МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчёт по лабораторной работе № 1 "Численные методы решения ОДУ"

Преподаватель Воробьев А.В.
Студент Иванчук М.Ю.

2018

Мой вариант:

№	Студент	Задание 1		Задание 2	Задание 3	
		вариант	метод решения нел. ур-ий	вариант	вариант	методы решения з. Коши
4	Иванчук Максим	г	метод простых итераций	б	а	Неявный метод Рунге-Кутты 3-его порядка

Задание 1:

Условие:

С помощью интерполяционного метода Адамса 4-ого порядка

найдите решение задачи Коши, используя шаги $h_1 = 10^{-1}$, $h_2 = 10^{-5}$,

$h_3 = 10^{-10}$. Сравните полученные приближенные решения с точным решением, найденным аналитически. Постройте графики точного и трёх приближённых решений исходной задачи (на одной координатной плоскости). Постройте графики $|y - y|$, где y_A – приближенное решение, полученное с помощью использованного метода Адамса, а y_T – точное решение исходной задачи Коши. Для решения нелинейных уравнений используйте метод, указанный в варианте (укажите максимальное количество итераций, необходимых для получения нужного корня).

г) $u' + u^2 - 2t^2 u + t^4 - 2t - 1 = 0$, $u(2) = 6.36704$, $t \in [2;12]$;

Решение:

Общая формула интерполяционного метода Адамса:

$$y_{n+1} = y_n + h * \sum_{i=-1}^{q} A_i f(x_{n-i}, y_{n-1}), \text{ где } \sum_{i=-1}^{q} A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = 1,2,...,q+1$$

В нашем случае q=2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

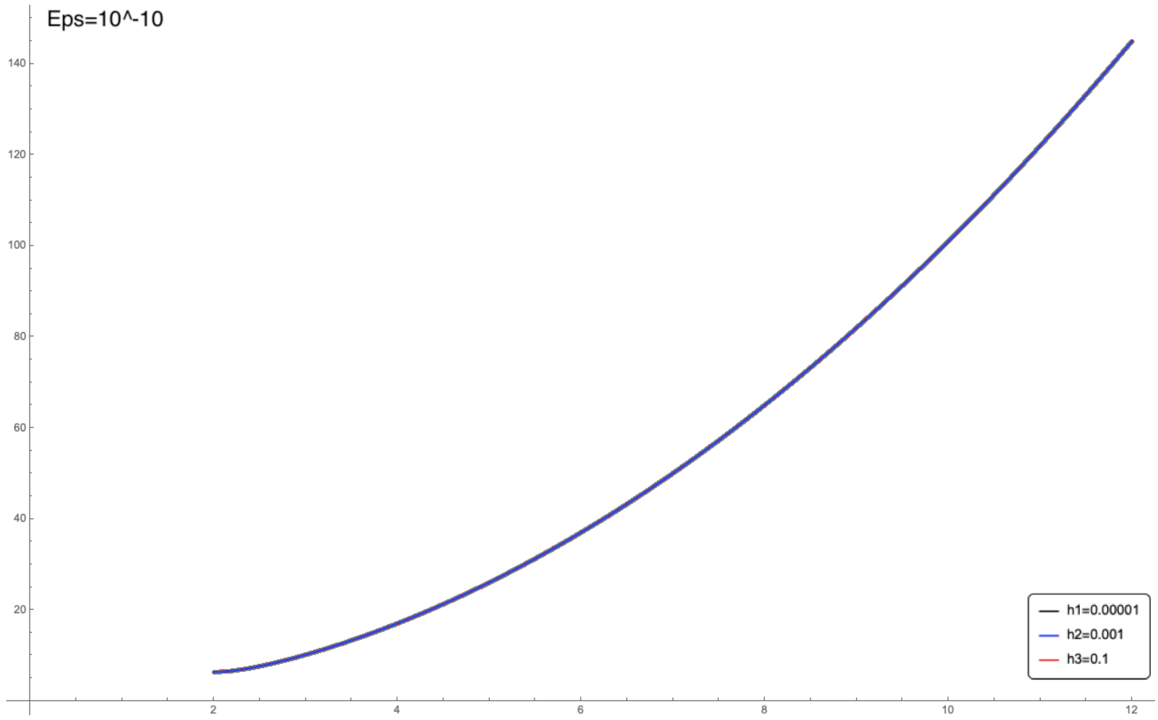
Для решения нелинейных уравнений используем метод простых итераций

