tilde{x} = \overline{\mathbf{X}}, \quad \text{dist}\left(\mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}\right) = 2.44249 \cdot 10^{-13}. \end{aligned}$$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$
0	[0.10000, 1.00000]	[-63.74790, 0.79599]
1	[0.10000, 0.79599]	[-17.23970, 0.68008]
2	[0.10000, 0.68008]	[-2.84943, 0.64409]
3	[0.10000, 0.64409]	[0.38650, 0.64103]
4	[0.38650, 0.64103]	[0.64095, 0.64101]
5	[0.64095, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]
6	[0.64101, 0.64101]	[0.64101, 0.64101]

Таблица 1.6. Итерационное уточнение корня нелинейного уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x} = \bar{\mathbf{X}}$

Тем не менее, во всех трех случаях мы получаем одинаковый ответ

$$(0.64101)^3 \cdot e^{0.64101} \approx 0.50001.$$

Ответ: $x = 0.64101$, $y = 0.50001$. ■

1.7.2 Многомерный метод Ньютона

Пусть на брусе \mathbf{X} задана система точечных нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1.125)$$

краткая векторная форма которой имеет вид

$$F(x) = 0, \quad (1.126)$$

где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^\top$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ и $F_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — некоторые функции от n переменных.

Используя интервальную матрицу Липшица \mathbf{L} отображения F на \mathbf{X} , запишем включение, справедливое для любых точек $x, \tilde{x} \in \mathbf{X}$:

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}).$$

Предположим, что $x = x^*$ является решением заданной системы уравнений (1.125), т. е. $F(x^*) = 0$. Тогда

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Для дальнейшего построения многомерного интервального оператора Ньютона нам потребуется

Теорема 1.7.1. (характеризация Бекка) Пусть заданы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$. Вектор $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из условий

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset, \quad 0 \in \mathbf{A} \cdot \tilde{x} - \mathbf{b}, \quad (1.127)$$

где « \cdot » обозначает интервальное матричное умножение.

Согласно характеристикизации Бекка, для того, чтобы имело место включение $0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x})$, точка x^* должна принадлежать объединенному множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{L}(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}). \quad (1.128)$$

Введем процедуру *Encl* внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Тогда для интервальной линейной системы (1.128) справедливо

$$x^* - \tilde{x} \in Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})),$$

из которого следует, что

$$x^* \in \tilde{x} - Encl(\mathbf{L}, F(\tilde{x})).$$

Определение 1.7.2 Пусть для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ зафиксирована процедура *Encl*, а для отображения

$$F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

известна интервальная матрица Липшица $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$.

Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{I}D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - \text{Encl}(\mathbf{L}, F(\tilde{x})), \quad (1.129)$$

называется интервальным оператором Ньютона *на* $\mathbb{I}D$ *относительно* точки \tilde{x} .

Как и в одномерном случае, после выбора бруса начального приближения $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$ итерационное уточнение решения системы нелинейных уравнений с помощью многомерного *интервального метода Ньютона* организуется следующим образом:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.130)$$

Центр разложения $\tilde{x}^{(k)}$ следует выбирать так, чтобы значение нормы вектор-функции $F(\tilde{x}^{(k)})$ было по возможности меньшим. Выполнение этого требования позволяет получать на каждой итерации более узкую оценку множества решений исходной системы нелинейных уравнений за счет уменьшения размера множества решений ИСЛАУ (1.128).

Обсудим, почему для построения интервального оператора Ньютона (1.129) мы прибегаем именно к процедуре внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ. В расчетной формуле обычно, неинтервального метода Ньютона для решения системы уравнений

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} - \left(J(X^{(k)})\right)^{-1} F(X^{(k)})$$

фигурирует $(J(X^{(k)}))^{-1}$ — матрица, обратная к якобиану $J(X^{(k)})$ отображения F в точке $X^{(k)}$. Поиск внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ с матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(k)}$ и вектором $\mathbf{b} = F(\tilde{x}^{(k)})$ вместо нахождения обратной интервальной матрицы для $\mathbf{L}^{(k)}$ на каждой итерации и последующее использование этой внешней оценки в дальнейших вычислениях приводят к уменьшению трудоемкости метода и меньшему огрублению результата. Заметим, что рассмотренный прием также используется при построении вычислительного процесса решения формальных алгебраических уравнений с помощью субдифференциального метода Ньютона в полной интервальной арифметике Каухера (см. параграф 2.3.1). Вычислительные методы, с помощью которых может быть произведено внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, образующихся на итерациях многомерного интервального метода Ньютона, рассмотрены в **разделе 1.5** главы 1.

Проблемные ситуации, возникающие в ходе компьютерной реализации многомерного интервального метода Ньютона, а также способы их преодоления аналогичны тем, которые были рассмотрены при обсуждении одномерного интервального метода Ньютона.

Пример 1.7.2. Решим систему точечных нелинейных уравнений [14]

$$\begin{cases} 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1, \\ \ln x = y, \end{cases} \quad (1.131)$$

используя многомерный интервальный метод Ньютона.

В первую очередь произведем графическое отделение корней уравнений. На Рис. 1.25 изображены эллипс с полуосями $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, соответствующий первому уравнению системы, кривая $y = \ln x$, а также кривая $y = -\frac{8}{15}x^2$, $x \neq 0$, происхождение которой мы обсудим позже.

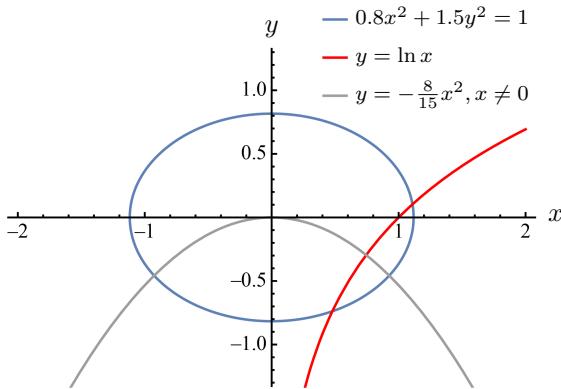


Рис. 1.25. Графики функций $0.8x^2 + 1.5y^2 = 1$, $y = \ln x$ (см. систему нелинейных уравнений (1.131)) и $y = -\frac{8}{15}x^2$, $x \neq 0$. Чёрной рамкой выделен брус начального приближения $X^{(0)}$.

На Рис. 1.25 видно, что рассматриваемая система нелинейных уравнений имеет два корня. С помощью многомерного интервального метода Ньютона мы уточним корень, который локализован на интервале

$$X^{(0)} = X_1^{(0)} \times X_2^{(0)} = [0.8, 1.2] \times [-0.2, 0.2].$$

Для системы нелинейных уравнений (1.131) можно записать

$$F = \begin{pmatrix} 0.8x^2 + 1.5y^2 - 1 \\ \ln x - y \end{pmatrix}.$$

В качестве интервальной матрицы Липшица \mathbf{L} выберем естественное интервальное расширение якобиана отображения F на \mathbf{X} :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1.6x & 3y \\ \frac{1}{x} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{L}^{(k)} = \mathbf{L}_{\natural}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1.6\mathbf{X}_1^{(k)} & 3\mathbf{X}_2^{(k)} \\ \frac{1}{\mathbf{X}_1^{(k)}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы L :

$$\det L = -1.6x - \frac{3y}{x} \rightarrow \det L = 0 \text{ при } y = -\frac{8}{15}x^2, x \neq 0.$$

Таким образом, третья кривая $y = -\frac{8}{15}x^2, x \neq 0$, представленная на Рис. 1.25, является кривой, на которой якобиан системы нелинейных уравнений (1.131) сингулярен. Брус начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$, выбираемый для построения итераций многомерного интервального метода Ньютона, не должен содержать участка этой кривой для того, чтобы обеспечить его сходимость.

Определимся с выбором точки \tilde{x} , необходимой для выполнения итерационных вычислений. На каждой итерации мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}.$$

Поиск внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ с матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(k)}$ и вектором $\mathbf{b} = F(\tilde{x}^{(k)})$ на каждой итерации многомерного интервального метода Ньютона будет выполняться с помощью интервального метода Кравчика, дополненного предварительным внешним оцениванием этого множества (см. параграфы 1.5.2 и 1.5.6). Например, на нулевой итерации ($k = 0$) мы имеем

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.6 \cdot [0.8, 1.2] & 3 \cdot [-0.2, 0.2] \\ \frac{1}{[0.8, 1.2]} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.280, 1.920] & [-0.600, 0.600] \\ [0.833, 1.250] & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot 1^2 + 1.5 \cdot 0^2 - 1 \\ \ln(1) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.200, -0.200] \\ [0.000, 0.000] \end{pmatrix}.$$

Предварительной внешней оценкой объединенного множества решений сформированной интервальной линейной системы с матрицей $\mathbf{A}^{(0)}$ и вектором правой части $\mathbf{b}^{(0)}$ является интервальный вектор-брус

$$\mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(0)} = \left(\begin{bmatrix} [-0.676, 0.676] \\ [-0.676, 0.676] \end{bmatrix} \right).$$

В выражении (1.99), которое было использовано для нахождении данной внешней оценки, выбран предобуславливатель $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$. Далее на каждой итерации многомерного интервального метода Ньютона мы будем определять предобуславливающую матрицу таким же образом: $\Lambda^{(k)} = (\text{mid } \mathbf{A}^{(k)})^{-1}$.

Перед тем как перейти к уточнению $\mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(0)}$ с помощью интервального метода Кравчика, необходимо проверить, выполняется ли условие его сходимости $\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) < 1$ (см. пример на стр. 116):

$$\begin{aligned} |I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.625 & 0.000 \\ 0.651 & -1.000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1.280, 1.920] & [-0.600, 0.600] \\ [0.833, 1.250] & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{pmatrix} 0.200 & 0.375 \\ 0.417 & 0.391 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(|I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}|) = 0.702. \end{aligned}$$

Поскольку $\rho(|I - \Lambda^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}|) < 1$, то на тридцатой итерации интервального метода Кравчика (и нулевой итерации многомерного интервального метода Ньютона!) мы получаем:

$$\mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(31)} = \begin{pmatrix} [-0.377, 0.127] \\ [-0.472, 0.211] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(30)}, \mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(31)}) = \begin{pmatrix} 1.519 \cdot 10^{-6} \\ 2.034 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Согласно выражению (1.129)

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{(0)}, \tilde{x}^{(0)}) = \tilde{x}^{(0)} - \mathbf{X}_{\text{Kp}}^{(31)} = \begin{pmatrix} [0.873, 1.377] \\ [-0.211, 0.472] \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(0)}, \tilde{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} [0.873, 1.200] \\ [-0.200, 0.200] \end{pmatrix}.$$

Результаты, получаемые на следующих итерациях многомерного интервального метода Ньютона, приведены в таблице 1.7. Как можно

убедиться, решение системы точечных нелинейных уравнений (1.131) достигается на пятой итерации многомерного интервального метода Ньютона, если учитывать четвертый знак после запятой при проведении промежуточных вычислений:

$$\text{Dist} \left(\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)} \right) = \begin{pmatrix} 1.602 \cdot 10^{-10} \\ 1.811 \cdot 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N} \left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)} \right)$
0	$[0.8000, 1.2000] \times [-0.2000, 0.2000]$	$[0.8726, 1.3774] \times [-0.2113, 0.4717]$
1	$[0.8726, 1.2000] \times [-0.2000, 0.2000]$	$[0.9773, 1.2653] \times [-0.0586, 0.2980]$
2	$[0.9773, 1.2000] \times [-0.0586, 0.2000]$	$[1.0966, 1.1234] \times [0.0897, 0.1198]$
3	$[1.0966, 1.1234] \times [0.0897, 0.1198]$	$[1.1090, 1.1091] \times [0.1034, 0.1035]$
4	$[1.1090, 1.1091] \times [0.1034, 0.1035]$	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$
5	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$	$[1.1090, 1.1090] \times [0.1035, 0.1035]$

Таблица 1.7. Итерационное уточнение одного из двух корней системы точечных нелинейных уравнений (1.131) с помощью многомерного интервального метода Ньютона, $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$

Если бы мы выбрали центр разложения $\tilde{x}^{(0)}$ такой, в котором чебышевская норма $\|F(\tilde{x}^{(0)})\|_\infty$ принимает наименьшее значение

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.1090 \\ 0.1035 \end{pmatrix} \rightarrow \|F(\tilde{x}^{(0)})\|_\infty = 4.751 \cdot 10^{-11},$$

то решение системы нелинейных уравнений (1.131) было бы достигнуто уже на первой итерации иногомерного интервального метода Ньютона:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} [1.1090, 1.1090] \\ [0.1035, 0.1035] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist} \left(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 2.903 \cdot 10^{-11} \\ 4.588 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1.1090$, $y = 0.1035$. ■

ПРОВЕРЕННО

Все вышеизложенное вовсе не означает, что попытка «прилизить» многомерный интервальный метод Ньютона к своему неинтервальному

аналогу окажется неудачной. Итерационное уточнение решения системы точечных нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right), \quad \tilde{x}^k \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right) &= \tilde{x}^{(k)} - \left(\mathbf{L}^{(k)}\right)^{-1} \cdot F\left(\tilde{x}^{(k)}\right),\end{aligned}$$

основанное на нахождении на каждой итерации обратной интервальной матрицы для $\mathbf{L}^{(k)}$ (см. для сравнения выражение (1.129)), также может быть успешно реализовано. Пример использования данной итерационной схемы рассмотрен в [2] на стр. 68.

Метод Хансена-Сенгупты Многомерный интервальный метод Ньютона имеет серьезный недостаток. Если интервальная матрица Липшица \mathbf{L} отображения F на \mathbf{X} содержит особенные вещественные матрицы, то множество решений ИСЛАУ (1.128) оказывается неограниченным, и произвести его внешнюю оценку для построения итераций является невозможным. Для решения данной проблемы был разработан *метод Хансена-Сенгупты* — модифицированный многомерный интервальный метод Ньютона. Он не требует нахождения внешней оценки всего объединенного множества решений ИСЛАУ (1.128), позволяя ограничиться определением лишь той его части, которая ограничена бруском \mathbf{X} . Для выполнения локального оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ на каждой из итераций метода Хансена-Сенгупты можно использовать, например, интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. стр. 102) или метод Кравчика (см. стр. 114).

1.7.3 Метод Кравчика

Вернемся к рассмотрению системы n нелинейных уравнений (1.125) с n неизвестными, заданной на брусе $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$:

$$F(x) = 0,$$

где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^\top$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$.

Выберем некоторую точку $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ и организуем относительно неё разложение функции F :

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x})$$

где $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения F на интервальном брусе \mathbf{X} .

Если $x = x^*$, т. е. $F(x^*) = 0$, то выполняется включение

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

На данном этапе проявляется расхождение между многомерным интервальным методом Ньютона и методом Кравчика. Вместо перехода к рассмотрению ИСЛАУ (1.128) произведем домножение обеих частей полученного включения слева на точечную $n \times n$ -матрицу $(-\Lambda)$:

$$0 \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Добавим $(x^* - \tilde{x})$ к обеим частям соотношения:

$$x^* - \tilde{x} \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}) + (x^* - \tilde{x}).$$

Теперь, воспользовавшись дистрибутивным соотношением (1.10), получаем равносильное выражение

$$x^* \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(x^* - \tilde{x}).$$

Поскольку мы предполагаем, что решение x системы нелинейных уравнений принадлежит брусу \mathbf{X} , то можем взять интервальное расширение по $x \in \mathbf{X}$ правой части последнего записанного включения:

$$x^* \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}).$$

Определение 1.7.3 Пусть определены некоторые правила, сопоставляющие брусу $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ точку $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ и вещественную матрицу Λ размером $n \times n$ и пусть также $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная матрица Липшица отображения $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ на D . Отображение

$$\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}) \quad (1.132)$$

называется оператором Кравчика на \mathbb{ID} относительно точки \tilde{x} .

После того как выбран брус $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$, уточнение решения системы точечных нелинейных уравнений (1.125) с помощью *интервального метода Кравчука* можно организовать таким же образом, как и в случае реализации интервального метода Ньютона:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(k+1)} &\leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{K}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right), \\ \tilde{x}^{(k)} &\in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1.133}$$

С целью получить брус $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ наименьшей ширины используются следующие рекомендации по выбору центра разложения \tilde{x} и вещественной $n \times n$ -матрицы Λ : $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$ и $\Lambda^{(k)} = \left(\text{mid } \mathbf{L}^{(k)}\right)^{-1}$. Впрочем, стоит отметить, что интервальный метод Кравчука «сохраняет свою работоспособность» при достаточно произвольных \tilde{x} и Λ .

Пример 1.7.3. Данна система нелинейных уравнений [14]

$$\begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} = 2, \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 = y, \end{cases}\tag{1.134}$$

Найдем корни данной системы точечных нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчука.

Для заданной системы нелинейных уравнений можно записать

$$F = \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - 2 \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix}.$$

В качестве интервальной матрицы Липшица \mathbf{L} выберем естественное интервальное расширение якобиана отображения F на \mathbf{X} (см. параграф 1.3.1). Точечная матрица Якоби:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Определитель интервальной матрицы \mathbf{L} равен

$$\det \mathbf{L} = -\frac{2}{3x^{1/3}} + \frac{2}{3y^{1/3}(x+1)^2} \longrightarrow \det \mathbf{L} = 0 \text{ при } y = \frac{x}{(x+1)^6}.$$

Определим брусы локализации решения системы \mathbf{X} , который будет выбран в качестве начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$. Для этого построим графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, $y = 1/(x+1) + 0.3$, соответствующих уравнениям системы (1.134), а также $y = x/(x+1)^6$.

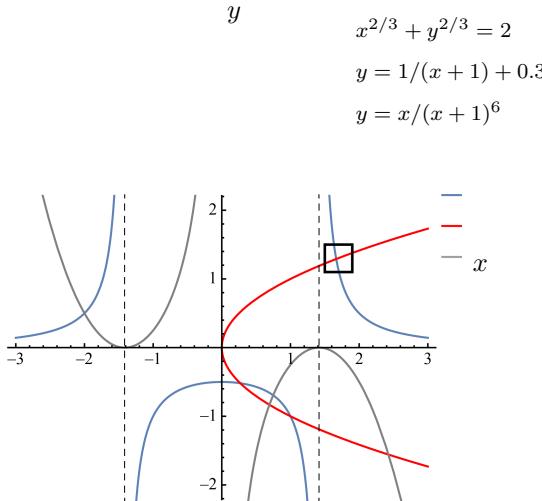


Рис. 1.26. Графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, $y = 1/(x+1) + 0.3$ (см. систему нелинейных уравнений (1.134)) и $y = x/(x+1)^6$. Брус начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ выделен черной рамкой.

Как видно на Рис. 1.26, система нелинейных уравнений имеет два различных корня, один из которых локализован на брусе

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}_1^{(0)} \times \mathbf{X}_2^{(0)} = [1.1, 1.5] \times [0.6, 0.9].$$

Можно убедиться, что выбранное начальное приближение не пересекает график третьей функции $y = x/(x+1)^6$, которая представляет собой кривую, на которой якобиан системы (1.134) сингулярен. В противном случае сходимость численного метода не была бы обеспечена.

Для того, чтобы на каждой из итераций брусы оператора Кравчика имел по возможности меньшую ширину, мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad A^{(k)} = \left(\text{mid } \mathbf{L}^{(k)} \right)^{-1}.$$

Тогда на нулевой итерации ($k = 0$) получаем

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow L_{\natural}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3(\mathbf{X}_1^{(k)})^{1/3}} & \frac{2}{3(\mathbf{X}_2^{(k)})^{1/3}} \\ -\frac{1}{(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1)^2} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3 \cdot ([1.1, 1.5])^{1/3}} & \frac{2}{3 \cdot ([0.6, 0.9])^{1/3}} \\ -\frac{1}{([1.1, 1.5] + 1)^2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [0.582, 0.646] & [0.691, 0.790] \\ [-0.227, -0.160] & [-1.000, -1.000] \end{pmatrix}.$$

и, значит,

$$\text{mid } \mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.614 & 0.741 \\ -0.193 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.124 & 1.572 \\ -0.411 & -1.304 \end{pmatrix}.$$

Также

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.30 \\ 0.75 \end{pmatrix} \rightarrow F(\tilde{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.017 \\ -0.015 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия сходимости интервального метода Кравчика для того, чтобы начать итерационный процесс:

$$\left| I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \right| = \begin{pmatrix} 0.120 & 0.106 \\ 0.057 & 0.021 \end{pmatrix} \rightarrow \rho \left(\left| I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \right| \right) = 0.162 < 1.$$

Спектральный радиус матрицы модулей для $(I - \Lambda^{(0)} \mathbf{L}^{(0)})$ меньше единицы, поэтому можно ожидать сходимости интервального метода Кравчика. Результаты, получаемые на каждом шаге итерационного уточнения корня системы (1.134), приведены в таблице 1.8.

Если при проведении промежуточных вычислений мы учитываем четвертый знак после запятой, то на третьей итерации интервального метода Кравчика процесс уточнения может быть прекращен:

$$\text{Dist} \left(\mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)} \right) = \begin{pmatrix} 8.777 \cdot 10^{-7} \\ 3.683 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1.2885$, $y = 0.7370$. ■

ПРОВЕРЕННО

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	$[1.1000, 1.5000] \times [0.6000, 0.9000]$	$[1.2488, 1.3285] \times [0.7226, 0.7514]$
1	$[1.2488, 1.3285] \times [0.7226, 0.7514]$	$[1.2874, 1.2896] \times [0.7365, 0.7374]$
2	$[1.2874, 1.2896] \times [0.7365, 0.7374]$	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$
3	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$	$[1.2885, 1.2885] \times [0.7370, 0.7370]$

Таблица 1.8. Итерационное уточнение одного из трех корней системы точечных нелинейных уравнений (1.134) с помощью интервального метода Кравчика

Бицентрированная форма оператора Кравчика При внимательном рассмотрении можно заметить, что оператор Кравчика (1.132) является дифференциальной центрированной формой интервального расширения для отображения

$$\Phi(x) := x - \Lambda F(x)$$

с центром в точке \tilde{x} (см. §1.3.3).

Действительно, если записать выражение (1.62)

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{X} - c)$$

и сравнить его с выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}),$$

задающим оператор Кравчика (1.132), в котором в качестве интервальной матрицы Липшица \mathbf{L} выбрано интервальное расширение якобиана отображения F на \mathbf{X} , то можно убедиться в том, что для отображения $\Phi(x)$ дифференциальной центрированной (среднезначной) формой интервального расширения является именно оператор Кравчика.

Значит, в целях улучшения качества интервальных оценок, получаемых на итерациях интервального метода Кравчика, можно прибегнуть к построению бицентрированной среднезначной формы (см. §1.3.4) интервального расширения для отображения $\Phi(x)$. Этот подход подразумевает взятие пересечения двух дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для отдельных компонент отображения $\Phi(x)$, взятых относительно индивидуальной пары оптимальных центров c_* и c^* . Проиллюстрируем предложение примером.

Пример 1.7.4. Изменим правую часть первого уравнения нелинейной системы (1.134), в результате чего оно станет интервальным [14]:

$$\begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} = [1.8, 2.0], \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 = y. \end{cases} \quad (1.135)$$

На Рис. 1.27 показаны графики четырех функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$, $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$ и $y = 1/(x+1) + 0.3$, а также $y = x/(x+1)^6$. Графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$ и $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$ ограничивают область координатной плоскости, которая является «решением» первого уравнения системы (1.135). Происхождение последней функции $y = x/(x+1)^6$ связано с выполнением проверки на сингулярность якобиана отображения F на \mathbf{X} , естественное интервальное расширение которого выбрано в качестве интервальной матрицы Липшица \mathbf{L} (см. пример на стр. 152).

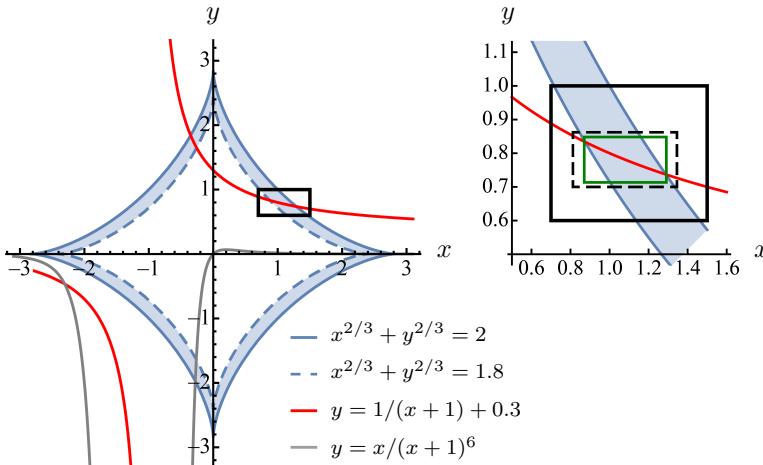


Рис. 1.27. Графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$, $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$, $y = 1/(x+1) + 0.3$ (см. систему нелинейных уравнений (1.135)) и $y = x/(x+1)^6$. Брус начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ показан черной рамкой. Интервальным векторам \mathbf{X}_K и $\mathbf{X}_{K,bis}$ соответствуют черная пунктирная и зеленая сплошная линии, соответственно.

Можно заметить, что система уравнений (1.135) имеет два интер-

вальвонозначных корня, один из которых локализован на брусе

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}_1^{(0)} \times \mathbf{X}_2^{(0)} = [0.7, 1.5] \times [0.6, 1.0].$$

Наша задача заключается в **двукратном** уточнении выбранного корня системы (1.135), принадлежащего $\mathbf{X}^{(0)}$, с помощью интервального метода Кравчука. Сначала мы выполним его уточнение, вычисляя на итерациях непосредственно оператор Кравчука (1.132), а затем повторим итерационное уточнение решения системы (1.135) с использованием бикентрированной формы оператора Кравчука.

Аналогично примеру, приведенному на стр. 152, запишем

$$F = \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0] \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix},$$

а также

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2}{3x^{1/3}} & \frac{2}{3y^{1/3}} \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & -1 \end{pmatrix}, \quad L_{\natural}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3(\mathbf{X}_1^{(k)})^{1/3}} & \frac{2}{3(\mathbf{X}_2^{(k)})^{1/3}} \\ -\frac{1}{(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1)^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

На каждой итерации метода Кравчука мы будем выбирать

$$\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad A^{(k)} = \left(\text{mid } \mathbf{L}^{(k)} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} [0.582, 0.751] & [0.667, 0.790] \\ [-0.346, -0.160] & -1.000 \end{pmatrix}, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.074 & 1.511 \\ -0.525 & -1.382 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.100 \\ 0.800 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F}(\tilde{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} [-0.073, 0.127] \\ -0.024 \end{pmatrix},$$

и сходимость интервального метода Кравчука подтверждает выполнение условия $\rho(|I - A^{(0)} \mathbf{L}^{(0)}|) = 0.379 < 1$. Важно отметить существенное отличие настоящей задачи от случая, рассмотренного в примере на стр. 152: теперь величина $\mathbf{F}(\tilde{x}^{(0)})$ является интервальной.

Результаты, получаемые на дальнейших итерациях интервального метода Кравчика, приведены в таблице 1.9. Решение системы нелинейных уравнений (1.135) достигается на двенадцатой итерации:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{K}}^{(12)} = \begin{pmatrix} [0.8124, 1.3453] \\ [0.6999, 0.8622] \end{pmatrix}, \text{ Dist}(\mathbf{X}^{(12)}, \mathbf{X}^{(13)}) = \begin{pmatrix} 2.6574 \cdot 10^{-5} \\ 1.4708 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$\text{Dist}(\mathbf{X}^{(13)}, \mathbf{X}^{(14)}) = \begin{pmatrix} 1.2915 \cdot 10^{-5} \\ 7.1485 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$
0	$[0.7000, 1.5000] \times [0.6000, 1.0000]$	$[0.7201, 1.4383] \times [0.6534, 0.9095]$
1	$[0.7201, 1.4383] \times [0.6534, 0.9095]$	$[0.7582, 1.3995] \times [0.6694, 0.8927]$
2	$[0.7582, 1.3995] \times [0.6694, 0.8927]$	$[0.7826, 1.3751] \times [0.6834, 0.8787]$
3	$[0.7826, 1.3751] \times [0.6834, 0.8787]$	$[0.7969, 1.3608] \times [0.6913, 0.8707]$
4	$[0.7969, 1.3608] \times [0.6913, 0.8707]$	$[0.8046, 1.3531] \times [0.6956, 0.8665]$
5	$[0.8046, 1.3531] \times [0.6956, 0.8665]$	$[0.8086, 1.3492] \times [0.6978, 0.8643]$
6	$[0.8086, 1.3492] \times [0.6978, 0.8643]$	$[0.8105, 1.3472] \times [0.6989, 0.8632]$
7	$[0.8105, 1.3472] \times [0.6989, 0.8632]$	$[0.8115, 1.3462] \times [0.6994, 0.8627]$
8	$[0.8115, 1.3462] \times [0.6994, 0.8627]$	$[0.8120, 1.3457] \times [0.6997, 0.8624]$
9	$[0.8120, 1.3457] \times [0.6997, 0.8624]$	$[0.8122, 1.3455] \times [0.6998, 0.8623]$
10	$[0.8122, 1.3455] \times [0.6998, 0.8623]$	$[0.8123, 1.3454] \times [0.6999, 0.8622]$
11	$[0.8123, 1.3454] \times [0.6999, 0.8622]$	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$
12	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$	$[0.8124, 1.3453] \times [0.6999, 0.8622]$

Таблица 1.9. Итерационное уточнение одного из двух корней системы нелинейных уравнений (1.135) с помощью интервального метода Кравчика. Используется оператор Кравчика (1.132)

Зафиксируем этот результат и перейдем к построению бицентрированной среднезначной формы оператора Кравчика. На каждой итерации нам необходимо определять отображение

$$\Phi(x) := x - \Lambda F(x),$$

и потому в первую очередь возникает вопрос о выборе предобуславливателя Λ . Мы выберем такую предобуславливающую матрицу, которая предлагается авторами работы [56]:

$$\Lambda = (\alpha \text{ mid } \mathbf{L} + \beta I)^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если производится построение оператора Кравчика (1.132), то $\alpha = 1$. При вычислении бицентрированной формы оператора Кравчика необходимо выбирать $\alpha = 2$. Значение коэффициента β зависит от того, является ли интервальная матрица $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\natural}$ сингулярной: если да, то $\beta = 1$; в противном случае $\beta = 0$. Нетрудно заметить, что при построении «обычного» оператора Кравчика (1.132) $A = (\text{mid } \mathbf{L})^{-1}$, если, конечно, интервальные матрицы $\mathbf{L}^{(k)}$ несингулярны, т. е. на каждой итерации выполняется предобуславливание «обратной средней».

На нулевой итерации интервального метода Кравчика имеем

$$\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} [0.582, 0.751] & [0.667, 0.790] \\ [-0.346, -0.160] & -1.000 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{L}^{(0)} = [-0.644, -0.309] \not\ni 0 \rightarrow A^{(0)} = \left(2 \text{ mid } \mathbf{L}^{(0)} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\text{mid } \mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.667 & 0.729 \\ -0.253 & -1.000 \end{pmatrix}, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.037 & 0.755 \\ -0.262 & -0.691 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi^{(0)} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0] \\ \frac{1}{x+1} + 0.3 - y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - 1.037 \cdot (x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0]) - 0.755 \cdot \left(\frac{1}{x+1} + 0.3 - y \right) \\ y + 0.262 \cdot (x^{2/3} + y^{2/3} - [1.8, 2.0]) + 0.691 \cdot \left(\frac{1}{x+1} + 0.3 - y \right) \end{pmatrix}.$$

Следующим нашим шагом при построении бицентрированной формы оператора Кравчика является нахождение матрицы производных

$$L_{\Phi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0.691}{x^{1/3}} + \frac{0.755}{(x+1)^2} & 0.755 - \frac{0.691}{y^{1/3}} \\ \frac{0.175}{x^{1/3}} - \frac{0.691}{(x+1)^2} & 0.309 + \frac{0.175}{y^{1/3}} \end{pmatrix}$$

и ее естественного интервального расширения

$$\left(\mathbf{L}_\Phi^{(0)}\right)_{\natural} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3}} + \frac{0.755}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} & 0.755 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}} \\ \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3}} - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} & 0.309 + \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}} \end{pmatrix}.$$

Далее, следуя работе [56], введем два интервальных вектора

$$\mathbf{d}^{(01)} = \left(\mathbf{L}_\Phi^{(0)}\right)_1^\top = \left(1 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3}} + \frac{0.755}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} \quad 0.755 - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}}\right)^\top,$$

$$\mathbf{d}^{(02)} = \left(\mathbf{L}_\Phi^{(0)}\right)_2^\top = \left(\frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)}\right)^{1/3}} - \frac{0.691}{\left(\mathbf{X}_1^{(k)} + 1\right)^2} \quad 0.309 + \frac{0.175}{\left(\mathbf{X}_2^{(k)}\right)^{1/3}}\right)^\top.$$

В выбранных обозначениях первое число, которое входит в верхний индекс интервального вектора \mathbf{d} , обозначает номер итерации интервального метода Кравчика, а второе число — номер строки интервальной матрицы \mathbf{L}_Φ (или строки матрицы $\Phi^{(0)}$).

Перейдем к нахождению двух пар оптимальных центров c_\star и c^* , относительно которых будет производится взятие дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для функций, соответствующих отдельным строкам матрицы $\Phi^{(0)}$. Для этого нам потребуются результаты, которые содержит теорема Баумана (см. §1.3.4):

$$\mathbf{d}^{(01)} = \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(01)}} = \frac{0.500}{0.158} = 3.173,$$

$$\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(01)}} = \frac{0.000}{0.064} = 0.000,$$

$$\mathbf{d}^{(02)} = \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(02)}} = \frac{0.000}{0.086} = 0.000,$$

$$\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(02)}} = \frac{0.500}{0.016} = 30.806.$$

Тогда

$$p^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{cut} \left(\frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(01)}}, [-1, 1] \right) \\ \text{cut} \left(\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(01)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(01)}}, [-1, 1] \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c_*)^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} - p_1^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} - p_2^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 1 \cdot 0.4 \\ 0.8 - 0 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

$$(c^*)^{(01)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} + p_1^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} + p_2^{(01)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 1 \cdot 0.4 \\ 0.8 + 0 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

а также

$$p^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{cut} \left(\frac{\text{mid } \mathbf{d}_1^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_1^{(02)}}, [-1, 1] \right) \\ \text{cut} \left(\frac{\text{mid } \mathbf{d}_2^{(02)}}{\text{rad } \mathbf{d}_2^{(02)}}, [-1, 1] \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c_*)^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} - p_1^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} - p_2^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 - 0 \cdot 0.4 \\ 0.8 - 1 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$(c^*)^{(02)} = \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(0)} + p_1^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(0)} + p_2^{(02)} \cdot \text{rad } \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0 \cdot 0.4 \\ 0.8 + 1 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

Итак, нашим последним шагом при вычислении бицентрированной формы оператора Кравчика на нулевой итерации интервального метода Кравчика станет взятие двух дифференциальных центрированных форм интервальных расширений для функций $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ (1.62) относительно центров $(c_*)^{(01)}$, $(c^*)^{(01)}$ и $(c_*)^{(02)}$, $(c^*)^{(02)}$, соответственно, и нахождение пересечения полученных интервальных оценок для каждой из этих функций по отдельности.

