

П. А. Вакульчик

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Пособие для студентов

*Факультета прикладной математики и информатики
специальностей 1-31 03 03 «Прикладная математика (по
направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика»,
1-31 03 05 «Актuariальная математика»,
1-31 03 06 «Экономическая кибернетика
(по направлениям)», 1-98 01 01 «Компьютерная
Безопасность (по направлениям)»*

Минск

БГУ

2008

Предисловие.

Предлагаемое пособие «Методы численного анализа» является обобщением многолетнего опыта проведения практических и лабораторных занятий по одноименному курсу на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Включает в себя 24 темы, половину из которых (1–12) студенты 3 курса проходят в течение осеннего семестра, а вторую половину (13–24) – в течение весеннего семестра. Структура каждой темы такова: излагается основной теоретический материал, необходимый студенту для наработки навыков и умения применять их на практике. Приводятся образцы выполнения практических заданий. В конце каждой темы даются практические задания для самостоятельного выполнения. Количество заданий соответствует примерному числу студентов в подгруппе. Представлены примерные варианты контрольных работ. Кроме того, после изучения теоретических заданий каждый студент получает индивидуальное задание, выполнение которого предусматривается на ЭВМ. Завершает выполнение индивидуального задания отчет, включающий краткую теорию решаемой проблемы, программу реализации численных методов, результаты счета на ЭВМ, анализ полученных результатов. Пособие содержит примерную тематику индивидуальных заданий. Приводятся дополнительные задачи и упражнения, которые могут быть предложены на экзаменах.

Основная цель пособия – унификация проведения лабораторных занятий по курсу «Методы численного анализа», выработка определенных стандартов контроля знаний при проведении зачетов, ликвидация дефицита дидактического материала, который ощущается при проведении практических занятий.

Теоретический материал учебного пособия излагается в классическом стиле, основу которого составляют учебники и монографии, написанные под руководством академика В. И. Крылова [6 – 8], а также [1, 5, 11, 14]. Кроме того, здесь приводятся основы современных численных методов решения задач математической физики [2 – 4, 9, 10, 12, 13, 15], другие актуальные направления численного анализа [13, 16].

Содержание включает такие главные разделы численных методов как «Приближение функций», «Численное интегрирование», «Численное решение интегральных уравнений», «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений» и «Разностные схемы решения задач математической физики». В первой главе изучаются вопросы интерполирования функций, интерполяционные многочлены

Лагранжа и Ньютона, минимизация остатка интерполирования, задача кратного интерполирования и сплайн-интерполирования, а также среднеквадратичные приближения. В главе "Численное интегрирование" рассмотрены вопросы построения интерполяционных квадратурных формул, а также квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности. В главе «Численное решение интегральных уравнений» излагаются классические методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра. В четвертой главе излагаются вопросы построения приближенных методов решения задачи Коши (методы Пикара, рядов, Эйлера, Рунге – Кутты, предиктор-корректор, методы Адамса), а также численные методы решения граничных задач (метод сеток, моментов, Галеркина, наименьших квадратов, Рунге). Глава «Разностные схемы решения задач математической физики» включает математический аппарат теории разностных схем, разностные схемы для уравнений теплопроводности, колебаний струны, переноса и эллиптических уравнений.

Книга написана при поддержке всего коллектива кафедры вычислительной математики, которому автор выражает свою благодарность. Автор также признателен рецензентам главному научному сотруднику Института математики НАН Беларуси, доктору физико-математических наук В. А. Цурко и доценту Гродненского государственного университета им. Я. Купалы, кандидату физико-математических наук Г. Ч. Шушкевичу за их труд по рецензированию рукописи. Особая благодарность инженеру-программисту И. Г. Ефановой за ее огромную работу по компьютерной верстке данной книги.

Глава 1 Приближение функций

Тема 1. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

1.1. Постановка задачи интерполирования. Алгебраическое интерполирование.

Рассмотрим набор различных точек на отрезке $[a, b]$: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, в которых заданы значения функции $f(x)$ так, что $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Требуется восстановить значение $f(x)$ и при других x . Точки x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ в дальнейшем будем называть узлами интерполирования.

Рассмотрим конечную (или счетную) систему линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$ $i = 0, 1, \dots$, определенную на $[a, b]$ и построим линейную комбинацию

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad (1.1)$$

где $a_i = \text{const}$. Среди $\varphi(x)$ выберем ту, которая имеет те же исходные данные интерполирования, что и $f(x)$, т. е. для которой выполняются равенства $f(x_j) = \varphi(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. После этого приближенно полагают $f(x) \approx \varphi(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Условия интерполирования запишем в следующем развернутом виде:

$$a_0 \varphi_0(x_j) + a_1 \varphi_1(x_j) + \dots + a_n \varphi_n(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Система (1.2) представляет систему $n + 1$ линейных алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными a_0, a_1, \dots, a_n . Функции $\varphi_i(x)$ принято выбирать так, чтобы определитель системы (1.2) был отличен от нуля для различных значений $x \in [a, b]$. Такая система функций $\varphi_i(x)$ называется системой Чебышева на $[a, b]$. Определив из (1.2) a_i и подставив их в (1.1), получим функцию $\varphi(x)$, интерполирующую $f(x)$ по предписанным исходным данным.

Если в качестве $\varphi_i(x)$ выбрать $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots$, то речь будет идти об интерполировании многочленами или алгебраическом интерполировании. В этом случае

$$\varphi(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1.3)$$

Система уравнений, из которой могут быть найдены коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n , в этом случае имеет вид

$$a_n x_j^n + a_{n-1} x_j^{n-1} + \dots + a_1 x_j + a_0 = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Ее определитель является определителем Вандермонда

$$W_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Он отличен от нуля при всяких $x_k \neq x_l$, $k \neq l$, и задача алгебраического интерполирования в этом случае имеет единственное решение.

Пример 1. Построить многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения:

x	-1	0	2	4
$f(x)$	-12	-5	-3	63

Решение. По четырем узлам интерполирования построим многочлен третьей степени вида (1.3) $P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 определим из следующих условий:

$$\begin{cases} a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -12, \\ a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = -5, \\ a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = -3, \\ a_3(4)^3 + a_2(4)^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 63. \end{cases}$$

Определив из второго уравнения системы $a_0 = -5$, для a_1, a_2, a_3 имеем

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 - a_3 = -7, \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2, \\ 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 68. \end{cases}$$

Эту систему будем решать методом Гаусса. Проведем следующую цепочку преобразований матрицы ее коэффициентов и правых частей:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 64 & 68 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 20 & 60 & 40 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $a_3 = 2$, $a_2 = -4$, $a_1 = 1$, и интерполяционный многочлен имеет вид

$$P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 5.$$

Отметим, что такой метод построения интерполяционного многочлена неэффективен при большом числе точек интерполирования. Кроме того, на практике нас интересует не вид самого интерполяционного многочлена, а приближенное значение интерполируемой функции при $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. В этом случае удобнее строить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

1.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа и его остаток

Рассмотрим многочлены $l_i(x)$ степени n , удовлетворяющие условиям

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

которые называются многочленами Лагранжа. Их можно записать в виде

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}.$$

Тогда интерполяционный многочлен в форме Лагранжа принимает вид

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i. \quad (1.4)$$

Введем следующее обозначение: $\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$. Легко заметить,

что $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = \omega'(x_i)$. Тогда вид многочлена Лагранжа будет следующим:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} f_i. \quad (1.5)$$

Рассмотрим вопрос об оценке погрешности интерполяционного многочлена (1.4) или (1.5). Пусть $n + 1$ -я производная функции $f(x)$

непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $x \in [a, b]$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что имеет место равенство

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \quad (1.6)$$

из которого следует оценка погрешности в равномерной норме

$$\|f(x) - P_n(x)\| = \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|}{(n+1)!} \|\omega(x)\|, \quad (1.7)$$

где $\|f(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Пример 2. Проинтерполировав функцию $y = \cos x$ по узлам при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\cos x$ при $x = \frac{\pi}{5}$ и оценить погрешность.

Решение. Приближенное значение $\cos \frac{\pi}{5}$ определим из формулы (1.5), подставив $\frac{\pi}{5}$ вместо x . В нашем случае $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{3}, x_4 = \frac{\pi}{2}$;

$$f(x_0) = 1, f(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(x_3) = \frac{1}{2}, f(x_4) = 0.$$

Для нахождения $\frac{\omega(x)}{x - x_i}$ и $\omega'(x_i)$ составим следующую матрицу разностей:

$$\begin{pmatrix} - & x - x_1 & x - x_2 & x - x_3 & x - x_4 \\ x - x_0 & - & x - x_2 & x - x_3 & x - x_4 \\ x - x_0 & x - x_1 & - & x - x_3 & x - x_4 \\ x - x_0 & x - x_1 & x - x_2 & - & x - x_4 \\ x - x_0 & x - x_1 & x - x_2 & x - x_3 & - \end{pmatrix}.$$

Тогда $\frac{\omega(x)}{x - x_i}$ – произведение элементов $i + 1$ -й строки, а $\omega'(x_i)$ есть произведение элементов $i + 1$ -й строки при $x = x_i$. Поскольку $\frac{\omega(x)}{x - x_i}$ вычисляется при $x = \frac{\pi}{5}$ и берется отношение $\frac{\omega(x)}{(x - x_i)}$ к $\omega'(x)$, то у всех

разностей множитель π можно опустить и для нахождения $\frac{\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_i}$ можно

рассмотреть матрицу

$$\begin{pmatrix} - & \frac{1}{5}-\frac{1}{6} & \frac{1}{5}-\frac{1}{4} & \frac{1}{5}-\frac{1}{3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & - & \frac{1}{5}-\frac{1}{4} & \frac{1}{5}-\frac{1}{3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}-\frac{1}{6} & - & \frac{1}{5}-\frac{1}{3} & \frac{1}{5}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}-\frac{1}{6} & \frac{1}{5}-\frac{1}{4} & - & \frac{1}{5}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}-\frac{1}{6} & \frac{1}{5}-\frac{1}{4} & \frac{1}{5}-\frac{1}{3} & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \frac{1}{30} & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{15} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & - & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{15} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & - & -\frac{2}{15} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{20} & - & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{15} & - \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{\omega\left(\frac{\sqrt{\pi}}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_0} = \frac{2 \cdot 3}{30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 10} = -\frac{1}{30 \cdot 20 \cdot 25};$$

$$\frac{\omega\left(\frac{\sqrt{\pi}}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_1} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 10} = -\frac{1}{5 \cdot 20 \cdot 25};$$

$$\frac{\omega\left(\frac{\sqrt{\pi}}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_2} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 30 \cdot 15 \cdot 10} = \frac{1}{5 \cdot 30 \cdot 25};$$

$$\frac{\omega\left(\frac{\sqrt{\pi}}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_3} = \frac{3}{5 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 10} = \frac{1}{5 \cdot 20 \cdot 100};$$

$$\frac{\omega\left(\frac{\sqrt{\pi}}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}-x_4} = \frac{2}{5 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15} = \frac{2}{2 \cdot 20 \cdot 225}.$$

Аналогичным образом для нахождения $\omega'(x_i)$ построим матрицу

$$\begin{pmatrix} - & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} - \frac{1}{4} & \frac{1}{6} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} - \frac{1}{6} & - & \frac{1}{4} - \frac{1}{3} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} - \frac{1}{6} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & - & \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & - & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & - & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & - & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & - \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\omega'(x_0) = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{144};$$

$$\omega'(x_1) = -\frac{1}{6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 3} = -\frac{1}{36 \cdot 36};$$

$$\omega'(x_2) = \frac{1}{4 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4} = \frac{1}{48 \cdot 48};$$

$$\omega'(x_3) = -\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 6} = -\frac{1}{36 \cdot 36};$$

$$\omega'(x_4) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{12 \cdot 12} = \frac{1}{144}.$$

Так как $l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$, то

$$l_0\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{144}{30 \cdot 20 \cdot 25} = -0,0096;$$

$$l_1\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{36 \cdot 36}{2500} = 0,5184;$$

$$l_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{48 \cdot 48}{5 \cdot 30 \cdot 25} = 0,6144;$$

$$l_3\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{36 \cdot 36}{5 \cdot 20 \cdot 100} = -0,1296;$$

$$l_4\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2 \cdot 144}{100 \cdot 225} = -0,0128.$$

Подставляя полученные значения в (1.4) или (1.5), получим

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\pi}{5}\right) &= -0,0096 \cdot 1 + 0,5184 \cdot 0,866 + \\ &+ 0,6144 \cdot 0,7071 - 0,1296 \cdot 0,5 = 0,808957. \end{aligned}$$

Таким образом, $\cos \frac{\pi}{5} \approx 0,808957$.

Для оценки погрешности воспользуемся формулой (1.7). В нашем случае

$$\begin{aligned}\|f^{(5)}(\xi)\| &\leq 1, \quad (n+1)! = 5! = 120 \text{ и} \\ \|\omega(x)\| &= \left| \frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2} \right) \right| = \\ &= \pi^5 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{10} = \frac{\pi^5}{25 \cdot 30 \cdot 100} = \\ &= \frac{305,97455}{75000} = 0,0040796.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|f(x) - P_n(x)\| = \left\| \cos \frac{\pi}{5} - P_n\left(\frac{\pi}{5}\right) \right\| \leq 0,0000339$.

Если воспользоваться тем, что $\cos \frac{\pi}{5} = 0,809016$, а нами получено приближенное значение $\cos \frac{\pi}{5} \approx 0,808957$, то их модуль разности равен 0,000059, что (с учетом промежуточных округлений) согласуется с теоретическими рассуждениями.

Пример 3. Число $\ln 15,2$ вычислено следующим образом. По значениям $\ln 15$ и $\ln 16$ построен интерполяционный многочлен первой степени. Показать, что если y и \tilde{y} — соответственно точное и полученное с помощью интерполяционного многочлена приближенное значение $\ln 15,2$, то справедлива оценка

$$0 < y - \tilde{y} < 4 \cdot 10^{-4}.$$

Решение. Воспользуемся видом погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа (1.6). Так как $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ и интерполирование по двум точкам $x_0 = 15$ и $x_1 = 16$ производится многочленом первой степени, то

$$\begin{aligned}\ln x - P_1(x) &= y - \tilde{y} = -\frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{2!} (x - x_0)(x - x_1) = \\ &= -\frac{1}{2\xi^2} (15,2 - 15)(15,2 - 16) < -\frac{1}{2 \cdot 15^2} (0,2) \cdot (-0,8) = \\ &= \frac{1}{225} \cdot 0,08 = 0,0003555 < 4 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Пример 4. Функция $f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$ приближается на отрезке $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_0 = -4$, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$,

$x_3 = -1$. При каких целых значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5} ?

Решение. Воспользуемся оценкой для погрешности (1.7). В нашем случае $n = 3$ и

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \left(\frac{1}{A^2 - x} \right)^{(4)} = \left(\frac{1}{(A^2 - x)^2} \right)^{(3)} = \left(\frac{2}{(A^2 - x)^3} \right)^{(2)} = \\ &= \left(\frac{6}{(A^2 - x)^4} \right)^{(1)} = \frac{24}{(A^2 - x)^5}. \end{aligned}$$

Кроме того, легко показать, что $\|\omega(x)\| = \|(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\| \leq \frac{9}{16}$ (на указанном отрезке). Тогда A определяется из решения неравенства $\frac{24}{(A^2+1)^5} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{9}{16} \leq 10^{-5}$, т. е. $\frac{9}{(A^2+1)^5} \leq 16 \cdot 10^{-5}$ или $(A^2+1)^5 \geq \frac{9}{16} \cdot 10^5$, откуда следует, что $|A| \geq 3$.

Задачи и упражнения

1. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3$, удовлетворяющий условиям:

- а) $P_3(1) = 7, P(-1) = -11, P(0) = -7, P(2) = -5$;
- б) $P_3(-2) = -25, P(-1) = -11, P(0) = -7, P(2) = -5$;
- в) $P_3(-2) = -12, P(-1) = 4, P(0) = 8, P(1) = 6$;
- г) $P_3(-1) = 4, P(2) = 4, P(3) = 8, a_3 = 1$;
- д) $P(-2) = 19, P(-1) = 9, P(1) = -5, P(2) = -9$;
- е) $P(-2) = 3, P(-1) = -5, P(0) = 1, P(1) = 1$;
- ж) $P(-1) = -22, P(0) = -5, P(1) = 4, P(2) = 35$;
- з) $P(-1) = 7, P(0) = 1, P(2) = -5, P(3) = -17$;
- и) $P(-3) = 31, P(-2) = 19, P(-1) = 9, P(0) = 1$;
- к) $P(-2) = 23, P(-1) = 7, P(0) = 1, P(1) = -1$;
- л) $P(1) = 9, P(-1) = 7, P(0) = 8, P(2) = 22$;
- м) $P(-2) = -77, P(-1) = -22, P(0) = -5, P(1) = 4$;
- н) $P(-1) = -10, P(0) = -1, P(1) = 2, P(2) = 23$;
- о) $P(-1) = -5, P(1) = 1, P(2) = 7, P(3) = 31$;
- п) $P(-2) = -6, P(-1) = 7, P(0) = 8, P(1) = 9$.

2. С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа второй степени, построенного по значениям функции $f(x)$ в данных узлах x_0 , x_1 , x_2 , найти ее приближенное значение в указанной точке x и оценить погрешность приближения:

- а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$; $x = 0,05$;
- б) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0,2$, $x_2 = 0,3$, $x_3 = 0,4$; $x = 2,05$;
- в) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$; $x = 0,05$;
- г) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0,2$, $x_1 = 0,3$, $x_3 = 0,4$; $x = 0,25$;
- д) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$; $x = 1,25$;
- е) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$; $x = 2,25$;
- ж) $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$; $x = 1,25$;
- з) $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$; $x = 2,25$;
- и) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1,5$; $x = 1,25$;
- к) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,5$; $x = 1,75$;
- л) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1,5$; $x = 1,25$;
- м) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,5$; $x = 1,75$;
- н) $f(x) = x + \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; $x = 2,5$;
- о) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; $x = 2,5$;
- п) $f(x) = 2^x + \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,5$; $x = 2$.

3. Определить погрешность интерполяции в равномерной метрике функции $f(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа третьей степени, построенного по следующим четырем узлам:

- а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;
- б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;
- в) $f(x) = \sin(x+1)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;
- г) $f(x) = \sin(x-1)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;
- д) $f(x) = \cos(x+1)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;
- е) $f(x) = \cos(x-1)$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$;

$$\text{ж) } f(x) = \sin x + \cos x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{з) } f(x) = \sin x - \cos x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{и) } f(x) = \sin 2x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{к) } f(x) = \cos 2x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{л) } f(x) = \sin \frac{1}{2}x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{м) } f(x) = \cos \frac{1}{2}x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{н) } f(x) = x \sin x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{о) } f(x) = x \cos x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{п) } f(x) = \sin x^2, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Тема 2. Интерполяционный многочлен Ньютона

2.1 Конечные разности, разностные отношения и их свойства

Конечные разности используются при изучении функций, заданных таблично на равномерной сетке узлов (или сетке равноотстоящих узлов). Разностные отношения или разделенные разности применяются в случае задания функции на произвольной сетке узлов.

Пусть задана равномерная сетка узлов $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots$, $h > 0$ и значения $f(x_k) = f_k$. Конечными разностями нулевого порядка называются значения функции в узлах сетки. Конечными разностями первого порядка называются величины $\Delta f(x_i) = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $i = 0, 1, \dots$. Конечные разности второго порядка определяются равенствами $\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$, $i = 0, 1, \dots$. Конечные разности $n + 1$ -го порядка определяются через конечные разности n -го порядка по формуле $\Delta^{n+1} f_i = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i$, $i = 0, 1, \dots$.

Имеет место равенство

$$f(x_n) = f_n = f_0 + \frac{n}{1!} \Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^n f_0. \quad (2.1)$$

Разностными отношениями нулевого порядка называются значения функции в узлах сетки. Разностными отношениями первого порядка называются величины

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots$$

С их помощью составляются разностные отношения второго порядка

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_0, x_1)}{x_3 - x_1}, \dots$$

Разностные отношения порядка $n + 1$, $n = 1, 2, \dots$ определяются при помощи разностных отношений предыдущего n -го порядка по формуле

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}.$$

Таблицу вида:

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & f(x_0) & & & & \\ x_1 & f(x_1) & f(x_0, x_1) & & & \\ x_2 & f(x_2) & f(x_1, x_2) & f(x_0, x_1, x_2) & & \\ \vdots & \vdots & f(x_2, x_3) & f(x_1, x_2, x_3) & f(x_0, x_1, x_2, x_3) & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \dots f(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ x_n & f(x_n) & f(x_{n-1}, x_n) & f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) & & \end{array}$$

называют таблицей ее разделенных разностей.

При всяком n верно равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)}. \quad (2.2)$$

Укажем на следующие свойства разделенных разностей:

1) разделенная разность является линейным оператором, т. е.

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_0, x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) + \alpha_2 f_2(x_0, x_1, \dots, x_n); \alpha_1, \alpha_2 = \text{const};$$

2) разделенная разность есть симметричная функция своих аргументов x_0, x_1, \dots, x_n , т. е. не меняется при любой их перестановке.

Пример 1. Показать, что разделенная разность n -го порядка от многочлена n -й степени $P(x)$ равна константе, а разделенные разности более высокого порядка равны нулю.

Решение. Пусть $P(x)$ – многочлен степени n . Рассмотрим, что представляют его разделенные разности. Вычитая из него константу $P(x_0)$, получим многочлен $P(x) - P(x_0)$, который обращается в нуль при $x = x_0$ и поэтому делится нацело на $x - x_0$. Следовательно, первая разделенная разность многочлена n -й степени $P(x, x_0) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$ есть многочлен $n - 1$ -й степени относительно x . Аналогично, разделенная разность второго порядка $P(x, x_0, x_1)$ есть многочлен степени $n - 2$. В самом деле $P(x, x_0) - P(x_0, x_1)$ обращается в нуль при $x = x_1$, и значит, нацело делится на $x - x_1$, т. е. $P(x, x_0, x_1)$ имеет степень на единицу меньше. Продолжая эти рассуждения, можно показать, что $P(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ есть многочлен нулевой степени, т. е. константа, а разделенные разности более высокого порядка тождественно равны нулю.

1.2. Интерполяционный многочлен Ньютона

Будем рассматривать обычную задачу алгебраического интерполирования функции $f(x)$ по ее значениям в узлах x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ и пусть $P(x)$ – многочлен n -й степени, значения которого в узлах интерполирования совпадают со значениями $f(x)$. Пусть x – произвольная точка, отличная от узлов интерполирования. Запишем следующую цепочку тождеств:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0), \\ P(x, x_0) &= P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1), \dots \end{aligned}$$

Эта цепочка соотношений конечна, так как разделенная разность $n + 1$ -го порядка от многочлена n -й степени равна нулю. Последовательно подставляя эти соотношения друг в друга, получим формулу

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \dots + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})P(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.3)$$

по которой многочлен n -й степени выражается при помощи разделенных разностей через свои значения в узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Но значения интерполяционного многочлена в этих узлах по определению совпадают со значениями искомой функции, и поэтому разделенные

разности $f(x)$ и $P(x)$ тоже совпадают. Подставляя в (2.3) разделенные разности искомой функции и заменяя точное равенство на приближенное, получим интерполяционную формулу Ньютона:

$$\begin{aligned} f(x) \approx & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что за точностью расчета удобно следить с помощью оценки скорости убывания членов суммы (2.4). Если они убывают медленно, то на хорошую точность рассчитывать нельзя. Если же убывание быстрое, то оставляют только те слагаемые, которые больше допустимой погрешности, тем самым определяют, сколько узлов требуется использовать при расчете.

Пример 2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона вычисления значений функции $y = \sin x$ в первой четверти по ее четырем значениям в точках $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Решение. Для удобства вычислений положим $f(x) = \sin(30^\circ \cdot x)$, и узлами интерполирования будут $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Построим следующую таблицу разделенных разностей с указанными четырьмя узлами:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	0,000			
1	0,500	0,500	-0,067	
2	0,866	0,366	-0,116	-0,016
3	1,000	0,134		

Интерполяционный многочлен Ньютона будет иметь вид

$$P(x) = 0 + x \cdot 0,5 - x(x-1)0,067 - x(x-1)(x-2)0,016.$$

Из этой формулы легко, например, получить, что

$$\sin \frac{\pi}{4} \approx P(1,5) = 0 + 0,750 - 0,050 + 0,006 = 0,706.$$

Непосредственно можно проверить, что приближенное значение отличается от точного значения меньше, чем на 10^{-3} .

Пример 3. Построить формулу для вычисления суммы квадратов первых n натуральных чисел $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

Решение. Известно, что $S(n)$ есть некоторый многочлен относительно n . Для нахождения $S(n)$ будем использовать

интерполяционную формулу Ньютона. Составим следующую таблицу разделенных разностей для $S(n)$:

n_i	$S(n_i)$	$S(n_i, n_{i+1})$	$S(n_i, n_{i+1}, n_{i+2})$	$S(n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, n_{i+3})$	$S(n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, n_{i+3}, n_{i+4})$
1	1				
2	5	4	$\frac{5}{7}$		
3	14	9	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{3}$	
4	30	16	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
5	55	25			

Отсюда получаем следующий вид для $S(n)$:

$$S_n = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.3. Задача обратного интерполирования.

Задачей обратного интерполирования называют нахождение x для произвольного $y = f(x)$, если задана таблица $y_i = y(x_i)$. Для монотонных функций между прямым и обратным интерполированием нет разницы: можно читать таблицу наоборот, как задание $x_i = x(y_i)$. Единственное отличие в том, что «обратная» таблица $x(y_i)$ будет иметь переменный шаг, даже если «прямая» таблица имела постоянный. Однако все наши формулы рассчитаны на переменный шаг. Отметим, что для достижения заданной точности прямая и обратная интерполяции требуют, вообще говоря, разного числа узлов.

Важный пример обратного интерполирования – решение уравнений $f(x) = 0$. Вычислим несколько значений функции $y_i = f(x_i)$, т. е. составим таблицу. Запишем ее в виде $x_i = x(y_i)$ и при помощи интерполяции найдем приближенное значение $x(0)$. Этот способ дает хорошие результаты, если функция достаточно гладкая, а корень лежит между выбранными узлами.

Пример 4. Решить уравнение $y(x) = (1+x)e^{\frac{1}{2}x} - 2,5 = 0$.

Решение. Легко заметить (графически или по перемене знака), что корень уравнения расположен на интервале $(0; 1)$. В качестве узлов

интерполирования выберем $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$ и составим следующую «обратную» таблицу:

$y(x_i)$	x_i	$x(y_i, y_{i+1})$	$x(y_i, y_{i+1}, y_{i+2})$
-1,500	0	0,540	-0,076
-0,574	0,5	0,365	
0,797	1,0		

Тогда

$$x(0) = x_0 + (0 - y_0) x(y_0, y_1) + \\ + (0 - y_0)(0 - y_1) x(y_0, y_1, y_2) = 0,744.$$

Решением исходного уравнения с тремя верными знаками является $x = 0,732$. Для повышения точности в этом способе целесообразно взять новые узлы, ближе расположенные к грубо найденному корню, а не увеличивать число узлов.

Задачи и упражнения

1. По значениям функции $f(x)$ в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$, $x_4 = 1$ построить интерполяционный многочлен $P_4(x)$ и, используя его, найти приближенное значение функции в указанной точке x . Результат сравнить с точным значением функции в этой точке:

а) $f(x) = e^x + \ln(x+1) + \sin x$; $x = 0,2$;

б) $f(x) = e^{-x} + \ln(x+1) - \sin x$; $x = 0,3$;

в) $f(x) = 2^x - \ln(x+2) + \cos x$; $x = 0,4$;

г) $f(x) = 2^{-x} + \ln(x+2) - \cos x$; $x = 0,2$;

д) $f(x) = e^{2x} - \ln(x+3) + 2 \sin x$; $x = 0,3$;

е) $f(x) = e^{-2x} + \ln(x+3) - 2 \sin x$; $x = 0,6$;

ж) $f(x) = e^{2x} + \ln(x+1) + \operatorname{tg} x$; $x = 0,7$;

з) $f(x) = e^{-2x} - \ln(x^2+1) - \operatorname{tg} x$; $x = 0,8$;

и) $f(x) = \operatorname{tg} x - x^3 + \ln(x^2+3)$; $x = 0,6$;

к) $f(x) = \operatorname{tg} x - x^2 + \ln(\sqrt{x}+1)$; $x = 0,7$;

л) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{x+1} + e^{2x}$; $x = 0,9$;

$$\text{м)} f(x) = \sin x - \frac{x^2 + 1}{x + 1} + e^x; \quad x = 0,6;$$

$$\text{н)} f(x) = \cos x - \ln(x^2 + 1) + 2^x; \quad x = 0,7;$$

$$\text{о)} f(x) = \operatorname{tg} x + 3^x - \ln(x^2 + 2); \quad x = 0,8;$$

$$\text{п)} f(x) = \operatorname{tg} x - 3^x + \ln(x^2 + 4); \quad x = 0,9.$$

2. Используя интерполяционный многочлен Ньютона, просуммировать следующие конечные ряды:

$$\text{а)} 1 + 3 + 5 + \dots + (2p - 1);$$

$$\text{б)} 1 + 2 + 3 + \dots + n;$$

$$\text{в)} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2;$$

$$\text{г)} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2p - 1)^2 - (2p)^2;$$

$$\text{д)} 2^2 + 4^2 + \dots + (2p)^2;$$

$$\text{е)} -1 + 2 - 3 + 4 - \dots + 2p;$$

$$\text{ж)} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3;$$

$$\text{з)} 1^3 + 3^3 + \dots + (2p - 1)^3;$$

$$\text{и)} 2^3 + 4^3 + \dots + (2p)^3;$$

$$\text{к)} 1^3 - 2^3 + 3^3 - \dots - (2p)^3;$$

$$\text{л)} -1^3 + 2^3 - 3^3 + \dots + (2p)^3;$$

$$\text{м)} 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4;$$

$$\text{н)} 1^4 + 3^4 + \dots + (2p - 1)^4;$$

$$\text{о)} 2^4 + 4^4 + \dots + (2p)^4;$$

$$\text{п)} -1^4 + 3^4 + \dots + (2p - 1)^4.$$

3. По данным таблицы значений функции определить значение аргумента x , соответствующее указанным значениям y :

$$\text{а)} \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 2,5 & 3,5 \\ \hline f(x) & -4 & -5 & -3 & -1 \end{array}, \quad f(x) = -2;$$

$$\text{б)} \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 2 & 2,5 & 3,5 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 3 & 8,5 & 10 \end{array}, \quad f(x) = 3,8;$$

$$\text{в)} \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 1,5 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & -1 & 1 & 5 & 8 \end{array}, \quad f(x) = 2,5;$$

$$\Gamma) \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 8 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right. , \quad f(x)=2;$$

$$\Delta) \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -8 \end{array} \right. , \quad f(x)=0;$$

$$\text{е)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1,5 & 2,5 & 3 & 4 \\ \hline 8 & 7 & 4 & 1 \end{array} \right. , \quad f(x)=5;$$

$$\text{ж)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -0,5 & 0,5 & 1,5 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right. , \quad f(x)=5;$$

$$\text{з)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 5 & 7 & 8 & 10 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right. , \quad f(x)=5;$$

$$\text{и)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 4,5 & 5 & 6 \\ \hline -1 & -4 & -8 & -11 \end{array} \right. , \quad f(x)=-5;$$

$$\text{к)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -3 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 7 & 5 & 3 & -1 \end{array} \right. , \quad f(x)=6;$$

$$\text{л)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 1 & 1,5 \\ \hline 4 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right. , \quad f(x)=3;$$

$$\text{м)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2,5 & -1 & 0 & 1,5 \\ \hline 4,2 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right. , \quad f(x)=0;$$

$$\text{н)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2,3 & -1,3 & -0,5 & 0,6 \\ \hline 7 & 8 & 11 & 15 \end{array} \right. , \quad f(x)=10;$$

$$\text{о)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} -1,6 & -0,8 & 0,2 & 1,1 \\ \hline -8 & -5 & -2 & 3 \end{array} \right. , \quad f(x)=0;$$

$$\text{п)} \quad \frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 3,2 & 4,1 & 5,1 & 6,3 \\ \hline 8 & 14 & 11,2 & 13,2 \end{array} \right. , \quad f(x)=0;$$

4. Решить следующие уравнения или системы уравнений:

а) $(1+2x)e^x + 3x - 10 = 0;$

- б) $2^x - 5x^3 - 8 = 0$;
- в) $\frac{1}{2x-5} - \log_2(2x-5) + 1 = 0$;
- г) $\frac{x-5}{3x-4} - 2^{x-1} - \ln x + 1 = 0$;
- д) $\frac{x-1}{x+1} + x - \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$;
- е) $x^3 + \cos x + x - 8 = 0$;
- ж) $\begin{cases} \sin x - y - 1,32 = 0, \\ \cos y - x + 0,85 = 0; \end{cases}$
- з) $\begin{cases} y - \frac{1}{2}x^2 + x = 1, \\ 2x - y - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}; \end{cases}$
- и) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,8, \\ x - \cos y = 2; \end{cases}$
- к) $\begin{cases} x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0; \end{cases}$
- л) $\begin{cases} y - e^{2x} - 5 = 0, \\ x^2 - y + 8 = 0; \end{cases}$
- м) $\begin{cases} \ln 2x - 4y + 5 = 0, \\ x^2 + y - 3 = 0; \end{cases}$
- н) $\begin{cases} \frac{1}{x-y} - y - 4 - \ln x = 0, \\ 3x + 4y = 5; \end{cases}$
- о) $\begin{cases} x - y^3 + 8 = 0, \\ y - \frac{x+1}{x-1} + 4 = 0; \end{cases}$
- п) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - 0,5x^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Тема 3. Интерполирование по сетке равноотстоящих узлов.

