Тема 7. Линейная задача о допусках.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

24.02.2022

ПЛАН

- Распознающий функционал
- Коррекция ИСЛАУ - изменение правой части
- Коррекция ИСЛАУ - изменение матрицы
- Программная реализация
- Размер бруса решения
- Интервальная регуляризация

Распознающий функционал.

Полное исследование разрешимости можно произвести, используя распознающий функционал.

Его выражение имеет вид:

$$\mathrm{Tol}\,(x) = \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\; \boldsymbol{b}_i - \left| \;\mathrm{mid}\; \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ равносильна $\mathrm{Tol}\,(x; A, b) \geq 0$,

Распознающий функционал.

т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathrm{Tol}\,(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol.

Обсудим факт, выражаемый формулой для $\mathrm{Tol}\,(x)$.

$$x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} \cdot x \subseteq \boldsymbol{b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \subseteq \boldsymbol{b}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \subseteq [\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) - \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i), \mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) + \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i)]$$

Распознающий функционал.

$\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i), \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i)$ — вещественные числа, их можно добавлять и вычитать

$$\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \subseteq [-\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i), \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i)]$$

$$\left|\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i)$$

$$\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i) - \left|\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq 0$$

Распознающий функционал.

$$\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{b}_i) - \left|\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq 0$$

Последняя строка выражает покомпонентную «вместимость» левой части ИСЛАУ в правой части (абсолютную величины невязки).

Если такое условие выполнено для всех компонент вектора $\boldsymbol{b}$, система разрешима.

Отметим, что функционал $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непрерывен по всем своим аргументам, что следует из непрерывности интервальных арифметических операций и непрерывности модуля (магнитуды) интервала.

Кроме того, функционал $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ непрерывен и в более сильном смысле, по Липшицу, так как задающее его выражение составлено только из липшицевых функций.

Распознающий функционал.

Мы будем называть функционал $\operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *распознающим*, поскольку знак его значений позволяет «распознать» точки из $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$).

Аргументы этого функционала не вполне равноправны: с одной стороны, это исследуемая точка $x \in \mathbb{R}^n$, а с другой — данные задачи, т. е. матрица $\boldsymbol{A}$ и вектор правой части $\boldsymbol{b}$.

Когда вторичные аргументы распознающего функционала $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ несущественны, мы будем опускать их, говоря просто о функционале $\operatorname{Tol}(x)$.

Вогнутость распознающего функционала

Предложение. Функционал $\mathrm{Tol}\,(x)$ вогнутый.
Доказательство. Функционал $\mathrm{Tol}\,(x)$ есть нижняя огибающая функционалов

$$\varsigma_i(x) = \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right|$$

достаточно лишь установить вогнутость каждого из $\varsigma_i(x)$.
Пусть $x, y \in \mathbb{R}\lambda \in [0, 1]$. Субдистрибутивность классической интервальной арифметики влечет тогда

$$\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}(\lambda x_j + (1-\lambda) y_j) \subseteq$$

$$\lambda \left(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} y_j \right)$$

Вогнутость распознающего функционала

Абсолютная величина интервала — функция $|\cdot|$ — монотонно зависит от интервала. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\left|\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}(\lambda x_j + (1-\lambda)y_j)\right| \\
&\leq \left|\lambda\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}x_j\right) + (1-\lambda)\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}y_j\right)\right| \\
&\leq \left|\lambda\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}x_j\right)\right| + \left|(1-\lambda)\left(\operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}y_j\right)\right|
\end{aligned}
$$

По этой причине

$$
\varsigma_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\varsigma_i(x) + (1-\lambda)\varsigma_i(y), \quad i = 1, 2, \ldots, m.
$$

Вогнутость распознающего функционала

Итак, подграфик

$$\operatorname{hyp}\ \mathrm{Tol} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, t \leq \mathrm{Tol}\,(x)\}$$

отображения $\mathrm{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является выпуклым множеством.
Определение. Функция, надграфик которой является выпуклым полиэдром, называется выпуклой полиэдральной.
Функция, подграфик которой является выпуклым полиэдром, называется вогнутой полиэдральной.
Предложение. Распознающий функционал $\mathrm{Tol}\,(x)$ — вогнутая полиэдральная функция.

Доказательство. Нужно показать, что $\operatorname{hyp}\,\mathrm{Tol}$ есть пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$.
Выражая абсолютное значение через максимум, мы получим для каждого $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \\
= \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \right| \\
= \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \max \left\{ \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j, \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Вогнутость распознающего функционала

$$= \min_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \min \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j, \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i + \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right\},$$

где n-вектор $(\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \ldots, \hat{a}_{in})$ пробегает по конечному множеству

$$\mathtt{vert}\,(\hat{\boldsymbol{a}}_{i1}, \hat{\boldsymbol{a}}_{i2}, \ldots, \hat{\boldsymbol{a}}_{in})$$

т. е. по всем вершинам i-ой строки интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$. По этой причине функционал Tol является нижней огибающей не более чем $m \cdot 2^{n+1}$ линейных функций вида

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \pm \left(\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$ а множество $\mathtt{hyp}\ \mathrm{Tol}$ есть пересечение подграфиков этих функций

Свойства распознающего функционала

Предложение. Функционал $\mathrm{Tol}\,(x)$ достигает конечного максимума на всём пространстве $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Подграфик функционала $\mathtt{hyp}\ \mathrm{Tol}$, будучи выпуклым полиэдральным множеством, является выпуклой оболочкой конечного числа точек $(c_k, \gamma_k), k = 1, 2, \ldots, p$, и направлений $(c_k, \gamma_k), k = p+1, \ldots, q$, в $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\text{hyp Tol} = \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \, (c_k, \gamma_k) \,|\, c_k \in \mathbb{R}^n, \gamma_k, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \right\}$$

Поскольку

$$\mathrm{Tol}\,(x) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i,$$

то все $\gamma_k \leq 0, k = p+1, \ldots, q$, так как в противном случае функционал Tol был бы неограничен сверху.

Свойства распознающего функционала

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x) = \max\{t \in \mathbb{R} | (\exists x \in \mathbb{R}^n)((x,t) \in \text{ hyp Tol })\}$$

$$= \max\left\{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \gamma_k | \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\right\}$$

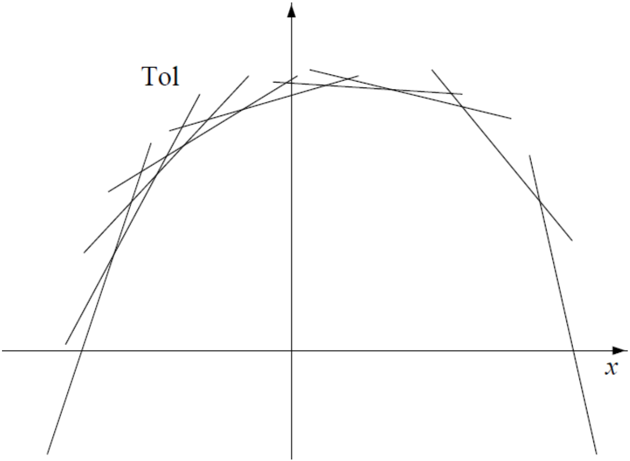
$$= \max\left\{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \gamma_k | \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\right\}$$

$$= \max_{1\leq k\leq p} \gamma_k$$

Таким образом, $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\,(x)$ совпадает с максимумом по некоторому конечному множеству значений функционала по всем γ_k, и достигается на значении аргумента, соответствущем максимальному из этих $\gamma_k, k = p+1, \dots, p$.