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) = \Phi_1^{(0)} \left((c_*)^{(01)} \right) + \mathbf{d}_1^\top \cdot \left(\mathbf{X}^{(0)} - (c_*)^{(01)} \right),$$

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) = [0.789, 0.996] + \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 0.7 \\ [0.6, 1.0] - 0.8 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) = [0.776, 1.535],$$

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) = \Phi_1^{(0)} \left((c^*)^{(01)} \right) + \mathbf{d}_1^\top \cdot \left(\mathbf{X}^{(0)} - (c^*)^{(01)} \right),$$

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) = [1.190, 1.397] + \begin{pmatrix} [0.342, 0.658] \\ [-0.064, 0.064] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.5 \\ [0.6, 1.0] - 0.8 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) = [0.651, 1.410].$$

Для функции $\Phi_1^{(0)}$ получаем

$$\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) \cap \Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) = [0.776, 1.410].$$

Аналогично для функции $\Phi_2^{(0)}$:

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) = \Phi_2^{(0)} \left((c_*)^{(02)} \right) + \mathbf{d}_2^\top \cdot \left(\mathbf{X}^{(0)} - (c_*)^{(02)} \right),$$

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) = [0.663, 0.716] + \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.1 \\ [0.6, 1.0] - 0.6 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) = [0.629, 0.957],$$

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) = \Phi_2^{(0)} \left((c^*)^{(02)} \right) + \mathbf{d}_2^\top \cdot \left(\mathbf{X}^{(0)} - (c^*)^{(02)} \right),$$

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) = [0.863, 0.915] + \begin{pmatrix} [-0.086, 0.086] \\ [0.484, 0.516] \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} [0.7, 1.5] - 1.1 \\ [0.6, 1.0] - 1.0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) = [0.622, 0.950].$$

Значит, для функции $\Phi_2^{(0)}$ можно записать

$$\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) \cap \Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) = [0.629, 0.950].$$

Бицентрированной формой оператора Кравчика, вычисленной на нулевой итерации интервального метода Кравчика, является бруск

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{bic} \left(\mathbf{X}^{(0)} \right) &= \left(\Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(01)} \right) \cap \Phi_1^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(01)} \right) \right) \\ &\quad \left(\Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c_*)^{(02)} \right) \cap \Phi_2^{(0)} \left(\mathbf{X}^{(0)}, (c^*)^{(02)} \right) \right) \\ &= \left[\begin{matrix} [0.776, 1.410] \\ [0.629, 0.950] \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} \cap \mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)}) = ([0.776, 1.410], [0.629, 0.950]).$$

На Рис. 1.28 показан процесс формирования бруса бицентрированного оператора Кравчика $\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)})$ на нулевой итерации интервального метода Кравчика, а также для сравнения изображен брус «обычного» оператора Кравчика $\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(0)}, \tilde{x}^{(0)})$ (см. таблицу 1.9).

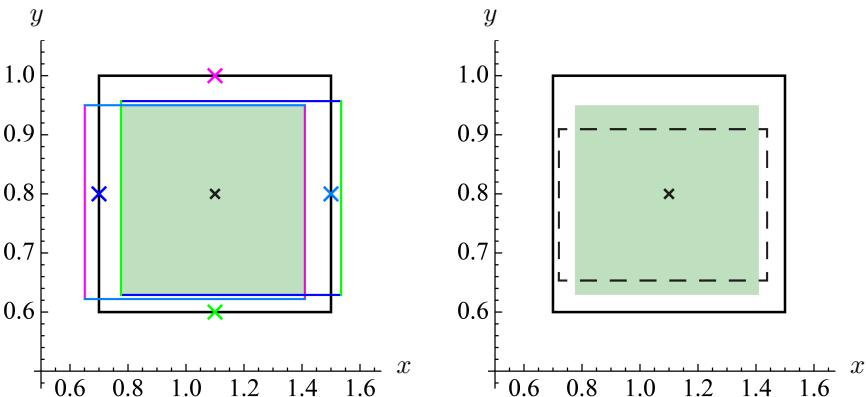


Рис. 1.28. Результаты, получаемые на нулевой итерации интервального метода Кравчика в ходе уточнения решения системы (1.135). Центры $(c_*)^{(01)}$, $(c^*)^{(01)}$, $(c_*)^{(02)}$ и $(c^*)^{(02)}$ показаны крестиками синего, голубого, зеленого и розового цветов, соответственно. Центр бруса $\mathbf{X}^{(0)}$ отмечен крестиком черного цвета. Ребрам интервальных векторов $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c_*)$ и $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c^*)$ соответствуют две пары цветов, каждый из которых определяет один из центров c_* или c^* . Брус $\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)})$ выделен заливкой светло-зеленым цветом.

Границы интервального вектора $\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(0)}, \text{mid } \mathbf{X}^{(0)})$ показаны черной пунктирной линией.

Результаты, получаемые на следующих итерациях интервального метода Кравчика с бицентрированной формой оператора Кравчика, приведены в таблице 1.10. Если при проведении промежуточных вычислений мы учтываем четвертый знак после запятой, то на шестнадцатой итерации интервального метода Кравчика уточнение корня

системы нелинейных уравнений (1.135) может быть прекращено:

$$\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}^{(16)} = \begin{pmatrix} [0.8704, 1.2910] \\ [0.7133, 0.8481] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}^{(16)}, \mathbf{X}^{(17)}) = \begin{pmatrix} 9.3120 \cdot 10^{-6} \\ 1.1815 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

k	$\mathbf{X}_{bic}^{(k)}$	$\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}^{(k)})$
0	$[0.7000, 1.5000] \times [0.6000, 1.0000]$	$[0.7759, 1.4099] \times [0.6287, 0.9495]$
1	$[0.7759, 1.4099] \times [0.6287, 0.9495]$	$[0.8172, 1.3588] \times [0.6578, 0.9106]$
2	$[0.8172, 1.3588] \times [0.6578, 0.9106]$	$[0.8405, 1.3293] \times [0.6788, 0.8853]$
3	$[0.8405, 1.3293] \times [0.6788, 0.8853]$	$[0.8537, 1.3126] \times [0.6924, 0.8699]$
4	$[0.8537, 1.3126] \times [0.6924, 0.8699]$	$[0.8611, 1.3031] \times [0.7009, 0.8607]$
5	$[0.8611, 1.3031] \times [0.7009, 0.8607]$	$[0.8652, 1.2977] \times [0.7060, 0.8553]$
6	$[0.8652, 1.2977] \times [0.7060, 0.8553]$	$[0.8675, 1.2948] \times [0.7091, 0.8522]$
7	$[0.8675, 1.2948] \times [0.7091, 0.8522]$	$[0.8688, 1.2931] \times [0.7109, 0.8505]$
8	$[0.8688, 1.2931] \times [0.7109, 0.8505]$	$[0.8695, 1.2922] \times [0.7119, 0.8494]$
9	$[0.8695, 1.2922] \times [0.7119, 0.8494]$	$[0.8699, 1.2916] \times [0.7125, 0.8489]$
10	$[0.8699, 1.2916] \times [0.7125, 0.8489]$	$[0.8701, 1.2913] \times [0.7128, 0.8485]$
11	$[0.8701, 1.2913] \times [0.7128, 0.8485]$	$[0.8702, 1.2912] \times [0.7130, 0.8484]$
12	$[0.8702, 1.2912] \times [0.7130, 0.8484]$	$[0.8703, 1.2911] \times [0.7131, 0.8483]$
13	$[0.8703, 1.2911] \times [0.7131, 0.8483]$	$[0.8703, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$
14	$[0.8703, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$
15	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7132, 0.8482]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$
16	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$	$[0.8704, 1.2910] \times [0.7133, 0.8481]$

Таблица 1.10. Итерационное уточнение одного из корней системы точечных нелинейных уравнений (1.135) с помощью интервального метода Кравчука. Используется бицентрированная среднезначающая форма оператора Кравчука $\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X})$.

Узнаем «точное» решение системы (1.135)

$$\begin{aligned} \sqrt[2/3]{1.8 - x^{2/3}} &= \frac{1}{x+1} + 0.3 \rightarrow x = 0.8742, \quad y = 0.8336, \\ \sqrt[2/3]{2.0 - x^{2/3}} &= \frac{1}{x+1} + 0.3 \rightarrow x = 1.2885, \quad y = 0.7370 \end{aligned}$$

и сравним «точный» вектор-брюс $\mathbf{X}_{\text{точн}}$ с результатами использования интервального метода Кравчука (номер итерации k , на которой полу-

чено уточненное решение, опущен):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{(0)} &= \left(\begin{bmatrix} [0.7000, 1.5000] \\ [0.6000, 0.9000] \end{bmatrix} \right), & \boldsymbol{X}_{\mathcal{K}} &= \left(\begin{bmatrix} [0.8124, 1.3453] \\ [0.6999, 0.8622] \end{bmatrix} \right), \\ \boldsymbol{X}_{\mathcal{K},bic} &= \left(\begin{bmatrix} [0.8704, 1.2910] \\ [0.7133, 0.8481] \end{bmatrix} \right) & \boldsymbol{X}_{\text{точн}} &= \left(\begin{bmatrix} [0.8742, 1.2885] \\ [0.7370, 0.8336] \end{bmatrix} \right).\end{aligned}$$

Как видно на Рис. 1.27, использование интервального метода Кравчика с бицентрированной формой оператора Кравчика позволило добиться большего сужения бруса начального приближения $\boldsymbol{X}^{(0)}$ и тем самым «ближе подойти» к $\boldsymbol{X}_{\text{точн}}$. Это оправдывает некоторое усложнение алгоритма для построения оператора Кравчика, связанное с поиском четырех оптимальных центров для взятия двух пар дифференциальных центрированных форм и их пересечений. ■

ПРОВЕРЕНО

1.7.4 Внешнее оценивание для интервальных уравнений и систем уравнений

До настоящего момента мы использовали интервальные итерационные методы Ньютона (одномерный, многомерный) и Кравчика только для решения точечных нелинейных уравнений и их систем. Теперь мы перейдем к рассмотрению более общего случая внешнего оценивания решений *интервальных* уравнений и систем интервальных уравнений. Мы сосредоточим внимание на одномерной задаче; тем не менее, предлагаемый подход может быть легко расширен на многомерный случай, что далее будет проиллюстрировано примером.

Итак, пусть имеется интервальное уравнение

$$f(\boldsymbol{a}, x) = 0,$$

и необходимо найти внешнюю оценку той части объединенного множества решений этого уравнения $\Xi_{uni}(f, \boldsymbol{a})$, которая находится в пределах заданного интервала \boldsymbol{X} .

Пусть $x^* \in \boldsymbol{X} \cap \Xi_{uni}(f, \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}$, и $f(a, x^*) = 0$ для какого-то $a \in \boldsymbol{a}$. Выберем некоторую точку $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$. Тогда в силу теоремы Лагранжа

$$f(a, \tilde{x}) - f(a, x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(a, \xi),$$

где ξ — некоторая точка между \tilde{x} и x^* .

Если $f'(a, \xi) \neq 0$, то

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(a, \tilde{x})}{f'(a, \xi)}.$$

Поскольку

$$f'(a, \xi) \in f'(a, \mathbf{X}),$$

где $f'(a, \mathbf{X})$ — какая-либо внешняя интервальная оценка производной от функции $f(a, x)$ по x на интервале \mathbf{X} , то можно интервализовать правую часть последнего полученного равенства:

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(a, \tilde{x})}{f'(a, \mathbf{X})}, \quad 0 \notin f'(a, \mathbf{X}).$$

Если $f(\mathbf{a}, \tilde{x})$ и $f'(\mathbf{a}, \mathbf{X})$ являются внешними интервальными оценками областей значений для $f(a, x)$ и $f'(a, \xi)$ по всем $a \in \mathbf{a}$ и $\xi \in \mathbf{X}$, то для любой точки $x^* \in \mathbf{X} \cap \Xi_{uni}(f, \mathbf{a})$ выполняется

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\mathbf{a}, \tilde{x})}{f'(\mathbf{a}, \mathbf{X})}.$$

Определение 1.7.4 Пусть заданы функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, зависящая от параметра $a \in \mathbf{a}$, и интервальные оценивающие функции $f(\mathbf{a}, x)$ и f' для $f(a, x)$ и ее производной по x , соответственно.

Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{IR} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\mathbf{a}, \tilde{x})}{f'(\mathbf{a}, \mathbf{X})}, \quad (1.136)$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона для f с интервальным параметром a .

После выбора начального приближения $\mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}$ итерационное уточнение корня уравнения $f(\mathbf{a}, x) = 0$ с помощью интервального метода Ньютона может быть организовано следующим образом:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 1.7.5. [14] Используя интервальный метод Ньютона, найдем решение интервального нелинейного уравнения

$$[2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] = 0. \quad (1.137)$$

Произведем графическое отделение корней. На Рис. 1.29 показан график функции $y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$. Так как коэффициенты перед слагаемыми, входящими в y , являются интервальными величинами, то две кривые $y_1 = 2.2\sqrt{x} + 0.4x - 3$ (верхняя граница) и $y_2 = 2\sqrt{x} + 0.3x - 3.1$ (нижняя граница) ограничивают область координатной плоскости, выделенную заливкой розовым цветом.

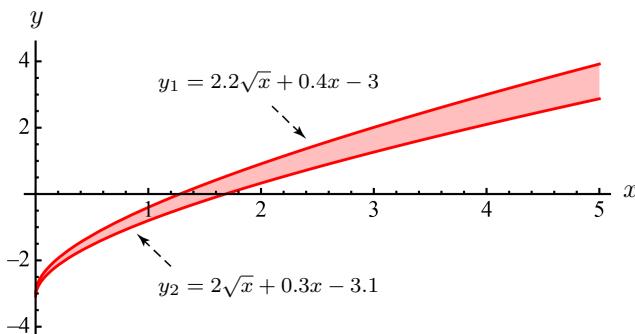


Рис. 1.29. График функции $y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$

Как видно на Рис. 1.29, искомый корень локализован на интервале

$$\mathbf{X}^{(0)} = [1.0, 2.0].$$

Определим первую производную функции y по x :

$$y' = [2.0, 2.2] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + [0.3, 0.4] = \frac{[1.0, 1.1]}{\sqrt{x}} + [0.3, 0.4].$$

Поскольку естественное и оптимальное интервальные расширения функций y и y' совпадают (см. параграф 1.3.1), то для построения итерационного процесса мы можем выбрать естественные интервальные расширения функции y и ее первой производной по x :

$$\mathbf{y}_\natural(\mathbf{X}^{(k)}), \quad \mathbf{y}'_\natural(\mathbf{X}^{(k)}).$$

Мы выполним уточнение корня нелинейного уравнения трижды для разных точек \tilde{x} :

$$\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}.$$

Результаты, получаемые на итерациях интервального метода Ньютона, приведены в таблицах 1.11, 1.12 и 1.13, соответственно.

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$	$\text{dist}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)}\right)$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.2667, 1.7944]	0.2667
1	[1.2667, 1.7944]	[1.2792, 1.7149]	0.0795
2	[1.2792, 1.7149]	[1.2793, 1.7062]	0.0087
3	[1.2793, 1.7062]	[1.2793, 1.7055]	0.0008
4	[1.2793, 1.7055]	[1.2793, 1.7054]	0.0001
5	[1.2793, 1.7054]	[1.2793, 1.7054]	$6.2655 \cdot 10^{-6}$

Таблица 1.11. Итерационное уточнение корня уравнения (1.137) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$	$\text{dist}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)}\right)$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.2076, 1.6991]	0.3009
1	[1.2076, 1.6991]	[1.2345, 1.6903]	0.0269
2	[1.2345, 1.6903]	[1.2329, 1.6894]	0.0009
3	[1.2345, 1.6894]	[1.2330, 1.6894]	$2.0087 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.12. Итерационное уточнение корня уравнения (1.137) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$

Таким образом, с помощью выбранного численного метода мы определили три значения одного и того же интервального решения нелинейного уравнения (1.137):

$$\mathbf{X} = [1.2793, 1.7054], \text{ rad } \mathbf{X} = 0.2131 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)},$$

$$\mathbf{X} = [1.2345, 1.6894], \text{ rad } \mathbf{X} = 0.2274 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)},$$

$$\mathbf{X} = [1.1905, 1.6835], \text{ rad } \mathbf{X} = 0.2465 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}.$$

k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\mathcal{N}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right)$	$\text{dist}\left(\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{X}^{(k+1)}\right)$
0	[1.0000, 2.0000]	[1.0952, 1.7811]	0.2190
1	[1.0952, 1.7811]	[1.1631, 1.7098]	0.0713
2	[1.1631, 1.7098]	[1.1833, 1.6900]	0.0202
3	[1.1833, 1.6900]	[1.1887, 1.6850]	0.0054
4	[1.1887, 1.6850]	[1.1901, 1.6838]	0.0013
5	[1.1901, 1.6838]	[1.1904, 1.6836]	0.0003
6	[1.1904, 1.6836]	[1.1905, 1.6835]	0.0001
7	[1.1905, 1.6835]	[1.1905, 1.6835]	$1.8712 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.13. Итерационное уточнение корня уравнения (1.137) с помощью интервального метода Ньютона, $\tilde{x}^{(k)} = \bar{\mathbf{X}}^{(k)}$

Сравним границы полученных интервалов с решениями двух точечных уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= 2.2\sqrt{x} + 0.4x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1.2793 \\ y_2 &= 2\sqrt{x} + 0.3x - 3.1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1.6835 \\ \text{rad}[x_1, x_2] &= 0.2021. \end{aligned}$$

Как мы видим, три интервала, полученные путем изменения \tilde{x} при построении итераций интервального метода Ньютона, отличаются от «точного» интервала [1.2793, 1.6835] и притом различны между собой.

Во-первых, можно заметить, что выбор на каждой из итераций нижней и верхней границ уточняемого интервала в качестве центра разложения привел к поочередному «попаданию» в нижнюю и верхнюю границы «точного» решения нелинейного уравнения (1.137). Выбирая точкой $\tilde{x}^{(k)}$ середину уточняемого интервала, мы не «попали» ни в одну из границ «точного» интервала [1.2793, 1.6835]. Значит, выбор центра разложения \tilde{x} влияет на получаемое решение нелинейного интервального уравнения, и этот факт необходимо учитывать при организации итерационных вычислений с помощью интервального метода Ньютона.

Во-вторых, почему, изменяя точку \tilde{x} , мы так и не добились полного совпадения интервала-решения с интервалом [1.2793, 1.6835]? Каждый раз, независимо от выбора центра разложения, радиус результирующего интервала оказывался больше радиуса «точного» корня. Несмотря на малость присутствующего расхождения, оно неслучайно. Обнару-

женная погрешность связана с интервальным характером коэффициентов, входящих в нелинейное уравнение: чем шире интервальные коэффициенты и чем больше размер множества решений нелинейного интервального уравнения, тем больше возникающая погрешность. Например, если мы изменим в уравнении (1.137) множитель перед слагаемым, пропорциональным \sqrt{x} , на $[2.0, 3.0]$ и выберем $\mathbf{X}^{(0)} = [0.5, 2.0]$ и $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$, то интервал-решение будет равен

$$\mathbf{X}^{(9)} = [0.7984, 1.8316], \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(8)}, \mathbf{X}^{(9)}) = 2.3314 \cdot 10^{-6},$$

а «точный» интервал, получающийся в результате решения двух точечных нелинейных уравнений, окажется равным $[x_1, x_2] = [0.7984, 1.6835]$.

Тогда при одинаковом выборе центра разложения $\tilde{x}^{(k)} = \underline{\mathbf{X}}^{(k)}$

$$y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$$

$$\mathbf{X} = [1.2793, 1.7054], \quad \text{rad } \mathbf{X} = 0.2131,$$

$$[x_1, x_2] = [1.2793, 1.6835], \quad \text{rad}[x_1, x_2] = 0.2021,$$

$$\text{rad } \mathbf{X} - \text{rad}[x_1, x_2] = 0.0110,$$

$$y = [2.0, 3.0]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$$

$$\mathbf{X} = [0.7984, 1.8316], \quad \text{rad } \mathbf{X} = 0.5166,$$

$$[x_1, x_2] = [0.7984, 1.6835], \quad \text{rad}[x_1, x_2] = 0.4426,$$

$$\text{rad } \mathbf{X} - \text{rad}[x_1, x_2] = 0.0740.$$

В наличии этой погрешности заключается принципиальное различие решений интервального и точечного нелинейных уравнений с помощью интервальных численных методов.

Для большей корректности сравнения решений двух нелинейных интервальных уравнений укажем, что неизменном выборе начального приближения $\mathbf{X}^{(0)} = [0.5, 2.0]$ для второго уравнения

$$[2.0, 3.0]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1] = 0$$

мы получим

$$\mathbf{X}^{(5)} = [0.5335, 1.7285], \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}) = 4.6417 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{rad } \mathbf{X}^{(5)} = 0.5975 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \text{mid } \mathbf{X}^{(k)},$$

$$\mathbf{X}^{(20)} = [0.5000, 1.6835], \quad \text{dist}(\mathbf{X}^{(19)}, \mathbf{X}^{(20)}) = 3.9030 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{rad } \mathbf{X}^{(20)} = 0.5917 \quad \text{при } \tilde{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{X}}^{(k)}$$

с помощью интервального метода Ньютона. ■

Пример 1.7.6. Воспользуемся интервальным методом Ньютона для нахождения решения системы нелинейных интервальных уравнений [14]

$$\begin{cases} [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75] = 0, \\ [1.00, 2.00] \arcsin x = 0. \end{cases} \quad (1.138)$$

Построим графики двух функций $y_1 = [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75]$ и $y_2 = [1.00, 2.00] \arcsin x$. На Рис. 1.30 видно, что рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение, локализованное на брусе

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.10, 0.70] \\ [0.10, 0.70] \end{pmatrix}.$$

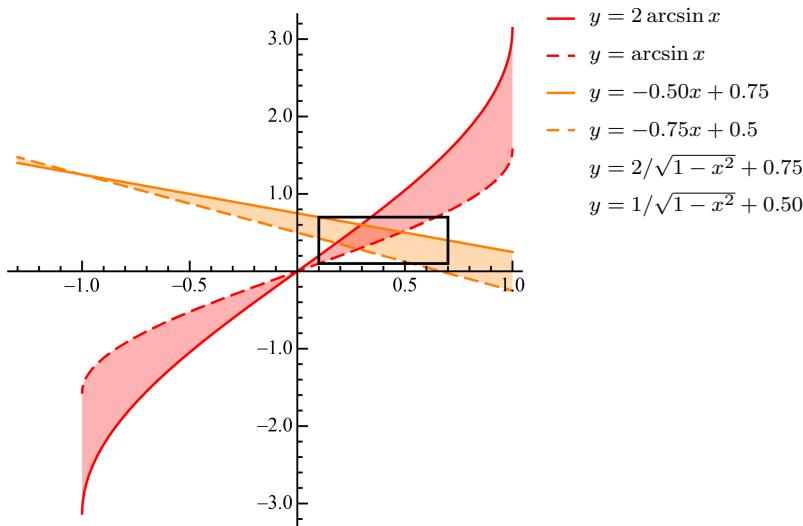


Рис. 1.30. К нахождению решения системы интервальных нелинейных уравнений (1.138) с помощью интервального метода Ньютона

Далее запишем

$$F = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50]x + [0.50, 0.75] - y, \\ [1.00, 2.00] \arcsin x - y \end{pmatrix},$$

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50] & -1 \\ \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-x^2}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Однако в большей степени нас интересует не матрица Якоби F' , которая, уместно отметить, не является сингулярной, так как

$$\det F' = \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-x^2}} + [0.50, 0.75] \neq 0$$

при любом $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$ (см. Рис. 1.30), а естественное интервальное расширение обратной к ней, которое будет выбрано для построений итераций интервального метода Ньютона:

$$(\mathbf{F}')_{\natural}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}} & \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}} \\ \hline -1 & \frac{[-0.75, -0.50]}{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}} \\ \frac{[0.25, 0.75]\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2} + [0.50, 2.00]}{[0.25, 0.75]\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2} + [0.50, 2.00]} & \frac{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}}{[0.50, 0.75] + \frac{[1.00, 2.00]}{\sqrt{1-\mathbf{X}_1^2}}} \end{pmatrix}.$$

Тогда интервальный оператор Ньютона (1.136) для F примет вид

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - (\mathbf{F}')_{\natural}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\natural}(\tilde{x}),$$

где \mathbf{F}_{\natural} — естественное интервальное расширение F ,

$$\mathbf{F}_{\natural} = \begin{pmatrix} [-0.75, -0.50]\mathbf{X}_1 + [0.50, 0.75] - \mathbf{X}_2, \\ [1.00, 2.00] \arcsin \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее уточнение решения системы нелинейных интервальных уравнений (1.138) будет производиться по «стандартной» схеме:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве центра разложения \tilde{x} поочередно выберем четыре точки

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, & \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, & \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(k)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(k)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем результаты уточнения корня системы (1.138), выполненного с помощью интервального метода Ньютона:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}: & \mathbf{X}^{(6)} &= \begin{pmatrix} [0.1651, 0.4964] \\ [0.2551, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & \text{Dist}(\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}) & &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 3.4068 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}: & \mathbf{X}^{(5)} &= \begin{pmatrix} [0.1000, 0.5573] \\ [0.1000, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & \text{Dist}(\mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}) & &= \begin{pmatrix} 1.9929 \cdot 10^{-5} \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}: & \mathbf{X}^{(4)} &= \begin{pmatrix} [0.1045, 0.4984] \\ [0.1000, 0.6296] \end{pmatrix}, \\ & \text{Dist}(\mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}) & &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}^{(k)} &= \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{X}_1^{(k)} \\ \text{mid } \mathbf{X}_2^{(k)} \end{pmatrix}: & \mathbf{X}^{(3)} &= \begin{pmatrix} [0.1000, 0.4963] \\ [0.1760, 0.7000] \end{pmatrix}, \\ & \text{Dist}(\mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}) & &= \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

«Точное» решение системы нелинейных уравнений (1.138) представляет собой замкнутый многоугольник с вершинами

$$\begin{aligned}2 \arcsin x = -0.50x + 0.75 &\rightarrow x = 0.2964, y = 0.6018, \\ 2 \arcsin x = -0.75x + 0.50 &\rightarrow x = 0.1811, y = 0.3642, \\ \arcsin x = -0.50x + 0.75 &\rightarrow x = 0.4857, y = 0.5072, \\ \arcsin x = -0.75x + 0.50 &\rightarrow x = 0.2835, y = 0.2874.\end{aligned}$$

На Рис. 1.31 показана зависимость положения уточненного бруса-решения системы интервальных нелинейных уравнений (1.138) от выбора центра разложения \tilde{x} . Данный пример более наглядно, чем предыдущий пример (см. стр. 167), демонстрирует, насколько неоптимальными могут быть внешние оценки множеств решений нелинейных интервальных уравнений или их систем, получаемые с помощью интервального метода Ньютона, по причине вхождения в нелинейные уравнения интервальнозначных параметров.

проверено

■

Пример 1.7.7. Попробуем применить интервальный метод Кравчика с бицентрированной формой оператора Кравчика (см. стр. 155 и пример на стр. 156) для уточнения интервального корня системы нелинейных интервальных уравнений (1.138).

Выбирая такое же начальное приближение

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(0)} \\ \mathbf{X}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.10, 0.70] \\ [0.10, 0.70] \end{pmatrix},$$

как и при выполнении итерационных вычислений интервальным методом Ньютона (см. пример на стр. 171), на двадцать второй итерации интервального метода Кравчика получим

$$\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}^{(23)} = \begin{pmatrix} [0.1811, 0.4857] \\ [0.2343, 0.6502] \end{pmatrix}, \quad \text{Dist}(\mathbf{X}^{(22)}, \mathbf{X}^{(23)}) = \begin{pmatrix} 4.2863 \cdot 10^{-6} \\ 4.4721 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

На Рис. 1.32 показан результат пересечения

$$\mathbf{X}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} [0.1651, 0.4964] \\ [0.2551, 0.6296] \end{pmatrix}$$

двух интервальных векторов, являющихся «решениями» системы уравнений (1.138). Оба они были получены в примере на стр. 171 с помощью интервального метода Ньютона для центров разложения

$$\tilde{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \underline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1^{(k)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Найденный таким образом интервальный вектор $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$ можно сравнить с бруском $\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}$, а также бруском «точного» решения системы (1.138)

$$\mathbf{X}_{\text{точн}} = \begin{pmatrix} [0.1811, 0.4857] \\ [0.2874, 0.6018] \end{pmatrix}$$

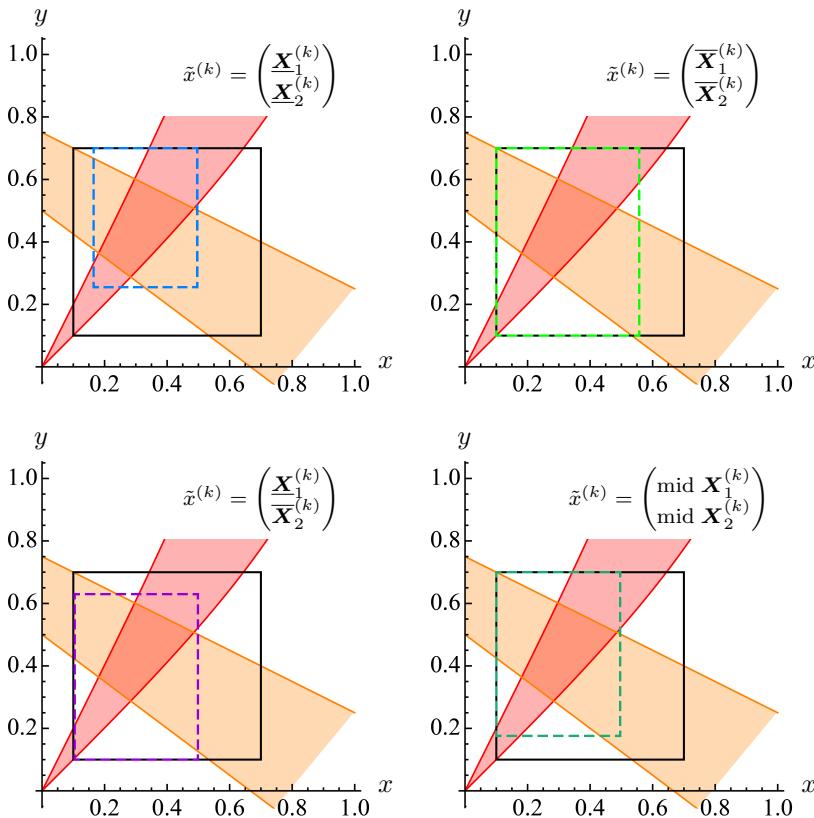


Рис. 1.31. Брусы-решения системы нелинейных интервальных уравнений (1.138) (выделены пунктирной линией), полученные с помощью интервального метода Ньютона. Выбираемые на каждой итерации центры разложения $\tilde{x}^{(k)}$ указаны на подрисунках.

и заметить, что использование интервального метода Кравчика с бицентрированным оператором Кравчика позволило получить оценку множества решений системы нелинейных уравнений (1.138), близкую по «размерам» к пересечению двух интервальных векторов, найденных на интервальных итерациях Ньютона:

$$\|\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}\|_1 = 1.1359, \quad \|\mathbf{X}_{\mathcal{N}}\|_1 = 1.1260, \quad \|\mathbf{X}_{\text{точн}}\|_1 = 1.0875.$$

Кроме того, нам удалось непреднамеренно и с достаточно высокой точностью (учитывая четвертый знак после запятой) «попасть» в одну из компонент бруса $\mathbf{X}_{\text{точн}}$. Эти выводы иллюстрируются Рис. 1.32.

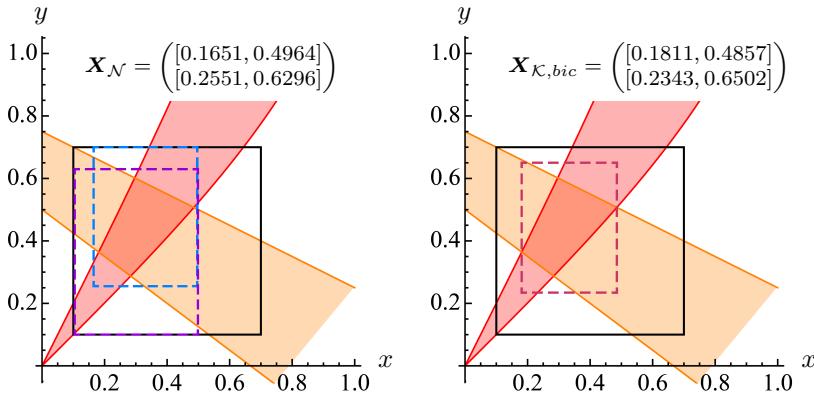


Рис. 1.32. Интервальные векторы \mathbf{X}_N и $\mathbf{X}_{K,bic}$, являющиеся решениями системы нелинейных интервальных уравнений (1.138) (выделены пунктирной линией). Брус \mathbf{X}_N получен как результат пересечения двух брусов, ребра которых показаны голубой и фиолетовой пунктирными линиями (см. Рис. 1.31).

■

Глава 2

Интервальная арифметика Каухера

2.1 Зачем и как расширять классическую интервальную арифметику?

Необходимость выхода за пределы классической интервальной арифметики \mathbb{IR} вызвана целым рядом причин.

1. Как нам уже известно, интервалы с ненулевой шириной не имеют обратных элементов по отношению к арифметическим операциям (1.3) (см. обсуждение различий обычной и интервальной арифметик на стр. 22), а сами арифметические операции над интервалами связаны слабым соотношением субдистрибутивности (1.9).

Это значительно ограничивает возможности при решении даже самых простых уравнений вида

$$\mathbf{a} + x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$$

и подобных им относительно переменной x . Отсутствие полноценной дистрибутивности приводит к невозможности приведения подобных членов, а отсутствие обратных элементов по отношению к арифметическим операциям запрещает перенос членов из одной части уравнения в другую. Кроме того, интервальное уравнение

может вообще не иметь решений в \mathbb{IR} . Например, при нахождении внешней оценки объединенного множества решений ИСЛАУ (1.107) с помощью формально-алгебраического подхода мы столкнулись с решением вспомогательной ИСЛАУ, матрица и вектор правой части которой содержали только «правильные» (в классической интервальной арифметике) интервалы, однако ее решением оказались «неправильные» интервалы, у которых $\underline{x} \geq \bar{x}$.

2. Порядковые свойства классической интервальной арифметики относительно упорядочения по включению « \subseteq » неудовлетворительны. Из двух операций взятия нижней « \wedge » и верхней « \vee » граней относительно рассматриваемого порядка « \subseteq » для двух любых элементов частично упорядоченного множества

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \inf_{\subseteq} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = [\max\{\underline{a}, \underline{b}\}, \min\{\bar{a}, \bar{b}\}], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} := \sup_{\subseteq} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = [\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\bar{a}, \bar{b}\}] \quad (2.2)$$

первая операция не всегда оказывается осуществимой. В частности, в классической интервальной арифметике не существует минимум $[5, 7] \wedge [8, 10]$, так как $[5, 7] \wedge [8, 10] = [8, 7]$.

3. Классическая интервальная арифметика не является минимаксной, т. е. позволяет вычисление минимумов или максимумов только по всем переменным одновременно — «чистых» минимумов и максимумов. В то же время часть задач интервального анализа имеет минимаксную природу, для решения которых классическая интервальная арифметика \mathbb{IR} оказывается непригодной. Такой задачей, например, является задача определения принадлежности точки $x \in \mathbb{R}^n$ множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ вида $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, левая часть которой содержит интервальный вектор $\mathbf{a} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^\top$. Этую задачу, представляющую собой аналитическое описание множества АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ вида $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, описывает следующая

Теорема 2.1.1. *Если интервальная система уравнений*

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

такова, что отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно по первому аргументу на брусе $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^l$ при любых значениях второго

аргумента, то принадлежность точки $x \in \mathbb{R}^n$ AE-множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечет справедливость следующей системы 2m неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную A-неопределенность,} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную E-неопределенность.} \end{array} \right.$$

Если же отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что каждый из параметров a_{r+1}, \dots, a_l , соответствующих интервальной E-неопределенности, входит лишь в одну из компонент $F_i(a, x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, то принадлежность $x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ равносильна вышеуказанной системе неравенств.

Для решения минимаксных задач было бы целесообразным и более удобным использовать иную интервальную арифметику, которая позволяет вычислять минимаксы на уровне элементарных арифметических операций, каждая из которых сама по себе является функцией двух переменных.

Таким образом, классическая интервальная арифметика \mathbb{IR} обладает многими недостатками, и наиболее серьезным из них является отсутствие дистрибутивности. Однако на сегодняшний день неясно, имеется ли возможность и, главное, необходимость устранять отсутствие дистрибутивности в классической интервальной арифметике.

