Тема 8. Линейная задача о допусках — продолжение.

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

03.03.2022

ПЛАН

- Обратные задачи и регуляризация
- Интервальная регуляризация
- l_1-регуляризация
- Внутренняя оценка допускового множества решений
- Оценки вариабельности решения ИСЛАУ
- Недоопределенные ИСЛАУ
- Задание 2

Регуляризация — неформально

Имеем задачу A, которую не умеем решать. $x_A =?$

Заменяем A на задачу B, которую умеем решать. Пусть её решение x_B.

Строим «мостик»

$$B \longrightarrow A,$$

Пытаемся совершить переход

$$x_B \longrightarrow x_A$$

Регуляризация - мотивация

Когда нужна регуляризация?

Корректность по Адамару - неформально

В 1902 году Ж. Адамар сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений.
Корректной по Адамару называют задачу, решение которой

- существует
- единственно
- непрерывно зависит от данных

Там же Адамар привёл пример некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа).

Обратные задачи

$$\text{Параметры модели} \to \text{Данные}$$

Обратную задачу можно концептуально сформулировать следующим образом:

$$\boxed{\text{Данные} \to \text{Параметры модели}}$$

Корректность по Адамару

Корректность задачи по Адамару (1904). Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F: $A : Q \to F$.

Определение.
Задача $Aq = F$ корректна на паре топологических пространств Q и F, если:
1) условие существования решения для любого f из F: $R(A) = F$
2) условие единственности решения. Решение q единственно в Q: $A^{-1} : F \to Q$
3) условие устойчивости решения. Оператор обратного преобразования непрерывен: $A^{-1} : F_\delta \to Q_\delta$

Корректность по Адамару

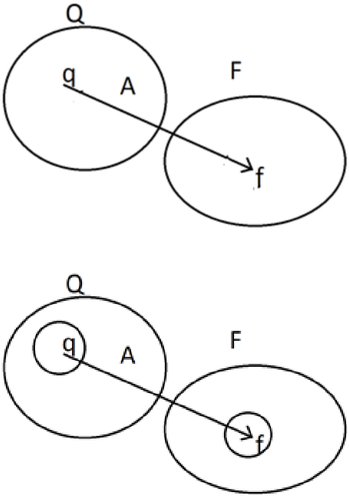


Рис.: Корректность задачи по Адамару

Некорректные задачи

Некорректно поставленная задача - это задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.

Некорректные задачи

Пример - Задача дифференцирования. При осциллирующей добавке $\frac{1}{n}\sin(nx)$ функция f неограниченно приближается к F, но это неверно для производных этих функций.

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin(nx) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$

$$F'(x) = f'(x) + cos(nx) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} f'(x)$$

Этот факт иллюстрирует рисунок:

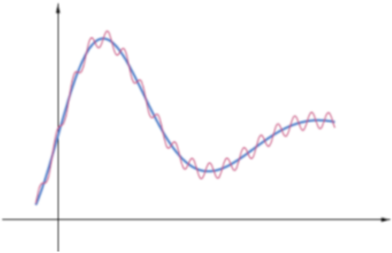


Рис.: Задача дифференцирования

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи	Некорректные задачи
Арифметика	
Умножение на малое число $Aq = f$	Деление на малое число $A^{-1}f = q \quad (A \ll 1)$
Алгебра	
Умножение на матрицу $Aq = f$	Решение системы $Aq = f$ A — плохобусловлена, вырождена, прямоугольная
Анализ	
Интегрирование $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)d\xi$	Дифференцирование $q(x) = f'(x)$

Пары корректных и некорректных задач

Корректные задачи	Некорректные задачи
Задача Штурма-Лиувилля $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x)$ u(0) - hu'(0)= 0 u(1) - Hu'(1)= 0 Интегральная геометрия	Обратная задача Штурма-Лиувилля $\{ \lambda_n, \|u_n\|^2 \} \to q$ Определение $q(x)$ по спектральным данным
Определение интеграла от функции $q(x, y)$ вдоль кривой $\Gamma(x, y)$	Определение $q(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{\Gamma(x,y)} q(x, y) ds = f(\xi, \eta)$
Ур-я Вольтерра и Фредгольма второго рода $q(x) + \int_0^x K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$	Ур-я Вольтерра и Фредгольма первого рода $\int_0^x K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x)$

Возможность корректного решения обратных задач

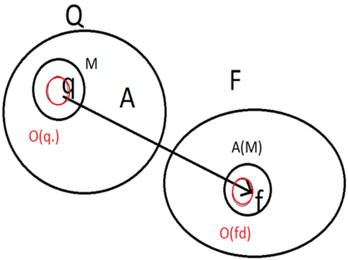
В 1943 году А. Н. Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого их решения.
Теорема. Пусть некоторая совокупность элементов $\{x\}$, образующая метрическое пространство $\mathbb{R}$, непрерывно отображается на некоторую другую совокупность элементов $\{x^\star\}$, образующую метрическое пространство $\mathbb{R}^\star$.
Если это отображение $x^\star = f(x)$ взаимно однозначно, непрерывно, и если отображаемое пространство $\mathbb{R}$ компактно, то обратное отображение $x = f^{-1}(x^\star)$ также непрерывно.

