Лекция 1. Вводная лекция. Тематика курса.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

13.01.2022

Тематика курса

Тематика курса:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

Анализ данных с интервальной
неопределённостью

Тематика курса

Тематика курса:

Интервальный анализ

Обратные задачи

Анализ данных

Ссылки

Интервальный анализ

- Учебные пособия:
  Книги, изданные сотрудниками - ФТИ им. А.Ф. Иоффе
  http://www.ioffe.ru/publication/
  «Учебники»
- Новый учебник А.Н.Баженов, А.А.Карпова. «Интервальный анализ для исследователей.» ФТИ-2022.
  https://www.overleaf.com/project/60fbfd3040f1ea1505501ec6
- Интервальный анализ — основной русскоязычный ресурс
  http://www.nsc.ru/interval/

Ссылки

Обратные задачи

- Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009 — 457 стр.

Анализ данных с интервальной неопределённостью

- А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. Ижевск. «Регулярная и хаотическая динамика». 2022 — 223 стр.

Обратные задачи

Тематика курса:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

Обратные задачи

Почему?

Решение обратных задач?

Познание природы идет через объективные данные. Подавляющая часть знаний получена эмпирически, теоретические предсказания редки (Риман — ударные волны, Хевисайд — Черенковское излучение).

«Ни один европейский фантаст не придумал кенгуру.»

Обратные задачи

Почему?

с неточными и несовместными . . . ?

Тенденции:

Недостаток информации ведет к неопределенным выводам, Увеличение точности измерений — к получению несовместных результатов

Обратные задачи

Почему?

...данными и моделями?

Данные бывают неточны, но:

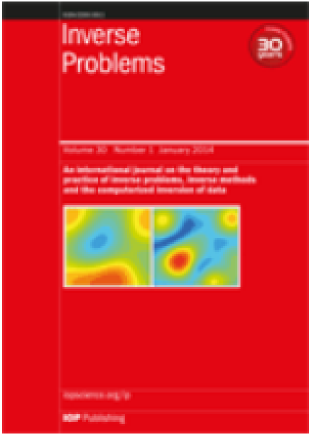
«Приборы нас намеренно не обманывают...»

А вот за модели уже мы несём ответственность. Все задачи решаются в конкретной постановке, и только в рамках постановки решение имеет смысл.

Обратные задачи

Обратные задачи — неформальное введение

Последний номер журнала «Inverse Problems» — обложка.
An interdisciplinary journal combining mathematical and experimental papers on inverse problems with numerical and practical approaches to their solution.



Последний номер журнала «Inverse Problems» —- первая статья

https://iopscience.iop.org/journal/0266-5611
Determination of a spatial load in a damped Kirchhoff–Love plate equation from final time measured data.
D Anjuna et al 2022 Inverse Problems 38 015009

In this paper, we study the inverse problem of determining an unknown spatial load F(x) in the damped non-homogeneous isotropic rectangular Kirchhoff–Love plate equation

$$\rho_h(x)u_{tt} + \mu(x)u_t + (D(x)(u_{x_1x_1} + \nu u_{x_2x_2}))_{x_1x_1} + (D(x)(u_{x_2x_2} + \nu u_{x_1x_1}))_{x_2x_2} + 2(1-\nu)(D(x)u_{x_1x_2})_{x_1x_2} = F(x)G(t),$$
$$(x,t) \in \Omega \times (\,0, T\,]$$

from final time measurement data $uT(x) = u(x, T)$. Using the quasi-solution approach, the inverse problem is posed as a least square minimization problem of the Tikhonov functional, and the existence of minimum is shown ...

Википедия

Обратная задача — тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных.
Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и задачи по неразрушающему контролю.
Обратные задачи являются **некорректно поставленными задачами**. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее.

Википедия

В функциональном анализе обратная задача представляется в виде **отображения между метрическими пространствами**.
Обратные задачи обычно формулируются в **бесконечномерных пространствах**, но ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к изменению задачи в **дискретной форме**.
В этом случае используют **метод регуляризации** для того, чтобы избежать переобучения.

Википедия

Обратная задача рассматривается как «обратная» для прямой задачи, которая связывает параметры модели с данными, которые мы наблюдаем:

$$\text{Параметры модели} \rightarrow \text{Данные}$$

Обратную задачу можно концептуально сформулировать следующим образом:

$$\boxed{\text{Данные} \rightarrow \text{Параметры модели}}$$

ПЛАН

- Примеры обратных задач - «на пальцах»
- Примеры обратных задач - матфизика
-

Примеры обратных задач - исторические

- Задача Фалеса о высоте египетской пирамиды
- Задача Фалеса о расстоянии до корабля
- Расстояние до Луны и Солнца
- Размер Солнца
- Геология. Остывание Земли.
- Палеореконструкции.

Примеры обратных задач - жизненные

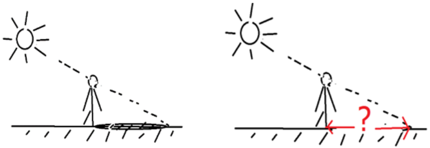
- Стереозрение
- Бинауральный эффект

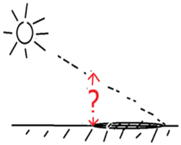
Примеры обратных задач - технические

- Калибровка шкалы прибора
- Аналитические измерения

Тень предмета

Тень предмета



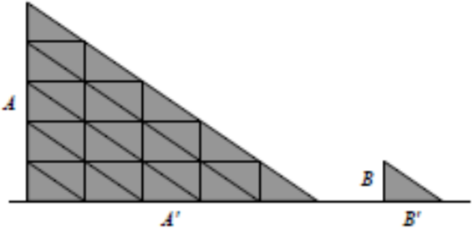


Прямая и обратные задачи

Прямая.	Источник света	— объект	$\Longrightarrow$	**тень (изображение)** ?
Обратная.	Источник света	— **объект** ?	$\Longleftarrow$	тень (изображение)