Свойства распознающего функционала

Распознающий функционал Tol может быть представлен как нижняя огибающая семейства линейных функций.



Пример

Рассмотрим ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-1,2] \\ [1,2] & [1,3] \\ [-1,1] & [0,1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,60] \\ [10,72] \\ [-10,36] \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 31 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 41 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Tol по определению

Выпишем по определению

$$\operatorname{Tol}(x) = \min_{1\le i\le m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \textstyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

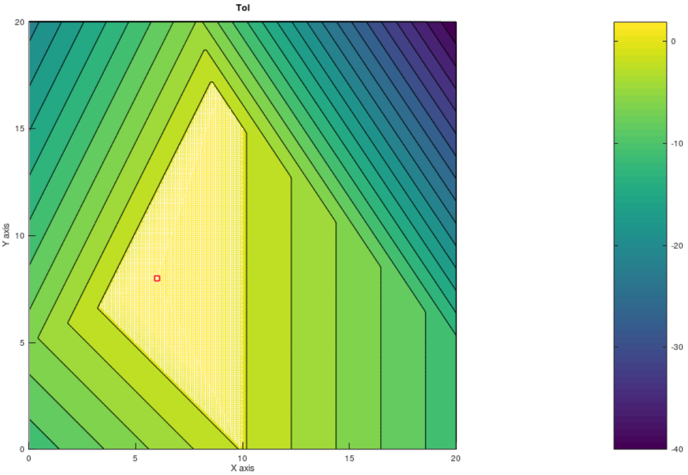
$$\begin{aligned} = \mathtt{min}\{ \quad & 30 - |\ 30 - [2,3]\cdot x - [-1,2]\cdot y\ |, \\ & 31 - |\ 41 - [1,2]\cdot x - [1,3]\cdot y\ |, \\ & 23 - |\ 13 - [-1,1]\cdot x - [0,1]\cdot y\ |,\ \}. \end{aligned}$$

Код Octave

Код Octave pkg load interval xb=0; xe=20; yb=0; ye=20;

```
Nx=200; Ny=200;
xs=(xe-xb)/Nx; ys=(ye-yb)/Ny;
[X,Y] = meshgrid(xb:xs:xe, yb:ys:ye);
TT = min( rad(b1) - mag(mid(b1) - a11*X - a12*Y), ...
rad(b2) - mag(mid(b2) - a21*X - a22*Y), ...
rad(b3) - mag(mid(b3) - a31*X - a32*Y) );
```

Tol 2d



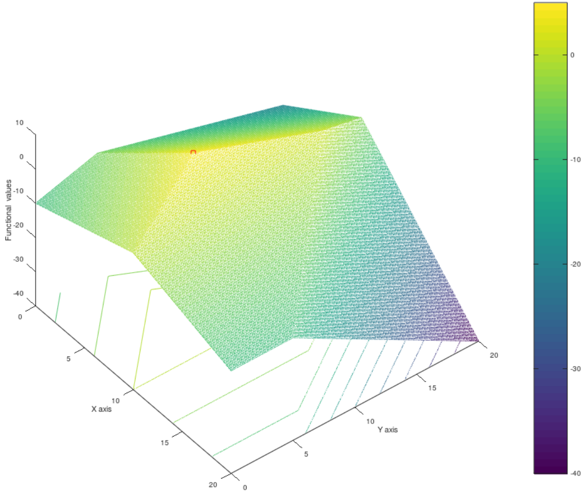
Экстремум Tol

Экстремум находится в точке $(x, y) = (6, 8)^T$ и равен

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tol}\,(6,8) = \mathtt{min}\{ \quad & 30 - \mid 30 - [2,3]\cdot 6 - [-1,2]\cdot 8 \mid, \\
& 31 - \mid 41 - [1,2]\cdot 6 - [1,3]\cdot 8 \mid, \\
& 23 - \mid 13 - [-1,1]\cdot 6 - [0,1]\cdot 8 \mid, \ \} \\
= \mathtt{min}\{ \quad & 30 - \mid 30 - [12,18] - [-8,16] \mid, \\
& 31 - \mid 41 - [6,12] - [8,24] \mid, \\
& 23 - \mid 13 - [-6,6] - [0,8] \mid, \ \} \\
= \mathtt{min}\{ \quad & 30 - 18,\ 31 - 17,\ 23 - 19 \ \} = 4.
\end{aligned}$$

На графике хорошо видна многогранность функционала.

График Tol 3d



«Средняя» система

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 1.5 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 41 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Умножим слева на сопряженную к средней матрицу $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}^\top$.
«Средняя» квадратная система

$$\begin{pmatrix} 8.5 & 4.25 \\ 4.25 & 4.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136.5 \\ 103 \end{pmatrix}$$

«Среднее» решение далеко от экстремума Tol

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.64 \\ 14.8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Свойства распознающего функционала

Предложение. Пусть для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, m$ в i-ой строке интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ существует хотя бы один ненулевой элемент или же не равен нулю ни один из концов соответствующей компоненты правой части $\boldsymbol{b}_i$.
Тогда принадлежность $y \in \texttt{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ влечёт $\mathrm{Tol}\,(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$.

Определение. $\texttt{int}\ X$ — топологическая внутренность множества X.

Предложение. Если $\mathrm{Tol}\,(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то $y \in \texttt{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$.

Исследование разрешимости линейной задачи о допусках

Подытоживая сделанное, мы приходим к следующей методике исследования разрешимости линейной задачи о допусках, т. е. к критерию пустоты/непустоты допускового множества решений интервальных линейных систем:
Решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала

$$\mathrm{Tol}\,(x) = \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \mathrm{rad}\;\boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\;\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, т. е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений;
- если $T > 0$, то $\tau \in \mathtt{int}\ \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных — матрицы и правой части системы;
- если $T < 0$, то $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$, т. е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ несовместна.

Исследование разрешимости линейной задачи о допусках

Рассмотренные теоремы и предложения, а также описанная выше методика исследования разрешимости линейной задачи о допусках останутся справедливыми, если определить распознающий функционал Tol более общим выражением, как

$$\mathrm{Tol}\,(x) = \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ s_i \left(\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \ \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

где $s_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ — некоторые положительные числа.