Как решить, хотя бы частично, другие проблемы классической интервальной арифметики, связанные с необратимостью арифметических операций и плохими порядковыми свойствами? Можно обратиться к использованию более полной алгебраической системы Φ , которая имеет лучшие алгебраические и порядковые свойства по сравнению с \mathbb{IR} , а также предоставляет более богатую технику эквивалентных преобразований и более мощные аналитические средства. Для того, чтобы

построить такую более привлекательную, «улучшенную» алгебраическую систему Φ , классическую интервальную арифметику можно *достроить* так, чтобы

- если при решении интервальной задачи в алгебраическом смысле ответ оказывается принадлежащим \mathbb{IR} , а не алгебраическому дополнению $\Phi \setminus \mathbb{IR}$, то он и является искомым решением,
- алгебраическое дополнение $\Phi \setminus \mathbb{IR}$ имело содержательный смысл.

Именно этим путем пошел немецкий математик Э. Каухер [49] ([наиболее развернутое изложение содержится в его диссертации на немецком языке \[50\]](#)). Он выполнил расширение классической интервальной арифметики \mathbb{IR} , вложив ее в более широкую алгебраическую систему, обозначаемую в наст оящее время \mathbb{KR} . В *полной интервальной арифметике Каухера* \mathbb{KR} сохранено свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению, она обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой \mathbb{IR} порядковыми свойствами, что позволяет без ограничений выполнять операции (2.1) и (2.2), и, наконец, интервальная арифметика Каухера является минимаксной.

2.2 Описание полной интервальной арифметики

В полной интервальной арифметике Каухера \mathbb{KR} так же, как в классической интервальной арифметике \mathbb{IR} , интервал обозначается

$$\mathbf{a} = [\eta, \theta],$$

где $\eta = \underline{\mathbf{a}} = \inf \mathbf{a}$ и $\theta = \bar{\mathbf{a}} = \sup \mathbf{a}$ — левый (нижний) и правый (верхний) концы интервала \mathbf{a} , соответственно.

Однако в \mathbb{KR} может быть нарушено обязательное для \mathbb{IR} соотношение между нижним и верхним концами интервала $\eta \leq \theta$, а значит, *может выполняться* $\eta > \theta$. Иначе говоря, \mathbb{KR} получается присоединением неправильных интервалов $[\eta, \theta]$, $\eta > \theta$ ко множеству \mathbb{IR} .

Стоит заметить, что соотношение между нижним и верхним концами не единственное и не самое важное отличие правильного интервала от неправильного. Более глубокое различие между ними заключается в том, что неправильный интервал из \mathbb{KR} является абстрактной парой точек, и его *нельзя* понимать как множество всех точек вещественной

оси между двумя заданными концами, т. е. так, как определяется правильный интервал из \mathbb{IR} .

Несмотря на присущее смысловое различие, для интервалов из \mathbb{KR} теоретико-множественное упорядочение по включению « \subseteq » (1.6) определяется так же, как для интервалов из \mathbb{IR} :

$$a \subseteq b \iff \underline{a} \geq \underline{b} \quad \& \quad \bar{a} \leq \bar{b}. \quad (2.3)$$

Пример 2.2.1. Пусть $a = [7, 3]$, $b = [4, 5]$. Тогда

$$[7, 3] \subseteq [4, 5] = [4, 5].$$

Заменим b на неправильный интервал:

$$[7, 3] \subseteq [5, 4] = [5, 4].$$

Непонятно, что значит $[4, 5] = [4, 5]$? ■

Следствием введенного упорядочения интервалов по включению является выполнимость на \mathbb{KR} операций взятия нижней и верхней граней относительно рассматриваемого порядка « \subseteq »:

Пример 2.2.2.

$$[1, 2] \wedge [3, 8] = [3, 2],$$

$$[1, 2] \vee [3, 8] = [1, 8].$$



На множестве интервалов \mathbb{KR} можно ввести еще одно частичное упорядочение, которое обобщает порядок « \leq » на вещественной оси.

Определение 2.2.1 Для интервалов $a, b \in \mathbb{KR}$ условимся считать, что a не превосходит b и писать « $a \leq b$ » тогда и только тогда, когда $\underline{a} \leq \underline{b}$ и $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Интервал называется неотрицательным, т. е. « ≥ 0 », если неотрицательны оба его конца. Интервал называется неположительным, т. е. « ≤ 0 », если неположительны оба его конца.

Пример 2.2.3. Можно убедиться, что $[2, 1] \leq [3, 8]$, и оба сравниваемых интервала являются неотрицательными. ■

2.2.1 Дуализация в арифметике Каухера

Правильные и неправильные интервалы в \mathbb{KR} связаны между собой отображением *дуализации*, которое задает симметрию правильных и неправильных интервалов относительно вещественной оси \mathbb{R} .

Определение 2.2.2 Отображением дуализации $\text{dual} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$, называется операция, меняющая местами (переворачивающая) концы интервала, т. е.

$$\text{dual } \mathbf{a} := [\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}].$$

С дуализацией тесно связано понятие *правильной проекции* интервала. Эта операция необходима для превращения любого интервала в правильный интервал — обычный числовой промежуток в \mathbb{R} .

Определение 2.2.3 Правильной проекцией интервала \mathbf{a} называется величина

$$\text{pro } \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{a}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Пример 2.2.4. $\mathbf{a} = [7, 8] \rightarrow \text{dual } \mathbf{a} = [8, 7]$, $\text{pro } \mathbf{a} = \mathbf{a}$. ■

Дуализация превращает отношение включения (2.3) в ему противоположное:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \text{dual } \mathbf{a} \supseteq \text{dual } \mathbf{b}.$$

Как следствие,

$$\begin{aligned} \text{dual } (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \text{dual } \mathbf{a} \vee \text{dual } \mathbf{b}, \\ \text{dual } (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) &= \text{dual } \mathbf{a} \wedge \text{dual } \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Пример 2.2.5. Пусть $\mathbf{a} = [6, 3]$, а $\mathbf{b} = [9, 11]$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= [9, 3] \rightarrow \text{dual } (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = [3, 9], \\ \text{dual } \mathbf{a} &= [3, 6], \text{ dual } \mathbf{b} = [11, 9] \rightarrow \text{dual } \mathbf{a} \vee \text{dual } \mathbf{b} = [3, 9]. \end{aligned}$$

проверено ■

2.2.2 Сложение в полной интервальной арифметике

Арифметические операции сложения и вычитания определяются в \mathbb{KR} точно так же, как в классической интервальной арифметике \mathbb{IR} :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &:= [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}], \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &:= \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}],\end{aligned}$$

причем

$$\text{dual}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} + \text{dual } \mathbf{b}. \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) справедливо для любых интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} , не только неотрицательных и неположительных интервалов?

Пример 2.2.6. Пусть $\mathbf{a} = [2, -1]$, а $\mathbf{b} = [1, 2]$. Тогда

$$\begin{aligned}\text{dual}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \text{dual}([3, 1]) = [1, 3], \\ \text{dual}(\mathbf{a}) + \text{dual}(\mathbf{b}) &= [-1, 2] + [2, 1] = [1, 3].\end{aligned}$$

проверено ■

Последнее соотношение подчеркивает «зеркальный» характер связи между сложением неправильных интервалов в \mathbb{KR} и сложением правильных интервалов в \mathbb{IR} .

Пользуясь установленным правилом сложения интервалов, введем понятие противоположного, или обратного по сложению, интервала в \mathbb{KR} . Сумма какого интервала и $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}]$ равна нулю?

$$[0, 0] = [\underline{\mathbf{a}} + (-\underline{\mathbf{a}}), \bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}})] = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] + [-\underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}] = \mathbf{a} + \text{opp } \mathbf{a}.$$

Определение 2.2.4 Каждый элемент \mathbf{a} из \mathbb{KR} имеет единственный обратный по сложению (противоположный), обозначаемый через « $\text{opp } \mathbf{a}$ », и из равенства $\mathbf{a} + \text{opp } \mathbf{a} = 0$ следует

$$\text{opp } \mathbf{a} = [-\underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}]. \quad (2.6)$$

Определение 2.2.5 Будем обозначать через « \ominus » операцию, которая обратна сложению и называется внутренним (или алгебраическим) вычитанием в \mathbb{KR} :

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} := \mathbf{a} + \text{opp } \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}]. \quad (2.7)$$

Пример 2.2.7. Проиллюстрируем различие арифметических операций вычитания в \mathbb{IR} и внутреннего вычитания в \mathbb{KR} :

$$[-1, 1] - [-1, 1] = [-2, 2], \\ [-1, 1] \ominus [-1, 1] = [0, 0].$$

■

2.2.3 Умножение в полной интервальной арифметике

Так как в \mathbb{KR} существует еще одно множество

$$\mathbb{KR} = P \cup Z \cup (-P) \cup (\text{dual } Z) = \mathbb{IR} \cup (\text{dual } Z),$$

где

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\mathbf{a}} \geq 0 \& \bar{\mathbf{a}} \geq 0\} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ Z &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}}\} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -P &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid -\mathbf{a} \in P\} && \text{— неположительные интервалы,} \\ \text{dual } Z &:= \{\mathbf{a} \in \mathbb{KR} \mid \text{dual } \mathbf{a} \in Z\} && \text{— интервалы, содержащиеся в нуле,} \end{aligned}$$

то умножение в полной интервальной арифметике Каухера может быть описано расширенной таблицей Кэли (таблицей 2.1), которая получается в результате добавления в таблицу 1.1 еще одного столбца и еще одной строки.

Следует обратить внимание на тот факт, что в отличие от \mathbb{IR} умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Как видно из таблицы 2.1, произведение двух таких интервалов, один из которых является нульсодержащим, а второй содержится в нуле, равно нулю.

Исключая из дальнейшего рассмотрения интервалы, правильная проекция которых содержит нуль, определим для интервалов из \mathbb{KR} операцию деления. По аналогии с определением арифметической операции вычитания в интервальной арифметике Каухера можно ввести деление и внутреннее (алгебраическое) деление.

Обычное деление в \mathbb{KR} определяется так же, как и в \mathbb{IR} :

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot 1/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\bar{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}], \quad 0 \notin \text{prob}.$$

	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$	$b \in \text{dual } Z$
$a \in P$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \bar{ab}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \underline{ab}]$	$[\underline{ab}, \underline{ab}]$
$a \in Z$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\min \{\underline{ab}, \bar{ab}\}, \max \{\underline{ab}, \bar{ab}\}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \underline{ab}]$	0
$a \in -P$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	$[\underline{ab}, \underline{ab}]$	$[\bar{ab}, \underline{ab}]$	$[\bar{ab}, \bar{ab}]$
$a \in \text{dual } Z$	$[\underline{ab}, \bar{ab}]$	0	$[\bar{ab}, \bar{ab}]$	$[\max \{\underline{ab}, \bar{ab}\}, \min \{\underline{ab}, \bar{ab}\}]$

Таблица 2.1. Интервальное умножение в полной интервальной арифметике \mathbb{KR}

Определение 2.2.6 Будем обозначать операцию, обратную умножению, называемую внутренним (алгебраическим) делением в \mathbb{KR} , через « \oslash », так что

$$a \oslash b := a \cdot \text{inv} b = a \cdot [1/b, 1/\bar{b}], \quad 0 \notin \text{prob}.$$

Определение 2.2.7 Для интервалов a из \mathbb{KR} , которые не содержат нуль и сами не содержатся в нуле, существует единственный обратный относительно умножения элемент, который мы будем обозначать через « $\text{inv } a$ », и из равенства $a \cdot \text{inv } a = 1$ следует

$$\text{inv } a := [1/\underline{a}, 1/\bar{a}]. \quad (2.8)$$

Следует заметить, что для операции умножения в \mathbb{KR} справедливо

$$\text{dual}(a \cdot b) = \text{dual } a \cdot \text{dual } b.$$

Наконец, результат умножения интервала из \mathbb{KR} на вещественное число определяется выражением (1.5), справедливым и для \mathbb{IR} :

$$\mu \cdot a := \begin{cases} [\mu \underline{a}, \mu \bar{a}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \bar{a}, \mu \underline{a}], & \text{иначе.} \end{cases}$$

не определено деление на нульсодержащий (содержащийся в нуле) элемент

Пример 2.2.8. Пусть $\mathbf{a} = [2, 1]$. Найдем значения двух величин:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}/\mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot 1/\mathbf{a} = [2, 1] \cdot [1, 0.5] = [2, 0.5], \\ \mathbf{a} \oslash \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{a} = [2, 1] \cdot [0.5, 1] = 1.\end{aligned}$$

■

2.2.4 Свойства полной интервальной арифметики

Все операции полной интервальной арифметики «наследуют» свойство монотонности по включению \subseteq от классической интервальной арифметики:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \implies \mathbf{a} * \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' * \mathbf{b}' \quad (2.9)$$

для $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{KR}$ и любых операций $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Как уже было упомянуто в начале раздела, отсутствие полноценной дистрибутивности является существенным недостатком классической интервальной арифметики \mathbb{IR} . По этой причине рассмотрение взаимосвязи сложения и умножения в \mathbb{KR} представляет особый интерес.

В зависимости от того, является ли некоторой интервал \mathbf{a} из \mathbb{KR} правильным или неправильным, операции сложения и умножения в полной интервальной арифметике Каухера оказываются связанными соотношениями субдистрибутивности и супердистрибутивности, соответственно:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} \text{ — правильный,} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} \text{ — неправильный.} \quad (2.11)$$

В каких случаях в \mathbb{KR} выполняется точная дистрибутивность?

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{a} = a \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \geq 0, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + (\text{dual } \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}. \quad (2.14)$$

Последнее равенство справедливо только при строго определенном соотношении между знаками интервалов \mathbf{b} , \mathbf{c} и $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$:

$$\text{sgn } \mathbf{b} = -\text{sgn } \mathbf{c} = \text{sgn}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

сейчас мы считаем, что ширина неправильного интервала отрицательна Поскольку интервал в полной интервальной арифметике Каухе-ра имеет принципиально иной смысл по сравнению с тем, как интервал определяется в классической интервальной арифметике (см. стр. 180), он не может обладать такими абсолютными характеристиками, как ширина, радиус, середина и магнитуда. Тем не менее, интервал из $\mathbb{K}\mathbb{R}$ возможно охарактеризовать с помощью магнитуды (абсолютного значения, модуля).

Определение 2.2.8 Абсолютной величиной (модулем) интервала a называется величина $|a| = \max\{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}$.

Обобщение магнитуды интервала в $\mathbb{I}\mathbb{R}$ на $\mathbb{K}\mathbb{R}$ вовсе не означает, что свойства этой характеристики интервала останутся неизменными. Часть из них действительно сохранится, а часть будет нарушена. Очевидным примером такого нарушения является невыполнение

$$a \subseteq b \Rightarrow |a| \leq |b|,$$

которое всегда справедливо в $\mathbb{I}\mathbb{R}$.

Пример 2.2.9.

$$\mathbb{I}\mathbb{R}: [2, 5] \subset [1, 6] \Rightarrow |[2, 5]| = 5, |[1, 6]| = 6, \quad 5 < 6,$$

$$\mathbb{K}\mathbb{R}: [7, 3] \subset [1, 6] \Rightarrow |[7, 3]| = 7, |[1, 6]| = 6, \quad 7 > 6.$$

■

По-моему, $[7, 3] \subset [1, 6]$. В книге С. П. Шарого приводится похожий пример на стр. 59 под определением модуля интервала: $[3, 0] \subset [1, 2]$, но $|[3, 0]| > |[1, 2]|$. — ДА

Легко убедиться, что в $\mathbb{I}\mathbb{R}$ имеет место следующее свойство магнитуды произведения двух интервалов:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Однако в полной интервальной арифметике Каухера вместо равенства может выполняться только

$$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|.$$

Пример 2.2.10. Пусть $\mathbf{a} = [1, 2] \in P$ и $\mathbf{b} = [4, 8] \in P$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= |[1, 2] \cdot [4, 8]| = |[4, 16]| = 16, \\ |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| &= |[1, 2]| \cdot |[4, 8]| = 2 \cdot 8 = 16, \\ 16 &= 16. \end{aligned}$$

Произведем замену: пусть теперь $\mathbf{b} = [4, -8] \in \text{dual } Z$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= |[1, 2] \cdot [4, -8]| = |[4, -8]| = 8, \\ |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| &= |[1, 2]| \cdot |[4, -8]| = 2 \cdot 8 = 16, \\ 8 &< 16. \end{aligned}$$

■

Проверено

2.2.5 Минимаксный характер полной интервальной арифметики

Для того, чтобы обнаружить и подтвердить минимаксный характер полной интервальной арифметики Каухера, введем *условную операцию взятия экстремума по включению*:

$$\bigvee_x^{\mathbf{a}} = \begin{cases} \bigvee_{x \in \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \bigwedge_{x \in \text{dual } \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Тогда выражение (1.2), определяющее результат любой арифметической операции в классической интервальной арифметике, можно переписать с использованием введенной условной операции в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \star \mathbf{b} &= \{ x \star y \mid x \in \mathbf{a}, y \in \mathbf{b} \} = \\ &= \left[\min_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \max_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (a \star b) \right] = \\ &= \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \text{ где } \star \in \{ +, -, \cdot, / \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

(Заметим, что вторая строка (2.16) совпадает с выражением (1.4).)

Нетрудно убедиться, что эквивалентный вид результата арифметической операции умножения в \mathbb{IR} заменяет содержимое ячеек расширенной таблицы Кэли (таблица 2.1), которые находятся на пересечении строк и столбцов, относящихся к множествам P , Z и $-P$.

Пример 2.2.11. Пусть $a = [-4, 9]$, $a \in Z$ и $b = [-2, 3]$, $b \in Z$.

Определим левую и правую границы интервала, получающегося в результате умножения $a \cdot b$ согласно (2.16):

$$\begin{aligned} \min_{a \in [-4,9]} \left(\min_{b \in [-2,3]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-2) = -2a, \\ a < 0, & a \cdot 3 = 3a. \end{cases} = \\ &= \min \left(\min_{a \in [0,9]} (-2 \cdot a) = -18, \min_{a \in [-4,0]} (3 \cdot a) = -12 \right) = -18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{a \in [-4,9]} \left(\max_{b \in [-2,3]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-4,9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 3 = 3a, \\ a < 0, & a \cdot (-2) = -2a. \end{cases} = \\ &= \max \left(\max_{a \in [0,9]} (3 \cdot a) = 27, \max_{a \in [-4,0]} (-2 \cdot a) = 8 \right) = 27. \end{aligned}$$

Значит, $a \cdot b = [-18, 27] = [\min\{\underline{ab}, \bar{ab}\}, \max\{\underline{ab}, \bar{ab}\}]$, что находится в согласии с выражением, приведенным в соответствующей ячейке расширенной таблицей Кэли (таблица 2.1).

Рассуждая аналогичным образом, можно получить результат одной из арифметических операций $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ над двумя любыми интервалами из \mathbb{IR} — положительными, неположительными и нульсодержащими. **Проверено** ■

Попробуем использовать условную операцию взятия экстремума по включению (2.15) для представления результатов арифметических операций в \mathbb{KR} . Для этого нам необходимо рассмотреть два различных сочетания интервалов:

1. *оба интервала a и b , которые участвуют в арифметической операции, являются неправильными,*
2. *неправилен один из интервалов: a правильный, b неправильный или a неправильный, b правильный.*

Начнем с рассмотрения более простого случая, когда оба интервала \mathbf{a} и \mathbf{b} являются неправильными. Продолжая сравнение получаемых промежуточных результатов с расширенной таблицей Кэли, для операции умножения в \mathbb{KR} запишем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[\max_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \max_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \min_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \min_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right].$$

Пример 2.2.12. Пусть $\mathbf{a} = [4, -9]$, $\mathbf{a} \in \text{dual } Z$, а также $\mathbf{b} = [2, -3]$, $\mathbf{b} \in \text{dual } Z$.

Определим левую и правую границы интервала, получающегося в результате умножения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, и сравним полученный результат с тем выражением, которое приведено в соответствующей ячейке расширенной таблицы Кэли (таблицы 2.1):

$$\begin{aligned} \max_{a \in [-9, 4]} \left(\max_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-9, 4]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 2 = 2a, \\ a < 0, & a \cdot (-3) = -3a \end{cases} = \\ &= \max \left(\max_{a \in [0, 4]} (2 \cdot a) = 8, \max_{a \in [-9, 0]} (-3 \cdot a) = 27 \right) = 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{a \in [-9, 4]} \left(\min_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-9, 4]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-3) = -3a, \\ a < 0, & a \cdot 2 = 2a \end{cases} = \\ &= \min \left(\min_{a \in [0, 4]} (-3 \cdot a) = -12, \min_{a \in [-9, 0]} (2 \cdot a) = -18 \right) = -18. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем, что

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [4, -9] \cdot [2, -3] = [27, -18] = [\max\{\underline{ab}, \bar{ab}\}, \min\{\underline{ab}, \bar{ab}\}],$$

и полученный ответ полностью совпадает с тем выражением, которое представлено в расширенной таблице Кэли. **Проверено** ■

Пользуясь приведенным описанием нахождения границ результирующего интервала $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, можно убедиться, что то выражение, в которое входят условные операции взятия экстремумов по включению, также справедливо для определения результатов операций сложения, вычитания и деления (если \mathbf{b} — делитель, то должно выполняться $0 \notin \text{pro } \mathbf{b}$),

в которых участвуют два неправильных интервала из множеств P , $-P$ и $\text{dual } Z$. Значит,

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \star b), \quad \star \in \{+, -, \cdot, / \}.$$

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда один из интервалов, над которыми производится арифметическая операция, является правильным, а второй — неправильным. Тогда с использованием выражения (2.15) результат умножения двух таких интервалов можно представить в виде:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[\min_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \max_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right],$$

если \mathbf{a} — правильный интервал, а \mathbf{b} — неправильный интервал,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \cdot b) = \left[\max_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \min_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right],$$

если \mathbf{a} — неправильный интервал, а \mathbf{b} — правильный интервал.

Как мы видим, определение результата операции умножения двух интервалов, один из которых является неправильным, в \mathbb{KR} требует вычисления минимаксов и максиминов! Следовательно, интервальная арифметика Каухера действительно является *минимаксной*.

Пример 2.2.13. Пусть $\mathbf{a} = [-4, 9]$, $\mathbf{a} \in Z$ и $\mathbf{b} = [2, -3]$, $\mathbf{b} \in \text{dual } Z$.

Выполним умножение интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \min_{a \in [-4, 9]} \left(\max_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \min_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot 2 = 2a, \\ a < 0, & a \cdot (-3) = -3a \end{cases} = \\ &= \min \left(\min_{a \in [0, 9]} (2 \cdot a) = 0, \min_{a \in [-4, 0]} (-3 \cdot a) = 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{a \in [-4, 9]} \left(\min_{b \in [-3, 2]} (a \cdot b) \right) &= \max_{a \in [-4, 9]} \begin{cases} a \geq 0, & a \cdot (-3) = -3a, \\ a < 0, & a \cdot 2 = 2a \end{cases} = \\ &= \max \left(\max_{a \in [0, 9]} (-3 \cdot a) = 0, \max_{a \in [-4, 0]} (2 \cdot a) = 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $a \in Z$ и $b \in \text{dual } Z$, то $a \cdot b = 0$, как и указано в расширенной таблице Кэли. Рассмотрение умножения неправильного интервала a на правильный интервал b не имеет смысла, поскольку рассуждения и результат окажутся точно такими же, как в настоящем случае; отличие будет заключаться лишь в том, что все величины, имеющие отношение к a , необходимо заменить на те же, относящиеся к b , и наоборот. Проверено ■

Распространяется ли введенное определение результата операции умножения в \mathbb{KR} на другие операции, в которых участвуют один правильный и один неправильный интервалы? Да, распространяется, однако необходимо повторно сделать важное замечание: в операции деления не может участвовать такой интервал-делитель, правильная проекция которого является нульсодержащей.

Таким образом,

$$a * b = \bigvee_{a \in a} \bigwedge_{b \in \text{pro } b} (a * b), \quad * \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

если a — правильный интервал, а b — неправильный интервал,

$$a * b = \bigwedge_{a \in \text{pro } a} \bigvee_{b \in b} (a * b) = * \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

если a — неправильный интервал, а b — правильный интервал.

Подводя итог всему вышеизложенному, можно заключить, что все интервальные арифметические операции в \mathbb{KR} объединены следующим представлением:

$$a * b = \bigwedge_a \bigvee_b^a (a * b), \quad * \subseteq \{ +, -, \cdot, / \}. \quad (2.17)$$

Как в полной интервальной арифметике Каухера связаны арифметические операции сложения и умножения с операциями взятия нижней « \wedge » и верхней « \vee » граней по включению « \subseteq »?

Для сложения имеет место точная дистрибутивность:

$$a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c),$$

$$a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c),$$

однако для умножения точные равенства справедливы только в том случае, если $0 \notin \text{pro } \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac}, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac}.\end{aligned}$$

Также имеют место следующие дистрибутивные свойства операции умножения:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &\subseteq \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac}, & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac} \quad \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} \wedge \mathbf{ac}, & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) &\supseteq \mathbf{ab} \vee \mathbf{ac} \quad \text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный.}\end{aligned}$$

Вернемся к обсуждению минимаксного характера полной интервальной арифметики Каухера. Как мы установили, если один из интервалов, участвующих в арифметической операции, является неправильным, а второй — правильным, то концы результирующего интервала оказываются *минимаксом* и *максимином* результата арифметической операции.

Можно ли использовать минимаксный характер $\mathbb{K}\mathbb{R}$ для оценивания областей значений функций, т. е. вычисления минимаксов и максиминов от сложных выражений? Ответ на этот вопрос неоднозначен, так как в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ поставленная задача оказывается гораздо более сложной, чем в $\mathbb{I}\mathbb{R}$. Необходимо учитывать тот факт, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом даже при однократном вхождении каждой переменной в выражение, область значение которого предстоит определить. Тем не менее, для любых правильных интервальных векторов $x \in \mathbb{I}\mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{I}\mathbb{R}^q$ справедливо следующее соотношение, которое может быть выведено из (2.17):

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y), \quad (2.18)$$

если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой переменной x_i и y_j в первой степени.

2.3 Внешнее оценивание множеств АЕ-решений ИСЛАУ

С.П.Шарым в ряде публикаций ([32], [34], [35] и др.) развит метод нахождения формальных решений ИСЛАУ субдифференциальным ме-

тодом Ньютона. В настоящем разделе кратко излагаются полученные им результаты. Более подробно они изложены в монографии [45].

Вернемся к подразделу 1.4.1, в котором обсуждаются три способа характеризации множеств АЕ-решений ИСЛАУ, левая часть которой представлена вектором \mathbf{a} (множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$) или матрицей \mathbf{A} (множество АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$). Перечислим эти методы:

- прямое указание кванторов — кванторного вектора α или кванторной матрицы \mathcal{A} , а также кванторного вектора β , относящегося к правой части ИСЛАУ,
- разбиение индексных множеств интервальных параметров системы,
- дизъюнктное разложение интервальных параметров системы.

Выход за пределы классической интервальной арифметики \mathbb{IR} позволяет дать еще одно определение множества АЕ-решений для ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, которое содержит следующая

Теорема 2.3.1. [35] Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (2.19)$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Интервальные матрица \mathbf{A}^c и вектор \mathbf{b}^c , определяемые как

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists, \quad \mathbf{b}^c = \mathbf{b}^\vee + \text{dual } \mathbf{b}^\exists,$$

называются характеристическими для множества АЕ-решений ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, задаваемого дизъюнктными разложениями \mathbf{A} на \mathbf{A}^\vee и \mathbf{A}^\exists и \mathbf{b} на \mathbf{b}^\vee и \mathbf{b}^\exists .

Таким образом, множество АЕ-решений некоторой ИСЛАУ, обозначенное $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$, может быть определено путем задания характеристических матрицы и вектора правой части, и в случае выбора такого способа определения множества АЕ-решений явное указание ИСЛАУ и распределения типов неопределенности в ней оказывается необязательным.

Как только характеристические матрица и вектор ИСЛАУ заданы, внешнее оценивание объединенного множества решений можно произвести с помощью формально-алгебраического подхода. Идея этого подхода, называемого также формальным, — нахождение внешней оценки

объединенного множества решений ИСЛАУ путем нахождения формального решения некоторой вспомогательной ИСЛАУ — была рассмотрена ранее в подразделе 1.5.5 в рамках интервальнойной арифметики \mathbb{IR} и сейчас будет реализована в интервальнойной арифметике Каухера.

Добавим к обеим частям выражения (2.19) по $(x \ominus A^c x)$ и получим:

$$x \subseteq x + b^c \ominus A^c x.$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}$, мы можем воспользоваться свойством дистрибутивности операции умножения в \mathbb{KR} (2.12) и вынести переменную x за скобки. Окончательно имеем:

$$x \in \Xi_{A\beta}(A, b) \iff x \subseteq b^c + (I \ominus A^c) x.$$

Положения, лежащие в основе формального подхода к оцениванию объединенного множества решений ИСЛАУ в \mathbb{KR} , обобщает следующая

Теорема 2.3.2. *ссылка на журнальную публикацию* Пусть для интервальной линейной системы $Ax = b$ множество AE -решений $\Xi_{A\beta}(A, b)$ непусто, а A^c и b^c — характеристические матрица и правая часть этого множества решений — таковы, что

$$\rho(|I \ominus A^c|) < 1.$$

Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus A^c) x + b^c \quad (2.20)$$

является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений $\Xi_{A\beta}(A, b)$.

Для нахождения формального решения уравнения (2.20) существуют два метода. Первый из них, уже знакомый, заключается в выборе вектора начального приближения $x^{(0)}$, который, как нам заранее известно, включает в себя множество $\Xi_{A\beta}(A, b)$, предобусловливании ИСЛАУ для выполнения условия, накладываемого на спектральный радиус матрицы $|I \ominus A^c|$, и организации итераций по формуле

$$x^{(k+1)} \leftarrow (I \ominus A^c) x^{(k)} + b^c.$$

Вторым методом нахождения формального решения уравнения (2.20) является *субдифференциальный метод Ньютона*. Этот метод отличают высокая вычислительная эффективность, а также *приимимость для работы с ИСЛАУ, в характеристических матрицах A^c* .

которых правильные и неправильные элементы смешаны (т. е. в одной строке или одном столбце матрицы присутствуют как правильные, так и неправильные интервалы).

Итак, мы имеем уравнение (2.20), заданное в рекуррентном виде,

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}, \quad \mathbf{C} = (I \ominus \mathbf{A}^c), \quad \mathbf{d} = \mathbf{b}^c,$$

и мы можем записать равносильное ему в \mathbb{KR} :

$$\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d} = 0. \quad (2.21)$$

Как решить это уравнение или, точнее, каким подходом к вычислению его решения можно воспользоваться? В разделе 1.2.2 уже было отмечено, что отсутствие полноценной дистрибутивности в интервальных арифметиках, в том числе, как мы убедились, в полной интервальной арифметике Каухера, приводит к нарушению аксиомы линейного пространства:

$$(\mu + \nu)x \neq \mu x + \nu x$$

для любых $x \in \mathbb{KR}^n$ и любых скаляров $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Значит, множество \mathbb{KR}^n не является линейным пространством, и большинство существующих подходов к определению решений операторных уравнений неприменимы для решения уравнения (2.21).

Для расширения наших возможностей при нахождении формального решения мы *перейдем* из нелинейного пространства \mathbb{KR}^n в некое линейное пространство U , построив биективное отображение, называемое *вложением*:

$$\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U,$$

причем для каждого отображения $\phi : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ существует лишь единственное *индукцированное* отображение

$$\iota \circ \phi \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U, \quad (2.22)$$

где « \circ » служит для обозначения композиции отображений.

Тесная связь свойств отображений ϕ и $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ позволит нам *заменить* исходную задачу решения уравнения в \mathbb{KR}

$$\mathbf{f}(x) = 0, \quad \mathbf{f} : x \mapsto \mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d}$$

на задачу решения *индуцированного уравнения* в U :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(y) &= \iota(0), \\ \mathcal{F} &= \iota \circ f \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U, \\ \mathcal{F}(y) &= \iota(C\iota^{-1}(y) \ominus \iota^{-1}(y) + d),\end{aligned}$$

и однозначно восстановить формальное интервальное решение \mathbf{x}^* по y^* из соотношения $\mathbf{x}^* = \iota^{-1}(y^*)$.

На данном этапе рассмотрения перехода из \mathbb{KR}^n в U наиболее серьезным вопросом является выбор удачного вложения ι в том смысле, что это отображение должно быть по возможности простым, а форма индуцированных отображений — удобной. Мы остановимся на выборе такого вложения, которое имеет специальное название «*погружение*».

Определение 2.3.1 *Биективные вложения* $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$, которые

- сохраняют аддитивную алгебраическую структуру \mathbb{KR}^n , т. е. такие, что $\iota(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \iota(\mathbf{u}) + \iota(\mathbf{v})$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{KR}^n$,
- сохраняют топологическую структуру \mathbb{KR}^n , т. е. такие, что само отображение $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$ и его обратное $\iota^{-1} : U \rightarrow \mathbb{KR}^n$ непрерывны,

будем называть погружениями интервального пространства \mathbb{KR}^n в линейное пространство U .

Определение свойств погружения позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, оно однозначно задает линейное пространство U : U должно быть евклидовым пространством \mathbb{R}^{2n} . Во-вторых, из определения погружения следует, что любые два погружения \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} одинаковы с точностью до неособенного линейного преобразования \mathbb{R}^{2n} .

Следующий шаг в переходе из \mathbb{KR}^n в U после определения удобного вложения — погружения — и линейного пространства U связан с выбором конкретного погружения. Ограниченностю этого выбора обусловлена необходимостью сохранить при переходе в \mathbb{R}^{2n} не только алгебраические свойства, но и структуру частичного порядка по включению $\llcorner \subseteq \lrcorner$ в \mathbb{KR}^n .

Всякое погружение $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$ порождает на линейном пространстве \mathbb{R}^{2n} некоторый частичный порядок по включению $\llcorner \subseteq \lrcorner$ — образ порядка по включению $\llcorner \subseteq \lrcorner$ в \mathbb{KR}^n при погружении ι . Конкретные выражения, определяющие порядок $\llcorner \subseteq \lrcorner$, зависят от вида погружения ι .

Назовем *индуцированным частичным порядком* такой частичный порядок по включению « \sqsubseteq » на \mathbb{R}^{2n} , который определяется как

$$x \sqsubseteq y \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \iff \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{KR}^n. \quad (2.23)$$

Зададимся вопросом: выбор какого погружения может обеспечить совпадение простейшего покомпонентного порядка на \mathbb{R}^{2n}

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

с индуцированным порядком (2.23)? Предъявляемому нами требованию соответствует *стандартное погружение*.

Определение 2.3.2 *Погружение $sti : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, которое действует по правилу*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-\underline{x}_1, -\underline{x}_2, \dots, -\underline{x}_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n),$$

т. е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов x_1, x_2, \dots, x_n становятся первой, второй, ..., n -ой компонентами точечного $2n$ -вектора, а правые концы x_1, x_2, \dots, x_n становятся $(n+1)$ -ой, ..., $2n$ -ой компонентами точечного $2n$ -вектора соответственно, будем называть стандартным погружением интервального пространства \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} .

Стандартное погружение замечательно тем, что переводит супремумы и инфинумы по включению на интервальном пространстве \mathbb{KR}^n в супремумы и инфинумы относительно покомпонентного порядка на \mathbb{R}^{2n} соответственно. Эта особенность стандартного погружения значительно упрощает дальнейшие рассуждения и объясняет его выбор.

В конструктивном построении вычислительного метода используется матрица специального вида.

Для стандартного погружения sti матрица этого индуцированного линейного преобразования $(sti \circ \phi \circ sti^{-1})$ является точечной блочной $2n \times 2n$ -матрицей Q^\sim вида

$$Q^\sim := \left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right),$$

где $n \times n$ -подматрицы $Q^+ = (q_{ij}^+)$ и $Q^- = (q_{ij}^-)$ — это положительная и отрицательная части Q , т. е. матрицы, образованные положительными и отрицательными частями элементов Q , соответственно.