Задача Фалеса о высоте египетской пирамиды

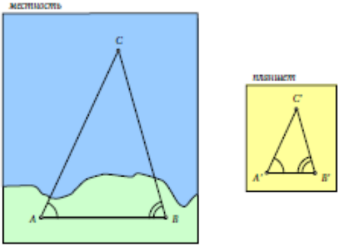
VII в до н.э.
Высота объекта.
Пусть A, A' — пирамида и ее тень, B, B' — гномон и его тень



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Longrightarrow \boxed{A = B \cdot \frac{A'}{B'}}$$

Задача Фалеса о расстоянии до корабля

Расстояние до объекта.
Пусть A, B, C — расположение маяков и корабля, A', B', B' — изображение на планшете. Расстояние AB известно.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Longrightarrow \boxed{AC = A'C' \cdot \frac{AB}{A'B'}, BC = B'C' \cdot \frac{AB}{A'B'}}$$

Расстояние до объекта.
Аристарх Самосский. «О величинах и расстояниях Солнца и Луны».
III в. до н.э.

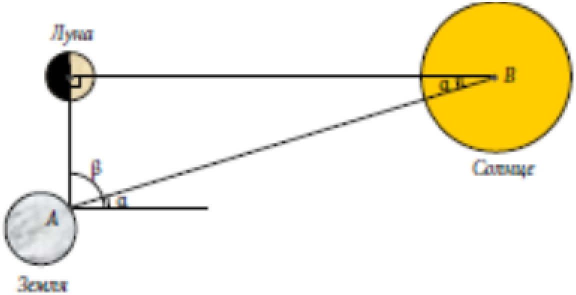
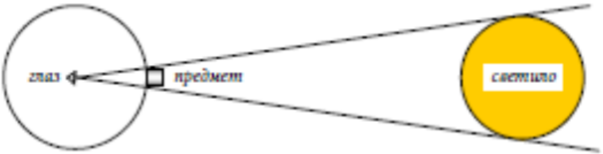


Рис. 10

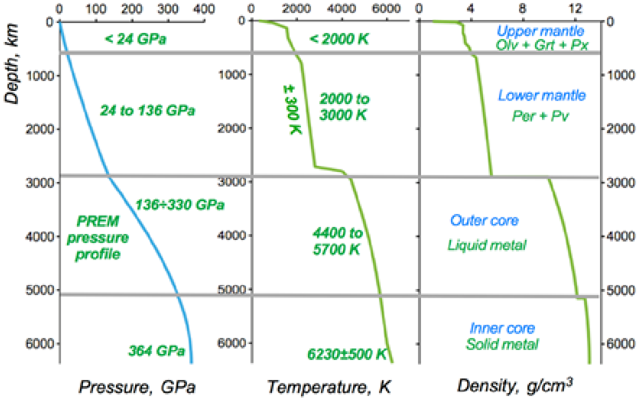
Размер Солнца

Архимед. «Исчисление песчинок». III в. до н.э.



При расчётах Архимед учитывал размер зрачка и делал специальные измерения для того, чтобы найти его. В результате измерений было получено, что угловой диаметр Солнца больше $\frac{1}{200}$ части прямого угла. Из этого измерения Архимед показывает, что диаметр Солнца больше стороны вписанного в небесную сферу тысячеугольника.

Геология. Оценка возраста Земли. Обратная задача теплопроводности. Середина XIX века — Кельвин $\sim$ 10-100 млн. лет,
Конец XIX века — Хевисайд (операционное исчисление) $\sim$ 1+ млрд. лет.

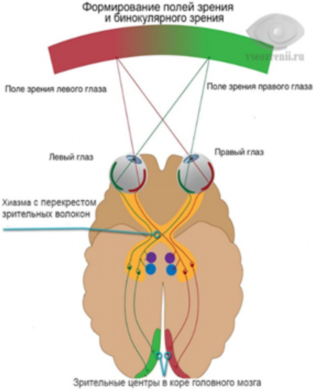


Палеореконструкции.

Вегенер. 1912. Теория дрейфа материков. Реконструкция распада Пангеи на материки

Стереозрение

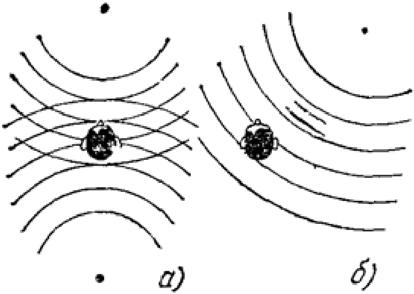
Вид зрения, при котором возможно восприятие формы, размеров и расстояния до предмета, например благодаря бинокулярному зрению (количество глаз может быть и больше 2-х, как например у ос — два сложных глаза и три простых глаза (глазка), скорпиончиков — 3-6 пар глаз)



Бинауральный эффект

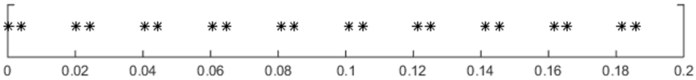
Определение направления источника звука

- Разница в средней амплитуде
- Разница в фазе
- Разница в спектре



Калибровка шкалы прибора

Определение цены делений прибора.
Например, измеритель временных распределений — цифровой осциллограф производит неравноотстоящие отсчеты:

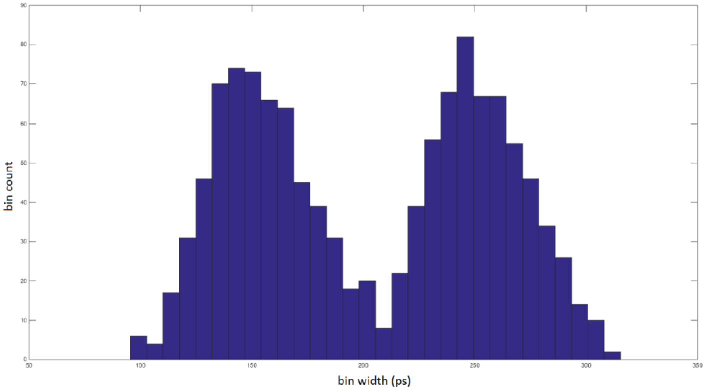


Время, нс

Длина буфера — 1024 «ячейки», надо измерить «длину» каждой из них.