1.4. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов.

При решении практических задач часто узлы интерполирования берутся равноотстоящими $x_k = x_0 + kh$, $h > 0$, $k = 0, 1, \dots$, при этом правила интерполирования и соответствующие им формулы упрощаются. Для этого случая построено достаточно большое число правил интерполирования, которые отличаются в основном порядком привлечения к процессу интерполирования соответствующих узлов.

В дальнейшем нам понадобится следующая формула:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k f_0}{h^k \cdot k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

которая устанавливает связь между разностными отношениями и конечными разностями. Формулу (3.1) легко доказать методом математической индукции. Введем новую переменную t , положив $x = x_0 + th$, $t = \frac{x - x_0}{h}$, которая имеет смысл числа шагов h от x_0 до x .

Тогда $x - x_0 = th$, $(x - x_0)(x - x_1) = t(t - 1)h^2, \dots$.

Ранее было получено представление для $f(x)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0 + h) + (x - x_0) \times \\ & \times (x - x_0 - h)f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_0 - h) \dots (x - x_0 - (k - 1)h) \times \\ & \times f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh) + R_k, \end{aligned}$$

где R_k – погрешность интерполяционного многочлена. С учетом вышеприведенных формул, последнее соотношение можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} y(x_0 + th) = & y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t - 1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \\ & + \frac{t(t - 1)(t - 2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \\ & + \frac{t(t - 1) \dots (t - k + 1)}{k!} \Delta^k y_0 + R_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $y = f(x)$, $y_i = f(x_i)$. Считая, что $y = f(x)$ является $k + 1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке, содержащем точки x , x_0 , $x_0 + h, \dots, x_0 + kh$, запишем остаток R_k в форме Лагранжа. Так как

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) = h^{k+1} t(t-1) \dots (t-k),$$

то

$$R_k = h^{k+1} \frac{t(t-1) \dots (t-k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi), \quad (3.3)$$

где ξ принадлежит указанному выше отрезку. Формула (3.2) есть правило Ньютона для интерполирования в начале таблицы, а (3.3) есть его остаток. Это правило используется, когда точка интерполирования x (точка, в которой необходимо определить приближенное значение $f(x)$) находится «вблизи» точки x_0 .

Пусть теперь точка интерполирования лежит вблизи x_n (или даже справа от нее). При построении интерполяционного многочлена в этом случае узлы следует брать в порядке их удаленности от x_n : x_n , $x_n - h$, $x_n - 2h$, ... Правило Ньютона для этого случая запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n - h) + \\ & + (x - x_n)(x - x_n + h)f(x_n, x_n - h, x_n - 2h) + \dots + \\ & + (x - x_n)(x - x_n + h) \dots (x - x_n + (k-1)h) \times \\ & \times f(x_n, x_n - h, \dots, x_n - kh) + R_k. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\begin{aligned} f(x_n) &= y_n, \quad f(x_n, x_n - h) = f(x_n - h, x_n) = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}, \\ f(x_n, x_n - h, x_n - 2h) &= f(x_n - 2h, x_n - h, x_n) = \\ &= \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \dots \end{aligned}$$

$$f(x_n, x_n - h, \dots, x_n - kh) = \frac{\Delta^n y_{n-k}}{k!h^k},$$

и положим $x = x_n + th$. Тогда получим правило Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$\begin{aligned} y(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \\ & + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \\ & + \frac{t(t+1) \dots (t-k+1)}{k!} \Delta^k y_{n-k} + R_k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

остаток которого R_k определяется соотношением

$$R_k = h^{k+1} \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi), \quad (3.5)$$

где ξ принадлежит отрезку, содержащему точки $x_n - kh, \dots, x_n, x$.

Пусть требуется построить таблицу значений некоторой функции так, чтобы погрешность при интерполяции значений функции многочленом заданной степени m не превосходила ε . В этом случае говорят, что таблица допускает интерполяцию степени m (с погрешностью ε). Большинство известных таблиц составляются так, чтобы они допускали интерполяцию первой степени или линейную интерполяцию. Для вычисления значений $f(x)$ при помощи такой таблицы берутся узлы x_i и x_{i+1} слева и справа от точки x : $x_i < x < x_{i+1}$, которые являются ближайшими к x . После этого функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом первой степени по этим узлам $f(x_i + th) \approx f(x_i) + t\Delta f_i$. Погрешность этой формулы есть величина $f''(\xi)h^2 \frac{t(t-1)}{2}$, где $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$. Эта величина не превосходит ε , если

$$\max_{\xi} |f''(\xi)| h^2 \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{t(t-1)}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

Так как $\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{t(t-1)}{2} \right| = \frac{1}{8}$ и он достигается при $t = \frac{1}{2}$, то для нашего случая достаточно выполнения условия

$$\max_{\xi} |f''(\xi)| \frac{h^2}{8} \leq \varepsilon. \quad (3.6)$$

Пример 1. Составим таблицу значений функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ так, чтобы погрешность линейной интерполяции не превосходила $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$.

Решение. Поскольку $\max_x |(\sin x)''| = 1$, то из (3.6) вытекает требование на шаг сетки $\frac{h^2}{8} \leq 0,5 \cdot 10^{-6}$, или $h \leq 0,002$.

Часто требование допустимости линейной интерполяции является слишком жестким и вместо него требуют допустимости квадратичной интерполяции (т. е. интерполяции многочленом второй степени). Пусть x_i — узел, ближайший к x . Интерполирование будем проводить по узлам x_{i-1} , x_i , x_{i+1} . Интерполяционный многочлен Ньютона (3.2) примет вид

$$y(x_i + th) = y_i + t\Delta y_{i-1} + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_{i-1},$$

а остаточный член этой формулы можно записать так:

$$f^{(3)}(\xi) h^3 \frac{t(t^2-1)}{3!}.$$

Чтобы таблица допускала квадратичную интерполяцию, достаточно потребовать, чтобы

$$\max_{\xi} |f^3(\xi)| h^3 \max_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{t(t^2-1)}{6} \right| \leq \varepsilon.$$

Так как $\max_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{t(t^2-1)}{6} \right| = \frac{1}{16}$, то это требование на шаг перепишется в виде

$$\max_{\xi} |f^3(\xi)| \frac{h^3}{16} \leq \varepsilon.$$

В конкретном случае из предыдущего примера, где $f(x) = \sin x$, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$, получаем $h \leq 0,02$.

Вернемся еще раз к оценке остаточного члена интерполяционного многочлена n -й степени:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad M_{n+1} = \max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Оценить $\omega(x)$ при произвольном расположении узлов интерполирования сложно. Пусть имеем равномерную сетку узлов интерполирования (сетка равноотстоящих узлов), а узлы интерполирования берутся из таблицы подряд. Тогда, например, при $n = 5$ многочлен $\omega(x)$ имеет такой вид, как показано на рис. 1.

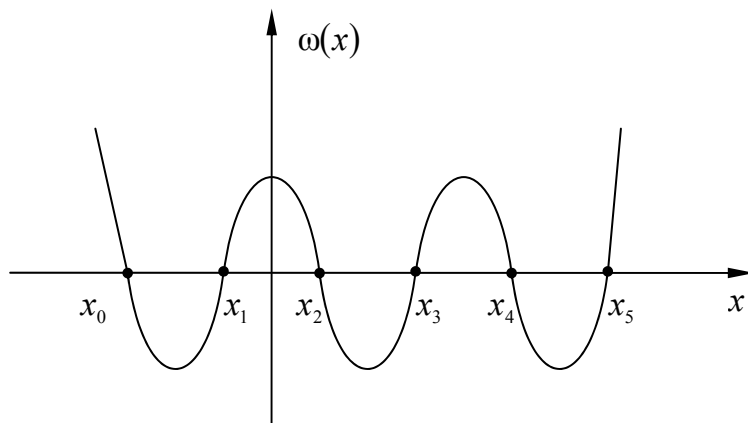


Рис. 1

Вблизи центрального узла интерполяции экстремумы невелики, вблизи крайних узлов – несколько больше, а если x выходит за крайние узлы интерполяции, то $\omega(x)$ быстро возрастает.

Термин интерполяция употребляется, если x заключено между крайними узлами интерполяции. Если x выходит из этих пределов, то говорят об экстраполяции. Очевидно, что при экстраполяции далеко за крайний узел ошибка может быть велика, поэтому экстраполяция мало надежна.

При интерполяции на равномерной сетке выгодно выбирать из таблицы узлы так, чтобы искомая точка x попадала ближе к центру этой конфигурации узлов. Это обеспечит более высокую точность. Для упрощения вычислений рассмотрим случай нечетного числа узлов интерполирования $n = 2k + 1$. Из симметрии полинома $\omega(x)$ очевидно, что в центральном интервале экстремум достигается точно в середине. Этот экстремум равен

$$\left(\frac{h}{2} \cdot \frac{3h}{2} \cdot \frac{5h}{2} \cdot \dots \cdot \frac{(2k+1)h}{2} \right)^2 = \left(\frac{(2k+1)! h^{k+1}}{k! 2^{2k+1}} \right)^2.$$

Подставив эту величину в оценку погрешности, после несложных преобразований с использованием формулы Стерлинга $p! \approx \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e} \right)^p$ получим оценку ошибки в центральном интервале:

$$|f(x) - P_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} n M_{n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{n+1}.$$

Если величины производных $f(x)$ можно оценить, то отсюда легко определить число узлов, достаточное для получения заданной точности.

1.5. Правила интерполирования внутри таблицы.

В предыдущем параграфе указывалось на важность порядка, в котором привлекаются точки сетки к интерполированию. Этот факт особенно значителен, когда точка x лежит внутри таблицы, а интерполирование функции проходит по ее значениям на некоторой ее части.

Итак, пусть x_n есть некоторый внутренний узел таблицы. Предположим, что x лежит вблизи x_n с той или другой стороны. Табличные точки для интерполирования разумно привлекать в следующем порядке: сначала взять x_n , затем брать пары точек $(x_n + h, x_n - h)$, $(x_n + 2h, x_n - 2h)$, ..., $(x_n + kh, x_n - kh)$. Число точек будет нечетным и равным $2k + 1$. Интерполяционный многочлен Ньютона при таком порядке узлов запишем так:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)f(x_n, x_n - h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h) + (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots + (x - x_n)(x - x_n - h) \dots \\ & \dots (x - x_n - kh - h)f(x_n, x_n + h, \dots, x_n + kh) + \\ & + (x - x_n)(x - x_n - h) \dots (x - x_n - kh - h)(x - x_n - kh) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h, \dots, x_n + kh, x_n - kh) + R_{2k}, \\ & R_{2k} = (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h) \dots \\ & \dots (x - x_n - kh)(x - x_n + kh) \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Если теперь ввести новую переменную t по правилу $x = x_n + th$ и представить выражения разделенных разностей через конечные, то после некоторых преобразований с целью упрощения вида интерполяционного многочлена (мы их здесь не приводим из-за их громоздкости), получим правило Ньютона – Стирлинга:

$$\begin{aligned} y(x_n + th) = & y_n + \frac{t}{1!} \frac{\Delta y_n + \Delta y_{n-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{n-1} + \Delta^3 y_{n-2}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2)}{(2k-1)!} \frac{\Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + \Delta^{2k-1} y_{n-k}}{2} + \\ & + \frac{t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k} + R_{2k}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$R_{2k} = h^{2k+1} \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-k^2)}{(2k+1)^2} f^{(2k+1)}(\xi),$$

где ξ – точка, принадлежащая отрезку, содержащему точки x_{n-k} , x_{n+k} и x .

Пусть теперь точка x лежит вблизи середины между двумя узлами x_n и x_{n+1} . Соображения симметрии побуждают строить интерполяционное правило со следующим порядком привлечения узлов: сначала берется пара узлов $(x_n, x_n + h)$, затем $(x_n - h, x_n + 2h), \dots, (x_n - kh + h, x_n + kh)$. Число узлов является четным. Правило Ньютона при таком расположении узлов будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)(x_n, x_n - h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h) + (x - x_n + h)(x - x_n)(x - x_n - h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots + \\ & + (x - x_n + kh - 2h) \dots (x - x_n - kh + h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, \dots, x_n + kh - h, x_n + kh + h) + \\ & + (x - x_n + kh - h) \dots (x - x_n - kh + h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, \dots, x_n - kh + h, x_n + kh) + R_{2k-1}, \\ R_{2k-1} = & \frac{(x - x_n + kh - h) \dots (x - x_n - kh)}{(2k)!} f^{(2k)}(\xi). \end{aligned}$$

После введения новой переменной по правилу $x = x_n + th$ и соответствующих преобразований получим интерполяционное правило Ньютона – Бесселя:

$$\begin{aligned} y(x_n + th) = & \frac{y_n + y_{n+1}}{2} + \frac{t - \frac{1}{2}}{1!} \Delta y_n + \\ & + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{n-1} + \Delta^2 y_n}{2} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \\ & + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{n-2} + \Delta^4 y_{n-1}}{2} + \dots + \\ & + \frac{(t+k-2)\dots(t-k+1)}{(2k-2)!} \frac{\Delta^{2k-2} y_{n-k+1} + \Delta^{2k-2} y_{n-k+2}}{2} + \\ & + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+k-2)\dots(t-k+1)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + R_{2k-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_{2k-1} = h^{2k} \frac{(t+k-1)\dots(t-k)}{(2k)!} f^{(2k)}(\xi),$$

где ξ – некоторая точка отрезка, содержащего $x_n - kh + h$, $x_n + kh$, x .

Пример 2. Пользуясь правилами Ньютона – Стирлинга или Ньютона–Бесселя второй степени, уплотнить следующую таблицу значений функции $f(x)$ в два раза:

1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
0,7652	0,6711	0,5660	0,4554	0,3400	0,2239	0,1104	0,0025	–0,0968

Решение. Для нахождения приближенного значения функции в точке $x = 1,1$ воспользуемся (3.7), привлекая узлы интерполирования в порядке $x_1 = 1,2$, затем $x_0 = 1,0$ и $x_2 = 1,4$. Поскольку $x = 1,3$ принадлежит этому отрезку интерполирования, то по построенному многочлену можно определить приближенное значение функции и в $x = 1,3$. Аналогичным образом определяются приближенные решения функции на остальных серединных отрезках. В результате уплотнения получим следующую таблицу:

1.1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5
0,7196	0,6201	0,5118	0,3980	0,2818	0,1666	0,555	–0,0484

Задачи и упражнения

1. Функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ задана таблицей своих значений с шагом h . Определить наибольшую погрешность линейной интерполяции, если:

- а) $y = \ln(x + 5)$, $x \in [7; 10]$, $h = 0,2$;
- б) $y = \ln(2x + 1)$, $x \in [10; 15]$, $h = 0,25$;
- в) $y = e^{2x}$, $x \in [-5; -1]$, $h = 0,25$;
- г) $y = e^{2x-1}$, $x \in [-5; -1]$, $h = 0,25$;
- д) $y = e^{1-2x}$, $x \in [1; 5]$, $h = 0,2$;
- е) $y = e^{2-2x}$, $x \in [2; 4]$, $h = 0,25$;
- ж) $y = 2^x$, $x \in [-4; -1]$, $h = 0,25$;
- з) $y = 2^{x-1}$, $x \in [-3; 0]$, $h = 0,25$;
- и) $y = 2^{2x+1}$, $x \in [-4; -1]$, $h = 0,2$;

к) $y = 2^{2x-1}, x \in [-3; 0], h = 0,2;$

л) $y = \frac{1}{x^2 - 1}, x \in [2; 5], h = 0,2;$

м) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in [2; 4], h = 0,25;$

н) $y = \frac{x-1}{x+2}, x \in [1; 4], h = 0,2;$

о) $y = e^{-x^2}, x \in [1; 4], h = 0,25;$

п) $y = e^{1-x^2}, x \in [2; 4], h = 0,2.$

2. Требуется составить таблицу значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Определить шаг сетки при линейной интерполяции и шаг сетки при квадратичной интерполяции, чтобы погрешность каждой из указанных интерполяций была меньше, чем 10^{-5} :

а) $y = \sin x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

б) $y = \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

в) $y = \sin x + \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

г) $y = \sin x - \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

д) $y = e^{x-1}, x \in [-1; 1];$

е) $y = e^{-x-1}, x \in [-1; 1];$

ж) $y = 2^{x+1}, x \in [0; 2];$

з) $y = 2^{x-1}, x \in [-1; 1];$

и) $y = \ln(x+1), x \in [5; 10];$

к) $y = \ln(x+5), x \in [0; 5];$

л) $y = \ln x, x \in [10; 20];$

м) $y = \ln(x-5), x \in [25; 30];$

н) $y = \frac{1}{x-1}, x \in [2; 5];$

о) $y = \frac{1}{x+1}, x \in [1; 7];$

п) $y = \frac{1}{x+4}, x \in [0; 5].$

3. Функция $y = f(x)$ задана следующей таблицей своих значений на сетке равноотстоящих узлов:

0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
-0,835	-0,431	-0,025	0,434	0,871	1,432	1,875	2,012	2,385	2,981	3,125

I) Используя интерполяционный многочлен второй степени, определить приближенное значение функции в точке x^* ;

II) Используя интерполяционный многочлен третьей степени, определить приближенное значение функции в точке x^{**} .

а) $x^* = 0,914$; $x^{**} = 1,412$;

б) $x^* = 1,121$; $x^{**} = 1,321$;

в) $x^* = 1,171$; $x^{**} = 1,484$;

г) $x^* = 1,213$; $x^{**} = 1,512$;

д) $x^* = 1,281$; $x^{**} = 1,572$;

е) $x^* = 1,323$; $x^{**} = 1,613$;

ж) $x^* = 1,432$; $x^{**} = 1,531$;

з) $x^* = 1,481$; $x^{**} = 1,512$;

и) $x^* = 1,287$; $x^{**} = 1,481$;

к) $x^* = 1,215$; $x^{**} = 1,315$;

л) $x^* = 1,389$; $x^{**} = 1,129$;

м) $x^* = 1,409$; $x^{**} = 1,216$;

н) $x^* = 1,519$; $x^{**} = 1,389$;

о) $x^* = 1,611$; $x^{**} = 1,244$;

п) $x^* = 1,657$; $x^{**} = 1,333$.

Тема 4. Многочлены Чебышева

4.1. Определение многочленов Чебышева и их свойства

Многочлены Чебышева $T_n(x)$, $n \geq 0$, определяются соотношениями

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (4.1)$$

Пользуясь рекуррентной формулой (4.1), можно получить многочлен Чебышева любой степени, например:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

и т. д. Старший член $T_{n+1}(x)$ получается из старшего члена $T_n(x)$ умножением на $2x$, поэтому старший член $T_n(x)$ при $n > 0$ равен $2^{n-1}x^n$.

Имеет место следующее свойство многочленов Чебышева: все многочлены $T_{2n}(x)$ являются четными функциями, а $T_{2n+1}(x)$ – нечетными.

Действительно, при $n = 0$ это очевидно. Предположив справедливость этого утверждения при некотором n , мы получим: $2xT_{2n+1}(x)$ – четная функция и, вследствие (4.1), $T_{2n+2}(x)$ – четная. Тогда $2xT_{2n+2}(x)$ – нечетная и $T_{2n+3}(x)$ – нечетная вследствие (4.1).

При любом Θ имеем

$$\cos((n+1)\Theta) = 2 \cos \Theta \cos n\Theta - \cos((n-1)\Theta).$$

Полагая $\Theta = \arccos x$, получим

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2x \cos(n \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x).$$

Функция $\cos(n \arccos x)$ удовлетворяет тому же соотношению (4.1) относительно n , что и $T_n(x)$. Начальные условия при $n = 0$ и $n = 1$ одни и те же:

$$\cos(0 \cdot \arccos x) = 1 = T_0(x),$$

$$\cos(1 \cdot \arccos x) = x = T_1(x).$$

Поэтому, при всех n имеем $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Следовательно, $|T_n(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$. Конечно, нельзя утверждать, что $|T_n(x)| \leq 1$ при всех x . Если $|x| > 1$, то $\arccos x$ не является действительным числом и косинус такого числа может оказаться больше единицы.

Из уравнения $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$ получаем, что

$$x_m = \cos \frac{\pi(2m+1)}{2n}, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) дает все корни многочлена Чебышева, при этом легко видеть, что все они принадлежат отрезку $[-1; 1]$. Точками экстремума многочлена Чебышева будут те из них, где $|T_n(x)| = 1$. Решая это уравнение, получим

$$x_{(m)} = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

при этом $T_n(x_{(m)}) = \cos \pi m = (-1)^m$. Многочлены

$$\overline{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x) = x^n + \dots$$

называют многочленами, наименее уклоняющимися от нуля на отрезке $[-1; 1]$. Это определение объясняется следующим свойством: если $P_n(x)$ – произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, то имеет место неравенство

$$\max_{[-1; 1]} |P_n(x)| \geq \max_{[-1; 1]} |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Для доказательства этого свойства предположим противное. Многочлен $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ имеет степень $n - 1$. В то же время

$$\text{sign}(\overline{T}_n(x_{(m)}) - P_n(x_{(m)})) = \text{sign}((-1)^m 2^{1-n} - P_n(x_{(m)})) = (-1)^m,$$

так как, согласно предположению, $|P_n(x_{(m)})| < 2^{1-n}$ при всех m . Таким образом, между каждыми двумя точками $x_{(m)}, x_{(m+1)}$ многочлен $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ меняет знак. Многочлен $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ степени $n - 1$, отличный от нуля (он отличен от нуля в точках $x_{(m)}$), имеет n различных корней. Мы пришли к противоречию.

Линейной заменой переменных

$$x' = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x$$

отрезок $[-1; 1]$ можно перевести в заданный отрезок $[a; b]$. Многочлен $\overline{T}_n(x)$ при этом преобразуется в многочлен $\overline{T}_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n$. В соответствии с леммой можно утверждать, что многочлен

$$\overline{T}_n^{[a; b]}(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right)$$

со старшим коэффициентом 1 является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a; b]$. Это означает, что для любого многочлена $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1 справедливо неравенство

$$\max_{[a; b]} |P_n(x)| \geq \max_{[a; b]} |\overline{T}_n^{[a; b]}(x)| = (b-a)^n 2^{1-2n}.$$

Легко проверить, что нулями $\overline{T}_n^{[a; b]}(x)$ являются точки

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Пример 1. Доказать следующее свойство многочлена Чебышева:
 $T_{2n}(x) = 2T_n^2(x) - 1$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формой представления многочлена Чебышева n -й степени: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Тогда нам следует доказать тождество

$$\cos(2n \arccos x) = 2 \cos^2(n \arccos x) - 1,$$

но последнее соотношение есть формула для представления косинуса двойного угла.

Пример 2. Среди всех многочленов вида $5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1; 2]$.

Решение. Вначале построим многочлен третьей степени, наименее уклоняющийся от нуля на указанном отрезке. Им будет многочлен вида

$$\begin{aligned} \overline{T}_3^{[1; 2]}(x) &= \frac{(2-1)^3}{2^{2 \cdot 3 - 1}} T_3\left(\frac{2x - (2+1)}{2-1}\right) = \\ &= \frac{1}{32} (4t^3 - 3t) \Big|_{t=2x-3} = \frac{1}{32} (4(2x-3)^3 - 3(2x-3)) = \\ &= \frac{1}{32} (32x^3 - 144x^2 + 216x - 100 - 6x + 9) = \\ &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{105}{16}x - \frac{99}{32}. \end{aligned}$$

Для получения требуемого многочлена умножим последний на 5. Получим $5x^3 - \frac{45}{2}x^2 + \frac{105}{16}x - \frac{495}{32}$.

4.2. Минимизация остатка интерполирования

Пусть функция $f(x)$ приближается на отрезке $[a; b]$ с помощью интерполяционного многочлена степени $n-1$ с узлами интерполирования $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$ и пусть погрешность оценивается в норме $\|f\| = \sup_{[a; b]} |f(x)|$. Ранее нами была получена формула

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)\omega(x)}{n!},$$

где $\xi \in [a; b]$ при $x \in [a; b]$ и $\omega(x) = \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Отсюда следует оценка погрешности интерполяции

$$\|f(x) - P_{n-1}(x)\| \leq \frac{\|f^{(n)}\| \|\omega_n\|}{n!}. \quad (4.5)$$

Займемся минимизацией правой части этой оценки за счет выбора узлов x_1, x_2, \dots, x_n . Для этой цели и были введены в рассмотрение многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Многочлен $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ имеет старший коэффициент 1, поэтому $\|\omega_n\| \geq (b - a)^n 2^{1-2n}$ согласно предыдущим рассуждениям. Если взять в качестве узлов интерполирования точки

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

то

$$\omega_n(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right)$$

и, следовательно, $\|\omega_n\| = (b-a)^n 2^{1-2n}$. Значит, при таком расположении узлов (т. е. по формуле (4.6)) справедлива наилучшая из оценок, которая может быть получена как следствие оценки (4.5)

$$\|f - P_{n-1}(x)\| \leq \frac{\|f^{(n)}\| (b-a)^n 2^{1-2n}}{n!}. \quad (4.7)$$

В дальнейшем при рассмотрении задачи алгебраического интерполирования узлы интерполирования, выбранные по формуле (4.6), будем называть узлами, выбранными наилучшим образом, а оценку погрешности интерполирования (4.7) назовем наилучшей оценкой.

Пример 3. Рассмотрим задачу интерполирования функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ с помощью многочлена четвертой степени. Выбрать узлы интерполирования наилучшим образом и получить оценку остаточного члена вида (4.7).

Решение. Речь идет об интерполировании функции по пяти узлам, которые, согласно требованиям, будем выбирать по формуле (4.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{10}; \\
x_1 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{10}; \\
x_2 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}; \\
x_3 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{10}; \\
x_4 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{9\pi}{10}.
\end{aligned}$$

Тогда при таком расположении узлов интерполирования оценка погрешности интерполяционного многочлена (4.7) примет вид

$$\|\sin x - P_n(x)\| \leq \frac{\|\sin^{(5)}(x)\| \pi^5 2^{-9}}{5!} = \frac{\pi^5}{2^9 \cdot 5!} \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 4. Функция $f(x) = \sin 2x$ на отрезке $[0; 2]$ приближается многочленом Лагранжа по n узлам Чебышева:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon_n = \frac{1}{3} 10^{-p}$, если $n = 6$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.7), где $a = 0$, $b = 2$, $n = 6$ и

$$\begin{aligned}
f^{(6)}(x) &= (\sin 2x)^{(6)} = 2(\cos 2x)^{(5)} = 4(-\sin 2x)^{(4)} = \\
&= -8(-\cos 2x)^{(3)} = 16(\sin 2x)^{(2)} = 32(\cos 2x)^{(1)} = -64 \sin 2x.
\end{aligned}$$

Тогда $\|f^{(6)}\| = 64$ и оценка (4.7) принимает вид

$$\|\sin 2x - P_5(x)\| \leq \frac{64 \cdot 2^6 \cdot 2^{-11}}{6!} \leq \frac{2}{6!} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} < \frac{1}{3} 10^{-p}.$$

Отсюда имеем $\frac{1}{120} < 10^{-p}$. Последнее неравенство выполняется для наибольшего целого $p = 2$.

Задачи и упражнения

1. Среди всех многочленов вида $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a; b]$ и заданном одном из коэффициентов a_i при следующих данных:

а) $a_4 = \frac{1}{2}, x \in [5; 7];$

б) $a_4 = \frac{1}{3}, x \in [3; 5];$

в) $a_3 = 7, x \in [3; 6];$

г) $a_3 = 6, x \in [0; 3];$

д) $a_2 = 3, x \in [0; 2];$

е) $a_2 = 4, x \in [2; 5];$

ж) $a_1 = 3, x \in [0; 3];$

з) $a_1 = 2, x \in [1; 4];$

и) $a_1 = 1,5, x \in [0; 2];$

к) $a_1 = 2,5, x \in [1; 3];$

л) $a_4 = 1,5, x \in [0; 2];$

м) $a_4 = 2,5, x \in [2; 5];$

н) $a_3 = 1,5, x \in [1; 3];$

о) $a_3 = 2,5, x \in [0; 3];$

п) $a_2 = 1,7, x \in [1; 4].$

2. Построить таблицу для интерполирования функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ многочленом четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом, и оценить погрешность интерполирования в равномерной норме при следующих данных:

а) $y = \sin \frac{3}{2}x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

б) $y = \cos \frac{3}{2}x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

в) $y = e^{\frac{1}{2}x}, x \in [-1; 2];$

г) $y = e^{-\frac{1}{2}x}, x \in [-2; 1];$

д) $y = \ln(x + 1), x \in [0; 2];$

е) $y = \ln(2x + 1), x \in [0; 3];$

ж) $y = \ln(x - 1), x \in [2; 5];$

з) $y = \ln(2x + 1), x \in [1; 4];$

и) $y = 2^x, x \in [0; 1];$

к) $y = 2^{x-1}, x \in [0; 1];$

л) $y = e^{2x-1}, x \in [0; 1];$

м) $y = e^{-2x+1}, x \in [0; 1];$

н) $y = \sin x - x, x \in [0; \pi];$

о) $y = \cos x + x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

п) $y = \cos 2x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

3. Функция $y = f(x)$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке $[a; b]$ по n узлам Чебышева $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$, $i = 1, \dots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\mathcal{E}_n = 10^{-p}$, если имеют место следующие данные:

а) $y = e^x + x^2, x \in [-2; 1], n = 4;$

б) $y = e^{-x} + 2x^2, x \in [0; 2], n = 5;$

в) $y = e^{-x} + e^x, x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right], n = 6;$

г) $y = e^{2x} + x, x \in [-2; 1], n = 4;$

д) $y = e^{-2x} + x, x \in [-1; 2], n = 5;$

е) $y = 2^x + x, x \in [-1; 2], n = 6;$

ж) $y = 2^{-x} + x, x \in [-1; 2], n = 5;$

з) $y = 2^{-x} + 2^x, x \in [-3; 0], n = 4;$

и) $y = \sin x + \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], n = 5;$

к) $y = \sin 2x + \cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], n = 4;$

л) $y = \cos 2x - \sin x, x \in [0; \pi], n = 4;$

м) $y = \ln(x+1) - x, x \in \left[\frac{1}{2}; 3\right], n = 5;$

н) $y = \ln(x-1) + x, x \in [2; 4.5], n = 4;$

о) $y = \ln(x+2) + x^2, x \in [-1; 2], n = 5;$

п) $y = \ln(x+2) - 2x^2, x \in [-1; 2], n = 6.$

4. Вычислить значение многочлена Чебышева n -й степени в точке x и значение производной этого многочлена в точке x' при следующих данных:

а) $n = 4, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

б) $n = 4, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

в) $n = 4, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

г) $n = 4, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

д) $n = 5, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

е) $n = 5, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

ж) $n = 5, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

з) $n = 5, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

и) $n = 6, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

к) $n = 6, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

л) $n = 6, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

м) $n = 6, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

н) $n = 7, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = 1;$

о) $n = 7, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x' = -1;$

п) $n = 7, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x' = 1.$

Тема 5. Интерполирование с кратными узлами

5.1. Постановка задачи кратного интерполирования

Пусть на отрезке $[a; b]$ даны m различных узлов интерполирования. Рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in [a; b]$ и будем считать, что в точке x_1 известно значение как самой функции $f(x_1)$, так и ее производных $f'(x_1), f''(x_1), \dots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1)$; аналогично в точке x_2 заданы значения $f(x_2), f'(x_2), f''(x_2), \dots, f^{(\alpha_2-1)}(x_2)$ и т. д.; в точке x_m заданы значения $f(x_m), f'(x_m), \dots, f^{(\alpha_m-1)}(x_m)$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ называются кратностями соответствующих узлов. Общее число всех исходных данных о функции $f(x)$ обозначим через $n+1$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n+1$.