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^k), y_{n+1}^k = yn$$

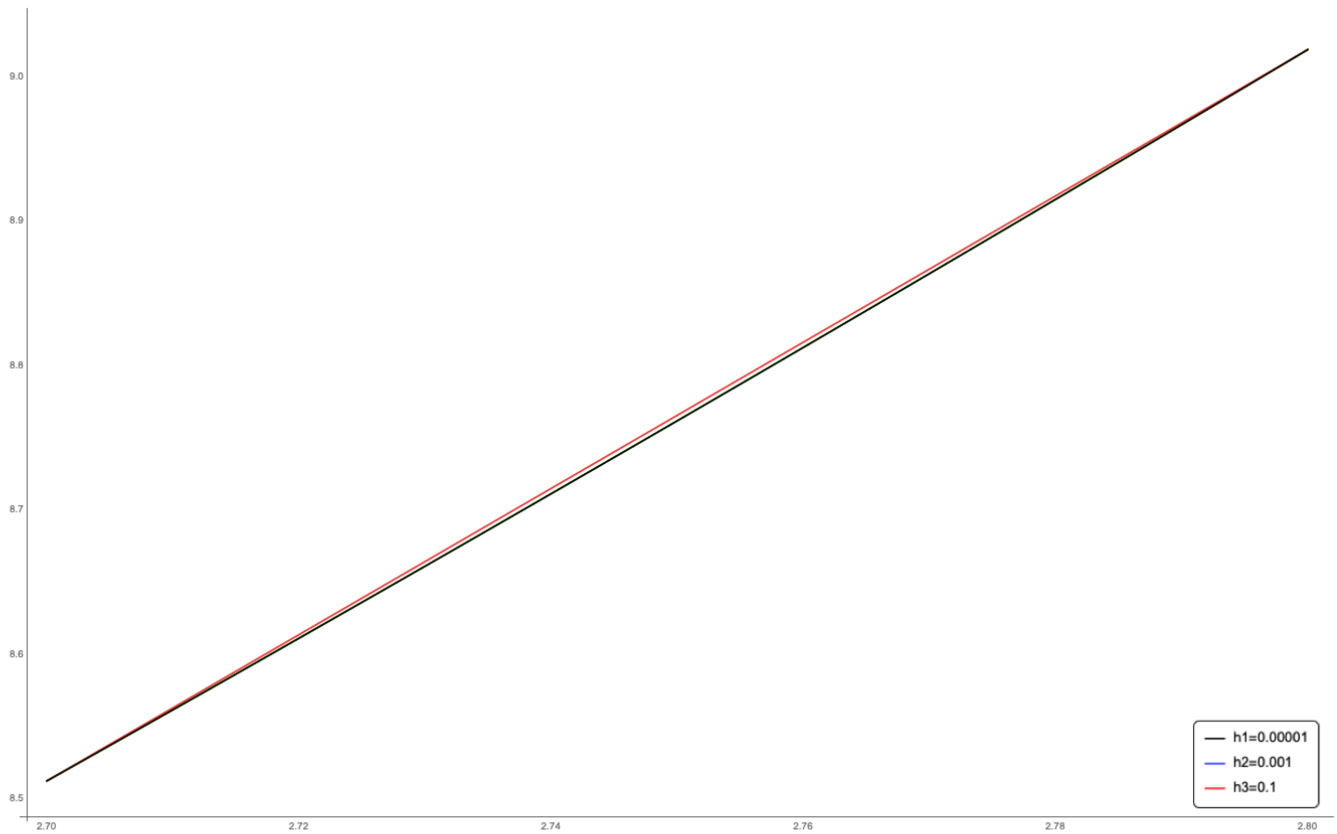
Листинг программы представлен в папке Lab1

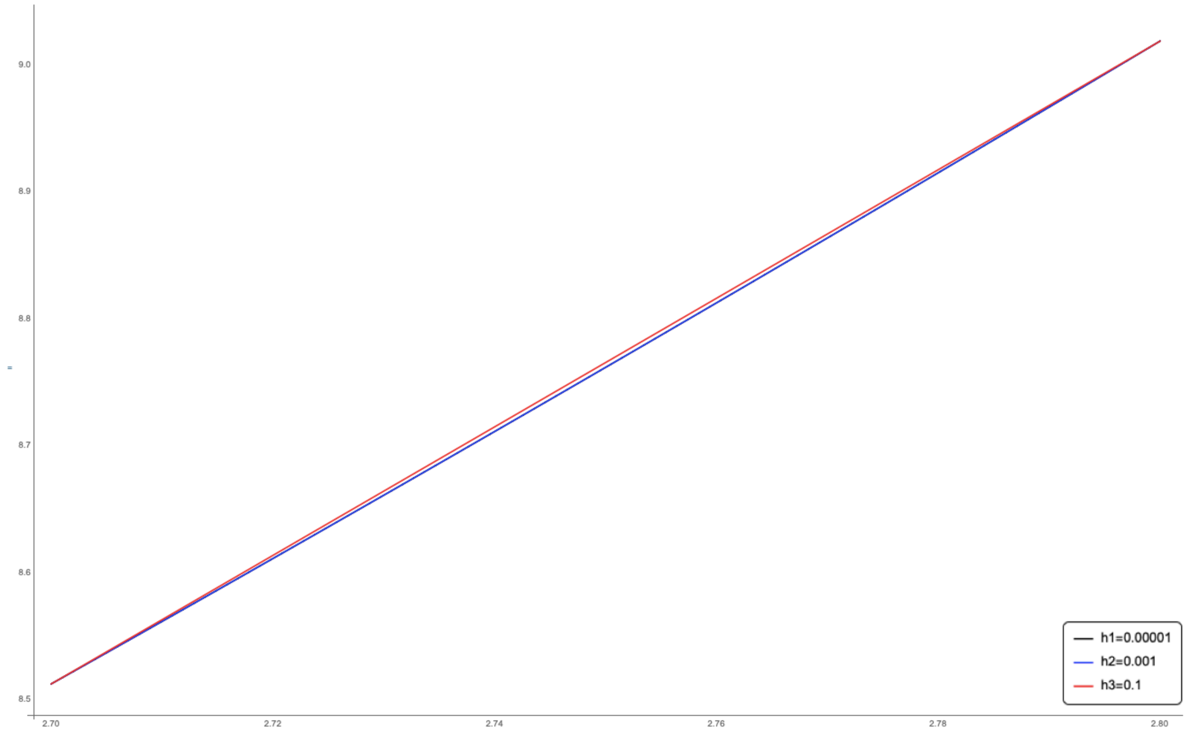
Результат:

$$y(x) = e^2(x^2+1) - \frac{3e^2(x^2-1)}{e^{2x}-3e^2}$$ - исходная найденная функция



Как показано на графике, на отрезке [2,12], график построенный по точкам при шаге 0.1 совпадает с точным графиком (зеленый цвет), перекрывает его.
Убедимся, так ли это, для этого рассмотрим отрезок [2.7,2.8].





Первый график (наложены 4 графика)

Второй график (наложены 3 графика, без h1=0.00001)

Рассмотрев график, построенные по точкам на мало отрезке , заметно, что графики, построенные по точкам при шагах 0.001 и 0.00001 совпадают и совпадают с функций (точным графиком) и перекрывают его. График, построенных по точкам при шаге 0.1 откланяется от точного, не на малое значение.