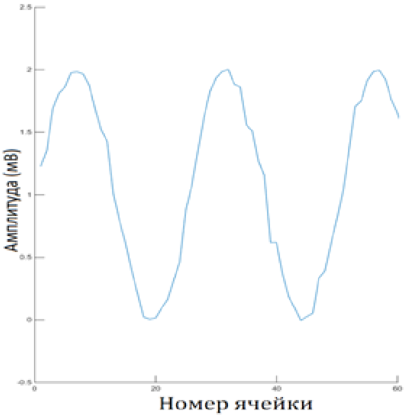
Калибровка шкалы прибора

Типичный пример гистограммы цены делений



Калибровка шкалы прибора

Определение шкалы – подача «калибра», сигнала с известными характеристиками. Точных генераторов линейно растущих сигналов с частотой десятки Мегагерц не выпускается. Поэтому используются линейные участки эталонного гармонического сигнала.



Калибровка шкалы прибора [1]

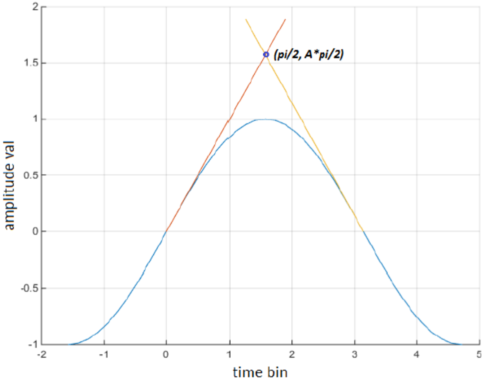
На прибор подаются гармонические сигналы

$$y = Asin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

ω - частота. Известна с высокой точностью.
По амплитудным значениям находятся параметры сигнала (A, φ_0).
Зная параметры сигнала, вычисляем временную шкалу:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta \left(asin(\frac{y_i}{A})\right)}{\omega},$$

Определение амплитуды



Определение временной шкалы

Пусть на полупериоде лежат отсчеты $0, 1, \ldots, n$ и в буфере данных помещается $1, 2, \ldots k$ таких полупериодов длиной d.
$\{I^+_{kn}\}$ — множество точек лежащих на одной прямой с положительным наклоном.
Каждая точка $asin(y)$ будет удовлетворять равенству:

$$\mathtt{asin}\ (y_i) = a^+ \cdot i + b + d * k,$$

Найдем индексы i точек прямых

Определение временной шкалы

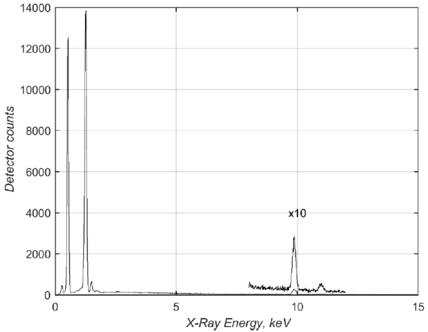
Интервалы из спецификации $\boldsymbol{i} = [i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$,
$\boldsymbol{y} = [y - 0.015|y|, y + 0.015|y|]$.
СЛАУ

$$\begin{pmatrix} i_0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ i_j & 1 & k \\ \dots & \dots & \dots \\ i_n & 1 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Найдем a, b, d для $\{I^+_{kn}\}$, $\{I^-_{kn}\}$

Аналитические измерения

Измерение содержания германия и молибдена [2]



В сильных пиках наблюдается сумма элементов, в слабых — отдельные элементы:

$$a_{ii} \ll a_{ij}$$

Масс-спектр газа в технологической установке

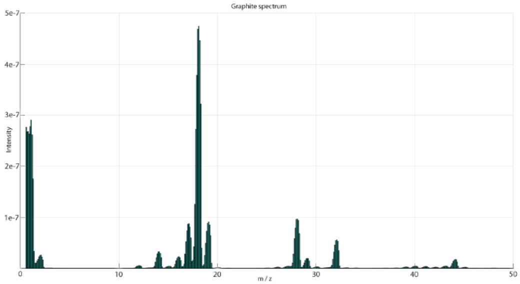
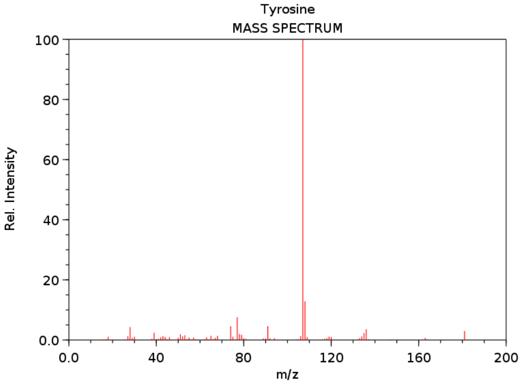


Рис. 1: Спектр графита во время нагрева

В составе смеси присутствуют известные вещества $x_1, x_2, \ldots$ неизвестные вещества $x_p, \ldots$

$$b_i = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + \ldots + ?? \cdot x_p + \ldots$$

Протеомика



NIST Chemistry WebBook (https://webbook.nist.gov/chemistry)

Протеомика – наука, изучающая белковый состав биологических объектов, а также модификации и структурно-функциональные свойства белковых молекул. Схема идентификации:

$$M \to \{m\}$$

Корректность задачи по Адамару - 1904

Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F: $A : Q \to F$.

Определение.