Требуется найти многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

степени не больше n , удовлетворяющий условиям

$$P^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), i = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1; k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.1)$$

Эти условия дают для определения коэффициентов a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ многочлена $P(x)$ систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений. Чтобы убедиться в существовании и единственности решения этой системы, достаточно показать, что однородная система

$$P^{(i)}(x_k) = 0, i = 0, \dots, \alpha_k - 1; k = 1, 2, \dots, m$$

имеет только нулевые решения. Но такая система для многочлена $P(x)$ говорит о том, что узлы x_1, x_2, \dots, x_m должны быть корнями $P(x)$ кратности не меньше соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Сумма кратностей $P(x)$ должна быть меньше $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n+1$. Но степень $P(x)$ не выше n , и иметь сумму кратностей, большую n , многочлен $P(x)$ может только в том случае, когда он тождественно равен 0. Тогда все его коэффициенты a_k равны нулю и, значит, однородная система имеет только нулевое решение.

Таким образом, задача интерполирования с кратными узлами (5.1) разрешима и имеет единственное решение при любых значениях $f^{(i)}(x_k)$ в условиях (5.1). Интерполяцию с кратными узлами еще называют эрмитовой, а соответствующий алгебраический многочлен n -й степени называют интерполяционным многочленом Эрмита и обозначают $H_n(x)$.

5.2. Интерполяционный многочлен Эрмита и его остаток.

Для многочлена $P(x)$ можно легко выписать явное выражение через узлы x_k и значения $f^{(i)}(x_k)$ при помощи определителей. Но такое представление $P(x)$ имеет сложное строение, и мы его здесь рассматривать не будем.

Покажем, как построить многочлен Эрмита, используя разделенные разности. По $n+1$ узлу построим интерполяционный многочлен Ньютона $P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n)$. Поскольку значения функции $f(x)$ и многочлена в узлах совпадают, то их средние наклоны на участках между узлами равны. Мысленно будем приближать узел x_n к узлу x_{n-1} , при этом средний наклон будет стремиться к производной. Значит, после совпадения узлов получим многочлен, который в узле x_{n-1} правильно передает не только значение функции, но и значение первой производной. Символически обозначим его как $P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1})$. Слияние трех узлов в один обеспечивает передачу не только наклона, но и кривизны, т. е. первой и второй производных и т. д. Таким образом, многочлен

$$H_n(x) = P_n \left(x; \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{\alpha_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_p, x_p, \dots, x_p}_{\alpha_p} \right) \quad (5.2)$$

$\sum_{k=1}^p \alpha_k = n+1$ в узле x_n правильно передает значение функции и ее производных вплоть до порядка α_{k-1} и имеет минимально необходимую для этого степень. Оценка погрешности в этом случае принимает следующий вид:

$$\|f(x) - H_n(x)\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\Omega_n(x)\|, \quad (5.3)$$

где $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}(\xi)\|$, $\Omega_n(x) = \prod_{k=0}^p (x - x_k)^{\alpha_k}$.

Очевидно, что если сетка узлов имеет шаг h , а точка x лежит между крайними узлами интерполяции, то $\Omega_n(x) = O(h^{n+1})$. Следовательно, порядок точности эрмитовой интерполяции равен $n+1$, т. е. числу коэффициентов интерполяционного многочлена.

Заметим, что обычный многочлен Ньютона с таким же числом коэффициентов (т. е. той же степени) также имеет погрешность $O(h^{n+1})$. Однако на одной и той же сетке численная величина погрешности многочлена Ньютона будет больше, чем у многочлена Эрмита. Его вспомогательный многочлен $\omega_n(x)$ содержит больше узлов, чем $\Omega_n(x)$ и поэтому в него входят сомножители большей по модулю величины. Очевидно также, что чем более высокие производные используются при построении интерполяционного многочлена Эрмита заданной степени, тем меньше требуемое число узлов и тем меньше численная величина его погрешности, хотя порядок точности остается одним и тем же.

Выражением (5.2) нельзя пользоваться буквально. Если формально подставить в формулу Ньютона совпадающие узлы, то потребуются вычислять разделенные разности, у которых некоторые узлы являются кратными. Выражения для таких разделенных разностей содержат неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Если кратность каждого узла не больше, чем двойная, то эту неопределенность можно раскрыть с помощью предельного перехода, например

$$\begin{aligned} f(x_0, x_0) &= \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{f(x_0) - f(x'_0)}{x_0 - x'_0} = f'(x_0), \\ f(x_0, x_0, x_1) &= \frac{1}{x_0 - x_1} (y'(x_0) - y(x_0, x_1)), \\ f(x_0, x_0, x_1, x_1) &= \frac{1}{(x_0 - x_1)^2} (f'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + f'(x_1)). \end{aligned}$$

Если узлы имеют более высокую кратность, то удобнее дифференцировать формулу Ньютона. Например, если ее продифференцировать $m-1$ раз, то обратятся в нуль все члены, содержащие разделенные разности порядка меньше $m-1$. Затем положим $x = x_0 = x_1 = \dots$. Тогда обратятся в нуль множители перед разделенными разностями порядка больше $m-1$, и мы получим

$$f(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha-1)}(x_0).$$

Рассмотрим наиболее употребительные частные случаи интерполяционного многочлена Эрмита.

Многочлен, который в одном узле x_0 совпадает с функцией и всеми ее заданными производными, имеет вид

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots$$

и при заданном n представляет собой отрезок ряда Тейлора. В этом случае $\Omega_n(x) = (x - x_0)^{n+1}$ и оценка (5.3) переходит в известную оценку точности ряда Тейлора.

Многочлен, передающий в двух узлах значения функции и ее первой производной, имеет вид

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + (x - x_0)) \times \\ \times (f(x_0, x_0, x_1) + (x - x_1)f(x_0, x_0, x_1, x_1)),$$

в котором разделенные разности определены выше. Функция $\Omega_n(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2$ внутри интервала интерполирования длины h не превышает $\left(\frac{h}{2}\right)^4$, поэтому погрешность этой формулы не более $0,0026 M_4 h^4$, т. е. формула имеет четвертый порядок точности.

Для сравнения приведем без вывода общее выражение интерполяционного многочлена Эрмита:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^{\alpha_{k-1}} \sum_{q=0}^{\alpha_{k-1}-m} \frac{f^{(m)}(x_k)}{m!q!} \left((x - x_k)^{m+q} \prod_{i \neq k} (x - x_i)^{\alpha_i} \right) \times \\ \times \left(\frac{d^q}{dx^q} \prod_{i \neq k} (x - x_j)^{-\alpha_j} \right)_{x=x_k}.$$

Оно настолько громоздко, что пользоваться им для вычислений практически невозможно. Общие формулы, рассчитанные на все случаи, нередко оказываются настолько сложными, что их не применяют в конкретных случаях. К тому же, в практических расчетах, как будет указано далее, нецелесообразно использовать многочлены высоких степеней, поэтому в общих формулах нет необходимости. Трудоемкость же вычислений часто оказывается существенно меньшей при применении рекуррентных соотношений типа формул разделенных разностей. Другими словами, интерполяционный многочлен Эрмита записывается как интерполяционный многочлен Ньютона, где разделенные разности в кратных узлах определяются по аналогичным приведенным выше формулам с использованием предельного перехода.

Пример 1. Функция $f(x)$ задана следующей таблицей:

x	1	2	3
$f(x)$	2,1	4,3	8,7
$f'(x)$	1	1,5	1

Построить интерполяционный многочлен Эрмита пятой степени и определить, используя его, приближенное значение функции в точке $x = 2,5$.

Решение. Интерполяционный многочлен Эрмита будем строить в виде

$$H_5(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^5}{5!}f^{(5)}(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)}{2!}f'(x_1) + \frac{(x - x_0)^3(x - x_1)}{3!}f''(x_1) + \frac{(x - x_0)^4(x - x_1)}{4!}f'''(x_1) + \frac{(x - x_0)^5(x - x_1)}{5!}f^{(4)}(x_1) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)^2}{2!}f''(x_2) + \frac{(x - x_0)^3(x - x_1)^2}{3!}f'''(x_2) + \frac{(x - x_0)^4(x - x_1)^2}{4!}f^{(4)}(x_2) + \frac{(x - x_0)^5(x - x_1)^2}{5!}f^{(5)}(x_2).$$

Разделенные разности в правой части этого соотношения определим, используя следующую таблицу:

1	2,1						
1	2,1	1					
2	4,3	2,2	1,2				
2	4,3	1,5	-0,7	1,9			
3	8,7	4,4	2,9	3,6	2,75		
3	8,7	1	-3,4	-6,3	-4,95	-3,65	

Согласно этой таблице многочлен Эрмита принимает вид

$$H_5(x) = 2,1 + (x - 1) + 1,2(x - 1)^2 - 1,9(x - 1)^2(x - 2) +$$

$$+ 2,75(x - 1)^2(x - 2)^2 - 3,65(x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3).$$

Для нахождения приближенного значения функции в точке $x = 2,5$ подставим это значение x в $H_5(x)$. Получим $f(2,5) \approx 6,7922$.

Пример 2. Функция $y = \sin x$ интерполируется многочленом Эрмита по двум двукратным узлам $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Определить приближенное значение заданной функции в точке $x = \frac{\pi}{4}$, используя построенный многочлен, сравнить его с точным значением $\sin \frac{\pi}{4}$, а также оценить остаток построенного многочлена.

Решение. Из условия задачи имеем $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $f(x_1) = 0,5$, $f'(x_1) = 0,866$, $f(x_2) = 0,866$, $f'(x_2) = 0,5$. Интерполяционный многочлен Эрмита третьей степени будем строить в виде

$$H_3(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_1) + (x - x_1)^2 f(x_1, x_1, x_2) + \\ + (x - x_1)^2 (x - x_2)f(x_1, x_1, x_2, x_2).$$

Разделенные разности определим из следующей таблицы:

$\frac{\pi}{6}$	0,5			
$\frac{\pi}{6}$	0,5	0,866		
$\frac{\pi}{3}$	0,866	0,6994	-0,3182	
$\frac{\pi}{3}$	0,866	0,5	-0,3808	-0,1196

Тогда $H_3(x)$ принимает вид

$$H_3(x) = 0,5 + 0,866\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 0,3182\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - 0,1196\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

и $H_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707$, т. е. $\sin \frac{\pi}{4} \approx 0,707$, а его табличное значение $\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$.

Для оценки остатка многочлена Эрмита воспользуемся формулой (5.3). В нашем случае будем иметь

$$\|\sin x - H_3(x)\| \leq \frac{\|\sin^{(4)}\|}{4!} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{\pi^4}{144^2} \approx 0,0002,$$

что согласуется с полученным результатом.

Задачи и упражнения

1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений и производных указанного порядка в некоторых узлах. Построить интерполяционный многочлен Эрмита наименьшей степени и определить, используя его, приближенное значение функции в указанной точке x :

a)

x	1,1	1,6	2,1
$f(x)$	2,5	4,1	6,7
$f'(x)$	1	1,5	1,2
$f''(x)$		1	

 $x = 2;$

б)

x	3,2	4,1	4,8
$f(x)$	-1,5	-3,3	-1,1
$f'(x)$	1	1,5	1
$f''(x)$	1		

 $x = 4;$

в)

x	-2,5	-1,5	0
$f(x)$	3,2	4,3	5,9
$f'(x)$	1,5	1	0,8
$f''(x)$			1,1

 $x = -2;$

г)

x	-1,3	-0,2	0,7
$f(x)$	8,5	6,5	4,1
$f'(x)$	-1	-1,2	-0,2
$f''(x)$		1	

 $x = 0;$

д)

x	-2,1	-1,5	-0,2
$f(x)$	3,5	2,7	0,2
$f'(x)$	-1	-1,5	-2
$f''(x)$	-1		

 $x = -1;$

е)

x	-0,9	-0,1	0,8
$f(x)$	-4,1	-2,1	-1,1
$f'(x)$	1	1,5	1,6
$f''(x)$			1

 $x = 0,5;$

ж)

x	1,3	2,1	3,2
$f(x)$	4,3	2,5	-1
$f'(x)$	-1	-2	-1
$f''(x)$	-1		

 $x = 2,5;$

з)

x	5,1	5,8	6,4
$f(x)$	3,5	2,1	1,1
$f'(x)$	-2	-1,5	-1
$f''(x)$	1		

 $x = 6;$

и)

x	3,2	4,1	5,2
$f(x)$	-8,2	-4,1	-2,2
$f'(x)$	1,1	1,5	1,1
$f''(x)$	1,1		

 $x = 4;$

к)

x	1,4	2,1	2,8
$f(x)$	3,6	4,5	8,1
$f'(x)$	1,5	1,6	1,7
$f''(x)$		1,1	

 $x = 2,5;$

л)

x	3,3	3,8	4,5
$f(x)$	-1,1	-0,1	0,8
$f'(x)$	1,1	1,2	1
$f''(x)$	1,3		

 $x = 4;$

м)

x	2,4	2,9	3,3
$f(x)$	-8,1	-5,5	-1,1
$f'(x)$	1,2	1,1	1,3
$f''(x)$		1,2	

 $x = 3;$

н)

x	1,2	2,1	1,9
$f(x)$	3,2	4,1	5,5
$f'(x)$	1,1	1,2	1,3
$f''(x)$	1		

 $x = 2,5;$

о)

x	-1,3	-2	-1,5
$f(x)$	8,1	7,5	6,3
$f'(x)$	-1,1	-1,2	-1,3
$f''(x)$			1

 $x = -1;$

п)

x	-1,5	-0,3	0,5
$f(x)$	4,1	8,1	11,3
$f'(x)$	1,3	1,4	1,2
$f''(x)$		-0,5	

 $x = 0$.

2. Функция $y = f(x)$ интерполируется многочленом Эрмита по двум двукратным узлам x_1 и x_2 . Определить приближенное значение указанной функции в точке x , используя построенный многочлен, сравнить его с точным решением $f(x)$ в этой точке, а также оценить остаток построенного многочлена, если:

- а) $f(x) = x^2 \sin x - e^x$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 1$, $x = 0,5$;
- б) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x + 3$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,8$, $x = 1,5$;
- в) $f(x) = e^x - \sin(x^2 + 2)$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1,1$, $x = 1$;
- г) $f(x) = 2^x - \ln(x+1)$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$, $x = 0,75$;
- д) $f(x) = 2^x - \frac{1}{x+1} + \ln x$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$, $x = 1,75$;
- е) $f(x) = x^2 \cos x - x \sin x$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 2$, $x = 0,75$;
- ж) $f(x) = e^{2x} - \ln x$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x = 1,5$;
- з) $f(x) = \ln(x^2 + 1) + e^x$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x = 1,5$;
- и) $f(x) = \sin 2x - x \cos x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5$, $x = 1$;
- к) $f(x) = e^{3x} - \ln(x^2 + 3)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$, $x = 0,25$;
- л) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x-5}$, $x_1 = -0,5$, $x_2 = 1,5$, $x = 1$;
- м) $f(x) = 2^x + 4 \sin 2x$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x = -0,5$;
- н) $f(x) = 2^{-x} + 2 \cos(x+1)$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0,5$, $x = 0$;
- о) $f(x) = \ln(x+1) + e^x + \cos x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x = 1$;
- п) $f(x) = \ln(x+3) + e^{\frac{1}{2}x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x = 1$.

Тема 6. Сплайн-интерполирование

6.1. Понятие сплайн-функции и интерполяционного сплайна

Сплайн-функцией m -го порядка называется функция $S_m(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) на каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S_m(x)$ является многочленом m -й степени, т. е.

$$S_m(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \dots + a_{im}x^m, \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N;$$

2) $S_m(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $m-1$ -го порядка включительно во всех внутренних точках, в том числе и в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, N-1$, т. е.

$$S_m^{(j)}(x_i + 0) = S_m^{(j)}(x_i - 0), j = 0, 1, \dots, m-1, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Если, кроме того, выполняются условия интерполирования

3) $S_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$, то $S_m(x)$ называется интерполяционной сплайн-функцией, где $y = f(x)$ – функция, подлежащая интерполированию по ее значениям в точках $x_i, i = 0, 1, \dots, N$.

Функция $S_m(x)$ будет определена, если определяться ее коэффициенты $a_{ik}, k = 0, 1, \dots, m, i = 1, 2, \dots, N$, т. е. всего имеем $(m+1)N$ неизвестных коэффициентов a_{ik} . Для их определения имеем $m(N-1)$ условий непрерывности $S_m^{(j)}(x), j = 0, 1, \dots, m-1$ во внутренних узлах интерполирования (на любом интервале (x_{i-1}, x_i) функция $S_m^{(j)}(x)$ как многочлен соответствующей степени будет непрерывной) и $N+1$ условий интерполируемости $S_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$. То есть всего имеем $m(N-1) + N + 1 = m(N-1) - m + 1$ условий. Недостающие $m-1$ условия задаются либо произвольно на концах отрезка интерполирования (т. е. в точках x_0 и x_N), либо из дополнительной информации.

6.2. Построение интерполяционного сплайна третьего порядка

На практике наибольшее распространение получил интерполяционный сплайн третьего порядка. Построим его на основании следующей наглядной физической интерпретации.

Когда надо провести график функции по известным точкам $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, N$, то пользуются лекалом. Однако если точки расположены редко, то нелегко бывает подобрать участок лекала, проходящий сразу через много точек. Тогда обычно инженеры берут гибкие лекала – металлическую линейку, ставят ее на ребро и изгибают, придерживая в нескольких местах пальцами так, чтобы ее ребро проходило через все точки сразу. Этот способ интерполяции можно описать математически. Гибкая линейка – это упругий брусок. Из курса сопромата известно, что уравнение его свободного равновесия есть выполнение условия $\varphi^{IV}(x) = 0$. Это значит, что в промежутках между каждой парой соседних узлов интерполирования функция $\varphi(x)$ является многочленом третьей степени, которую удобно записать в виде

$$\varphi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (6.1)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, \dots, N.$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i , $i = 1, 2, \dots, N$ в (6.1) будем определять, исходя из условий интерполируемости и непрерывности производных функции $\varphi(x)$ до второго порядка включительно во внутренних узлах интерполирования x_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$. Предварительно условимся обозначать $y = f(x)$ и $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Очевидно, в узлах интерполирования многочлен должен принимать табличные значения

$$y_{i-1} = \varphi(x_{i-1}) = a_i, \quad (6.2)$$

$$y_i = \varphi(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \quad (6.3)$$

$i = 1, \dots, N$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$. Условия непрерывности самого сплайна во внутренних узлах интерполирования, очевидно, следуют из (6.2), (6.3). Для записи условий непрерывности первой и второй производной функции $\varphi(x)$ во внутренних узлах интерполирования вычислим первую и вторую производные от $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$\varphi''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

и потребуем их непрерывности. Приравнявая во внутренних углах x_i правые и левые пределы производных

$$\varphi'(x_i + 0) = \varphi'(x_i - 0),$$

$$\varphi''(x_i + 0) = \varphi''(x_i - 0), i = 1, 2, \dots, N-1,$$

получим

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad (6.4)$$

$$2c_{i+1} = 2c_i + 6d_i h_i, i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.5)$$

Недостающие два условия обычно получают из естественных предположений о нулевой кривизне графика на концах, т. е.

$$\varphi''(x_0) = 0, c_1 = 0, \quad (6.6)$$

$$\varphi''(x_N) = 0, 2c_N + 6d_N h_N = 0, \quad (6.7)$$

что соответствует свободно опущенным концам линейки. Но если есть дополнительные условия об асимптотике функции, то можно записать другие краевые условия. Уравнения (6.2 – 6.7) образуют систему линейных уравнений для определения $4N$ неизвестных коэффициентов. Эту систему можно решать методом исключения Гаусса. Но гораздо эффективнее привести ее к специальному виду. Уравнение (6.2) сразу дает нам все коэффициенты a_i . Из уравнений (6.5 – 6.7) следует, что

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = 1, 2, \dots, N-1, d_N = -\frac{c_N}{3h_N}. \quad (6.8)$$

Подставим соотношение (6.8) в (6.3), одновременно исключая оттуда $a_i = y_{i-1}$. Тогда получим

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i), i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.9)$$

$$b_N = \frac{y_B - y_{N-1}}{h_N} - \frac{2}{3} h_N c_N.$$

Исключая теперь из (6.4) b_{i+1} и b_i при помощи (6.9), соответственно уменьшая в первом случае индекс на единицу, а величины d_i на основании (6.8), получим систему линейных уравнений для c_i :

$$c_1 = 0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad (6.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, c_{N+1} = 0.$$

Матрица этой системы трехдиагональная, и система легко решается методом прогонки.

6.3. Построение интерполяционного сплайна третьего порядка методом моментов.

Легко видеть, что на каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ вторая производная от $S_3(x)$ представляет собой прямую. Обозначим $S_3''(x_{i-1}) = M_{i-1}$ и $S_3''(x_i) = M_i$. Тогда уравнение этой прямой есть уравнение прямой, проходящей через две точки (x_{i-1}, M_{i-1}) и (x_i, M_i) , т. е. это уравнение имеет вид

$$\frac{S_3''(x) - M_{i-1}}{M_i - M_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Отсюда получим

$$S_3''(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (M_i - M_{i-1}) + M_{i-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

при этом условие непрерывности второй производной в точках x_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ будет выполняться. Из последнего соотношения следует, что

$$S_3'(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} (M_i - M_{i-1}) + M_{i-1}x + c_1, \quad (6.11)$$

$$S_3(x) = \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} (M_i - M_{i-1}) + \frac{x^2}{2} M_{i-1} + c_1x + c_2, \quad (6.12)$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$, $c_1, c_2 = \text{const}$. Для определения c_1 и c_2 воспользуемся тем, что $S_3(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S_3(x_i) = y_i$. Подставив с этой целью в (6.12) $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, получим

$$\frac{x_{i-1}^2}{2} M_{i-1} + c_1x_{i-1} + c_2 = y_{i-1}, \quad (6.13)$$

$$\frac{h_i^2}{6} (M_i - M_{i-1}) + \frac{x_i^2}{2} M_{i-1} + c_1x_i + c_2 = y_i. \quad (6.14)$$

Если из (6.14) вычесть (6.13), то получим

$$\frac{h_i^2}{6} (M_i - M_{i-1}) + \frac{h_i(x_i + x_{i-1})}{2} M_{i-1} + c_1h_i = y_i - y_{i-1},$$

т. е.

$$c_1 = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} M_{i-1}. \quad (6.15)$$

Подставляя это значение c_1 в (6.13), получим

$$c_2 = y_{i-1} - \frac{x_{i-1}^2}{2} M_{i-1} - x_{i-1} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} +$$

$$+ \frac{h_i x_{i-1}}{6} (M_i - M_{i-1}) - \frac{x_i(x_i + x_{i-1})}{2} M_{i-1}. \quad (6.16)$$

С учетом (6.15) выражение для $S'_3(x)$ (6.11) принимает вид

$$S'_3(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} (M_i - M_{i-1}) + M_{i-1}x + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \\ - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} M_{i-1}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, N.$$

Нам осталось потребовать выполнения условий непрерывности $S'_3(x)$ в точках x_i , $i = 1, \dots, N - 1$. Для записи вида $S'_3(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ необходимо произвести сдвиг индекса i в последнем соотношении на единицу вправо. Получим

$$S'_3(x) = \frac{x - x_i}{2h_{i+1}} (M_{i+1} - M_i) + M_i x + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \\ - \frac{h_{i+1}}{6} (M_{i+1} - M_i) - \frac{x_{i+1} + x_i}{2} M_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Тогда условие $S'_3(x_i - 0) = S'_3(x_i + 0)$ принимает вид

$$\frac{h_i}{2} (M_i - M_{i-1}) + M_{i-1}x + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} M_{i-1} = \\ = M_i x_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6} (M_{i+1} - M_i) - \frac{x_{i+1} + x_i}{2} M_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Последнюю систему соотношений после приведения подобных запишем следующим образом:

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i+1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \\ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6.16)$$

К системе (6.16) присоединяем два недостающих условия, например, вида

$$M_0 = M_N = 0. \quad (6.17)$$

Полученную систему (6.16), (6.17) с неизвестными M_i будем решать методом прогонки. Предварительно введем следующие обозначения:

$$a_i = \frac{h_i}{6}, \quad b_i = -\frac{h_{i+1} + h_i}{3}, \quad c_i = \frac{h_{i+1}}{6}, \quad d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

Тогда система примет вид

$$a_i M_{i-1} - b_i M_i + c_i M_{i+1} = d_i, i = \overline{1, N-1}. \quad (6.18)$$

Решение системы (6.18) будем искать в виде

$$M_i = \xi_{i+1} M_{i+1} + \eta_{i+1}, i = N-1, N-2, \dots, 0, \quad (6.19)$$

где ξ_{i+1} и η_{i+1} – пока неопределенные коэффициенты. Поскольку (6.19) имеет рекуррентный характер, то можно записать $M_{i-1} = \xi_i M_i + \eta_i$. Подставляя это выражение в (6.18), получим

$$a_i(\xi_i M_i - \eta_i) - b_i M_i + c_i M_{i+1} = d_i, i = \overline{1, N-1}.$$

Так как всякое $b_i - \xi_i c_i \neq 0$ (это будет легко видеть из последующего изложения), то

$$M_i = \frac{c_i}{b_i - \xi_i c_i} M_{i+1} + \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - \xi_i c_i}. \quad (6.20)$$

Чтобы (6.20) совпадало с (6.19), необходимо потребовать, чтобы

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - \xi_i c_i}, \eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - \xi_i c_i}, i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.21)$$

Формулы (6.21) носят рекуррентный характер для определения ξ_i и η_i . Необходимо только задать ξ_1 и η_1 . Но так как из (6.17) $M_0 = 0$, то полагая в (6.19) $i = 0$, получим $\xi_1 = \eta_1 = 0$. После этого все ξ_i и η_i определяются рекуррентно. Подставляя их в (6.19) и воспользовавшись вторым условием (6.17) $M_N = 0$, определим все остальные M_i из (6.19). Теперь легко показать, что все $|\xi_i| < 1$, и условия $b_i - c_i \xi_i \neq 0$ для всех i будут выполняться автоматически.

Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана следующей таблицей своих значений:

x_i	0	0,5	1	2	3
$f(x_i)$	1,2	2,1	3,5	4	5

Построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью определить приближенное значение функции $y = f(x)$ в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков.

Решение. Сплайн будем строить в виде (6.12). Для определения M_i построим систему соотношений (6.16) (или, что то же самое (6.18)). Для нашего случая имеем:

$$h_1 = 0,5, h_2 = 0,5, h_3 = 1, h_4 = 1;$$

$$a_1 = 0,0833, b_1 = -0,3333, c_1 = 0,0833, d_1 = 1;$$

$$a_2 = 0,0833, b_2 = -0,5, c_2 = 0,1667, d_2 = -2,3;$$

$$a_3 = 0,1667, b_3 = -0,6667, c_3 = 0,1667, d_3 = 0,5.$$

Система (6.16) принимает вид

$$\begin{cases} M_0 = 0, \\ 0,3333M_1 + 0,0833M_2 = 1, \\ 0,0833M_1 + 0,5M_2 + 0,1667M_3 = -2,3, \\ 0,1667M_2 + 0,6667M_3 = 0,5, \\ M_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить, что $M_1 = 4,5285$, $M_2 = -6,114$, $M_3 = 2,2785$. Используя теперь вид интерполяционного сплайна (6.12), где c_1 определяется (6.15), а c_2 – формулой (6.16), вычислим приближенные значения функции $f(x)$ в серединах элементарных отрезков:

$$f(0,25) \approx 1,5792,$$

$$f(0,75) \approx 3,38179,$$

$$f(1,5) \approx 3,823,$$

$$f(2,5) \approx 4,3101.$$

Задачи и упражнения

1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений. Построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью определить приближенное значение функции $y = f(x)$ в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков в следующих случаях:

а)

x_i	-1,2	-0,4	0	0,5	1,2
$f(x_i)$	5,2	4,1	3,5	2,7	1

;

б)

x_i	0,2	1,1	1,9	2,5	3
$f(x_i)$	1,2	3,2	4,1	4,9	5,5

;

в)

x_i	1,1	1,8	2,5	3,1	4
$f(x_i)$	-5,1	-4,2	-3,3	-2,5	-1

;

г)

x_i	0,5	1,5	2	2,4	3
$f(x_i)$	-1,1	0,5	1,7	2,1	3,2

;

$$\text{д)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 0,2 & 1,2 & 2,4 & 3,0 & 3,5 \\ \hline f(x_i) & -2,1 & -1,3 & 0,2 & 1,5 & 2,7 \end{array};$$

$$\text{е)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -0,2 & 0 & 0,4 & 0,8 & 1,1 \\ \hline f(x_i) & 5,1 & 4,2 & 3,5 & 2,7 & 1,8 \end{array};$$

$$\text{ж)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 3,2 & 4,1 & 4,9 & 5,7 & 6,4 \\ \hline f(x_i) & -2,1 & -1,5 & -0,7 & -0,1 & 0,5 \end{array};$$

$$\text{з)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 2,1 & 2,9 & 3,6 & 4,4 & 5,2 \\ \hline f(x_i) & -8,1 & -7,2 & -6,3 & -5,5 & -4 \end{array};$$

$$\text{и)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 0,2 & 0,8 & 1,4 & 2,0 & 2,5 \\ \hline f(x_i) & 1,2 & 3,1 & 4,1 & 3,7 & 2,9 \end{array};$$

$$\text{к)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 0,3 & 0,8 & 1,2 & 1,9 & 2,5 \\ \hline f(x_i) & -1,2 & 0 & 1,4 & 1,9 & 1,6 \end{array};$$

$$\text{л)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 1,3 & 1,9 & 2,5 & 3,4 & 4,0 \\ \hline f(x_i) & -4,1 & -2,1 & -0,5 & -1,2 & 2,3 \end{array};$$

$$\text{м)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -2,5 & -2,1 & -1,7 & -1,1 & -0,6 \\ \hline f(x_i) & 3,4 & 2,7 & 1,6 & 1,1 & 0,5 \end{array};$$

$$\text{н)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -1,2 & -0,8 & 0,1 & 0,5 & 1,1 \\ \hline f(x_i) & -2,5 & -1,1 & 0,2 & 0,4 & 0,8 \end{array};$$

$$\text{о)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 0,9 & 1,5 & 2,1 & 3,0 & 3,8 \\ \hline f(x_i) & 1,2 & 2,4 & 3,5 & 4,1 & 5,0 \end{array};$$

$$\text{п)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 3,6 & 4,8 & 5,9 & 6,7 & 7,3 \\ \hline f(x_i) & 1,8 & 0,9 & 0,1 & -1,1 & -3,2 \end{array}.$$

2. Функция $y = f(x)$ задана на равномерной сетке из шести узлов $x_i \in [a, b]$, $x_0 = a$, $x_5 = b$, $i = \overline{0, 5}$. Построить интерполяционные сплайны первого и второго порядка и по ним определить приближенное значение функции в серединах элементарных отрезков.

