Тема 2. Введение в интервальный анализ. Интервальные арифметики

А.Н. Баженов

ФТИ им. А.Ф.Иоффе

a_bazhenov@inbox.ru

20.01.2022

Интервальный анализ.
Классическая интервальная арифметика.

Было декларировано

В предыдущей лекции было декларировано освоение инструментов:

- Изучение разрешимости задач и оценка множества решений
- Решение переопределенных задач
- Решение недоопределенных задач
- Регуляризация плооообусловленных задач
- Решение несовместных задач

Первая реакция научного руководителя одного из аспирантов:
«А может последний пункт опустить?!»

Было декларировано

Анализ данных:

- Обработка физ. величины (константы):
- Оценка среднего, моды, медианы, совместности
- Восстановление зависимостей:
- Линейный случай
- Общий случай

План

- Неформальное введение
- Введение в вопрос. Первый «интервальщик»
- Сведения об интервальном анализе.
- Мотивации интервального анализа
- Понятие интервала
- Классическая интервальная арифметика
- Независимые и связанные интервальные величины
- Основная теорема интервальной арифметики
- Характеристики интервалов и их свойства
- Алгебраические свойства интервальных операций
- Полная интервальная арифметика

Интервальный анализ. Неформальное введение

А.Н.Баженов. Естественнонаучные и технические применения интервального анализа. 2021.
https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2021/tr21-169.pdf/info

Оглавление

Интервальный анализ. Неформальное введение

Не все объекты в мире интервальны. Например, сумма на банковской карте — совершенно однозначна.

В современном естествознании полагается, что существуют фундаментальные физические константы.

Математики полагают, что натуральные числа N точны, а также существуют трансцендентные величины $e, \pi, F, C, \ldots$, которые нельзя вычислить, но при этом они, по-всей видимости, точные числа.

Интервальный анализ. Задача о числе шагов.

Однако, двустроннее оценивание — весьма основательный подход. Например: «за сколько шагов n можно дойти до двери?» или «сколько единиц n в десятке?»

Хотя ответ — целое число, например,

$$n = 10,$$

для надёжности скажем: от 9 до 11.

Иначе,

$$n = [9, 11].$$

Интервальный анализ. Задача о кворуме.

Другой пример — кворум (лат. quorum praesentia sufficit «которых присутствие достаточно») на заседании Диссертационного совета. По правилам, обычно $\frac{2}{3}$ от полного числа N членов Совета.

Задача секретаря Диссертационного совета.
В Диссертационном совете $N = 18$ членов.
Вопрос: «каково число членов n для кворума?»
Решение:
Формально $n = 12$, но если соискатель хороший, то лучше $n = 13$.

Итак, решение:

$$n = [12, 13].$$

Неинтервальный анализ. Задача первокурсника.

Пример за пределами интервального анализа.

Задача по курсу Общей физики.
Вопрос: «Не в Амерах ли измеряется сила тока?»
Решение тривиальное: «Да, в Амперах».

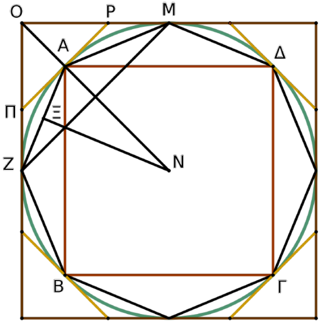
$$\text{«Да, в Амперах.».}$$
$$\text{Ответ} = \{Amp\}$$

Решение «интервальное»:

$$\text{«Да, в Амперах. Но можно ещё в Вольтах и Омах».}$$
$$\text{Ответ} = \{Amp, Volt, Omh\}$$

Это не наш случай.

Вычисление отношения длины окружности к диаметру по Архимеду (287–212 до н.э.) «$K\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon \quad \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma\iota\zeta$» — «Измерение круга»



$$3\frac{10}{71} \leq \frac{\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu.\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o} \leq 3\frac{1}{7} \Longleftrightarrow \pi = \left[3\frac{10}{71}, 3\frac{1}{7}\right]$$

http://ilib.mccme.ru/djvu/klassik/arhimed.htm

Вычисление углового размера Солнца по Архимеду (287–212 до н.э.)
«$\Psi\alpha\mu\mu\iota\tau\eta\zeta$» — «Псаммит - измерение песчинок.»
https://ru.wikipedia.org/wiki/Псаммит — работа Архимеда, в которой он пытается определить верхнюю грань числа песчинок, которые занимает в своём объёме Вселенная.

$$\frac{1}{200} \leq \text{угловой размер Солнца} \leq \frac{1}{160}$$

в единицах прямого угла. Иначе,

$$\text{угловой размер Солнца} = \left[\frac{1}{200}, \frac{1}{160}\right] \cdot 90^\circ.$$