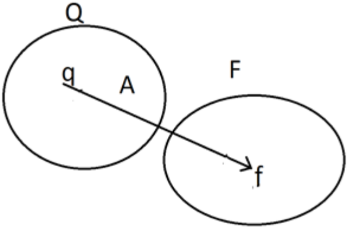
Задача Aq=F корректна на паре топологических пространств Q и F, если:

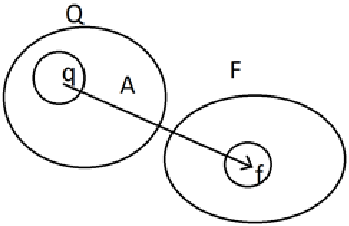
1) условие существования решения для любого f из F: $R(A) = F$

2) условие единственности решения. Решение q единственно в Q: $A^{-1} : F \to Q$

3) условие устойчивости решения. Оператор обратного преобразования непрерывен: $A^{-1} : F_\delta \to Q_\delta$

Корректность задачи по Адамару - 1904

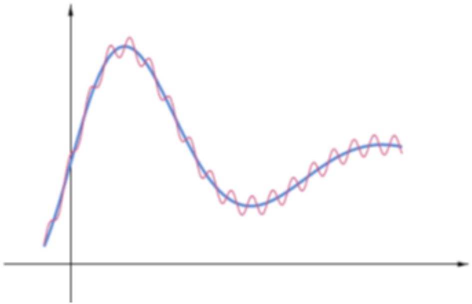




Некорректные задачи

Некорректно поставленная задача - это задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.
Пример - Задача дифференцирования.

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin(nx) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$
$$F'(x) = f'(x) + cos(nx) \underset{n\to\infty}{\not\to} f'(x)$$



Пары корректных и некорректных задач [3]

Корректные задачи	Некорректные задачи
Арифметика	
Умножение на малое число	Деление на малое число
$Aq = f$	$A^{-1}f = q \quad (A \ll 1)$
Алгебра	
Умножение на матрицу	Решение системы
$Aq = f$	$Aq = f$
	A — плохобусловлена, вырождена, прямоугольная
Анализ	
Интегрирование	Дифференцирование
$f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)d\xi$	$q(x) = f'(x)$

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи	Некорректные задачи
Дифференциальные уравнения	
Задача Штурма-Лиувилля	Обратная задача Штурма-Лиувилля
$u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x)$ u(0) - hu'(0)= 0 u(1) - Hu'(1)= 0	$\{\ \lambda_n, \lVert u_n \rVert^2\ \} \to q$ Определение $q(x)$ по спектральным данным
Интегральная геометрия	
Определение интеграла от функции $q(x, y)$ вдоль кривой $\Gamma(x, y)$	Определение $q(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{\Gamma(x,y)} q(x, y) ds = f(\xi, \eta)$

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи	Некорректные задачи
Дифференциальные уравнения	
Ур-я Вольтерра и Фредгольма второго рода	Ур-я Вольтерра и Фредгольма первого рода
$q(x) + \int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$	$\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$
$q(x) + \int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$	$\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$

1943 – А.Н.Тихонов ДАН [5]

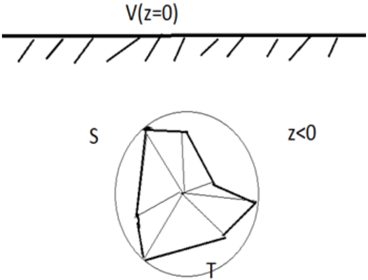
Теорема. Пусть некоторая совокупность элементов $\{\}$, образующая метрическое пространство $\mathbb{R}$, непрерывно отображается на некоторую другую совокупность элементов $\{^\star\}$, образующую метрическое пространство $\mathbb{R}^\star$.
Если это отображение $x^\star = f(x)$ взаимно однозначно, непрерывно, и если отображаемое пространство $\mathbb{R}$ компактно, то обратное отображение $x = f^{-1}(x^\star)$ также непрерывно.

Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

Потенциал

$$V = \int_T \frac{dm}{s}, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Одна из прямых задач теории потенциала заключается в том, что требуется вычислить на поверхности $z = 0$ потенциал ограниченного тела , заполненного однородной массой плотности m, лежащего ниже этой поверхности $(z < 0)$.



Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

1. Каждое тело принадлежит заданной ограниченной поверхности S, лежащей в области $z < 0$.
2. Каждое тело звездно относительно своего центра тяжести , так что уравнение поверхности Γ , ограничивающей тело T, может быть представлено в сферической системе координат с центром в точке в виде $z = f(s, q)$.
3. Функция $f(s, q)$ имеет производные ограниченные числом , общим для всех тел класса R.

Возможность корректного решения обратных задач теории потенциала

Теорема. П.С.Новикова: различным телам T_1 и T_2, звездным относительно их центра тяжести, не могут соответствовать одинаковые потенциалы.
Теорема. Какова бы ни была степень точности ε и класс тел R, можно указать такое число $d(\varepsilon)$, что если значение потенциалов (или их производных) $V_1(x, y)$ и $V_2(x,)$ двух каких-либо тел T_1 и T_2 из класса R отличаются при $z = 0$ меньше, чем на $d(\varepsilon)$

$$\|V_1(x, y) - V_2(x,)\| \leq d(\varepsilon),$$

то сами тела отстоят друг от друга меньше, чем на ε

$$\rho(T_1, T_2) \leq \varepsilon.$$

Метод подбора

Метод подбора — решение набора прямых задач и выбирается вариант, наиболее подходящий по какому-то критерию.

- Необходимо установить теорему единственности прямого соответствия.
- Совпадение вычисленного и наблюденного полей не является абсолютным (хотя бы в силу приближенности подбора). Таким образом, мы должны еще убедиться в устойчивости обратной задачи (или непрерывности обратного отображения), т. е. в том, что при малом отклонении вспомогательного поля от наблюденного соответствующее ему строение среды не может сильно отличаться от действительного.

Регуляризация – метод Лаврентьева. 1959

Метод Лаврентьева. 1959 [6].
Пусть

$$Ax = b$$

— операторное уравнение.
Небольшое возмущение оператора $A + \alpha I$ отодвигает спектр собственных значений от нуля, при этом несущественно влияет на решение.