Распознающие функционалы подобного вида плодотворно применяются в различных ситуациях.

Максимизация негладких вогнутых функционалов

В настоящее время максимизация негладких вогнутых функционалов является хорошо разработанным вопросом вычислительной оптимизации. За последние десятилетия прошедшего века было предложено немало эффективных численных методов решения этой задачи. Это даёт основание полагать, что развитый критерий разрешимости линейной задачи о допусках действительно вполне практичен.

Существуют методы, находящие точное значение максимума вогнутых функционалов с полиэдральными графиками, склеенными из кусков гиперплоскостей. Если же размерность задачи о допусках невелика, то для максимизации распознающего функционала можно использовать методы прямого поиска.

Пример пирамидальный — ИСЛАУ

Рассмотрим ИСЛАУ КИА-2021

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] & [1,2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Вычислим Tol, здесь середины правых частей $\mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tol} &= \mathtt{min} \left\{ 1 - \left| \ [1,2] \cdot x + [-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}] \cdot y \right|, 1 - \left| [-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}] \cdot x + [1,2] \cdot y \right|, \right\} \\ &= 1 - \min \left\{ - \left| [1,2] \cdot x + [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cdot y \right|, - \left| [-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}] \cdot x + [1,2] \cdot y \right|, \right\} \\ &= 1 - \mathtt{max} \left\{ \left| [1,2] \cdot x + [-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}] \cdot y \right|, \left| [-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}] \cdot x + [1,2] \cdot y \right| \right\} \end{aligned}$$

Пример пирамидальный — экстремум

Здесь модули выражений под знаками экстремумов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда $x = y = 0$.

При всех остальных x и y выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньшим его значения в нуле. Таким образом

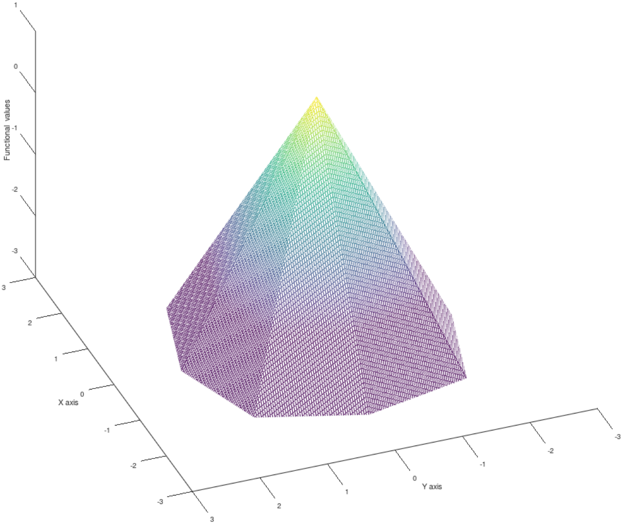
$$\max_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{Tol}\,(x) = 1$$

и достигается при

$$(x, y) = (0, 0)$$

.

Пример пирамидальный — график Tol



Пример

Для интервальной линейной системы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1,2] \\ [1,2] & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [5,7] \\ [8,9] \end{pmatrix}$$

максимум распознающего функционала, который достигается в точке

$$\texttt{argmax} = (1,2)^T,$$

равен нулю

$$\max \mathrm{Tol} \ = 0$$

.

Пример

При численном нахождении максимума распознающего функционала любым приближённым оптимизационным методом мы этот нуль не достигнем, а будем лишь приближаться к нему снизу.

Это может создать впечатление о том, что рассматриваемая линейная задача о допусках неразрешима, хотя на самом деле допусковое множество решений состоит из точки

$$\Xi = (1, 2)^\top$$

.

Пример

По поводу последнего примера необходимо сказать следующее.

Во-первых, малая абсолютная величина максимума распознающего функционала свидетельствует о том, что рассматриваемая задача о допусках находится вблизи границы разрешимости и требуется более тщательное вычисление

$$\max_{\mathbb{R}^n} Tol(x)$$

.

Во-вторых, подобные задачи являются, в некотором роде, исключительными. Разрешимость такой задачи может быть разрушена при сколь угодно малом шевелении входных данных.

В заключение параграфа полезно сравнить обсуждаемый подход к исследованию разрешимости задачи о допусках с тем, который был предложен ранее И. Роном как решение системы линейных неравенств.

Нередко решение системы линейных неравенств оказывается привычнее или удобнее, чем максимизация негладкого распознающего функционала, но в результате решения мы можем получить

точку, которая лежит на границе допускового множества решений

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).$$

Решение системы линейных неравенств

Это неприемлемо для нас по двум причинам:

во-первых, такая точка может покидать множество решений при сколь угодно малых шевелениях данных задачи и,

во-вторых, не годится в качестве центра телесного бруса внутренней оценки допускового множества решений.

Кроме того, метод «распознающего функционала» может быть развит и дальше, при этом он становится пригодным для оценивания степени разрешимости или неразрешимости задачи о допусках и корректировать её данные в нужном нам смысле. По сути, числовое значение максимума распознающего функционала является важной характеристикой линейной задачи о допусках, позволяя решать многие тонкие вопросы. Таких возможностей подход решение системы линейных неравенств не даёт.

Максимизация распознающего функционала — r-алгоритм

Для максимизации распознающего функционала используется вариант алгоритма субградиентного подъёма с растяжением пространства в направлении разности последовательных субградиентов (иначе такие методы называются r-алгоритмами, от слова «разность») [1].

Максимизация распознающего функционала

- Первая идея состоит в использовании процедуры наискорейшего спуска в направлении антисубградиента выпуклой функции в преобразованном пространстве переменных. Она гарантирует монотонность по значениям выпуклой функции для точек минимизирующей последовательности, которая конструируется r-алгоритмами.

  Если поиск минимума функции в направлении антисубградиента осуществляется приближенно, то тогда «монотонность» по минимизируемой функции заменяется на «почти монотонность».

Максимизация распознающего функционала

- Вторая идея состоит в использовании операции растяжения пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов, где второй субградиент вычислен в точке минимума функции по направлению первого субградиента.

  В результате этого растяжения уменьшаются поперечные составляющие субградиентов вдоль направления на точку минимума, что обеспечивает более быструю сходимость субградиентного процесса с растяжением пространства. Вторая идея позволяет улучшить свойства функции в преобразованном пространстве переменных.