Условно корректные задачи

Определение (условная корректность, корректность по Тихонову). Задача называется условно-корректной на множестве M, если

- Решение единственно на множестве M
- Имеет место условная устойчивость

Множество M называется множеством корректности задачи.

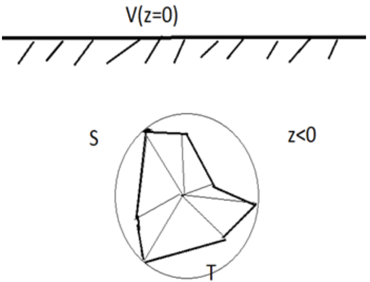


Пример - задачи теории потенциала

Потенциал

$$V = \int_T \frac{dm}{s}, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Одна из прямых задач теории потенциала заключается в том, что требуется вычислить на поверхности $z = 0$ потенциал ограниченного тела , заполненного однородной массой плотности m, лежащего ниже этой поверхности $(z < 0)$.



Пример - задачи теории потенциала

1. Каждое тело принадлежит заданной ограниченной поверхности S, лежащей в области $z < 0$.
2. Каждое тело звездно относительно своего центра тяжести , так что уравнение поверхности Г , ограничивающей тело T, может быть представлено в сферической системе координат с центром в точке в виде $z = f(s, q)$.
3. Функция $f(s, q)$ имеет производные ограниченные числом , общим для всех тел класса R.

Пример - задачи теории потенциала

Теорема. П.С.Новикова: различным телам T_1 и T_2, звездным относительно их центра тяжести, не могут соответствовать одинаковые потенциалы.

Теорема. Какова бы ни была степень точности ε и класс тел R, можно указать такое число $d(\varepsilon)$, что если значение потенциалов (или их производных) $V_1(x, y)$ и $V_2(x,)$ двух каких-либо тел T_1 и T_2 из класса R отличаются при $z = 0$ меньше, чем на $d(\varepsilon)$

$$\|V_1(x, y) - V_2(x,)\| \leq d(\varepsilon),$$

то сами тела отстоят друг от друга меньше, чем на ε

$$\rho(T_1, T_2) \leq \varepsilon.$$

Метод подбора

Метод подбора — решение набора прямых задач и выбирается вариант, наиболее подходящий по какому-то критерию.

- Необходимо установить теорему единственности прямого соответствия.
- Совпадение вычисленного и наблюденного полей не является абсолютным (хотя бы в силу приближенности подбора). Таким образом, мы должны еще убедиться в устойчивости обратной задачи (или непрерывности обратного отображения), т. е. в том, что при малом отклонении вспомогательного поля от наблюденного соответствующее ему строение среды не может сильно отличаться от действительного.

Регуляризующий алгоритм

Определение. Регуляризующий алгоритм

$$R_{\delta h}(f_\delta, A_h)$$

для задачи (два параметра — δ, h)

$$\sup_{\|f-f_\delta\|\leq\delta,\ \|A-A_h\|\leq h} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \to 0$$

$f_\delta \in F$ и $A_h \in A$.

Регуляризирующее семейство

Определение. Регуляризирующее семейство

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha f = q_T$$

- Оператор R непрерывен по параметру
- Оператор R сходится

Создание теории обратных и некорректных задач

- Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 39. — № 5. — С. 195—198.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 1974.

Интервальная регуляризация.

Интервальная регуляризация

Интервальная регуляризация

Рассмотрим решение плохо обусловленных СЛАУ, с неточно известными матрицей и правой частью. Чтобы улучшить устойчивость процесса решения, «погружаем» исходную неточную линейную систему в ИСЛАУ той же структуры, а затем рассматриваем ее допусковое множество решений. В результате «интервализованная» матрица системы становится лучше обусловленной, для которых решение соответствующей системы уравнений более устойчиво.
В качестве псевдорешения исходной системы линейных уравнений берем точку из допускового множества решений интервализированной линейной системы или точки, которая обеспечивает наибольшую допустимую совместимость (согласованность).

Обусловленность СЛАУ

Из теории матриц.
Пусть A — матрица и ее число обусловленности

$$\mathtt{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

определенное через подчиненную норму $\| \cdot \|$, удовлетворяет условию

$$\mathtt{cond}(A) \geq 1.$$

Тогда в окрестности найдутся матрицы A' имеющие лучшую обусловленность:

$$\mathtt{cond}(A') \leq \mathtt{cond}(A).$$

Это следует из факта, что число обусловленности для подчиненной нормы имеет только глобальный минимум $\mathtt{cond}(A) = 1$ и не имеет локальных минимумов.