`http://ilib.mccme.ru/djvu/klassik/arhimed.htm`

Ф. Клейн (1849—1925) – «толстые геометрические объекты»

История - XX век

Подробно - http://www.nsc.ru/interval/?page=Introduction/history

- Программная статья об задании неопределенности величины ее границами
  Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский Математический Журнал. – 1962. – Т. 3, №5. –С. 701–709.
- Англоязычная книга, привлекшая внимание общественности
  Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- 1970-е Н.Н. Яненко.
  https://ru.wikipedia.org/wiki/Яненко,_Николай_Николаевич
  Институт теоретической и прикладной механики СО РАН — создание направления.
  Первая монография на русском языке: Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.

Литература

Литература «для математиков»

- 2015 – IEEE 1788 «реализация интервальных вычислений на цифровых ЭВМ»
- С.П. Шарый. КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. Институт вычислительных технологий СО РАН. Издательство XYZ. Новосибирск – 2021 (**КИА-2021**) http://www.nsc.ru/interval/
- Электронная библиотека http://www.nsc.ru/interval/?page=Library

Литература учебная

- Б.С. Добронец. Интервальная математика. – Красноярск: Издательство КГУ, 2004. http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/InteMath.pdf
- А.Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. — СПб. 2020 https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info

ПО - 1. Классика

- Ранний период http://www.cs.utep.edu/interval-comp/intsoft.html Interval and Related Software
- Разнообразные средства в Matlab (платная библиотека) http://www.nsc.ru/interval/?page=Programing **INTLAB** - INTerval LABoratory. The Matlab/Octave toolbox for Reliable Computing
- Java Jinterval — https://github.com/jinterval/jinterval (арифметика Каухера)
- Java Kepler — https://github.com/Kepler-17c/Interval

Для программистов

- Python Sympy — https://docs.sympy.org/0.6.7/modules/mpmath/intervals.html
- Python Pyinterval — https://pypi.org/project/pyinterval/ и другие пакеты
- Python Kaucherpy — https://github.com/lmtortelli/kaucherpy (арифметика Каухера)
- Python — https://github.com/AndrosovAS/intvalpy (только что)
-

ПО - 2. Современное

Для «математиков»

- Mathematica — встроенная поддержка
- Matlab — INTLAB
- Octave / SciLab — встроенная поддержка,
  Kinterval (арифметика Каухера)
- Julia — https://github.com/JuliaIntervals/IntervalArithmetic.jl

ПО - 3. On-line

С.И.Жилин.

- Примеры анализа интервальных данных в Octave.
  Сборник jupyter-блокнотов с примерами анализа интервальных данных.
  https://github.com/szhilin/octave-interval-examples
- Примеры анализа интервальных данных в Julia.
  Сборник jupyter-блокнотов с примерами анализа интервальных данных.
  https://github.com/szhilin/julia-interval-examples

Система обозначений и терминология

Наиболее современная публикация

«Вычислительные технологии» Том 15, №1, 2010
Standardized notation in interval analysis.
R.B. Kearfott, M.T. Nakao, A. Neumaier, S.M. Rump, S.P. Shary, and P. van Hentenryck.

http://ict.nsc.ru/jct/content/t15n1/Shary_n.pdf

Интервальный анализ и его методы

Интервал — замкнутый отрезок вещественной оси, а **интервальная неопределенность** – состояние неполного знания об интересующей нас величине, когда известна лишь ее принадлежность **некоторому интервалу**.
Интервальный анализ — отрасль математического знания, исследующая задачи с интервальными неопределенностями и методы их решения.

Поиск **множества**, удовлетворяющего **постановке задачи**.

«. . . В большинстве случаев некорректно говорить о «решении интервальных уравнений» (систем уравнений, неравенств и т. п.) вообще.
Правильнее вести речь о решении тех или иных **постановок задач**, связанных с интервальными уравнениями (системами уравнений, неравенств и т. п.). В свою очередь, формулировка постановки интервальной задачи подразумевает указание, по крайней мере, **множества решений задачи и способа его оценивания**».
(КИА-2021, стр.13)

Мотивация и примения

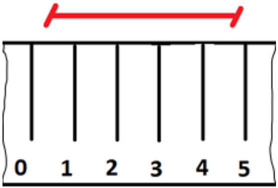
- Вычисления — Ошибки округления (разрядность)
- Наука — Измерения
- Техника — Допуски
- Неопределенности в экономических и технических системах
- Интервальнозначные вероятности

Мотивация

Дать «внешнюю» оценку математических объектов

Длина отрезка

Измерения. Какова длина отрезка?



$$L = [3, 5].$$

Ошибки округления (разрядность)

Обычное представление	Более содержательное представление
$\frac{2}{3} \approx 0.667$	$\frac{2}{3} \in [0.666, 0.667]$

Понятие интервала

Интервалом $[a, b]$ вещественной оси R называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами включая их самих, т.е.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

При этом a и b называются концами интервала.