Максимизация распознающего функционала

Комбинации этих двух идей, которые определяются регулировкой шага наискорейшего спуска (точного или приближенного) и соответствующим выбором коэффициента растяжения пространства, обеспечивают ускоренную сходимость конкретных вариантов r-алгоритмов и гарантируют их монотонность (или почти монотонность) по значению минимизируемой функции.
r–алгоритм минимизации функции $f(x)$ — это итеративная процедура нахождения последовательности n–мерных векторов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательности $n \times n$-матриц $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T * g_f(x_k)}{\|B_k^T * g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = argmin_{h \geq 0} f(x_k - hB_k\xi_k),$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T * r_k}{\|B_k^T * r_k\|}\ , \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1.$$

Здесь x_0 – стартовая точка, $B_0 = I_n$ – единичная матрица размера $n \times n$, h_k^* - величина шага, выбираемая из условия минимума функции $f(x)$ в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных, $R_\beta(\eta) = I_n + (\beta - 1) \cdot \eta\eta^T$ – оператор сжатия пространства субградиентов в нормированном направлении η с коэффициентом $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$, $g_f(x_k)$ и $g_f(x_{k+1})$ – субградиенты функции $f(x)$ в точках x_k и x_{k+1}. Если $g_f(x_k) = 0$, то $x_k = x^*$ и процесс останавливается.

Максимизация распознающего функционала

$$B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T * g_f(x_k)}{\|B_k^T * g_f(x_k)\|}, \qquad h_k \geq h_k^* = argmin_{h \geq 0} f(x_k - hB_k\xi_k),$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T * r_k}{\|B_k^T * r_k\|}\ , \qquad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \qquad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1.$$

Здесь x_0 – стартовая точка,
$B_0 = I_n$ – единичная матрица размера $n \times n$,
h_k^* - величина шага, выбираемая из условия минимума функции $f(x)$ в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных.

$$R_\beta(\eta) = I_n + (\beta - 1) \cdot \eta\eta^T$$

— оператор сжатия пространства субградиентов в нормированном направлении η с коэффициентом $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$,
$g_f(x_k)$ и $g_f(x_{k+1})$ – субградиенты функции $f(x)$ в точках x_k и x_{k+1}.
Если $g_f(x_k) = 0$, то $x_k = x^*$ и процесс останавливается.

Распознающий функционал — программная реализация.

Разрешимость исследуем с помощью функции `tolsolvty`, доступной с сайта http://www.nsc.ru/interval/.
Код разработан С.П.Шарым (НГУ) на основе кода для *r*-алгоритма на языке FORTRAN П.И.Стецюка (Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины).

Эффективные программные реализации на платформах:
`scilab -- matlab -- octave -- python`
М.Смольский — Исследование применимости *r*-алгоритмов для максимизации распознающего функционала $\mathrm{Tol}\,(x)$. 2020.
https://elib.spbstu.ru/dl/3/2020/vr/vr20-1397.pdf/info

Распознающий функционал — программная реализация.

Синтаксис программы tolsolvty в сокращенной форме:

$$[\mathtt{tolmax}, \mathtt{argmax}, \mathtt{envs}...] = \mathtt{tolsolvty}(\mathtt{supA}, \mathtt{infA}, \mathtt{supb}, \mathtt{infb}, \ldots).$$

Обязательные входные аргументы функции:
infA, supA, infb, supb — соответственно нижние и верхние границы матрицы и правой части ИСЛАУ:

$$\mathtt{infA} = \inf(\boldsymbol{A}), \quad \mathtt{supA} = \sup(\boldsymbol{A})$$
$$\mathtt{infb} = \inf(\boldsymbol{b}), \quad \mathtt{supb} = \sup(\boldsymbol{b}).$$

Распознающий функционал — программная реализация.

Функция `tolsolvty` возвращает величину распознающего функционала `tolmax`.
Положительность этого функционала соответствует разрешимости ИСЛАУ,
`argmax` — наиболее «верное» решение, даже при отсутствии разрешимости,
`envs` — значения образующих распознающего функционала в точке его максимума.

Пример.

Пример

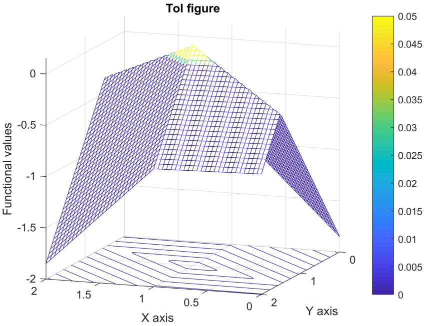
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.8 & 2.2] \\ [0.8 & 1.2] \end{pmatrix}$$

соответствует ситуации, когда известна сумма двух аналитических линий (первое уравнение) и значение одной из них (второе уравнение). ИСЛАУ хорошо обусловлена:

$$\mathrm{cond}\,(A) = 2.66$$

Пример.

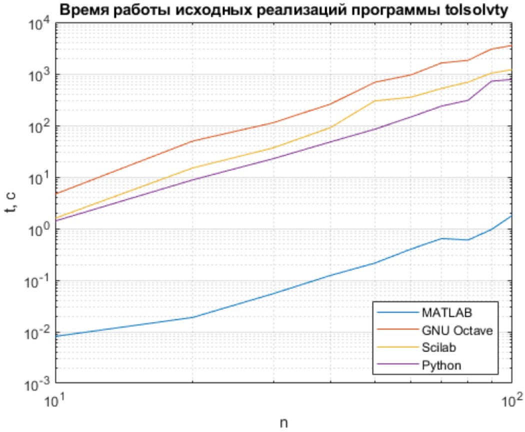
График распознающего функционала имеет хорошо выраженную «вершину».



Цветовая палитра выбрана таким образом, что значениям функционала `Tol`, меньшим 0, отвечает синий цвет. Точки графика `Tol`, соответствующие допусковому множеству ИСЛАУ, окрашены в теплые тона.

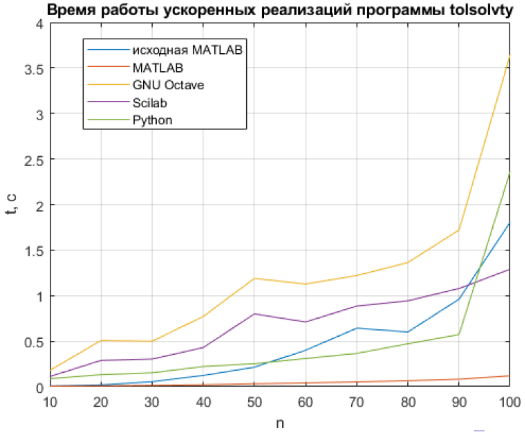
Скорость работы реализаций программы tolsolvty — до 2020.

Время работы исходных реализаций на задачах малой и средней размерностей — $n = 10 \div 100$ с шагом 10



Максим Смольский 2020

Время работы ускоренных реализаций на задачах малой и средней размерностей — $n = 10 \div 100$ с шагом 10



Максим Смольский 2020

Время работы ускоренных реализаций на задаче большой размерности — $n = 1000$

Реализация	t, с
исходная MATLAB	253.7
MATLAB	12.8
GNU Octave	29.5
Scilab	54.4
Python	32.6

Планы реализаций программы tolsolvty — `Julia`.