Регуляризация СЛАУ

Возникает следующая идея: заменить решение исходной СЛАУ

$$A \cdot x = b$$

решением СЛАУ

$$A' \cdot x = b$$

с близкой, но лучше обусловленной матрицей A'.
При благоприятных условиях, решение новой системы будет близко к желаемому решению исходной системы.

Эта идея не нова и восходит к методу регуляризации Лаврентьева, используемому, например для решения интегральных уравнений первого рода. При малом возмущении оператора уравнения, малые собственные числа отодвигаются от нуля, и оператор удаляется от сингулярности.
Метод регуляризации Лаврентьева также применим к СЛАУ. В частном простейшем случае, когда матрица A симметрична и положительна полуопределена (неотрицательно определена), решается СЛАУ:

$$(A + \theta \cdot I) \cdot x = b$$

В общем случае, когда мы ничего не знаем о свойствах матрицы A, выбор параметра θ , т.е. направление сдвига и его величина не очевидны.

В интервальных терминах мы «раздуваем» матрицу, превращая ее в интервальную матрицу $\boldsymbol{A}$. Чтобы покрыть все возможные направления сдвига матрицы А:

$$\boldsymbol{A} = A + \theta \cdot \boldsymbol{E}$$

здесь $\boldsymbol{E}$ — матрица того же размера что и А, составленная из интервалов $[-1, 1]$ и
θ — параметр величины «раздувания».

Интервальная регуляризация ИСЛАУ 2x2

Рассмотрим [1] точечную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

По отношению к спектральной норме $\mathrm{cond}\,(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, число обусловленности равно $3.9 \cdot 10^4$, и можно показать, что это максимум для регулярных 2x2-матриц с целыми положительными числами $<$ 100.

«Интервализуем» матрицу добавлением к каждому элементу.

$$A = \begin{pmatrix} [98, 100] & [99, 101] \\ [97, 99] & [98, 100] \end{pmatrix}$$

Новая интервальная матрица содержит множество точечных сингулярных матриц, например:

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 99 \\ 98 & 99 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности « угловых » матриц равно

$$\mathtt{cond}(A) = \begin{matrix} 38000 & 197 & 201 & 13100 \\ 197 & \boxed{99} & 13100 & 195 \\ 197 & 39200 & \boxed{99} & 199 \\ 39200 & 199 & 199 & 40000 \end{matrix}$$

Интервальная регуляризация ИСЛАУ 2x2

Мы можем видеть, что среди 16 матриц конечных точек одна матрица имеет еще большее число обусловлености, чем исходное, 40000. Две матрицы имеют примерно такое же значение, а одна матрица несколько меньшее. Однако 10 матриц из 16 имеют значительно меньшие числа обусловленности. Значения чисел обусловленности для наиболее «выдающиеся» представители заключены в таблице в рамки.

Можно показать, что условие 98.76, достигнутое в матрице конечных точек действительно минимально среди всех точечных матриц из множества A.

Существуют мощные эвристические методы нахождения оценок числа обусловленности [?].
Приведем примерный код на языке `Octave`.
⋮

ввод исследуемой интервальной матрицы

A = ...

определяем размеры данной матрицы

m = size(A,1);

n = size(A,2);

задаём количество случайных бросаний в реализуемом алгоритме

NN = 10;

инициализируем угловые матрицы для A

Matr1 = ones(m,n);

Matr2 = ones(m,n);

инициализируем MinCond - минимум чисел обусловленности точечных м

MinCond = Inf;

for i = 1:NN

случайно порождаем целочисленную матрицу EPM из нулей и единиц, т

EPM = randi([0,1],m,n);

порождаем угловые матрицы, диагонально противоположные друг другу

for i = 1:m

for j = 1:n

if EPM(i,j) == 0

Matr1(i,j) = inf(A(i,j));

Matr2(i,j) = sup(A(i,j));

else

Matr1(i,j) = sup(A(i,j));

Matr2(i,j) = inf(A(i,j));

endif

end

end

находим числа обусловленности полученных угловых матриц, корректир

```
c1 = cond(Matr1,2);
c2 = cond(Matr2,2);
if MinCond > c1
MinCond = c1;
endif
if MinCond > c2
MinCond = c2;
endif
end
```

выводим найденный минимум чисел обусловленности

```
disp(MinCond);
```

l_1-регуляризация

l_1-регуляризация

В этом подходе ищется решение

задачи линейного программирования специального вида,

ограничения в которой описывают

подвижные границы

сжимаемого в точку информационного множества и при необходимости могут быть дополнены условиями на компоненты вектора решений.

Например, требования неотрицательности компоненты вектора решений.

Этот подход, по существу, производит l_1-регуляризацию задачи с ограничением на неотрицательность компонент вектора решения.