Уточним, что для вещественного числа a положительная и отрицательная части определяются как

$$\begin{aligned} a^+ &:= \max \{a, 0\}, \\ a^- &:= \max \{-a, 0\}, \end{aligned}$$

а положительной и отрицательной частями интервала \mathbf{x} называются интервалы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

2.3.1 Субдифференциальный метод Ньютона

Алгоритм субдифференциального метода Ньютона имеет следующий вид:

1. Выберем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.
2. Если $(k-1)$ -е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения \mathcal{F} в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau \left(D^{(k-1)} \right)^{-1} \mathcal{F} \left(x^{(k-1)} \right),$$

где $\tau \in [0, 1]$ — релаксационный параметр.

[Здесь будет пример или несколько примеров.](#)

Пример 2.3.1. Найдем решение системы интервальных линейных уравнений вида $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$, где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [6, 8] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [13, 15] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

с помощью субдифференциального метода Ньютона.

Для вычислений будем использовать свободно распространяемое программное обеспечение **fiposol**, разработанное С. П. Шарым [30].

Поскольку все элементы матрицы \mathbf{C} являются правильными интервалами, то в качестве начального приближения $x^{(0)}$ мы можем выбрать решение специальной $2n \times 2n$ -системы точечных уравнений [45]:

$$(I - (\text{mid } \mathbf{C})^\sim) x = \text{sti}(\mathbf{d}).$$

Определим матрицы $\text{mid } \mathbf{C}$ и $(\text{mid } \mathbf{C})^\sim$:

$$\text{mid } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1.25 \\ 1.25 & 14 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{C})^\sim = \begin{pmatrix} 7 & 1.25 & 0 & 0 \\ 1.25 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1.25 & 14 \end{pmatrix}.$$

Как выглядит вектор $\text{sti}(\mathbf{d})$?

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{sti}(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, определение вектора начального приближения для решения уравнения вида $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$ с матрицей \mathbf{C} и вектором \mathbf{d} (2.24) требует решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1.25 & 0 & 0 \\ 1.25 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1.25 & 14 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.1193 \\ -0.1322 \\ 0.1193 \\ 0.1322 \end{pmatrix}.$$

Результаты, получаемые на каждой итерации субдифференциального метода Ньютона, приведены в таблицах 2.2 для выбранного значения релаксационного параметра $\tau = 1$.

Полученные результаты позволяют сделать два вывода. Во-первых, получение искомого корня — интервального вектора $\mathbf{x}^{(2)}$ из таблицы 2.2 — уже на второй итерации свидетельствует о высокой сходимости субдифференциального метода Ньютона. Во-вторых, можно заметить, что обе компоненты вектора-решения $\mathbf{x}^{(2)}$ являются неправильными интервалами.

Попробуем изменять элементы интервальных матрицы \mathbf{C} и вектора \mathbf{d} и посмотрим, как эти изменения отразятся на решении системы.

k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} [0.1193, 0.1193] \\ [0.1322, 0.1322] \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} [-0.1149, -0.1695] \\ [-0.1306, -0.1525] \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} [-0.1149, -0.1695] \\ [-0.1306, -0.1525] \end{pmatrix}$

Таблица 2.2. Итерационное уточнение корня уравнения вида $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$, в которой \mathbf{C} и \mathbf{d} определяются выражением (2.24), с помощью субдифференциального метода Ньютона

Сначала будем изменять вектор \mathbf{d} . В первую очередь увеличим радиус компоненты d_1 на 3. Тогда ИСЛАУ примет вид

$$x = \begin{pmatrix} [6, 8] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [13, 15] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [-2, 4] \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение достигается уже на третьей итерации:

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} [0.4526, -0.7797] \\ [-0.1752, -0.1017] \end{pmatrix}.$$

Теперь вернемся к исходной компоненте d_1 , равной единице, и «расширим» компоненту вектора d_2 так же на 3:

$$x = \begin{pmatrix} [6, 8] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [13, 15] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ [-1, 5] \end{pmatrix}.$$

Тогда получаемый на третьей итерации субдифференциального метода Ньютона интервальный вектор-решение примет вид

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} [-0.1576, -0.1186] \\ [0.1030, -0.4068] \end{pmatrix}.$$

Таким образом, увеличивая радиус компоненты d_1 , мы «превратили» компоненту вектора-решения x_2 в правильный интервал. И наоборот: «расширяя» компоненту d_2 , мы добились того, что компонента x_1 стала правильным интервалом. Аналогичного результата можно добиться путем поочередного увеличения радиусов элементов интервальной матрицы \mathbf{C} .

Значит ли обнаруженная нами закономерность, что если мы «расширим» обе компоненты вектора \mathbf{d} , вектор \mathbf{x} будет содержать только правильные интервальные компоненты?

Оказывается, что нет. Решением ИСЛАУ

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [6, 8] & [1, 1.5] \\ [1, 1.5] & [13, 15] \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-2, 4] \\ [-1, 5] \end{pmatrix}$$

является интервальный вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.3898, -0.7288] \\ [0.0508, -0.3559] \end{pmatrix},$$

и обе его компоненты являются неправильными векторами.

Проверено

Сравним последнее полученное нами решение \mathbf{x} ИСЛАУ с расширенным вектором \mathbf{d} с решением $\mathbf{x}^{(2)}$ из таблицы 2.2 исходной ИСЛАУ:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} [-0.1149, -0.1695] \\ [-0.1306, -0.1525] \end{pmatrix}.$$

Поскольку к неправильному интервалу в полной интервальной арифметике Каухера неприменимо понятие «ширина», определим правильные проекции сравниваемых векторов:

$$\text{про } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-0.7288, 0.3898] \\ [-0.3559, 0.0508] \end{pmatrix}, \quad \text{про } \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} [-0.1695, -0.1149] \\ [-0.1525, -0.1306] \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что радиусы элементов вектора $\text{про } \mathbf{x}$, относящегося к ИСЛАУ с расширенным вектором \mathbf{d} , значительно больше радиусов элементов вектора $\text{про } \mathbf{x}^{(2)}$, который является решением исходной ИСЛАУ с точечным вектором \mathbf{d} .

Значит, варьируя ширину или, что равносильно, радиусы элементов интервальных матрицы \mathbf{C} и вектора \mathbf{d} , можно в достаточно широких пределах управлять решением ИСЛАУ вида $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}$. ■

Глава 3

Анализ данных с интервальной неопределённостью

Теория и эксперимент — два неразрывно связанных и равнозначных по важности процесса, направленных на познание мира. В своем выступлении на Общем собрании Академии наук СССР 6 февраля 1962 года великий советский физик П. Л. Капица указывал [15]: «Гармоническое развитие теории и практики является абсолютно необходимым во всех областях естествознания. О самом механизме связи теории с практикой мне хотелось бы напомнить красивым сравнением, употребленным еще Кельвином. Он сравнивал теорию с жерновами, а опытные данные — с зерном, которое засыпается в эти жернова. Совершенно ясно, что одни жернова, сколько бы ни крутились, ничего полезного дать не смогут (теория работает сама на себя). Но качество муки определяется качеством зерна, и гнилое зерно не может дать питательной муки. Поэтому доброкачественность эксперимента является необходимым условием как для построения передовой теории, так и для получения практических результатов».

Целью проведения большинства экспериментов является исследование и регистрация количественных характеристик некоторого свойства интересующей нас величины — явления, тела или вещества. Эта информация, представляющая собой набор значений величины, при-

писываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией и называемая результатом измерения, должна быть не только получена, но и обработана.

Абсолютно точных измерений не существует. Результат проводимого нами измерения зависит от множества факторов: измерительной системы, методики измерения, внешних условий, квалификации оператора и даже привходящих обстоятельств. Если мы проводим измерения одной и той же величины несколько раз одним способом и в одинаковых условиях, причем разрешающая способность измерительной системы достаточно высока для различения близких показаний, то мы будем регистрировать разные показания, рассеянные вокруг истинного значения величины или ее смещенного значения.

Качество измерений описывается понятием *точности* измерений, которое объединяет в себе понятия

- *правильность* измерений — близость среднего арифметического бесконечно большого числа повторно измеренных значений величины к опорному (истинному или принятому) значению величины,
- *прецизионность* измерений — близость между показаниями или измеренными значениями величины, полученными при повторных измерениях для одного и того же или аналогичных объектов при заданных условиях.

Если регистрируемые значения рассеяны вокруг смещенного значения наблюдаемой величины, а не ее истинного значения, то этот сдвиг позволяет получить оценку *систематической погрешности* измерений. Систематическая погрешность считается постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях и, как следствие, ее нельзя обнаружить, исключить или уменьшить путем многократного повторения измерений. От измерения к измерению систематическая погрешность сохраняет *свои свойства*, а близость её к нулю отражает правильность измерений.

Случайная погрешность при повторных измерениях возникает из непредсказуемых временных или пространственных изменений величин, которые невозможно поддерживать в точности постоянными и влияющих на результаты измерений, — случайных эффектов, следствием которых являются изменения измеряемой величины при повторных наблюдениях. Близость к нулю случайной погрешности харак-

теризует прецизионность измерений: в теоретико-вероятностном подходе прецизионность измерений численно выражается через такие параметры, как стандартное отклонение, дисперсия или коэффициент вариации при заданных условиях измерений.

Что означает провести обработку результатов измерений? Ответ на этот вопрос дает действующий в настоящее время национальный стандарт РФ ГОСТ Р 8.736-2011 «Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения» [10]:

1. исключить известные систематические погрешности из результатов измерений,
2. вычислить оценку измеряемой величины (среднее арифметическое значение результатов измерений),
3. вычислить среднее квадратическое отклонение результатов измерений,
4. проверить наличие грубых погрешностей и при необходимости исключить их,
5. проверить гипотезу о принадлежности результатов измерений нормальному распределению,
6. вычислить доверительные границы случайной погрешности (доверительную случайную погрешность) оценки измеряемой величины,
7. вычислить доверительные границы (границы) неисключенной систематической погрешности оценки измеряемой величины,
8. вычислить доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины.

В концепции погрешностей способ представления информации, полученной об измеряемой величине, заключается в указании наилучшей оценки измеряемой величины, а также суммы систематической и случайной погрешностей — суммарной погрешности. Однако погрешность, определяемая как разность между измеренным значением величины и опорным значением величины, является идеализированным понятием.

На практике точное значение погрешности неизвестно, поскольку истинное значение измеряемой величины, принимаемое за опорное значение, также может быть неизвестно или вообще непознаваемо.

Для оценки точности измерения может быть использован один из двух способов: либо консервативный (оценка сверху), либо теоретико-вероятностный, причем каждый из подходов имеет свои ограничения в применении. Например, консервативный подход подходит для таких измерительных задач, в которых необходимо обеспечить гарантированное нахождение измеряемой величины в установленных границах. В рамках данного подхода оценка границ суммарной погрешности получается в результате арифметического суммирования границ ее составляющих, и результатирующие границы могут получиться слишком широкими.

Теоретико-вероятностный подход основан на использовании для описания результата измерения случайной переменной, математическое ожидание которой совпадает с истинным значением измеряемой величины или смещено относительно него на величину систематической погрешности. В качестве интервальной оценки результата измерения используется доверительный интервал, построенный на основе статистик и соответствующий заданной доверительной вероятности. Невозможность указать в общем виде правило построения доверительного интервала погрешности — неустранимая проблема теоретико-вероятностного подхода, использующего частотную интерпретацию вероятности. Кроме того, в настоящее время общепризнанным считается то, что после нахождения оценок всех ожидаемых составляющих погрешности и в результат измерения внесены соответствующие поправки, некоторая неопределенность в отношении полученного результата все еще остается, т. е. сомнение в том, насколько точно он соответствует значению измеряемой величины. Это сомнение вызвано тем, что после внесения поправок на известные систематические эффекты результат измерения все же продолжает быть оценкой измеряемой величины, так как неопределенности, связанные со случайными эффектами и неточностью поправки результата на систематические эффекты, остаются неустранимыми.

Согласно ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения» [8], *неопределенность* измерения можно понимать как количественную меру сомнения в достоверности результата измерения, а к ее источникам относятся:

1. неполное определение измеряемой величины,
2. несовершенная реализация определения измеряемой величины,
3. нерепрезентативность выборки (измерения проводят на образце, не представляющем измеряемую величину),
4. неточное знание влияния условий окружающей среды на результат измерения или неточное измерение величин, характеризующих эти условия,
5. субъективная систематическая погрешность (вносимая оператором при снятии показаний аналоговых приборов),
6. конечная разрешающая способность или порог чувствительности прибора,
7. неточные значения, приписанные эталонам и стандартным образцам
8. неточные знания физических констант и других параметров, полученных из сторонних источников и используемых при обработке данных,
9. аппроксимации и предположения, используемые в методе и методике измерений (измерительной процедуре),
10. изменчивость в повторных наблюдениях при, казалось бы, неизменных условиях измерений.

В ГОСТ 34100.1-2017/ISO/IEC Guide 98-1:2009 «Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по выражению неопределенности измерения» [7] приведена следующая формулировка определения того, что является неопределенностью измерения — «неотрицательный параметр, характеризующий рассеяние значений величины, приписываемых измеряемой величине на основании используемой информации». Выражение результата измерения как наилучшей оценки измеряемой величины и соответствующей неопределенности измерения является еще одним подходом к представлению результата измерения.

Основными этапами оценивания неопределенности являются [7]:

- 1) формулировка измерительной задачи

- определение выходной величины Y (измеряемой величины),
 - выявление входных величин, от которых зависит Y ,
 - составление модели измерения, определяющей соотношение Y с входными величинами,
 - приписывание распределений вероятностей (нормального, прямоугольного и т.д.) входным величинам (или совместного распределения вероятностей входным величинам, не являющимся независимыми) на основе имеющейся информации,
- 2) вычисления — трансформирование по модели измерения распределений вероятностей для входных величин в распределение вероятностей для выходной величины Y и использования этого распределения для получения
- математического ожидания Y , принимаемого как значение оценки у величины Y ;
 - стандартного отклонения величины Y , принимаемого как стандартная неопределенность $u(y)$, ассоциированная с y ;
 - интервала охвата, содержащего Y с заданной вероятностью охвата.

Теория погрешностей основана на частотном подходе, а в основе концепции неопределенности лежит субъективная вероятность. Поэтому переход от концепции погрешностей к концепции неопределенности может рассматриваться как переход от частотного (объективного) подхода в интерпретации вероятностей к байесовскому (субъективному). Различие представлений о вероятности выражается в разном содержании интервальных оценок результатов измерений. В рамках частотного подхода (концепция погрешностей) интервальная оценка — это доверительный интервал, который неявно предполагает возможность проведения неограниченной серии измерений и гарантирует накрытие истинного значения измеряемой величины в некоторой заданной доле таких измерений. В байесовском подходе (концепция неопределенности) интервальная оценка представляет собой интервал охвата, который с определенной вероятностью содержит значение измеряемой величины.

Следует заметить, что в течение последних пятидесяти лет появились и были развиты многочисленные альтернативные подходы к обработке информации, объединяемые термином «анализ данных»: эвристические методы анализа, методы теории нечетких множеств, методы

интервального анализа и т. д. Что заставило исследователей отказаться от «классических» методов, опирающихся на теорию вероятности, и искать другие способы обработки результатов измерений?

Первой причиной является ограниченная применимость методов математической статистики только к таким задачам, ответ которых не противоречит частотной интерпретации вероятности. Как уже упоминалось, в теории вероятностей, лежащей в основе математической статистики и ее методов обработки результатов измерений, математическая вероятность формализует частотную интерпретацию вероятности, которая подразумевает, что вероятностью считается предел относительной частоты рассматриваемого события в серии однородных независимых измерений. Помимо этого, величина, количественные характеристики свойств которых регистрируются, должна обладать важным свойством статистической устойчивости, т. е. при увеличении числа измерений относительная ее частота должна стабилизироваться, став равным некоторому числу. Однако в реальности получается так, что относительная частота колеблется около некоторого числа и не является постоянной. Отсутствие статистической устойчивости делает теоретико-вероятностные методы неприменимыми к решению даже таких задач, ответ которых не противоречит необходимому частотному пониманию вероятности.

Во-вторых, сложным является вопрос о принадлежности результатов измерений к нормальному распределению. Например, согласно ГОСТ Р 8.736-2011 «Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения» [10], исключение грубых погрешностей при использовании статистического критерия Граббса [47] и установление доверительных границ случайной погрешности оценки измеряемой величины могут быть произведены только в том случае, если результаты измерений принадлежат нормальному распределению. Для проверки принадлежности результатов измерений могут быть использованы критерий χ^2 К. Пирсона, критерий ω^2 Мизеса-Смирнова или составной критерий. Однако, если число результатов измерений $n \leq 15$, то их принадлежность к нормальному распределению не проверяется, и выполнение необходимых операций по обработке полученных экспериментальных данных приведет к получению ненадежных и даже ложных результатов. В то же время на практике часто случается так, что число результатов измерений как раз невелико и не превышает пятнадцати.

После ознакомления с приведенной критикой вероятностной статистики, более подробное изложение которой приведено в книге [1], нетрудно вообразить ситуации, в которых мы можем быть заинтересованы в таком подходе для обработки полученных экспериментальных данных, который лишен недостатка «малой выборки» и не основан на теории вероятностей.

Такой подход развит в теории нечетких множеств (очень кратко см. — [1]) и интервальном анализе. Почему именно интервалы, а не нечеткие множества? Дело в том, что своей структуре интервалы значительно проще, чем нечеткие множества: для задания интервала достаточно лишь определить две его границы или радиус и середину, в то время как задание нечеткого множества требует указания функции принадлежности, характеризующей «степень принадлежности» каждого элемента нечеткому множеству.

Далее, пригодность интервала для описания неопределенности измерения также подтверждает тот факт, что интервал является предельным случаем сумм независимых ограниченных величин. Если некоторая величина образована суммой большого количества малых независимых величин, то множество всех возможных значений этой величины оказывается близким к интервалу, и чем меньше значимость каждого слагаемого, тем меньше отличие результата от непрерывного интервала. Этот результат содержит «предельная теорема Крейновича» и её обобщения.

«Техническим», но очень важным аргументом в пользу выбора интервального подхода к обработке данных является высокая развитость теории интервального анализа и интервальных вычислительных методов. В некоторых интегрированных средах, как например, *Mathematica* и *Octave*, осуществляется встроенная поддержка базовых интервальных конструкций. Для наиболее популярного в настоящее время языка программирования *Python* также существуют реализации основных конструкций и методов интервального анализа.

Следует заметить, что за последние полвека развито много альтернативных направлений в обработке данных. В целом они объединяются термином «анализ данных». Существенной чертой таких подходов является отсутствие директивного подхода к обработке результатов данных в силу невозможности выработки единых рецептов на все случаи жизни. Во главу угла ставится попытка непредвзятого анализа имеющихся результатов, а уже затем — применение каких-либо формальных математических инструментов.

3.1 Как результаты измерений становятся интервальнозначными?

«Обынтерваливание» значений, приписываемых измеряемой величине — отнюдь не искусственный прием, призванный упростить наш переход к методам интервального анализа для обработки результатов измерений. В ряде случаев возникновение данных интервального типа является вполне закономерным.

Интервальнозначными результаты измерений могут становиться:

- на этапе экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны измеряемой величине,
- на этапе обработки результатов измерений, так как представление [результата их обработки](#) требует обязательного указания показателя точности (среднего квадратического отклонения, доверительных границ погрешности, стандартной неопределенности измерений, суммарной стандартной и расширенной неопределенностей).

Как уже обсуждалось выше, в рамках концепции погрешностей и концепции неопределенности информация об измеряемой величине представляется в виде ее наилучшей оценки и суммарной погрешности или соответствующей неопределенности измерения. Оценка измеряемой величины, т. е. среднее арифметическое значение исправленных результатов измерений, является точечной величиной. После указания суммарной погрешности или неопределенности измерения эта величина становится уже интервальной. В следующем разделе на стр. 219 приведено более подробное обсуждение точечных и интервальных оценок измеряемой величины, а также их смыслового различия при использовании методов математической статистики и интервального анализа для обработки результатов измерений.

Разберем несколько примеров того, как можно получить данные интервального типа на выходе измерительного прибора.

Пример 3.1.1. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) — важная часть цифрового измерительного прибора. Он выполняет преобразование исходного аналогового (непрерывного) сигнала в цифровой (дис-

крайний) сигнал путем замены бесконечного множества значений аналоговой величины на ограниченное количество показаний цифрового устройства.

Предположим, что нашей аналоговой величиной является напряжение, для измерения которого мы используем цифровой вольтметр. Статические и динамические характеристики его работы определяются статическими и динамическими параметрами, в том числе погрешностями [5], [17]. Среди наиболее употребительных параметров, характеризующих работу АЦП при квантовании квазистационарных напряжений, присутствует погрешность квантования (шум квантования) — погрешность округления, появляющаяся вследствие замены мгновенного значения преобразуемого аналогового сигнала ближайшим разрешенным уровнем. Погрешность квантования определяется размером шага квантования, т. е. числом разрядов АЦП.

Если мы используем интервальный тип данных для представления результатов измерений, то можем представить значение некоторого непрерывного сигнала t , не равного в точности какому-либо допустимому уровню АЦП t_0, t_1, \dots, t_p , в виде $t \in [t_i, t_{i+1}]$, причем такая запись будет более точной и позволит сохранить больший объем информации о входном сигнале. ■

Пример 3.1.2. Математическое описание и цифровая обработка изображений представляют интерес для многих практических приложений дистанционного зондирования земной поверхности. Инфракрасное излучение, непрерывно регистрируемое в пространстве и времени с борта космического аппарата, несет колоссальный объем полезной информации. Согласно [18], излучение в инфракрасном диапазоне может быть использовано для

1. измерения температуры земных объектов (обнаружения участков с резко отличной от фона температурой, в том числе геотермальных источников, лесных пожаров; измерения температуры морской поверхности; наблюдения за образованием и перемещением облачных масс),
2. различия земных объектов по их излучательной способности (например, изучения горных пород по влиянию их состава на излучение, так как величина потока излучения в инфракрасном диапазоне определяется физико-химическими свойствами поверхности в данном месте Земли).

Для регистрации инфракрасного излучения, отражаемого или излучаемого различными объектами, находящимися на поверхности Земли, могут быть использованы двумерные матрицы приемников инфракрасного излучения — приборов с зарядовой связью (ПЗС). Преимущество от использования таких оптико-электронных устройств заключается в отказе от необходимости в сканировании земной поверхности, а также повышении пространственного разрешения аппаратуры.

Важной характеристикой ПЗС-фотоприемника является динамический диапазон работы — отношение максимального зарядового пакета к величине шума или, иначе, максимальное количество разрешимых уровней яркости, на которые может быть разделен принятый сигнал. Для того, чтобы сохранять количество уровней яркости изображения максимально возможным, динамический диапазон фотоприемника необходимо согласовывать с разрядностью аналого-цифрового преобразователя, на который поступает обрабатываемый сигнал. Если динамический диапазон приемника равен 300, то мы можем использовать двоичный 8-разрядный или 9-разрядный аналого-цифровой преобразователь. Эти устройства обладают разрешающей способностью, определяемой как 2 (число состояний бита) в степени, равной значению битовой глубины, и, значит, 8-разрядный и 9-разрядный АЦП способны распознавать 256 или 512 градаций яркости, соответственно, что вполне удовлетворяет нашему запросу.

Очевидно, что яркость отдельного пикселя может иметь промежуточное значение, не позволяющее однозначно причислить его ни к «черным», ни к «белым» пикселям с минимальной и максимальной яркостью. Градации яркости пикселя, оцениваемой нами при рассмотрении полутонового изображения как «темно-серый пиксель», «серый пиксель» или «светло-серый пиксель», можно интерпретировать как принадлежность значения яркости этого пикселя одному из интервалов значений яркости, которые определяют для нас оттенки серого цвета, различимые невооруженным глазом.

Отметим напоследок, что обработка цифрового изображения, применяемая для различия границ объектов или областей, как правило, осложнена наличием теней, градиентных переходов, шумов, недостаточной резкостью самого изображения и т. д. В настоящее время широкое применение нашли методы обработки изображений, основанные на методах нечеткой логики [52], [59]. ■

3.1.1 Твин

Результатом однократного прямого измерения может становиться более сложная интервальная конструкция, чем простой интервал. Например, в качестве результата измерения мы можем получить *твин*, интервал с интервальными концами.

Слово «твин» является акронимом английского выражения «twice interval», т. е. «двойной интервал». Впервые такие объекты были рассмотрены Э. Гарденьесом с коллегами в 80-х годах XX века [46].

Твин можно представить в виде

$$X = [a, b] = [[a, \bar{a}], [b, \bar{b}]],$$

и в зависимости от того, как мы определяем понятия «больше или равно» и «меньше или равно», подразумевать под ним множество всех интервалов, больших или равных $[a, \bar{a}]$ и меньших или равных $[b, \bar{b}]$. Так как на множествах интервалов из \mathbb{IR} и \mathbb{KR} существуют частичные упорядочения \subseteq и \leq , то, соответственно, возможны два типа твинов: \subseteq -твины и \leq -твины.

Убедимся на практическом примере в том, что твин может может и должен в некоторых случаях являться результатом измерения.

Пример 3.1.3. Представим, что у нас есть некоторый вращающийся объект — элемент мотора, вентилятора, насоса или турбины. Нам необходимо измерить скорость вращения этого объекта с помощью светодиодного стробоскопа *testo 477* [58].

Диапазон регистрируемых скоростей вращения разбит на два поддиапазона с различными значениями разрешения, которые определены в технической документации прибора во вспышках в минуту (flashes per minute, fpm):

1. 30–999 fpm, разрешение 0.1 fpm,
2. 1000–300000 fpm, разрешение 1 fpm.

Во обоих поддиапазонах прибор имеет одинаковую погрешность измерений, т. е. погрешность задания частоты с помощью системы управления прибора, которая составляет $\pm (0.02 \% \text{ of } mv \pm 1 \text{ digit})$. Эта запись означает $\pm (0.02 \% \text{ от измеренного значения } \pm 1 \text{ знак})$.

Предположим, что полученное нами значение скорости вращения равно 33000 fpm, т. е. 550 Гц. Определим погрешность измерения:

$$\frac{33000}{100} \cdot 0.02 = 6.6 \text{ fpm.}$$

В поддиапазоне скоростей вращения 1000–300000 fpm единицей младшего разряда является 1 fpm, что совпадает с разрешением прибора. Значит, дополнительная составляющая погрешности, равная одному знаку, представляет собой $1 \text{ fpm} \approx 0.017 \text{ Гц}$.

Итого:

$$33000 - (6.6 + 1) = 32992.4 \text{ fpm},$$

$$33000 - (6.6 - 1) = 32994.4 \text{ fpm},$$

$$33000 + (6.6 - 1) = 33005.6 \text{ fpm},$$

$$33000 + (6.6 + 1) = 33007.6 \text{ fpm}.$$

Мы последовательно вычислили левую и правую границы твина \mathbf{X} , который является результатом измерения скорости вращения:

$$\mathbf{X} = [[32992.4, 32994.4], [33005.6, 33007.6]] \text{ fpm},$$

$$\mathbf{X} = [[549.873, 549.907], [550.093, 550.127]] \text{ Гц}.$$

■

В целом, появление твина в качестве результата измерения является вполне *тривиальным* распространенным событием. На самом деле мы сталкиваемся с твинами гораздо чаще, чем нам кажется. Приведем простой пример из повседневной жизни. Допустим, научный семинар начинается каждую неделю в 16:00 и длится 1 час. Однажды семинар начался на 15 мин раньше установленного времени и закончился на 30 мин позже него. На следующей неделе ситуация изменилась: начало семинара задержалось на 10 мин, а сам семинар длился всего 45 мин. Неопределенность времени начала и окончания семинара удобно описать именно с помощью такого интервального объекта, как твин.

3.1.2 Элементы интервальной арифметики Кэхэна

В настоящем подразделе речь пойдет скорее не о причинах, приводящих к интервальному характеру измеряемых величин, а о том, как описывать и оперировать с величинами, значения которых имеют односторонние ограничения. Другими словами, как правильно перевести на язык интервалов запись $x \geq 0$ или $y \leq 15$?

Элементами *интервальной арифметики Кэхэна* [53] являются обычные интервалы из \mathbb{IR} , а также множества вида

$$[-\infty, p], \quad [q, +\infty], \quad [-\infty, p] \cup [q, +\infty], \quad p < q, \quad [-\infty, +\infty].$$

Так же, как и в \mathbb{IR} , в интервальной арифметике Кэхэна имеет место монотонность операций по включению. Отличие интервальной арифметики Кэхэна от классической интервальной арифметики заключается в том, что в ней разрешена операция деления на нульсодержащий интервал, приводящая к появлению бесконечных интервалов:

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \{ a/b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \setminus \{0\} \}.$$

В развернутой форме операция деления одного интервала \mathbf{a} на другой интервал \mathbf{b} имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}/\mathbf{b} &= \frac{[\underline{a}, \bar{a}]}{[\underline{b}, \bar{b}]} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{a} \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}], & \text{если } 0 \notin \mathbf{b}, \\ [-\infty, +\infty], & \text{если } 0 \in \mathbf{a} \text{ и } 0 \in \mathbf{b}, \\ [\bar{a}/\underline{b}, +\infty], & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } \underline{b} < \bar{b} = 0, \\ [-\infty, \bar{a}/\bar{b}] \cup [\bar{a}/\underline{b}, +\infty], & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } \underline{b} < 0 < \bar{b}, \\ [-\infty, \bar{a}/\bar{b}], & \text{если } \bar{a} < 0 \text{ и } 0 = \underline{b} < \bar{b}, \\ [-\infty, \underline{a}/\underline{b}], & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } \underline{b} < \bar{b} = 0, \\ [-\infty, \underline{a}/\bar{b}] \cup [\underline{a}/\bar{b}, +\infty], & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } \underline{b} < 0 < \bar{b}, \\ [\underline{a}/\bar{b}, +\infty], & \text{если } 0 < \underline{a} \text{ и } 0 = \underline{b} < \bar{b}, \\ \emptyset, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a} \text{ и } 0 = \mathbf{b}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Пример 3.1.4. Выражение, равносильное $x \geq 0$, имеет вид

$$\mathbf{x} = [0, +\infty].$$

Полученный интервал уже является элементом интервальной арифметики Кэхэна. Представим выражение $y \leq 15$ в виде $\mathbf{y} = [-\infty, 15]$ и выполним деление интервала \mathbf{x} на интервал \mathbf{y} :

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = [-\infty, +\infty].$$

В результате выполнения арифметической операции мы получили интервал $[-\infty, +\infty]$, т. е. всю числовую ось \mathbb{R} . ■

Необходимо заметить, что сама по себе интервальная арифметика Кэхэна применяется достаточно редко. Причиной этому является

неизбежное исчезновение промежутков между отдельными компонентами связности интервалов вида $[-\infty, p] \cup [q, +\infty]$, $p < q$, что лишает смысла продолжение вычислений с их участием. Однако расширение результатов арифметических операций до всей числовой оси \mathbb{R} в интервальной арифметике Кэхэна можно остановить путем пересечения их с обычными, конечными интервалами.

3.2 Основные понятия интервальной статистики

«Интервальная статистика», называемая также «статистикой интервальных данных», занимается обработкой данных, которые имеют интервальную неопределенность (или, в более общей форме, ограниченную по величине неопределенность). Терминология этого нового научного направления заимствует многое из вероятностной статистики, обладающей развитым понятийным аппаратом.

3.2.1 Истинное значение измеряемой величины

В определениях точности измерений и погрешности нами было введено понятие *истинного значения* измеряемой величины — значения величины, соответствующего определению измеряемой величины. Для того, чтобы определить измеряемую величину, необходимо принять некоторую модель объекта измерения, в которую истинное значение входит как параметр. Стоит отметить, что между моделью и объектом измерения всегда существует несоответствие, *вызванное неопределенностью самого определения измеряемой величины*.

В рамках теоретико-вероятностного подхода, опирающегося на концепцию погрешностей, истинное значение измеряемой величины рассматривается как единственное и на практике непознаваемое. Концепция неопределенности подразумевает существование не единственного истинного значения измеряемой величины, а целой совокупности истинных значений, также в действительности неизвестных по той причине, что описание величины не является полным. Многие подходы вообще избегают введения понятия «истинное значение величины» и оперируют понятием метрологической совместимости результатов измерения для оценивания их достоверности.

На практике «недостижимое» истинное значение измеряемой величины заменяют его *действительным* или *опорным* значениями. В рекомендациях по межгосударственной стандартизации РМГ 29-2013 «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения» [21], действительное значение величины определяется как значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что может быть использовано вместо него в поставленной измерительной задаче. Согласно тому же источнику, опорное значение величины представляет собой значение величины, которое используется как основа для сопоставления со значениями величин того же рода. Для определения систематической погрешности в качестве опорного значения измеряемой величины принимаются ее истинное значение, измеренное значение величины эталона с пренебрежимо малой неопределенностью измерений, а также принятое значение величины. Для случайной погрешности роль опорного значения играет среднее арифметическое результатов бесконечно большого числа повторных измерений одной и той же измеряемой величины.

В чем заключается различие между понятиями действительного и опорного значений? И действительное, и опорное значения близки к истинному значению измеряемой величины. *Действительное значение* мы получаем из эксперимента, опорное — назначаем. Сложную взаимосвязь между этими понятиями может отражать, например, следующая ситуация: когда получение истинного значения измеряемой величины затруднено, мы «подменяем» его действительным значением, по определению мало отличающимся от истинного значения. После такой замены роль истинного значения играет действительное значение измеряемой величины. Предположим, что теперь мы хотим вычислить систематическую погрешность результатов измерений и для этого должны установить опорное значение величины. В качестве опорного значения мы выбираем истинное значение измеряемой величины, которое ранее уже «подменили» ее действительным значением. Таким образом, опорное значение оказалось по нашей воле равным действительному значению измеряемой величины.

Пример 3.2.1. Представим, что мы измерили некоторое расстояние, истинное значение которого составляет 1 м. Однако действительное значение измеряемой величины, полученное нами, равно 1.01 м. Опорным значением той же самой измеряемой величины могут служить 1 м,

39.37 дюймов, 1.41 аршина, 3.28 фута, 1.09 ярда и т. д. В зависимости от выбираемых нами единицы измерения опорное значение измеряемой величины изменяется, а действительное остается постоянным. ■

Истинное значение измеряемой величины может быть как точечной величиной, так и интервальной, при этом интервальный характер истинного значения связан именно со смыслом измеряемой величины, а не наличием погрешностей или неопределенности.

Пример 3.2.2. При использовании объектива, нескорректированного на коматическую aberrацию, изображение точки приобретает форму кометы из-за вклада в формирование изображения тех световых лучей, которые падают на край объектива. Конечно, получающееся изображение точки можно охарактеризовать истинными значениями точечных размеров кометообразного пятна. Однако можно воспользоваться и интервальным представлением истинного значения: связать с плоскостью изображения систему координат и задать двусторонние границы получаемого изображения по обеим координатам. ■

3.2.2 Оценки точечные и интервальные

В соответствии с требованиями ГОСТ Р 8.736-2011 «Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения» [10] оценку измеряемой величины при симметричных доверительных границах погрешности представляют в форме

$$\bar{x} \pm \Delta, P,$$

где \bar{x} — среднее арифметическое значение исправленных результатов измерений, из которых были исключены известные систематические погрешности, Δ — доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины, P — принятая доверительная вероятность.

Оценка измеряемой величины \bar{x} является точечной, а величина $\bar{x} \pm \Delta$ уже является интервальной. Точечные оценки в интервальной статистике имеют тот же смысл, что и в традиционной вероятностной статистике, интервальная оценка так же дает область возможных значений точечных оценок, характеризуя их возможный разброс. Величину этого разброса в интервальной статистике, т. е. значение Δ для интервальной оценки, получаемой методами вероятностной статистики,

количественно характеризует *мера вариабельности*. Однако некоторое смысловое различие между интервальными оценками, получаемыми с помощью методов вероятностной статистики и статистики интервальных данных, все же существует:

- ◊ В интервальной статистике для получения интервальной оценки нам не нужно задавать доверительную вероятность P , так как множества значений оценки, как правило, ограничены.
- ◊ Интервальные оценки могут иметь различных смысл: быть внутренними, внешними или какими-то другими, и, соответственно, различаться по своему смыслу.
- ◊ В пределах внутренней интервальной оценки все значения могут служить полноценными точечными оценками измеряемой величины. В вероятностной статистике точечные значения внутри интервальной оценки не вполне равнозначны друг другу.