Максим Смольский 2021

Планы реализаций программы tolsolvty — `Julia`.

https://julialang.org/

> «Julia was designed from the beginning for high performance»

С.И.Жилин — интервальная арифметика для `Julia`
https://github.com/szhilin/julia-interval-examples

Коррекция линейной задачи о допусках

Что делать, если:

- задача неразрешима,
- задача разрешима, но допуски не устраивают.

Коррекция линейной задачи о допусках

Задача неразрешима

- насколько, в количественном измерении, неразрешима рассматриваемая задача,
- как следует изменить входные данные задачи, чтобы она стала разрешимой,

Задача разрешима

- указать границы вариаций входных данных, в пределах которых задача всё ещё останется разрешимой.

Коррекция:

- правой части, т.е. данных = считаем, что модель правильная;
- матрицы, т.е. модели = считаем, что данные правильные.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части.

Неразрешимость линейной задачи о допусках может иметь разные причины. С одной стороны, это может быть связано со слишком высокими требованиями (ограничениями) на допуски в правой части или недостоверность самих данных.

Рассмотрим пример

$$[1, 3] \cdot x = [3, 5]$$

«Решение» $= \left[3, \frac{5}{3}\right]$ — неприемлемо для $\mathbb{IR}$.

Причина

$$\boldsymbol{A}x \not\subseteq \boldsymbol{b},$$

так как правая часть «уже» левой.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части.

Наиболее простой способ достижения разрешимости — ослабление ограничения (расширение допуска) в правой части ИСЛАУ.

Эта операция увеличивает значение $\mathrm{Tol}\,(x)$ и позволяет достичь разрешимости за счет ослабления требований к точности решения.

$$[1, 3] \cdot x = [2, 6]$$

Решение — точка

$$x = [2].$$

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части.

Обоснование этого факта следующее. Рассмотрим выражение для распознающего функционала

$$\operatorname{Tol}(x) = \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

Величины $\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i$ входят слагаемыми во все выражения для вычисления окончательного значения функционала.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части.

Если обозначить вектор «расширения»

$$\boldsymbol{e} = \big([-1, 1], \ldots, [-1, 1]\big)^{\top},$$

то для ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}$$

с расширенной правой частью

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i + C, \quad , i = 1, 2, \ldots, m$$

значение распознающего функционала равно:

$$\max_x \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) = \max_x \operatorname{Tol}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C.$$

Пример 1D

Рассмотрим ИСЛАУ

$$[1,3] \cdot x = [3,5]$$

Результат выполнения программы `tolsolvty`:
`tolmax` = -1;   `argmax = [2]`
Допусковое множесто пусто и «дефицит разрешимости» составляет -1.
Имеем

$$\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b} = 1.$$

Добавим к правой части $1 \cdot [-1,1]$, что приведет к разрешимости системы с «запасом разрешимости» примерно 1. Имеем

$$\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}' = 2.$$

Пример 1D

После коррекции ИСЛАУ

$$[1, 3] \cdot x = [2, 6]$$

разрешима. Решение — точка

$$x = [2].$$

Проверяем

```
[tolmax,argmax] =
tolsolvty(infA,supA,infb-abs(tolmax),supb+abs(tolmax));
tolmax = 1
argmax = 2.
```

Пример 2D

Рассмотрим ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix}.$$

Результат выполнения программы `tolsolvty`:

`tolmax` = -0.72727;

`argmax = [0.54545, 0.40909]`

Допусковое множесто пусто и «дефицит разрешимости» составляет примерно -0.73.

Пример 2D

Согласно методике достижения разрешимости, добавление к правой части $1.73 \cdot [-1, 1]$ приведет к разрешимости системы с «запасом разрешимости» примерно 1.

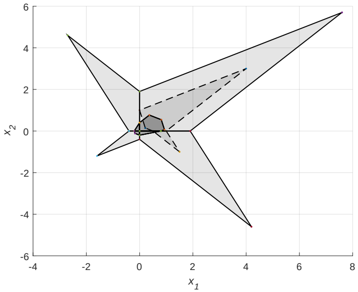
Такое избыточное расширение дает непустое допусковое множество, которое можно представить графически.

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix} + 1.8 \cdot \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Результатом выполнения программы `tolsolvty` на этот раз будет:
`tolmax` = 1.0727;
`argmax` = (0.54545, 0.40909)

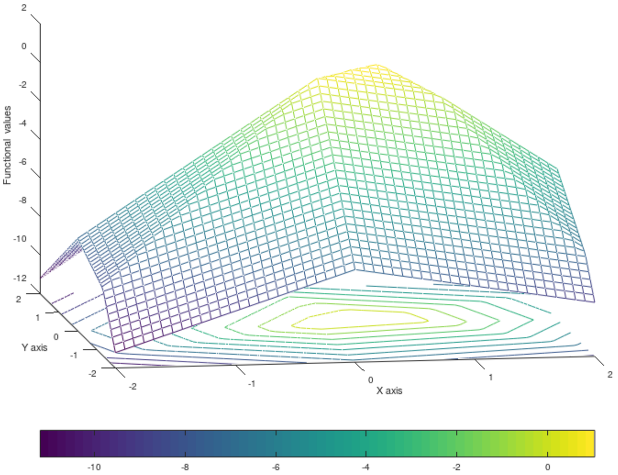
Пример

Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое



На рисунке представлены 3 множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное полупрозрачное с штриховой границей, расширенное полупрозрачное и допусковое более темное.

Пример



На рисунке представлен график Tol. Жёлтым цветом показана область допускового множества.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: глобальное изменение правой части.

В рассмотренном примере непустота множества решения была достигнута за счет существенного расширения допусков:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [-0.8, 3.8] \end{pmatrix}$$

Это не всегда приемлемо по постановке задачи.
Например, если решение предполагается положительным, а нижняя граница допуска стала отрицательной, это означает, что решение не имеет смысла.
Если ширины различных компонент векторы правой части различны, то более эффективно и расширять их по-разному.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части «по уравнениям».

Технически метод реализуется следующим образом. К правой части добавляются величины, «расширенные» во все стороны, пропроциональные некоторым весам ν_i, которые различны для разных компонент:

$$\boldsymbol{b}_i + K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$$

$\boldsymbol{b}_i$ — исходные значения компонент правых частей ИСЛАУ,
ν_i — индивидуальные веса для разных компонент,
K - общий множитель, $[-1, 1]$ — симметричный относительно нуля интервал.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части «по уравнениям».

Далее оперируем с модифицированным распознающим функционалом

$$\operatorname{Tol}_v(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}),$$

определённым выражением

$$\operatorname{Tol}_v(x) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ v_i^{-1} \left(\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части «по уравнениям».