Постановка задачи линейного программирования выглядит следующим образом [2]. Для условия:

$$A \cdot x \subseteq \boldsymbol{b},$$

A — точечная матрица правой части ИСЛАУ,
$\boldsymbol{b}$ – интервальный вектор правой части ИСЛАУ ставится задача линейного программирования (ЗЛП):

$$\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i - w_i \cdot \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i \leq (A \cdot x)_i \leq \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b}_i + w_i \cdot \mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}_i,$$
$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Идея введения

$$\text{масштабирующих множителей } w_i$$

состоит в выяснении того, насколько для конкретного уравнения необходимо увеличить радиус интервала правой части для для удовлетворения условия

$$A \cdot x \subseteq \boldsymbol{b}$$

.

Постановка задачи линейного программирования

Добавим условие минимального отклонения от исходной задачи и неотрицательности решения

$$\min_{x,w} \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, m.$$

Постановка задачи линейного программирования

Окончательно имеем задачу линейного программирования

$$
\begin{aligned}
\min_{x,w} \sum_{i=1}^{n} w_i, \\
\operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - w_i \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i \leq (A \cdot x)_i \leq \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i + w_i \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i, \\
w_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \\
x_j \geq 0, j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Задача линейного программирования

Технически процедура вычисления строится следующим образом.

Пусть A — матрица размером $n \times m$, что соответствует СЛАУ с n уравнениями и m неизвестными.

Строится матрица C ограничений ЗЛП и расширенный вектор r правой части для уравнения

$$C = \begin{pmatrix} A & -\mathtt{diag}(\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}) \\ -A & -\mathtt{diag}(\mathrm{rad}\ \boldsymbol{b}) \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} \mathrm{mid}\ \boldsymbol{b} \\ -\mathrm{mid}\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathtt{diag}(v)$ — диагональная матрица, со значениями на диагонали, равными компонентам вектора v,
размер матрицы ограничений C — $(m+n) \times (m+n)$,
размер вектора искомого решения — $m+n$.

Задача линейного программирования

Таким образом, ставится задача минимизации суммы весов w_i

$$\min_{x,w} \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

при неопределенностях компонент правой части $\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}$.
Веса w_i при начале вычислений устанавливаются равными 1,

$$w_i = 1,$$

то есть ищется решение, помещающееся в интервальной правой части.

При необходимости, w_i увеличиваются или уменьшаются, показывая своей величиной количественную степень совместности (при $w_i \leq 1$) или несовместности (при $w_i > 1$) конкретного уравнения.

l_1-регуляризация

По условию

$$\text{mid}\ \boldsymbol{b}_i - w_i \cdot \text{rad}\ \boldsymbol{b}_i \leq (A \cdot x)_i \leq \text{mid}\ \boldsymbol{b}_i + w_i \cdot \text{rad}\ \boldsymbol{b}_i,$$

имеем:

$$\text{Tol}\ = 0,$$

и по определению распознающего функционала допусковое множество $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ решения ИСЛАУ

содержит единственную точку.

В связи с достижением разрешимости, можно назвать описанный процесс l_1-регуляризацией.

Пример

ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1,5] \\ [2.5,3.5] \end{pmatrix}; \quad \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$x = 2; \quad w = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор w показывает, насколько надо изменить допуски в правой части.

Проверка

$$\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - w_i \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i \leq (A \cdot x)_i \leq \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i + w_i \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i,$$

$$\boldsymbol{A}x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} [2,4] \\ [2,4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3 - 0.5 \cdot 2, 3 + 0.5 \cdot 2] \\ [3 - 2 \cdot 0.5, 3 + 2 \cdot 0.5] \end{pmatrix}$$

Пример

С.И.Жилин.
Примеры анализа интервальных данных в Octave. Сборник jupyter-блокнотов с примерами анализа интервальных данных.
`https://github.com/szhilin/octave-interval-examples`

Масса t-кварка
https://github.com/szhilin/octave-interval-examples/blob/master/TopQuark.ipynb

Формулы для размеров бруса решения.

Внутренняя оценка
допускового множества решений

Формулы для размеров бруса решения

Теорема Если $y \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, то для

$$r = \min_{1 \le i \le m} \min_{A \in \text{ vert } \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\text{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \text{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \right\}$$

интервальный вектор $\boldsymbol{U} = (y + r\boldsymbol{e})$ также целиком лежит во множестве решений $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Алгоритм В.В.Шайдурова для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного $y \in \Xi_{\text{tol}}(A, b)$ вычисляем значения

$$r_i = \frac{\mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left|\mathrm{mid}\, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, и затем полагаем

$$\varrho := \min_{1 \le i \le m} r_i$$

Интервальный вектор $(y + \varrho \boldsymbol{e}), \boldsymbol{e} = ([-1, 1], \ldots, [-1, 1])^T$ есть внутренняя оценка допускового множества решений $\Xi_{tol}(A, b)$, т.е. $y + \varrho \boldsymbol{e} \subseteq \Xi_{tol}(A, b)$.