Интервальные арифметики – базовые понятия

Арифметические действия над интервалами

$$\star \in \{\, + \,, - \,, \cdot \,, , / \,\}$$

Интервал	$\boldsymbol{a}$	$[\underline{a}, \overline{a}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \le x \le \overline{a}\}$
Действия	$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \left\{ a \star b \mid a \in \boldsymbol{a},\ b \in \boldsymbol{b} \right\}$
Обратный интервал	$-\boldsymbol{a} = (-1) \cdot \boldsymbol{a}$	$-\boldsymbol{a} = [-\overline{a}, -\underline{a}]$

Классическая интервальная арифметика

Развёрнутые формулы для арифметических операций выглядят следующим образом:

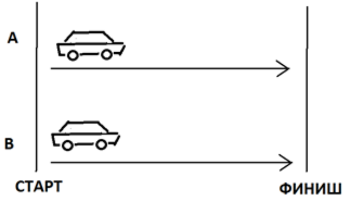
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \left[\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}}\,\right], \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \left[\,\underline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\,\right], \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left[\,\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\right], \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \left[\,1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}}\,\right] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{y} \not\ni 0. \tag{1d}$$

Пример. Два автомобиля



Время в пути первой машины $\boldsymbol{T}_1 = [9, 10]$

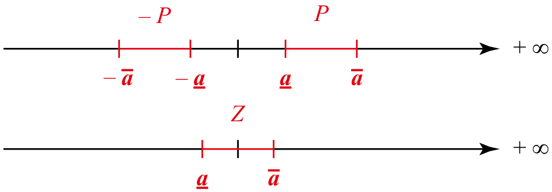
Время в пути второй машины $\boldsymbol{T}_2 = [9, 10]$

Разница между временами прихода к финишу $\Delta\boldsymbol{T}_{12} = [-1, 1]$

Типы интервалов

Типы интервалов в классической интервальной арифметике

Неотрицательные интервалы	$P = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid (\underline{a} \geq 0)\&(\overline{a} \geq 0)\ \}$
Нульсодержащие интервалы	$Z = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{a} \leq 0 \leq \overline{a}\}$
Неположительные интервалы	$-P = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR} \mid -\boldsymbol{a} \in P\}$
Символическая формула	$\mathbb{IR} = -P \cup Z \cup P$



Классическая интервальная арифметика

Определение. Алгебраическая система $\{\mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \}$, образованная множеством всех вещественных интервалов $[\underline{a}, \overline{a}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$ с бинарными операциями сложения, умножения, вычитания и деления, называется **классической интервальной арифметикой**.

Таблица Кэли

Интервальное умножение в классической интервальной арифметике

	$\boldsymbol{b} \in P$	$\boldsymbol{b} \in Z$	$\boldsymbol{b} \in -P$
$\boldsymbol{a} \in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$
$\boldsymbol{a} \in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$

Особенности интервальной арифметики

Отсутствие обратных элементов для арифметических действий

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) / \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \neq 0$$

$$\boldsymbol{a} / \boldsymbol{a} \neq 1$$

Особенности интервальной арифметики

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$$

Пример 1.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}=[1,2], \quad \boldsymbol{b} &= [-1,1] \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=([1,2]+[-1,1])-[-1,1]=[0,3]-[-1,1] &= [-1,4] \\ [1,2] &\neq [-1,4] \end{aligned}$$

Особенности интервальной арифметики

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})/\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} &= [1, 2] \\ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})/\boldsymbol{b} = ([1, 2][1, 2])/[1, 2] = [1, 4]/[1, 2] &= [0.5, 4] \\ [1, 2] &\neq [0.5, 4] \end{aligned}$$

Особенности интервальной арифметики

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \neq 0$$

Почему?

За попытки приходится платить

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} &= 2 \cdot [-\mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}, \mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}], \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} &= 2n \cdot [-\mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}, \mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}] \end{aligned}$$

Частичное упорядочение по отношению включения

Интервалы — множества, для них определяется частичное упорядочение по отношению включения друг в друга

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \ \& \ \overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$$

Монотонность по включению

Свойство **монотонности по включению**: для любых интервалов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \mathbb{IR}$ и любых операций $\star \subseteq \{+, -, \cdot, /\}$

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{b}' \Longrightarrow \boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{a}' \star \boldsymbol{b}'$$

Свойство монотонности по включению отражает тот факт, что расширение областей определения объектов неизбежно расширяет и область на которую отображаются результаты арифметических операций над объектами.