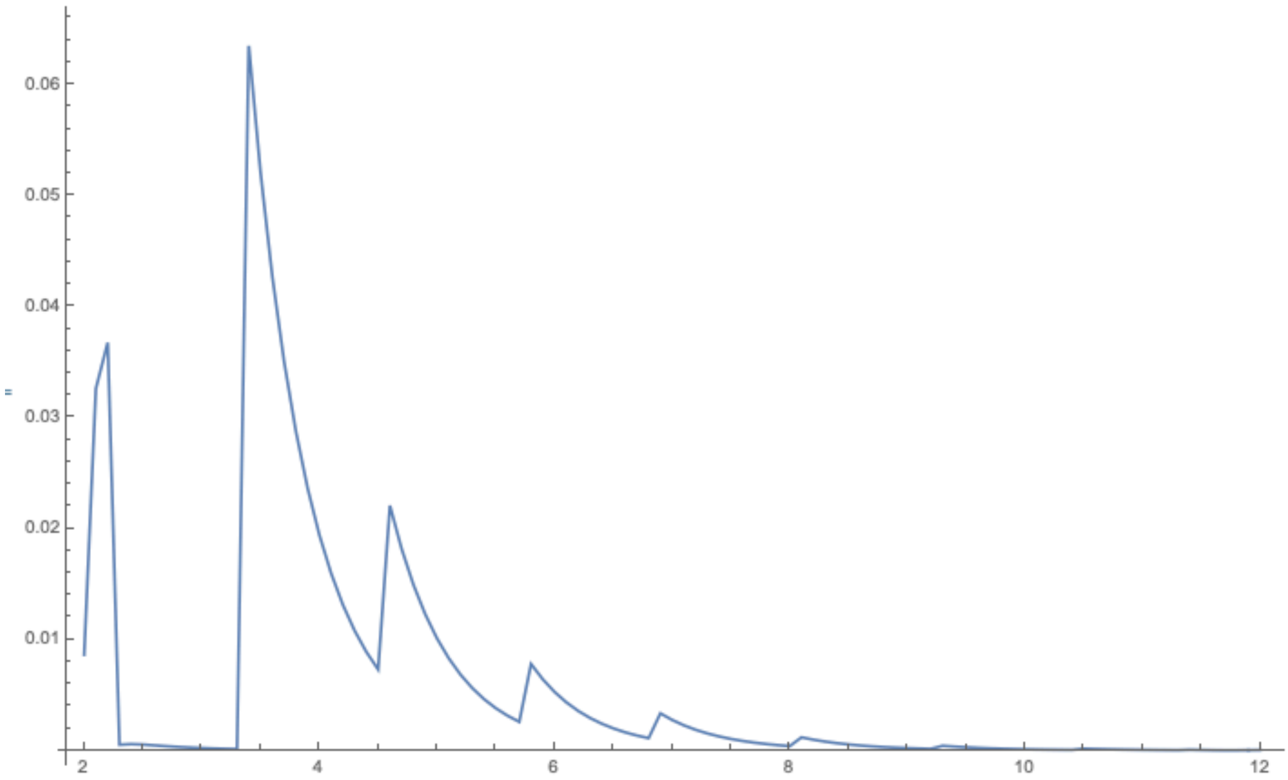


График | $Y_A - Y_T$ |, при шаге h = 0.1

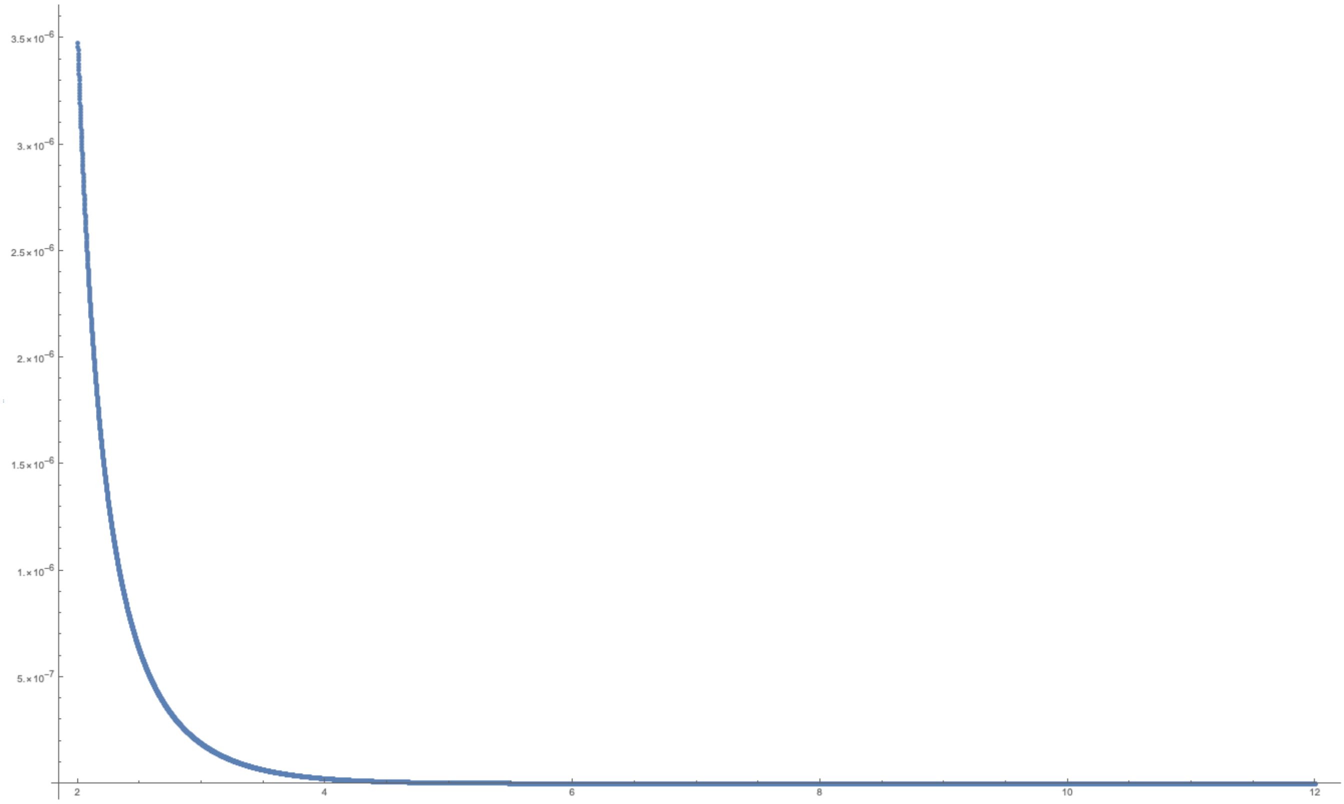


График $| Y_A - Y_T |$, при шаге h = 0.001

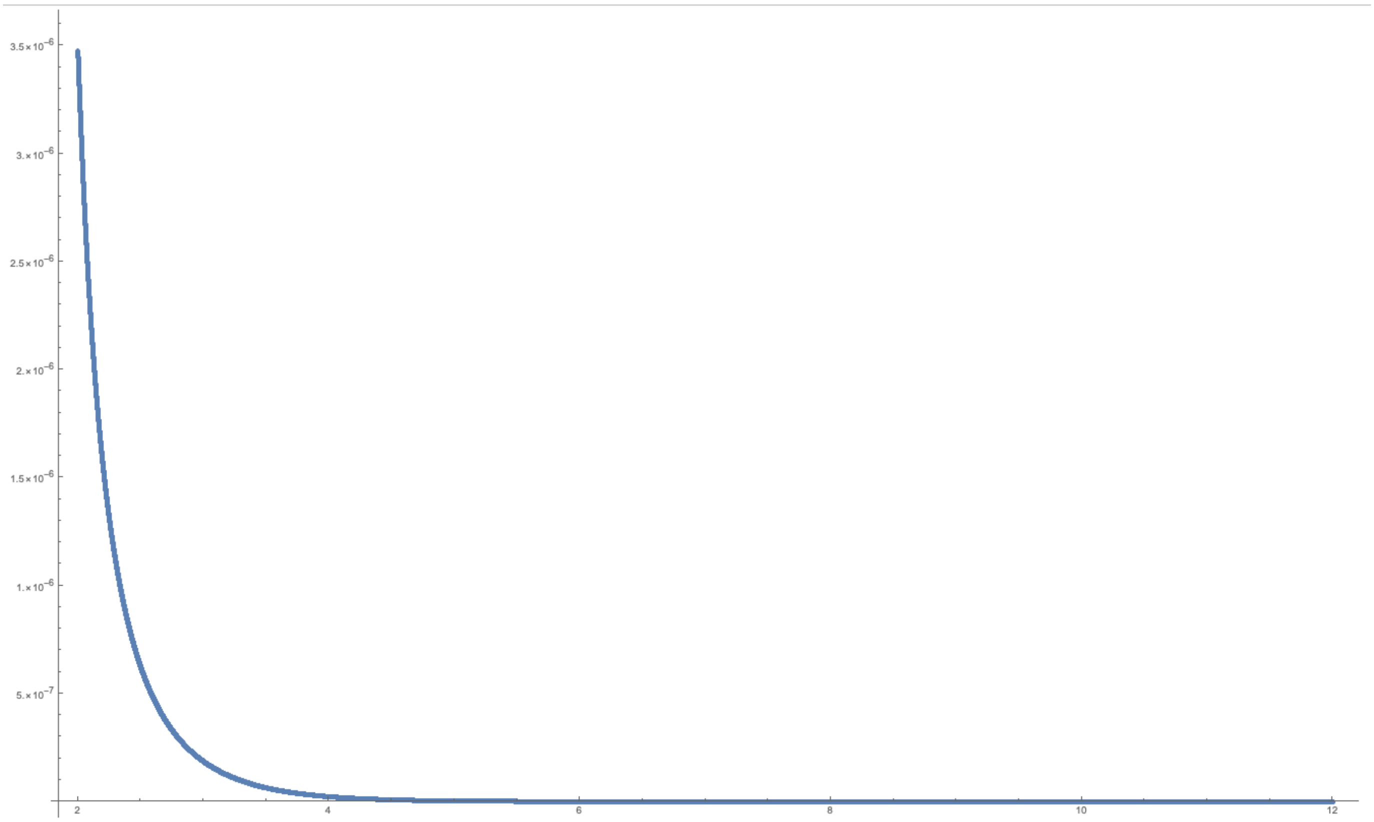


График $| Y_A - Y_T |$, при шаге h = 0.00001

Шаг	h=0.1	h=0.001	h=0.0001
Максимальное количество итераций, необходимых для получения нужного корня	10	4	1

Вывод: При шаге 0.1, иногда, точное значение отличается от полученного нашим алгоритм на большое значение и погрешность при таком шаге велика.
При шагах 0.001 и 0.00001 значения точной функции совпадают с полученными значениями, но с относительно небольшой погрешностью (максимальной 3.5*10^-6)

Задание 2:

Условие: Методом предиктор-корректор четвёртого порядка точности найдите решение задачи Коши, обеспечивая точность $\epsilon = 10^{-10}$ с автоматическим выбором шага. Сравните точное решение, найденное аналитически, с полученным приближенным решением. Постройте график точного и полученного приближенного решений. Постройте график изменения величины шага.