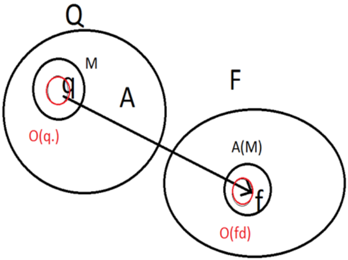
$$(A + \alpha I)x = b$$

$$\mathtt{cond}(A + \alpha I) = \frac{\lambda_{max} + \alpha}{\lambda_{min} + \alpha} < \mathtt{cond}(A)$$

Определение (условная корректность, корректность по Тихонову).
Задача называется условно-корректной на множестве M, если

- Решение единственно на множестве M
- Имеет место условная устойчивость

Множество M называется множеством корректности задачи.



Регуляризация

Определение Регуляризующий алгоритм для задачи (два параметра)

$$\sup_{\|f-f_\delta\|\leq\delta, \|A-A_h\|\leq h} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1} f\| \rightarrow 0$$

$f_\delta \in F$ и $A_h \in A$.
Определение Регуляризирующее семейство

$$\lim_{\alpha\rightarrow 0} R_\alpha f = q_T$$

- Оператор R непрерывен по параметру
- Оператор R сходится

Минимизация функционала Тихонова

Используется:
- Пробное решение q_0
- Стабилизирующий функционал Ω

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f\|^2 + \alpha\Omega(q - q_0)$$

$\boxed{\text{Уход от реального решения}}$

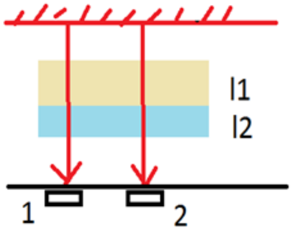
Линейные обратные задачи

- Роль СЛАУ в прикладной математике. Линеаризация задач
- Типы прямоугольных СЛАУ, недоопределенные и переопределенные системы. Фреймы. Базисы Рисса. Связь с обусловленностью. Переход разных типов друг в друга.
- Обусловленность СЛАУ. Алгебраическая проблема собственных чисел. Кратные собственные числа.
- Особые виды матриц СЛАУ. Положительно определенные симметричные матрицы, теория Фробениуса. Матрицы вращения. Связь с задачей пеленга.
- Методы решения плохообусловленных линейных задач: l_1, МНК, Лаврентьев, Годунов, сингулярное разложение

Обратные задачи интегральной геометрии

- Предмет интегральной оптики
- Задача Радона. Задача Абеля
- Примеры на задачу Абеля

Объект в параллельных лучах



Пусть имеется объем, состоящий из двух полупрозрачных частей с параллельными границами, за которым расположен равномерный источник света.
За объемом расположены 2 чувствительных элемента.
Вопрос состоит в том, можно из интенсивности света, попадающих в детекторы, понять толщину отдельных частей?

Объект в параллельных лучах

Ослабление света в среде при $\alpha l << 1$:

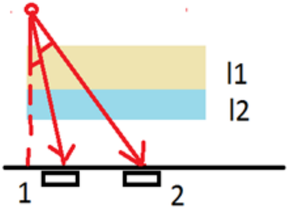
$$I = I_0 e^{-\alpha l} \simeq I_0(1 - \alpha l)$$

Пусть $I_0 = 1$, d_1, d_2 - сигналы на детекторах

$$\begin{cases} 1 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = d_1 \\ 1 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = d_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = 1 - d_1 \\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad det(A) = 0$$

Система вырождена, решение не определено



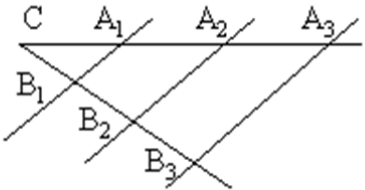
$$\begin{cases} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)}\alpha_1 + \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)}\alpha_2 = 1 - d_1 \\ \frac{l_1}{\cos(\varphi_2)}\alpha_1 + \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)}\alpha_2 = 1 - d_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)}\alpha_1 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)}\alpha_2 \\ \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)}\alpha_1 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)}\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_1}{\cos(\varphi_1)} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{\cos(\varphi_2)} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

Прохождение света – веерная геометрия

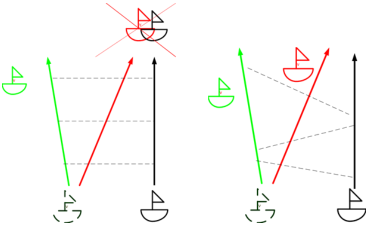
Для объема с параллельными границами областей и веерным расположением хорд наблюдения задача всегда не имеет решения. Этот математический факт – следствие теоремы Фалеса: параллельные прямые отсекают пропорциональные отрезки на лучах. Если прямые параллельны, длины отрезков, отсекаемые ими на сторонах угла, пропорциональны.



Определение курса чужого корабля по пеленгам – задача о столкновении

А.Н.Крылов. Собрание сочинений. т. VI «Астрономия» [4]

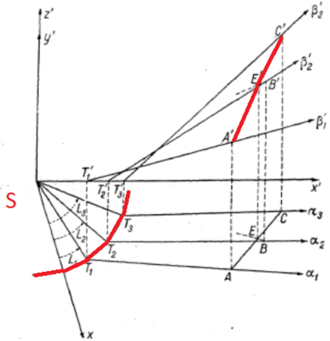
определить курс, ход и расстояние до чужого корабля, взяв четыре пеленга его, заметив соответствующие моменты и зная путь своего корабля. Ход чужого корабля предполагается равномерным, курс его — прямолинейным.



При равномерном движении наблюдателя задача не имеет решения

Определение траектории кометы

А.Н.Крылов. Собрание сочинений. т. VI «Астрономия»
S — Солнце, T — траектория движения Земли (эллипс)
ABC - траектория движения кометы (парабола)

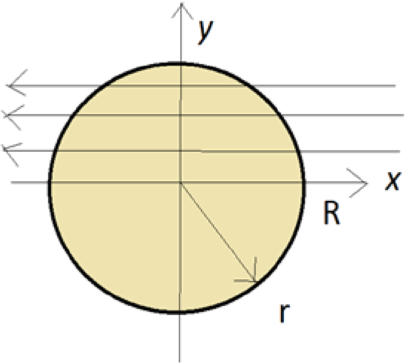


Фиг. 11.