Если линейная задача о допусках с матрицей $\boldsymbol{A}$ и вектором правой части $\boldsymbol{b}$ первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей $\boldsymbol{A}$ и уширенным вектором $\boldsymbol{b}_i + K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]_{i=1}^{m}$ в правой части становится разрешимой при

$$K \geq |T_v|.$$

Подбирая масштабирующие множители v_i нужных нам компонент правой части очень маленькими, можно добиться того, чтобы они практически не изменялись при коррекции, а уширялись бы только те компоненты вектора b, которые имеют дополнительные к ним номера.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение правой части «по уравнениям».

Наиболее важный частный случай рассмотренной конструкции — это обеспечение одинаковых относительных (пропорциональных абсолютным значениям) увеличений радиусов компонент правой части, когда $v_i = |\boldsymbol{b}_i|$ для ненулевых b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим

$$\mathrm{Tol}_0(x) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ |\boldsymbol{b}_i|^{-1} \left(\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

и пусть

$$\mathfrak{T}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\,_0(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}).$$

Величина $\mathfrak{T}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является тонкой количественной характеристикой совместности линейной задачи о допусках.

Пример

Рассмотрим пример [4], сходный с рассмотренным выше, но с другим вектором правой части:

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,1.5] \end{pmatrix}.$$

Радиус второй компоненты $\boldsymbol{b}$ в 2 раза меньше первой.

Результат выполнения программы `tolsolvty`:

```
tolmax = -0.77273;
argmax = (0.45454, 0.34091)
```

Допусковое множесто пусто и «дефицит разрешимости» составляет примерно -0.73.

Пример

Добавим к правой части вектор «расширения» $\Delta \boldsymbol{b}$: с радиусом второй компоненты в 2 раза меньше первой:

$$\operatorname{rad}(\Delta \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [0.1, 2.4] \end{pmatrix}.$$

Новая ИСЛАУ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [0.1, 2.4] \end{pmatrix}$$

Результат выполнения программы `tolsolvty`:
`tolmax` = 0.45454;
`argmax` = (0.20909, 0.38182)

Пример

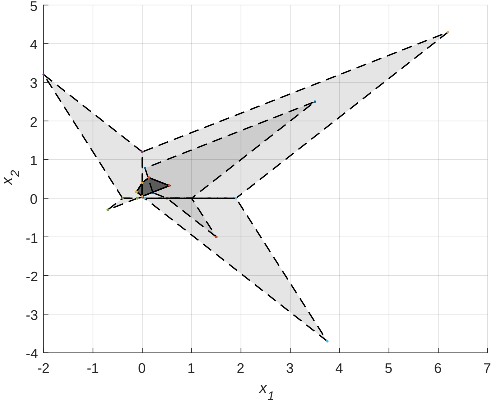
Нижняя граница допуска по первой компоненте в первом уравнении по-прежнему отрицательна, а по-второй стала положительна.

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [-0.8, 3.8] \\ [0.1, 2.4] \end{pmatrix}.$$

Этот факт означает, что избирательная работа с разными уравнениями дает более качественное решение.

Пример

Множества решения ИСЛАУ: объединенное исходное (граница штрихом), расширенное и допусковое



Нижняя граница допускового множества по-второй компоненте стала положительна.

Достижение разрешимости ИСЛАУ: изменение матрицы.

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Мы продемонстрировали возможности коррекции линейной задачи о допусках путём модификации вектора правой части $\boldsymbol{b}$.
Обсудим, как задачу о допусках можно корректировать посредством варьирования элементов матрицы $\boldsymbol{A}$.

По существу, это означает, что модель (описываемая матрицей), с которой мы работаем, не вполне точна и мы ставим задачу найти наиболее приемлемый для постановки задачи вариант.

Представляемая ниже методика имеет своей основой

Предложение. Пусть $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$, причём s — уравновешенный интервал и $\operatorname{rad} \boldsymbol{x} \geq \operatorname{rad} \boldsymbol{x}$.

Тогда $(\boldsymbol{x} \ominus \boldsymbol{s})$ является правильным интервалом и $|x \ominus s| = |x| - |s|$.

Через $\ominus$ обозначают операцию, которая обратна сложению и называется внутренним (или алгебраическим) вычитанием в $\mathbb{KR}$.

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} := \boldsymbol{a} + \operatorname{opp} \boldsymbol{b} = [\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}, \ \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}]$$

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Предположим, что нам дана *несовместная* линейная задача о допусках с интервальной матрицей $\boldsymbol{A}$ и интервальным вектором правой части $\boldsymbol{b}$. Тогда безусловный максимум распознающего функционала $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, о котором будем считать известным, что он достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$, является отрицательным:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{Tol}\,(\tau, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = T < 0$$

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Примем следующие естественные предположения:
(i) все компоненты вектора правой части $\boldsymbol{b}$ являются невырожденными интервалами, то есть

$$\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m,$$

(ii) в каждой строке матрицы $\boldsymbol{A}$ существуют элементы с ненулевой шириной, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}_{ij} > 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Привлекая величины $|\tau_j|$ в качестве весовых множителей, мы можем переписать последнее требование в следующем виде

$$\min_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|\tau_j|\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij}\right\}=\Delta>0$$

Выберем интервальную $m\times n$-матрицу $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_{ij})$ с уравновешенными интервальными элементами $\boldsymbol{e}_{ij}=[-e_{ij},e_{ij}]$ так, что

$$\sum_{j=1}^{n}e_{ij}\tau_j=K,\quad i=1,2,\ldots,m$$

где K — некоторая положительная константа, $0<K\le\Delta$, и, конечно,

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij}\ge e_{ij}\ge 0$$

для всех i,j.

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Тогда линейная задача о допусках с тем же самым вектором правой части $\boldsymbol{b}$ и интервальной матрицей $\boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}$ является «менее неразрешимой», чем исходная задача.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tol}(x, \boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}, \boldsymbol{b}) &= \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{a}_{ij} \ominus \boldsymbol{e}_{ij})\, x_j \right| \right\} \\
&= \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \ominus \sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_j \right| \right\} \\
&= \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_j \right| \right\}
\end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j = K \Leftrightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j\right| = K$$

То

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}, b) \geq \mathrm{Tol}(\tau, \boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}, b)$$

$$= \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \mathrm{rad}\, b_i - \left|\mathrm{mid}\, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tau_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j\right| \right\}$$

$$= \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \mathrm{rad}\, b_i - \left|\mathrm{mid}\, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tau_j\right| + K \right\}$$

$$= K + \mathrm{Tol}\,(\tau, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \max \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_{x\in\mathbb{R}^n} = K + T$$

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Если

$$K \geq |T|,$$

то тогда линейная задача о допусках с матрицей

$$\boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}$$

и правой частью $\boldsymbol{b}$ становится разрешимой, и, более того, мы можем наверняка утверждать, что известная нам точка τ — аргумент максимума функционала $\mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ принадлежит множеству решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{E}, \boldsymbol{b})$ скорректированной задачи.