Необходимо обратить особое внимание на двойственный характер интервала как статистической оценки, что может быть весьма важным при уточнении и детализации постановки интервальной задачи и связи условия интервальной задачи с практической стороной ее решения. С одной стороны, интервал $[\underline{a}, \bar{a}]$ представляет множество всех вещественных чисел, заключенных между своими концами \underline{a} и \bar{a} . С другой стороны, интервал может служить двусторонними границами единственного значения, расположенного между \underline{a} и \bar{a} на оси вещественных чисел.

3.2.3 Накрывающие и ненакрывающие результаты измерений

Рассмотрим абстрактную ситуацию. Пусть нам известно истинное значение измеряемой величины, и это истинное значение является точечным. Результат проводимого нами измерения может быть так же точечным или интервальным в зависимости от того, учли ли мы погрешности и неопределенность измерения. Если точечный результат измерения точно совпадает с истинным значением измеряемой величины или интервальнозначный результат измерения включает в себя точечное или интервальное истинное значение измеряемой величины, то такой результат измерения называется *накрывающим*. Соотношение между истинным значением измеряемой величины и накрывающим результатом измерения показано на Рис. 3.1(а, в).

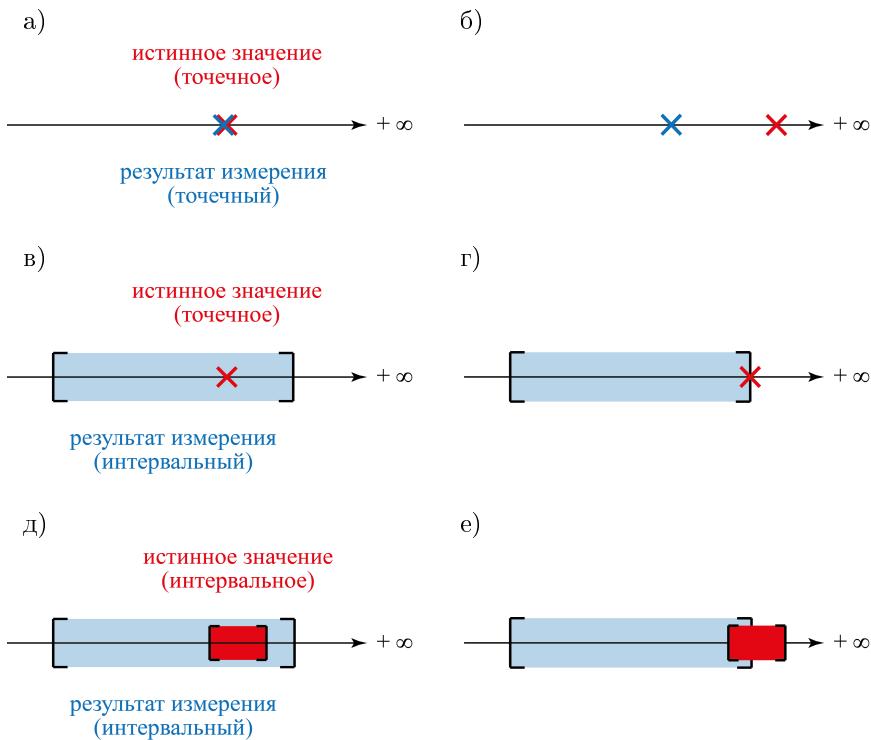


Рис. 3.1. Левый столбец (а, в, д): накрывающие результаты измерений точечной или интервальной величины. Правый столбец (б, г, е): ненакрывающие результаты измерений точечной или интервальной величины

Усложним ситуацию. Предположим, что теперь известное нам истинное значение измеряемой величины является интервалом. В этом случае накрывающим мы будем считать такой результат измерения, который содержит интервальное истинное значение измеряемой величины так, как это представлено на Рис. 3.1(д).

Определение 3.2.1 Накрывающий результат измерения — это *интервальный результат измерения, который гарантированно*

содержит истинное значение измеряемой величины [1].

Дадим комментарий к приведенному определению. Формулировка определения накрывающего результата измерения весьма прозрачна: для того, чтобы считаться накрывающим, результат измерения должен гарантированно содержать истинное значение измеряемой величины. Это определение легко обобщается на случай точечных результата измерения и истинного значения измеряемой величины в связи с тем, что любая точка на оси вещественных чисел является вырожденным интервалом. Таким образом, накрывающий результат измерений обеспечивает нам получение оценок «сверху» и «снизу» истинного значения измеряемой величины.

Определение 3.2.2 Ненакрывающий результат измерения — это результат измерения, который не является накрывающим по хотя бы одной из следующих причин:

- мы не можем утверждать, что результат измерений гарантированно содержит истинное значение измеряемой величины,
- результат измерений не содержит доминирующую часть истинного значения измеряемой величины.

Данное определение снова требует комментариев:

- ▷ Первая причина, по которой результат измерения считается ненакрывающим, обусловлена тем, что по той или иной причине мы не можем гарантировать содержание результатом измерения истинного (точечного или интервального) значения измеряемой величины. Например, мы можем непреднамеренно ошибиться при оценке инструментальной погрешности или погрешности метода измерений.
- ▷ Что представляет собой «доминирующую часть» истинного значения измеряемой величины, упоминаемая во второй причине, по которой результат измерения может быть признан ненакрывающим? Объем этой «части» необходимо уточнять в каждом конкретном случае.
- ▷ Почему ненакрывающий результат измерения нельзя определить как результат измерения, который гарантированно не содержит

истинное значение измеряемой величины? Если бы мы говорили исключительно о точечных величинах, такое определение нас бы вполне устроило. В случае интервальных результата измерений и истинного значения измеряемой величины оно также имело бы смысл. Однако сложность заключается в том, что интервальный результат измерения может содержать лишь часть интервального истинного значения измеряемой величины. В этом случае предлагаемое альтернативное определение ненакрывающего результата измерения является слишком строгим.

Как хорошо известно из математической статистики, результаты серии измерений образуют *выборку* — часть генеральной совокупности элементов, которая охватывается экспериментом. В интервальной статистике смысл выборки более простой: она рассматривается как совокупность результатов измерений.

Распространим на выборки, состоящие из интервальных результатов измерений, понятия накрытия и ненакрытия. Будем считать, что в накрывающей выборке большинство результатов измерений являются накрывающими. То же справедливо при определении ненакрывающей выборки: выборка является ненакрывающей, если преимущественно содержит ненакрывающие результаты измерений. Опять-таки, количественная мера указанных «большинства» или «преимущества» индивидуальна для каждого отдельного измерения.

Напоследок хочется напомнить, что интервальная статистика занимается обработкой данных с интервальной неопределенностью, и вопрос разпознавания накрывающих и ненакрывающих результатов измерений лежит вне ее рамок. Ответственность за то, к какой из категорий будет относиться результат измерений, несет практика измерений, которая должна давать (или не давать) гарантии получения двусторонних оценок истинного значения измеряемой величины. Для достижения свойства накрытия в некоторых случаях можно прибегнуть к специальному приему: в процессе предобработки результатов измерений, если это оправданно и целесообразно, можно несколько расширить полученные интервалы результатов измерений, чтобы новые расширенные интервалы результатов измерений гарантированно стали накрывающими (см. [здесь будет ссылка на подразделы из следующих глав](#)).

Вопросы :

1. Почему мы оперируем понятием «истинное» значение, если оно непознаваемо? Мы подразумеваем под ним действительное или

опорное значение измеряемой величины?

- Почему не существует аналога накрывающего измерения для случая точечных величин? Откуда мы знаем, что все точечные результаты измерений являются ненакрывающими, если истинное значение измеряемой величины принципиально недостижимо?

3.3 Измерение постоянной величины

Пусть у нас имеются интервальный результаты серии измерений *постоянной величины* — величины, которая в течение длительного времени, как минимум равного времени выполнения всего ряда измерений, остается неизменной: x_1, x_2, \dots, x_n или, что равносильно, $\{x_k\}_{k=1}^n$, где k — номер измерения, n — число измерений в серии.

Полученная выборка представима в виде интервального вектора

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

размерность которого, т. е. значение n , равна *длине выборки*.

Для наглядности результаты измерений можно изображать на *диаграмме рассеяния*. Примеры представления интервальных элементов выборки приведены на Рис. 3.2.

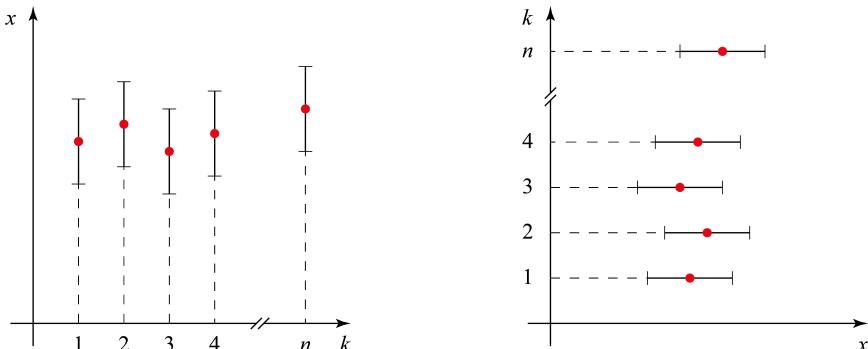


Рис. 3.2. Горизонтальное (слева) и вертикальное (справа) представления результатов измерений с помощью диаграмм рассеяния

Вектор радиусов интервальных компонент вектора \boldsymbol{x}

$$\text{rad } \boldsymbol{x} = (\text{rad } \boldsymbol{x}_1, \text{rad } \boldsymbol{x}_2, \dots, \text{rad } \boldsymbol{x}_n)$$

характеризует интервальную неопределенность всей выборки.

Если нам необходимо описать эту величину всего одним параметром, то для представления интервальной неопределенности результатов серии измерений можно использовать какую-либо норму $\text{rad } \boldsymbol{x}$:

$$\|\text{rad } \boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \text{rad } \boldsymbol{x}_k \quad - \text{ чебышевскую норму,}$$

$$\|\text{rad } \boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\text{rad } \boldsymbol{x}_k)^2} \quad - \text{ среднеквадратичную норму.}$$

В зависимости от того, одинаковы ли радиусы элементов компонент интервального вектора выборки \boldsymbol{x} , результаты измерений могут являться *равношириными* и *неравношириными*. Если радиусы всех элементов компонент интервального вектора \boldsymbol{x} одинаковы, будем называть результаты измерений, составляющие выборку, равношириными. Под неравношириными (или разношириными) мы будем понимать такие результаты измерений, радиусы которых $\text{rad } \boldsymbol{x}_k$, $k = 1, \dots, n$ неодинаковы для разных значений номера измерения k .

3.3.1 Совместность выборки и ее мера

Истинное значение измеряемой величины является недостижимым и потому абстрактным. Вследствие этого экспериментальная проверка его накрытия выборкой является принципиально неосуществимой. Тем не менее, совокупность результатов измерений обладает еще одним важным свойством — *совместностью*, которую, в отличие от накрытия, можно оценить непосредственно по зарегистрированным значениям. В современной метрологии совместимость (она же совместность) результатов измерений дает критерий для заключения, относятся ли любая пара результатов измерений в серии к одной и той же измеряемой величине или нет, и заменяет для них понятие «нахождение в пределах погрешности» [21].

Определение 3.3.1 Выборка $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^n$, $k = 1, \dots, n$ называется совместной, если пересечение всех интервалов составляющих ее измере-

ний непусто [1]:

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} x_k \neq \emptyset.$$

В противном случае выборка называется несовместной.

Совместность выборки и ее способность накрывать истинное значение измеряемой величины являются разными по содержанию понятиями, хотя и косвенно связанными. На Рис. 3.3 приведены примеры четырех выборок, состоящих из интервальных результатов измерений: накрывающая и совместная, накрывающая и несовместная, ненакрывающая и совместная, ненакрывающая и несовместная. Для простоты будем считать, что истинное значение измеряемой величины $x_{\text{ист}}$ является точечным, а не интервальным.

Как видно на Рис. 3.3, совместность выборки характеризует соотношение между результатами отдельных измерений в серии, т. е. их «взаимную схожесть», и не дает никакой информации о том, насколько каждый из результатов измерений в отдельности близок к истинному значению измеряемой величины, и, как следствие, вся выборка в совокупности. Например, заливкой розовым цветом на Рис. 3.3 выделены результаты пересечения интервалов, которые составляют выборки, представленные в первом и четвертом квадрантах диаграммы. Можно заметить, что сам факт существования интервала пересечения результатов серии измерений еще не гарантирует того, что истинное значение измеряемой величины входит в него.

С другой стороны, чем более ярко выражено свойство выборки быть накрывающей, тем более она совместна. Эту связь между двумя свойствами выборки можно обнаружить при сравнительном анализе выборок, размещенных в первом и втором квадрантах диаграммы, показанной на Рис. 3.3.

Почему выборка оказывается несовместной? Причин этому может быть сразу несколько:

- Ширины интервалов x_k , $k = 1, \dots, n$, образующих выборку \mathbf{x} , слишком малы, что не позволяет получить результат их пересечения, отличный от пустого множества.
- В выборке присутствуют выбросы — элементы, существенно отличающиеся от остальных элементов выборки. В частности, именно из-за наличия трех таких результатов измерений интерваль-

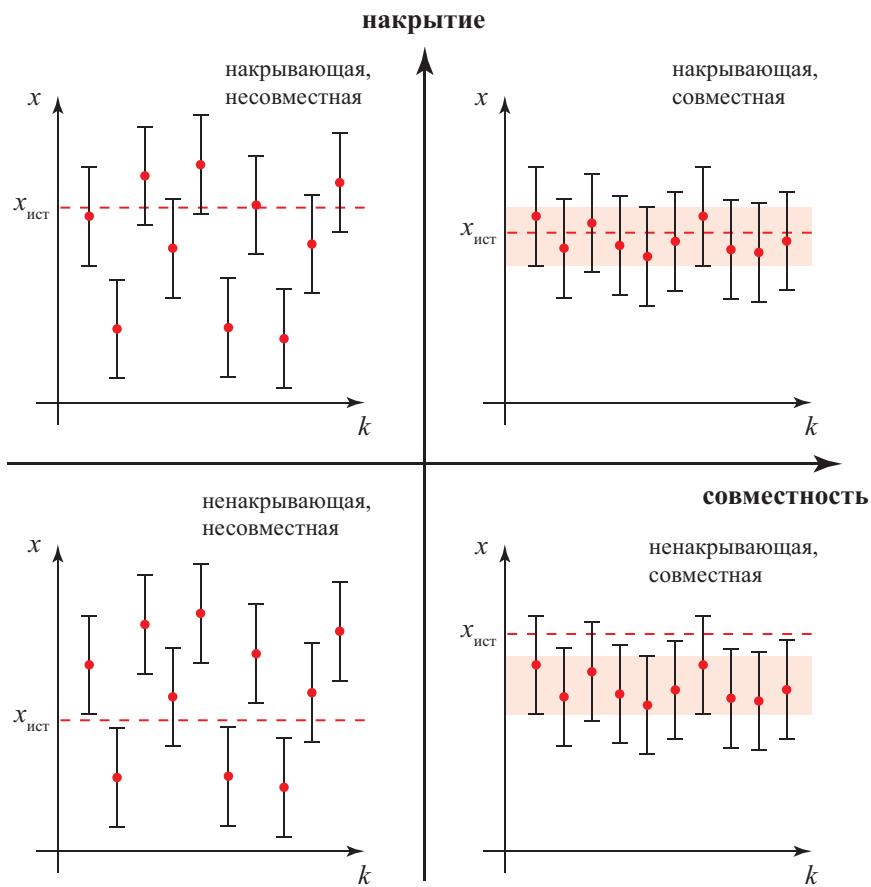


Рис. 3.3. Квадрантная диаграмма совместности выборки и ее свойства быть накрывающей с примерами выборок.

ная выборка во втором квадранте диаграммы, представленной на Рис. 3.3, является несовместной.

- Измеряемая величина, которую мы считаем постоянной, на самом деле постоянной не является. В этом случае результаты измерений «рассеяны» и даже при больших ширинах интервалов могут не перекрываться друг с другом. Выборка, расположенная в

третьем квадранте диаграммы на Рис. 3.3, служит иллюстрацией подобного характера взаимного расположения интервальных результатов измерений.

Мера совместности выборки. Для количественного описания совместности выборки необходима некоторая конструкция, которая позволила бы охарактеризовать ее с помощью всего одной величины так же, как норма вектора радиусов элементов выборки $\text{rad } \mathbf{x}$ отображает интервальную неопределенность результатов всей серии измерений. Степень совместности двух интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} может быть определена с помощью следующей числовой характеристики [3]:

$$\text{JK}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\text{wid}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})}{\text{wid}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})}, \quad (3.1)$$

где \wedge и \vee — операции взятия минимума и максимума по включению в полной интервальной арифметике Каухера (см. (2.1) и (2.2)).

В названии характеристики $\text{JK}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ буква J является первой буквой фамилии Поля Жаккара, математика и специалиста в области ботаники и физиологии растений, которым был предложен индекс Жаккара для описания меры сходства между двумя объектами, а буква K указывает на интервальную арифметику Каухера $\mathbb{K}\mathbb{R}$. Имеет место

$$-1 \leq \text{JK}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 1.$$

Введенная числовая характеристика $\text{JK}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ может быть естественным образом обобщена на случай интервальной выборки $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$, $k = 1, \dots, n$ для определения ее *меры совместности*:

$$\text{JK}(\mathbf{x}) = \frac{\text{wid}(\bigwedge_k \mathbf{x}_k)}{\text{wid}(\bigvee_k \mathbf{x}_k)}, \quad (3.2)$$

где \bigwedge , \bigvee — условные операции взятия экстремума по включению (2.15) в полной интервальной арифметике Каухера.

Выражение (3.2) можно переписать используя операции взятия минимума и максимума в соответствии с определением ширины интервала в классической интервальной арифметике (1.14):

$$\text{JK}(\mathbf{x}) = \frac{\min \bar{\mathbf{x}}_k - \max \underline{\mathbf{x}}_k}{\max \bar{\mathbf{x}}_k - \min \underline{\mathbf{x}}_k}. \quad (3.3)$$

В зависимости от того, является ли интервал $[\max \underline{x}_k, \min \bar{x}_k]$, стоящий в числителе числовой характеристики $\text{JK}(\boldsymbol{x})$, правильным или неправильным, выборка \boldsymbol{x} будет совместной ($\text{JK}(\boldsymbol{x}) \geq 0$) или несовместной ($\text{JK}(\boldsymbol{x}) < 0$), соответственно. Результат $\text{JK}(\boldsymbol{x}) = 0$ сигнализирует о том, что выборка находится на грани совместности: интервал пересечения всех результатов измерений в (серии) выборке вырождается в точку.

Пример 3.3.1. Предположим, что в нашем распоряжении имеется следующая выборка

$$\boldsymbol{x} = ([34.3, 52.1], [54.6, 72.3], [27.1, 44.8], [40.1, 54.7], [25.1, 42.8]), \quad (3.4)$$

и нам необходимо установить, совместна ли она.

Тогда в соответствии с выражением (3.3) получаем:

$$\text{JK}(\boldsymbol{x}) = \frac{42.8 - 54.6}{72.3 - 25.1} = -0.25.$$

В числителе характеристики $\text{JK}(\boldsymbol{x})$ стоит неправильный интервал, «ширина» которого отрицательна. В связи с этим $\text{JK}(\boldsymbol{x}) < 0$, а значит, выборка несовместна.

Теперь исключим из выборки \boldsymbol{x} один интервальный результат измерения $[54.6, 72.3]$ и рассчитаем заново меру совместности выборки:

$$\text{JK}(\boldsymbol{x}) = \frac{42.8 - 40.1}{54.7 - 25.1} = 0.09.$$

Несмотря на то, что мера совместности близка к нулю, ее значение все же положительно. Таким образом, сокращенная выборка (3.4) стала слабо совместной. ■

3.3.2 Информационное множество

Термин «информационное множество» пришел из теории дифференциальных игр и теории управления динамическими системами в условиях неопределенности.

В интервальной статистике самым простым и общим определением *информационного множества* является такое: информационное множество — это множество параметров, которые совместны с результатами измерений в рамках выбранной модели их обработки. Несмотря на общий характер данного определения, из него можно сделать вполне однозначные выводы:

- Гарантированная совместность (согласование) параметров с результатами измерений обеспечивается тем, что их конкретные численные значения устанавливаются в результате обработки результатов измерений.
- Информационное множество напрямую зависит от выбора модели обработки данных и их интерпретации, а значит, может быть определено не единственным образом.

В частности, применительно к задаче восстановления линейной зависимости по результатам измерений, имеющим интервальную неопределенность (см. Главу [ссылка](#)), информационное множество определяется как множество значений параметров, удовлетворяющих математической системе отношений (интервальной системе уравнений, неравенств и т. п.), полученной в результате агрегирования информации о математической модели объекта измерения, первичных данных измерений и модели их обработки [1]. Например, если нашей задачей является восстановление линейной зависимости

$$y = \beta_0 + \beta_1 x,$$

где $y \in \mathbf{y}$, $x \in \mathbf{x}$ по зарегистрированным интервальным результатам измерений \mathbf{y} и \mathbf{x} , то информационное множество составят все возможные значения β_0 , β_1 , при которых выполняется обозначенное равенство.

В настоящем подразделе нам предстоит уточнить содержание понятия «информационное множество», фигурирующего в задаче определения точечной и интервальной оценок измеряемой постоянной величины по имеющейся выборке. Мы знаем a priori, что выборка является накрывающей, и рассмотрим случаи ее совместности и несовместности. Эту задачу можно считать частным случаем задачи восстановления линейной зависимости, при котором $\beta_1 = 0$.

Совместная выборка. Итак, у нас имеется выборка, которая состоит из равношириных результатов измерений. Мы ищем информационное множество I — величину, которая, по определению, появляется в результате каких-то определенных преобразований над элементами выборки, причем значение этой величины должно быть совместно со всеми результатами измерений. В данном случае выбираемой нами моделью обработки данных является их пересечение, а информационное

множество представлено *информационным интервалом*:

$$\mathbf{I}_{\cap} = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}_k, \quad (3.5)$$

явные выражения для границ которого имеют вид

$$\underline{\mathbf{I}}_{\cap} = \max_{1 \leq k \leq n} \underline{\mathbf{x}}_k, \quad \bar{\mathbf{I}}_{\cap} = \min_{1 \leq k \leq n} \bar{\mathbf{x}}_k, \quad \underline{\mathbf{I}}_{\cap} \leq \bar{\mathbf{I}}_{\cap}.$$

Почему мы выбираем именно операцию пересечения, а не объединения для определения информационного интервала при совместности накрывающей выборки? На Рис. 3.4 заливкой розовым цветом показаны два информационных интервала \mathbf{I}_{\cap} и \mathbf{I}_{\cup} , которые получаются в результате выполнения операций пересечения и объединения элементов совместной накрывающей выборки. Так как мы точно знаем, что каждый из результатов измерений содержит истинное значение измеряемой величины, то интервал-пересечение всех результатов измерений также будет его содержать. Значит, мы можем отбросить данные, остающиеся после выполнения операции пересечения интервальных элементов выборки (на Рис. 3.4 показаны заливкой темно-розовым цветом), без потери информации, важной для нахождения точечной и интервальной оценок измеряемой величины. Более того, выполнение операции пересечения (« \cap ») вместо операции объединения (« \cup ») позволит сузить границы интервальной оценки измеряемой величины, т. е. уменьшить ее интервальную неопределенность.

Дальнейшее сужение интервальной оценки возможно, если нам известен априорный интервал возможных значений измеряемой величины $\mathbf{I}_{\text{апр}} = [\underline{\mathbf{I}}_{\text{апр}}, \bar{\mathbf{I}}_{\text{апр}}]$, который гарантированно содержит ее истинное значение. Путем пересечения

$$\mathbf{I}_{\cap} = \mathbf{I}_{\cap} \cap \mathbf{I}_{\text{апр}}$$

можно уточнить границы интервала, который станет новой двусторонней оценкой интересующей нас постоянной величины. Стоит заметить, что априорный интервал может являться элементом интервальной арифметики Кэхэна и иметь вид $[\underline{\mathbf{I}}_{\text{апр}}, +\infty]$ или $[-\infty, \bar{\mathbf{I}}_{\text{апр}}]$.

Теперь, когда мы выяснили, что информационное множество \mathbf{I} представляет собой интервальную оценку измеряемой величины, необходимо установить, какая же величина является ее точечной оценкой. Остановим выбор на таком элементе информационного интервала \mathbf{I}_{\cap} ,

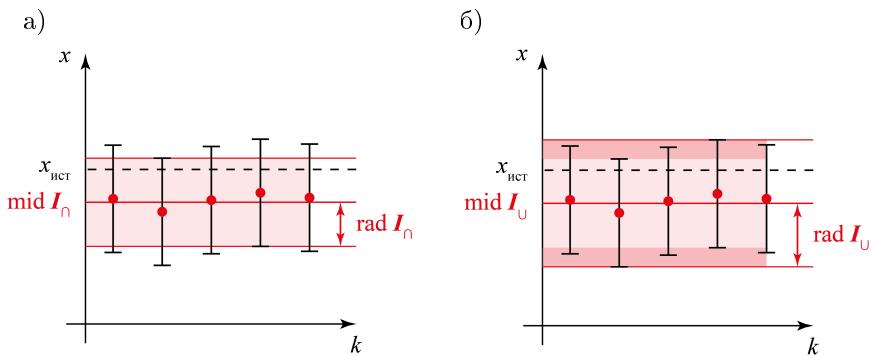


Рис. 3.4. Информационные интервалы I_n (а) и I_u (б), определяемые по совместной накрывающей выборке

который «наилучшим образом» представляет измеряемую величину по причине равнодаленности от границ ее интервальной оценки:

$$x_c = \text{mid } I_n = \frac{1}{2}(\underline{I}_n + \bar{I}_n). \quad (3.6)$$

Точка x_c называется *центральной оценкой* измеряемой величины.

Несовместная выборка. Хотя информационный интервал и центральная оценка измеряемой величины сохраняют свой смысл при несовместности выборки, правильный выбор модели обработки результатов измерений в данном случае — вопрос непростой.

Идея пересечения интервальных элементов выборки сразу отбрасывается: как показано на Рис. 3.5(б), информационный интервал несовместной выборки I_n как непустое пересечение всех результатов измерений просто невозможен.

В таких случаях можно проводить анализ взаимного отношения интервальных измерений в выборке в смысле их совместности друг с другом. Такие отношения удобно описывать *графом совместности выборки* и для исследования структуры выборки прибегать к богатым инструментам теории графов. Краткое изложение понятий, относящихся к этой тематике содержится в разделе «Граф совместности выборки» [1].

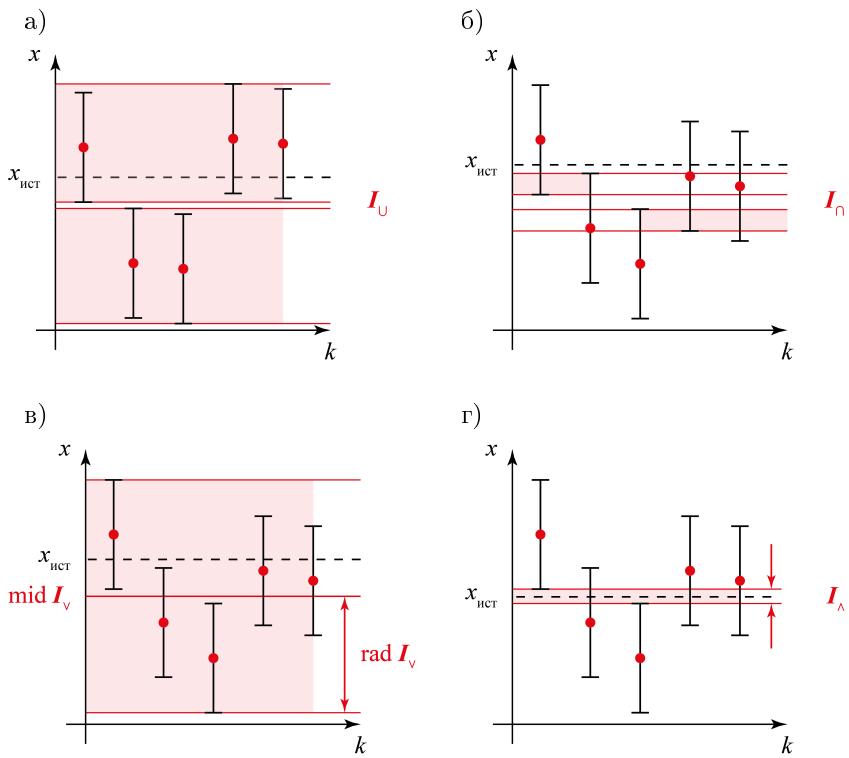


Рис. 3.5. Информационные множества I_U (а), I_{\cap} (б), I_V (в) и I_{\wedge} (г), определяемые по несовместной накрывающей выборке

Что произойдет, если мы объединим результаты измерения? Такой подход к обработке элементов выборки имеет больший смысл: каждый из результатов измерений несет ценную информацию об измеряемой величине, потеря даже части которой, в отличие от случая совместной выборки, неоправданна. Однако единый интервал-объединение интервальных элементов выборки I_U может не существовать: этот случай иллюстрирует Рис. 3.5(а).

Поэтому вместо операции объединения целесообразно воспользоваться

ваться ее обобщением — операцией взятия максимума по включению:

$$\mathbf{I}_\vee = \bigvee_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}_k = \left[\min_{1 \leq k \leq n} \underline{\mathbf{x}}_k, \max_{1 \leq k \leq n} \bar{\mathbf{x}}_k \right], \quad (3.7)$$

при этом центральная оценка измеряемой величины по-прежнему представима в виде

$$x_c = \text{mid } \mathbf{I}_\vee = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{I}}_\vee + \bar{\mathbf{I}}_\vee).$$

Результат операции « \vee » над интервальными элементами несовместной выборки показан на Рис. 3.5(в). Интервальная оценка измеряемой величины, найденная в результате обработки результатов измерений, может быть далее уточнена путем ее пересечения с априорным интервалом возможных значений измеряемой величины $\mathbf{I}_{\text{апр}} = [\underline{\mathbf{I}}_{\text{апр}}, \bar{\mathbf{I}}_{\text{апр}}]$:

$$\mathbf{I}_\vee = \mathbf{I}_\vee \cap \mathbf{I}_{\text{апр}}.$$

Взятие максимума по включению — не единственный возможный способ построения информационного интервала по несовместной выборке. Например, на Рис. 3.5(г) представлен случай, когда вместо выполнения операции взятия максимума по включению необходимо выполнить операцию взятия минимума по включению:

$$\mathbf{I}_\wedge = \bigwedge_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}_k = \left[\max_{1 \leq k \leq n} \underline{\mathbf{x}}_k, \min_{1 \leq k \leq n} \bar{\mathbf{x}}_k \right]. \quad (3.8)$$

Для выполнения данной операции требуется использование полной интервальной арифметики Каухера $\mathbb{K}\mathbb{R}$, и, как можно заметить, информационный интервал \mathbf{I}_\wedge является неправильным.

3.3.3 Вариабельность

Итак, в интервальной статистике интервальной и точечной оценками измеряемой постоянной величины являются информационное множество \mathbf{I} , представляемое информационным интервалом \mathbf{I}_\cap или \mathbf{I}_\vee в зависимости от того, является ли выборка совместной или нет, и центральная оценка $x_c = \text{mid } \mathbf{I}_{\cap, \vee}$.

Можем ли мы получить какую-то дополнительную информацию о «качестве» полученных оценок измеряемой величины? Например, насколько интервальная оценка «широкая» или «узкая»? Как «далеко отстоят» интервальные результаты измерений от центральной оценки?

Ответы на все эти вопросы дает исследование *вариабельности*. Слово «вариабельность» означает изменчивость, и, как уже было упомянуто в подразделе §3.2.2, мера вариабельности количественно характеризует величину разброса возможных значений точечных оценок измеряемой величины.

В первую очередь под разбросом мы будем подразумевать границы изменения интервальной оценки измеряемой величины, т. е. ее «размер», поскольку все точки информационного интервала являются равнозначными точечными оценками измеряемой величины. Если информационное множество \mathbf{I} непусто, то мерой вариабельности является радиус информационного интервала:

$$\rho = \text{rad } \mathbf{I} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{I}}_{\cap, \vee} - \underline{\mathbf{I}}_{\cap, \vee}). \quad (3.9)$$

Именно эта величина служит в интервальной статистике аналогом доверительных границ погрешности оценки измеряемой величины, принятых в математической статистике.

Разброс можно определить и другим образом. Так как середина интервала является точкой, которая характеризует его «наилучшим образом», то каждый результат измерения \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, n$ может быть представлен своей серединой $\text{mid } \mathbf{x}_k$. Степень отклонения каждой из точек $\text{mid } \mathbf{x}_k$, $k = 1, \dots, n$ от центральной оценки также характеризуется такой величиной, как мера вариабельности:

$$\Delta_k = |\mathbf{x}_c - \text{mid } \mathbf{x}_k|, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Вместо отклонений середин интервальных элементов выборки от центральной оценки можно определить отклонения самих интервальных результатов измерений от точечной оценки измеряемой величины:

$$\Delta_k = \text{dist}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_c), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Зная число измерений в серии, с помощью величины Δ_k можно построить конструкции, которые заменяют в интервальной статистике такие известные статистические характеристики, как выборочная дисперсия и выборочное стандартное отклонение. См. пример в [1].

3.3.4 Мода и медиана выборки

Так же, как и в математической статистике, мода и медиана являются структурными характеристиками интервальной выборки.

Мода выборки. Среди всех значений выборки мода встречается наиболее часто. В отличие от случая точечных результатов измерений мода интервальной выборки может быть представлена не каким-то конкретным элементом выборки, а лишь его частью — точкой или интервалом.

Определение 3.3.2 Модой интервальной выборки назовем совокупность интервалов пересечения наибольших совместных подвыборок рассматриваемой выборки. Наибольшая длина совместных подвыборок данной выборки называется частотой моды [1].

Другими словами, мода интервальной выборки накрываетяется наибольшим числом интервальных результатов измерений. Как видно на Рис. 3.6, если выборка совместна, то она, как правило, является *унимодальной*, т. е. имеет единственную моду. Несовместные выборки могут быть как унимодальными, так и *мультимодальными* и иметь более одной моды. Мода несовместной мультимодальной выборки представляется в виде мультиинтервала — объединения конечного числа несвязанных интервалов числовой оси [45].

В Табл. 3.1 приведен псевдокод алгоритма для нахождения моды интервальной выборки и ее частоты [1]. Число N , не превышающее суммарного количества концов интервальных результатов измерений, равного $2n$, введено в алгоритм для его корректной работы по той причине, что концы некоторых интервалов могут совпадать друг с другом.

Медиана выборки. Если говорить о точечных результатах измерений, то медиана является серединой выборки, упорядоченной по возрастанию или убыванию. При этом учитывается число вхождений того или иного результата измерений в выборку: например, медианой выборки $\{0, 1, 1, 1, 1, 2, 3\}$ является четвертый элемент 1. Если же количество элементов выборки n является четным, то ее медианой становится среднеарифметическое значение элементов с индексами $n/2$ и $(n/2)+1$.

Медиану также можно определить как элемент выборки, сумма расстояний до которого от других элементов упорядоченной выборки минимальна. В этом случае медианой выборки $\{0, 1, 1, 1, 1, 2, 3\}$ опять оказывается единица — такое совпадение возможно, но не обязательно.

Обобщение двух данных определений медианы выборки на случай интервальных результатов измерений было произведено А. В. Пролубниковым [20].