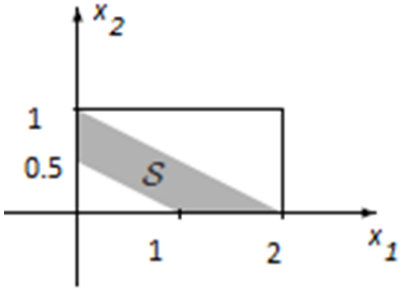
Независимые и связанные интервальные величины.

Определение. Интервальные величины $a_1 \in \boldsymbol{a}_1, \dots, a_n \in \boldsymbol{a}_n$ называются независимыми (несвязанными), если упорядоченный набора переменных $(a_1, \dots, a_n)$ принимает любые значения из декартова произведения интервалов их изменения $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, т.е. из бруса $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \subset \mathbb{R}^n$.
В противном случае интервальные величины называются зависимыми (связанными).

Независимые и связанные интервальные величины.

Пусть для величин $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$ имеет место связь:

$$1 \leq x_1 + 2x_2 \leq 2.$$



Функции независимых и связанных интервальных величин

Рассмотрим различные функции этих переменных.

$$\{x_1 - x_2 \mid x_1 \in [0,2], x_2 \in [0,1], (x_1, x_2) \in S\} = [-1,2] = [0,2] - [0,1],$$

$$\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in [0,2], x_2 \in [0,1], (x_1, x_2) \in S\} = [0.5, 2]$$
$$\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [0,2], x_2 \in [0,1], (x_1, x_2) \in S\} = [0, 0.5]$$

Для независимых x_1 и x_2 имеем:

$$\begin{aligned} [0,2] + [0,1] &= [0,3] \quad \supset \quad [0.5, 2] \\ [0,2] \cdot [0,1] &= [0,2] \quad \supset \quad [0, 0.5] \end{aligned}$$

Основная теорема интервальной арифметики

Теорема Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — рациональная функция вещественных аргументов $x_1, x_2, \ldots x_n$ и для нее определен результат $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ подстановки вместо аргументов интервалов их изменения $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \subset \mathbb{IR}$ и выполнения над ними действий по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \boldsymbol{X}_1, x_2 \in \boldsymbol{X}_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{X}_n\} \subseteq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n),$$

т.е. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ содержит множество значений функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots \boldsymbol{X}_n$. Если выражение для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, имеет вместо включения выполняется *точное* равенство.

Зависимость результата вычислений от вида выражений

Для рациональной функции $f(x, y) = x \cdot y - x + 3$ на области определения $x \in [0, 1], y \in [1, 2]$, оценка области значений

$$[0, 1] \cdot [1, 2] - [0, 1] + 3 = [2, 5].$$

Если переписать выражение как $f(x, y) = x \cdot (y - 1) + 3$, то

$$([0, 1] \cdot [1, 2] - 1) + 3 = [3, 4].$$

Таким образом, при интервальном оценивании имеет смысл рассуждать не в терминах функций, а в терминах задающих их *выражений*.

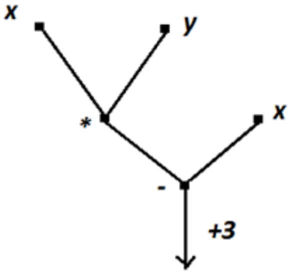
Дерево Канторовича

Деревом Канторовича для выражения f называется изображающее алгоритм вычисления значений для f корневое дерево, в котором:

- Корень соответствует результату выражения
- Прочие концевые вершины соответствуют исходным переменным
- Остальные вершины дерева отображают операции и одновременно результаты операций, являющиеся промежуточными результатами вычисления выражения f

Дерево Канторовича

$$f = x \cdot y - x + 3$$



Характеристики интервалов и их свойства

Середина, радиус, ширина:

$$\begin{aligned} \operatorname{mid} \boldsymbol{a} &= \tfrac{1}{2} \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{a}}), \\ \operatorname{rad} \boldsymbol{a} &= \tfrac{1}{2} \cdot (\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}), \\ \operatorname{wid} \boldsymbol{a} &= \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}. \end{aligned}$$

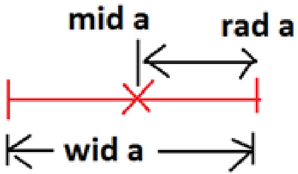
Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{mid} \boldsymbol{a} + [-1, 1] \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{a},$$