Результаты сравнить с точным значением функции в указанных точках при следующих данных:

- а) $y = \sin x + \cos x, x \in [1, 2];$
- б) $y = 2^x + 2^{-x}, x \in [-1, 1];$
- в) $y = e^x + x^2, x \in [0, 2];$
- г) $y = 2^x - \ln x, x \in [0,5, 1,5];$
- д) $y = \sin x + 2^x, x \in [0, 1];$
- е) $y = \sin 2x + \frac{1}{x}, x \in [0,5, 1];$
- ж) $y = \frac{1}{x^2 + 1} + 2^x, x \in [-0,5, 0,5];$
- з) $y = \cos x - \frac{1}{x}, x \in [0,5, 1,5];$
- и) $y = e^{2x} + \sqrt{x^2 + 1}, x \in [-1, 1];$
- к) $y = 2^x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in [-1, 1];$
- л) $y = xe^x + \sin x, x \in [0, 1,5];$
- м) $y = x \cdot 2^x - \cos x, x \in [0, 1,5];$
- н) $y = \frac{2^x}{x} + \cos x, x \in [1, 2];$
- о) $y = \frac{e^x}{x} + \sqrt{x}, x \in [1, 2];$
- п) $y = e^x + e^{-x}, x \in [0, 2].$

Тема 7. Численное дифференцирование функций

7.1. Численное дифференцирование, основанное на интерполяционном многочлене Ньютона

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y = f(x)$ трудно дифференцировать или этого вообще невозможно сделать, например, в случае ее табличного задания. Оно широко используется и при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

При численном дифференцировании функцию $f(x)$ приближенно заменяют легко вычисляемой функцией $\varphi(x, a)$ (a – набор параметров) и опять же приближенно полагают $f'(x) \approx \varphi'(x, a)$. Приближенная замена

$f(x)$ на $\varphi(x, a)$ может быть различной. Мы же будем рассматривать простой случай замены $f(x)$ интерполяционным многочленом в форме Ньютона $P(x)$, построенном по значениям $f(x)$ в различных узлах x_0, x_1, x_2, \dots . Вводя обозначение $\xi_i = x - x_i$, запишем сам многочлен и производные от него следующим образом:

$$P(x) = f(x_0) + \xi_0 f(x_0, x_1) + \xi_0 \xi_1 f(x_0, x_1, x_2) + \xi_0 \xi_1 \xi_2 f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots + \xi_0 \xi_1 \dots \xi_{n-1} f(x_0, x_1, \dots, x_n) + \dots,$$

$$P'(x) = f(x_0, x_1) + (\xi_0 + \xi_1) f(x_0, x_1, x_2) + (\xi_0 \xi_1 + \xi_0 \xi_2 + \xi_1 \xi_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$$

$$P''(x) = 2f(x_0, x_1, x_2) + 2(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$$

Общая формула имеет вид

$$P^{(k)}(x) = k! \left(f(x_0, x_1, \dots, x_k) + \left(\sum_{i=0}^k \xi_i \right) f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) + \sum_{i>j \geq 0}^{i=k+1} (\xi_i \xi_j) f(x_0, x_1, \dots, x_{k+2}) + \sum_{i>j \geq 0}^{i=k+2} (\xi_i \xi_j \xi_l) f(x_0, x_1, \dots, x_{k+3}) + \dots \right). \quad (7.1)$$

Обрывая ряд на некотором числе членов, получим приближенное выражение для соответствующей производной. Наиболее простое выражение получим, оставляя в формуле (7.1) только первый член:

$$f'(x) \approx f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f''(x) \approx 2f(x_0, x_1, x_2) = \frac{2}{x_2 - x_0} \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right), \quad (7.2)$$

$$f^{(k)}(x) = k! y(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{p=0}^k y_p \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^k (x_p - x_i)^{-1}.$$

Формулы (7.1)–(7.2) рассчитаны на произвольную неравномерную сетку.

Исследование точности полученных выражений при численных расчетах удобно делать при помощи оценки скорости убывания членов ряда (7.1). Если шаг сетки достаточно мал, то погрешность близка к первому отброшенному члену. Пусть мы используем узлы x_i , $0 \leq i \leq n$. Тогда первый отброшенный член содержит разделенную разность $f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$, которая, согласно (7.2), примерно равна $\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$. Перед ней стоит сумма произведений различных множителей ξ_i . Каждое

произведение содержит $n + 1 - k$ множителей, а вся сумма состоит из c_{n+1}^k слагаемых. Отсюда следует оценка погрешности формулы (7.1) с $n + 1$ узлами:

$$R_n^{(k)} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1-k)!} \max_i |\xi_i|^{n+1-k}, \quad M_{n+1} = \max_x |f^{(n+1)}(x)|. \quad (7.3)$$

Эти оценки можно несколько улучшить за счет более детального рассмотрения множителей ξ_i . При равномерной сетке узлов формулу (7.3) можно записать следующим образом:

$$R_n^{(k)} = M_{n+1} \left(\frac{en}{n+1-k} h \right)^{n+1-k} = O(h^{n+1-k}). \quad (7.4)$$

Таким образом, порядок точности формулы (1) по отношению к шагу сетки равен числу оставленных в ней членов, или, что то же самое, он равен числу узлов интерполирования минус порядок производной. Поэтому минимальное число узлов, необходимое для вычисления k -ой производной, равно $k + 1$. Оно приводит к формулам (7.2) и обеспечивает первый порядок точности. Эти выводы соответствуют общему принципу: при почленном дифференцировании ряда скорость его сходимости уменьшается.

Формулы (7.3), (7.4) для оценки погрешности приближенного вычисления производных носят эмпирический характер и являются достаточно грубыми. Не приводя здесь строгих теоретических рассуждений, запишем несколько формул для вида погрешности численного дифференцирования в общем случае.

Пусть на отрезке $[a, b]$, содержащем x и узлы x_0, x_1, \dots, x_n , функция f имеет непрерывную производную требуемого порядка и x лежит между x_0 и x_n . Тогда на указанном выше отрезке существует такая точка ξ , что для погрешности $R^{(m)}(x)$ вычисления производной $f^{(m)}(x)$ верно равенство

$$f^{(m)}(x) - P^{(m)}(x) = R^{(m)}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \omega^{(m)}(x) f^{(n+1)}(\xi). \quad (7.5)$$

Если же $x = x_i$, то, например, в случае первой производной имеет место следующее представление погрешности ее приближенного вычисления:

$$R'(x_i) = \frac{\omega'(x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 \leq \xi \leq x_n. \quad (7.6)$$

7.2. Некоторые частные правила вычисления производных

Будем исходить из интерполяционного многочлена Ньютона для случая равноотстоящих узлов. Учитывая связь между разделенными и конечными разностями в новой переменной $t = \frac{x - x_0}{h}$, где h – шаг сетки, запишем следующее представление:

$$f(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \\ + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0 + R_k,$$

где $y_i = f(x_i)$, R_k – остаток интерполяционного многочлена Ньютона. Дифференцируя это равенство по t , получим следующие выражения для производных:

$$hf'(x_0 + th) = \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \\ + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots, \\ h^2 f''(x_0 + th) = \Delta^2 y_0 + (t-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots, \\ h^3 f'''(x_0 + th) = \Delta^3 y_0 + \frac{2t-3}{2} \Delta^4 y_0 + \dots. \quad (7.7)$$

При $x = x_0$ и $t = 0$ будем иметь

$$hy'(x_0) = \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \frac{1}{6} \Delta^6 y_0 + \dots, \\ h^2 y''(x_0) = \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \frac{137}{180} \Delta^6 y_0 - \dots, \\ h^3 y'''(x_0) = \Delta^3 y_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 y_0 + \frac{7}{4} \Delta^5 y_0 - \frac{15}{8} \Delta^6 y_0 + \dots. \quad (7.8)$$

Необходимо заметить, что даже если функция задана хорошо составленной таблицей на довольно подробной сетке, то численным дифференцированием можно хорошо определить первую и вторую производные, а третью и четвертую – лишь удовлетворительно. Более высокие производные редко удается вычислить с приемлемой точностью.

Основным достоинством методов численного дифференцирования, основанных на приближении многочленами, является их простота. Однако они обладают недостатками, главный из которых состоит в том, что не обеспечивается сходимость формул численного дифференцирования. В этом смысле предпочтительнее выглядят методы

численного дифференцирования, основанные на сплайнах. На практике в большинстве случаев достаточно использовать кубические сплайны.

Метод приближенного вычисления производных функции $f(x)$ состоит в замене их производными интерполяционного сплайна, построенного по значениям функции $y = f(x)$ в точках x_i , где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Пусть кубический сплайн $S(n)$ на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, представляется ранее полученной формулой

$$S(x) = \left(1 - \frac{x - x_i}{h_i}\right)y_i + \frac{x - x_i}{h_i}y_{i+1} + \frac{h_i^2}{6} \frac{x - x_i}{h_i} \left(1 - \frac{x - x_i}{h_i}\right) \times \\ \times \left(2 - \frac{x - x_i}{h_i}\right)M_i + \left(1 + \frac{x - x_i}{h_i}\right)M_{i+1},$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $M_i = S''(x_i)$, $y_i = f(x_i)$. Тогда формулы численного дифференцирования распишутся в виде

$$f'(x) \approx S'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} \left(\left(2 - \frac{6(x - x_i)}{h_i} + 3\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2\right)M_i + \right. \\ \left. + \left(1 - 3\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2\right)M_{i+1} \right), \\ f''(x) \approx S''(x) = M_i \left(1 - \frac{x - x_i}{h_i}\right) + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \\ f'''(x) \approx S'''(x) \approx \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}.$$

Порядок вычисления M_i указан в предыдущей теме.

Пример 1. Найти значения первой и второй производной функции Бесселя нулевого индекса в точке $x = 1$, заданной следующей таблицей:

x	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
y	0,782536	0,7739332	0,7651977	0,7563321	0,7473390

Решение. Составим таблицу конечных разностей данной функции:

0,782536				
0,7739332	-0,0086029			
0,7651977	-0,0087355	-0,0001326		
0,7563321	-0,0088656	-0,0001301	0,0000025	
0,7473390	-0,0089931	-0,0001275	0,0000026	0,0000001

В нашем случае $h = 0,02$. Обратимся к ранее полученным формулам, полагая $t = 2$. Будем иметь

$$f'(1,00) = \frac{1}{0,02} \left(-0,008029 - \frac{3}{2} 0,0001326 + \frac{1}{3} 0,0000025 - \frac{1}{2} 0,0000001 \right) = -0,441355;$$

$$f''(1,00) = \frac{1}{(0,02)^2} \left(-0,0001326 + 0,0000025 - \frac{1}{12} 0,0000001 \right) = -0,32525.$$

Для сравнения приведем точные значения производных: $f'(1) = -0,440056$, $f''(1) = -0,325147$.

Пример 2. Функция $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$ задана таблицей своих значений на сетке узлов с шагом $h = 0,25$. Используя интерполяционный многочлен Ньютона для начала таблицы, вычислить приближенное значение $f'(1)$ и сравнить его с точным решением.

Решение. Пусть $f(x)$ задана следующей таблицей своих значений:

x	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$	1	0,8	0,6667	0,5714	0,5

Построим таблицу разностей:

1				
0,8	-0,2			
0,6667	-0,1333	0,0667		
0,5714	-0,0953	0,038	-0,03133	
0,5	-0,0714	0,0239	0,0141	0,07723

Для приближенного нахождения $f'(1)$ воспользуемся формулами (7.8). Будем иметь

$$f'(1) = \frac{1}{0,25} \left(-0,2 - \frac{1}{2} 0,0667 - \frac{1}{3} 0,03133 - \frac{1}{4} 0,07723 \right) = -1,0524;$$

$$f''(1) = \frac{1}{0,0625} \left(0,0667 + 0,03133 + \frac{11}{12} 0,07723 \right) = 2,7012.$$

Для сравнения приведем точные значения указанных производных:

$$f'(1) = -1; f''(1) = 2.$$

Задачи и упражнения

1. Определить первую и вторую производные функции $f(x)$ в указанной точке x , если функция задана следующей таблицей своих значений:

а)

x	1,12	1,25	1,42	1,71	2,0
$f(x)$	0,8341	0,9751	1,2141	1,8341	2,2105

 , $x = 1,3$;

б)

x	1,24	1,32	1,45	1,55	1,71
$f(x)$	2,1415	2,5431	1,8271	3,0141	3,5412

 , $x = 1,4$;

в)

x	2,31	2,53	2,64	2,71	2,81
$f(x)$	1,8431	1,9915	2,2131	2,5213	2,9751

 , $x = 2,7$;

г)

x	1,42	1,52	1,63	1,51	1,43
$f(x)$	3,8415	2,9351	2,2451	1,9471	1,5412

 , $x = 1,6$;

д)

x	0,83	0,94	1,05	1,18	1,25
$f(x)$	1,4512	1,2314	0,8751	0,68141	0,4751

 , $x = 1,1$;

е)

x	0,64	0,73	0,81	0,89	0,9
$f(x)$	3,8141	2,9135	2,0931	1,8415	1,5415

 , $x = 0,75$;

ж)

x	1,24	1,41	1,65	1,76	1,82
$f(x)$	5,6781	4,8871	3,7514	3,3412	2,0915

 , $x = 1,7$;

з)

x	3,42	4,31	5,63	6,22	7,11
$f(x)$	8,3414	7,8351	7,0631	6,3411	5,4215

 , $x = 5$;

и)

x	0,24	0,35	0,48	0,54	0,66
$f(x)$	2,3413	3,0645	3,8414	4,2121	4,8412

 , $x = 0,4$;

к)

x	3,85	4,15	4,76	5,22	5,85
$f(x)$	1,4512	3,8413	4,3125	5,1213	5,9975

 , $x = 4$;

$$\text{л)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2,83 & 3,12 & 3,56 & 3,81 & 4,11 \\ \hline f(x) & 2,4851 & 3,7312 & 4,2415 & 4,8416 & 5,3413 \end{array}, \quad x = 3,5;$$

$$\text{м)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 3,41 & 4,12 & 4,83 & 5,14 & 5,87 \\ \hline f(x) & 2,1351 & 1,341 & 0,8451 & 0,2314 & -0,4512 \end{array}, \quad x = 5,0;$$

$$\text{н)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2,45 & 2,58 & 2,81 & 2,93 & 3,14 \\ \hline f(x) & 3,4581 & 3,2412 & 3,0121 & 2,8753 & 2,7812 \end{array}, \quad x = 2,6;$$

$$\text{о)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 0,85 & 0,97 & 1,14 & 1,28 & 1,42 \\ \hline f(x) & 2,8412 & 3,4123 & 4,1561 & 4,8412 & 5,1213 \end{array}, \quad x = 1,0;$$

$$\text{п)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2,87 & 2,98 & 3,11 & 3,25 & 3,47 \\ \hline f(x) & 0,8451 & 1,3412 & 1,9351 & 2,3541 & 2,8745 \end{array}, \quad x = 3,0.$$

2. Для данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0,2$ построить таблицу ее значений и определить приближенное значение $f'(x)$ и $f''(x)$. Оценить погрешность вычисления указанных производных и сравнить эти значения с точными для следующих случаев:

а) $f(x) = e^x + x^2, \quad x \in [-1; 0];$

б) $f(x) = e^{-x} + x^2, \quad x \in [0; 1];$

в) $f(x) = x \sin x + x^2, \quad x \in [0; 1];$

г) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in [0; 1];$

д) $f(x) = xe^x + x, \quad x \in [-1; 0];$

е) $f(x) = 2^x + x^2, \quad x \in [-2; -1];$

ж) $f(x) = \sin 2x + 3x, \quad x \in [0; 1];$

з) $f(x) = \cos 2x + \frac{1}{2}x, \quad x \in [0; 1];$

и) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1; 2];$

к) $f(x) = xe^x + x^2, \quad x \in [0; 1];$

л) $f(x) = -xe^x + x^2, \quad x \in [0; 1];$

м) $f(x) = \operatorname{tg} x + x, \quad x \in [-0,5; 0,5];$

$$\text{н) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + x^2, \quad x \in [-0,5; 0,5];$$

$$\text{о) } f(x) = \frac{1}{x} + x^2, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{п) } f(x) = -\frac{1}{x} + x + x^2, \quad x \in [1; 2].$$

3. Функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приближается сплайном третьего порядка по ее значениям на сетке узлов с шагом $h = 0,25$. С помощью этого сплайна вычислить приближенные значения $f'(x)$ и $f''(x)$ в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков и сравнить их с точными значениями, если функция $y = f(x)$ имеет следующий вид:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x} + x^2, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in [-0,5; 0,5];$$

$$\text{в) } f(x) = 2^x + 2^{-x}, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{г) } f(x) = x \sin x + x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{д) } f(x) = \cos 2x - x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{1}{x} + \sin x, \quad x \in [0,5; 1,5];$$

$$\text{ж) } f(x) = \frac{1}{x} + \cos x, \quad x \in [0,5; 1,5];$$

$$\text{з) } f(x) = \ln x + \frac{1}{x-1}, \quad x \in [1,25; 2,25];$$

$$\text{и) } f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2 - 1}, \quad x \in [1,25; 2,25];$$

$$\text{к) } f(x) = \sin 2x + x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{л) } f(x) = \cos 2x + \frac{1}{2} x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{м) } f(x) = \cos 2x + \frac{1}{x}, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{н) } f(x) = e^x + \frac{1}{x}, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{о) } f(x) = e^{-x} + \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{п) } f(x) = e^{-x} - \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0; 1].$$

Тема 8. Среднеквадратичные приближения

8.1. Понятие о среднеквадратичном приближении

Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию $y = f(x)$. Однако точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. Нам же всегда желательно иметь единую приближенную формулу $y \approx \varphi(x)$, пригодную для большого отрезка $[a; b]$. При интерполяции мы приравниваем значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах. Нередко целесообразно приближать функцию не по точкам, а в среднем, т. е. в норме L_p .

Пусть задана функция $f(x)$ и множество функций $\varphi(x)$, принадлежащих линейному нормированному пространству. Нас будут интересовать две задачи. Первая – аппроксимация с заданной точностью: по заданному $\varepsilon > 0$ найти такую функцию $\varphi(x)$, чтобы выполнялось неравенство $\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$. Вторая задача – нахождение наилучшего приближения, т. е. функции $\bar{\varphi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|f(x) - \bar{\varphi}(x)\| = \inf \|f(x) - \varphi(x)\| = v. \quad (8.1)$$

Существует ли наилучшее приближение и единственно ли оно? Это имеет место не при любом выборе пространства и множества функций.

Выведем достаточные условия существования наилучшего приближения. Пусть в линейном пространстве функций выбрано множество, образованное функциями вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x), \quad (8.2)$$

где $\varphi_k(x)$ будем считать линейно-независимыми, $a_k = \text{const}$. Это множество есть линейное подпространство нашего пространства. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\rho)$ действительных функций, интегрируемых с квадратом по весу $\rho(x) > 0$ на $[a; b]$. Норма в нем определяется соотношением $\|f\|_{L_2} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$, где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Выберем в качестве аппроксимирующей функции линейную комбинацию (8.2). Подставив ее в условие наилучшего приближения (8.1), получим

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_{L_2}^2 &= (f, f) - 2(f, \varphi) + (\varphi, \varphi) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = \min. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю производные по коэффициентам, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^n a_m (\varphi_k, \varphi_m) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (8.3)$$

Ее определитель есть определитель Грама функции $\varphi_k(x)$:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Поскольку функции $\varphi_k(x)$ линейно-независимы, он отличен от нуля. Следовательно, наилучшее среднеквадратичное приближение существует и единственно. Для его нахождения необходимо решить систему уравнений (8.3) и подставить полученные a_k в (8.2).

Линейно-независимую систему функций $\varphi_k(x)$ можно ортонормировать. Пусть $\varphi_k(x)$ уже образуют ортонормированную систему, т. е. $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$ Тогда система (8.3) заметно упрощается и становится удобней для вычислений

$$a_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_k(x) dx,$$

так как $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$. Это коэффициенты Фурье, так что наилучшее приближение есть отрезок обобщенного ряда Фурье. Если $\varphi_k(x)$ образуют полную ортонормированную систему, то в силу равенства

Парсеваля $\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$. Значит, при $n \rightarrow \infty$ норма погрешности

неограниченно убывает, т. е. наилучшее приближение среднеквадратично сходится к $f(x)$ и возможна аппроксимация с любой точностью.

Пример 1. Среди всех многочленов второй степени найти многочлен наилучшего приближения функции $f(x) = x^4 + x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Решение. В нашем случае $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, т. е. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$. Коэффициенты a_k , $k = 0, 1, 2$ определим из системы (8.3), полагая $\rho(x) = 1$. Тогда:

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = 1;$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1;$$

$$(\varphi_0, \varphi_2) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{13}{12} = 1,0833;$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \frac{13}{12} = 1,0833;$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{81}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{4} = 1,25;$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5} \left(\frac{243}{32} - \frac{1}{32} \right) = \frac{121}{80} = 1,5125;$$

$$(\varphi_0, f) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x^4 + x) dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{121}{80} + \frac{13}{12} = 2,5025;$$

$$(\varphi_1, f) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x^5 + x^2) dx = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \left(\frac{27 \cdot 27}{64} - \frac{1}{64} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} - 4 \right) = 2,9792;$$

$$(\varphi_2, f) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x^6 + x^3) dx = \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = 3,6897;$$

и система (8.3) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + 1,0833a_2 &= 2,5125, \\ a_0 + 1,0833a_1 + 1,25a_2 &= 2,9728, \\ 1,0833a_0 + 1,25a_1 + 1,5125a_2 &= 3,6897. \end{aligned}$$

Из нее находим $a_0 = -2,6807$, $a_1 = -6,9789$, $a_2 = 6,2870$. Сравним в некоторых точках значения $f(x)$ и построенного элемента наилучшего приближения $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \quad \varphi(1) = 1,9788; \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= 6,5625, \quad \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 6,3581. \end{aligned}$$

Полученная в итоге погрешность, очевидно, связана с тем, что в качестве приближающего элемента взят многочлен только второй степени.

8.2. Метод наименьших квадратов.

Если функции заданы таблично, т. е. на конечном множестве точек x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, то их скалярное произведение определим формулой

$$(f, \varphi) = \sum_{i=0}^n \rho(x_i) f(x_i) \varphi(x_i), \quad \rho(x_i) > 0. \quad (8.4)$$

Тогда условие наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ принимает вид

$$\sum_{i=0}^n \rho(x_i) (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 = \min. \quad (8.5)$$

Выберем линейную аппроксимацию с числом узлов $n + 1$. Тогда коэффициенты аппроксимации находятся из системы (8.3), где скалярные произведения определяются формулой (8.4). Эти уравнения можно получить и непосредственно, подставляя обобщенный многочлен $\varphi(x)$ в (8.5) и приравнявая к нулю производные по коэффициентам. Описанный способ нахождения приближения называется методом наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов широко используется при обработке экспериментальных данных, которые измерены с некоторой погрешностью ε . В этом случае весу $\rho(x_i)$ придают смысл точности измерения данной точки: чем выше точность, тем большее значение веса приписывают точке. Сходные соображения используют в математической постановке задачи: весовую функцию $\rho(x)$ выбирают больше при тех значениях аргумента, где нужно получить более высокую точность аппроксимации. На практике обычно полагают $\rho(x_i) = \varepsilon_i^{-2}$, где ε_i – точность вычисления функции $f(x)$ в точке $x = x_i$.

Рассмотрим полиномиальную аппроксимацию, когда $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Система (8.3) в этом случае принимает вид

$$\sum_{k=0}^n (x^m, x^k) a_k = (f, x^m), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (8.6)$$

$$(x^m, x^k) = \sum_{i=0}^n \rho(x_i) x_i^{m+k}, \quad (f, x^m) = \sum_{i=0}^n \rho(x_i) f(x_i) x_i^m.$$

Поскольку степени x на любом отрезке образуют чебышевскую систему, то определитель Грама отличен от нуля, и задача (8.6) имеет единственное решение. Но система степеней x не ортогональна и при больших значениях n задача (8.6) плохо обусловлена. Можно обойти эту трудность, строя и используя многочлены, ортогональные с заданным весом на заданной системе точек. Но к этому прибегают только в задачах, связанных с особенно тщательной статистической обработкой эксперимента. Обычно же берут $n = 2, \dots, 5$, когда обусловленность задачи (8.6) удовлетворительна.

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ задана следующей таблицей своих значений:

x	0,5	1,0	1,5
$f(x)$	2,0625	2	5,729

Построить полиномиальную аппроксимацию этой функции многочленом третьей степени, используя метод наименьших квадратов и полагая $\rho(x) \equiv 1$.

Решение. Выпишем коэффициенты системы (8.6), полагая $x_0 = 0,5$, $x_1 = 1,0$, $x_2 = 1,5$ и $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\varphi_3(x) = x^3$. Значения $\varphi_i(x_j)$, $i = \overline{0,3}$, $j = \overline{0,2}$, занесем в следующую таблицу:

$x_i \backslash \varphi_i(x)$	0,5	1,0	1,5
$\varphi_0(x)$	1	1	1
$\varphi_1(x)$	0,5	1	1,5
$\varphi_2(x)$	0,25	1	2,25
$\varphi_3(x)$	0,125	1	3,375

Тогда $(\varphi_0, \varphi_0) = 3$, $(\varphi_0, \varphi_1) = 3$, $(\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_1) = 3,5$, $(\varphi_0, \varphi_3) = 4,5$,
 $(\varphi_1, \varphi_3) = 6,125$, $(\varphi_2, \varphi_2) = 6,125$, $(\varphi_2, \varphi_3) = 8,625$, $(\varphi_3, \varphi_3) = 12,4062$,
 $(\varphi_0, f) = 9,7915$, $(\varphi_1, f) = 11,62475$, $(\varphi_2, f) = 15,4059$, $(\varphi_3, f) = 21,59319$,

и система для c_i принимает вид

$$\begin{aligned} 3c_0 + 3c_1 + 3,5c_2 + 4,5c_3 &= 9,7915, \\ 3c_0 + 3,5c_1 + 4,5c_2 + 6,125c_3 &= 11,62475, \\ 3,5c_0 + 4,5c_1 + 6,125c_2 + 8,625c_3 &= 15,4059, \\ 4,5c_0 + 6,125c_1 + 8,625c_2 + 12,4062c_3 &= 21,59319. \end{aligned}$$

Из этой системы получаем, что $c_0 = 4,83$, $c_1 = -7,513$, $c_2 = 3,234$, $c_3 = 1,45$,
и аппроксимирующий функцию многочлен будет следующим:

$$P_3(x) = 4,83 - 7,513x + 3,234x^2 + 1,45x^3.$$

Для сравнения приведем его значения в узлах таблицы: $P_3(0,5) = 2,06325$,
 $P_3(1) = 2$, $P_3(1,5) = 5,73075$. Отсюда видно, что

$$\varepsilon = \max_{x_i} |P_3(x_i) - f(x_i)| = 0,001.$$

Задачи и упражнения

1. Данную функцию $y = f(x)$ на указанном отрезке $[a, b]$ приблизить многочленом второй степени. Сравнить значения функции и построенного многочлена в точках $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$, $x = b$ при следующих входных данных:

а) $y = \sin \frac{1}{2}x + x^3$, $x \in [0; 1]$;

б) $y = \cos \frac{1}{2}x - x^3$, $x \in [0; 1]$;

в) $y = e^x + x$, $x \in [0; 1]$;

$$\text{г)} \quad y = e^{-x} + x, \quad x \in [-1; 0];$$

$$\text{д)} \quad y = e^{2x} - x, \quad x \in [-1; 0];$$

$$\text{е)} \quad y = e^{-2x} + x, \quad x \in [-0,5; 0,5];$$

$$\text{ж)} \quad y = \ln x + x, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{з)} \quad y = \ln \frac{1}{x} + x, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{и)} \quad y = \ln 2x + x^2, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{к)} \quad y = \ln(x+1) + x^2, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{л)} \quad y = \frac{x+1}{2x+5}, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{м)} \quad y = \frac{2x-1}{3x+5}, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{н)} \quad y = x^5 + x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{о)} \quad y = x^6 - x^2, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{п)} \quad y = x^4 - x^3, \quad x \in [0; 1].$$

2. Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эту функцию многочленом третьей степени и сравнить его значения в узлах таблицы со значениями функции $f(x)$ при следующих данных:

$$\text{а)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0,5 & 0,8 & 1,1 \\ \hline f(x) & 2,3 & 3,1 & 3,8 \end{array};$$

$$\text{б)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1,3 & 1,8 & 2,2 \\ \hline f(x) & 1,6 & 1,8 & 2,1 \end{array};$$

$$\text{в)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ \hline f(x) & -1,2 & -3,1 & -4,5 \end{array};$$

$$\text{г)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0,1 & 0,4 & 0,7 \\ \hline f(x) & -3,2 & -1,2 & 1,0 \end{array};$$

$$\text{д)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0,2 & 0,7 & 1,3 \\ \hline f(x) & -1,1 & -0,2 & 0,7 \end{array};$$

$$\text{е)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 2,5 & 2,9 & 3,2 \\ \hline f(x) & -1,1 & -2,5 & -3,4 \end{array} ;$$

$$\text{ж)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 2,1 & 2,5 & 2,9 \\ \hline f(x) & -3,1 & -4,2 & -5,1 \end{array} ;$$

$$\text{з)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -0,6 & -0,2 & 0,3 \\ \hline f(x) & 5,8 & 6,1 & 6,9 \end{array} ;$$

$$\text{и)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 3,2 & 3,7 & 4,2 \\ \hline f(x) & 1,2 & 3,0 & 4,5 \end{array} ;$$

$$\text{к)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -2,1 & -1,7 & -1,1 \\ \hline f(x) & 0,8 & 0,2 & -0,5 \end{array} ;$$

$$\text{л)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1,1 & 1,7 & 2,1 \\ \hline f(x) & -5,6 & -4,1 & -3,6 \end{array} ;$$

$$\text{м)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -0,2 & 0,2 & 0,7 \\ \hline f(x) & -3,5 & -2,9 & -1,4 \end{array} ;$$

$$\text{н)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -0,1 & 0,3 & 0,8 \\ \hline f(x) & 1,3 & 1,9 & 2,8 \end{array} ;$$

$$\text{о)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1,7 & 2,4 & 2,9 \\ \hline f(x) & 4,8 & 5,3 & 6,3 \end{array} ;$$

$$\text{п)} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1,5 & 1,9 & 2,6 \\ \hline f(x) & -4,1 & -2,3 & -0,9 \end{array} .$$

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Функция $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ интерполируется на равномерной сетке узлов $x_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом третьей степени. Определить шаг сетки, если точность интерполирования равна 10^{-5} .

2. Определить узлы и погрешность интерполирования функции $f(x) = \ln(x + 1)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ многочленом Ньютона четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	3	5	4

построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 2$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 2$.

5. По таблице узлов

x	1	3
$f(x)$	3	2
$f'(x)$	1	4

построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f(2)$ и $f'(2)$.