Таблица 3.1. Алгоритм для нахождения моды выборки, состоящей из интервальных результатов измерений [1]

Вход
Интервальная выборка $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$ длины n .
Выход
Мода mode \mathbf{x} выборки \mathbf{x} и её частота μ .
Алгоритм
$\mathbf{I} \leftarrow \bigcap_{k=1}^n \mathbf{x}_k;$ IF $\mathbf{I} \neq \emptyset$ THEN mode $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{I};$ $\mu \leftarrow n$ ELSE объединяем все концы $\underline{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{x}}_n$ интервалов рассматриваемой выборки \mathbf{x} в один массив $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, где $N \leq 2n$; упорядочиваем элементы Y по возрастанию значений; порождаем интервалы $\mathbf{z}_i = [y_i, y_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$; для каждого \mathbf{z}_i подсчитываем число μ_i интервалов из выборки \mathbf{x} , включающих интервал \mathbf{z}_i ; вычисляем $\mu \leftarrow \max_{1 \leq i \leq N-1} \mu_i$; выбираем номера m интервалов \mathbf{z}_m , для которых μ_m максимально, т. е. $\mu_m = \mu$, и формируем из таких m множество $M = \{m\} \subseteq \{1, 2, \dots, N - 1\}$; mode $\mathbf{x} \leftarrow \bigcup_{m \in M} \mathbf{z}_m$ END IF

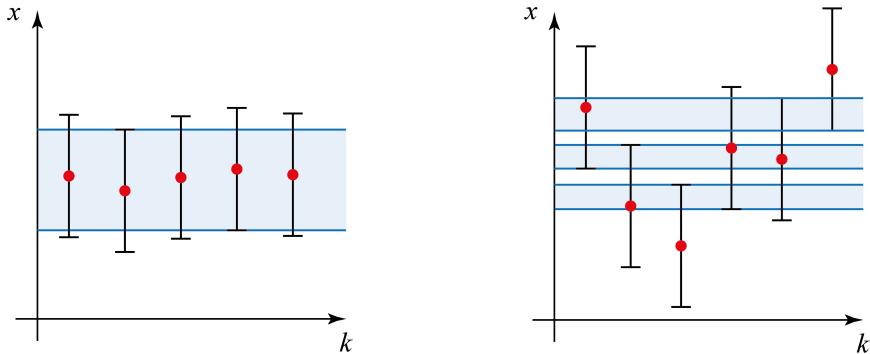


Рис. 3.6. Унимодальная (слева) и мультимодальная (справа) интервальные выборки. Моды выборок выделены заливкой голубым цветом

Определение 3.3.3 Медиана интервальной выборки $\text{med } \mathbf{x}$ — это

1. интервал z_m , слева и справа от которого суммы частот вхождения интервалов z_i в элементы выборки x_k , $k = 1, \dots, n$ равны:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i = \sum_{i=m+1}^{N-1} \mu_i, \quad (3.12)$$

где μ_i — частота интервала z_i , равная количеству элементов выборки x_k , которые содержат интервал z_i , N — положительное число, меньшее или равное суммарному $2n$ числу границ интервальных результатов измерений в выборке \mathbf{x} .

Если выполняется

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=m+1}^{N-1} \mu_i,$$

то медиана вычисляется как

$$\text{med } \mathbf{x} = \frac{z_m + z_{m+1}}{2}.$$

2. интервал z_m , для которого выполняется

$$\sum_{k=1}^n \text{dist}(z_m, x_k) = \min_{\{z_i\}} \sum_{k=1}^n \text{dist}(z_i, x_k). \quad (3.13)$$

В Табл. 3.2 приведен псевдокод алгоритма для нахождения медианы интервальной выборки. Следует заметить, что в результате преобразования интервалов x_k могут получиться такие интервалы z_i , которые не входят в исходную выборку x .

Пример 3.3.2. Рассмотрим выборку x , изображенную на Рис. 3.7:

$$x = \{[9, 31], [1, 23], [31, 53], \\ [14, 36], [11, 33], [20, 42]\}. \quad (3.14)$$

Определим моду и медиану выборки x (3.14).

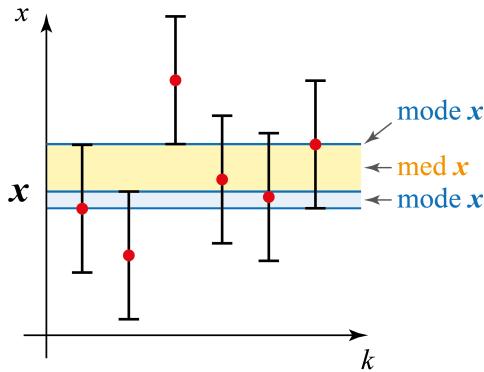


Рис. 3.7. Выборка x (3.14), ее мода (выделена голубым цветом) и медиана (выделена желтым цветом)

Во-первых, получим предварительные сведения о том, является ли данная выборка уни- или мультимодальной. Для этого определим ее меру совместности, воспользовавшись выражением (3.3):

$$JK(x) = \frac{23 - 31}{53 - 1} \approx -0.154.$$

Таблица 3.2. Алгоритм для нахождения медианы выборки, состоящей из интервальных результатов измерений

Вход

Интервальная выборка $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$ длины n .

Выход

Медиана $\text{med } \mathbf{x}$ выборки \mathbf{x} .

Алгоритм

объединяем все концы $\underline{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{x}}_n$ интервалов рассматриваемой выборки \mathbf{x} в один массив $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, где $N \leq 2n$;
упорядочиваем элементы Y по возрастанию значений;
порождаем интервалы $\mathbf{z}_i = [y_i, y_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$;
для каждого \mathbf{z}_i подсчитываем число μ_i интервалов из выборки \mathbf{x} , включающих интервал \mathbf{z}_i ;
для каждого \mathbf{z}_i подсчитываем сумму частот слева и справа;
выбираем интервал \mathbf{z}_m для которого выполнено условие (3.12);
или
для каждого \mathbf{z}_i подсчитываем сумму расстояний до элементов выборки \mathbf{x} ;
выбираем интервал \mathbf{z}_m для которого выполнено условие (3.13);

$\text{med } \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{z}_m$

Так как $\text{JK}(\mathbf{x}) < 0$, то выборка несовместна. Значит, мы можем ожидать того, что она окажется мультимодальной.

Сформируем упорядоченный по возрастанию массив Y из нижних и верхних границ интервальных элементов выборки \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, 6$:

$$Y = \{1, 9, 11, 14, 20, 23, 31, 31, 33, 36, 42, 53\}.$$

Теперь сформируем из него интервалы \mathbf{z}_i , $i = 1, \dots, 11$:

$$\begin{aligned}\mathbf{z} = & \{[1, 9], [9, 11], [11, 14], [14, 20], \\& [20, 23], [23, 31], [31, 31], [31, 33], \\& [33, 36], [36, 42], [42, 53]\}.\end{aligned}$$

Подсчитываем число вхождений каждого из интервалов \mathbf{z}_i в элементы выборки \mathbf{x}_k :

$$\mu = \{1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 1\}.$$

Таким образом, модой выборки \mathbf{x} является мультиинтервал:

$$\text{mode } \mathbf{x} = \mathbf{z}_5 \cup \mathbf{z}_7 = [20, 23] \cup [31, 31].$$

ПРОВЕРЕННО

Перейдем к определению медианы выборки (3.14). Согласно первому пункту определения 3.3.3, приведенного на стр. 239, медианой выборки является интервал \mathbf{z}_6 :

$$\sum_{i=1}^5 \mu_i = \sum_{i=7}^{11} \mu_i = 15 \quad \rightarrow \quad \text{med } \mathbf{x} = [23, 31].$$

Для того, чтобы определить медиану выборки, удовлетворяющую второму пункту определения 3.3.3, нам необходимо рассчитать суммы хаусдорфовых расстояний ρ_i от каждого интервала \mathbf{z}_i до каждого элемента исходной выборки \mathbf{x}_k и найти среди них минимальную:

$$\rho = \{164, 152, 135, 108, 102, 90, 122, 120, 127, 136, 166\}.$$

ПРОВЕРЕННО

Согласно условию (3.13), медианой выборки является элемент \mathbf{z}_6 :

$$\text{med } \mathbf{x} = [23, 31].$$

Таким образом, заданная выборка (3.14) является несовместной, мультимодальной $\text{mode } \mathbf{x} = [20, 23] \cup [31, 31]$ и имеет интервальную медиану $\text{med } \mathbf{x} = [23, 31]$. ■

3.3.5 Варьирование интервальной неопределенности

В конце подраздела §3.2.3 нами был упомянут специальный прием, заключающийся в расширении интервалов результатов измерений с целью достичь накрытия ими истинного значения измеряемой величины. Этот прием, используемый при обработке результатов измерений и называемый виртуальным *варьированием неопределенности*, заслуживает особого внимания и более подробного обсуждения.

В контексте рассматриваемого вопроса слово «виртуальный» означает то, что мы искусственно изменяем радиусы интервальных результатов измерений только на этапе их обработки и только для ее проведения. Другая величина интервальной неопределенности результатов измерений нужна нам для того, чтобы «настроить» выборку и наделить ее новыми, нужными нам свойствами: совместностью или свойством накрытия истинного значения измеряемой величины.

Разумеется, равномерно увеличивая радиусы интервальных результатов измерений, мы всегда можем добиться того, что выборка станет накрывающей и совместной. На Рис. 3.8(а,б) показан именно такой случай: несовместная и ненакрывающая выборка стала накрывающей и совместной в результате одновременного и равномерного увеличения радиусов составляющих ее элементов.

Однако для того, чтобы достичь совместности выборки, показанной на Рис. 3.8(а), вовсе не обязательно прибегать к изменению радиусов всех ее элементов. Если мы увеличим радиус всего одного элемента с номером 4, выделенного на Рис. 3.8(в) желтым цветом, то также добьемся совместности интервальных результатов измерений. Наконец, как показано на Рис. 3.8(г), если мы также увеличим радиусы элементов исходной выборки с номерами 3 и 6, то ставшая совместной выборка окажется еще и накрывающей.

Радиусы элементов с номерами 3, 4 и 6, показанные на Рис. 3.8(г), были увеличены в 1.24, 1.86 и 1.41 раза, соответственно, по сравнению со своими начальными значениями на Рис. 3.8(а). В общем случае для варьирования интервальной неопределенности результатов измерений можно ввести положительный весовой вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, размерность которого равна длине имеющейся выборки. Тогда изменение радиуса каждого интервального элемента выборки x будет пропорци-

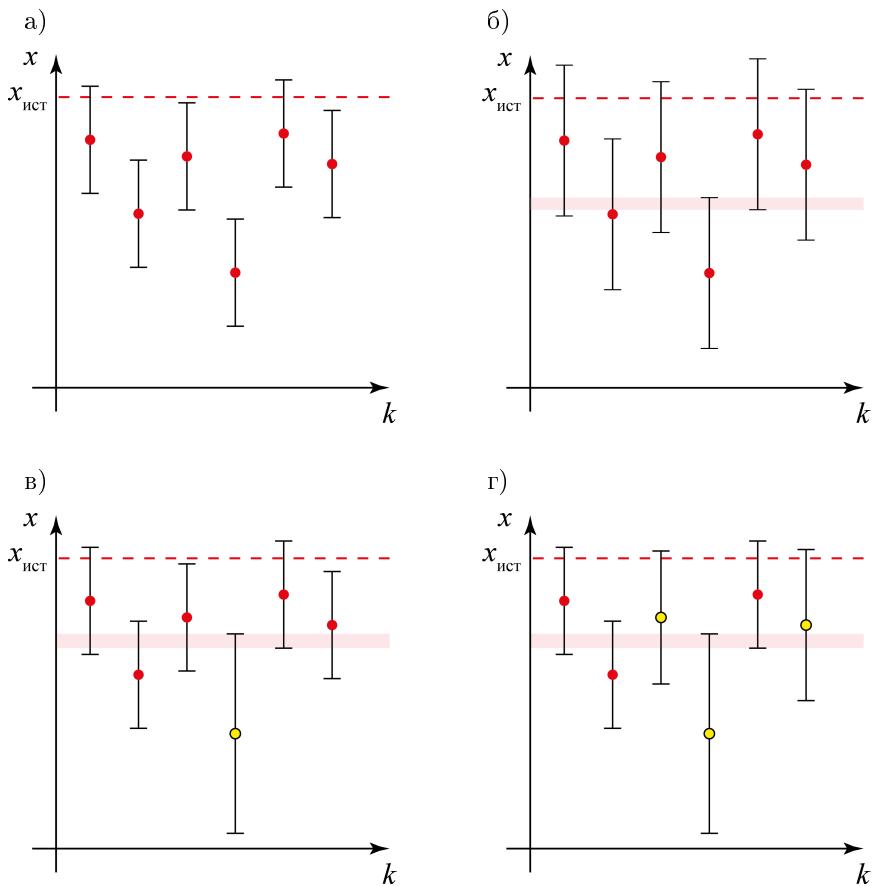


Рис. 3.8. Исходная выборка (а), она же после равномерного (б) и неравномерного (в, г) увеличения радиусов ее интервальных элементов. Радиусы результатов измерений, выделенных желтыми цветом, были увеличены для достижения совместности (в) исходной выборки и ее свойства быть накрывающей (г)

онально соответствующей компоненте вектора w :

$$\frac{\text{изменение } \text{rad } \mathbf{x}_k}{\text{изменение } \text{rad } \mathbf{x}_l} = \frac{w_k}{w_l}$$

для любых индексов $k, l < n$, где n — число элементов в выборке.

Интересно рассмотреть и другую операцию, заключающуюся в сужении интервальных результатов измерений. Ее выполнение имеет смысл в единственном случае — когда производится одновременное и равномерное уменьшение радиусов всех элементов совместной интервальной выборки. Точка, которая окажется пересечением элементов выборки, находящейся на грани совместности, представляет собой вырожденный информационный интервал I_{\cap} и является точечной оценкой измеряемой величины. Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к выводу о том, что точка, которая первой появится в непустом пересечении интервальных элементов несовместной выборки, радиусы элементов которой мы одновременно и равномерно увеличиваем, также служит точечной оценкой измеряемой величины.

3.3.6 Пример обработки интервальной выборки

Рассмотрим ненакрывающую выборку \mathbf{x} , которая изображена на Рис. 3.9(а).

$$\mathbf{x} = \{[11, 28], [5, 21], [29, 51], [20, 30], [4, 17], [31, 45], [13, 22], [25, 43]\}. \quad (3.15)$$

Наши задачи:

1. определить меру совместности выборки \mathbf{x} ,
2. найти точечную и интервальную оценки измеряемой величины по заданной выборке,
3. охарактеризовать полученные точечную и интервальную оценки путем исследования вариабельности,
4. определить моду и медиану выборки \mathbf{x} ,
5. добиться совместности выборки \mathbf{x} , а также накрытия ею истинного значения измеряемой величины (предположим, что оно нам известно) путем варьирования интервальных неопределенностей результатов измерений.

Начнем с описания интервальной неопределенности выборки (3.15). Составляющие ее результаты измерений $x_k, k = 1, \dots, 8$ являются неравношириными

$$\text{rad } \mathbf{x} = \{8.5, 8.0, 11.0, 5.0, 6.5, 7.0, 4.5, 9.0\},$$

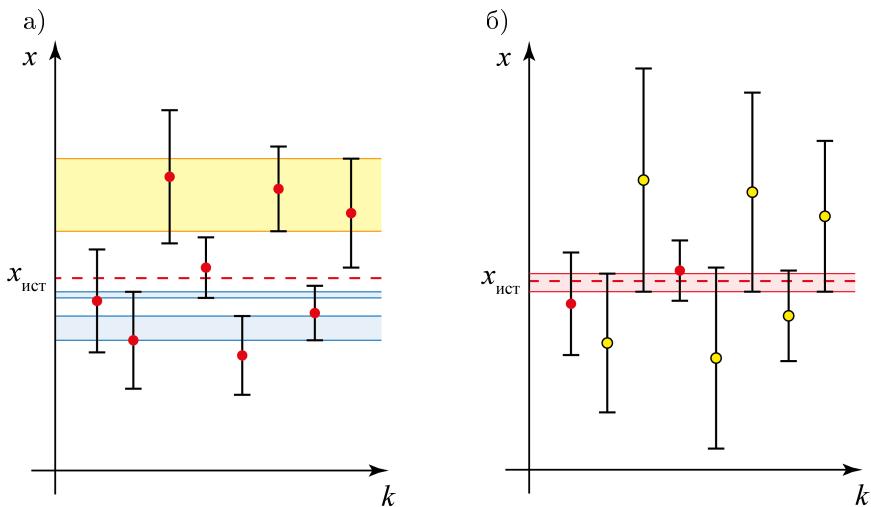


Рис. 3.9. Исходная выборка \mathbf{x} (3.15) (а) и та же выборка после варьирования интервальной неопределенности результатов измерений (б), обозначаемая как \mathbf{x}^* (3.16). Мода и медиана выборки \mathbf{x} показаны заливкой голубым и оранжевым цветами, соответственно. Непустое пересечение элементов выборки \mathbf{x}^* выделено заливкой розовым цветом. Желтым цветом отмечены результаты измерений, радиусы которых были увеличены, т. е. $\text{rad } \mathbf{x}_k \neq \text{rad } \mathbf{x}_k^*, k = 1, \dots, 8$

и для представления интервальной неопределенности всей выборки \mathbf{x} с помощью всего одного параметра возьмем ее чебышевскую норму:

$$\|\text{rad } \mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq 8} \text{rad } \mathbf{x}_k = 11.$$

Определение меры совместности. Перейдем к определению меры совместности (3.3) выборки \mathbf{x} :

$$\text{JK}(\mathbf{x}) = \frac{17 - 31}{51 - 4} \approx -0.298.$$

Поскольку $\text{JK}(\mathbf{x}) < 0$, то выборка \mathbf{x} (3.15) является несовместной.

Нахождение оценок измеряемой величины. Несовместность выборки \mathbf{x} означает, что для нахождения информационного множества \mathbf{I} , которое является интервальной оценкой измеряемой величины, необходимо воспользоваться операцией взятия максимума по включению « \vee ». Следовательно, информационное множество \mathbf{I} представлено информационным интервалом \mathbf{I}_\vee (3.7):

$$\mathbf{I}_\vee = [4, 51].$$

Точечной оценкой измеряемой величины является середина информационного интервала \mathbf{I}_\vee — центральная оценка x_c :

$$x_c = \text{mid } \mathbf{I}_\vee = \frac{1}{2}(4 + 51) = 27.5.$$

Исследование вариабельности. Охарактеризуем «качество» полученных точечной и интервальной оценок путем вычисления меры вариабельности. Поскольку информационное множество \mathbf{I} непусто, то в качестве меры вариабельности мы можем взять радиус информационного интервала \mathbf{I}_\vee :

$$\text{rad } \mathbf{I}_\vee = \frac{1}{2}(51 - 4) = 23.5.$$

Если мы определим меру вариабельности как степень отклонения точек $\text{mid } \mathbf{x}_k$ или самих интервалов \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, 8$ от центральной оценки x_c , то на основе выражений (3.10) и (3.11) можно построить интервальные аналоги выборочной дисперсии и выборочного стандартного отклонения, которые являются хорошо известными в математической статистике характеристиками разброса значений результатов измерений относительно их среднего значения [8].

Мы остановимся на выборе выражения (3.11) для дальнейшего исследования вариабельности и получим

$$\Delta = \{16.5, 22.5, 23.5, 7.5, 23.5, 17.5, 14.5, 15.5\}.$$

Интервальный аналог выборочной дисперсии представим в виде

$$s^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\text{dist}(\mathbf{x}_k, x_c))^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\Delta_k)^2,$$

что позволяет нам вычислить значения интервальных аналогов выборочной дисперсии $s^2(\mathbf{x})$ и выборочного стандартного отклонения $s(\mathbf{x})$,

равного положительному квадратному корню из $s^2(\mathbf{x})$:

$$s^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^8 (\Delta_k)^2 = 385.143, \quad \sqrt{s^2(\mathbf{x})} = 19.625.$$

Используя выражение (3.11), мы также можем определить интервальные аналоги таких статистических характеристик, как выборочная дисперсия среднего значения и выборочное стандартное отклонение среднего значения. В математической статистике эти величины определяют количественно, насколько хорошей оценкой математического ожидания некоторой случайным образом изменяющейся величины q является среднеарифметическое значение результатов ее измерения \bar{q} , и могут быть использованы в качестве меры неопределенности \bar{q} [8].

Интервальный аналог выборочной дисперсии среднего значения имеет вид

$$s^2(x_c) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (\text{dist}(\mathbf{x}_k, x_c))^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (\Delta_k)^2.$$

Определим численные значения интервальных аналогов выборочной дисперсии среднего значения $s^2(x_c)$ и выборочного стандартного отклонения среднего значения $s(x_c)$, которое равно положительному квадратному корню из $s^2(x_c)$:

$$s^2(x_c) = \frac{1}{56} \sum_{k=1}^8 (\Delta_k)^2 = 48.143, \quad \sqrt{s^2(x_c)} = 6.939.$$

Определение моды и медианы. Перейдем к нахождению моды и медианы выборки \mathbf{x} (3.15). Для этого согласно алгоритмам, приведенным в Табл. 3.1 и 3.2, сформируем упорядоченный по возрастанию массив Y из нижних и верхних границ интервальных элементов выборки \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, 8$:

$$Y = \{4, 5, 11, 13, 17, 20, 21, 22, 25, 28, 29, 30, 31, 43, 45, 51\}.$$

Далее сформируем из массива Y интервалы \mathbf{z}_i , $i = 1, \dots, 15$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = & \{[4, 5], [5, 11], [11, 13], [13, 17], \\ & [17, 20], [20, 21], [21, 22], [22, 25], \\ & [25, 28], [28, 29], [29, 30], [30, 31], \\ & [31, 43], [43, 45], [45, 51]\}. \end{aligned}$$

Подсчитаем число вхождений каждого из интервалов \mathbf{z}_i в элементы выборки \mathbf{x}_k :

$$\mu = \{1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 1\}.$$

Итак, выборка \mathbf{x} (3.15) является бимодальной, а ее мода представлена мультиинтервалом

$$\text{mode } \mathbf{x} = \mathbf{z}_4 \cup \mathbf{z}_6 = [13, 17] \cup [20, 21].$$

Какой интервал \mathbf{z}_i является такой медианой выборки \mathbf{x} , которая соответствует первому пункту определения 3.3.3 (см. стр. 239)? В связи с тем, что имеет место

$$\sum_{i=1}^7 \mu_i = 20, \quad \sum_{i=8}^{15} \mu_i = 18, \quad \mu_7 = 3,$$

мы не можем определить такой интервал \mathbf{z}_i и такую медиану $\text{med } \mathbf{x}$.

Тем не менее, мы можем найти медиану, удовлетворяющую второму пункту определения 3.3.3. Для этого мы должны рассчитать суммы хаусдорфовых расстояний ρ_i от каждого интервала \mathbf{z}_i до каждого элемента исходной выборки \mathbf{x}_k и найти среди них минимальную:

$$\rho = \{217, 169, 156, 134, 126, 132, 132, 124, 127, 139, 141, 143, 123, 206, 222\}.$$

Согласно условию (3.13) медианой выборки является элемент \mathbf{z}_{13} :

$$\text{med } \mathbf{x} = [31, 43].$$

ПРОВЕРНО

Достижение свойств совместности и накрытия. Нашей последней задачей является достижение совместности выборки \mathbf{x} (3.15) и накрытия ею истинного значения измеряемой величины путем варьирования интервальной неопределенности результатов измерений. Выберем одновременное и неравномерное увеличение радиусов элементов выборки \mathbf{x} и составим весовой вектор w , каждая компонента w_k которого служит коэффициентом пропорционального увеличения радиуса соответствующего интервального результата измерения $\text{rad } \mathbf{x}_k$ по сравнению с его исходным значением.

В том случае, если **коэффициенты подобраны вручную?**

$$w = \{1.000, 1.438, 1.682, 1.000, 2.308, 2.357, 1.667, 1.389\},$$

новый вектор радиусов элементов \mathbf{x}_k примет вид

$$\text{rad } \mathbf{x}^* = \{8.5, 11.5, 18.5, 5.0, 15.0, 16.5, 7.5, 12.5\}.$$

В результате варьирования интервальной неопределенности элементов исходной выборки \mathbf{x} мы получили новую выборку \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}^* = \{[11.0, 28.0], [1.5, 24.5], [21.5, 58.5], [20.0, 30.0], \\ [-4.5, 25.5], [21.5, 54.5], [10.0, 25.0], [21.5, 46.5]\}. \quad (3.16)$$

которая уже является совместной:

$$\text{JK}(\mathbf{x}^*) = \frac{24.5 - 21.5}{58.5 + 4.5} \approx 0.048.$$

3.4 Задача восстановления линейной зависимости

До настоящего момента нас интересовали результаты серии измерений некоторой единственной постоянной величины, о которой мы «накапливали» информацию с целью найти ее точечную и интервальную оценки в результате обработки элементов выборки.

В данном разделе нам предстоит рассмотреть задачу восстановления функциональной зависимости по интервальным результатам измерений. Такая постановка задачи говорит о том, что мы будем обрабатывать значения не одной, а сразу нескольких измеряемых величин, имеющие интервальную неопределенность. **Не одной — к чему относится?** Будем считать, что вид функциональной зависимости нам заранее известен — она является линейной. При этом большая часть рассуждений, которые будут проделаны, может быть успешно перенесена на случай нелинейной зависимости.

3.4.1 Постановка задачи

Дадим общую формулировку задачи восстановления функциональной зависимости. Пусть некоторая величина y является функцией от независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m :

$$y = f(\beta, x), \quad (3.17)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ является вектором независимых переменных, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ — вектор параметров функции. Заметим, что переменные x_1, x_2, \dots, x_m также называются входными, а переменные y_1, y_2, \dots, y_m **переменная y — одна** — выходными.

Задача восстановления функциональной зависимости заключается в том, чтобы, располагая набором значений x и y , найти такие $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ в выражении (3.17), которые соответствуют конкретной функции f из параметрического семейства.

Если функция f является линейной, то можно записать

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \quad (3.18)$$

В общем случае результаты измерений величин x_1, x_2, \dots, x_m и y являются интервальновзначными

$$\mathbf{x}_1^{(k)}, \mathbf{x}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{x}_m^{(k)} \text{ и } \mathbf{y}^{(k)}.$$

Индекс k пробегает значения от 1 до n , равного полному числу измерений. В дальнейшем для удобства мы будем указывать его первым из нижних индексов интервала: $\mathbf{x}_1^{(3)} \Leftrightarrow x_{31}$ при $k = 3$.

Определение 3.4.1 Брусом неопределенности k -го измерения функциональной зависимости будем называть интервальный вектор-брюс, образованный интервальными результатами измерений с одинаковыми значениями индекса k [1]:

$$(\mathbf{x}_{k1}, \mathbf{x}_{k2}, \dots, \mathbf{x}_{km}, \mathbf{y}_k) \subset \mathbb{R}^{m+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Брус неопределенности измерения является прямым декартовым произведением интервалов неопределенности независимых переменных и зависимой переменной. На Рис. 3.10 показаны брусы неопределенностей, возникающие в задаче восстановления линейной зависимости вида $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, где $x_{k1} \in \mathbf{x}_{k1}$, $y_k \in \mathbf{y}_k$, $k = 1, 2, \dots, 5$. **а нужен ли нижний индекс 1?**

Распространим на брусы неопределенности понятие накрытия истинного значения. Договоримся считать брус неопределенности накрывающим, если он гарантированно содержит истинные значения измеряемых величин входных и выходных переменных зависимости. Ненакрывающий брус? — дописать после уточнения из книги 4-х авторов

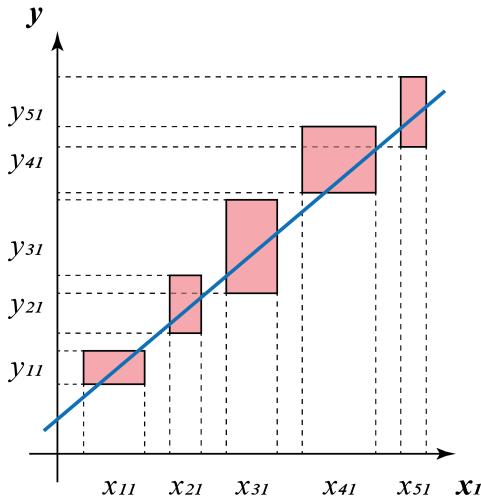


Рис. 3.10. Набор интервальных данных для восстановления линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, где $x_{k1} \in \mathbf{x}_{k1}$, $y_k \in \mathbf{y}_k$, $k = 1, 2, \dots, 5$

3.4.2 Совместность линейной функциональной зависимости

Предположим, что мы провели измерения величин x_1, x_2, \dots, x_m и y и получили n накрывающих брусов неопределенности $\mathbf{x}_{k1}, \mathbf{x}_{k2}, \dots, \mathbf{x}_{km}$ и \mathbf{y}_k , $k = 1, \dots, n$.

Полный набор данных, по которому будет проводиться восстановление линейной зависимости (3.18), может быть представлен в виде

$$\begin{array}{cccccc} x_{11}, & x_{12}, & \dots & x_{1m}, & y_1, \\ x_{21}, & x_{22}, & \dots & x_{2m}, & y_2, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \dots & x_{nm}, & y_n. \end{array}$$

Использование такого представления делает очевидным то, что для восстановления линейной зависимости (3.18) по результатам измерений, имеющим интервальную неопределенность, необходимо «решить»

интервальную систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных β_j , $j = 1, \dots, m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 + \mathbf{x}_{11}\beta_1 + \mathbf{x}_{12}\beta_2 + \dots + \mathbf{x}_{1m}\beta_m = \mathbf{y}_1, \\ \beta_0 + \mathbf{x}_{21}\beta_1 + \mathbf{x}_{22}\beta_2 + \dots + \mathbf{x}_{2m}\beta_m = \mathbf{y}_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_0 + \mathbf{x}_{n1}\beta_1 + \mathbf{x}_{n2}\beta_2 + \dots + \mathbf{x}_{nm}\beta_m = \mathbf{y}_n, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Вопрос постановок и множеств решений интервальных задач был подробно рассмотрен в разделе 1.4. Как нам хорошо известно, семейство кванторных решений ИСЛАУ вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (1.73), матрица \mathbf{A} которой содержит n строк и m столбцов, включает $2^{n(m+1)}$ AE-множеств решений. Чем больше число имеющихся у нас брусов неопределенности измерений или количество входных переменных x_j , $j = 1, \dots, m$, тем шире семейство кванторных решений ИСЛАУ. Какие именно множества AE-решений из него нас интересуют и почему? Ответ на эти вопросы дает исследование характера пересечения восстанавливаемой линейной зависимости с брусьями неопределенности измерений.

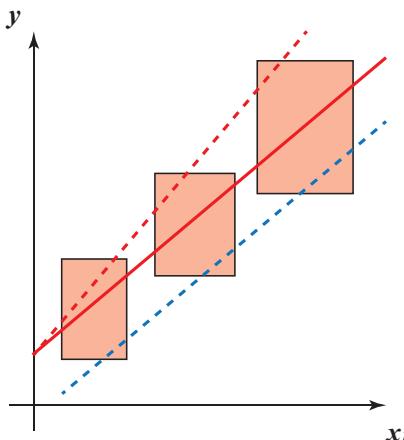


Рис. 3.11. Различные способы пересечения графика линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$ с брусьями неопределенности измерений

На Рис. 3.11 показаны три графика зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, различающиеся точечными значениями углового коэффициента β_1 и свободного члена β_0 . Начнем с анализа характера прохождения через брусы неопределенности измерений того графика линейной зависимости, который выделен сплошной линией красного цвета. Подобный характер прохождения можно описать с помощью формального языка логического исчисления предикатов:

$$\begin{aligned} & (\forall x_{k1} \in \mathbf{x}_{k1}) \cdots (\forall x_{km} \in \mathbf{x}_{km}) (\exists y_k \in \mathbf{y}_k) \\ & \beta_0 + \beta_1 x_{k1} + \beta_2 x_{k2} + \dots + \beta_m x_{km} = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Определение 3.4.2 *Функциональную зависимость назовем сильно совместной с интервальными данными, если ее график проходит через каждый брус неопределенности измерений для любого значения аргументов из интервалов неопределенности входных переменных [1].*

Значит, линейная зависимость, график которой показан на Рис. 3.11 сплошной линией красного цвета, является сильно совместной с результатами измерений. Множеством решений ИСЛАУ (3.20), выбор каждой точки (β_0, β_1) из которого гарантирует сильную совместность линейной зависимости с интервальными данными, является *допусковое множество AE-решений* (1.78) (см. подраздел §1.4.3).

Что означает сильная совместность функциональной зависимости с интервальными результатами измерений? Этот результат говорит о том, что независимо от того, какими именно являются значения входных переменных, находящиеся при этом в пределах интервалов неопределенности, выходная величина будет неизменно принадлежать интервалу своей неопределенности.

Теперь перейдем к рассмотрению графиков линейных зависимостей, показанных на Рис. 3.11 пунктирными линиями красного и голубого цветов. Характер их пересечения с брусьями неопределенности измерений не может быть описан так, как определено выражением (3.21). Обе эти линейные зависимости являются слабо совместными с интервальными результатами измерений.

Определение 3.4.3 *Функциональную зависимость назовем слабо совместной с интервальными данными, если ее график проходит через каждый брус неопределенности хотя бы для одного значения аргумента [1].*

В случае слабой совместности линейной зависимости с интервальными результатами измерений характер прохождения ее графика через брусы неопределенности можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\exists x_{k1} \in \mathbf{x}_{k1}) \dots (\exists x_{km} \in \mathbf{x}_{km}) (\exists y_k \in \mathbf{y}_k) \\ & \beta_0 + \beta_1 x_{k1} + \beta_2 x_{k2} + \dots + \beta_m x_{km} = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Следовательно, выбор любой точки (β_0, β_1) из объединенного множества АЕ-решений (1.77) ИСЛАУ (3.20) обеспечивает слабую совместность линейной зависимости с брусами неопределенности измерений.

3.4.3 Информационное множество и коридор совместных зависимостей

В подразделе §3.3.2 было дано общее определение информационного множества, согласно которому информационное множество — это множество параметров, которые совместны с результатами измерений в рамках выбранной модели их обработки.

Информационным множеством задачи восстановления функциональной зависимости (3.17) является множество всех значений параметров функции β , получаемое в результате обработки интервальных значений входных переменных x и выходной переменной y . Если говорить конкретно о задаче восстановления линейной зависимости (3.18), то ее информационное множество представлено вектором оценки параметров β — определенным множеством АЕ-решений ИСЛАУ (3.20). Такой подход к определению параметров восстанавливаемой зависимости принципиально отличен от того, как производится их поиск в случае точечных результатов измерений: вместо решения задачи минимизации отклонений значений функции от данных, полученных эмпирическим путем, мы составляем систему интервальных уравнений или неравенств и находим ее решение.

Остановимся чуть подробнее на случае восстановления функциональной зависимости по точечным данным. На самом деле для одного и того же набора результатов измерений мы можем получить целое семейство зависимостей, которые «более или менее» хорошо приближают экспериментальные данные и могут быть использованы для предсказания своих значений, соответствующих интересующим нас аргументам из областей определения. Причиной этому может быть различный выбор метода регрессионного анализа (например, метод наименьших

квадратов, метод наименьших модулей, чебышевская аппроксимация и проч.) либо присутствие неточностей и неопределенностей в самих обрабатываемых данных. Как результат, значения всех восстановленных функциональных зависимостей в каждой точке их определения будут задавать *коридор совместных зависимостей*. На Рис. 3.12 показаны графики трех нелинейных функций (зеленая, фиолетовая и оранжевая линии), восстановленных по одному набору точечных результатов измерений. Коридор совместных зависимостей показан заливкой розовым цветом, а его сечение в точке x^* выделено черной линией.