Пример

Построим брус внутренней оценки допускового множества решений системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3},\frac{1}{2}] & [1,2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

Ранее мы нашли точку $(0,0)^T$ из внутренности её допускового множества решений, и эту точку можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с методом Шайдурова

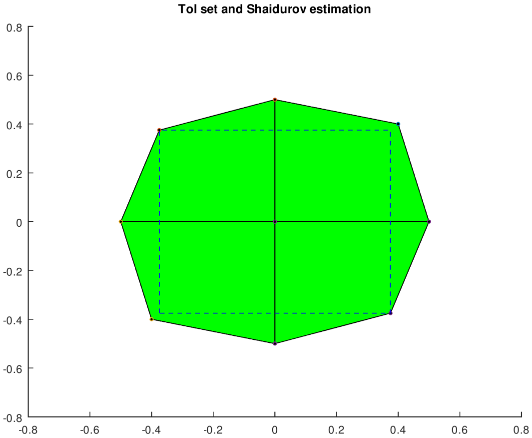
$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{\left|[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}]\right| + |[1,2]|} = \frac{1}{\frac{2}{3}+2} = \frac{3}{8}$$

так что получаем кубик

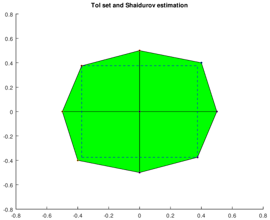
$$[-\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8}],[-\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8}].$$

Пример

Оценка показана на рисунке синей линией, она даже максимальна по включению, так как касается границ допускового множества решений (зеленая заливка).



Пример



Причина столь хорошего качества оценивания - совпадение центра бруса с началом координат, т. е. точкой $(0, 0)^T$,
из-за чего связанность переменных в числителе и знаменателе дроби в фигурных скобках исчезает, а естественное интервальное расширение приводит к точному оцениванию области значений.

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ

С.П. Шарый в материале [3] предложил оценки параметров в статистике интервальных данных и предложил терминологию для описания этих параметров.
Ниже рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие количественную связь предложенной величины и общепринятых в интервальном анализе информационных множеств.

Рассмотрим ИСЛАУ

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}.$$

Исследование разрешимости ИСЛАУ можно произвести, используя технику распознающих функционалов.

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Выражение для Tol имеет вид:

$$\mathrm{Tol}\,(x) = \mathrm{Tol}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\le i\le m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ равносильна $\mathrm{Tol}\,(x; A, b) \ge 0$, т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathrm{Tol}\,(x; A, b) \ge 0\}$$

функционала Tol. Распознающий функционал имеет единственный максимум при значении аргумента, наиболее близкому к «решению» ИСЛАУ.

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Проведем оценку вариабельности решения с интервальными данными. Отправной точкой для такой оценки служит традиционная оценка изменчивости решения СЛАУ

$$A \cdot x = b$$

в форме, учитывающей только вариацию правой части:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}\,(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Предполагается, что нормы векторов и матриц $\|\cdot\|$ согласованы, и число обусловленности матрицы СЛАУ вычисляется как

$$\mathrm{cond}\,(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|.$$

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Для случая интервально заданных величин в настоящее время предложена следующая оценка абсолютной вариабельности оценки `ive` (`interval variability of the estimate`)

$$\mathtt{ive}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{b}) = \sqrt{n}\ \left(\min_{A\in\boldsymbol{A}} \operatorname{cond}_2 A\right) \cdot \max_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Tol} \cdot \frac{\|\arg\ \max_{\mathbb{R}^n}\ \mathtt{Tol}\|_2}{\|b\|_2},$$

В выражениях минимум числа обусловленности находится среди всех реализаций матрицы ИСЛАУ.

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Логика оценки этой величины строится на основе представлений о множестве решений интервальных задач.
В случае разрешимости в смысле непустоты допускового множества, $\|\arg\max \mathtt{Tol}\|$ входит в допусковое множество и можно положить

$$\|x\| = \|\arg\max \mathtt{Tol}\|.$$

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Что касается оценки $\|\Delta b\|$, то можно рассуждать следующим образом. Свойством распознающего функционала является его равенство нулю в случае, если решением является одна точка $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Tol} = 0 \Leftrightarrow \text{ решением является одна точка}$$

При этом $\|\Delta b\| = 0$. При расширении допуска $\|\Delta b\|$на константу C, на это же значение изменяется величина $\mathtt{max\ Tol}$.
Таким образом:

$$\|\Delta b\|_\infty = \mathtt{max\ Tol}.$$

для любого вектора y:

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|y\|_\infty.$$

Оценки вариабельности решения ИСЛАУ.

Обсудим оценки, даваемые выражениями ive и rve. Начнем с относительной оценки rve. При допусковом множестве, состоящем из одной точки,

$$\max \mathrm{Tol} = 0, \ \mathrm{ive} = 0.$$

При увеличении значения max Tol, растет и ive с коэффициентом пропорциональности $\operatorname{cond} A$. С точки зрения понятий информационных множеств, это соотвествует увеличению допускового множества.
Чем хуже обусловлена ИСЛАУ, тем сильнее «расплывается» область решения, тем «хуже» качество решения. Величина ive дает абсолютную оценку, в которую входит и норма правой части $\|b\|$.