б) $u' = \dfrac{u^2+1}{e^t+1}, u(0)=0, t \in [0;4];$

Решение:

Формула предиктор-корректор четвертого порядка точности

$$y^{[2]}_{n+\frac{1}{m}} = y^{[5]}_n + \frac{h}{m} f^{[5]}_n,$$

$$y^{[4]}_{n+\frac{1}{3}} = y^{[5]}_n + \frac{h}{3}\left(\frac{6-m}{6} f^{[5]}_n + \frac{m}{6} f^{[2]}_{n+\frac{1}{m}}\right),$$

$$y^{[4]}_{n+\frac{1}{2}} = y^{[5]}_n + \frac{h}{8}\left(f^{[5]}_n + 3 f^{[3]}_{n+\frac{1}{3}}\right),$$

$$y^{[4]}_{n+1} = y^{[5]}_n + \frac{h}{2}\left(f^{[5]}_n - 3 f^{[3]}_{n+\frac{1}{3}} + 4 f^{[4]}_{n+\frac{1}{2}}\right) \text{ — предиктор,}$$

$$y^{[5]}_{n+1} = y^{[5]}_n + \frac{h}{6}\left(f^{[5]}_n + 4 f^{[4]}_{n+\frac{1}{2}} + f^{[4]}_{n+1}\right) \text{ — корректор,}$$

Результат:

$y(x) = tg(x - ln(e^x + 1) + ln(2))$ - исходная найденная функция

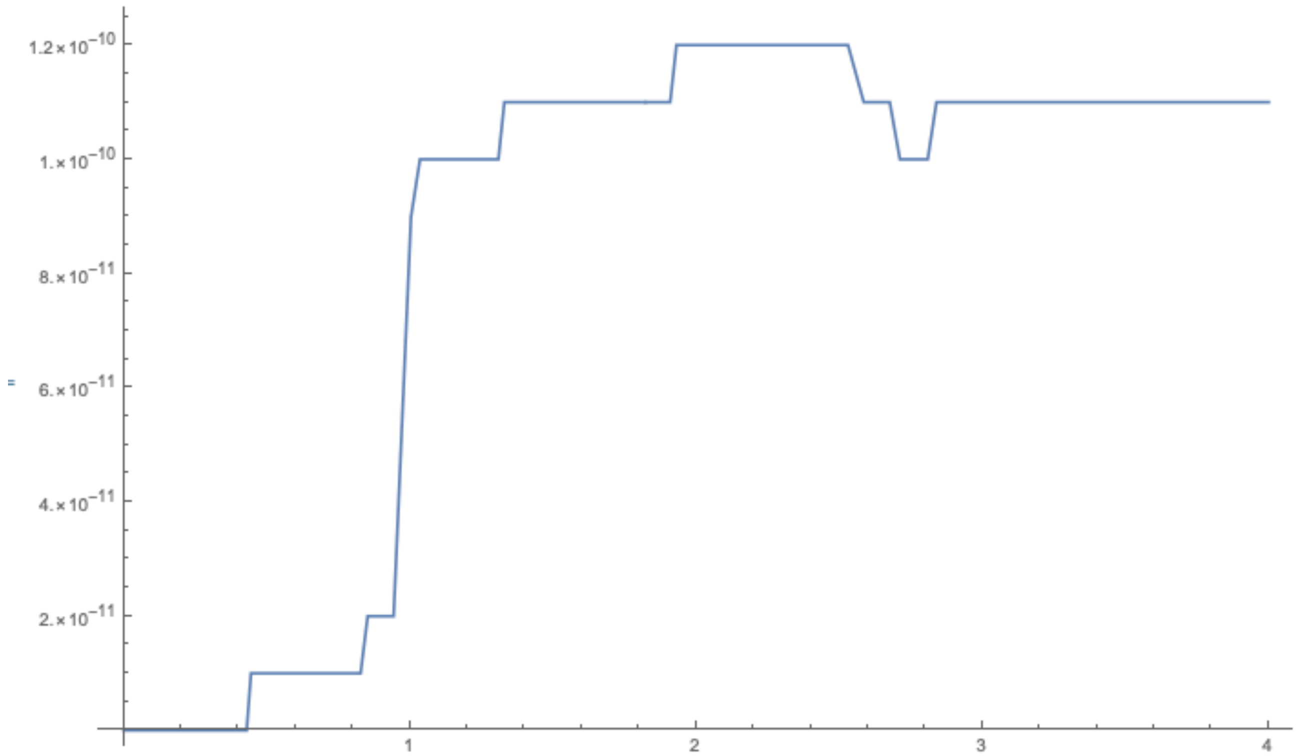
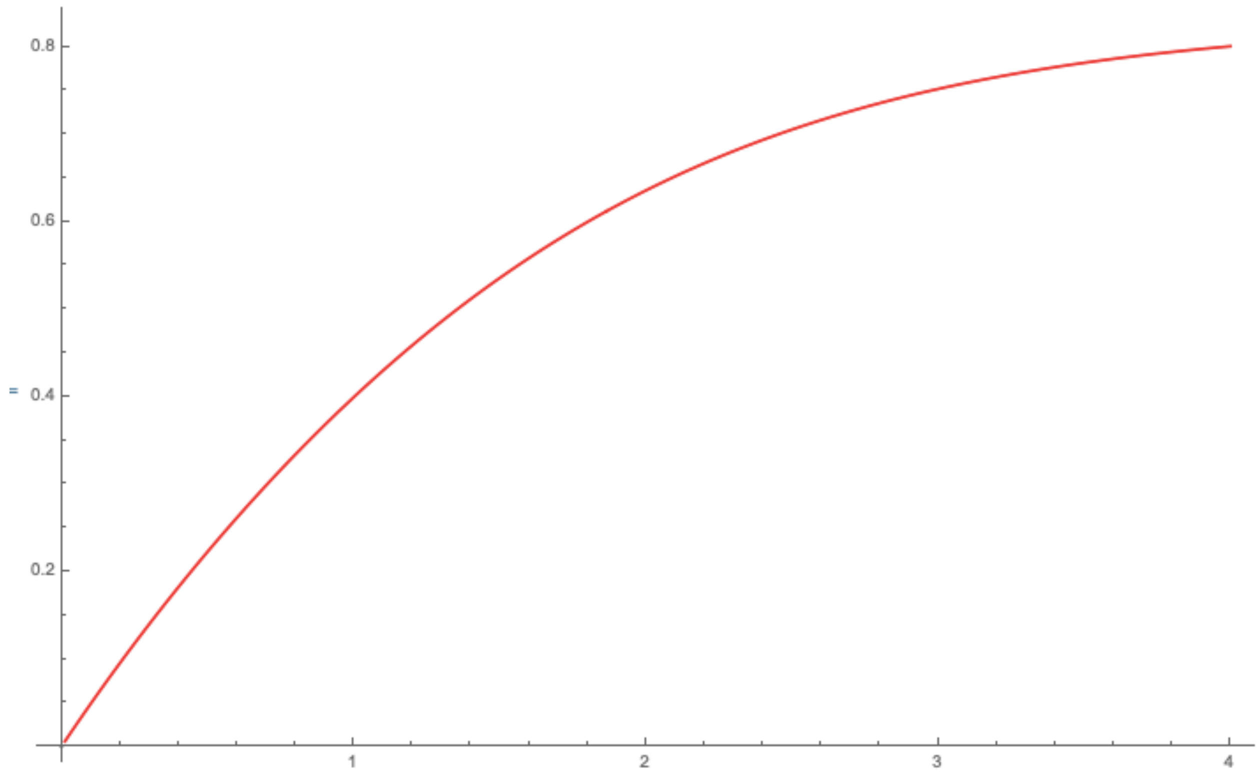
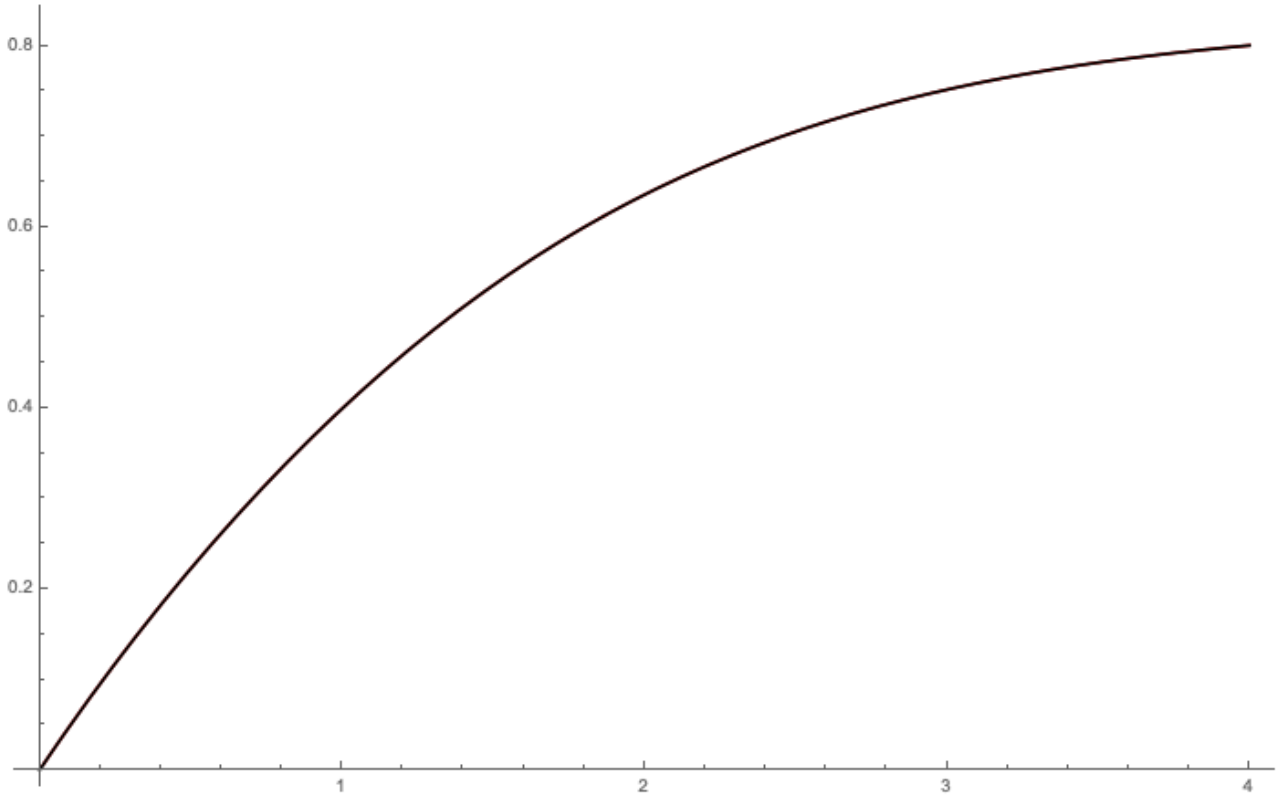


График |y(x)-Y_t|, где Y_t , полученное значение.

Значение функции, полученное методом предиктор-корректор 4-го порядка с автоматическим выбором шага, является достаточно точным, с максимальной погрешностью 1.2*10^-10



График, построенный по точкам, найденных методом предиктор-корректор 4-го порядка с автоматическим выбором шага.



2 совмещенных графика. График точного решения, черного цвета. Графики перекрываются.