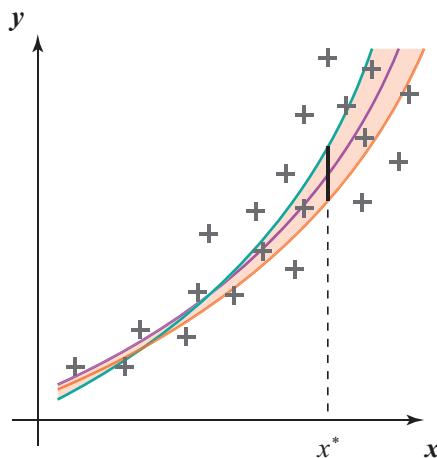


Рис. 3.12. Коридор совместных зависимостей и его сечение при некотором значении входной переменной x^*

Вернемся к рассмотрению интервальных результатов измерений, по которым проводится восстановление функциональной зависимости. Если информационное множество задачи непусто и **«не вырождено»** (не точка или отрезок), то мы так же, как и в рассмотренном выше случае, получим семейство зависимостей, совместных с результатами измерений и образующих коридор.

Дадим строгое определение коридора совместных зависимостей, которое используется в интервальном анализе данных. Для этого необходимо ввести понятие *многозначного отображения*.

Определение 3.4.4 Для произвольных множеств X и Y многозначным отображением F из X в Y называется соответствие (правило), сопоставляющее каждому аргументу $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое значением или образом x [1].

В отличие от традиционного отображения многозначное отображение сопоставляет каждому элементу области определения X не один элемент, а целое множество из Y .

Определение 3.4.5 Пусть в задаче восстановления зависимостей информационное множество Ω параметров зависимостей $y = f(x, \beta)$, совместных с данными, является непустым.

Коридором совместных зависимостей рассматриваемой задачи называется многозначное отображение Υ , сопоставляющее каждому значению аргумента x множество

$$\Upsilon(x) = \bigcup_{\beta \in \Omega} f(x, \beta).$$

Значение $\Upsilon(\tilde{x})$ коридора совместных зависимостей при определенном аргументе \tilde{x} (сечение коридора) — это множество

$$\bigcup_{\beta \in \Omega} f(\tilde{x}, \beta),$$

образованное всевозможными значениями, которые принимают на этом аргументе функциональные зависимости, совместные с интервальными данными измерений [1].

Внешней оценкой сечения коридора совместных зависимостей является интервал

$$\left[\min_{\beta \in \Omega} f(\tilde{x}, \beta), \max_{\beta \in \Omega} f(\tilde{x}, \beta) \right].$$

Далее мы убедимся в том, что в случае восстановления линейной зависимости по результатам измерений, имеющим интервальную неопределенность, границы коридора совместных зависимостей являются кусочно-линейными.

Пример 3.4.1.

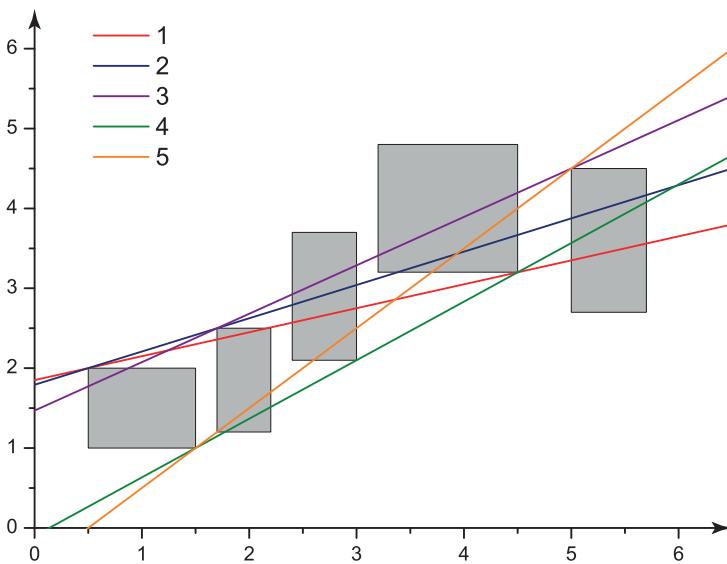


Рис. 3.13. Интервальные результаты измерений, соответствующие ИСЛАУ (3.23), а также восстановленные линейные зависимости, задающие коридор совместных зависимостей
 $y = 1.85 + 0.30 x_1$ (1), $y = 1.79 + 0.42 x_1$ (2), $y = 1.47 + 0.61 x_1$ (3),
 $y = -0.10 + 0.73 x_1$ (4), $y = -0.50 + 1.00 x_1$ (5) **подписи осей**

Рассмотрим набор интервальных результатов измерений, представленный на Рис. 3.13. Мы должны восстановить по нему линейную зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$. **нижний индекс 1 не нужен**

Для этого составим интервальную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & [0.5, 1.5] \\ 1 & [1.7, 2.2] \\ 1 & [2.4, 3.0] \\ 1 & [3.2, 4.5] \\ 1 & [5.0, 5.7] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.0, 2.0] \\ [1.2, 2.5] \\ [2.1, 3.7] \\ [3.2, 4.8] \\ [2.7, 4.5] \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Допусковое множество АЕ-решений ИСЛАУ (3.23) пусто, а значит,

по имеющимся интервальным данным невозможно восстановить линейную зависимость, которая была бы с ними сильно совместна. Как было установлено в подразделе 1.4.3, объединенное множество решений шире, чем допусковое множество решений. Непустое объединенное множество АЕ-решений ИСЛАУ (3.23) показано на Рис. 3.14.

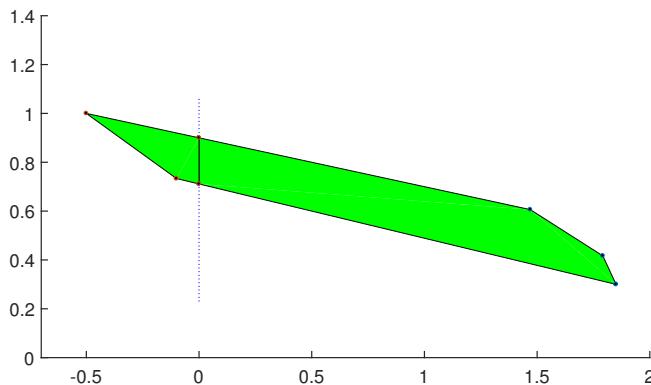


Рис. 3.14. Объединенное множество решений ИСЛАУ (3.23), построенное при использовании функции `EqnWeak2D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27] [подписи осей](#)

Замкнутое объединенное множество решений ИСЛАУ (3.23) имеет пять вершин

$$(1.85, 0.30), (1.79, 0.42), (1.47, 0.61), (-0.10, 0.73), (-0.50, 1.00),$$

причем каждая из них представляет собой такие параметры (β_0, β_1) , которые соответствуют восстановленным линейным зависимостям, за-дающим коридор совместных зависимостей.

Все линейные зависимости (1)–(5), показанные на Рис. 3.13, являются слабо совместными с интервальными результатами измерений. Лю-бая из них проходит через два угла, принадлежащие двум различным интервалам, и, как можно заметить, границы коридора совместных за-висимостей являются кусочно-линейными. ■

Пример 3.4.2. Предположим, что нам необходимо восстановить ли-нейную зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Имеющиеся интервальные

результаты измерений позволяют составить следующую ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & [-2.0, 0.5] & [1.0, 3.0] \\ 1 & [8.0, 9.0] & [-2.0, -0.1] \\ 1 & [-6.0, -4.0] & [10.0, 12.0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-5.0, -2.7] \\ [-0.6, 4.1] \\ [5.0, 10.0] \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Объединенное множество решений ИСЛАУ (3.24), имеющее замкнутую форму, показано на Рис. 3.15. Выбор каждой точки из этого множества будет гарантировать слабую совместность восстановленной линейной зависимости с интервальными данными. Допусковое множество АЕ-решений ИСЛАУ (3.24) пусто.

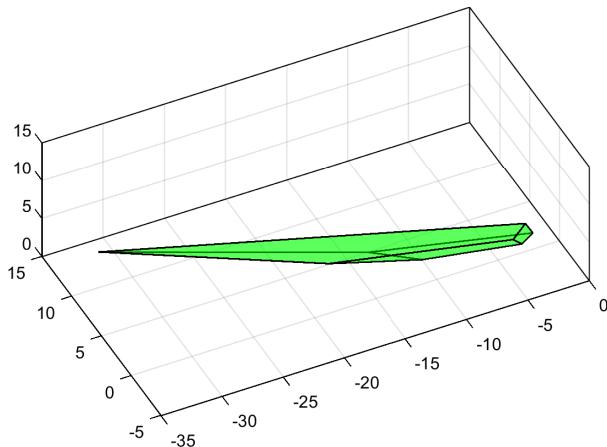


Рис. 3.15. Объединенное множество решений ИСЛАУ (3.24), построенное при использовании функции EqnWeak3D пакета IntLinInc3D для MATLAB [28]

Перечислим восемь вершин многогранника, которым является объединенное множество решений ИСЛАУ (3.24):

$$(-34.22, 6.94, 8.58), (-17.88, 1.96, 3.97), (-14.20, 2.93, 2.58), \\ (-10.59, -1.13, 1.68), (-3.57, 0.35, 1.57), (-2.92, 0.27, 0.75), \\ (-2.13, 1.27, 1.98), (-1.69, 0.94, 0.87).$$



3.4.4 Случай точечных входных переменных

Рассмотрим частный случай задачи восстановления линейной зависимости по интервальным результатам измерений, при котором входные переменные x_1, x_2, \dots, x_n являются точечными. Такая постановка задачи была впервые рассмотрена в работе Л. В. Канторовича [13].

Вместо брусов неопределенности, показанных на Рис. 3.10, мы будем иметь отрезки прямых $(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}, y_k)$, $k = 1, \dots, n$, параллельные оси выходной переменной y . Эти отрезки, являющиеся результатом «схлопывания» брусов неопределенности измерений по осям входных переменных, называются *отрезками неопределенности*. В случае единственной входной переменной набор результатов измерений может быть представлен так, как это сделано на Рис. 3.16.

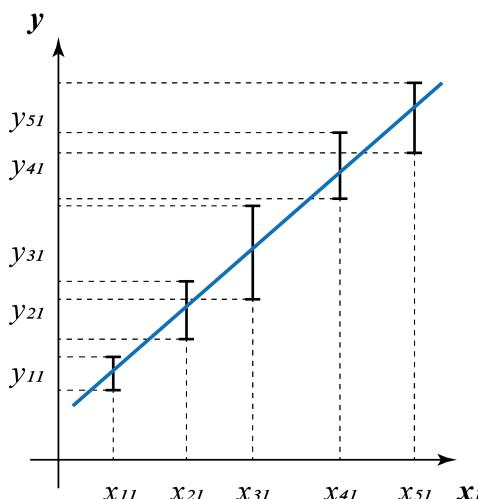


Рис. 3.16. Отрезки неопределенности x_{ki} , $k = 1, \dots, 5$, по которым восстанавливается линейная зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$

Если обрабатываемые данные являются отрезками неопределенности измерений, а не брусьями, различие сильной и слабой совместности восстанавливаемой функциональной зависимости с результатами измерений перестает иметь смысл. Будем считать, что линейная зависи-

симость *совместна* с интервальными данными, если ее график проходит через все отрезки неопределенности измерений. Данное определение совместности, или согласования, встречается не только в интервальном анализе: например, если мы строим интерполирующую функцию по некоторому набору точек, то она, в отличие от аппроксимирующей функции, должна проходить через каждую из них, т. е. через все узлы интерполяции.

Фактически, выполняя восстановление линейной зависимости по отрезкам неопределенности, мы решаем следующую ИСЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 + x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \dots + x_{1m}\beta_m = \mathbf{y}_1, \\ \beta_0 + x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \dots + x_{2m}\beta_m = \mathbf{y}_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_0 + x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \dots + x_{nm}\beta_m = \mathbf{y}_n, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

На первый взгляд, ИСЛАУ (3.25) незначительно отличается от ИСЛАУ (3.20), «решение» которой нам необходимо для восстановления линейной зависимости по брусьям неопределенности измерений. Однако точечный характер входных переменных x_k , $k = 1, \dots, n$, входящих в ИСЛАУ (3.25), позволяет записать равносильную ей систему двусторонних точечных линейных неравенств относительно β_j , $j = 1, \dots, m$, что невозможно сделать для ИСЛАУ (3.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{y}}_1 \leq \beta_0 + x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \dots + x_{1m}\beta_m \leq \mathbf{y}_1, \\ \underline{\mathbf{y}}_2 \leq \beta_0 + x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \dots + x_{2m}\beta_m \leq \mathbf{y}_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \underline{\mathbf{y}}_n \leq \beta_0 + x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \dots + x_{nm}\beta_m \leq \mathbf{y}_n. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Множеством решений каждого двустороннего неравенства из вышеприведенной системы является полоса параметров $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ в пространстве \mathbb{R}^{m+1} , которая ограничена гиперплоскостями, задаваемыми уравнениями

$$\begin{aligned} \beta_0 + x_{k1}\beta_1 + x_{k2}\beta_2 + \dots + x_{km}\beta_m &= \underline{\mathbf{y}}_k, \\ \beta_0 + x_{k1}\beta_1 + x_{k2}\beta_2 + \dots + x_{km}\beta_m &= \bar{\mathbf{y}}_k. \end{aligned}$$

Множество решений всех неравенств системы (3.26) является пересечением n таких полос и представляет собой *информационное множество*

задачи восстановления линейной зависимости по интервальным результатам измерений в том случае, если выходная переменная y является интервальной величиной, а входные переменные x имеют точечные значения. На Рис. 3.17 изображено пересечение трех полос — решений трех неравенств, которые фигурируют в задаче восстановления линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_{k1}$, $k = 1, 2, 3$ по отрезкам неопределенности измерений. Информационное множество задачи выделено на Рис. 3.17 заливкой красным цветом.

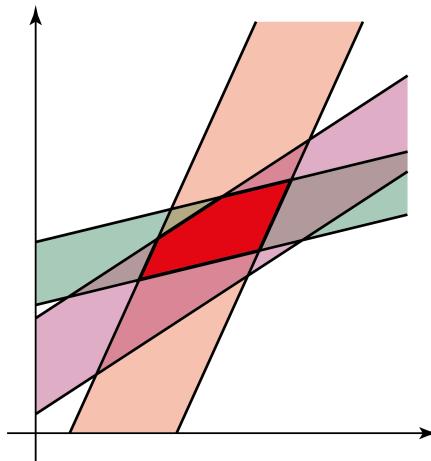


Рис. 3.17. Образование информационного множества параметров линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_{k1}$, $k = 1, 2, 3$ в случае точечных значений входной переменной x_{k1}

В целом, распознавание пустоты или непустоты множества решений системы неравенств (3.26), которое является выпуклым и многогранным в пространстве \mathbb{R}^{m+1} , а также нахождение какой-либо точки из него являются задачами, сложность которых ограничивается полиномом от их размера.

3.4.5 Статус результата измерений

Каждый интервальный результат измерений «вносит» свой «вклад» в формирование информационного множества задачи восстановления

линейной зависимости по отрезкам неопределенности измерений.

Предположим, что у нас имеется некоторая выборка \mathcal{S}_n , по которой мы восстанавливаем линейную зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$. Безусловно, все дальнее изложенное может быть легко обобщено на случай большего числа входных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , однако мы остановимся на выборе единственной входной переменной x_1 для того, чтобы визуальное представление результатов наших рассуждений было наглядным. В результате обработки n отрезков неопределенности, составляющих выборку \mathcal{S}_n , мы построили информационное множество $\Omega(\mathcal{S}_n)$. Теперь представим, что мы выбираем в выборке \mathcal{S}_n (добавляем к ней или выделяем из нее) один интервальный результат измерения $s = (x, y)$ и хотим узнать его *статус* среди прочих отрезков неопределенности.

Судить о «положении» выбранного результата измерений s в выборке \mathcal{S}_n можно по его влиянию на информационное множество задачи [1]:

1. *Внутренний* результат измерения s — это такой результат измерения, добавление которого к выборке \mathcal{S}_n не приводит к модификации информационного множества $\Omega(\mathcal{S}_n) = \Omega(\mathcal{S}_n \cup s)$.

Иными словами, внутренний результат измерения $s = (x, y)$ полностью содержит в себе сечение коридора совместных зависимостей $\Upsilon(x, \mathcal{S}_n)$ в той же точке x :

$$y \cap \Upsilon(x, \mathcal{S}_n) = \Upsilon(x, \mathcal{S}_n).$$

2. Добавление *внешнего* результата измерения s к выборке \mathcal{S}_n вызывает изменение информационного множества $\Omega(\mathcal{S}_n) \supset \Omega(\mathcal{S}_n \cup s)$.

Если внешний результат измерения $s = (x, y)$ и сечение коридора совместных зависимостей $\Upsilon(x, \mathcal{S}_n)$ имеют непустое пересечение, то имеет место

$$y \cap \Upsilon(x, \mathcal{S}_n) \subset \Upsilon(x, \mathcal{S}_n).$$

Присутствие *выброса* s в выборке \mathcal{S}_n приводит к пустоте информационного множества $\Omega(\mathcal{S}_n \cup s) = \emptyset$.

Внутренний результат измерений s может оказаться *граничным*, т. е. определять какой-то фрагмент границы информационного множества Ω . Помимо выбросов, которые относятся к внешним результатам измерений, среди последних также может быть выделен отдельный подкласс *строго внешних* результатов измерений. Все возможные

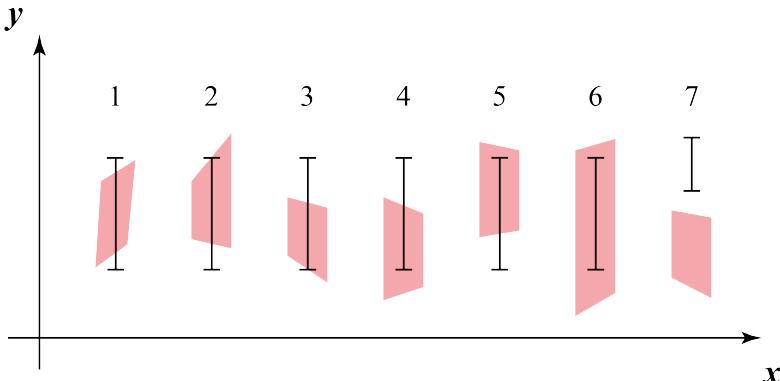


Рис. 3.18. Внутренние (1–3) и внешние (4–7) интервальные результаты измерений. Статусы результата измерений: внутренний (1), граничный (2, 3), внешний (4, 5), строго внешний (6) и выброс (7). Заливкой розовым цветом показана некоторая часть коридора совместных зависимостей

статусы интервальных результатов измерений, входящих в выборку, показаны на Рис. 3.18.

Пример 3.4.3. Предположим, что в нашем распоряжении имеется выборка, представленная на Рис. 3.19, и по интервальным результатам измерений мы можем составить следующую ИСЛАУ:

$$\begin{cases} \beta_0 + [1, 1]\beta_1 = [0.4, 1.4], \\ \beta_0 + [2, 2]\beta_1 = [1.3, 2.5], \\ \beta_0 + [3, 3]\beta_1 = [1.5, 2.1], \\ \beta_0 + [4, 4]\beta_1 = [1.3, 3.1]. \end{cases} \quad (3.27)$$

Определим статусы всех результатов измерений в выборке. Для этого нам необходимо выполнить восстановление линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$ по имеющимся отрезкам неопределенности.

Запишем систему двусторонних линейных неравенств, равносиль-

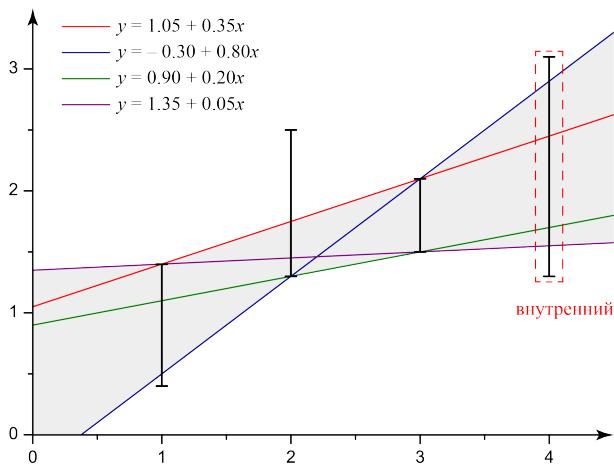


Рис. 3.19. Исходная выборка, соответствующая ИСЛАУ (3.27). Границы коридора совместных зависимостей, выделенного заливкой серым цветом, заданы линейными функциями, значениями параметров β_0 и β_1 которых являются координаты вершин информационного множества, показанного на Рис. 3.20

ную ИСЛАУ (3.27):

$$\begin{cases} 0.4 \leq \beta_0 + 1 \cdot \beta_1 \leq 1.4, \\ 1.3 \leq \beta_0 + 2 \cdot \beta_1 \leq 2.5, \\ 1.5 \leq \beta_0 + 3 \cdot \beta_1 \leq 2.1, \\ 1.3 \leq \beta_0 + 4 \cdot \beta_1 \leq 3.1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Решение системы неравенств (3.28) представлено на Рис. 3.20. Информационное множество задачи — непустое пересечение всех полос, являющихся решениями неравенств системы — выделено на Рис. 3.20 путем его заливки в ярко-зеленый цвет. Вершинами информационного множества являются точки $(1.05, 0.35)$, $(-0.30, 0.80)$, $(0.90, 0.20)$ и $(1.35, 0.05)$.

Установим статусы каждого из результатов измерений, составляющих выборку. Как мы видим, результаты измерений $(1, [0.4, 1.4])$, $(2, [1.3, 2.5])$ и $(3, [1.5, 2.1])$ являются граничными — они определяют

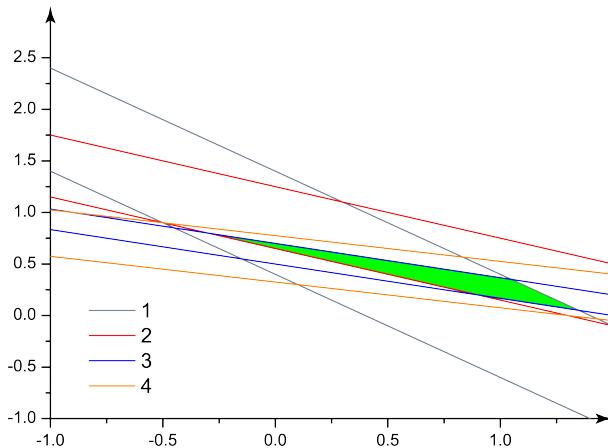


Рис. 3.20. Множество решений системы неравенств (3.28). Пары линий, выделенные одинаковым цветом, ограничивают полосу решений одного и того же двустороннего линейного неравенства, номер которого равен номеру соответствующей строки в системе (3.28). Непустое пересечение всех полос решений неравенств (информационное множество задачи) выделено заливкой ярко-зеленым цветом

границы коридора совместных зависимостей. Вместе с тем интервальный результат измерений $(4, [1.3, 3, 1])$ является внутренним, поскольку полностью содержит сечение коридора совместных зависимостей в точке $x_1 = 4$. На Рис. 3.20 видно, что ни одна из линий, ограничивающих полосу решений четвертого двустороннего неравенства $1.3 \leq \beta_0 + 4 \cdot \beta_1 \leq 3.1$, не является границей информационного множества задачи.

Попробуем изменить статус четвертого результата измерения в выборке: заменим поочередно отрезок неопределенности $(4, [1.3, 3, 1])$ на $(4, [1.8, 2.2])$ и $(4, [0, 5, 1.1])$. Результатом подобной замены станет то, что интервальный результат измерений $(4, [1.8, 2.2])$ окажется строго внешним (см. Рис. 3.21), а информационное множество модифицируется так, как показано на Рис. 3.22 заливкой ярко-розовым цветом. В том случае, если четвертый результат измерений будет представлен отрезком неопределенности $(4, [0, 5, 1.1])$, он станет выбросом по отношению к ра-

нее построенному семейству восстановленных линейных зависимостей, поскольку его добавление в выборку приведет к пустоте информационного множества задачи.

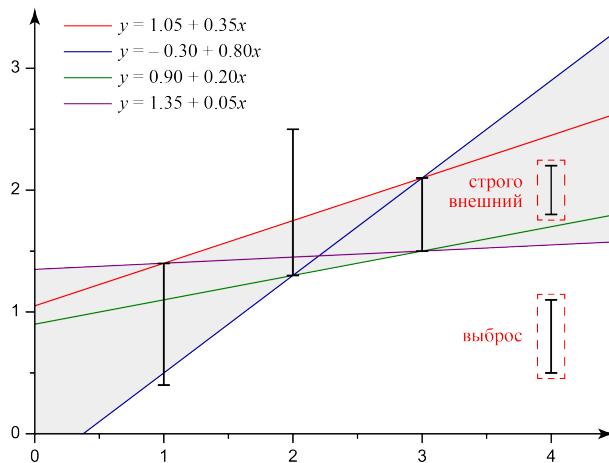


Рис. 3.21. Исходная выборка, показанная на Рис. 3.19, в которой четвертый внутренний результат измерения заменен на строго внешний или выброс

■

3.4.6 Варьирование величины неопределенности результатов измерений

В подразделе 3.3.5 обсуждался прием варьирования интервальной неопределенности результатов измерений постоянной величины. Его смысл заключается в том, что путем равномерного или неравномерного увеличения радиусов интервальных результатов измерений мы можем достичь совместности выборки и ее свойства быть накрывающей.

При восстановлении линейной зависимости по набору отрезков неопределенности измерений, составляющих выборку \mathcal{S}_n , можно поступить таким же образом: корректируя величину интервальной неопределенности отдельных или всех результатов измерений, мы можем до-

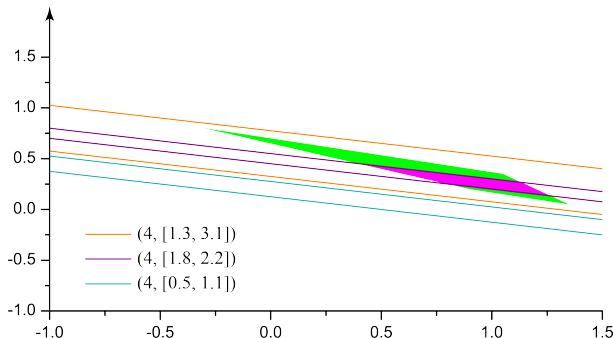


Рис. 3.22. Модификация информационного множества решений задачи восстановления линейной зависимости, показанного на Рис. 3.20, после добавления в выборку строго внешнего результата измерений или выброса. Новое информационное множество, полученное после добавления в выборку строго внешнего результата измерений, выделено заливкой ярко-розовым цветом

биться непустоты информационного множества задачи и совместности восстанавливаемой функциональной зависимости с интервальными данными.

Как было установлено в подразделе 3.4.5, пустота информационного множества $\Omega(S_n)$ служит индикатором присутствия в выборке выбросов. Обнаружение результатов измерений, интервальная неопределенность которых должна быть увеличена для восстановления линейной зависимости (3.18) по имеющейся выборке, т. е. выявление выбросов в ходе выполнения варьирования интервальной неопределенности, является результатом не менее важным, чем само решение задачи восстановления линейной зависимости. Большое количество выбросов может говорить о том, что характер восстанавливаемой зависимости выбран неверно или неопределенность полученных результатов измерений занижена.

Дадим математическую формулировку задачи варьирования интервальной неопределенности результатов измерений $s_k = (x_k, y_k)$,

$k = 1, \dots, n$. Для этого представим каждый интервал \mathbf{y}_k в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_k &= [\dot{y}_k - w_k^- \epsilon_k^-, \dot{y}_k + w_k^+ \epsilon_k^+] \\ &= \dot{y}_k + [-w_k^- \epsilon_k^-, w_k^+ \epsilon_k^+].\end{aligned}$$

Эта запись по своему виду напоминает равносильное определение интервала $\mathbf{y}_k = \text{mid } \mathbf{y}_k + [-1, 1] \text{ rad } \mathbf{y}_k$. Действительно, в общем случае середина интервала является точкой, которая представляет его «наилучшим образом» ввиду равноудаленности от границ. Однако выбранное нами представление интервала \mathbf{y}_k посредством величин \dot{y}_k , w_k^- , ϵ_k^- , w_k^+ и ϵ_k^+ предоставляет большую гибкость работы с обрабатываемыми данными: например, мы можем выделить и зафиксировать какую-то произвольную точку интервала результата измерения \dot{y}_k , а «размах» интервальной неопределенности $w_k \epsilon_k$ изменять в обе стороны от нее или только в одну сторону.

Легко убедиться, что решение задачи восстановления линейной зависимости зависимости $y = f(x, \beta)$ по набору отрезков неопределенности измерений $s_k = (x_k, \mathbf{y}_k)$ сводится к нахождению множества решений равносильной системы линейных неравенств

$$\dot{y}_k - w_k^- \epsilon_k^- \leq f(x_k, \beta) \leq \dot{y}_k + w_k^+ \epsilon_k^+, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

Дополним систему неравенств (3.29) следующими условиями:

$$w_k^-, w_k^+ \geq 1, \quad \epsilon_k^-, \epsilon_k^+ \geq 0.$$

Параметры ϵ_k^- и ϵ_k^+ служат эффективными «радиусами» интервала \mathbf{y}_k , и их значения остаются неизменными — такими, какими они являются при $w_k^- = w_k^+ = 1$. Параметры w_k^- и w_k^+ играют роль масштабирующих коэффициентов и полностью определяют величину изменения интервальной неопределенности результата измерения с номером k .

Бесспорно, значения параметров w_k^- и w_k^+ можно изменять в очень широких пределах. Поэтому ограничим себя нахождением только таких значений параметров w_k^- и w_k^+ , $k = 1, \dots, n$, при которых суммарное изменение интервальной неопределенности элементов выборки \mathcal{S}_n будет минимальным.

Итак, прием *варьирования* интервальной неопределенности результатов измерений $s = (x, \mathbf{y})$ заключается в решении следующей задачи

условной оптимизации:

$$\begin{aligned} & \text{найти } \min_{w_k^-, w_k^+, \beta} \sum_{k=1}^n (w_k^- + w_k^+) \\ & \text{при ограничениях} \\ & \begin{cases} \dot{y}_k - w_k^- \epsilon_k^- \leq f(x_k, \beta) \leq \dot{y}_k + w_k^+ \epsilon_k^+, \\ w_k^- \geq 1, \\ w_k^+ \geq 1, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Все вышеизложенное относилось к случаю восстановления линейной зависимости (3.18), в котором задача (3.30) может быть решена методами линейного программирования. Эти рассуждения также сохраняют свою справедливость, если по отрезкам неопределенности измерений необходимо восстановить нелинейную зависимость.

Пример 3.4.4. Рассмотрим выборку, состоящую из десяти отрезков неопределенности измерений (см. Рис. 3.23):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{10} = & \{(0.5, [0.7, 1.1]), (1.0, [0.5, 1.1]), \\ & (1.5, [0.5, 0.9]), (2.0, [1.7, 2.3]), \\ & (2.5, [2.8, 3.2]), (3.0, [2.2, 2.8]), \\ & (3.5, [2.3, 3.1]), (4.0, [2.9, 3.5]), \\ & (4.5, [3.1, 3.9]), (5.0, [3.3, 3.9])\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Наша задача — восстановить по данной выборке линейную зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$ путем варьирования интервальной неопределенности результатов измерений. Мы заранее не знаем, присутствуют ли в выборке выбросы, и будем решать поставленную задачу дважды: сначала полагая, что $w_k^- \neq w_k^+$, а затем с условием $w_k^- = w_k^+$, $k = 1, \dots, 10$. В обоих случаях будем считать, что $\dot{y}_k = \text{mid } \mathbf{y}_k$ и $\epsilon_k^- = \epsilon_k^+ = \text{rad } \mathbf{y}_k$.

Решением задачи (3.30) при выполнении условия $w_k^- \neq w_k^+$ является восстановленная линейная зависимость со значениями параметров

$$\beta_0 = 0.344, \quad \beta_1 = 0.711,$$

при этом только два масштабирующих коэффициента w_3^+ и w_5^- из всех w_k^-, w_k^+ , $k = 1, \dots, 10$ отличны от единицы:

$$w_3^- = 1.000, \quad w_3^+ = 3.556, \quad w_5^- = 4.389, \quad w_5^+ = 1.000.$$

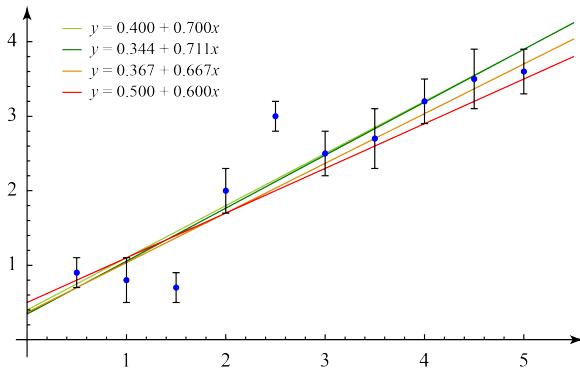


Рис. 3.23. Выборка (3.31), а также графики функций, задающие коридор совместных зависимостей по отрезкам неопределенности измерений с номерами 1, 2, 4, 6–10

Аналогичный результатам мы получим, решая задачу (3.30) с выбором условия $w_k^- = w_k^+$. По-прежнему $\beta_0 = 0.344$, $\beta_1 = 0.711$, однако

$$w_3^- = w_3^+ = 3.556, \quad w_5^- = w_5^+ = 4.389.$$

На Рис. 3.24 показана выборка (3.31) после замены результатов измерений с номерами 3 и 5, являющихся выбросами, на интервалы

$$\begin{aligned} s_3^{(1)} &= (1.5, [0.500, 1.411]), \quad s_5^{(1)} = (2.5, [2.122, 3.200]) && \text{при } w_k^- \neq w_k^+, \\ s_3^{(2)} &= (1.5, [-0.011, 1.411]), \quad s_5^{(2)} = (2.5, [2.122, 3.878]) && \text{при } w_k^- = w_k^+. \end{aligned}$$

Сплошной линией красного цвета на Рис. 3.24 показаны новые «радиусы» $w_3^+ \epsilon_3^+$ и $w_5^- \epsilon_5^-$ интервальных результатов измерений с номерами 3 и 5 в том случае, если $w_k^- \neq w_k^+$. Заметим, что точки $\text{mid } \mathbf{y}_3$ и $\text{mid } \mathbf{y}_5$, выбранные нами в качестве точек $\hat{\mathbf{y}}_3$ и $\hat{\mathbf{y}}_5$, уже не являются серединами уширенных интервалов $\mathbf{y}_3^{(1)}$ и $\mathbf{y}_5^{(1)}$. Пунктирной линией красного цвета на Рис. 3.24 выделены интервалы $\mathbf{y}_3^{(2)}$ и $\mathbf{y}_5^{(2)}$, полученные в результате увеличения «радиусов» элементов \mathbf{y}_3 и \mathbf{y}_5 выборки (3.31) на одинаковую величину: $w_3^- \epsilon_3^- = w_3^+ \epsilon_3^+$, $w_5^- \epsilon_5^- = w_5^+ \epsilon_5^+$. Так же на Рис. 3.24 приведена восстановленная линейная зависимость $y = 0.344 + 0.711x$.

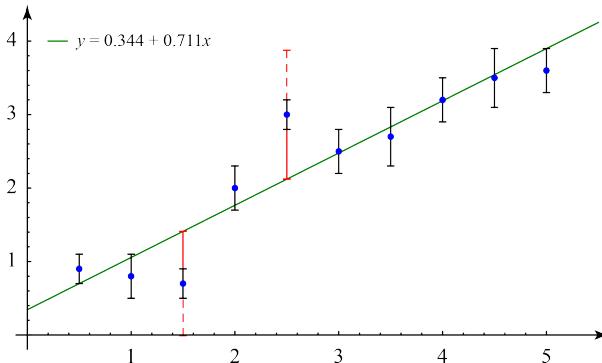


Рис. 3.24. Исходная выборка (3.31) и ее элементы с измененной величиной интервальной неопределенности в случаях $w_k^- \neq w_k^+$ (сплошная линия красного цвета) и $w_k^- = w_k^+$ (пунктирная линия красного цвета), $k = 3, 5$

Проследим, как в изначально пустом информационном множестве задачи появляется точка $(0.344, 0.711)$. Для этого найдем решение системы линейных двусторонних неравенств (3.29), записанной для элементов выборки (3.31) с номерами 1, 2, 4, 6–10. Данное непустое множество $\Omega_{1,2,4,6-10}$, а также полосы решений двусторонних неравенств, составленных для результатов измерений $s_3 = (1.5, [0.5, 0.9])$ и $s_5 = (2.5, [2.8, 3.2])$, показаны на Рис. 3.25. Как видно, множество $\Omega_{1,2,4,6-10}$, выделенное заливкой ярко-зеленым цветом, не пересекается с полосами решений двусторонних неравенств, которые соответствуют выбросам. Оно имеет четыре вершины: $(0.400, 0.700)$, $(0.344, 0.711)$, $(0.367, 0.667)$ и $(0.500, 0.600)$.