Криволинейность траекторий снимает вырождение (Фалеса)

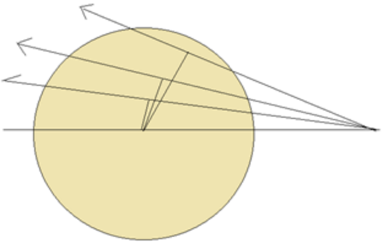
Задача Абеля

Наблюдение в параллельных лучах
Начало XIX века. Абель рассмотрел интегральное преобразование функции вдоль прямой и поставил вопрос о возможности восстановления радиальной зависимости по наблюдениям вдоль прямых.



Задача Абеля

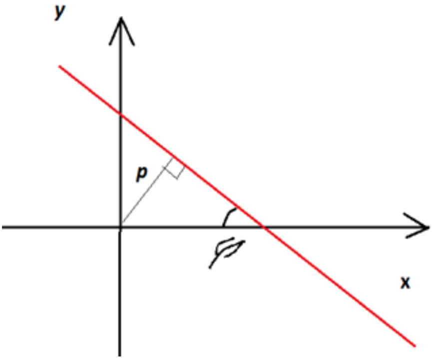
Веерная геометрия. Лучи не параллельны.



Если область симметрична, задача сводится к предыдущей, поскольку каждая хорда наблюдения находится на определенном расстоянии от центра.

Задача Радона

В 1917 Радон ввел преобразование вдоль прямых, пересекающих замкнутую область. Его работа послужила основой для развития компьютерной томографии Преобразованием Радона функции двух переменных называется интеграл от функции по прямой L



Задача Радона

Уравнение прямой

$$x = p\cos\varphi - t\sin\varphi, \quad y = p\sin\varphi + t\cos\varphi$$

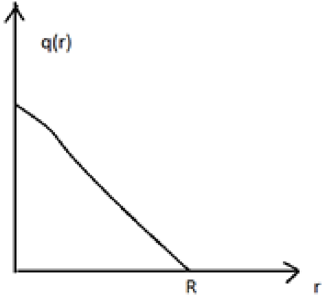
Преобразование Радона

$$f(p,\varphi) = \int_{L(p,\varphi)} q(x,y)dl$$

$$f(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)dt$$

Задача Радона

Задача обращения преобразования Радона для радиально-симметричной функции, ограниченной радиусом R.



$$q(x, y) \to q_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = q_0(r)$$

Задача Радона

Подставляем $q(x,y) = q_0(r)$ в формулу для преобразования Радона

$$f(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)dt$$

$$f(p,\varphi) = f(p) = 2\int_0^{\sqrt{R^2-p^2}} q_0(\sqrt{p^2+t^2})dt, |p| < R$$

$$\text{введем } \theta = \sqrt{p^2+t^2}$$

Формально можно представить исходную функцию q как производную интеграла по всем хордам наблюдения.

$$q_0(s) = -\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^R p\sqrt{p^2-s^2}f(p)dp$$

Задача Радона

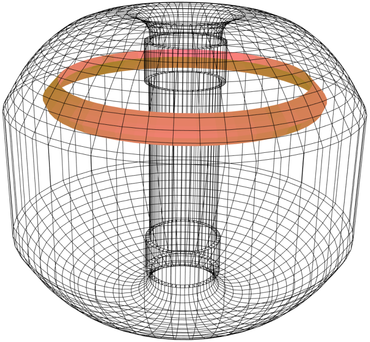
Формально можно представить исходную функцию q как производную интеграла по всем хордам наблюдения.

$$q_0(s) = -\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^R p\sqrt{p^2 - s^2}f(p)dp$$

Нереалистичный подход.
Численное дифференцирование даёт крайне неустойчивые результаты.

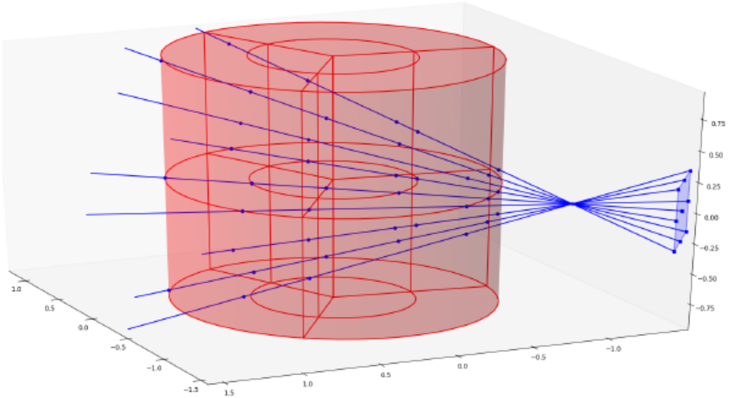
Светимость плазмы 2d - токамак «Глобус-М»

Пространственная модель вакуумной камеры токамака «Глобус-М» и криволинейный элемент Ω_k разбиения объёма плазмы.
П.Затылкин, 2018.



Светимость плазмы 3d - токамак «Глобус-М»

Пространственная модель вакуумной камеры токамака «Глобус-М» и криволинейный элемент Ω_k разбиения объёма плазмы.
Н. Суханов, 2020.