Вариант 2

1. Функция $f(x) = \ln(x + 1)$ интерполируется на равномерной сетке узлов $x_i \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ многочленом третьей степени. Определить шаг сетки, если точность интерполирования равна 10^{-5} .

2. Определить узлы и погрешность интерполирования функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом Ньютона четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	0	1	2	4
$f(x)$	2	3	5	10

построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 3$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 2$.

5. По таблице узлов

x	1	3
$f(x)$	2	4
$f'(x)$	4	1

построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f(2)$.

Вариант 3

1. Функция $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$ интерполируется на равномерной сетке

узлов $x_i \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом третьей степени. Определить шаг сетки, если точность интерполирования равна 10^{-5} .

2. Определить узлы и погрешность интерполирования функции $f(x) = e^{x+\frac{1}{2}}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ многочленом Ньютона четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	0	2	3	4
$f(x)$	1	5	7	11

построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1$.

5. По таблице узлов

x	4	6
$f(x)$	1	4
$f'(x)$	3	1

построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f(5)$.

Вариант 4

1. Функция $f(x) = e^{x+\frac{1}{2}}$ интерполируется на равномерной сетке узлов $x_i \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ многочленом третьей степени. Определить шаг сетки, если точность интерполирования равна 10^{-5} .

2. Определить узлы и погрешность интерполирования функции $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом Ньютона четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной следующей таблицей своих значений:

x	1	2	5	6
$f(x)$	0	1	9	11

построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 4$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 4$.

5. По таблице узлов

x	2	4
$f(x)$	1	8
$f'(x)$	2	1

построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f(3)$.

Вариант 5

6. Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = \ln(x + 2)$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [-1; 1]$ с шагом $h = 0,1$.

7. Проинтерполировать функцию $f(x) = \ln(x + 1)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ многочленом Ньютона третьей степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом. Оценить погрешность интерполирования.

8. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	1	2	5
$f(x)$	0	1	9

построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 4$.

9. Построить многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $y = x + x^4$ на отрезке $[0; 2]$.

10. По таблице узлов

x	3	5
$f(x)$	1	4
$f'(x)$	2	1

построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f(4)$.

Вариант 6

1. Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [0; 2]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Проинтерполировать функцию $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом Ньютона третьей степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	3	4	6
$f(x)$	1	8	13

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 5$.

4. Построить многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $y = x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 2]$.

5. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	6	7

Найти приближенное значение $f'(2)$ и определить его погрешность при условии, что $|f^{(4)}(x)| \leq M$.

Вариант 7

1. Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = \ln x + x^2 + 2x$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [1; 3]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Проинтерполировать функцию $f(x) = e^{x+\frac{1}{2}}$ на отрезке $[-\frac{1}{2}; 2]$ многочленом Ньютона третьей степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом. Оценить погрешность интерполяции.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	0	2	3
$f(x)$	1	5	7

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1$.

4. Построить многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $y = x + x^3$ на отрезке $[-1; 1]$.

5. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	5	8

Найти приближенное значение $f'(2)$ и определить его погрешность, при условии, что $|f^{(4)}(x)| \leq M$.

Вариант 8

1. Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = x^3 + \ln x$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [1; 3]$ с шагом $h = 0,1$.

2. Проинтерполировать функцию $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ многочленом Ньютона третьей степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом. Оценить погрешность интерполяции.
3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	4	6	7
$f(x)$	1	5	7

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 5$.

4. Построить многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $y = 3x^3 + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

5. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений:

x	1	2	3	4
$f(x)$	8	7	5	2

Найти приближенное значение $f'(2)$ и определить его погрешность, если $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$.

Вариант 9

1. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 102,5$, если известны значения $\ln 99$, $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$?
2. Используя интерполяционный многочлен Ньютона, просуммировать конечный ряд $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$.
3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	3	5	7
$f(x)$	1	2	3

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 6$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 6$.
5. По таблице узлов $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$, $f(3) = 1$ построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f'(3)$.

Вариант 10

1. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 11,5$, если известны значения $\ln 9$, $\ln 10$, $\ln 11$, $\ln 12$, $\ln 13$?
2. Используя интерполяционный многочлен Ньютона, просуммировать конечный ряд $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$.
3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	7	9	14
$f(x)$	14	17	25

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 10$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 10$.
5. По значениям функции $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f'(2) = 1$, $f(3) = 8$ построить интерполяционный многочлен Эрмита. Найти приближенное значение $f'(3)$.

Вариант 11

1. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 22,5$, если известны значения $\ln 20$, $\ln 21$, $\ln 22$, $\ln 23$, $\ln 24$?
2. Используя интерполяционный многочлен Ньютона, просуммировать конечный ряд $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (2n)^2$.
3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	1	4	5
$f(x)$	3	7	10

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение функции в точке $f(3)$ и $f'(3)$.

4. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать функцию из п. 3 многочленом второй степени. Вычислить приближенное значение $f(3)$ и $f'(3)$.
5. Используя обратное интерполирование, решить уравнение $(1+x^2)e^{\frac{1}{2}x-1} - 3,7 = 0$.

Вариант 12

1. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 3,8$, если известны значения $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 6$?

2. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	1,1	1,8	2,1	2,4	2,9	3,1

Для нахождения приближенного значения $f(0,45)$ построить многочлен третьей степени и оценить погрешность, если $|f^{(4)}(x)| \leq 1$.

3. Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей значений:

x	3	5	7
$f(x)$	8	3	0

построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение $f(4)$ и $f'(4)$.

4. Построить многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $y = 2x^4 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 1]$. Вычислить его значение в точке $x = 0$.

5. Доказать следующее свойство многочлена Чебышева $T_n(x)$:

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Вариант 13

1. Построить тригонометрический интерполяционный многочлен второй степени $T_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$, удовлетворяющий условиям $T_2(0) = 0$,

$$T_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = T_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = T_2(\pi) = 1.$$

2. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что для многочлена Чебышева четной степени P_{2n} выполняется условие $P_{2n}(y) = (-1)^n P_{2n}(x)$.

3. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\sin \frac{\pi}{6}$, если известны значения $\sin \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{8}$?

4. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений

x	1	2	3
$f(x)$	4	9	11

Построить интерполяционный сплайн третьего порядка. Вычислить приближенное значение $f(2,5)$ и $f'(2,5)$.

5. Используя обратное интерполирование, решить уравнение $2^{x+1} + 3^{x-\frac{1}{2}} - x - 5 = 0$.

Вариант 14

1. Функция $f(x) = \sin 2x$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке $[0; 2]$ по n чебышевским узлам $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$, $i=1, 2, \dots, n$. Найти наиболее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon_n = \frac{1}{3} 10^{-p}$, если $n = 6$.

2. Используя обратное интерполирование, решить уравнение $e^{x+\frac{1}{2}} + x^3 - 5 = 0$.

3. Найти многочлен второй степени наилучшего приближения для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений

x	1	2	4	5
$f(x)$	3	7	9	11

Построить интерполяционный сплайн второго порядка. Вычислить приближенное значение $f(3)$.

5. Используя метод наименьших квадратов, построить многочлен второй степени наилучшего приближения для таблично заданной функции из п. . Вычислить приближенное значение $f(3)$.

Вариант 15

1. Функция $f(x) = \cos x$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке $[-1; 1]$ по n чебышевским узлам $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$, $i=1, 2, \dots, n$. Найти наиболее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$, если $n = 5$.

2. Используя обратное интерполирование, решить уравнение $\cos\left(2x + \frac{1}{2}\right) + x^3 - \frac{1}{2} = 0$.

3. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений

x	3	4	6	7
$f(x)$	8	5	4	1

Построить интерполяционный сплайн второго порядка и вычислить приближенное значение $f(5)$.

4. Используя метод наименьших квадратов, построить многочлен второй степени наилучшего приближения функции из п. 3 и определить приближенное значение $f(5)$.

5. По значениям $f(1) = 2$, $f(2) = f'(2) = 1$, $f''(2) = -1$ построить интерполяционный многочлен Эрмита. Определить приближенное значение $f(1,5)$.

Индивидуальное задание № 1

Вариант 1

Пусть функция $y = e^{2x-1} + x^3$, $x \in [-1; 1]$ задана таблицей значений на равномерной сетке узлов с шагом $h = 0,2$.

- Построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью уплотнить таблицу узлов в два раза;
- используя метод наименьших квадратов, на каждой двойке элементарных отрезков исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения второй степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- с помощью квадратичной интерполяции многочленом Ньютона уплотнить исходную таблицу в два раза и оценить погрешность;
- результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы и здесь же привести точные значения исходной функции в узлах уплотненной таблицы.

Вариант 2

Пусть функция $y = e^{x-1} + 3x^3$, $x \in [-1; 1]$ задана таблицей значений на равномерной сетке узлов с шагом $h = 0,2$.

- С помощью интерполяционного многочлена Ньютона третьей степени уплотнить исходную таблицу в два раза и оценить погрешность;

- б) построить интерполяционный сплайн второго порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- в) используя среднеквадратичные приближения, на каждом элементарном отрезке исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы и здесь же привести точные значения исходной функции в узлах уплотненной таблицы.

Вариант 3

Пусть функция $y = \sin\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$, $x \in [0; 1]$ задана таблицей значений на равномерной сетке узлов с шагом $h = 0,1$.

- а) С помощью интерполяционного многочлена Ньютона второй степени уплотнить исходную таблицу в два раза и оценить погрешность;
- б) построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- в) используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы и здесь же привести точные значения исходной функции в узлах уплотненной таблицы.

Вариант 4

Пусть функция $y = \ln(x + 2) + \sqrt{x}$, $x \in [0; 2]$ задана таблицей значений на равномерной сетке узлов с шагом $h = 0,2$.

- а) С помощью интерполяционного многочлена Ньютона третьей степени уплотнить исходную таблицу в два раза и оценить погрешность;
- б) построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- в) используя среднеквадратичные приближения, на каждом элементарном отрезке исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;

- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы и здесь же привести точные значения исходной функции в узлах уплотненной таблицы.

Вариант 5

Пусть функция $y = f(x)$, задана таблицей значений

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f(x)$	3,87	3,99	4,21	4,85	5,11	5,29	5,44	5,87	6,11	6,32	6,56

- а) С помощью интерполяционного многочлена Ньютона третьей степени уплотнить исходную таблицу в два раза; в узлах уплотненной таблицы определить приближенное значение $f'(x)$;
- б) построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза, а также найти приближенные значения $f'(x)$ в узлах уплотненной таблицы;
- в) используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза;
- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы.

Вариант 6

Пусть функция $y = f(x)$, задана таблицей значений

x	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
$f(x)$	1,35	1,94	2,25	2,49	2,62	2,95	3,14	3,29	3,45	3,91

- а) С помощью интерполяционного многочлена второй степени уплотнить исходную таблицу в два раза и в узлах уплотненной таблицы определить приближенное значение $f'(x)$;
- б) построить интерполяционный сплайн второго порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза, а также найти приближенные значения $f'(x)$ в узлах уплотненной таблицы;
- в) используя метод наименьших квадратов, на каждом «сдвоенном» отрезке $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $k = \overline{0, 4}$ исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения второго порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза, а также определить $f'(x)$ в узлах уплотненной таблицы;
- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы.

Вариант 7

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$f(x)$	2,51	2,14	1,56	1,44	1,31	1,20	1,95	1,71	1,60	1,41

- а) С помощью интерполяционного многочлена Ньютона – Стерлинга или Ньютона – Бесселя третьей степени уплотнить исходную таблицу в два раза и в узлах уплотненной таблицы определить приближенное значение $f'(x)$;
- б) построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза, а также найти приближенные значения $f'(x)$ в узлах уплотненной таблицы;
- в) используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке исходной таблицы построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью уплотнить исходную таблицу в два раза, а также определить $f'(x)$ в узлах уплотненной таблицы;
- г) результаты расчетов по п. а), б), в) вывести на печать в виде таблицы.

Вариант 8

Пусть функция $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ рассматривается на отрезке $[-2; 2]$.

- а) Для указанной функции построить интерполяционный многочлен шестой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом, а также оценить погрешность интерполирования;
- б) используя полученный интерполяционный многочлен, на указанном отрезке построить таблицу приближенных значений функции с шагом $h = 0,2$, а также привести приближенные значения производной функции в узлах таблицы. Результаты сравнить с точными значениями;
- в) по таблице узлов, полученной в п. б), построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью найти приближенные значения функции и ее первой производной в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков. Результаты сравнить с точными значениями;
- г) результаты выполнения п. б), в) привести в виде соответствующих таблиц значений.

Вариант 9

Пусть функция $y = e^x + e^{-x}$ рассматривается на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

- а) Для указанной функции построить интерполяционный многочлен восьмой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом, а также оценить погрешность интерполирования;
- б) используя полученный интерполяционный многочлен, на указанном отрезке построить таблицу приближенных значений функции с шагом $h = 0,2$, а также привести приближенные значения производной функции в узлах таблицы. Результаты сравнить с точными значениями;
- в) по таблице узлов, полученной в п. б), построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью найти приближенные значения функции и ее первой производной в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков. Результаты сравнить с точными значениями;
- г) результаты выполнения п. б), в) привести в виде соответствующих таблиц.

Вариант 10

Пусть функция $y = 2^x + 2^{-x}$ рассматривается на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

- а) Для указанной функции построить интерполяционный многочлен шестой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом, а также оценить погрешность интерполирования;
- б) используя полученный интерполяционный многочлен, на указанном отрезке построить таблицу приближенных значений функции с шагом $h = 0,2$, а также вычислить приближенные значения производной функции в узлах таблицы. Результаты сравнить с точными значениями;
- в) по таблице узлов, полученной в п. б), построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью найти приближенные значения функции и ее первой производной в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков. Результаты сравнить с точными значениями;
- г) результаты выполнения п. б), в) привести в виде соответствующих таблиц.

Вариант 11

Пусть функция $y = f(x)$, задана таблицей своих значений и значений первой производной:

x	0,0	0,4	0,8
$f(x)$	1,34	5,76	6,3
$f'(x)$	2,11	1,54	0,83

- а) Построить интерполяционный многочлен Эрмита и с его помощью получить таблицу приближенных значений функции $y = f(x)$, $x \in [0; 0,8]$ с шагом $h = 0,1$;
- б) по таблице значений, полученной в п. а), построить интерполяционный сплайн второго порядка и с его помощью получить таблицу значений функции на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$;
- в) по таблице значений, полученной в п. а), используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке построить многочлен наилучшего приближения второй степени и с его помощью получить таблицу значений функции на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$. Результаты сравнить с аналогичной таблицей из п. б).

Вариант 12

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений и значений первой производной:

x	1,0	1,4	1,7	2,0
$f(x)$	1,75	2,41	3,75	4,01
$f'(x)$	1,1		0,8	

- а) Построить интерполяционный многочлен Эрмита и с его помощью получить таблицу приближенных значений функции $y = f(x)$, $x \in [1; 2]$ с шагом $h = 0,1$;
- б) по таблице значений, полученной в п. а), построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью получить таблицу значений функции на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$;
- в) по таблице значений, полученной в п. а), используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке построить

многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью получить таблицу значений функции на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$. Результаты сравнить с аналогичной таблицей из п. б).

Вариант 13

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений и значений первой производной:

x	1,0	1,3	1,7	2,0
$f(x)$	2,56	3,33	4,81	5,12
$f'(x)$		1,21	1,32	

- Построить интерполяционный многочлен Эрмита и с его помощью получить таблицу приближенных значений функции $y = f(x)$, $x \in [1; 2]$ с шагом $h = 0,1$;
- по таблице значений, полученной в п. а), построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью получить таблицу значений функции на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$;
- по таблице значений, полученной в п. б), используя метод наименьших квадратов, на каждом элементарном отрезке построить многочлен наилучшего приближения первой степени и с его помощью получить таблицу значений функции и ее первой производной на указанном отрезке с шагом $h = 0,05$. Результаты сравнить с аналогичной таблицей из п. б).

Вариант 14

Пусть функция $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ рассматривается на отрезке $x \in [0; 2]$.

- Построить многочлен шестой степени, интерполирующий указанную функцию, расположив узлы интерполирования на отрезке $[0; 2]$ наилучшим образом. В таблице узлов с шагом $h = 0,2$ привести точные и приближенные значения функции и ее первой производной;
- используя среднеквадратичные приближения, получить многочлен наилучшего приближения шестой степени и с его помощью построить таблицу приближенных значений, аналогичную п. а);
- пусть исходная функция задана таблицей своих значений на указанном отрезке с шагом $h = 0,4$. По этим значениям построить

интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью получить таблицу приближенных значений, аналогичную п. а).

Вариант 15

Пусть функция $y = x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$, рассматривается на отрезке $x \in [0; 2]$.

- а) Построить многочлен четвертой степени, интерполирующий указанную функцию, расположив узлы интерполирования на отрезке $[0; 2]$ наилучшим образом. В таблице узлов с шагом $h = 0,2$ привести точные и приближенные значения функции и ее первой производной;
- б) используя среднеквадратичные приближения, построить многочлен наилучшего приближения четвертой степени и с его помощью построить таблицу приближенных значений, аналогичную п. а);
- в) пусть исходная функция задана таблицей своих значений на указанном отрезке с шагом $h = 0,4$. По этим значениям построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью получить таблицу приближенных значений, аналогичную п. а).

Дополнительные задачи и упражнения

- 1.** Пусть Q_n – множество многочленов $P_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Доказать, что для многочлена Чебышева $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ выполняется следующее свойство:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \min_{P_n(x) \in Q_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)|.$$

2. Построить интерполяционные сплайны первого и второго порядка и указать эффективные способы вычисления их коэффициентов.
3. Пусть даны узлы x_1, x_2, \dots, x_n и соответствующие им системы чисел:

$$\begin{aligned} & y_1, y'_1, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \\ & y_2, y'_2, \dots, y_2^{(\alpha_2-1)}, \\ & \dots \\ & y_n, y'_n, \dots, y_n^{(\alpha_n-1)}. \end{aligned}$$

Доказать, что существует только один многочлен $H_{m-1}(x)$ степени не выше $m-1$, где $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, удовлетворяющий условиям $H_{m-1}^{(r)}(x_i) = y_i^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$; $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Найти частный случай многочлена Эрмита, интерполирующего функцию $y = f(x)$, когда имеется один узел $x = a$ кратности m .

5. На отрезке $[-1; 1]$ провести интерполирование многочлена $Q(x)$ степени $(m+1)$ со старшим коэффициентом, равным 1, многочленом $P_m(x)$ степени m так, чтобы $\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x) - P_m(x)|$ был минимальным. Как следует выбрать узлы интерполирования?

6. Показать, что если $f(x)$ – многочлен n -ой степени, то $\Delta^{n+1}f(x) = 0$.

7. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений в узлах x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, где все x_i – различны. Доказать, что при всяком n верно равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

8. Пусть требуется составить четырехзначную таблицу функции

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-z^2} dz, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Какой величины должен быть шаг таблицы, чтобы при а) линейной, б) квадратичной интерполяции погрешность интерполяции была меньше, чем $5 \cdot 10^{-4}$?

9. Получить оценку погрешности кубического сплайна, если $f(x) \in C^3[a, b]$.

10. Пусть $x_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Вычислить $\|\omega_n(x)\|$ при $n = 2, 3, 4$.

11. Функция $f(x)$ приближается на $[a, b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев:

а) $x \in [0; 0,1]$, $f(x) = \sin 2x$, $n = 2$;

б) $x \in [-1; 0]$, $f(x) = e^x$, $n = 3$.

12. Число $\ln 15,2$ вычислено следующим образом. Найдены точные значения $\ln 15$ и $\ln 16$ и проведена линейная интерполяция между этими числами. Показать, что если x и y , соответственно точное и приближенное значения $\ln 15,2$, то справедлива оценка $0 < x - y < 4 \cdot 10^{-4}$.

13. Функция $f(x) = \frac{4}{a^2 - x}$ приближается на отрезке $[-4; -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4; -3; -2; -1$. При каких значениях a оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5} ?

14. Доказать, что если узлы интерполирования расположены симметрично некоторой точки c , а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равны, то интерполяционный многочлен Лагранжа – функция, четная относительно точки c .

15. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = |x|$ по узлам $-1; 0; 1$.

16. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени, удовлетворяющий условиям $P_3(x_k) = y_k$, $x_k = k - 5$, $y_k = 3k^2 + 2k^2 + k + 1$; $k = 1, 2, 3, 4$.

17. Функция $f(x)$ приближается на $[a, b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев:

а) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$, $x \in [0; 1]$, $n = 3$;

б) $f(x) = \ln x$, $x \in [1; 2]$, $n = 4$.

18. Оценить погрешность интерполяции функции $f(x) = \arctg x$ на отрезке $[0; 1]$ многочленом Лагранжа пятой степени на равномерной сетке.

19. Оценить число узлов интерполяции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающих точность $\varepsilon \leq 10^{-2}$ приближения функции $f(x) = \sin x$.

20. Определить степень многочлена Лагранжа на равномерной сетке, обеспечивающую точность приближения функции e^x на отрезке $[0; 1]$ не хуже 10^{-3} .

21. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на $[0, b]$. При каком b многочлен Лагранжа третьей степени, построенный на равномерной сетке узлов, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \leq 10^{-3}$?

22. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$ и $\max_{x \in [a, b]} |f'''(x)| \leq 1$. Оценить погрешность приближения этой функции ломаной, построенной на равномерной сетке узлов с шагом h .

23. Доказать, что для любых x_0, x_1, \dots, x_{2n} , удовлетворяющих условиям $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < a + 2\pi$, и для любых y_0, y_1, \dots, y_{2n} существует единственный тригонометрический полином

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

удовлетворяющий условиям $T(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$, при этом, если y_0, y_1, \dots, y_{2n} вещественны, то и a_k, b_k – вещественны.

24. Построить тригонометрический полином на отрезке $[0; 1]$ по заданным значениям $f(0), f(h), f(2h), f(3h)$, $h = \frac{1}{4}$.

25. Доказать следующие свойства многочленов Чебышева:

$$\text{а) } J_{mn} = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0; \\ \pi, & n = m = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \int_{-1}^x T_n(y) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T_{n-1}(x) \right) - \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}, \quad n \geq 2.$$

26. Среди всех многочленов $P_n(x) = x^n + \dots$ степени $n \geq 2$, удовлетворяющих условиям $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, найти наименьшее уклоняющееся от нуля на $[-1; 1]$.

27. Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n и $\max_{x \in [-1; 1]} |P_n(x)| = M$. Доказать, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x| \geq 1$, выполняется неравенство $|P_n(x)| \leq M |T_n(x)|$, где $|T_n(x)|$ – многочлен Чебышева степени n .

28.Получить представления для производных многочлена Чебышева следующего вида:

а) $\frac{T'_{2n}}{2n} = 2(T_{2n-1} + T_{2n-3} + \dots + T_1);$

б) $\frac{T'_{2n+1}}{2n+1} = 2(T_{2n} + T_{2n-2} + \dots + T_2) + 1.$

29.Доказать следующие представления многочленов Чебышева:

а) $T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right), n \geq 0;$

б) $T_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} \right) \Big|_{t=0}, n \geq 0;$

в) $T_n(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} \right) \Big|_{t=0}, n \geq 1.$

30.Построить многочлен наилучшего приближения степени $n = 50$ для $f(x) = \sin 100x$ на отрезке $[0; \pi]$.

31.Построить многочлен наилучшего приближения степени $n = 1$ для $f(x) = x^3$ на отрезке $[1; 2]$.

32.Найти многочлен наилучшего приближения степени $n = 1$ для $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 1]$.

33.Найти наилучшее приближение в $L_2[a; b]$ функции $f(x)$ алгебраическим многочленом $P_n(x)$ степени n :

а) $a = -1, b = 1, f(x) = |x|, n = 1;$

б) $a = -1, b = 1, f(x) = x^2, n = 1;$

в) $a = -1, b = 1, f(x) = x^3, n = 1;$

г) $a = -1, b = 1, f(x) = x^3, n = 2;$

д) $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin x, n = 2;$

е) $a = 0, b = 2, f(x) = x^3, n = 3.$

34.Построить кубический сплайн по значениям $f(0), f(1), f(2).$

35.Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную формулами:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < -3, \\ 28 + 25x + 9x^2 + x^3, & -3 \leq x < -1, \\ 26 + 19x + 3x^2 - x^3, & -1 \leq x < 0, \\ 26 + 19x + 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x < 3, \\ -163 + 208x - 60x^2 + 5x^3, & 3 \leq x < 4, \\ 157 - 32x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Показать, что $S(x)$ – кубический сплайн с узлами $-3; -1; 0; 3; 4$.

36. На отрезке $[-1; 1]$ проинтерполировать функцию Рунге

$f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ многочленами:

- а) 5-й степени на равномерной сетке узлов;
- б) 10-й степени на равномерной сетке узлов;
- в) 20-й степени на равномерной сетке узлов;
- г) 5-й степени на сетке узлов, соответствующей корням многочлена Чебышева;
- д) все результаты выполнения вывести в виде графиков. Здесь же привести график исходной функции. Дать математическую интерпретацию полученных результатов.

Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Тема 9. Интерполяционные квадратурные формулы.

1.6. Квадратурные правила Ньютона – Котеса.

В этой главе нас будет интересовать решение задачи вычисления определенного интеграла

$$I = \int_a^b F(x) dx. \quad (9.1)$$

Обычным аппаратом для построения квадратур является интерполирование. Вместо того, чтобы вычислять $\int_a^b F(x) dx$

непосредственно, сперва вычисляют значения функции $F(x)$ в заданных точках $x_i \in [a, b]$. Пусть $P(x)$ – интерполяционный полином, проходящий через точки $(x_i, F(x_i))$. Тогда если $P(x) \approx F(x)$, то полагаем

$\int_a^b P(x) dx \approx \int_a^b F(x) dx$. Поскольку интегрирование полинома не составляет труда, а аппарат интерполирования вполне доступен, то такой подход представляется численно реализуемым и эффективным.

Когда отрезок интегрирования конечный и интегрируемая функция $F(x)$ имеет высокую гладкость, то можно рассчитывать хорошо приблизить ее многочленом невысокой степени или несложной рациональной функцией. Если же сама функция $F(x)$ или ее производная невысокого порядка имеют особенности или даже обращаются в бесконечность, то это затрудняет приближение $F(x)$ или делает его невозможным. В этом случае следует заранее освободиться от таких особенностей путем их выделения при помощи представления $F(x) = p(x)f(x)$, где $p(x)$ имеет такие же особенности, как и $F(x)$, а $f(x)$ есть достаточно гладкая функция. Функция $p(x)$ называется весовой.

Будем строить формулы для приближенного вычисления интеграла, имеющие вид

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad x_k \in [a, b]. \quad (9.2)$$

Формула (9.1) называется квадратурной формулой, A_k – квадратурными коэффициентами, x_k – квадратурными узлами или узлами квадратурной формулы. Формула (9.2) имеет $2n + 1$ параметров: n , A_k , x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), и их следует выбрать так, чтобы формула давала возможно лучший результат при интегрировании избранного класса функций $F(x)$. В дальнейшем будем полагать n фиксированным.

Рассмотрим систему линейно независимых функций $\omega_m(x)$, $m = 0, 1, \dots$ таких, чтобы произведение $p(x)\omega_n(x)$ было абсолютно интегрируемым на $[a, b]$. Будем приближать $f(x)$ при помощи линейных комбинаций

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(x).$$

За меру близости $f(x)$ и $S_n(x)$ будем брать

$$\rho(f, S_n) = \int_a^b |p(x)(f(x) - S_n(x))| dx.$$

Система $\omega_m(x)$ функций называется полной на множестве функций $f(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists S_n$ такое, что $\rho(f, S_n) < \varepsilon$. Если система $\omega_m(x)$ – полна, то из неравенства

$$\left| \int_a^b p(x)f(x) dx - \int_a^b p(x)S_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |p(x)(f(x) - S_n(x))| dx = \rho(f, S_n) < \varepsilon$$

вытекает, что интеграл может быть вычислен сколь угодно точно при помощи замены $f(x)$ на линейную комбинацию $S_n(x)$, составленную при надлежащем выборе n и A_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Говорят, что формула (9.2) имеет степень точности m , если она является точной для $\omega_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$, т. е.

$$\int_a^b p(x)\omega_i(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_i(x_k), i = 0, 1, \dots, m,$$

но не является точной для $\omega_{m+1}(x)$, т. е.

$$\int_a^b p(x)\omega_{m+1}(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \omega_{m+1}(x_k).$$

Если взять $\omega_m(x) = x^m$, $m = 0, 1, \dots$, то речь будет идти об алгебраической степени точности формулы (9.2).

Будем рассматривать правила численного интегрирования, основанные на алгебраическом интерполировании подынтегральной функции на всем отрезке интегрирования. Предположим, что узлы x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ выбраны, и мы имеем право при построении квадратурной формулы распорядиться только выбором коэффициентов A_k . Выполним интерполирование по указанным узлам многочленом $P(x)$ степени $n - 1$ с остатком $r(x)$, т. е. $f(x) = P(x) + r(x)$, где

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x) dx = \int_a^b p(x)P(x) dx + \int_a^b p(x)r(x) dx.$$

Отбросив справа интеграл от остатка, получим приближенное правило интегрирования, называемое интерполяционным

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (9.3)$$

Его погрешность выражается через остаточный член интерполирования следующим образом:

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b p(x)r(x) dx. \quad (9.4)$$

Теорема. Для того чтобы квадратурная формула (9.2) имела алгебраическую степень точности, равную $n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

Ранее было получено представление для $r(x)$. Используя его, можно записать, что

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n)}(\xi)dx, \quad \xi \in [a, b],$$

и если $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \leq M_n$, то имеет место оценка

$$|R_n(f)| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |p(x)\omega(x)| dx. \quad (9.5)$$

В вычислениях часто узлы x_k берут равноотстоящими. Интерполяционные формулы с такими узлами принято называть формулами Ньютона–Котеса. Предположим, что отрезок интегрирования конечный. Разделим его на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и точки деления $a + kh$, $h = 0, 1, \dots, n$, примем за узлы интерполяционной формулы, которую запишем в виде

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(a+kh), \quad (9.6)$$

где

$$B_k^n = (b-a)^{-1} A_k = (b-a)^{-1} \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-a-kh)\omega'(a+kh)} dx,$$

$\omega(x) = (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-nh)$. Если ввести вместо x новую переменную t , положив $x = a + th$, $0 \leq t \leq n$, то выражение для B_k^n можно упростить:

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} p(a+th) dt. \quad (9.7)$$

1.7. Простейшие квадратурные формулы Ньютона – Котеса

Для повышения точности интегрирования отрезок $[a, b]$ часто делят на несколько частей, затем применяют избранную формулу к каждой отдельной части (или некоторой их совокупности) и результат складывают. Пусть $p(x) \equiv 1$.

1. Правило трапеций. В формуле (9.6) положим $n = 1$.