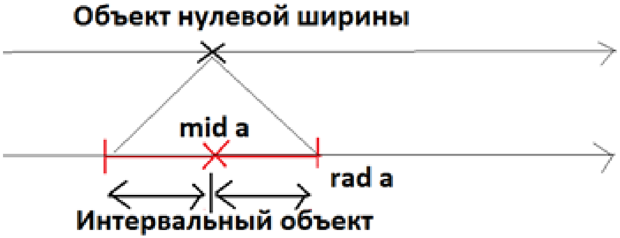
что равносильно

$$\boldsymbol{a} = \{x \in \mathbb{R} : |x - \operatorname{mid} \boldsymbol{a}| \leq \operatorname{rad} \boldsymbol{a}\}.$$

Характеристики интервалов



Расширение (объитерваливание) объекта



Середина интервала

Середина интервала – это его «наиболее типичный» представитель, который наименее удален от всех точек интервала,
а радиус и ширина характеризуют разброс точек интервала, абсолютную меру неопределенности, выражаемой данным интервалом.

Определение. Абсолютной величиной интервала $\boldsymbol{a}$ (называемой также модулем или магнитудой интервала) называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала $\boldsymbol{a}$, т. е. величина

$$|\boldsymbol{a}| := \max\{|a| \mid a \in \boldsymbol{a}\} = \max\{|\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}|\}$$

Для произвольного интервала $\boldsymbol{a}$ определение модуля можно переписать также в виде

$$|\boldsymbol{a}| := \max\{-\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}\}.$$

Мигнитуда интервала

Определение. Мигнитудой интервала $\boldsymbol{a}$ называется наименьшее из абсолютных значений точек интервала $\boldsymbol{a}$, т. е. величину

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle := \min\{|a| \mid a \in \boldsymbol{a}\} = \begin{cases} \min\{|\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a}, \\ 0, & \text{если } 0 \in \boldsymbol{a}. \end{cases}$$

Уравновешенные интервалы

Определение. Интервал $\boldsymbol{a}$ называется уравновешенным, если

$$\underline{\boldsymbol{a}} = -\overline{\boldsymbol{a}}$$

или, что равносильно,

$$\mathrm{mid}\ \boldsymbol{a} = 0$$

.

Свойства середины интервалов

Свойства середины:

$$\begin{aligned} \operatorname{mid}(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) &= \operatorname{mid} \boldsymbol{a} \pm \operatorname{mid} \boldsymbol{b}, \\ \operatorname{mid}(a \cdot \boldsymbol{b}) &= a \cdot \operatorname{mid} \boldsymbol{b}, \qquad \text{если} \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Основные свойства радиуса интервалов

Основные свойства радиуса:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{rad} \boldsymbol{a} \leq \operatorname{rad} \boldsymbol{b}, \\
\operatorname{rad} (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) \quad &= \quad \operatorname{rad} \boldsymbol{a} + \operatorname{rad} \boldsymbol{b}, \\
\operatorname{rad} (a \cdot \boldsymbol{b}) \quad &= \quad |a| \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{b}, \qquad \text{если} \quad a \in \mathbb{R}. \\
\max\{|\boldsymbol{a}| \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{b},\ \operatorname{rad} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}|\} \quad &\leq \quad \operatorname{rad} (\boldsymbol{ab}) \leq |\boldsymbol{a}| \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{b} + \operatorname{rad} \boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}|, \\
\operatorname{rad} \left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\right) \quad &= \quad \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{a}}{\langle \boldsymbol{a} \rangle |\boldsymbol{a}|}.
\end{aligned}$$

Сравнение интервалов

Помимо упорядочения интервалов по включению имеет также смысл распространить отношение «$\leq$» между вещественными числами на множество всех интервалов из $\mathbb{IR}$.
Вообще говоря, оно может быть выполнено неединственным образом, приведём наиболее популярное из определений.

Определение. Для интервалов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}$, условимся считать, что $\boldsymbol{a}$ не превосходит $\boldsymbol{b}$ и писать

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$$

тогда и только тогда, когда

$$\underline{\boldsymbol{a}} \leq \underline{\boldsymbol{b}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}.$$

Свойства абсолютной величины и мигнитуды

Свойства абсолютной величины и мигнитуды:

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \Longrightarrow |\boldsymbol{a}| \le |\boldsymbol{b}| \text{ и } \langle \boldsymbol{a} \rangle \ \ge \ \langle \boldsymbol{b} \rangle,$$

$$|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|, \quad \langle \boldsymbol{ab} \rangle = \langle \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b} \rangle,$$

$$|\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|/\langle \boldsymbol{b} \rangle, \langle \boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a} \rangle / |\boldsymbol{b}|,$$