Решающим моментом процедуры коррекции с варьированием матрицы является решение недоопределенной системы уравнений.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j = K, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \qquad \mathrm{rad}\, \boldsymbol{a}_{ij} \geq e_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{cases}$$

Коррекция ИСЛАУ: изменение матрицы.

Если

$$K \leq |T|,$$

то коррекция, выполненная в соответствии с вышеприведённым рецептом, может оказаться недостаточной для того, чтобы сделать задачу о допусках заведомо разрешимой.

В принципе, любая линейная задача о допусках с неособенной интервальной матрицей A может быть сделана разрешимой путём подходящего сужения $\boldsymbol{A}$, так как в пределе, для неособенной точечной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, задача о допусках имеет решение при любом векторе правой части.

Пример 1d.

Ввиду недоопределенности задачи нахождения «уменьшенной» матрицы ИСЛАУ, возникает возможность делать это по-разному, в зависимости от специфики задачи.

Рассмотрим ИСЛАУ

$$[1, 2] \cdot x = [3, 4].$$

Причиной несовместности является слишком сильное «расширяющее» действие матрицы $\boldsymbol{A} = [1, 2]$, в 2 раза, на вектор x. При этом ширина правой части меньше, $2 \cdot \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b} = 1$.

Уменьшая относительную ширину матрицы, можно добиться разрешимости.

$$[\tfrac{3}{2}, 2] \cdot x = [3, 4].$$

Решение

$$x = 2.$$

Пример 2d.

Обратимся к примеру [4] и выясним, насколько нужно уменьшить радиусы элементов матрицы, чтобы была разрешима ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,1.5] \end{pmatrix}$$

Символически уменьшение радиусов при сохранении «средней» матрицы можно выразить таким образом:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}',$$

где

$$\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{A})' \leq \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{A}),$$

а

$$\mathrm{mid}\,(\boldsymbol{A})' = \mathrm{mid}\,(\boldsymbol{A}).$$

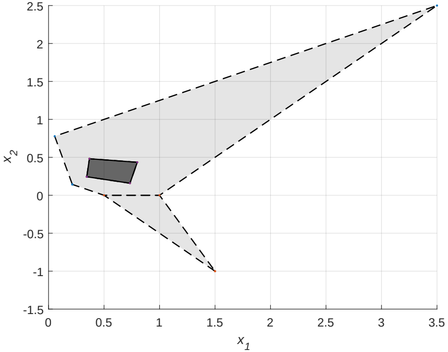
Пример 2d.

Конкретно, при уменьшении радиусов элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ в 8 раз, получаем разрешимую ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2.88, 3.12] & [-0.69, -0.31] \\ [0.31, 0.69] & [2.88, 3.12] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tolmax} = 0.08$

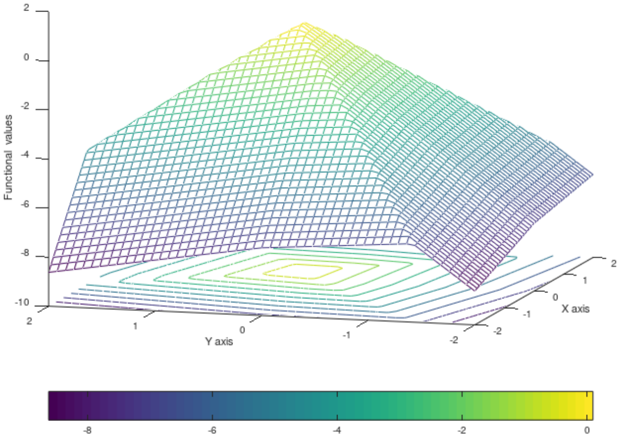
Пример 2d.



На рисунке представлены 2 множества решения ИСЛАУ: объединенное полупрозрачное и допусковое более темное.

Оба множества — в первом ортанте.

Пример 2d.



На рисунке представлен график Tol. Жёлтым цветом показана область допускового множества

Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет уменьшения радиусов компонент матрицы

Выше мы уменьшали взвешенные (с коэффициентами $|\tau_j|$) ширины каждой строки интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ на одну и туже величину K. Аналогично случаю коррекции правой части, иногда может возникнуть необходимость уменьшать эти ширины в различной степени: вводим положительный вектор

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m),$$

такой что мера уменьшения

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j = K, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

взвешенной ширины i-ой строки должна быть пропорциональна v_i,

Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет уменьшения радиусов компонент матрицы

Затем оперируем с модифицированным распознающим функционалом $\mathrm{Tol}_v(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, определённым выражением

$$\mathrm{Tol}_v(x) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ v_i^{-1} \left(\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

Размер бруса решения

Формулы для размеров бруса решения

Теорема Если $y \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, то для

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \text{ vert } \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\text{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \text{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\}$$

интервальный вектор $\boldsymbol{U} = (y + r\boldsymbol{e})$ также целиком лежит во множестве решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Алгоритм В.В.Шайдурова для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного $y \in \Xi_{\mathrm{tol}}(A, b)$ вычисляем значения

$$r_i = \frac{\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i - \left|\mathrm{mid}\ b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, и затем полагаем

$\varrho := \min_{1 \le i \le m} r_i$

Интервальный вектор $(y + \varrho \boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} = ([-1, 1], \ldots, [-1, 1])^T$ есть внутренняя оценка допускового множества решений $\Xi_{tol}(A, b)$, т.е. $y + \varrho \boldsymbol{e} \subseteq \Xi_{tol}(A, b)$.

Пример

Построим брус внутренней оценки допускового множества решений системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] & [1,2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Ранее мы нашли точку $(0,0)^T$ из внутренности её допускового множества решений, и эту точку можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с методом Шайдурова

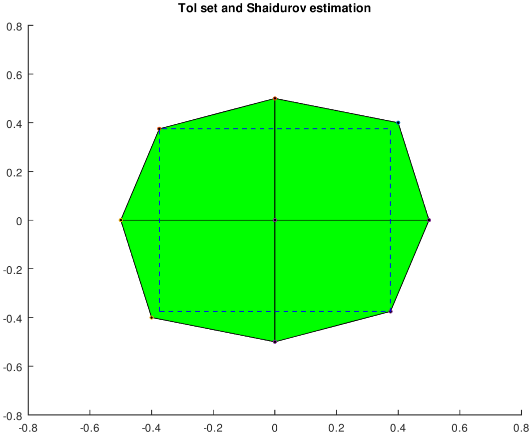
$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{\left|[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}]\right| + |[1,2]|} = \frac{1}{\frac{2}{3}+2} = \frac{3}{8}$$

так что получаем кубик

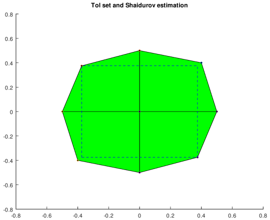
$$[-\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8}], [-\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8}].$$

Пример

Оценка показана на рисунке синей линией, она даже максимальна по включению, так как касается границ допускового множества решений (зеленая заливка).