Изменяя «радиусы» интервалов y_3 и y_5 , мы будем расширять полосы, выделенные на Рис. 3.25 синим и розовым цветами. Информационные множества выборки (3.31) с поочередно включенными в нее элементами $s_3^{(1)}, s_5^{(1)}$ и $s_3^{(2)}, s_5^{(2)}$ показаны на Рис. 3.26. Как видно, точка $(0.344, 0.711)$ является не только вершиной множества $\Omega_{1,2,4,6-10}$, но и единственной точкой пересечения полос решений двусторонних неравенств, относящихся к отрезкам неопределенности $s_3^{(1)}, s_5^{(1)}, s_3^{(2)}$ и $s_5^{(2)}$.

Могла ли какая-то другая вершина множества $\Omega_{1,2,4,6-10}$ стать пер-

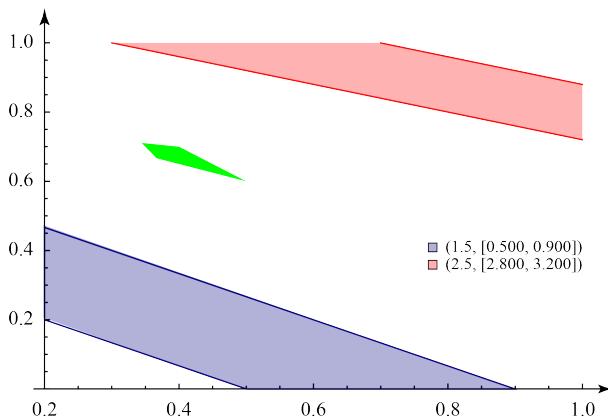


Рис. 3.25. Определение информационного множества задачи по выборке (3.31). Пересечение решений двусторонних линейных неравенств, составленных для элементов выборки с номерами 1, 2, 4, 6–10, показано заливкой ярко-зеленым цветом. Две полосы, выделенные синим и розовым цветами, соответствуют решениям двусторонних неравенств, записанных для элементов выборки с номерами 3 и 5 (выбросов)

вой точкой, появляющейся в непустом информационном множестве задачи? Не являются ли определенные нами значения $\beta_0 = 0.344$ и $\beta_1 = 0.711$ ошибочными? Оказывается, что нет. В таблице 3.3 приведены данные, полученные в результате поиска коэффициентов w_3^+ и w_5^- для других пар значений параметров β_0 и β_1 , входящих в линейные зависимости, которые задают границы коридора совместных зависимостей по результатам измерений с номерами 1, 2, 4, 6–10. Минимальное изменение интервальной неопределенности результатов измерений в выборке (3.31) соответствует значению суммы $w_3^+ + w_5^- = 7.945$, а значит, восстановленной линейной зависимости $y = 0.344 + 0.711x$. ■

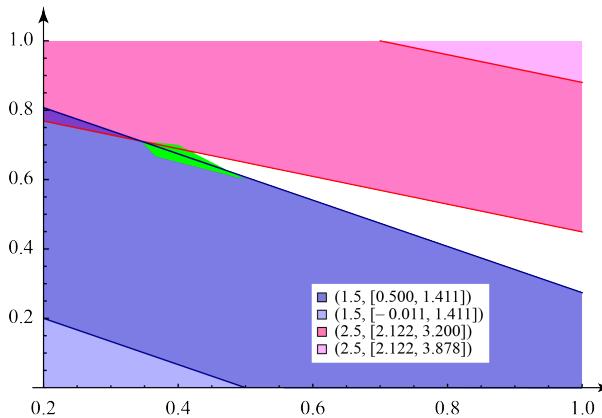


Рис. 3.26. Определение информационного множества задачи по выборке (3.31), интервальная неопределенность элементов с номерами 3 и 5 которой варьируется. Пересечение решений двусторонних линейных неравенств, записанных для элементов выборки с номерами 1, 2, 4, 6–10, показано заливкой ярко-зеленым цветом

(β_0, β_1)	w_3^+	w_5^-	$w_3^+ + w_5^-$
(0.400, 0.700)	3.750	4.250	8.000
(0.344, 0.711)	3.556	4.389	7.945
(0.367, 0.667)	3.338	4.828	8.166
(0.500, 0.600)	3.500	5.000	8.500

Таблица 3.3. Значения коэффициентов w_3^+ , w_5^- и их суммы, фигурирующих в задаче восстановления линейной зависимости (3.29) по выборке (3.31) путем варьирования интервальной неопределенности результатов измерений с номерами 3 и 5

Литература

- [1] А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. «Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью». (готовится к публикации) 2022.
- [2] А.Н.Баженов Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. — СПб. 2020 <https://elib.spbstu.ru/d1/2/s20-76.pdf/info>
- [3] А.Н.Баженов, Тельнова А. Ю. Мера (функционал) совместности интервальных величин для применения в анализе данных с интервальной неопределенностью. (Обобщение меры Жаккара) (готовится к публикации) 2022.
- [4] Баженов А. Н., Тельнова А. Ю., Комбинированный метод коррекции интервальных систем линейных алгебраических уравнений // Метрология. 2021. № 4. С. 17–39. <https://doi.org/10.32446/0132-4713.2021-4-17-39>
- [5] Бахтиаров Г.Д., Малинин В.В., Школин В.П. Аналогоцифровые преобразователи. – М.: Советское радио, 1980. – 280 с.
- [6] Гибридные шаговые двигатели типоразмера NEMA 17 (FL42STH) // НПО «Атом» : [сайт]. — 2021. — URL: http://www.npoatom.ru/katalog/step_motor/f142sth/ (дата обращения 19.09.2021).
- [7] ГОСТ 34100.1-2017/ISO/IEC Guide 98-1:2009. Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартинформ, 2018.

- [8] ГОСТ 34100.3–2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартинформ, 2018.
- [9] ГОСТ 34100.3.2-2017/ISO/IEC Guide 98-3/Suppl 2:2011. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. Дополнение 2. Обобщение на случай произвольного числа выходных величин. – М.: Стандартинформ, 2018.
- [10] ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2019.
- [11] Жилин С.И. Примеры анализа интервальных данных в Octave. <https://github.com/szhilin/octave-interval-examples>
- [12] Жилин С.И. Библиотека `kinterval`.
- [13] КАНТОРОВИЧ Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский Математический Журнал. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [14] КАРПОВА А. Частное сообщение. 2021.
- [15] КАПИЦА П.Л. Эксперимент. Теория. Практика. Статьи, выступления. – Москва: Наука, 1977.
- [16] Лакеев А.В., Носков С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Доклады Академии Наук. – 1993. – Т. 330, №4. – С. 430–433.
- [17] Мирский Г.Я. Электронные измерения: 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 440 с.
- [18] ОРТЕНБЕРГ Ф.С. Методы инфракрасного зондирования Земли из космоса. – М.: Знание, 1987. – 64 с.
- [19] Примеры анализа интервальных данных в Octave <https://github.com/szhilin/octave-interval-examples>
- [20] ПРОЛУБНИКОВ А.В. «Попытка построения интервальной медианы». Презентация Всероссийский вебинар по интервальному анализу: 2021.

- [21] РМГ 29–2013 Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2014.
- [22] Р 50.2.028-2003 ГСИ. Алгоритмы построения градуировочных характеристик средств измерений состава веществ и материалов и оценивание их погрешностей (неопределённостей). Оценивание погрешности (неопределённости) линейных градуировочных характеристик при использовании метода наименьших квадратов. Издание официальное. – М.: Издательство стандартов, 2003.
- [23] МИ 2083-90 Рекомендация. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. Издание официальное. – М.: Издательство стандартов, 1991.
- [24] Bazhenov, A.N., Telnova, A.Y. Combined Method for the Correction of Interval Systems of Linear Algebraic Equations. Meas Tech (2022). <https://doi.org/10.1007/s11018-022-02031-6>
- [25] ШАЙДУРОВ В.В., ШАРЫЙ С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №5).
- [26] ШАРАЯ И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии – 2005. – Том 10, №. 5. – Р. 103-119.
- [27] ШАРАЯ И.А. Пакет IntLinInc2D для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя неизвестными. – Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/>. Описание <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinInc2D.pdf>
- [28] ШАРАЯ И.А. Пакет IntLinInc3D для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя неизвестными. – Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/>. Описание <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinInc3D.pdf>

- [29] ШАРЫЙ С.П. Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/>
- [30] Шарый С. П. Программное обеспечение **fiposol**, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/shary/Codes/index.html>
- [31] S.P. SHARY Solving the linear interval tolerance problem. // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39. – P. 53-85
- [32] S.P. SHARY Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. // Reliable Computing. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3-33.
- [33] ШАРЫЙ С.П. О характеристизации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНИТИ, № 726-В91.
- [34] ШАРЫЙ С.П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем Дискретная математика. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129-145.
- [35] ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 51-61.
- [36] ШАРЫЙ С.П. О сравнении теорем Апостолатоса–Кулиша и Майера–Варнке в интервальном анализе // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2009. – Т. 12. – №3. – С. 351–359.
- [37] ШАРЫЙ С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределенностями // Автоматика и Телемеханика. – 2012. – №2. – С. 111–125.
- [38] ШАРЫЙ С.П., ШАРАЯ И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные Технологии. – 2013. – Т. 18. – №3. – С. 80–109.
- [39] ШАРЫЙ С.П. Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределенностью // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. – 2017. – №6. – С. 3–19.

- [40] ШАРЫЙ С.П. Задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2020. – Т. 86, №1. – С. 62–74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74
- [41] ШАРЫЙ С.П. О мере вариабельности оценки параметров в статистике интервальных данных // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 5. С. 90–108. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.5.008.
- [42] ШАРАЯ И.А., ШАРЫЙ С.П. Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений. Вычислительные технологии. 2021; 26(3):61–85. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005
- [43] ШАРЫЙ С.П. Enclosing vs. Non-enclosing Measurements in Interval Data Processing. Conference: International Online Seminar on Interval Methods in Control Engineering, 14 January 2022
<https://www.interval-methods.de/seminars>
DOI: 10.13140/RG.2.2.34844.62087
- [44] Звягин, Шарый С.П. 2022
- [45] ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ. – ФИЦ ИВТ: Новосибирск, 2022. Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [46] GARDEÑES, E., TREPAT, A., AND JANER, J.M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // Freiburger Intervall-Berichte. – 1981. – Vol. 81/8. – P. 1–28.
- [47] GRUBBS, F.E., BECK, G. Extension of sample sizes and percentages points for significance tests of outlying observations // Technometrics. – 1972. – Vol. 14. – P. 847–854.
- [48] HU C., HU Z.H. On statistics, probability, and entropy of interval-valued datasets // Lesot MJ. et al. (eds) Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2020. Communications in Computer and Information Science, vol 1239. – Cham: Springer, 2020.
- [49] KAUCHER, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space $\mathbb{I}\mathbb{R}$ // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis) / Alefeld G., Grigorieff R.D., eds. –

Wien: Springer, 1980. – P. 33–49. – (Computing Supplement; 2)

- [50] Edgar Kaucher. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. – Karlsruhe, 1973. Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften von der Vakultät für Naturwissenschaften I der Universität Karlsruhe, genehmigte Dissertation.
<http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/Kaucher-disser-1973.pdf>
- [51] KEARFOTT, R.B., NAKAO, M., NEUMAIER, A., RUMP, S., SHARY, S.P., VAN HENTENRYCK, P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. – 2010. – Т. 15, №1. – С. 7–13.
- [52] KERRE, E. E., NACHTEGAEL, M. (EDS.) Fuzzy techniques in image processing. – Springer Science & Business Media, 2000.
DOI: 10.1007/978-3-7908-1847-5
- [53] LAVEUVE S.E. Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 236–245. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 29).
- [54] NGUYEN H.T., KREINOVICH V., WU B., XIANG G. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Applications to Computer Science and Engineering. – Springer, Berlin-Heidelberg, 2012.
- [55] KEARFOTT R. B., NAKAO M. T., NEUMAIER A., RUMP S. M., SHARY S. P., VAN HENTENRYCK P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 7–13.
- [56] A.D. MAMINOV, M.A. POSYPKIN, S.P. SHARY Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics // 14th International Symposium "Intelligent Systems", INTELS'20, 14-16 December 2020, Moscow, Russia
- [57] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985*, ed. by K. Nickel. — Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 1986. – P. 157–158.

- [58] TESTO 477 LED HAND STROBOSCOPE // Testo SE & Co. KGaA : [сайт]. — 2022. — URL: <https://www.testo.com/en-TH/testo-477/p/0563-4770> (дата обращения 16.05.2022).
- [59] TIZHOOSH H.R. Fuzzy-Bildverarbeitung: Einführung in Theorie und Praxis. — Springer-Verlag, 1998. DOI: 10.1007/978-3-642-58742-9
- [60] ZHILIN, S.I. On fitting empirical data under interval error // Reliable Computing. — 2005. — Vol. 11. — P. 433–442. DOI: 10.1007/s11155-005-0050-3

Index

- M*- и *H*-матрицы, 46
порядок линейный, 16
свойства середины и радиуса матричных операций, 25
свойства середины интервала, 18
алгоритм Шайдурова
вычисления размера бруса решения, 134
априорный интервал, 215
бинарные арифметические операции, 13
брус, 25
брус неопределенности, 234
вариабельность, 219
варьирование величины
неопределенности
результатов измерений, 251
варьирование неопределенности, 226
величина постоянная, 208
вершина интервального вектора, 25
вершина интервальной матрицы, 25
включение интервалов, 15
вложение в линейное пространство, 180
внешняя оценка Бекка, 99
внутреннее (алгебраическое) вычитание в арифметике Каухера, 168
внутреннее (алгебраическое) деление в \mathbb{KR} , 169
возмущения внешние, 62
входы управления, 62
выборка, 207
выборка несовместная, 210
выборка совместная, 210
выброс, 247
выделяющий предикат, 64
выражения функциональные элементарные, 50
вырожденный интервал, 12
выходы стабилизируемые, 62
выходы управляемые, 62
граф совместности выборки, 216
диаграмма «совместность-накрытие» выборки, 210
диаграмма рассеяния, 208
длина выборки, 208
дуализация в арифметике Каухера, 166
зависимые (связанные)
интервальные величины, 16
задача восстановления функциональной зависимости, 234

- задача интервальная, 61
 знак интервала, 20
 значение измеряемой величины
 действительное,
 опорное, 201
 значение измеряемой величины
 истинное, 201
 измерение косвенное, 48
 измерения неравношириные, 209
 измерения равношириные, 209
 индекс Жаккара, 212
 интервал, 12
 интервальная арифметика
 Кэхэна, 199
 интервальная задача —
 множество решений, 61
 интервальная матрица, 24
 интервальное расширение
 естественное, 50
 интервальный (одномерный)
 оператор Ньютона, 139
 интервальный вектор, 24
 информационное множество, 213
 информационное множество
 задачи восстановления
 функциональной
 зависимости, 238
 информационный интервал, 215
 истинное значение, 201
 классическая интервальная
 арифметика, 13
 компарант матрицы, 46
 коридор совместных
 зависимостей, 240
 коррекция ИСЛАУ: изменение
 матрицы, 128
 коррекция ИСЛАУ: изменение
 правой части, 123
 коррекция линейной задачи о
 допусках, 122
 критерий неособенности Баумана,
 39
 линейная задача о допусках, 117
 магнитуда, 19
 матрица знаково-блочная, 183
 матрица интервальная
 неособенная, 38
 матрица интервальная обратная,
 43
 матрица интервальная особенная,
 38
 матрица интервальная с
 диагональным
 преобладанием, 39
 матрица интервальная сильно
 неособенная, 42
 матрица предобуславливающая,
 97
 медиана [интервальной выборки],
 222
 мера вариабельности, 204
 мера совместности выборки, 212
 метод Гаусса-Зейделя
 интервальный, 102
 метод Кравчика, 114
 метод Кравчика для нелинейных
 уравнений, 151
 метод Ньютона интервальный,
 139
 метод Ньютона многомерный, 144
 метод Ньютона одномерный, 137
 метод Шульца интервальный, 44
 метрика на множествах
 интервалов, 21
 магнитуда, 19
 множества АЕ-решений, 65
 множества АЕ-решений типа $\alpha\beta$,
 67
 множество \mathbb{IR}^n , 24
 множество АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$,
 69
 множество кванторных решений,
 64
 множество решений допусковое,

- 71
- множество решений
 - интервальной системы уравнений, 63
 - множество решений объединённое, 71
 - множество решений управляемое, 71
 - мода [интервальной выборки], 220
 - монотонность по включению, 15
 - мультиинтервал, 220
 - мультимодальная [выборка], 220
 - накрывающий результат измерения, 205
 - независимые (несвязанные)
 - интервальные величины, 16
 - ненакрывающий результат измерения, 206
 - неопределенность измерения, 190
 - непрерывность функции по Липшицу, 51
 - норма интервального вектора, 33
 - норма интервального вектора абсолютная, 34
 - норма интервальной матрицы, 34
 - нормы интервальных векторов и матриц согласованные, 34
 - нормы интервальных матриц и векторов, 33
 - обратный по сложению элемент в арифметике Каухера, 167
 - оператор Кравчика для систем нелинейных уравнений, 152
 - относительная ширина интервала, 20
 - относительный интервал, 20
 - отображение P -сжимающее, 37
 - отображение индуцированное, 180
 - отрезки неопределенности, 244
 - оценивание множества решений внешнее, 98
 - оценивание области значений функции, 48
 - оценка интервальная внешняя, 48
 - оценка интервальная внутренняя, 48
 - оценка постоянной центральная, 216
 - оценки точечные и интервальные, 203
 - погрешность квантования, 196
 - погружение в линейное пространство, 181
 - погружение стандартное, 182
 - подмножества \mathbb{IR} , 14
 - подмножества \mathbb{KR} , 168
 - подход формально-алгебраический, 111
 - популярные векторные нормы, 34
 - порядок по включению, 16
 - порядок частичный на множестве логических кванторов, 71
 - правильная проекция интервала, 166
 - правильность измерений, 188
 - предобуславливание, 96
 - преобладание диагональное, 39
 - преобладание диагональное слабое, 39
 - прецизионность измерений, 188
 - признак Адамара интервальный, 39
 - признак Бекка, 40
 - признак Рона-Рекса, 40
 - признак Румпа, 40
 - продолжение интервальное функции, 49
 - процедура Хансена-Блика-Рона, 107

- радиус интервала, 18
 радиус спектральный, 37
 расстояние на множествах
 интервалов, 21
 расстояние хаусдорфово между
 компактными
 множествами, 21
 расширение интервальное
 функции, 49
 расширение интервальное
 функции оптимальное,
 49
 результат измерения внешний,
 247
 результат измерения внутренний,
 247
 результат измерения граничный,
 248
 результат измерения строго
 внешний, 248
 свойства сильные и слабые, 64
 свойства интервальных
 арифметических
 операций, 17
 свойства радиуса интервала, 19
 свойства ширины интервала, 19
 середина интервала, 18
 сечение коридора совместных
 зависимостей, 240
 сильно совместная
 функциональная
 зависимость, 237
 система линейных
 алгебраических
 уравнений интервальная
 (ИСЛАУ), 68
 система уравнений интервальная,
 62
 систематическая погрешность,
 188
 слабо совместная
 функциональная
- зависимость, 238
 случайная погрешность, 188
 совместность выборки, 209
 статистика интервальная , 201
 субдистрибутивность умножения
 относительно сложения,
 18
 субдифференциальный метод
 Ньютона, 180
 супердистрибутивность, 170
 таблица Кэли в классической
 интервальной
 арифметике, 14
 твин, 198
 теорема Алефельда-Херцбергера,
 112
 теорема Апостолатоса-Кулиша,
 112
 теорема Банаха о неподвижной
 точке, 38
 теорема Баумана, 59
 теорема И. А. Шарой о строении
 допускового множества
 решений, 83
 теорема Кравчика-Ноймайера, 56
 теорема Лакеева-Носкова, 76
 теорема Майера-Варнке, 111
 теорема Рона о допусковом
 множестве решений, 84
 теорема Шрёдера о неподвижной
 точке, 38
 теорема о пустоте
 управляемого
 множества решений, 77
 теорема о пустоте допускового
 множества, 86
 теорема об аналитической
 характеризации
 АЕ-решений ИСЛАУ, 70
 теорема основная интервальной
 арифметики, 17
 теоретико-множественное

упорядочение по включению, 165

точность измерений, 188

умножение в полной интервальной арифметике $\mathbb{K}\mathbb{R}$, 169

унарный минус, 15

унимодальная [выборка], 220

уравнение индуцированное, 181

уравновешенный интервал, 18

условие Липшица, 51

условная операция взятия экстремума по включению, 172

форма бицентрированная, 59

форма среднезначная, 55

форма центрированная, 55

форма центрированная дифференциальная, 55

форма центрированная наклонная, 56

функционал Ctr, 91

функционал Tol, 92

функционал Uni, 90

функционал Uss, 91

функционал Рачека, 20

функционал распознающий, 90

функция срезки cut, 59

функция элементарная, 50

характеризация Бекка, 145

характеризация Рона множеств АЕ-решений, 70

центрированная форма дифференциальная, 56

центровой подход к построению внутренней оценки допускового множества решений, 134

частичный линейный порядок в $\mathbb{K}\mathbb{R}$, 165

частичный порядок по включению

индуцированный, 182

частота моды, 220

числа сингулярные матрицы, 35

ширина интервала, 18

эффект обёртывания, 28

Список иллюстраций

1.1	Подмножества \mathbb{IR} в классической интервальной арифметике	14
1.2	Интервал и его характеристики	19
1.3	Интервальные векторы-брюсы в \mathbb{R}^3	26
1.4	Внешняя оценка позиционирования при совершении полного оборота валом шагового двигателя Nema 17 шагами по 60°	31
1.5	Структурная схема статической системы управления [45].	61
1.6	Множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (зеленый цвет), $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (голубой цвет) и $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (желтый цвет) ИСЛАУ (1.82), построенные с использованием функции MixQtr2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]. Розовым цветом выделено множество $\Xi_{\mathcal{A}_4\beta_4}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Кванторные матрицы $\mathcal{A}_4 = (\forall \exists \exists \forall)$ (а) и $\mathcal{A}_4 = (\forall \forall \exists \forall)$ (б)	73
1.7	Множества АЕ-решений ИСЛАУ (1.82), соответствующие кванторной матрице $\mathcal{A} = (\exists \exists \exists)$ и различным кванторным векторам β_1 (зеленый цвет) и β_4 (голубой цвет) (а), β_2 (оранжевый цвет) и β_3 (серый цвет) (б). Для построения множеств АЕ-решений была использована функция MixQtr2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]	74
1.8	Управляемое множество решений ИСЛАУ (1.85)	78
1.9	Множества $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ решений ИСЛАУ:	82
1.10	Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.91) с выделенной вершиной $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$. Для построения множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ была использована функция EqnTol2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]	85
1.11	Управляемое (зеленый цвет) и допусковое (красный цвет) множества решений ИСЛАУ (1.93) (а) и управляемое множество решений ИСЛАУ (1.94) (б). Данные множества АЕ-решений были построены с использованием функции EqnTol2D пакета IntLinInc2D для MATLAB [27]	88

1.12 Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано черным крестиком, области $\text{Uni} < 0$ и $\text{Uni} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно	93
1.13 Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано черным крестиком, области $\text{Ctr} < 0$ и $\text{Ctr} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно	94
1.14 Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.82). На контурном графике положение точки $(0.5, 1)$ показано белым крестиком, области $\text{Tol} < 0$ и $\text{Tol} \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно	95
1.15 Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.101), а также его внешние оценки, полученные способом, основанным на использовании подчиненной чебышевской матричной нормы (1.99) (красная линия), и способом Х. Бекка (1.100) (синяя линия). Для построения объединенного множества решений ИСЛАУ была использована функция <code>EqnWeak2D</code> пакета <code>IntLinInc2D</code> для MATLAB [27]	101
1.16 Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.102), вектор начального приближения \mathbf{X}_0 (красная линия), а также результат шестой итерации \mathbf{X}_6 интервального метода Гаусса-Зейделя (синяя линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ была построено с использованием функции <code>EqnWeak2D</code> пакета <code>IntLinInc2D</code> для MATLAB [27]	106
1.17 Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105) (зеленый цвет), а также множество $\Xi_{uni}(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})$, $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ (голубой цвет) и его оптимальная внешняя оценка \mathbf{X} , полученная в результате выполнения процедуры Хансена-Блика-Рона (синяя линия). Множества АЕ-решений ИСЛАУ были построены с использованием функции <code>EqnWeak2D</code> пакета <code>IntLinInc2D</code> для MATLAB [27]	109
1.18 Множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ (1.105), брус $\mathbf{X}_{ХБР}$ (синяя линия), а также интервальный вектор $\mathbf{X}^{(20)}$, полученный с помощью интервального метода Кравчика (красная линия). Объединенное множество решений ИСЛАУ была построено с использованием функции <code>EqnWeak2D</code> пакета <code>IntLinInc2D</code> для MATLAB [27]	118

- 1.19 Трехмерный (а) и контурный (б) графики распознающего функционала $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$, построенного для ИСЛАУ (1.92). Положение точки (0.354, 1.508) показано на трехмерном и контурном графиках черной точкой и черным крестиком. Области $Tol < -5$, $-5 \leq Tol < -2$ и $Tol \geq -2$ выделены синим, светло-зеленым и желтым цветами, соответственно 122
- 1.20 (а) Трехмерные графики функционала Tol , построенные для ИСЛАУ (1.92) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) равномерного уширения компонент вектора \mathbf{b} . Положения точек (0.354, 1.508, -0.785) и (0.354, 1.508, 4.215) выделены черной и красной точками, соответственно. (б) Контурный график распознающего функционала Tol , построенный для ИСЛАУ (1.111). Области $Tol < 0$ и $Tol \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки (0.354, 1.508) отмечено черным крестиком 126
- 1.21 (а) Трехмерные графики функционала Tol , построенные для ИСЛАУ (1.92) до (нижняя поверхность) и после (верхняя поверхность) неравномерного уширения вектора \mathbf{b} . Положения точек (0.354, 1.508, -0.785) и (0.008, 2.315, 1.831) выделены черной и красной точками, соответственно. (б) Контурный график распознающего функционала Tol , построенный для ИСЛАУ (1.112). Области $Tol < 0$ и $Tol \geq 0$ выделены синим и желтым цветами, соответственно. Положение точки (0.008, 2.315) отмечено черным крестиком 127
- 1.22 Допусковые множества решений двух ИСЛАУ с матрицей (1.115) (а) и (1.116) (б), полученными в результате коррекции матрицы ИСЛАУ (1.92). Для построения множеств АЕ-решений использовалась функция `EqnTo12D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27] 133
- 1.23 Допусковое множество решений ИСЛАУ (1.111) и брусы его внутренней оценки, построенные вокруг точек (-0.2, 0.5) (а) и (0.354, 1.508) (б) с помощью метода В. В. Шайдурова. Положения центров оценивающих брусов выделены белыми крестиками. Для построения множества $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ИСЛАУ была использована функция `EqnTo12D` пакета `IntLinInc2D` для MATLAB [27] 136
- 1.24 Графики функции $f(x) = 0.5 - x^3 e^x$, а также ее первой и второй производной по x , построенные для численного решения уравнения (1.123) с помощью интервального метода Ньютона 141
- 1.25 Графики функций $0.8x^2 + 1.5y^2 = 1$, $y = \ln x$ (см. систему нелинейных уравнений (1.131)) и $y = -\frac{8}{15}x^2$, $x \neq 0$. Черной рамкой выделен брус начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ 146

1.26 Графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, $y = 1/(x+1) + 0.3$ (см. систему нелинейных уравнений (1.134)) и $y = x/(x+1)^6$. Бруск начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ выделен черной рамкой.	153
1.27 Графики функций $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.8$, $x^{2/3} + y^{2/3} = 2.0$, $y = 1/(x+1)+0.3$ (см. систему нелинейных уравнений (1.135)) и $y = x/(x+1)^6$. Бруск начального приближения $\mathbf{X}^{(0)}$ показан черной рамкой. Интервальным векторам $\mathbf{X}_{\mathcal{K}}$ и $\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}$ соответствуют черная пунктирная и зеленая сплошная линии, соответственно.	156
1.28 Результаты, получаемые на нулевой итерации интервального метода Краевчика в ходе уточнения решения системы (1.135). Центры $(c_*)^{(01)}, (c^*)^{(01)}, (c_*)^{(02)}$ и $(c^*)^{(02)}$ показаны крестиками синего, голубого, зеленого и розового цветов, соответственно. Центр бруса $\mathbf{X}^{(0)}$ отмечен крестиком черного цвета. Ребром интервальных векторов $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c_*)$ и $\Phi^{(0)}(\mathbf{X}^{(0)}, c^*)$ соответствуют две пары цветов, каждый из которых также определяет один из центров c_* или c^* . Бруск $\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}^{(0)})$ выделен заливкой светло-зеленым цветом. Границы интервального вектора $\mathcal{K}(\mathbf{X}^{(0)}, \text{mid } \mathbf{X}^{(0)})$ показаны черной пунктирной линией.	163
1.29 График функции $y = [2.0, 2.2]\sqrt{x} + [0.3, 0.4]x - [3.0, 3.1]$	167
1.30 К нахождению решения системы интервальных нелинейных уравнений (1.138) с помощью интервального метода Ньютона	171
1.31 Брусы-решения системы нелинейных интервальных уравнений (1.138) (выделены пунктирной линией), полученные с помощью интервального метода Ньютона. Выбираемые на каждой итерации центры разложения $\tilde{x}^{(k)}$ указаны на подрисунках.	175
1.32 Интервальные векторы $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$ и $\mathbf{X}_{\mathcal{K},bic}$, являющиеся решениями системы нелинейных интервальных уравнений (1.138) (выделены пунктирной линией). Бруск $\mathbf{X}_{\mathcal{N}}$ получен как результат пересечения двух брусов, ребра которых показаны голубой и фиолетовой пунктирными линиями (см. Рис. 1.31).	176
 3.1 Левый столбец (а, в, д): накрывающие результаты измерений точечной или интервальной величины. Правый столбец (б, г, е): ненакрывающие результаты измерений точечной или интервальной величины	221
3.2 Горизонтальное (слева) и вертикальное (справа) представления результатов измерений с помощью диаграмм рассеяния	224
3.3 Квадрантная диаграмма совместности выборки и ее свойства быть накрывающей с примерами выборок.	227
3.4 Информационные интервалы I_{\cap} (а) и I_{\cup} (б), определяемые по совместной накрывающей выборке	232

3.5	Информационные множества I_{\cup} (а), I_{\cap} (б), I_{\vee} (в) и I_{\wedge} (г), определяемые по несовместной накрывающей выборке	233
3.6	Унимодальная (слева) и мультимодальная (справа) интервальные выборки. Моды выборок выделены заливкой голубым цветом	238
3.7	Выборка \mathbf{x} (3.14), ее мода (выделена голубым цветом) и медиана (выделена желтым цветом)	239
3.8	Исходная выборка (а), она же после равномерного (б) и неравномерного (в, г) увеличения радиусов ее интервальных элементов. Радиусы результатов измерений, выделенных желтыми цветом, были увеличены для достижения совместности (в) исходной выборки и ее свойства быть накрывающей (г)	243
3.9	Исходная выборка \mathbf{x} (3.15) (а) и та же выборка после варьирования интервальной неопределенности результатов измерений (б), обозначаемая как \mathbf{x}^* (3.16). Мода и медиана выборки \mathbf{x} показаны заливкой голубым и оранжевым цветами, соответственно. Непустое пересечение элементов выборки \mathbf{x}^* выделено заливкой розовым цветом. Желтым цветом отмечены результаты измерений, радиусы которых были увеличены, т. е. $\text{rad } \mathbf{x}_k \neq \text{rad } \mathbf{x}_k^*, k = 1, \dots, 8$	245
3.10	Набор интервальных данных для восстановления линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, где $x_{k1} \in \mathbf{x}_{k1}$, $y_k \in \mathbf{y}_k$, $k = 1, 2, \dots, 5$	251
3.11	Различные способы пересечения графика линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$ с брусьями неопределенности измерений	252
3.12	Коридор совместных зависимостей и его сечение при некотором значении входной переменной x^*	255
3.13	Интервальные результаты измерений,	257
3.14	Объединенное множество решений ИСЛАУ (3.23), построенное при использовании функции <code>EqnWeak2D</code> пакета <code>IntLinInc2D</code> для MATLAB [27] подписи осей	258
3.15	Объединенное множество решений ИСЛАУ (3.24), построенное при использовании функции <code>EqnWeak3D</code> пакета <code>IntLinInc3D</code> для MATLAB [28]	259
3.16	Отрезки неопределенности x_{k1} , $k = 1, \dots, 5$, по которым восстанавливается линейная зависимость $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$	260
3.17	Образование информационного множества параметров линейной зависимости $y = \beta_0 + \beta_1 x_{k1}$, $k = 1, 2, 3$ в случае точечных значений входной переменной x_{k1}	262
3.18	Внутренние (1–3) и внешние (4–7) интервальные результаты измерений. Статусы результата измерений: внутренний (1), граничный (2, 3), внешний (4, 5), строго внешний (6) и выброс (7). Заливкой розовым цветом показана некоторая часть коридора совместных зависимостей	264

3.19 Исходная выборка, соответствующая ИСЛАУ (3.27). Границы коридора совместных зависимостей, выделенного заливкой сиреневым цветом, заданы линейными функциями, значениями параметров β_0 и β_1 которых являются координаты вершин информационного множества, показанного на Рис. 3.20	265
3.20 Множество решений системы неравенств (3.28). Пары линий, выделенные одинаковым цветом, ограничивают полосу решений одного и того же двустороннего линейного неравенства, номер которого равен номеру соответствующей строки в системе (3.28). Непустое пересечение всех полос решений неравенств (информационное множество задачи) выделено заливкой ярко-зеленым цветом	266
3.21 Исходная выборка, показанная на Рис. 3.19, в которой четвертый внутренний результат измерения заменен на строго внешний или выброс	267
3.22 Модификация информационного множества решений задачи восстановления линейной зависимости, показанного на Рис. 3.20, после добавления в выборку строго внешнего результата измерений или выброса. Новое информационное множество, полученное после добавления в выборку строго внешнего результата измерений, выделено заливкой ярко-розовым цветом	268
3.23 Выборка (3.31), а также графики функций, задающие коридор совместных зависимостей по отрезкам неопределенности измерений с номерами 1, 2, 4, 6–10	271
3.24 Исходная выборка (3.31) и ее элементы с измененной величиной интервальной неопределенности в случаях $w_k^- \neq w_k^+$ (сплошная линия красного цвета) и $w_k^- = w_k^+$ (пунктирная линия красного цвета), $k = 3, 5$	272
3.25 Определение информационного множества задачи по выборке (3.31). Пересечение решений двусторонних линейных неравенств, составленных для элементов выборки с номерами 1, 2, 4, 6–10, показано заливкой ярко-зеленым цветом. Две полосы, выделенные синим и розовым цветами, соответствуют решениям двусторонних неравенств, записанных для элементов выборки с номерами 3 и 5 (выбросов)	273
3.26 Определение информационного множества задачи по выборке (3.31), интервальная неопределенность элементов с номерами 3 и 5 которой варьируется. Пересечение решений двусторонних линейных неравенств, записанных для элементов выборки с номерами 1, 2, 4, 6–10, показано заливкой ярко-зеленым цветом	274