График распознающего функционала для ИСЛАУ.

Величина максимума распознающего функционала дает представление о размерах допускового множества решений.

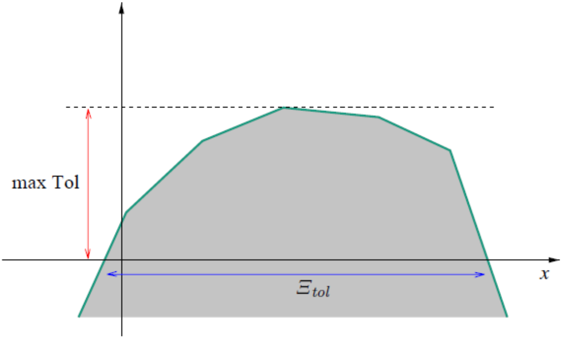
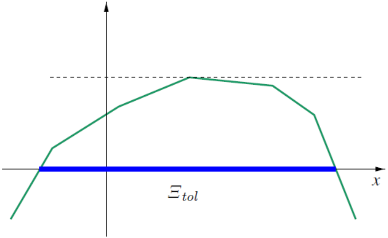
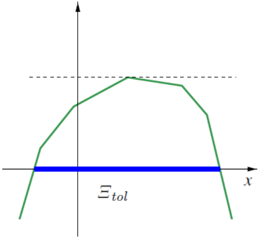


График распознающего функционала для ИСЛАУ.

Помимо максимума распознающего функционала на размеры множества решений влияет также «крутизна» графика функционала





Пример

Рассмотрим конкретный пример ИСЛАУ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05], & [0.95, 1.05] \\ [-0.05, 0.05], & [0.95, 1.05] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ [0.8, 1.2] \end{pmatrix}$$

ИСЛАУ с матрицами такого типа характерны, в частности, для задач спектрального анализа. Например, система вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.8, 2.2] \\ [0.8, 1.2] \end{pmatrix}$$

соответствует ситуации, когда известна сумма двух аналитических линий (первое уравнение) и значение одной из них (второе уравнение).

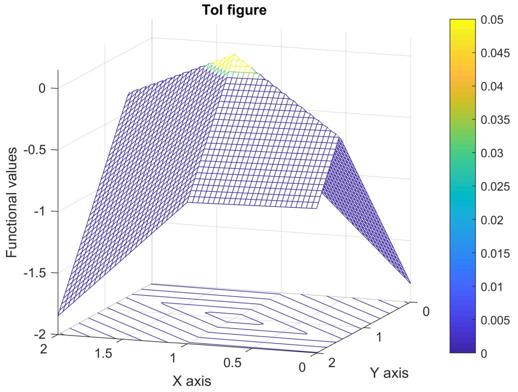
Пример

ИСЛАУ близка к треугольной и хорошо обусловлена:
$\text{cond}\,(\texttt{mid}(\boldsymbol{A})) = 2.6.$
Результатами вычисления распознающего функционала с помощью программы tolsolvty являются величины:

$$\max \texttt{Tol} = 0.1, \quad \texttt{argmax} = [1, 1],$$

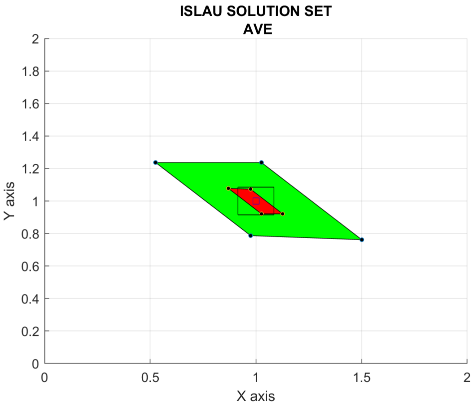
График распознающего функционала имеет хорошо выраженную «вершину».

График распознающего функционала для ИСЛАУ.



Цветовая палитра выбрана таким образом, что значениям функционала `Tol`, меньшим 0, отвечает синий цвет. Точки графика `Tol`, соответствующие допусковому множеству ИСЛАУ, окрашены в теплые тона.

Информационные множества решений ИСЛАУ показаны на рисунке зеленым (объединенное) и красным (допусковое) цветами.



Сторона квадрата равна $2 \cdot \mathtt{ive}$.

Размер бруса решения

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность

Рассмотрим ИСЛАУ, сильно отличающуюся от предыдущей:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05], & [0.95, 1.05] \\ [1.05, 1.15], & [0.95, 1.05] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [1.85, 2.15] \\ [1.95, 2.25] \end{pmatrix}$$

ИСЛАУ с матрицами такого типа характерны для задач оптической томографии в веерной геометрии, если углы между хордами наблюдения малы.