Пример



Причина столь хорошего качества оценивания - совпадение центра бруса с началом координат, т. е. точкой $(0,0)^T$,
из-за чего связанность переменных в числителе и знаменателе дроби в фигурных скобках исчезает, а естественное интервальное расширение приводит к точному оцениванию области значений.

Интервальная регуляризация.

Интервальная регуляризация

Рассмотрим решение плохо обусловленных СЛАУ, с неточно известными матрицей и правой частью.

Чтобы улучшить устойчивость процесса решения, «погружаем» исходную неточную линейную систему в ИСЛАУ той же структуры, а затем рассматриваем ее допусковое множество решений.

В результате «интервализованная» матрица системы становится лучше обусловленной, поэтому решение соответствующей системы уравнений более устойчиво.

Интервальная регуляризация

Предположим, что найдено решение «интервализованной» матрицы системы.

В качестве псевдорешения исходной системы линейных уравнений берем точку из допускового множества решений интервализированной линейной системы или точки, которая обеспечивает наибольшую допустимую совместимость (согласованность).

Обусловленность СЛАУ

Из теории матриц.
Пусть A — матрица и ее число обусловленности

$$\mathtt{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

определенное через подчиненную норму $\| \cdot \|$, удовлетворяет условию

$$\mathtt{cond}(A) \geq 1.$$

Тогда в окрестности найдутся матрицы A' имеющие лучшую обусловленность:

$$\mathtt{cond}(A') \leq \mathtt{cond}(A).$$

Это следует из факта, что число обусловленности для подчиненной нормы имеет только глобальный минимум $\mathtt{cond}(A) = 1$ и не имеет локальных минимумов.

Регуляризация СЛАУ

Возникает следующая идея: заменить решение исходной СЛАУ

$$A \cdot x = b$$

решением СЛАУ

$$A' \cdot x = b$$

с близкой, но лучше обусловленной матрицей A'.
При благоприятных условиях, решение новой системы будет близко к желаемому решению исходной системы.

Эта идея не нова и восходит к методу регуляризации Лаврентьева, используемому, например для решения интегральных уравнений первого рода. При малом возмущении оператора уравнения, малые собственные числа отодвигаются от нуля, и оператор удаляется от сингулярности.
Метод регуляризации Лаврентьева также применим к СЛАУ. В частном простейшем случае, когда матрица А симметрична и положительна полуопределена (неотрицательно определена), решается СЛАУ:

$$(A + \theta \cdot I) \cdot x = b$$

В общем случае, когда мы ничего не знаем о свойствах матрицы А, выбор параметра θ , т.е. направление сдвига и его величина не очевидны.

Интервальная регуляризация

В интервальных терминах мы «раздуваем» матрицу, превращая ее в интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$. Чтобы покрыть все возможные направления сдвига матрицы A:

$$\boldsymbol{A} = A + \theta \cdot \boldsymbol{E}$$

здесь $\boldsymbol{E}$ — матрица того же размера что и A, составленная из интервалов $[-1, 1]$ и
θ — параметр величины «раздувания».

Интервальная регуляризация ИСЛАУ 2x2

Рассмотрим [5] точечную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

По отношению к спектральной норме $\mathrm{cond}\,(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, число обусловленности равно $3.9 \cdot 10^4$, и можно показать, что это максимум для регулярных 2x2-матриц с целыми положительными числами $<$ 100.

«Интервализуем» матрицу добавлением к каждому элементу.

$$A = \begin{pmatrix} [98, 100] & [99, 101] \\ [97, 99] & [98, 100] \end{pmatrix}$$

Новая интервальная матрица содержит множество точечных сингулярных матриц, например:

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 99 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности « угловых » матриц равно

$$\mathtt{cond}(A) \quad = \quad \begin{matrix} 38000 & 197 & 201 & 13100 \\ 197 & \boxed{99} & 13100 & 195 \\ 197 & 39200 & \boxed{99} & 199 \\ 39200 & 199 & 199 & 40000 \end{matrix}$$

Мы можем видеть, что среди 16 матриц конечных точек одна матрица имеет еще большее число обусловлености, чем исходное, 40000. Две матрицы имеют примерно такое же значение, а одна матрица несколько меньшее. Однако 10 матриц из 16 имеют значительно меньшие числа обусловленности. Значения чисел обусловленности для наиболее «выдающиеся» представители заключены в таблице в рамки.
Можно показать, что условие 98.76, достигнутое в матрице конечных точек действительно минимально среди всех точечных матриц из множества A.

Существуют мощные эвристические методы нахождения оценок числа обусловленности. Например,

Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е., Диагональные методы глобальной оптимизации, Физматлит, М., 2008, 352 с. (ISBN 978-5-9221-1032-7).

Приведем примерный код на языке `Octave`.

⋮

Диагональные методы глобальной оптимизации

ввод исследуемой интервальной матрицы

A = ...

определяем размеры данной матрицы

m = size(A,1);

n = size(A,2);

задаём количество случайных бросаний в реализуемом алгоритме

NN = 10;

инициализируем угловые матрицы для A

Matr1 = ones(m,n);

Matr2 = ones(m,n);

инициализируем MinCond - минимум чисел обусловленности точечных м

MinCond = Inf;

```
for i = 1:NN
случайно порождаем целочисленную матрицу EPM из нулей и единиц, т
EPM = randi([0,1],m,n);
порождаем угловые матрицы, диагонально противоположные друг другу
for i = 1:m
for j = 1:n
if EPM(i,j) == 0
Matr1(i,j) = inf(A(i,j));
Matr2(i,j) = sup(A(i,j));
else
Matr1(i,j) = sup(A(i,j));
Matr2(i,j) = inf(A(i,j));
endif
end
end
```

находим числа обусловленности полученных угловых матриц, корректир

```
c1 = cond(Matr1,2);
c2 = cond(Matr2,2);
if MinCond > c1
MinCond = c1;
endif
if MinCond > c2
MinCond = c2;
endif
end
```

выводим найденный минимум чисел обусловленности

```
disp(MinCond);
```

Литература

- П.И. Стецюк. Субградиентные методы ralgb5 и ralgb4 для минимизации овражных выпуклых функций // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 127 – 149.
- С.П. Шарый, М.Л. Смольский. `http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/tolsolvty.m`
- М.Л. Смольский. Реализация свободно распространяемой программы tolsolvty на языке программирования Python 3. `https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty`
- А. Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие / СПбГПУ. — Санкт-Петербург, 2020. https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info
- `https://arxiv.org/abs/1810.01481` S. Shary. Interval regularization for imprecise linear algebraic equations (Submitted on 27 Sep 2018)