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{a}} \right| = \langle \boldsymbol{a} \rangle^{-1}, \qquad \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a}.$$

Возведение интервала в степень определим стандартным образом:

$$\boldsymbol{a}^n = \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{a}}_{n\ \text{раз}}$$

Предложение. Для любого интервала $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}$

$$\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{a}^n) \le n|\boldsymbol{a}|^{n-1}\mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}. \quad (\star)$$

Если $0 \in \boldsymbol{a}$, то

$$\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{a}^n) = |\boldsymbol{a}|^{n-1}\mathrm{rad}\ \boldsymbol{a}. \quad (\star\star)$$

Возведение интервала в степень

Доказательство. Неравенство $(\star)$ докажем индукцией по степени n. Замечая его справедливость при $n = 1$, предположим, что оно уже справедливо при некотором натуральном n. Для оценки радиуса $\boldsymbol{a}^{n+1}$ можно воспользоваться правым неравенством из $(\star)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{a}^{n+1}) &= \mathrm{rad}\,(\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{a}) \\ &\leq |\boldsymbol{a}|^n \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{rad}\,(|\boldsymbol{a}|^n) \cdot |\boldsymbol{a}| \\ &\leq |\boldsymbol{a}|^n \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{a} + n\mathrm{rad}\,(|\boldsymbol{a}|^{n-1})\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{a}| \\ &\leq (n+1)|\boldsymbol{a}|^n)\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}, \end{aligned}$$

т.е. доказываемое соотношение $(\star)$ для степени $(n+1)$.

Возведение интервала в степень

При доказательстве равенства $(\star)$ предположим сначала для определённости, что $\operatorname{mid} \boldsymbol{a} \geq 0$, т. е. $|\boldsymbol{a}| = \overline{\boldsymbol{a}}$. Покажем, что тогда в условиях предложения

$$\boldsymbol{a}^n = |\boldsymbol{a}|^{n-1} \cdot \boldsymbol{a}. \qquad (\triangle)$$

Для n $= 1$ это соотношение очевидно. При n $= 2$ по формулам умножения нульсодержащих интервалов имеем

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}^2] = \overline{\boldsymbol{a}} \cdot [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}] = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}.$$

Далее, если $|\mathbf{a}|^n = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot \mathbf{a}$ для некоторого натурального n, то

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^{n-1}\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^n\mathbf{a}.$$

так что в силу принципа математической индукции равенство выполняется для любых n. Беря радиус от обеих частей равенства ($\triangle$), получаем ($\star\star$). ■

Заметим, что уменьшение радиуса степени нульсодержащего интервала приводит к его «сжатию», что может служить основой для построения итерационного процесса.

Относительные характеристики.

Радиус и ширина интервала характеризуют абсолютный размер интервальной неопределённости, но иногда бывает полезно иметь меру относительного размаха интервала.

Естественно было бы взять для описания относительной неопределённости, выражаемой интервалом $\boldsymbol{a}$, конструкцию вроде отношения $\overline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{a}}$, но она годится лишь для интервалов, не содержащих нуль.

Х.Рачек рассмотрел не относительную ширину, а противоположную ей по смыслу относительную «узость» (меру сосредоточенности) ненулевых интервалов, и предложил для её описания функционал

$$\chi(\boldsymbol{a}) := \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a}}/\overline{\boldsymbol{a}}, & \text{если } |\underline{\boldsymbol{a}}| \leq |\overline{\boldsymbol{a}}|, \\ \overline{\boldsymbol{a}}/\underline{\boldsymbol{a}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для нулевых интервалов функционал χ не определён. Ясно, что

$$-1 \leq \chi(\boldsymbol{a}) \leq 1,$$

и $\chi(\boldsymbol{a}) = 1$ тогда и только тогда, когда $0 \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Значение -1 функционал χ принимает на уравновешенных интервалах вида $[-a, a]$, $a \geq 0$, симметричных относительно нуля.

Относительные характеристики.

Определение. Для ненулевого интервала $\boldsymbol{a}$ относительным интервалом будем называть интервал $[\chi(\boldsymbol{a}), 1]$.
Ширину относительного интервала, т. е. величину $1 - \chi(\boldsymbol{a})$, назовём относительной шириной интервала $\boldsymbol{a}$.

Характеристики интервалов и их свойства

Радиус (ширина) интервалов при сложении и вычитании может только складываться и поэтому противоположного (обратного по сложению) элемента для невырожденных интервалов в $\mathbb{IR}$ нет.
При умножении невырожденного интервала на ненулевой интервал радиус произведения никогда не может сделаться нулевым.

Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций имеют более слабые «свойства сокращения»:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} &\Longrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}, 0\notin\boldsymbol{a}, 0\notin\boldsymbol{b}, 0\notin\boldsymbol{c} &\Longrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Алгебраические свойства интервальных операций

Интервальная арифметика $\mathbb{IR}$ является алгебраической системой и частично упорядоченным множеством с отношением порядка по включению « $\subseteq$». В $\mathbb{IR}$ нейтральными элементами относительно сложения и вычитания является нуль, а относительно умножения и деления – единица:

$$\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} - 0 = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a} \cdot 1 = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}/1 = \boldsymbol{a}.$$

Интервальные арифметические операции обладают свойствами:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \quad \text{— ассоциативность сложения,}$$
$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \quad \text{— ассоциативность умножения,}$$
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{— коммутативность сложения,}$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{— коммутативность умножения.}$$

Дистрибутивность умножения относительно сложения в общем случае отсутствует:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}.$$

Пример

$$\begin{aligned} [1, 2] \cdot (1 - 1) &= 0, \\ [1, 2] \cdot 1 - [1, 2] \cdot 1 &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Имеет место более слабое свойство:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}.$$

называемое субдистрибутивностью умножения относительно сложения.
Дистрибутивность выполняется в ряде частных случаев:

$$\begin{aligned} a \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a \cdot \boldsymbol{b} + a \cdot \boldsymbol{c}, &\qquad \text{если } a \in \mathbb{R}, \\ \boldsymbol{a} \cdot (b + c) = \boldsymbol{a} \cdot b + \boldsymbol{a} \cdot c, &\qquad \text{если } b, c \geq 0 \text{ или } b, c \leq 0. \end{aligned}$$

Проблемы интервальной арифметики

- все интервалы с ненулевой шириной, т. е. большинство элементов $\mathbb{IR}$, не имеют обратных элементов по отношению к арифметическим операциям,
- арифметические операции связаны друг с другом весьма слабым соотношением субдистрибутивности, а полноценная дистрибутивность умножения (и деления) относительно сложения и вычитания не имеет места.

Как следствие, в $\mathbb{IR}$ элементарные уравнения относительно неизвестной переменной x

$$\boldsymbol{a} + x = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} \cdot x = \boldsymbol{b}$$

и им подобные не всегда имеют решение.

Проблемы интервальной арифметики - упорядочение по включению

Неудовлетворительны порядковые свойства классической интервальной арифметики относительно естественного упорядочения по включению «$\subseteq$». В частично упорядоченных множествах важна возможность взятия для любых двух элементов их нижней грани $\wedge$ и верхней грани $\vee$ относительно рассматриваемого порядка.

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} := \inf_{\subseteq}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = [\max\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}]$$

— взятие нижней грани относительно «$\subseteq$».

$$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} := \sup_{\subseteq}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = [\min\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{b}\}, \max\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}]$$

— взятие верхней грани относительно «$\subseteq$».
Например, не определено $[1, 2] \wedge [3, 4]$.

Проблемы интервальной арифметики - минимаксные задачи

Это постановки, которые требуют взятия минимаксов функций многих переменных, т. е. смешанных экстремумов, в которых по части аргументов функции берётся минимум, а по оставшимся — максимум.

Но классическая интервальная арифметика (как и её известные обобщения) разработаны для оценивания областей значений арифметических операций и выражений или, иначе, для вычисления чистых минимумов и максимумов по всем переменным сразу.

Полная интервальная арифметика

Э.Каухер — в 70-е годы XX века — $\mathbb{KR}$.
Достоинства:

- обратимость арифметических действий
- упорядочение по включению
- минимаксность

Плата — «правильные» и «неправильные» интервалы, операция «дуализации» интервалов.
Реализация — Java **Jinterval**.
http://www.nsc.ru/interval/Programing/SMO2011-JInterval.pdf
Реализация — Python **kaucherpy**.
https://github.com/lmtortelli/kaucherpy

Обсудим отдельно.

Определение. Отображения

$$\texttt{dist} : \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

определяемые как

$$\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\}$$

называют расстоянием (метрикой) на множествах интервалов $\mathbb{IR}$. Расстояние dist между интервалами является, фактически, чебышёвским расстоянием (максимум-расстоянием) между точками интервальной плоскости $\mathbb{R}^2$, изображающими эти интервалы в координатах «левый конец-правый конец».