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность

Средней по отношению ИСЛАУ является СЛАУ с матрицей и правой частью, даваемыми уравнениями:

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{mid} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность

ИСЛАУ плохо обусловлена: $\operatorname{cond}(\mathtt{mid}(\boldsymbol{A})) = 42$.
Результатами вычисления распознающего функционала с помощью программы `tolsolvty` являются величины:

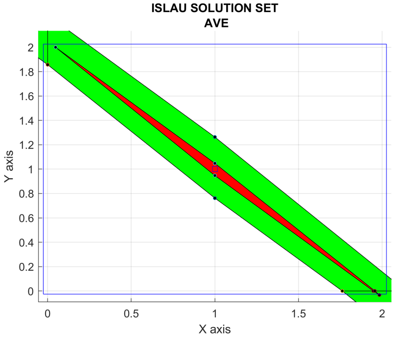
$$\mathtt{max\ Tol} = 0.05, \quad \mathtt{argmax} = [1, 1],$$

Вычисления оценок вариабельности по формулам для `ive` и `rve` дают:

$$\mathtt{ive} = 1.03, \quad \mathtt{rve} = 2.1.$$

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность

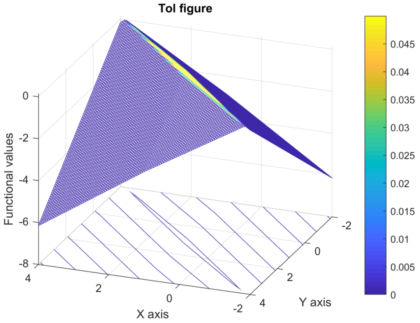
Информационные множества решений ИСЛАУ показаны на рисунке зеленым (объединенное) и красным (допусковое) цветами.



На рисунке показано положение оценки вариабельности по формуле ive, с центром в точке argmax — квадрат с синей границей. Сторона квадрата равна $2 \cdot \mathrm{ive}$.

График распознающего функционала для ИСЛАУ.

Ввиду того, что уравнения в ИСЛАУ соответствуют прямым с небольшим углом между ними, график распознающего функционала не будет иметь ярко выраженной вершины.



Значениям функционала `Tol`, меньшим 0, отвечает синий цвет. Точки графика `Tol`, соответствующие допусковому множеству ИСЛАУ, окрашены в теплые тона.

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ. Плохая обусловленность

Допусковое множество, как это видно из рисунка, имеет форму сильно вытянутого вдоль одной из диагоналей четырехугольника (виден на проекции графика на плоскость $z = -8$), а график `Tol` в этой области — форму «плато», со слабо выраженной вершиной в его центре.
Даже при относительно невысокой вариабельности правой части ИСЛАУ, размеры допускового множества весьма велики.

Оценка вариабельности решения ИСЛАУ.

Несмотря на явственное различие между информационными множествами и оценками вариабельности для рассмотренных ИСЛАУ, оценки, даваемые формулой для значений `ive`, вполне адекватно ограничивают допусковое множество.
Этот факт дает положительную основу для использования этой величины в качестве оценки вариабельности решения линейной задачи о допусках.

Недоопределенные ИСЛАУ

Недоопределенные ИСЛАУ.

Линейная функция трех переменных

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

восстанавливается по данным двух измерений.
Имеем недоопределенную ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [98, 100] & [97, 99] & [96, 98] \\ [99, 101] & [98, 100] & [97, 99] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [190, 210] \\ [200, 220] \end{pmatrix}$$

Ее матрица имеет неполный ранг, поскольку содержит точечную матрицу ранга 1

$$\begin{pmatrix} 98 & 98 & 98 \\ 99 & 99 & 99 \end{pmatrix}$$

Недоопределенные ИСЛАУ.

Тем не менее интервальная матрица системы не содержит линейно зависимых точечных столбцов, и потому согласно критерию И.А. Шарой допусковое множество решений — ограниченное.

Недоопределенные ИСЛАУ.

Минимальное спектральное число обусловленности точечных матриц, содержащихся в матрице ИСЛАУ, равно 103.83 и достигается на матрице

$$\begin{pmatrix} 100 & 97 & 96 \\ 99 & 100 & 99 \end{pmatrix}$$

В этом можно убедиться перебором всех «угловых» точечных матриц для интервальной матрицы системы

Нахождение максимума распознающего функционала этой системы с помощью программы `tolsolvty` дает значение $\max\mathrm{Tol} = 3.9698$, который достигается в точке

$$\hat{x} = \mathtt{arg\ max\ Tol} = (2.06, 3 \cdot 10^{-6}, 2.1 \cdot 10^{-6})^T.$$

Ее можно взять в качестве оценки коэффициентов. Тогда мера вариабельности

$$\mathtt{IVE} = \sqrt{2} \cdot 3.9698 \cdot 103.83 \frac{\|\hat{x}\|_2}{\sqrt{200^2 + 201^2}} = 4.14$$

Недоопределенные ИСЛАУ.