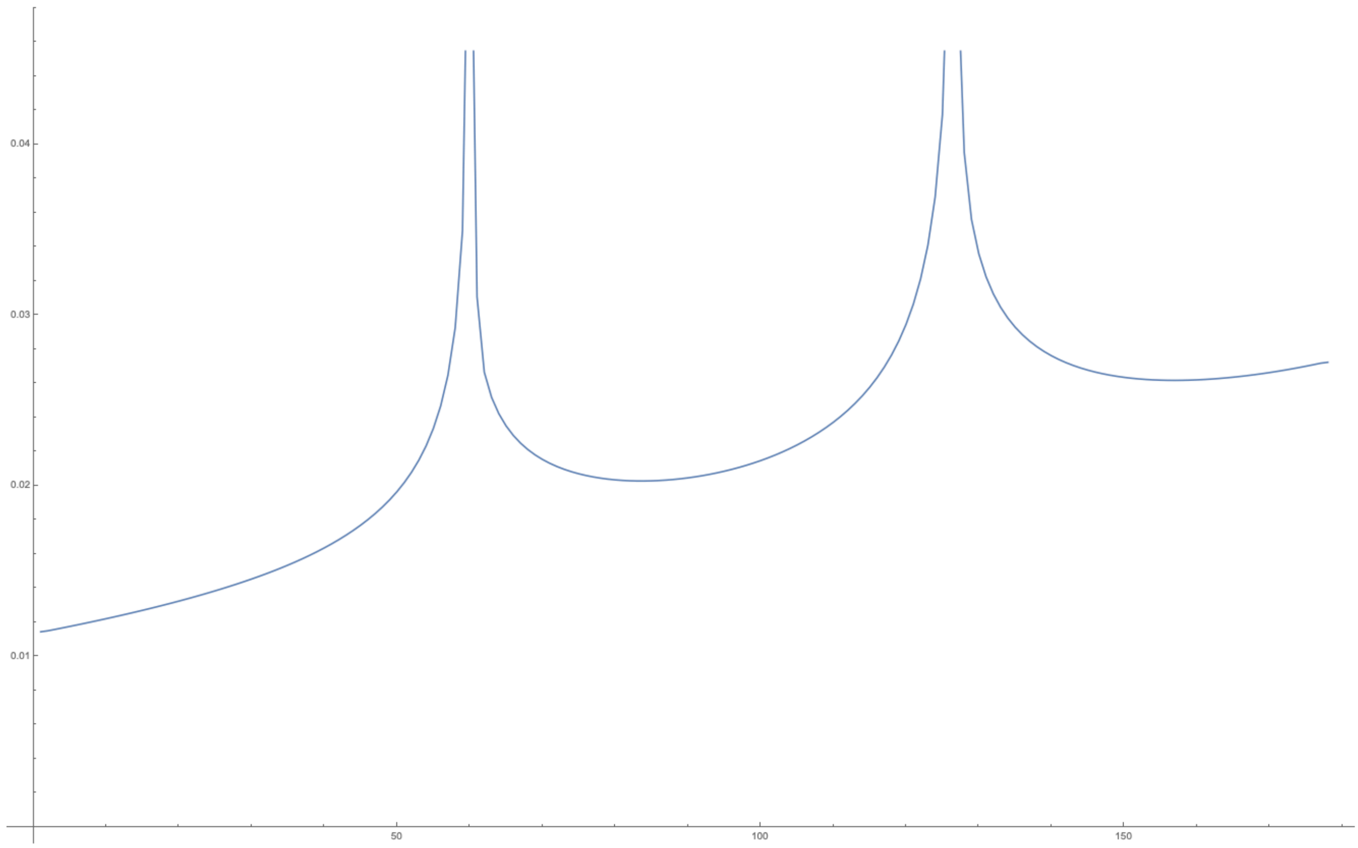


График изменения величины шага

Листинг программы представлен в папке Lab2

Вывод: Использованный метод, предиктор-корректор 4-го порядка с автоматическим выбором шага, с максимальной погрешностью 1.2*10^-10, что позволяет достаточно точно вычислить значение исходной функции.

Задание 3:

Условие: Методом сеток найдите приближенное решение граничной задачи с h =10^{-6}. Также решите данную задачу методом стрельбы (для решения задач Коши используйте методы согласно своему варианту). Сравните полученные приближенные значения. Постройте график полученных приближенных решений.

А) $u'' - 2u' + 0.5u = t$,

$$u'(0) - 2u(0) = 1,$$

$$-u'(1) = 2.$$

Решение:

Будем использовать формулы ниже:

$u(x_k - h) = u(x_k) - hu'(x_k) + h^2u''(x_k)$- ряд Тейлора

$u'(x_k) = \dfrac{u(x_k + h) - u(x_k - h)}{2h}$ - разностная схема 1-го порядка

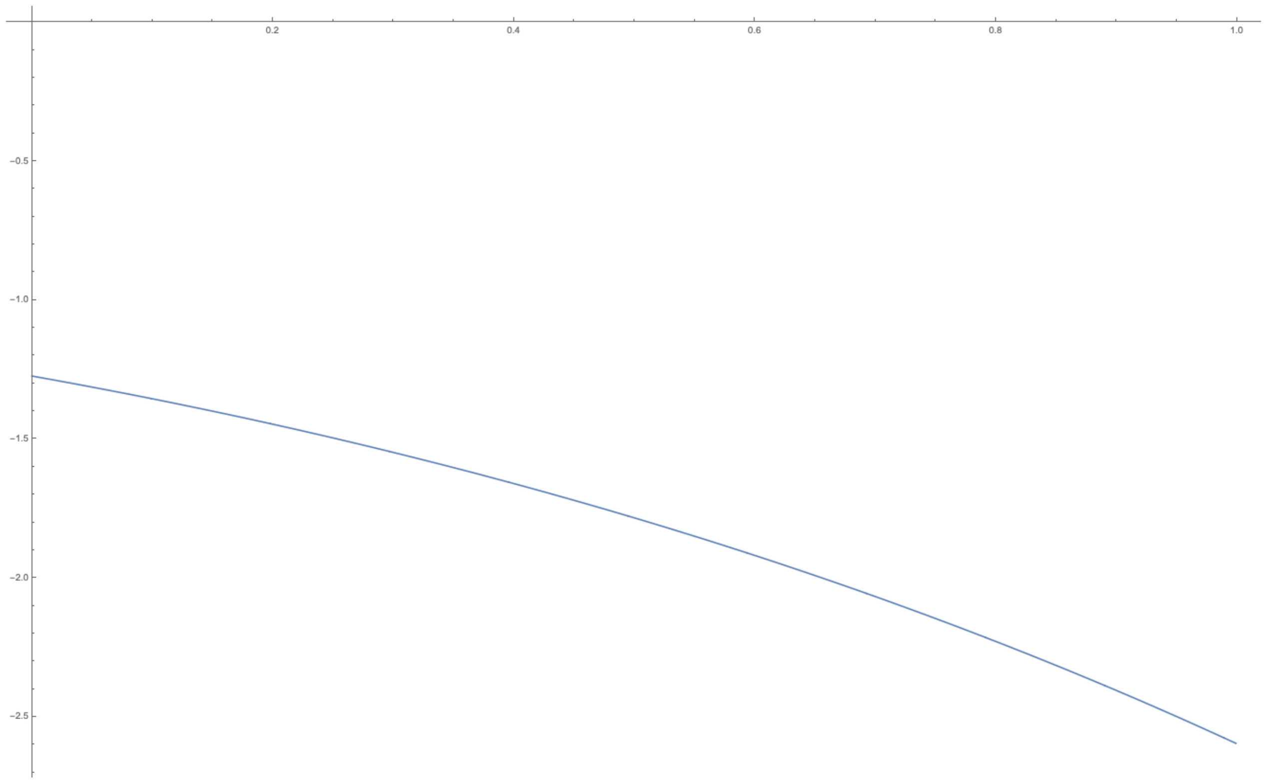
$u''(x_k) = \dfrac{u(x_k + h) + u(x_k - h) - 2u(x_k)}{h^2}$ - разностная схема 2-го порядка

После преобразование получаем:

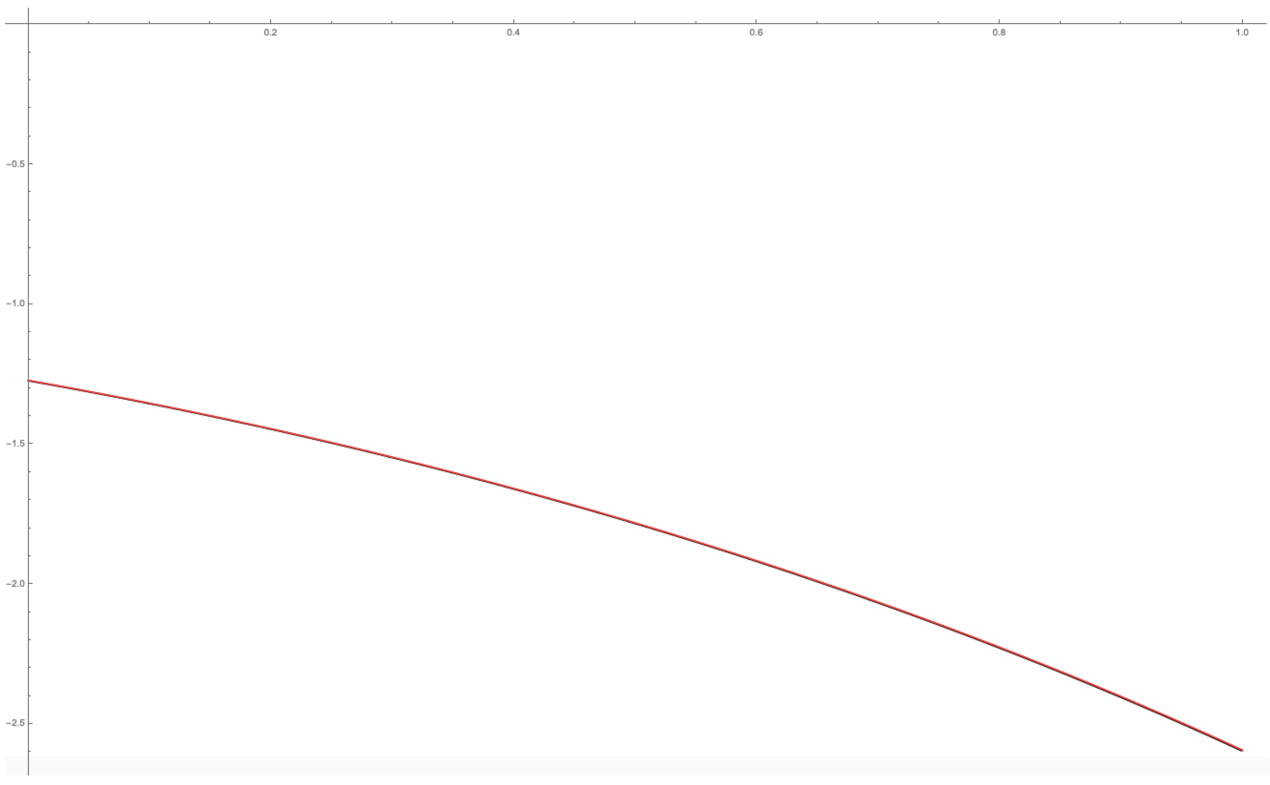
$$y_0\left(\frac{2(\frac{h^2}{4}) - 1}{h + h^2}\right) + y_1\left(\frac{2}{h^2 + h}\right) = 1$$

$$y_{k-1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) + y_k\left(0.5 - \frac{2}{h^2}\right) + y_{k+1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2}\right) = x_k$$

$$y_{n-1}\left(\frac{1}{h^2 - h}\right) + y_n\left(\frac{\frac{h^2}{4} - 1}{h^2 - h}\right) = -2 + \frac{\frac{h^2}{2}}{h^2 - h}$$



График, построенный по точкам, найденных методом сеток.



2 совмещенных графика. График точного решения, красного цвета. Графики перекрываются.

Листинг программы представлен в папке Lab3

Вывод: Использованный метод сеток позволяет достаточно точно вычислить значение исходной функции.