Тогда интерполирование выполняется по двум значениям $f(a)$ и $f(b)$, и формула (9.6) принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (9.8)$$

Это и есть известная формула трапеций. Погрешность ее, так как $\omega(x) = (x-a)(x-b)$, можно выписать так:

$$R(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(\xi) dx.$$

Если $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, так как множитель $(x-a)(x-b)$ сохраняет знак на $[a, b]$, существует $\xi \in [a, b]$, что

$$R(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b) dx.$$

Вычисляя интеграл в правой части, окончательно получим

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3. \quad (9.9)$$

Для уменьшения погрешности формулы трапеций (9.8) разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и рассмотрим частичный отрезок $[a = kh, a = (k+1)h]$. Формула (9.8) для него принимает вид

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) + R_k(f_k), \quad f_k = f(a = kh),$$

$$R_k(f_k) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k), \quad a + kh \leq \xi_k \leq a + (k+1)h.$$

Сумма интегралов по всем частичным отрезкам дает общую формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) + R, \quad (9.10)$$

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9.11)$$

2. Формула Симпсона (формула парабол). Пусть $n = 2$ и интерполирование $f(x)$ выполняется по трем ее значениям в точках $x = a$, $c = \frac{a+b}{2}$, b . Интерполяционный многочлен имеет, вообще говоря, вторую степень, и его графиком является парабола. Формула Ньютона – Котеса в этом случае имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + 4f(c) + f(b)) \quad (9.12)$$

и называется формулой парабол или формулой Симпсона. Она точна для всякого многочлена второй степени, и так как она, очевидно, является точной для $f(x) = (x-c)^3$, ввиду того, что в этом случае левая и правая части в (9.12) обращаются в нуль, то она точна для любого многочлена

третьей степени. Для нахождения погрешности (9.12) рассмотрим $P_3(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям $P_3(a) = f(a)$, $P_3(c) = f(c)$, $P'_3(c) = f'(c)$, $P_3(b) = f(b)$ т. е. $f(x) = P_3(x) + r(x)$, где $r(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-c)^2(x-b)$, $a \leq \xi \leq b$.

Для $P_3(x)$ правило (9.12) является точным, поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P(x) dx + \int_a^b r(x) dx = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)) + \int_a^b r(x) dx.$$

Последнее слагаемое есть погрешность квадратурной формулы и, учитывая вид $r(x)$ и приводя рассуждения, аналогичные предыдущим, его можно представить в следующем виде:

$$R(f) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9.13)$$

Получим теперь общую формулу Симпсона. Разделим $[a, b]$ на четное число n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и возьмем сдвоенный частичный отрезок $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$. Формула Симпсона (9.12), примененная к нему, будет следующей:

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) + R_k(f_k).$$

Если такие же равенства записать для отрезков $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, ..., $[a+(k-2)h, b]$ и сложить их, то получим общую формулу парабол

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = & \frac{b-a}{3n} (f_0 + f_n + 2(f_2 + f_n + \dots + f_{n-2}) + \\ & + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})) + R(f), \end{aligned}$$

где ее остаток имеет вид

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) = \frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9.15)$$

3. Формула «трех восьмых». При $n = 3$ для построения формулы Ньютона – Котеса интерполирование $f(x)$ выполняется по четырем узлам $a, a + \frac{H}{3}, a + \frac{2H}{3}, b$, где $H = b - a$. Тогда формула будет следующей:

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \left(\frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{H}{3}\right) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{2H}{3}\right) + \frac{1}{8} f(b) \right). \quad (9.16)$$

Она называется формулой «трех восьмых». Можно получить ее остаток в виде

$$R(f) = \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9.17)$$

Пусть теперь n – число, кратное трем. Разделим $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмем «строенный» отрезок $[a + kh, a + (k+3)h]$, где k – кратно 3, и к интегрированию по нему применим правило (9.16). Получим

$$\begin{aligned} \int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x) dx &= \frac{3h}{8} (f_k + 3f_{k+1} + 3f_{k+2} + f_{k+3}) + R_{k+1}(f_{k+1}), \\ R_{k+1}(f_{k+1}) &= \frac{(3h)^5}{6480} f^{(4)}(\xi_{k+1}), \quad a + kh \leq \xi_{k+1} \leq a + (k+1)h. \end{aligned}$$

Если такие равенства записать для всех «строенных» отрезков и сложить их почленно, то получим общую формулу «трех восьмых»

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{3h}{8} (f_0 + f_n + 2(f_3 + f_6 + \dots + f_{n-3}) + \\ &+ 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_n + \dots + f_{n-2} + f_{n-1})), \end{aligned} \quad (9.18)$$

погрешность которой можно записать следующим образом:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4}{80} (b-a) f^{(4)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (9.19)$$

4. Формула «средних». Если на $[a, b]$ взять единственный узел квадратурной формулы x_0 , то функция будет интерполироваться многочленом нулевой степени, т. е. постоянной $f(x_0)$. Поскольку симметрия формулы частичного интегрирования приводит к повышению ее точности, то выберем в качестве единственного узла середину отрезка интегрирования $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Тогда формула «средних» примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(c). \quad (9.20)$$

Здесь узел $c = \frac{a+b}{2}$ можно рассматривать как двукратный, и тогда

$$r(f) = \frac{(x-c)^2}{2} f''(\xi), \xi \in [a, b],$$

а для погрешности квадратурной формулы (9.20) получим

$$R(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi), a \leq \xi \leq b. \quad (9.21)$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями с помощью (9.20) и (9.21) легко получить общую формулу «средних»:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + R(f), \quad (9.22)$$

где ее остаток $R(f)$ примет вид

$$R(f) = \frac{h^2}{24} f''(\xi), a \leq \xi \leq b. \quad (9.23)$$

5. Формула Эйлера – Маклорена. Будем рассматривать квадратурную формулу трапеций (9.8) и предположим, что у нас известны производные подынтегральной функции на концах отрезка интегрирования. Остаток квадратурной формулы (9.19) запишем в виде

$$R(f) \approx -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(c) \approx \frac{1}{12}(b-a)^2 h^2 (f'(a) - f'(b)).$$

Прибавляя эту величину к правой части формулы трапеций, получим формулу Эйлера – Маклорена:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) + \frac{1}{12}(b-a)^2 (f'(a) - f'(b)) \right), \quad (9.24)$$

при этом остаток этой квадратурной формулы будет иметь вид

$$R \approx \frac{1}{720} (b-a)^5 f^{(4)}(c). \quad (9.25)$$

Используя формулу (9.24) на каждом элементарном отрезке разбиения $[a, b]$ на n равных частей шагом h и суммируя полученные выражения по всем элементарным отрезкам, придем к общей формуле Эйлера – Маклорена:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1})) + \frac{1}{12} h^2 (f'_0 - f'_n), \quad (9.26)$$

погрешность которой можно записать следующим образом:

$$R(f) \approx \frac{1}{720} h^4 \int_a^b f^{(4)}(x) dx. \quad (9.27)$$

Пример 1. При $n = 10$ вычислить приближенное значение $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Симпсона и оценить его погрешность.

Решение. Из соотношения (9.15) при $n = 10$ будем иметь

$$|R(f)| \leq \frac{1}{180} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 4! < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

Составим следующую таблицу значений подынтегральной функции:

k	x_k	$f(x_0), f(x_{10})$	$f(x_k), k = 1(2)9$	$f(x_k), k = 2(2)8$
0	0,0	1,00000		
1	0,1		0,99010	
2	0,2			0,96153
3	0,3		0,91743	
4	0,4			0,86206
5	0,5		0,80000	
6	0,6			0,73529
7	0,7		0,67114	
8	0,8			0,60975
9	0,9		0,55249	
10	1,0	0,50000		
Суммы		1,50000	3,93116	3,16865

Получаем приближенное значение

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3 \cdot 10} (1,50000 + 2 \cdot 3,16865 + 4 \cdot 3,93116) = 0,78537.$$

Точное значение интеграла равно $\frac{\pi}{4} = 0,7853\dots$

Пример 2. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле трапеций с точностью $0,5 \cdot 10^{-2}$, определяя шаг h из оценки остаточного члена.

Решение. Определим вначале n . С этой целью найдем вторую производную подынтегральной функции. Имеем

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{(6x^2-2)}{(1+x^2)^3}.$$

Легко видеть, что при $x^2 = 1$ достигается максимум модуля второй производной и n выберем из неравенства

$$\frac{1}{12n^2} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}.$$

Пусть $n = 5$, тогда $h = 0,2$ и приближенное значение интеграла будет равно

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,00000 + \frac{1}{2} \cdot 0,50000 + 0,96156 + \right. \\ \left. + 0,86206 + 0,73529 + 0,60975 \right) = 0,78373.$$

Сравнивая это значение с точным, приходим к заключению, что точность обеспечена.

1.8. Правило Рунге

В практических расчетах важной проблемой является задача оценки погрешности вычисления интеграла, так как вид остатка любой квадратурной формулы зависит от производных подынтегральной функции, которые нам неизвестны. Пусть используется некоторая определенная квадратурная формула порядка точности m . Обозначим

точное значение интеграла $I = \int_a^b p(x)f(x)dx$, а его приближенное значение,

полученное по данной квадратурной формуле с шагом h_k , через

$$I_k = \sum_{i=0}^{n_k} A_i f(0 + h_k i). \quad \text{Тогда имеет место соотношение} \quad I = I_k + \alpha h_k^m.$$

Вычислим интеграл по указанной квадратурной формуле с шагом $h_1 = h$

и $h_2 = \frac{h}{2}$. Получим

$$\begin{cases} I = I_1 + \alpha h^m, \\ I = I_2 + \alpha \left(\frac{h}{2}\right)^m. \end{cases}$$

Если теперь из первого соотношения вычесть второе, получим

$$I_2 - I_1 = \alpha \left(h^m - \left(\frac{h}{2}\right)^m \right), \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{I_2 - I_1}{h_1^m - h_2^m} h_1^m, \quad \text{и погрешность вычислений}$$

будет характеризоваться величиной $\frac{I_2 - I_1}{h_1^m - h_2^m} h_1^m$ в первом случае и

$\frac{I_2 - I_1}{h_1^m - h_2^m} h_2^m$ – во втором. Это и есть правило Рунге уточнения значения интеграла, если последний вычислен на последовательности сеток. Отметим только, что мы указали на главный член погрешности, так как величины α на последовательности сеток могут отличаться на величину порядка h .

Правило Рунге позволяет контролировать точность вычисления интеграла. Пусть, например, следует вычислить интеграл с точностью ε . Если на последовательности сеток $h_1 = h$ и $h_2 = \frac{h}{2}$ мы получили, что

$$\left| \frac{I_2 - I_1}{h_1^m - h_2^m} h_2^m \right| \leq \varepsilon,$$

то точность достигнута и в качестве приближенного значения мы можем взять величину $I_2 + \alpha h_2^m$. Если же последнее неравенство не выполняется, то мы выбираем $h_3 = \frac{h_2}{2}$, определяем I_3 , проверяем выполнение неравенства и т. д., пока не получим на каком-то шаге h_k его выполнение.

Задачи и упражнения

1. Вычислить интеграл по квадратурной формуле трапеций с заданным значением n и оценить погрешность:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^3}, \quad n = 10;$

б) $\int_2^3 \frac{x dx}{1+x^3}, \quad n = 10;$

в) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}, \quad n = 5;$

г) $\int_2^3 \frac{x dx}{1+x^4}, \quad n = 5;$

д) $\int_1^4 \sqrt{6x^2 - 1}, \quad n = 10;$

$$\text{е) } \int_{0,5}^{2,5} \sqrt{3x^2 + 4}, \quad n = 10;$$

$$\text{ж) } \int_{1,5}^{3,5} \sqrt{3x^2 + 4}, \quad n = 10;$$

$$\text{з) } \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4}}, \quad n = 5;$$

$$\text{и) } \int_{2,5}^{4,5} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4}}, \quad n = 5;$$

$$\text{к) } \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad n = 6;$$

$$\text{л) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^3 + 1}}, \quad n = 10;$$

$$\text{м) } \int_1^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \quad n = 5;$$

$$\text{н) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}, \quad n = 10;$$

$$\text{о) } \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{x^2 + 1}, \quad n = 10;$$

$$\text{п) } \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1}, \quad n = 10.$$

2. Вычислить интеграл по квадратурной формуле Симпсона с заданным значением n и оценить погрешность:

$$\text{а) } \int_0^1 e^{x^2} dx, \quad n = 10;$$

$$\text{б) } \int_1^2 e^{x^2} dx, \quad n = 10;$$

$$\text{в) } \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n = 10;$$

$$\Gamma) \int_1^2 e^{-x^2} dx, \quad n=10;$$

$$\Delta) \int_2^{3,2} \ln x^2 dx, \quad n=6;$$

$$\text{е)} \int_3^{4,2} \ln x^2 dx, \quad n=6;$$

$$\text{ж)} \int_0^{1,2} \ln(1+x^2) dx, \quad n=6;$$

$$\text{з)} \int_0^1 \sin x^2 dx, \quad n=10;$$

$$\text{и)} \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad n=10;$$

$$\text{к)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x} dx, \quad n=10;$$

$$\text{л)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx, \quad n=10;$$

$$\text{м)} \int_0^1 e^{x^2+1} dx, \quad n=10;$$

$$\text{н)} \int_{-1}^1 e^{-x^2+1} dx, \quad n=10;$$

$$\text{о)} \int_0^2 e^{2x^2-2} dx, \quad n=10;$$

$$\text{п)} \int_0^2 e^{x^2-1} dx, \quad n=10.$$

3. Вычислить следующие интегралы по квадратурным формулам Симпсона с заданной точностью ε , определяя шаг интегрирования h по оценке остаточного члена:

$$\text{a)} \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{б)} \int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$\text{в)} \int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{г)} \int_{-1}^1 e^{x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$\text{д)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{е)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{ж)} \int_0^1 \sin x^2 dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{з)} \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{и)} \int_1^2 x \ln x dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{к)} \int_2^3 x \ln x dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$\text{л)} \int_1^4 e^{\frac{1}{x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$\text{м)} \int_1^4 e^{\frac{1}{x^2}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$\text{н)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{о) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$\text{п) } \int_1^3 \ln(x^2 + 1) dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Тема 10. Квадратурные правила наивысшей алгебраической степени точности

1.9. Квадратурные формулы Гаусса

Будем рассматривать квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (10.1)$$

предполагая, что весовая функция удовлетворяет условию абсолютной сходимости интегралов вида

$$\int_a^b p(x)x^m dx, \quad m = 0, 1, \dots$$

и, кроме того, $p(x) \neq 0$, т. е. $\int_a^b |p(x)| dx > 0$.

Формула (10.1) имеет $2n$ параметров A_k и x_k , и можно ожидать, что при помощи их выбора можно сделать равенство (10.1) точным для всяких алгебраических многочленов степени $2n - 1$. Это равносильно выполнению следующих $2n$ условий:

$$\int_a^b p(x)x^m dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^m, \quad m = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (2)$$

Квадратурные формулы, удовлетворяющие (2), получили название квадратурных формул Гаусса или квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ).

Выясним требования, при которых (10.1) удовлетворяет условиям (10.2).

Теорема 1. Чтобы квадратурная формула (10.1) была точна для всех многочленов степени $2n - 1$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) формула (10.1) должна быть интерполяционной, т. е.

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx; \quad (10.3)$$

2) узлы x_k должны быть выбраны так, чтобы многочлен $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ был ортогонален по весу $p(x)$ всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n , т. е.

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0. \quad (10.4)$$

Если весовая функция не меняет знака на $[a, b]$ и является неотрицательной, то при всяком n существует единственный многочлен $\omega(x)$, ортогональный по весу $p(x)$ ко всякому многочлену степени меньше n . В качестве узлов квадратурной формулы x_k берут корни многочлена $\omega(x)$. Нам необходимо выяснить вопрос, будут ли корни многочлена $\omega(x)$ различными и принадлежать отрезку интегрирования $[a, b]$.

Теорема 2. Пусть весовая функция знакопостоянна на $[a, b]$ и многочлен $\omega(x)$ ортогонален по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени не выше $n - 1$. Тогда все корни многочлена $\omega(x)$ принадлежат $[a, b]$ и различны между собой.

Из приведенных теорем вытекает, что при условии сохранения на $[a, b]$ знака весовой функции $p(x)$, квадратурная формула вида (10.1), точная для всех многочленов степени $2n - 1$, может быть построена для любых $n = 1, 2, \dots$, и такая формула является единственной. Кроме того, при условии сохранения знака весовой функции $p(x)$ на $[a, b]$, число $2n - 1$ является наивысшей алгебраической степенью точности формулы (10.1).

Теорема 3. Пусть весовая функция сохраняет знак на $[a, b]$ и $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $2n$. Тогда на $[a, b]$ существует такая точка ξ , что для погрешности

$$R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

квадратурной формулы НАСТ верно представление

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx. \quad (10.5)$$

Пример 1. Построить квадратурную формулу НАСТ с двумя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx.$$

Решение. Вначале построим многочлен второй степени $\omega(x) = x^2 + ax + b$, ортогональный по весу x^2 многочленам $Q(x) = 1$ и $Q(x) = x$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 (x^2 + ax + b) \cdot 1 dx &= 0, \text{ т. е. } \frac{2}{5} + \frac{2b}{3} = 0, \\ \int_{-1}^1 x^2 (x^2 + ax + b) \cdot x dx &= 0, \text{ т. е. } \frac{2}{5} a = 0. \end{aligned}$$

Значит, $a = 0$, $b = -\frac{3}{5}$. Имеем $\omega(x) = x^2 - \frac{3}{5} = 0$. Его корни $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ будут узлами квадратурной формулы. Коэффициенты квадратурной формулы определяются из (10.3) для $\omega(x) = \left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. Имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{x - \sqrt{\frac{3}{5}}}{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 - x^2 \sqrt{\frac{3}{5}}\right) dx = \frac{1}{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \left(-\frac{x^3}{3} \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}; \\ A_2 &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{x + \sqrt{\frac{3}{5}}}{2\sqrt{\frac{3}{5}}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{5}}} \left(\frac{x^3}{3} \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда требуемая квадратурная формула НАСТ принимает вид

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right). \quad (10.6)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что узлы квадратурной формулы НАСТ, а также ее коэффициенты зависят только от весовой функции $p(x)$ и от отрезка интегрирования $[a, b]$.

Пример 2. Построить квадратурную формулу НАСТ с тремя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int_0^1 (x+1) \ln(x+1) dx$$

и оценить ее погрешность.

Решение. Здесь весовая функция $p(x) \equiv 1$. Будем строить $\omega(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ из следующих условий ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot 1 dx &= 0, \text{ т. е. } \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0, \\ \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot x dx &= 0, \text{ т. е. } \frac{1}{5} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0, \\ \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot x^2 dx &= 0, \text{ т. е. } \frac{1}{6} + \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения коэффициентов a, b, c имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = -3, \\ 15a + 20b + 30c = -12, \\ 12a + 15b + 20c = -10. \end{cases}$$

Из нее легко получить $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = -\frac{1}{20}$, а корни многочлена $\omega(x)$ будут следующими: $x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}$. Коэффициенты формулы принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} dx = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \left(\frac{x^3}{3} - (x_2 + x_3) \frac{x^2}{2} + x_2 x_3 x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3} - x \frac{x_2 - x_3}{2} + x_2 x_3 \right)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{20}}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}} \right) \right)}{2\sqrt{\frac{3}{20}} \cdot \sqrt{\frac{3}{20}}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}}}{2 \cdot \frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{18};$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} dx = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_3)}{2} x^2 + x_1 x_3 x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}}{-\sqrt{\frac{3}{20}} \cdot \sqrt{\frac{3}{20}}} = \frac{\frac{10-15+3}{30}}{-\frac{3}{20}} = \frac{2}{30} \cdot \frac{20}{3} = \frac{4}{9}$$

$$A_3 = \int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} dx = \frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_2)}{2} x^2 + x_1 x_2 x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1-\sqrt{\frac{3}{20}}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{20}}}{2\sqrt{\frac{3}{20}} \cdot \sqrt{\frac{3}{20}}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{12 \cdot 3} = \frac{5}{18}.$$

Тогда квадратурная формула НАСТ будет следующей:

$$I(f) \approx \frac{5}{18} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{4}{9} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

где $f(x) = (x+1) \ln(x+1)$. Из последнего соотношения получаем $I(f) \approx 0,636292619$, при этом $\|R(f)\| \leq 0,000012$. Непосредственное вычисление интеграла дает $I(f) = 0,636294361$.

10.2. Квадратурные формулы НАСТ, отвечающие простейшим весовым функциям

Говорят, что последовательность многочленов

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots,$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, образуют ортогональную систему по весу $p(x)$ на $[a, b]$, если

$$\int_a^b p(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, m \neq n. \quad (10.7)$$

Многочлен $P_n(x)$ называют нормированным, если

$$\int_a^b p(x)P_n^2(x) dx = 1.$$

Если все многочлены ортогональной системы нормированы, то систему сокращенно называют ортонормированной. В условии ортогональности (10.7) ввиду равноправности индексов m и n достаточно потребовать его выполнения для $m < n$. С другой стороны, так как всякий многочлен степени не выше $n-1$ может быть разложен по многочленам $P_m(x)$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, условие ортогональности (10.7) равносильно требованию, чтобы каждый многочлен $P_n(x)$ был ортогонален к любым многочленам степени $m < n$.

Возвратимся к квадратурным формулам НАСТ. Квадратурная формула может быть построена для всякого $n = 1, 2, \dots$. Когда n фиксировано, ей будут отвечать свой многочлен $\omega_n(x)$ и свои квадратурные узлы x_k^n , $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. $\omega_n(x) = (x - x_1^n)(x - x_2^n) \cdots (x - x_n^n)$. По теореме 1 $\omega_n(x)$ должен быть ортогонален по всяким многочленам $Q(x)$ степени $m < n$. Следовательно, $\omega_n(x)$ может отличаться от $P_n(x)$ только численным множителем, который, очевидно, должен быть равен коэффициенту при старшей степени $P_n(x)$. Поэтому узлы x_k^n должны быть корнями $P_n(x)$.

Рассмотрим квадратурные правила, отвечающие весовым функциям, которые чаще всего встречаются при решении прикладных задач.

1. Постоянная весовая функция ($p(x) \equiv 1$). Отрезок интегрирования $[a, b]$ будем считать конечным и интеграл берется в виде $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ предполагается достаточно гладкой. Всякий конечный отрезок $[a, b]$ линейной заменой переменной переводится к отрезку $[-1, 1]$ и мы будем в дальнейшем рассматривать $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Систему многочленов, ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$, образуют, как известно, многочлены Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

В квадратурной формуле НАСТ с n узлами последние должны располагаться в корнях многочлена Лежандра степени n : $P_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Коэффициенты же такой квадратурной формулы могут быть вычислены из соотношений

$$A_k = \frac{2}{n^2} \frac{1 - x_k^2}{P_{n-1}^2(x_k)}$$

или

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)(P_n'(x_k))^2}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Для остатка такой квадратурной формулы имеет место представление

$$P_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 f^{(2n)}(\xi), \xi \in [-1, 1].$$

В настоящее время составлены таблицы узлов и весов таких квадратурных формул при $n \leq 512$ с 20 десятичными знаками. Приведем узлы и коэффициенты указанных квадратурных формул для $n = 1, 2, \dots, 6$:

$$n = 1; x_1 = 0, \\ A_1 = 2;$$

$$n = 2; -x_1 = x_2 = 0,5773502692, \\ A_1 = A_2 = 1;$$

$$n = 3; x_3 = -x_1 = 0,7745966692, x_2 = 0, \\ A_2 = \frac{8}{9}, A_1 = A_3 = \frac{5}{9};$$

$$n = 4; x_3 = -x_2 = 0,3399810436, x_4 = -x_1 = 0,8611363116, \\ A_2 = A_3 = 0,6521451549, A_1 = A_4 = 0,3478548451;$$

$$n = 5; x_3 = 0, x_4 = -x_2 = 0,5384693101, x_5 = -x_1 = 0,9061798459, \\ A_3 = 0,5688888899, A_2 = A_4 = 0,4786286705, A_1 = A_5 = 0,2369268851;$$

$$n = 6; x_6 = -x_1 = 0,9324695142, x_5 = -x_2 = 0,6612093865, x_4 = -x_3 = 0,2386191861, \\ A_1 = A_6 = 0,1713244924, A_2 = A_5 = 0,3607615730, A_3 = A_4 = 0,4679139346.$$

2. Квадратурные формулы НАСТ для интегралов вида $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$. Пусть $[a, b]$ – конечный отрезок и на нем задана весовая функция $p(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. При вычислении указанных интегралов отрезок интегрирования известным линейным

преобразованием приводят к стандартному отрезку $[-1, 1]$ и рассматривают интеграл вида $\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx$. В квадратурной

формуле НАСТ для интегралов такого вида узлы являются корнями многочлена Якоби степени n , вид которого из-за его громоздкости мы здесь приводить не будем. Еще по более сложным формулам будут вычисляться коэффициенты A_k квадратурной формулы. При $\alpha = \beta = 0$ многочлены Якоби совпадают с многочленами Лежандра и квадратурная формула принимает вид приведенной выше с постоянным весом. Если же $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, то $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда система ортогональных многочленов на $[-1, 1]$ превращается в систему многочленов Чебышева $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и за узлы x_k квадратурной формулы НАСТ следует взять их корни $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$. Примечательно, что для рассматриваемого случая коэффициенты A_k не зависят от k и все $A_k = \frac{\pi}{n}$. Таким образом, квадратурная формула НАСТ принимает в этом случае вид

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right),$$

а остаточный член ее можно записать так:

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \xi \in [-1, 1].$$

Пример 3. По квадратурной формуле НАСТ с $n = 6$ вычислить $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ и оценить погрешность.

Решение. Так как $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $f(x) = e^{2x}$, то согласно построенной квадратурной формуле НАСТ имеем

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{6} \sum_{k=1}^6 e^{2x_k},$$

где $x_k = \cos \frac{2k-1}{12} \pi$. Отсюда можно получить, что $I(f) \approx 11,397928$. Для оценки погрешности воспользуемся тем, что

$$f^{(2n)}(\xi) = \left(e^{2x} \right)^{(6)} \Big|_{x=\xi} = 2^6 e^{2\xi} \text{ и } \max_{x \in [-1,1]} |f^{(2n)}(x)| = 2^6 e^2.$$

Тогда

$$\|R_n(f)\| \leq \frac{\pi}{2^{11} \cdot 12!} \cdot 2^6 e^2 = \frac{\pi e^2}{2^5 \cdot 12} \approx 2 \cdot 10^{-9}.$$

3. Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$. В квадратурной формуле НАСТ с $p(x) = e^{-x^2}$ узлы должны совпадать с корнями многочлена Чебышева – Эрмита степени n

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

а для коэффициентов A_k и остатка $R_n(f)$ справедливы представления

$$A_k = \frac{\alpha^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{(H'_n(x_k))^2}, R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

Приведем здесь значения x_k и A_k для следующих n :

$$n=1; \quad x_1=0,$$

$$A_1=1,7724538509;$$

$$n=2; \quad x_2=-x_1=0,7071067812,$$

$$A_1=A_2=0,8862269255;$$

$$n=3; \quad x_3=-x_1=1,2247448714, x_2=0,$$

$$A_1=A_3=0,2954089752, A_2=1,1816359006;$$

$$n=4; \quad x_4=-x_1=1,6506801239, x_3=-x_2=0,5246476233,$$

$$A_1=A_4=0,08131283545, A_2=A_3=0,8049140900;$$

$$n=5; \quad x_5=-x_1=2,0201828705, x_4=-x_2=0,9585724646, x_3=0,$$

$$A_1=A_5=0,01995324206, A_2=A_4=0,3936193232, A_3=0,9453087205;$$

$$n=6; \quad x_6=-x_1=2,3506049737, x_5=-x_2=1,3358490740, x_4=-x_3=0,4360774119,$$

$$A_1=A_6=0,004530009906, A_2=A_5=0,1570673203, A_3=A_4=0,7246295952.$$

4. Вычисление интегралов вида $\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx$, $\alpha > -1$.

Ортогональными на полуоси $[0; +\infty)$ по весу $p(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ являются многочлены Чебышева – Лягерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}),$$

и узлами соответствующей квадратурной формулы являются их корни. Если воспользоваться видом интеграла Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0,$$

то коэффициенты такой квадратурной формулы

$$A_k = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{x_k (L_n^{(\alpha)}(x_k))^2},$$

а остаток имеет вид

$$R_n(f) = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

Числовые значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы вычисления указанного интеграла при $\alpha = 0$ и конкретных n будут следующими:

$$n = 1; \quad x_1 = 1, \\ A_1 = 1;$$

$$n = 2; \quad x_1 = 0,5857864376, x_2 = 3,4142135624, \\ A_1 = 0,8535533906, A_2 = 0,1464466094;$$

$$n = 3; \quad x_1 = 0,4157745568, x_2 = 2,2942803603, x_3 = 6,2899450829, \\ A_1 = 0,7110930099, A_2 = 0,2785177336, A_3 = 0,0103892565;$$

$$n = 4; \quad x_1 = 0,3225476896, x_2 = 1,7457611012, \\ x_3 = 4,5366202969, x_4 = 9,3950709123, \\ A_1 = 0,6031541043, A_2 = 0,3574186924, \\ A_3 = 0,0388879085, A_4 = 0,0005392947;$$

$$n = 5; \quad x_1 = 0,2635603197, x_2 = 1,4134030591, x_3 = 3,5964257710, \\ x_4 = 7,0858100059, x_5 = 12,6408008443, \\ A_1 = 0,5217556106, A_2 = 0,3986668111, A_3 = 0,0759424497, \\ A_4 = 0,0036117558, A_5 = 0,0000233700;$$

$n = 6$; $x_1 = 0,2228466042$, $x_2 = 1,8889321017$, $x_3 = 2,9927363261$,
 $x_4 = 5,7751435691$, $x_5 = 9,8374674184$, $x_6 = 15,9828739806$,
 $A_1 = 0,4589646740$, $A_2 = 0,4170008308$, $A_3 = 0,1133733821$,
 $A_4 = 0,0103991974$, $A_5 = 0,0002610172$, $A_6 = 0,0000008985$.

Задачи и упражнения

1. Построить квадратурную формулу НАСТ с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f)$ следующего вида:

$$\text{а) } I(f) = \int_2^4 x f(x) dx;$$

$$\text{б) } I(f) = \int_{-2}^3 x^2 f(x) dx;$$

$$\text{в) } I(f) = \int_{-1}^1 |x| f(x) dx;$$

$$\text{г) } I(f) = \int_0^2 x^2 f(x) dx;$$

$$\text{д) } I(f) = \int_1^3 \sqrt{x} f(x) dx;$$

$$\text{е) } I(f) = \int_2^4 \sqrt{x} f(x) dx;$$

$$\text{ж) } I(f) = \int_1^4 \sqrt{x} f(x) dx;$$

$$\text{з) } I(f) = \int_0^3 x^3 f(x) dx;$$

$$\text{и) } I(f) = \int_0^2 x^4 f(x) dx;$$

$$\text{к) } I(f) = \int_{-1}^2 x^3 f(x) dx;$$

$$\text{л)} \quad I(f) = \int_0^3 (x+1) f(x) dx;$$

$$\text{м)} \quad I(f) = \int_0^2 \sqrt{x} f(x) dx;$$

$$\text{н)} \quad I(f) = \int_1^4 x^2 f(x) dx;$$

$$\text{о)} \quad I(f) = \int_2^5 x^3 f(x) dx;$$

$$\text{п)} \quad I(f) = \int_0^1 x^4 f(x) dx.$$

2. Построить квадратурную формулу НАСТ с тремя узлами и оценить ее погрешность для вычисления следующих интегралов:

$$\text{а)} \quad I(f) = \int_1^4 x \ln x dx;$$

$$\text{б)} \quad I(f) = \int_{\frac{1}{2}}^{2\frac{1}{2}} x^2 \ln x dx;$$

$$\text{в)} \quad I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$\text{г)} \quad I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx;$$

$$\text{д)} \quad I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx;$$

$$\text{е)} \quad I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx;$$

$$\text{ж)} \quad I(f) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx;$$

$$3) \quad I(f) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx;$$

$$и) \quad I(f) = \int_0^1 x e^x \, dx;$$

$$к) \quad I(f) = \int_0^1 x e^{\frac{x}{2}} \, dx;$$

$$л) \quad I(f) = \int_{-1}^1 x e^{x^2} \, dx;$$

$$м) \quad I(f) = \int_{-1}^1 x^2 e^x \, dx;$$

$$н) \quad I(f) = \int_{-1}^1 x^2 e^{x^2} \, dx;$$

$$о) \quad I(f) = \int_2^4 x \ln(x+1) \, dx;$$

$$п) \quad I(f) = \int_1^3 x 2^x \, dx.$$

3. По квадратурной формуле НАСТ с $n = 4$ вычислить следующие интегралы и оценить погрешность:

$$а) \quad I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$б) \quad I(f) = \int_{-1}^1 \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$в) \quad I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$г) \quad I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$д) \quad I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$\text{е) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{ж) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{з) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{и) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(\frac{1}{2}x+1)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{к) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{л) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(\frac{1}{2}x)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{м) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{2^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{н) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{о) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{3^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{п) } I(f) = \int_{-1}^1 \frac{2^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4. Используя квадратурную формулу НАСТ при $n = 4$, вычислить приближенное значение следующих интегралов:

$$\text{а) } I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx;$$

$$\text{б) } I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$\text{в) } I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx;$$

$$\Gamma) \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx;$$

$$\Delta) \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\sin x + \cos x) \, dx;$$

$$\text{е) } \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ln \frac{1}{x^2 + 1} \, dx;$$

$$\text{ж) } \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ln \frac{1}{x^2 + 4} \, dx;$$

$$\text{з) } \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2^{-|x|} \, dx;$$

$$\text{и) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx;$$

$$\text{к) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx;$$

$$\text{л) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx;$$

$$\text{м) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx;$$

$$\text{н) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{x+1} \, dx;$$

$$\text{о) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{x+2} \, dx;$$

$$\text{п) } \quad I(f) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx.$$

Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 11. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

1.10. Метод замены ядра на вырожденное

Линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода можно записать в виде

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad (11.1)$$

где $K(x, s)$ – ядро; $\lambda \in R$ – параметр; $f(x)$ – свободный член уравнения; $u(x)$ – искомая функция, подлежащая определению ($K(x, s)$; $f(x)$ – заданные функции своих аргументов, $a \leq x, s \leq b$).

Ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения (11.1) называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (11.2)$$

где $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ – известные функции, которые будем считать линейно независимыми. Предполагая, что решение интегрального уравнения (11.1) существует, последнее будем искать в виде

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \alpha_j(x), \quad (11.3)$$

где A_j – некоторые, пока неизвестные, численные коэффициенты, достаточно просто определяемые через $u(x)$ и $\beta_i(s)$. В самом деле, подставив (11.3) в (11.1) и учитывая (11.2), получим

$$A_j = \lambda \int_a^b \beta_j(s) u(s) ds.$$

Для нахождения этих коэффициентов может быть построена линейная система уравнений. Введем следующие обозначения:

$$\beta_{ij} = \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds, f_i = \int_a^b f(s) \beta_i(s) ds.$$

Учитывая линейную независимость $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(s)$, сравним коэффициенты при соответствующих $\alpha_i(x)$ в левой и правой части этого равенства. Получим

$$A_i = \lambda f_i + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} A_j, j=1, 2, \dots, n. \quad (11.4)$$

Если ввести в рассмотрение векторы $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ и матрицу $B = \{\{\beta_{ij}\}\}$, $i, j=1, 2, \dots, n$, то систему (11.4) можно записать в виде

$$A = \lambda f + \lambda B A.$$

Будем считать, что главный определитель этой системы отличен от нуля, т. е.

$$\Delta(\lambda) = \text{Det}(E - \lambda B) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\beta_{11} & -\lambda\beta_{12} & \dots & -\lambda\beta_{1n} \\ -\lambda\beta_{21} & 1 - \lambda\beta_{22} & \dots & -\lambda\beta_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -\lambda\beta_{n1} & -\lambda\beta_{n2} & \dots & 1 - \lambda\beta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решением этой системы является вектор $A = (E - \lambda B)^{-1} f$. Построение решения $u(x)$ сводится в случае вырожденного ядра $K(x, s)$ к вычислению величин f_i , β_{ij} и решению системы линейных алгебраических уравнений (11.4). Если эти величины будут определены точно, то получим точное решение исходного интегрального уравнения.

Пример 1. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x + s) u(s) dx = 1 + x^3$$

методом замены ядра на вырожденное.

Решение. Ядро этого интегрального уравнения является вырожденным, при этом $\alpha_1(x) = x$, $\beta_1(s) = 1$, $\alpha_2(x) = 1$, $\beta_2(s) = s$. Учитывая это, имеем

$$\beta_{11} = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2}, \beta_{12} = \int_0^1 1 \cdot ds = 1, \beta_{21} = \int_0^1 s ds = \frac{1}{3}, \beta_{22} = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2},$$

$$f_1 = \int_0^1 (1 + s^3) ds = \frac{5}{4}, \quad f_2 = \int_0^1 s(1 + s^3) ds = \frac{7}{10}.$$

Система (11.4) для определения A_1, A_2 принимает вид

$$\begin{cases} A_1 = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{2} A_2, \\ A_2 = \frac{7}{20} + \frac{1}{6} A_1 + \frac{1}{4} A_2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $A_1 = \frac{309}{230}, A_2 = \frac{88}{115}$ и точное решение (в этом легко убедиться) будет следующим:

$$u(x) = x^3 + \frac{309}{230} x + \frac{203}{115}.$$

Если в указанном интегральном уравнении произвольное ядро заменить на близкое к нему вырожденное ядро, то решение нового вспомогательного уравнения будет близким к решению заданного уравнения. Построение же решения вспомогательного уравнения много проще ввиду вырожденности ядра. Укажем некоторые приемы построения вырожденных ядер.

а) Применение степенного ряда. Этот метод применим в случае, когда ядро $K(x, s)$ является аналитической функцией от s в области $|s - c| \leq R$, где c есть середина отрезка $[a, b]$ и $R > \frac{1}{2}(b - a)$. В этом случае $K(x, s)$ можно разложить в степенной ряд по степеням $(s - c)$, сходящийся в круге $|s - c| < R$. Коэффициенты этого ряда будут зависеть от x :

$$K(x, s) = c_0(x) + c_1(x)(s - c) + \dots + c_n(x)(s - c)^n + \dots,$$

где $c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial K(x, c)}{\partial s^n}$. В качестве вырожденного ядра $K(x, s)$ может быть взят конечный отрезок степенного ряда

$$\tilde{K}(x, s) = c_0(x) + c_1(x)(s - c) + \dots + c_n(x)(s - c)^n.$$

Аналогично можно поступать и в тех случаях, когда ядро есть аналитическая функция от x или от обоих аргументов.

б) Использование интерполяционных методов. Выберем на отрезке $[a, b]$ n узлов s_1, s_2, \dots, s_n и проинтерполируем по аргументу s функцию $K(x, s)$ по ее значениям во взятых точках. При этом будет получено приближенное представление $K(x, s)$:

$$\tilde{K}(x, s) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(s)}{(s - s_k)\omega'(s_k)} K(x, s_k), \quad \omega(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i),$$

и $\tilde{K}(x, s)$ может быть принято за вырожденное ядро.

11.2. Метод квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

Для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (11.1) методом квадратур отрезок $[a, b]$ разобьем на n равных частей шагом h и интеграл в (11.1) заменим какой-нибудь квадратурной формулой. Получим

$$u(x) - \lambda \sum_{k=0}^n A_k K(x, x_k) u(x_k) = f(x) + R_n(x), \quad (11.5)$$

где R_n — остаток квадратурной формулы. Будем рассматривать соотношение (11.5) в каждой точке построенной сетки, т. е. в точках $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Получим

$$u(x_i) - \lambda \sum_{k=0}^n A_k K(x_i, x_k) u(x_k) = f(x_i) + R_n(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (11.6)$$

В системе соотношений (11.6) отбросим величины $R_n(x_i)$, считая их достаточно малыми. В результате придем к приближенной системе для $u(x_i)$. Заменяя в ней $u(x_i)$ на их приближенные значения y_i , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$y_i - \lambda \sum_{k=0}^n A_k K_{ik} y_k = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (11.7)$$

где $K_{ik} = K(x_i, x_k)$, $f_i = f(x_i)$, $y_i = y(x_i)$. Главный определитель этой системы есть $\det[E - \lambda B]$, где $B = \{\{A_n K_{ik}\}\}$, $i, k = 0, 1, \dots, n$. Если он отличен от нуля, то система (11.7) имеет единственное решение. Решая эту систему, определим приближенное решение исходного интегрального уравнения в узлах сетки. Для получения аналитического решения обратимся к соотношению (11.6). Подставляя в него вместо $\varphi(x_k)$ их приближенные значения y_k и отбрасывая R_n , получим приближенное значение решения в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{k=0}^n A_k K(x, x_k) y_k + f(x).$$

Пример 2. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+s) u(s) ds = 1 + x^3,$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,25$.

Решение. Обратимся к формуле (11.5), в которой $x_0 = 0$; $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 0,75$; $x_4 = 1$ и $A_0 = A_4 = \frac{h}{2}$, $A_1 = A_2 = A_3 = h$, где $h = 0,25$.

Так как в нашем случае

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+s) u(s) ds &\approx \frac{h}{2} ((x+s_0)u(x_0) + 2(x+s_1)u(x_1) + 2(x+s_2)u(x_2) + \\ &+ 2(x+s_3)u(x_3) + (x+s_4)u(x_4)) = \frac{1}{8} \left(x u(x_0) + 2 \left(x + \frac{1}{4} \right) u(x_1) + 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) u(x_2) + \right. \\ &\left. + 2 \left(x + \frac{3}{4} \right) u(x_3) + (x+1)u(x_4) \right), \end{aligned}$$

то для $y(x)$ получим соотношение

$$y(x) - \frac{1}{16} \left(x y_0 + 2 \left(x + \frac{1}{4} \right) y_1 + 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) y_2 + 2 \left(x + \frac{3}{4} \right) y_3 + (x+1)y_4 \right) = 1 + x^3.$$

Рассматривая последнее соотношение в каждой точке сетки, придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y_0 - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} y_1 + y_2 + \frac{3}{2} y_3 + y_4 \right) = 1, \\ y_1 - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4} y_0 + y_1 + \frac{3}{2} y_2 + 2y_3 + \frac{5}{4} y_4 \right) = \frac{65}{64}, \\ y_2 - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{3}{2} y_1 + 2y_2 + \frac{5}{2} y_3 + \frac{3}{2} y_4 \right) = \frac{9}{8}, \\ y_3 - \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4} y_0 + 2y_1 + \frac{5}{2} y_2 + 3y_3 + \frac{7}{4} y_4 \right) = \frac{91}{64}, \\ y_4 - \frac{1}{16} \left(y_0 + \frac{5}{2} y_1 + 3y_2 + \frac{7}{2} y_3 + 2y_4 \right) = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему любым известным методом, получим следующее приближенное значение $u(x)$ в точках сетки:

$$y_0 = 1,795338,$$

$$y_1 = 2,154467,$$

$$y_2 = 2,607326,$$

$$y_3 = 3,247695,$$

$$y_4 = 4,169314.$$

Для сравнения приведем точные значения $u(x)$, полученные в предыдущем параграфе методом замены ядра на вырожденное:

$$\begin{aligned}u(x_0) &= 1,7652173, \\u(x_1) &= 2,1167118, \\u(x_2) &= 2,5619564, \\u(x_3) &= 3,1947009, \\u(x_4) &= 4,1086955.\end{aligned}$$

11.3. Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В этом методе решение уравнения (11.1) ищется в виде степенного ряда λ , т. е.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x), \quad (11.8)$$

где $\varphi_k(x)$ – некоторая система функций, которая будет рекуррентно определена из следующих соображений. Подставив (11.8) в исходное уравнение (11.1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) dx + f(x).$$

Для определения $\varphi_k(x)$ сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ в последнем соотношении. Получим

$$\begin{aligned}\lambda^0: \varphi_0(x) &= f(x), \\ \lambda^1: \varphi_1(x) &= \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \lambda^2: \varphi_2(x) &= \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) ds, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda^n: \varphi_n(x) &= \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Это и есть система рекуррентного определения $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда приближенное решение определяется формулой

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \varphi_k(x).$$

Условием сходимости этого метода является выполнение неравенства

$$q = |\lambda|(b-a)\|K(x, s)\| < 1.$$

В практических вычислениях интегралы, возникающие в этом методе, редко удается выразить через элементарные функции. Поэтому обычно ограничиваются нахождением первых приближений.

Пример 3. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+s) u(s) ds = 1 + x^3$$

методом последовательных приближений, полагая $n = 3$.

Решение. Легко видеть, что

$$\varphi_0(x) = 1 + x^3,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 (x+s)(1+s^3) ds = \frac{5}{4}x + \frac{7}{10},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 (x+s)\left(\frac{5}{4}s + \frac{5}{7}\right) ds = \frac{53}{40}x + \frac{23}{30},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^1 (x+s)\left(\frac{53}{40}s + \frac{23}{30}\right) ds = \frac{343}{240}x + \frac{33}{40}.$$

Тогда приближенное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + x^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}x + \frac{7}{10} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{53}{40}x + \frac{23}{30} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{343}{240}x + \frac{33}{40} \right) = \\ &= x^3 + \frac{2179}{1920}x + \frac{1579}{960}. \end{aligned}$$

Задачи и упражнения

1. Методом замены ядра на вырожденное найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x)$$

при следующих входных данных:

- а) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 0, b = 2, K(x, s) = x + s, f(x) = 1 + x^2$;
- б) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = \frac{1}{2}x - s, f(x) = 1 + x$;
- в) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 1, b = 2, K(x, s) = x^2 + \frac{1}{2}s, f(x) = 1 - x$;
- г) $\lambda = \frac{1}{8}, a = 1, b = 2,5, K(x, s) = \frac{1}{2}x - s^2, f(x) = x^2 + 1$;
- д) $\lambda = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}, b = 2, K(x, s) = x^2 - s^2, f(x) = x^3 + 1$;
- е) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 2, K(x, s) = x^2 + \frac{1}{4}s^2, f(x) = 1 - x^3$;
- ж) $\lambda = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}, b = 2, K(x, s) = x + \frac{1}{4}s^3, f(x) = x^3 + x + 1$;
- з) $\lambda = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}, b = 1, K(x, s) = x + s, f(x) = x^2 + 3x - 1$;
- и) $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, s) = x^2 + s^2, f(x) = x^3 - x^2 + 1$;
- к) $\lambda = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{2}, b = 2, K(x, s) = x - \frac{1}{4}s^2, f(x) = x^2 + 1$;
- л) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{9}s^2, f(x) = x^2 - x + 1$;
- м) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 1, b = 2, K(x, s) = x - \frac{1}{8}s^2, f(x) = 1 - x$;
- н) $\lambda = \frac{1}{8}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{13}s^3, f(x) = 1 + x$;
- о) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{5}s^2, f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$;
- п) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 1,5, K(x, s) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}s^2, f(x) = x^2 - 3x + 5$.

2. Методом последовательных приближений найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода из предыдущего задания, положив $n = 4$. Проверить выполнение условий о сходимости этого метода. Найти значения приближенного решения на концах отрезка и сравнить их с точными значениями решения в этих точках, полученными методом замены ядра на вырожденное в предыдущем задании.

3. Методом квадратур найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x),$$

используя квадратурные формулы трапеций и Симпсона с $h = \frac{b-a}{4}$.

Составить таблицу приближенных значений решения в узлах интегрирования по указанным правилам при следующих входных данных:

а) $\lambda = \frac{1}{2}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \sin x + \cos s, f(x) = \frac{x+1}{x^2+1};$

б) $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = \frac{\pi}{2}, K(x, s) = \sin x - \cos s, f(x) = e^x;$

в) $\lambda = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = e^x + e^s, f(x) = x+1;$

г) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^{\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}s}, f(x) = e^x + 1;$

д) $\lambda = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = \ln x - e^{\frac{1}{2}s}, f(x) = e^x + 1;$

е) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 0, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = x^2 - s^2, f(x) = \ln(x+1);$

ж) $\lambda = \frac{1}{2}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \sin x + s^2, f(x) = e^x + 2x;$

з) $\lambda = \frac{1}{2}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \ln x + \frac{1}{2}s^2, f(x) = \ln x + x;$

и) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 2, K(x, s) = \frac{1}{x^2+1} + s, f(x) = e^x - 2x + 1;$

к) $\lambda = \frac{1}{3}, a = 1, b = 2, K(x, s) = \frac{1}{x} - \frac{1}{s}, f(x) = e^x + e^{-x};$

л) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 2, b = 3, K(x, s) = \frac{1}{x} + \frac{1}{s}, f(x) = e^x - e^{-x};$

м) $\lambda = \frac{1}{4}, a = 2, b = 3, K(x, s) = e^{-x} + e^{-s}, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - 1;$

н) $\lambda = \frac{2}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = \ln(x+1) + \frac{1}{s+1}, f(x) = x+1;$

о) $\lambda = \frac{2}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^{xs}, f(x) = \ln(x^2+1) + x+1;$

п) $\lambda = \frac{2}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^{x+s-1}, f(x) = \frac{1}{x^2+1} - x+1.$

Тема 12. Методы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода

1.11. Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

Решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad a \leq x, s \leq b \quad (12.1)$$

будем искать в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x), \quad (12.2)$$

где $\varphi_k(x)$ – система функций, подлежащая определению. Для их определения подставим (12.2) в (12.1). Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) ds + f(x).$$

В этом соотношении приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях λ . Получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= \int_a^x K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \varphi_2(x) &= \int_a^x K(x, s) \varphi_1(s) ds, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (12.3)$$

Система соотношений (12.3) является системой рекуррентного определения $\varphi_k(x)$. Приближенное значение решения ищется в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \varphi_k(x). \quad (12.4)$$

Рассмотрим вопрос о сходимости этого процесса: будет ли $u_n(x) \rightarrow u(x)$ при $n \rightarrow \infty$, или, что то же самое, будет ли $u(x) - u_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Введем функцию погрешности $\varepsilon_n(x) = u(x) - u_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \phi_k(x)$. Тогда

$$\|\varepsilon_n(x)\|_c = \max_{a \leq x \leq b} \|\varepsilon_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda^k| \|\phi_k(x)\|_c.$$

Рассмотрим вопрос о поведении $\|\varepsilon_n(x)\|_c$ при условии, что

$\|K(x, s)\|_c \leq K$, $\|f(x)\|_c \leq F$. Из (12.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \|\phi_0(x)\| &= \|f(x)\| \leq F, \\ \|\phi_1(x)\| &\leq \left\| \int_a^x K(x, s) \phi_0(s) ds \right\| \leq \int_a^x \|K(x, s)\| \|\phi_0(s)\| ds \leq \\ &\leq KF(x-a) \leq KF(b-a), \\ \|\phi_2(x)\| &\leq \left\| \int_a^x K(x, s) \phi_1(s) ds \right\| \leq \int_a^x \|K(x, s)\| \|\phi_1(s)\| ds \leq \\ &\leq K \int_a^x KF(s-a) ds \leq K^2 F \frac{(x-a)^2}{2!} \leq K^2 F \frac{(b-a)^2}{2!}, \\ &\dots\dots\dots \\ \|\phi_n(x)\| &\leq K^n F \frac{(b-a)^n}{n!}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n(x)\|_c &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \|\phi_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \frac{FK^k(b-a)^k}{k!} = \\ &= \frac{|\lambda|^{n+1} K^{n+1} (b-a)^{n+1} F}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{K^k (b-a)^k (n+1)!}{(n+k)!} < \\ &< \frac{\lambda^{n+1} K^{n+1} F}{n!(n+1 - |\lambda| K(b-a))}, \end{aligned}$$

если $|\lambda| K(b-a) < n+1$.

Пример 1. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x xs u(s) ds = 1 + x, \quad 0 \leq x, s \leq 1,$$

полагая $n = 4$, и оценить погрешность.

Решение. Решение будем искать в виде $u_4(x) = \sum_{k=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^k \varphi_k(x)$, где

$$\varphi_0(x) = 1 + x,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x xs(1+s) ds = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x xs \left(\frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{3} \right) ds = \frac{x^6}{10} + \frac{x^7}{18},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x xs \left(\frac{s^4}{8} + \frac{s^5}{15} \right) ds = \frac{x^9}{80} + \frac{x^{10}}{162},$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x xs \left(\frac{s^7}{48} + \frac{s^8}{105} \right) ds = \frac{x^{12}}{880} + \frac{x^{13}}{1944}.$$

Тогда

$$u_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{x^6}{10} + \frac{x^7}{18} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{x^9}{80} + \frac{x^{10}}{162} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{x^{12}}{880} + \frac{x^{13}}{1944} \right).$$

Для оценки погрешности приближенного решения воспользуемся тем, что

$$\|K(x, s)\|_c = \|xs\|_c = 1, \quad \|f(x)\|_c = \|1 + x\|_c = 2, \quad b - a = 1.$$

$$\text{Получим } \|\varepsilon_n(x)\| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1^5 \cdot 2}{4! \left(5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right)} = \frac{1}{2^4 \cdot 4! \cdot \frac{9}{2}} = \frac{1}{2^4 \cdot 4! \cdot 9} < 0,0006.$$

12.2. Метод квадратур решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

Будем рассматривать интегральное уравнение Вольтерра второго рода в виде (12.1). Пусть $x \in [a, b]$ и на $[a, b]$ взята сетка равноотстоящих точек $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Положим в (12.1) $x = x_i$ и рассмотрим систему равенств

$$\begin{aligned} u(x_0) &= f(x_0), \\ u(x_i) - \lambda \int_a^{x_i} K(x_i, s) u(s) ds &= f(x_i), i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Пусть для вычисления интегрального слагаемого в (12.5) взята квадратурная формула с узлами в точках x_0, x_1, \dots, x_i , т. е.

$$\lambda \int_a^{x_i} K(x_i, s) u(s) ds = \lambda \sum_{k=0}^i K(x_i, x_k) u(x_k) A_{ik} + \lambda r_i,$$

здесь r_i – остаток квадратурной формулы. Подставим вместо интегралов в (12.5) их вид через эту формулу. Получим

$$\begin{aligned} u(x_0) &= f(x_0), \\ u(x_i) - \lambda \sum_{k=0}^i A_{ik} K(x_i, x_k) u(x_k) + \lambda r_i &= f(x_i), i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Отбрасывая остатки λr_i , получим уравнения для приближенных значений $u(x_i)$, которые мы обозначим через y_i , следующего вида:

$$y_i - \lambda \sum_{k=0}^i A_{ik} K_{ik} y_k = f_i, y_0 = f_0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.7)$$

Из последних соотношений при ограничениях на A_{ik} таких, что $1 - \lambda K_{ik} A_{ik} \neq 0$, будем иметь

$$y_i = \frac{1}{1 - \lambda A_{ik} K_{ik}} \left(\lambda \sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} K_{ik} y_k + f_i \right), i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.8)$$

Из этих соотношений рекуррентно получим приближенные значения решения уравнения (12.1) в узлах сетки. Более того, если для всех i выполняется неравенство $|\lambda K_{ik} A_{ik}| \leq q < 1$, то этот квадратурный процесс сходится.

Следует обратить внимание на необходимость составления начала расчетной таблицы при применении правила (12.8). Коэффициенты A_{ik} обычно выбираются так, чтобы локальная переменная r_i правила имела во всех узлах один и тот же порядок малости относительно h , т. е. чтобы погрешность r_i при всех i имела представление вида $r_i = h^n c_i$. Предположим теперь, что нам необходимо вычислить y_1 . Для этого рассмотрим квадратурную формулу при $i = 1$:

$$\int_a^{a+h} K(x_1, s) u(s) ds = h(A_{10}K_{10} u(a) + A_{11}K_{11} u(a+h)) + r_1,$$

$x_0 = a$, $x_1 = a + h$. Она содержит два числовых параметра A_{10} и A_{11} , которые мы можем выбрать так, чтобы формула имела более высокую степень точности. Так как свободных параметров только два, то мы можем сделать формулу точной для многочленов первой степени. Тогда формула станет известным правилом трапеций, для которого $A_{10} = A_{11} = \frac{1}{2}$:

$$\int_a^{a+h} K(x_1, s) u(s) ds = \frac{h}{2}(K_{10} u(a) + K_{11} u(a+h)) + r_1, r_1 = -\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2(K \varphi)}{\partial x^2} \Big|_{s=\xi}.$$

Отсюда видно, что r_1 имеет относительно h третий порядок малости. Если окажется, что принятый в вычислениях порядок n малости больше трех, то эту формулу нельзя применить к нахождению y_1 . Тогда y_1 должно быть найдено с необходимой точностью предварительно до применения вычислительного правила (12.8). Аналогично, чтобы воспользоваться формулой (12.8) для нахождения y_2 , будем иметь

$$\int_a^{a+2h} K(x_2, s) u(s) ds = h(A_{20}K_{20} u(a) + A_{21}K_{21} u(a+h) + A_{22}K_{22} u(a+2h)) + r_2.$$

Наивысшая алгебраическая степень точности, которую можно достичь при помощи выбора коэффициентов A_{20} , A_{21} , A_{22} равна 3 и достигается она в правиле Симпсона, для которого $A_{20} = A_{22} = \frac{1}{3}$, $A_{21} = \frac{4}{3}$:

$$\int_a^{a+2h} K(x_2, s) u(s) ds = \frac{h}{3}(K_{20} u(a) + 4K_{21} u(a+h) + K_{22} u(a+2h)) + r_2,$$

где $r_2 = -\frac{1}{90} h^5 \left(\frac{\partial^4(K \varphi)}{\partial x^4} \right)_{s=\xi}$, $a \leq \xi \leq a+2h$. Остаток r_2 имеет пятый порядок

малости относительно h , и если окажется, что $n > 5$, то правило (12.8) нецелесообразно применять для вычисления y_2 , а это значение, также как и y_1 , необходимо найти заранее по более точным правилам и т. д. Значение y_1 , входящее в начало таблицы, можно находить, например, решая интегральное уравнение в окрестности точки a при помощи степенного ряда, если функции $K(x, s)$ и $f(x)$ являются аналитическими

функциями, или применить для вычисления этих значений формулу трапеций с измененным шагом.

Пример 2. Методом квадратур найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x xs u(s) ds = 1 + x, \quad x \in [0; 1],$$

используя правило трапеций с $h = 0,25$.

Решение. Сетка x_i в нашем случае будет состоять из пяти узлов: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$, $x_4 = 1$. Учитывая это, а также вид правила трапеций для каждого x_i , $i = \overline{1,4}$, значения y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , y_4 будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$y(x_0) = 1 + x_0,$$

$$y(x_1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (x_1 x_0 y(x_0) + x_1 x_1 y(x_1)) = 1 + x_1,$$

$$y(x_2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (x_2 x_0 y(x_0) + 2x_2 x_1 y(x_1) + x_2 x_2 y(x_2)) = 1 + x_2,$$

$$y(x_3) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (x_3 x_0 y(x_0) + 2x_3 x_1 y(x_1) + 2x_3 x_2 y(x_2) + x_3 x_3 y(x_3)) = 1 + x_3,$$

$$y(x_4) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} (x_4 x_0 y(x_0) + 2x_4 x_1 y(x_1) + 2x_4 x_2 y(x_2) + 2x_4 x_3 y(x_3) + x_4 x_4 y(x_4)) = 1 + x_4.$$

Подставляя сюда $h = 0,25$ и конкретные значения x_i , легко определить y_i :

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 1,25490, \quad y_2 = 1,54372, \quad y_3 = 1,91924, \quad y_4 = 2,470.$$

Для сравнения приведем значения приближенного решения в этих точках, полученных по методу последовательных приближений:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 1,26823, \quad y_2 = 1,5833, \quad y_3 = 1,96094, \quad y_4 = 2,41667.$$

Задачи и упражнения

1. Используя метод последовательных приближений и полагая $n = 4$, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра

второго рода $u(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) u(s) ds = f(x)$ и оценить его погрешность

при следующих входных данных:

$$a) \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad K(x, s) = e^x + e^s, \quad f(x) = e^{\frac{1}{2}x};$$

$$\text{б)} \quad \lambda = \frac{1}{4}, a = -1, b = 1, K(x, s) = e^{2x} + e^s, f(x) = e^x;$$

$$\text{в)} \quad \lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 2, K(x, s) = e^x + e^{2s}, f(x) = e^x;$$

$$\text{г)} \quad \lambda = \frac{1}{2}, a = 1, b = 2, K(x, s) = x + s, f(x) = 2x;$$

$$\text{д)} \quad \lambda = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, K(x, s) = x^2 + s, f(x) = x^2;$$

$$\text{е)} \quad \lambda = \frac{1}{4}, a = 0, b = 1, K(x, s) = x^2 + s^2, f(x) = 3x^2;$$

$$\text{ж)} \quad \lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, s) = xs + 1, f(x) = \frac{1}{2}x^2;$$

$$\text{з)} \quad \lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = x^2s^2 + 2x, f(x) = \frac{1}{3}x^3;$$

$$\text{и)} \quad \lambda = \frac{1}{4}, a = 1, b = 2, K(x, s) = x - s, f(x) = 3x;$$

$$\text{к)} \quad \lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^x - e^s, f(x) = 2e^x;$$

$$\text{л)} \quad \lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^{2x} - e^{2s}, f(x) = 3e^x;$$

$$\text{м)} \quad \lambda = \frac{1}{4}, a = 0, b = 1, K(x, s) = e^{x+s}, f(x) = 1 + e^x;$$

$$\text{н)} \quad \lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, s) = \sin x + \cos s, f(x) = 2 \sin x;$$

$$\text{о)} \quad \lambda = \frac{1}{3}, a = 0, b = 1, K(x, s) = \cos x + \sin s, f(x) = 2 \cos x;$$

$$\text{п)} \quad \lambda = \frac{1}{4}, a = 0, b = 1, K(x, s) = \sin x \cos s, f(x) = 1 + \sin x.$$

2. Методом квадратур найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода из предыдущей задачи, используя правило трапеций с $h = 0,25$. Полученные результаты сравнить со значениями приближенного решения из задачи 1 на указанной сетке узлов.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Определить шаг h квадратурной формулы Симпсона для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^3\left(\frac{1}{3}x\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ и записать вид этой формулы.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^1 x f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_0^1 x^3 \ln(1+x^2) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 10$.

4. Используя метод замены ядра на вырожденное, определить решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (xs + x^3 + s + 1) u(s) ds = 1 + x^2.$$

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x x^3 u(s) ds = 1 + x^2,$$

полагая $n = 3$. Оценить погрешность.

Вариант 2

1. Определить шаг h квадратурной формулы Симпсона для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ и записать вид этой формулы.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 10$.

4. Используя метод замены ядра на вырожденное, определить решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 s + x^4 + s + 1) u(s) ds = 1 + x^3.$$

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x e^{xs} u(s) ds = 1 + e^x,$$

полагая $n = 3$. Оценить погрешность.

Вариант 3

1. Определить шаг h квадратурной формулы Симпсона для вычисления $\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{2} x^2\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ и записать вид этой формулы.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_0^1 x^4 \ln(1 + x^3) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 10$.

4. Используя метод замены ядра на вырожденное, определить решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_1^2 (xs + 1) u(s) ds = 1 + x^2.$$

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x e^{x+s} u(s) ds = 1 + e^x,$$

полагая $n = 3$. Оценить погрешность.

Вариант 4

1. Определить шаг h квадратурной формулы Симпсона для вычисления $\int_1^2 e^{\frac{x^2}{2}} x^2 dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ и записать вид этой формулы.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^4 A_k f(x_k).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_1^3 x \ln(1+x^3) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 8$.

4. Используя метод замены ядра на вырожденное, определить решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \int_2^3 (xs + s^2 + x) u(s) ds = 1 + x^2.$$

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x e^{x-s} u(s) ds = e^x - 1,$$

полагая $n = 3$. Оценить погрешность.

Вариант 5

1. Определить шаг h квадратурной формулы Симпсона для вычисления $\int_1^2 e^{\frac{x}{2}} (x^2 - x + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ и записать вид этой формулы.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^4 A_k f(x_k).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_1^2 (x^2 + 1) \ln(1+x) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 8$.