ПЛАНЫ

- Интервальный анализ как база решения задач с неопределенностью в данных и моделях
- Инструменты интервального анализа
- Практика

Интервальный анализ - курс молодого бойца

Идейная часть

- классическая и полная интервальная арифметика
- постановки задач
- множества решений

Инструменты интервального анализа

- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плоообусловленных задач
- Решение несовместных задач
- Решение нелинейных систем и глобальная оптимизация
- Задачи оптики, механики, etc

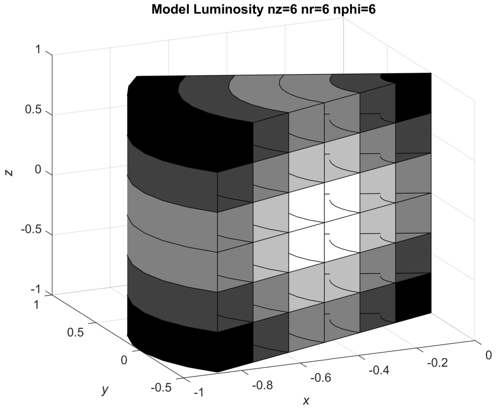
Практические задания

«Учение без размышления вредно, размышление без учения опасно.»

- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плоообусловленных задач
- Решение несовместных задач

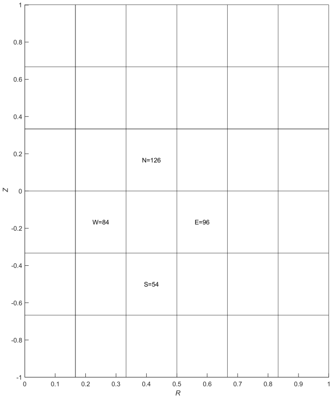
ПРИМЕР

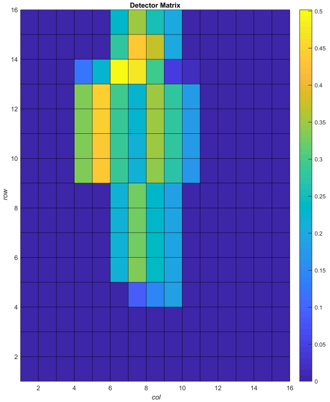
Задача малоракурсной томографии. Разбиение пространства в цилиндрической геометрии $6 \times 6 \times 6$. Представим одну шестую объёма — ломтик 6×6.



ПРИМЕР

Рассмотрим свечение кольца малого радиуса (сегменты 54, 84, 126, 96) — полоидальное вращение и его образ на матричном детекторе 16×16.





ПРИМЕР

Имеем задачу с матрицей 256×4. Если отбросить строчки матрицы, в которых нет наших переменных, останется матрица 66×4.
При попытке решить ее приведением матрицы к квадратной $(A^\top A)$,

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ A^\top A \cdot x &= A^\top b \\ (A^\top A) \cdot x &= A^\top b \end{aligned}$$

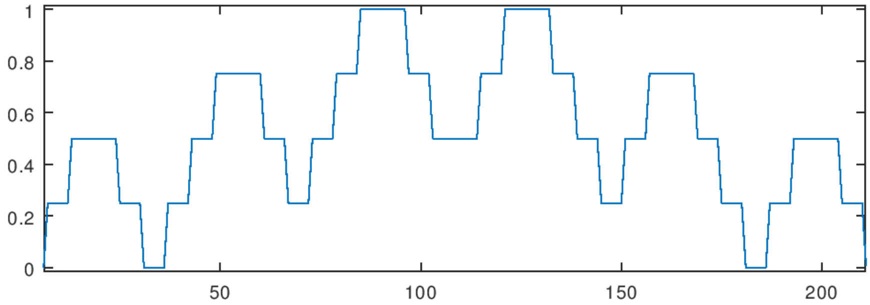
Результат получается неудовлетворительный.

Тем не менее, с использованием аппарата линейного программирования, задача решается точно:

$$(\ldots, x_{54}, \ldots, x_{84}, \ldots, x_{96}, \ldots, x_{126} \ldots) = (\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 1 \ldots)$$

ПРИМЕР

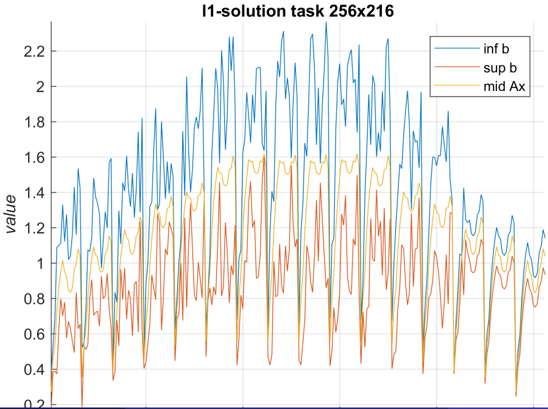
Рассмотрим более общий случай — свечение «ломтика» 6×6, с предыдущих слайдов, повернутого 6 раз покруг оси Oz.



Имеем задачу с матрицей 256×126.
В правую часть внесем случайные погрешности

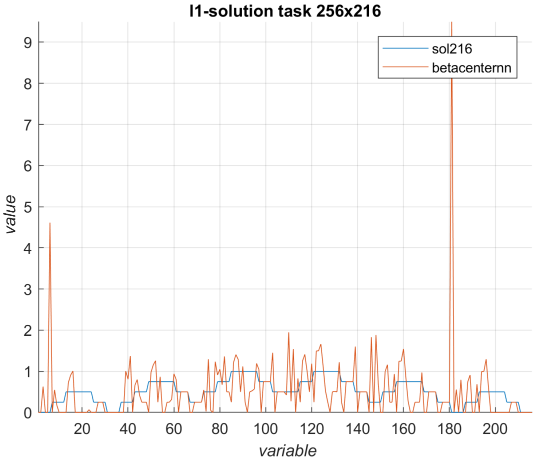
ПРИМЕР

МНК здесь неприменима вообще — матрица вырождена.
Снова попробуем решить задачу линейного программирования с условием неотрицательности решений.
С точки зрения удовлетворения уравнений всё замечательно. Для каждого уравнения $\underline{b} < Ax < \overline{b}$



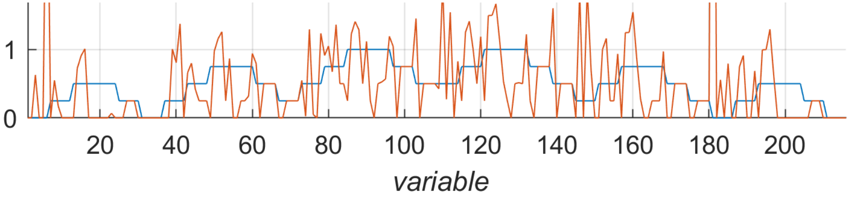
ПРИМЕР

Однако само решение неудовлетворительно (по оси абсцисс — номера переменных $1 \dots 216$).