Интервальная оболочка допускового множества решений ИСЛАУ, т. е. его оптимальная внешняя интервальная оценка — это брус

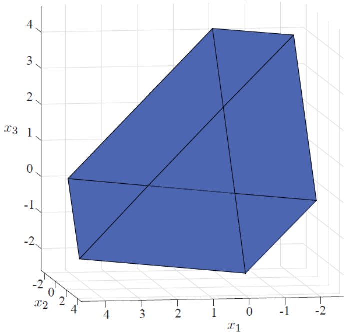
$$\begin{pmatrix} [-1.97, 4.03] \\ [-1.99, 4.08] \\ [-1.99, 4.11] \end{pmatrix}$$

Радиусы компонент оптимальной внешней оценки допускового множества решений равны

$$3.00, 3.03, 3.05$$

что также не сильно отличается от значения `IVE`.

Допусковое множества решений ИСЛАУ



Рассмотренный пример показывает работоспособность оценки даже в случае недоопределенных ИСЛАУ. Но строгое исследование и обоснование этого факта, еще ожидают своего продолжения.

Задание 2

Задание 2

Задание 2

Исследование переопределённой ИСЛАУ

- Исследовать разрешимость
- Построить множества
- Построить график Tol

Достичь разрешимости за счет коррекции

- правой части ИСЛАУ
- матрицы ИСЛАУ

Задание 2

Исследовать разрешимость ИСЛАУ 3×2

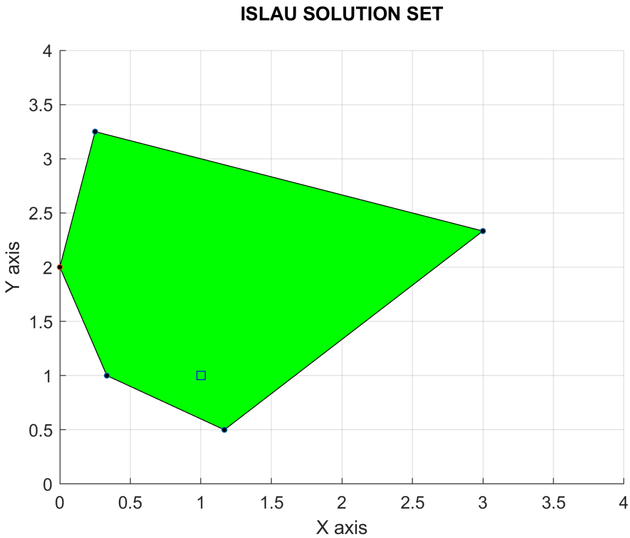
$$
\begin{aligned}
[0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 2.5] \cdot x_2 &= [3.0, 5.0] \\
[1.5, 2.5] \cdot x_1 + [-1.5, -0.5] \cdot x_2 &= [-1.0, 1.0] \\
[0.5, 1.5] \cdot x_1 + [-0.5, 0.5] \cdot x_2 &= [1.0, 3.0],
\end{aligned}
$$

которая получается из

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2 \cdot x_2 &= 4 \\
2 \cdot x_1 - x_2 &= 0 \\
x_1 &= 2.
\end{aligned}
$$

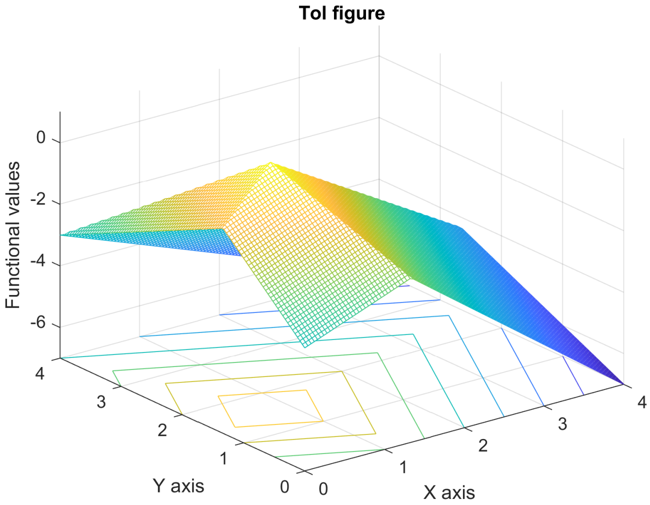
Задание 2

Построить множества решений, объединённое и допусковое



Задание 2

Построить график Tol



Литература

https://arxiv.org/abs/1810.01481 S. Shary. Interval regularization for imprecise linear algebraic equations (Submitted on 27 Sep 2018)

Zhilin, S.I. Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2007. Vol. 88. No 1. P. 60–68.

С.П. Шарый. О мере вариабельности оценки параметров в статистике интервальных данных. Вычисл. технологии, 24, 5, 2019. — стр.90-108.