Методы численного анализа
Лабораторная работа № 1
"Численные методы решения ОДУ"

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

- Отчёт предоставляется в электронном виде.
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость.
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы.
- Работа оценивается по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения работы и срока сдачи работы.
- Работа должна быть выслана по адресу cma.vorobiov@gmail.com. Необходимо прислать заархивированную папку (.zip, например), в которой будут содержаться отчёт и папка с проектом программы. При невозможности отправления заархивированной папки, рекомендуется переименовывать её на файл с расширением «.mna».

Задание 1 С помощью интерполяционного метода Адамса 4-ого порядка найдите решение задачи Коши, используя шаги $h_1 = 10^{-1}$, $h_2 = 10^{-5}$, $h_3 = 10^{-10}$. Сравните полученные приближенные решения с точным решением, найденным аналитически. Постройте графики точного и трёх приближённых решений исходной задачи (на одной координатной плоскости). Постройте графики $|y_A - y_T|$, где y_A – приближенное решение, полученное с помощью использованного метода Адамса, а y_T – точное решение исходной задачи Коши. Для решения нелинейных уравнений используйте метод, указанный в варианте (укажите максимальное количество итераций, необходимых для получения нужного корня).

а) $u^2 - 2tu + t^2u' = 0,\ \ u(2) = 1,\ \ t \in [2; 12];$

б) $tu' = u - t\ \mathrm{ctg}\dfrac{u}{t},\ \ u(2) = \dfrac{\pi}{3},\ \ t \in [2; 12];$

в) $tu' - u\ln\dfrac{u}{t} = 0,\ \ u(1) = e^2,\ \ t \in [1; 11];$

г) $u' + u^2 - 2t^2u + t^4 - 2t - 1 = 0,\ \ u(0) = -1,\ \ t \in [1; 11];$

д) $u' = u\operatorname{tg} t - \dfrac{1}{\cos t}$, $u(0) = 1$, $t \in [0; 1.5]$;

е) $u' + 2tu = e^{-t^2}$, $u(0) = 2$, $t \in [0; 10]$;
ж) $u' - u\cos t = \sin 2t$, $u(0) = 3$, $t \in [0; 10]$;
з) $u' + t\,u - t\,u^3 = 0$, $u(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $t \in [0; 10]$;
и) $t^2(u' + u^2) = 2$, $u(1) = \dfrac{1}{2}$, $t \in [1; 11]$;
к) $t\,u' - u\left(t\ln\left(\dfrac{t^2}{u}\right) + 2\right) = 0$, $u(1) = 2$, $t \in [1; 11]$;

Задание 2 Методом предиктор-корректор четвёртого порядка точности найдите решение задачи Коши, обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-10}$ автоматическим выбором шага. Сравните точное решение, найденное аналитически, с полученным приближенным решением. Постройте график точного и полученного приближенного решений. Постройте график изменения величины шага.

а) $u' = \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}u - e^t$, $u(0) = 2$, $t \in [0; 4]$;
б) $u' = \dfrac{u^2 + 1}{e^t + 1}$, $u(0) = 0$, $t \in [0; 4]$;
в) $u' = e^{-u}(t + 1)$, $u(0) = 0$, $t \in [0; 4]$;
г) $u' = e^{-t}(u^2 + 1)$, $u(0) = 0$, $t \in [0; 4]$;
д) $u' = u\ln(t + 1)$, $u(0) = 1$, $t \in [0; 4]$;
е) $u' = t\dfrac{u}{1 + t^2} + \sqrt{1 + t^2}$, $u(0) = 1$, $t \in [0; 4]$;
ж) $u' = \dfrac{u^2 - u + 1}{t}$, $u(1) = \dfrac{1}{2}$, $t \in [1; 5]$;
з) $u' = \dfrac{2 - u}{\operatorname{ctg} t}$, $u(0) = 0$, $t \in [0; 4]$;
и) $u' = u - e^t - t^2 + 2t$, $u(0) = 1$, $t \in [0; 4]$;
к) $u' = \dfrac{u^2 + 1}{t\,u}$, $u(1) = 0$, $t \in [1; 5]$;

Задание 3 Методом сеток найдите приближенное решение граничной задачи с $h = 10^{-6}$. Также решите данную задачу методом стрельбы (для решения задач Коши используйте методы согласно своему варианту). Сравните полученные приближенные значения. Постройте график полученных приближенных решений.

а) $\begin{cases} u'' - 2u' + 0.5\,u = t, \\ u'(0) - 2u(0) = 1, \\ -u'(1) = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u'' - \dfrac{1}{t}u' + \dfrac{1}{t^2}\,u = \dfrac{1}{t^2}, \\ u'(1) = 2, \\ 2u'(2) + 3u(2) = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} u'' - e^{-t}u = t^2, \\ 2u(1) - 3u' = 0, \\ u'(2) = 4. \end{cases}$

г) $\begin{cases} u'' + \dfrac{t}{t^2+1}u = \sin t\, e^{-t}, \\ u(1) = u'(1) - 3, \\ u'(2) - 3u(2) = 1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} u'' + \dfrac{9}{2(3t+1)}u' = \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}, \\ 9u(0) = u'(0) + 1, \\ u'(1) = 2. \end{cases}$

е) $\begin{cases} u'' - (t^2+1)u' + (t+1)u = (t-1)\cos t\,, \\ u'(2) + 3u(2) = 4, \\ u(3) = 2. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} u'' - \dfrac{1}{2(t+4)}u' - \sqrt{t+4}\,u = \dfrac{-2}{3}(t+4)^2, \\ u'(0) = 2, \\ 5u'(1) + 3u(1) = 15\sqrt{5}. \end{cases}$

з) $\begin{cases} u'' + \dfrac{3}{(2t+1)}u' = \dfrac{4}{\sqrt{2x+1}}, \\ 6u(0) = u'(0) + 1, \\ u'(1) = \sqrt{3}. \end{cases}$

и) $\begin{cases} u'' - u' - 2\,u = -3e^{-t}, \\ u'(0) = 0, \\ u(1) + 2u'(1) = 0. \end{cases}$

к) $\begin{cases} u'' + 2xu' - (t^2+1)u = -2t^4 + 6t^2 + 4, \\ u'(0) + 0.5u(0) = 0, \\ u'(1) - u(1) = 2. \end{cases}$