ПРИМЕР

Не будем обращать внимание на 2 выброса



Имеется некоторая часть переменных, восстановленных точно. Из остальных переменных часть приравнена к 0 — это работа условной оптимизации, иначе были бы отрицательные решения.
Часть переменных существенно, в несколько раз, больше модельных значений.

Тематика курса

Возвращаемся к 1-му слайду:

Решение обратных задач
с неточными и несовместными
данными и моделями

Тематика курса

При наличии 256 уравнений была сделана попытка найти 216 неизвестных. Возможно ли это? В какой постановке?

Имеем несколько вопросов:

- Как учесть неточность данных?
- Как работать с несовместными данными?
- Достаточно ли в уравнениях информации? = Насколько ортогональны строки матрицы?
- Каков «эффективный» ранг матрицы? = В каком количестве собственных векторов содержится, например, 90% вариации (энергии) сигнала?

Тематика курса

Анализ данных с интервальной неопределённостью

ПЛАН

Общий план

- Общие понятия
- Обработка константы (физической величины)
- Задача восстановления зависимостей
- Выбросы и их выявление

Теория:
А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. РХД. Серия «Интервальный анализ и его приложения». Ижевск. 2022. с.200.

Обработка константы

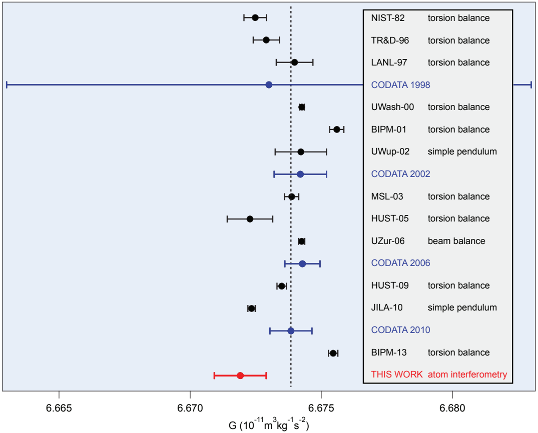


Рис.: Результаты измерений гравитационной константы.

Задача восстановления зависимостей

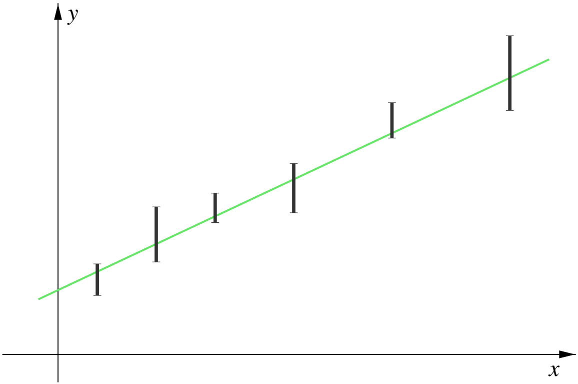


Рис.: Частный случай задачи восстановления линейной

зависимости по неточным данным, когда входные переменные измеряются точно.

Задача восстановления зависимостей

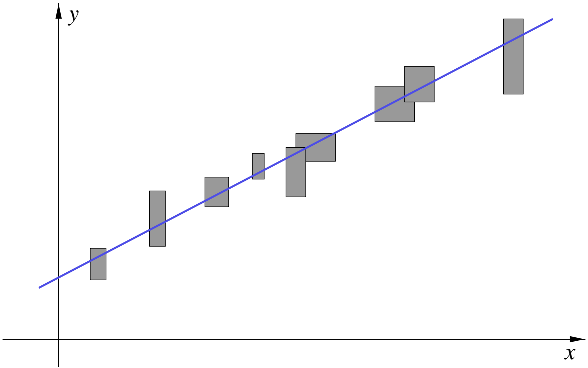


Рис.: Наглядная иллюстрация задачи восстановления линейной зависимости по данным с интервальной неопределённостью.

Диаграмма рассеяния данных для вращения шагового двигателя «вперёд-назад».

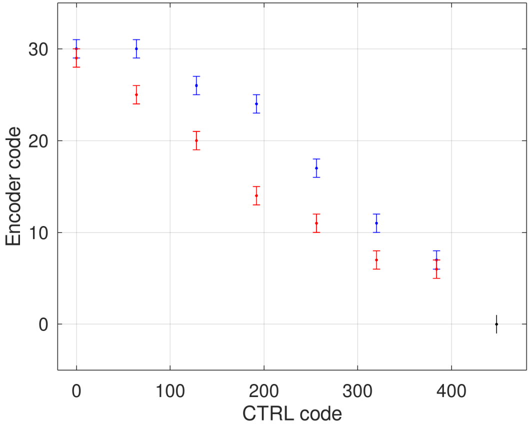


Рис.: Диаграмма рассеяния движения «вперёд-назад».

Следующая лекция

Интервальный анализ.
Классическая интервальная арифметика.

Литература

- Билев, Ф.А. Исследование применения интервального подхода к задаче калибровки шкалы измерителя с нерегулярными отсчетами: бакалаврская работа: Санкт-Петербург, 2017. — стр.31. elib.spbstu.ru/dl/2/v17-6574.pdf/download/v17-6574.pdf
- Баженов А.Н., Затылкин П.А. Измерительная техника. 2019
- Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009 — 457 стр.
- «Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 6. Астрономия»
- Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. // Доклады АН СССР. - 1943. – Т.39., №5.- с.195-198.
- Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // Доклады АН СССР. - 1959. – Т.127., №1.- с.31-33.