Метрика и топология на множествах интервалов

Свойства расстояний

1. $\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq 0$, $\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
2. $\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \texttt{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$
3. $\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq \texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \texttt{dist}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

Предложение. Для любых интервалов

$$\texttt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \max\left\{\min\{t \in \mathbb{R}_+ | \boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} + t \cdot [-1, 1]\}, \min\{t \in \mathbb{R}_+ | \boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{a} + t \cdot [-1, 1]\}\right\}$$

если на $\mathbb{R}^n$ задано некоторое расстояние d, то **хаусдорфово расстояние** между компактными множествами $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется как

$$d(A, B) = \max\{\mathtt{sup}_{a\in A}\ \mathtt{inf}_{b\in B}\ d(a, b), \mathtt{sup}_{b\in B}\ \mathtt{inf}_{a\in A} d(a, b)\}$$

Геометрический смысл $d(A, B)$ — максимум из таких минимальных возможных неотрицательных чисел r_A и r_B, что r_B-окрестность множества A относительно расстояния d содержит B, а r_A-окрестность множества B относительно расстояния d содержит множество A.

$\mathtt{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ является хаусдорфовым расстоянием.

Более общий взгляд

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR} \subseteq \mathbb{KR} \subseteq \mathbb{TR}, \mathbb{MR}$$

Зачем?!

Не всё сразу ...

Принцип соответствия

Принцип соответствия в методологии науки — это утверждение, что любая новая научная теория должна включать старую теорию и её результаты как частный предельный случай.

Принцип соответствия

«В наиболее общем виде принцип соответствия может быть сформулирован следующим образом: теории, справедливость которых была экспериментально установлена для определённой группы явлений, с появлением новых теорий не отбрасываются, но сохраняют своё значение для прежней области явлений как предельная форма и частный случай новых теорий. Выводы новых теорий в той области, где была справедлива старая “классическая” теория, переходят в выводы классической теории.
Математический аппарат новой теории, содержащий некоторый характеристический параметр, значения которого различны в старой и новой области явлений, при надлежащем значении характеристического параметра переходит в математический аппарат старой теории».

Принцип соответствия

Методологическое значение принципа соответствия состоит в том, что он может служить средством построения и коррекции новых теоретических систем, новых систем понятий.

Принцип соответствия впервые был предложен Н. Бором в начале XX века для объяснения взаимного соотношения нарождавшейся квантовой механики и традиционной физики макрообъектов. Он понадобился как средство для обеспечения «непрерывной склейки» новой теории с классической физикой, которая прекрасно описывает и объясняет огромное количество окружающих нас явлений и не может быть просто отвергнута на том основании, что она «стара», «немодна» и т. п.

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR} \subseteq \mathbb{KR} \subseteq \mathbb{TR}, \mathbb{MR}$$

Принцип вложенных интервалов

Для любителей математики . . .

Принцип вложенных интервалов

Предложение. Последовательность интервалов $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательности концов $\{\underline{a}_k\}$ и $\{\overline{a}_k\}$ сходятся в $\mathbb{R}^n$. При этом

$$lim_{k\to\infty}\mathbf{a}_k = [lim_{k\to\infty}\underline{a}_k, lim_{k\to\infty}\overline{a}_k] \,.$$

Предложение (принцип вложенных интервалов)
В классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$ всякая вложенная последовательность интервалов $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. такая, что $\mathbf{a}_{k+1} \subseteq \mathbf{a}_{k+1}, \;\; k = 1, 2, \cdots,$ имеет предел и

$$lim_{k\to\infty}\mathbf{a}_k = \cap_{k\to\infty}\mathbf{a}_k.$$

Следует из теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности

Принцип вложенных интервалов

Одномерный случай

Теорема (предельная теорема Крейновича, 1995)

Сумма замкнутых множеств вещественной оси $\mathbb{R}$, диаметр каждого из которых не превосходит δ, отличается в хаусдорфовой метрике от интервала не более чем на δ. Если для любого $\delta > 0$ множество E вещественной оси может быть представлено как конечная сумма замкнутых множеств диаметра не более δ, то E является интервалом.

Теорема В пространстве $\mathbb{R}^n$ сумма замкнутых множеств, диаметр каждого из которых не превосходит δ, отличается в хаусдорфовой метрике не более чем на δ от связного множества. Если для любого положительного δ множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ может быть представлено как конечная сумма замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$ диаметра не более δ, то E связно.

Определение. Подмножество линейного нормированного пространства назовём бесконечно делимым, если для любого положительного δ оно может быть представлено в виде конечной суммы Минковского замкнутых подмножеств диаметра не более δ.

Теорема (теорема Рогинской-Шульмана, 2018) В пространстве $\mathbb{R}^n$ компактное множество является выпуклым тогда и только тогда, когда оно бесконечно делимо.