4. Используя метод замены ядра на вырожденное, определить решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \int_2^3 (x^2 - s^2 + 1)u(s) ds = x^2 + 1.$$

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{4} \int_0^x e^{x-s} u(s) ds = e^x - 1,$$

полагая $n = 3$. Оценить погрешность.

Вариант 6

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для

вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^3\left(\frac{1}{3}x\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с $n = 10$ и записать вид этой формулы.

4. Используя метод последовательных приближений, найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+s) u(s) ds = 1+x,$$

полагая $n = 3$.

5. Записать систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (xs + x^2 + s^2) u(s) ds = 1+x, \quad x, s \in [0; 1],$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,2$.

Вариант 7

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для вычисления $\int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(x+1) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с $n = 10$ и записать вид этой формулы.

4. Используя метод последовательных приближений, найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 + s^2) u(s) ds = x^3,$$

полагая $n = 3$.

5. Записать систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{4} \int_0^x (1+x+s) u(s) ds = 1+x, \quad x, s \in [0; 1],$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,2$.

Вариант 8

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для вычисления $\int_1^3 x^2 \sin(\sqrt{x}+1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+\sqrt{x}} dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_{1,5}^{2,5} x \ln(1+2x) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с $n = 10$ и записать вид этой формулы.

4. Используя метод последовательных приближений, найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{s} u(s) ds = x^3,$$

полагая $n = 3$.

5. Записать систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x (x - s + xs) u(s) ds = 1 + x, \quad x, s \in [0; 1],$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,2$.

Вариант 9

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для вычисления $\int_1^3 x \sin(\sqrt{x} + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + \sqrt{x}} dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_{1,5}^{2,5} x \ln(1 + x) dx$ по квадратурной

формуле Симпсона с $n = 10$ и записать вид этой формулы.

4. Используя метод последовательных приближений, найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2}{s} u(s) ds = x^3,$$

полагая $n = 3$.

5. Записать систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x (x^2 - s^2 + xs) u(s) ds = 1 + x, \quad x, s \in [0; 1],$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,2$.

Вариант 10

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для вычисления $\int_2^4 (\sin x^2 + \cos x^2) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_2^4 \cos x^2 dx \approx A_1 \cos x_1^2 + A_2 \cos x_2^2.$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_2^3 x^2 \ln(1+x) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с $n = 8$ и записать вид этой формулы.

4. Используя метод последовательных приближений, найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2}{s^2} u(s) ds = x^3,$$

полагая $n = 3$.

5. Записать систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (2^x + 2^s) u(s) ds = 2^{x+1}, \quad x, s \in [0; 1],$$

используя квадратурное правило трапеций с $h = 0,2$.

Вариант 11

1. Определить шаг h квадратурной формулы трапеций для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x - \cos x^2) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_0^3 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_1^4 \ln(1+x^2) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 20$.

4. Записать систему линейных алгебраических уравнений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^2 (2^x + 2^s) u(s) ds = 2^x + x,$$

методом механических квадратур с использованием правила Симпсона при $h = 0,5$.

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x e^{xs} u(s) ds = e^{2x},$$

полагая $n = 3$.

Вариант 12

1. Определить шаг h квадратурной формулы средних прямоугольников для вычисления $\int_0^2 x \ln(1+x^2) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_1^3 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

3. Записать систему линейных алгебраических уравнений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (e^x + e^s) u(s) ds = e^{2x},$$

методом квадратур с использованием правила Симпсона при $h = 0,25$.

4. Найти погрешность вычисления $\int_1^3 \ln(1+x^3) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 20$.

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (e^x + e^s) u(s) ds = e^{2x},$$

полагая $n = 3$.

Вариант 13

1. Определить шаг h квадратурной формулы «трех восьмых» для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ вида

$$\int_1^3 f(x) dx \approx c (f(x_1) + f(x_2)).$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_1^3 \ln(1 + x^4) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 20$.

4. Записать систему линейных алгебраических уравнений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{4} \int_0^1 (e^x + e^s) u(s) ds = e^{3x},$$

методом квадратур с использованием правила Симпсона при $h = 0,25$.

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{4} \int_0^x (x^2 + s^2) u(s) ds = 2x^2,$$

полагая $n = 3$.

Вариант 14

1. Определить шаг h квадратурной формулы «трех восьмых» для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2 + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ для вычисления

$$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{-x^2 + 2x}} dx$$

по двум узлам.

3. Найти погрешность вычисления $\int_2^4 \ln(1+x^2) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 20$.

4. Записать систему линейных алгебраических уравнений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \int_0^1 (x^2 + s^3) u(s) ds = x^2 + 1,$$

методом Симпсона при $h = 0,25$.

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \int_0^x xs u(s) ds = 1 + x^2,$$

полагая $n = 3$.

Вариант 15

1. Определить шаг h квадратурной формулы средних прямоугольников для вычисления $\int_0^\pi \sin(x^2 + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Построить квадратурную формулу НАСТ с двумя узлами для вычисления

$$\int_1^3 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} dx.$$

3. Найти погрешность вычисления $\int_1^3 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ по квадратурной формуле трапеций с $n = 20$.

4. Записать систему линейных алгебраических уравнений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sin s) u(s) ds = \sin 2x,$$

методом Симпсона, полагая $h = \frac{\pi}{8}$.

5. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \int_0^x x^2 s u(s) ds = 1 + x^3,$$

полагая $n = 3$.

Индивидуальное задание № 2

Вариант 1

1. Вычислить $\int_1^4 \sqrt{2x^2 + 3} dx$ по квадратурной формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_1^4 \sqrt{2x^2 + 3} dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. Используя квадратурные формулы НАСТ, вычислить $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x^2 dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \frac{(xs)^2}{5} u(s) ds = 1 + x + e^x,$$

полагая $h = \frac{\pi}{10}$.

Вариант 2

1. Вычислить $\int_0^{1,2} \ln(1 + x^2) dx$ по квадратурной формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^{1,2} \ln(1+x^2) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. Используя квадратурные формулы НАСТ, вычислить $\int_0^{\infty} \frac{2e^{-x}}{3+x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\ln(2+xs)} u(s) ds = 1 + e^x,$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 3

1. Используя квадратурную формулу трапеций вычислить $\int_2^6 \lg(x^2 + 3,5) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_2^6 \lg(x^2 + 3,5) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x^2 dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \int_0^1 e^{-\frac{x+s}{5}} u(s) ds = \cos \pi x,$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 4

1. Используя квадратурную формулу трапеций, вычислить $\int_0^1 \cos\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^1 \cos\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{2+x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{5 + \sin^2(x+s)} u(s) ds = \cos x,$$

полагая $h = \frac{\pi}{10}$.

Вариант 5

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ по квадратурной формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{1+x}{2+x} e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу Симпсона, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin(xs)}{2+s} u(s) ds = e^{-x},$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 6

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^2 e^{x^2-1} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^2 e^{x^2-1} dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{6+x}{2+x} e^{-x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу Симпсона, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) + \frac{1}{6} \int_0^1 \arcsin \frac{xs}{5} u(s) ds = 1 - x,$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 7

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{3x+1}{x+5} e^{-x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу Симпсона, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \arccos \frac{x}{1+s} u(s) ds = \frac{1}{1+x},$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 8

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу Симпсона, найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u(x) + \frac{1}{3} \int_0^1 \cos(x(1+s)^2) u(s) ds = \frac{\sin x}{1+x^2},$$

полагая $h = 0,1$.

Вариант 9

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_1^4 \ln(x^2 + x + 4) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, используя правило Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{2e^{-x}}{3+x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) + \frac{1}{3} \int_0^x \cos(x(1+s^2)) u(s) ds = \frac{\sin x}{1+x^2},$$

полагая $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$, $h = 0,1$.

Вариант 10

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^2 e^{x^2-1} dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{2+x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{1+s} u(s) ds = \frac{1}{1+x},$$

полагая $x \in [0; 1]$, $h = 0,1$.

Вариант 11

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^1 \sin(x^2 + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурную формулу трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) + \frac{1}{6} \int_0^x \arcsin \frac{xs}{5} u(s) ds = 1 - x,$$

полагая $x \in [0; 1]$ и $h = 0,05$.

Вариант 12

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^1 \ln(\sin x^2 + 1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^1 \ln(\sin x^2 + 1) dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1+x} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурное правило трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(xs)}{2+s} u(s) ds = e^{-x},$$

полагая $x \in [0; 1]$ и $h = 0,05$.

Вариант 13

1. Используя квадратурную формулу средних прямоугольников, вычислить $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$ по квадратурной формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^\infty \frac{(x^2+1)e^{-x}}{x+1} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурное правило трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{s + \sin^2(x+s)} u(s) ds = \cos x,$$

полагая $x \in [0; \pi]$ и $h = \frac{\pi}{20}$.

Вариант 14

1. Используя квадратурную формулу Симпсона, вычислить $\int_2^4 x \ln(x^2+1) dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_2^4 x \ln(x^2+1) dx$ по квадратурной формуле средних прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{2+x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурное правило трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \sin \frac{(xs)^2}{5} u(s) ds = 1 + x + e^x,$$

полагая $x \in [0; \pi]$ и $h = \frac{\pi}{20}$.

Вариант 15

1. Используя квадратурную формулу Симпсона, вычислить $\int_0^3 e^{x^2-2x=4} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, определяя шаг интегрирования по оценке остаточного члена.

2. Вычислить $\int_0^3 e^{x^2-2x=4} dx$ по квадратурной формуле средних прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, определяя шаг интегрирования по правилу Рунге.

3. С помощью квадратурной формулы НАСТ вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{3+2x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Используя квадратурное правило трапеций, найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(x) - \frac{1}{3} \int_0^x \frac{1}{\ln(2+sx)} u(s) ds = 1 + e^x,$$

полагая $x \in [0; 1]$ и $h = 0,05$.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Для выполнения $\int_a^b p(x)f(x) dx$ построить квадратурные формулы НАСТ при следующих входных данных:

а) $[a, b] = [0, 1]$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $n = 2$;

б) $[a, b] = [0, 1]$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $n = 3$;

в) $[a, b] = [0, 1]$, $p(x) = \sqrt{x}$, $n = 2$;

- г) $[a, b] = [0, 1], p(x) = \sqrt{x}, n = 3;$
 д) $[a, b] = [-1, 1], p(x) = \sqrt{1 - x^2}, n = 2;$
 е) $[a, b] = [-1, 1], p(x) = \sqrt{1 - x^2}, n = 3;$
 ж) $[a, b] = [-1, 1], p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1, n = 2;$
 з) $[a, b] = [-1, 1], p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1, n = 3;$
 и) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = e^{-x}, n = 2;$
 к) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = e^{-x}, n = 3;$
 л) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = \sqrt{x}e^{-x}, n = 2;$
 м) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = \sqrt{x}e^{-x}, n = 3;$
 н) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = (\sqrt{x}e^x)^{-1}, n = 2;$
 о) $[a, b] = [0, \infty), p(x) = (\sqrt{x}e^x)^{-1}, n = 3;$
 п) $[a, b] = (-\infty, +\infty), p(x) = e^{-x^2}, n = 2.$

2. Определить с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ длину дуги параболы $y = \alpha x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $\alpha = 1(0,1)2,5$.

3. Определить с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ площадь фигуры, заключенной между двумя конгруэнтными параболлами $y^2 = \alpha x$ и $x^2 = \alpha y$, $\alpha = 1(0,1)2,5$.

4. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т. е. $x_{n+1-i} = -x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле для

вычисления интеграла
$$I(f) = \int_{-a}^a p(x)f(x)dx$$
 коэффициенты,

соответствующие симметричным узлам, равны, т. е. $c_{n+1-i} = c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

5. Для вычисления $\int_0^1 f(x) dx$ применяется обобщенная квадратурная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N , обеспечивающее точность $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ на двух классах функций:

$$\text{а) } \|f''(x)\| \leq 1; \quad \text{б) } \int_0^1 |f'(x)| dx \leq 1.$$

6. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ по формуле Ньютона – Котеса с шагом $h = 0,25$

и оценить погрешность.

7. Доказать справедливость следующих представлений квадратурных формул:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) = \\ = -\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 \cdot \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{90} \left(7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \right. \\ \left. + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b) \right) = -\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 \cdot \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi), \quad a < \xi < b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{8} \left(f(a) + f(b) + 3f\left(\frac{b-a}{12}\right) (f'(a) - f'(b)) \right) = \\ = \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b. \end{aligned}$$

8. Пусть $f \in C^{(1)}[-1, 1]$ и $P_5(x)$ – алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_n) = f'(x_n)$, $k=1, 2, 3$, где $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \frac{1}{15} (7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)).$$

Проверить, что $\int_{-1}^1 P_5(x) dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

9. Для вычисления интегралов вида:

$$\text{а) } \int_{-2}^0 x^2 f(x) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x f(x) dx ;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x) dx ;$$

$$\text{г) } \int_0^2 (x + 2) f(x) dx ,$$

построить квадратурную формулу вида $A_1 f(0) + A_2 f(x_2)$, точную для многочленов максимально возможной степени.

10. Построить квадратурную формулу вида

$$\int_a^b e^{\alpha x} f(x) dx \approx A_1 f(a) + A_2 f(b),$$

точную для многочленов максимально возможной степени.

11. Построить квадратурную формулу по четырем равноотстоящим узлам

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4)$$

максимальной степени точности.

12. Методом ортогональности построить многочлены Лежандра со старшим коэффициентом 1, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) = 1$.

13. Пусть весовая функция $p(x)$ сетка относительно середины отрезка интегрирования – точка $\frac{a+b}{2}$. Доказать, что узлы квадратурной

формулы НАСТ для вычисления $I(f) = \int_{-a}^a p(x) f(x) dx$ расположены

симметрично, относительно $\frac{a+b}{2}$, а соответствующие симметричным узлам коэффициенты квадратурной формулы равны.

14. На $[a; b]$ найти приведенные ортогональные многочлены третьей степени при следующих весовых функциях:

$$\text{а) } [a; b] = (-\infty, \infty), p(x) = e^{-x^2} ;$$

$$\text{б) } [a; b] = (-1, 1), p(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} ;$$

в) $[a; b] = (-1, 1), p(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}};$

г) $[a; b] = (0, +\infty), p(x) = e^{-x}.$

15. Доказать, что полиномы $x^m, m = 0, 1, \dots$ не могут быть ортогональны на $[0, 1]$ ни с каким весом $p(x) > 0$.

16. Показать, что квадратурная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right)$$

точна для всех алгебраических многочленов пятой степени.

17. Показать, что квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3} \left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

точна для всех алгебраических многочленов пятой степени.

18. Построить обобщенную квадратурную формулу НАСТ с двумя узлами на каждом отрезке разбиения для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b e^{\alpha x} f(x) dx, \quad e^{\alpha x} \text{ — весовая функция. Оценить погрешность}$$

построенной формулы.

Глава 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 13. Приближенные методы решения задачи Коши

1.12. Постановка задачи. Метод Пикара

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть описаны задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, задачи эволюции и др. Кроме того, много важных задач для уравнений в частных производных сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конкретная задача практики может приводить или к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений. Известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение p -го порядка

$$u^{(p)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$$

при помощи замены $u^{(k)}(x) = u_k(x)$ сводится к системе p уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u'_k(x) = u_{k+1}(x), 0 \leq k \leq p-2, \\ u'_{p-1} = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}), u_0(x) \equiv u(x), \end{cases}$$

которая эквивалентна исходному уравнению. И наоборот, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно привести к некоторой эквивалентной системе уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), 1 \leq k \leq p, \quad (13.1)$$

записывая их кратко в векторной форме:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad (13.1')$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что система p -го порядка (13.1) имеет множество решений, которые в общем случае зависят от p параметров $c = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ и которые можно записать в форме $u = u(x, c)$. Для определения значений этих параметров (т. е. для выделения единственного или интересующего нас решения) надо наложить p дополнительных условий на функции $u_k(x)$.

Задача Коши, или задача с начальными условиями, имеет дополнительные условия вида

$$u_k(\xi) = \eta_k, 1 \leq k \leq p, \quad (13.2)$$

т. е. заданы значения неизвестных функций в одной и той же точке $x = \xi$. Эти условия можно рассматривать как задание координат начальной точки $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ интегральной кривой в $(p + 1)$ -мерном пространстве $(x, u_1, u_2, \dots, u_p)$. Решение при этом обычно требуется найти на некотором полуинтервале $\xi < x \leq X$, где точка $x = \xi$ называется начальной точкой.

Если правые части (13.1) непрерывны и ограничены в некоторой окрестности начальной точки $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_p)$, то задача Коши (13.1)–(13.2) имеет решения, но, вообще говоря, не единственные. Если правые части не только непрерывны, но и удовлетворяют условию Липшица по переменным u_k , то решение задачи Коши единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, т. е. задача корректно поставлена.

Методы решения задачи Коши можно условно разбить на точные, приближенные и численные. К точным относятся методы, позволяющие выразить решение дифференциального уравнения через элементарные функции либо представить его через квадратуры от элементарных функций. Эти методы излагаются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приближенными называют методы, в которых решение получается как предел $u(x)$ некоторой последовательности $y_n(x)$, причем $y_n(x)$ выражаются через элементарные функции или при помощи квадратур. Ограничиваясь конечным шагом n , получим приближенное выражение для $u(x)$.

Численные методы – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения $u(x)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента x_n . Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения системы (13.1). Они могут дать только какое-то частное решение, например решение задачи Коши (13.1)–(13.2).

В дальнейшем для простоты записи и изложения материала ограничимся случаем одного уравнения первого порядка. Алгоритмы для случая системы p уравнений (13.1') легко получаются из алгоритмов,

составленных для одного уравнения, формальной заменой функций $u(x)$ и $f(x, u)$.

Метод Пикара решения задачи Коши является обобщением метода последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтерра. Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \xi \leq x \leq X, u(\xi) = \eta. \quad (13.3)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение, заменим эту задачу эквивалентным ей интегральным уравнением Вольтера второго рода:

$$u(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (13.4)$$

Решая это интегральное уравнение методом последовательных приближений, получим итерационный метод Пикара:

$$y_n(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau, y_0(x) = \eta, \quad (13.5)$$

где $y_n(x)$ – приближенное решение, полученное на n -ой итерации. На каждой итерации интегрирование в правой части выполняется либо точно, либо с помощью численных методов. Если в некоторой ограниченной области $G(x, u)$ правая часть $f(x, u)$ непрерывна и удовлетворяет по переменной u условию Липшица $|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$, то приближенное решение равномерно сходится к точному во всей области $G(x, u)$. Доказательство этого факта повторяет доказательство сходимости метода последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтера второго рода.

Пример 1. Методом Пикара решить следующую задачу Коши:

$$u'(x) = x^2 + u^2, u(0) = 0.$$

Решение. Вид правой части этого уравнения позволяет интегралы в правой части (13.5) вычислить точно. Будем иметь

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \frac{1}{3} x^3,$$

$$y_2(x) = \frac{1}{3} x^3 \left(1 + \frac{1}{2!} x^4 \right),$$

$$y_3(x) = \frac{1}{3} x^3 \left(1 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{2}{693} x^8 + \frac{1}{19845} x^{12} \right), \dots$$

При $x \leq 1$ эти приближения быстро сходятся и позволяют вычислить решение с высокой точностью.

13.2. Метод рядов

Классическим методом решения дифференциальных уравнений является метод разложения решения в ряд Тейлора. Пусть требуется найти решение задачи (13.3) при условии, что функция правой части $f(x, u(x))$ является достаточно гладкой. Дифференцируя уравнение (13.3) по x , будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, u(x)) + f_u(x, u(x))f(x, u(x)), \\ u'''(x) &= \frac{\partial^2 f(x, u(x))}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f(x, u(x))}{\partial x \partial u} f(x, u(x)) + \frac{\partial^2 f(x, u(x))}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial u} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = f_{xx}(x, u(x)) + 2f_{xu}(x, u(x))f(x, u(x)) + f_{uu}(x, u(x))f(x, u(x)) + \\ &+ f_u(x, u(x))(f_x(x, u(x)) + f_u(x, u(x))f(x, u(x))), \dots \end{aligned}$$

Подставляя $x = \xi$, $u(\xi) = \eta$, последовательно получаем значения $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots$. Таким образом, можно записать приближенное равенство

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{u^{(i)}(\xi)}{i!} (x - \xi)^i, \quad (13.6)$$

которая дает алгоритм метода рядов решения задачи Коши.

Пример 2. Методом рядов найти решение задачи Коши, приведенной в примере 1.

Решение. Вычислим производные от решения исходной задачи. Получим:

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 + u^2, \\ u''(x) &= 2x + 2uu' = 2x + 2u(x^2 + u^2) = 2x + 2x^2u + 2u^3, \\ u'''(x) &= 2 + 4xu + 2x^2u' + 6u^2u' = 2 + 4xu + 2x^2(x^2 + u^2) + 6u^2(x^2 + u^2) = \\ &= 2 + 4xu + 2x^4 + 8x^2u^2 + 6u^4, \\ u^{IV}(x) &= 4u + 4xu' + 8x^3 + 16xu^2 + 16x^2uu' + 24u^3u' = \\ &= 4u + 4x(x^2 + u^2) + 8x^3 + 16xu^2 + 16x^2u(x^2 + u^2) + 24u^3(x^2 + u^2) = \\ &= 4u + 4x^3 + 4xu^2 + 8x^3 + 16xu^2 + 16x^4u + 16x^2u^3 + 24x^2u^3 + 24u^5 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4u + 12x^3 + 20xu^2 + 16x^4u + 16x^2u^3 + 24x^2u^3 + 24u^5, \\
u^{IV}(x) &= 4u' + 36x^2 + 20u^2 + 40xuu' + 64x^3u + 16u^4u' + 32xu^4 + 48x^2u^2u' + \\
&\quad + 48xu^3 + 72x^2u^2u' + 120u^4u' = 4x^2 + 4u^2 + 36x^2 + \dots, \\
u^{VI}(x) &= 80x + 8uu' + \dots = 80x + 8u(x^2 + u) + \dots, \\
u^{VII}(x) &= 80 + 8x^2u' + \dots.
\end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, которые при $x = 0$ обращаются в нуль. Приближенное решение вида (13.6) будет следующее:

$$u(x) \approx \frac{u'''(0)}{3!}x^3 + \frac{u^{(7)}(0)}{7!}x^7 = \frac{x^3}{3} + \frac{80x^7}{7!} = \frac{x^3}{3} + 0,019x^7.$$

Если $|x - \xi|$ больше радиуса сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u^{(i)}(\xi)}{i!}(x - \xi)^i$, то погрешность приближенной замены в (13.6) не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Иногда целесообразно поступать следующим образом. Разобьем отрезок $[\xi, X]$ на отрезки $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, N$, $x_0 = \xi$. Приближенное решение u_j в каждой точке разбиения получаем по следующему правилу. Пусть u_j уже найдено. Вычислим значения в точке x_j производных $u_j^{(i)}$ решения исходного дифференциального уравнения, проходящего через точку (x_j, u_j) . На отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ полагаем

$$u(x) \approx u_j^k(x) = \sum_{i=1}^n \frac{u_j^{(i)}(\xi)}{i!}(x - x_j)^i,$$

которое и берется за приближенное решение при $x = x_{j+1}$ в этой точке.

Задачи и упражнения

1. Методом Пикара найти приближенное решение $y_n(x)$ ($n = 4$) следующих задач Коши:

а) $u'(x) = \frac{1}{2}u^2 + x + 1, x \in [0; 1], u(0) = 1;$

б) $u'(x) = u^2 + x, x \in [0; 1], u(0) = 1;$

в) $u'(x) = \frac{1}{2}u^2 - x + 1, x \in [0; 1], u(0) = 1;$

- г) $u'(x) = \frac{1}{4}u^3 + x, x \in [0; 1], u(0) = 0;$
- д) $u'(x) = u^2 - x^2 - 1, x \in [0; 1], u(0) = 2;$
- е) $u'(x) = u - x^3, x \in [0; 1], u(0) = 0;$
- ж) $u'(x) = u + x^2 + 1, x \in [0; 1], u(0) = 0;$
- з) $u'(x) = \frac{1}{2}u^2 + 3x - 1, x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- и) $u'(x) = xu + x + 1, x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- к) $u'(x) = x^2u - x + 2, x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- л) $u'(x) = (x^2 + 1)u - x, x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- м) $u'(x) = u(x) - x + 1, x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- н) $u'(x) = (x - 1)(u + 1), x \in [0; 2], u(0) = 0;$
- о) $u'(x) = (x - 1)(u + 1), x \in [0; 1], u(0) = 1;$
- п) $u'(x) = u + x^3 + 1, x \in [0; 1], u(0) = 1.$

2. Методом рядов найти приближенное решение задач Коши, сформулированных в предыдущем номере, полагая $n = 4$. Результаты сравнить с методом Пикара.

Тема 14. Методы Эйлера

1.13. Явный метод Эйлера или метод ломаных

Это один из простейших численных методов. В практике вычислений он употребляется редко из-за невысокой точности. Но на его примере удобно изучить способы построения и исследования численных методов.

Рассмотрим задачу Коши

$$u'(x) = f(x, u(x)), u(x_0) = u_0, x_0 < x < X. \quad (14.1)$$

Выберем на отрезке $[x_0, X]$ некоторую сетку $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ значений x так, чтобы $x_0 < x_1 < \dots < x_N = X$, обозначив $x_{n+1} - x_n = h_n$. Разлагая решение $u(x)$ по формуле Тейлора на интервале сетки $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ и обозначая $u(x_n) = u_n$, получим

$$u_{n+1} = u_n + h_n u'_n + \frac{1}{2} h_n^2 u''_n + \dots \quad (14.2)$$

Стоящие в правой части производные можно найти, дифференцируя уравнение (14.1) требуемое число раз:

$$u' = f(x, u) = f, u'' = \frac{d}{dx} f(x, u) = f_x + f f_u \text{ и т. д.}$$

Однако использовать для расчетов формулу (14.2) с большим числом членов невыгодно. Во-первых, даже при сравнительно простой правой части выражения для производных могут оказаться громоздкими. Во-вторых, если правая часть известна лишь приближенно, то находить ее производные нежелательно. В простейшем случае, ограничиваясь только первым членом разложения, получим явный метод Эйлера или метод ломаных:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n), \quad (14.3)$$

где y_n – приближенное значение решения исходной задачи в точке $x = x_n$. Для численного расчета по явному методу Эйлера (14.3) достаточно задать начальное решение $y_0 = u_0$ и затем по формуле (14.3) последовательно определить величины y_1, y_2, \dots, y_N .

Пример 1. Используя явный метод Эйлера, найти решение задачи Коши

$$u'(x) = x^2 + u^2, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 0.$$

Решение. В таблице даны численные решения $y(x)$, полученные на равномерной сетке узлов с шагами $h = 1, h = 0,5, h = 0,25$, Приведено также точное решение $u(x)$, вычисленное методом Пикара (см. тему 13).

x_n	y_n			$u(x_n)$
	$h = 1,0$	$h = 0,5$	$h = 0,25$	
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
0,25	—	—	0,000	0,005
0,05	—	0,000	0,016	0,042
0,75	—	—	0,078	0,143
1,00	0,000	0,125	0,220	0,350

Из таблицы видно, что метод Эйлера для получения удовлетворительной точности требует более мелкого шага, чем использованный здесь.

Правило (14.3) можно построить и исходя из интегрирования (14.1) по элементарному отрезку $[x, x + h]$, который мы обозначим $[x_n, x_{n+1}]$. Действительно, интегрируя обе части (1) по указанному отрезку, получим

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt. \quad (14.4)$$

Для вычисления определенного интеграла в правой части (14.4) воспользуемся элементарным правилом левых прямоугольников. Получим

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) + r_2(f).$$

Сейчас отбросим в последнем соотношении $r_2(f)$, считая его достаточно малым, и, заменяя $u(x_n)$ на его приближенное решение y_n , приходим к (14.3) для случая равномерной сетки узлов.

14.2. Неявный метод Эйлера

Для вычисления интеграла в правой части (14.4) можно воспользоваться и правилом правых прямоугольников. Тогда вычислительный алгоритм примет вид

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad (14.5)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1, y_0 = u_0$, который называется неявным методом Эйлера. По точности правила (14.3) и (14.5) практически одинаковы. Однако различия между ними существенны. Сразу же необходимо отметить, что (14.3) позволяет рекуррентно определить приближенное решение во всех точках сетки. Правило же (14.5) носит неявный характер и представляет собой численное уравнение относительно y_{n+1} . Для его решения необходимо использовать итерационный процесс. Одним из таких процессов может быть метод простых итераций

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}^k), y_{n+1}^0 = y_n,$$

$k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots, N-1$, при этом можно надеяться, что при достаточно малых h и достаточно гладких f этот метод сходится. Условием его сходимости будет $h \left| \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} \right| < 1$ при всех n , при этом его скорость сходимости совпадает со скоростью сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{\partial f(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial y_{n+1}}$. С целью ускорения

сходимости можно использовать метод Ньютона, который требует дифференцирования правой части, что не всегда желательно, особенно (как уже отмечалось ранее) когда последняя задана приближенно. Для этого уравнение (14.5) в каждой точке равномерной сетки запишем в виде

$$F(y_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - h f(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0.$$

Тогда согласно методу Ньютона будем иметь

$$y_{n+1}^{k+1} = y_{n+1}^k - \frac{F(y_{n+1}^k)}{F'(y_{n+1}^k)}.$$

Так как $F'(y_{n+1}^k) = 1 - h f_y(x_{n+1}, y_{n+1}^k)$, то

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{k+1} &= y_{n+1}^k - \frac{y_{n+1}^k - y_n - h f(x_{n+1}, y_{n+1}^k)}{1 - h f_y(x_{n+1}, y_{n+1}^k)} = \\ &= \frac{y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}^k) - h y_{n+1}^k f_y(x_{n+1}, y_{n+1}^k)}{1 - h f_y(x_{n+1}, y_{n+1}^k)}, \end{aligned}$$

при этом y_{n+1}^0 можно определить по явному методу Эйлера $y_{n+1}^0 = y_n + h f(x_n, y_n)$. Неявный метод Эйлера имеет значительные преимущества перед явным методом Эйлера, хотя его реализация и сложнее.

Пример неявной схемы получим, если интеграл по элементарному отрезку сетки (14.4) приближенно вычислить по формуле трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})). \quad (14.6)$$

Решая это численное уравнение, можно определить y_{n+1} , которое и будет приближенным значением искомого решения $u(x_{n+1})$.

Но у этой схемы есть серьезные недостатки. Во-первых, неизвестно, имеет ли уравнение (14.6) вещественный корень, т. е. разрешима ли задача. Можно привести пример, когда при большом шаге корня нет. Пусть $f(x, u) = u^2$ и $u(0) = 1$. Тогда на первом шаге $y_1 = 1 + \frac{1}{2} h(1 + y_1^2)$ и при $h > (1 + \sqrt{2})^{-1}$ вещественного корня нет. Во-вторых, даже если корень есть, то возникает проблема его нахождения. Использование метода Ньютона с необходимостью дифференцирования правой части нежелательно. Остается метод последовательных приближений

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{1}{2} h (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^k)), \quad (14.7)$$

однако он сходится к корню, только если $h|f_u| < 2$, т. е. при достаточно малом шаге. Если в ходе расчета f_u возрастает, то итерации (14.7) могут перестать сходиться. От последней трудности можно избавиться, заодно уменьшив объем вычислений. Для этого ограничим заранее число итераций и рассмотрим (14.7) как самостоятельную явную схему. Очевидно, вопрос о существовании корня при этом не возникает, так как y_{n+1} всегда определяется, даже если алгебраическое уравнение (14.6) вещественного корня не имеет. Роль числа итераций хорошо видна на примере уравнения $u' = f(u)$. Естественное нулевое приближение есть $y_{n+1}^0 = y_n$, так что первая и вторая итерации определяются из соотношений

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= y_n + h f(y_n), \\ y_{n+1}^{(2)} &= y_n + \frac{1}{2} h f((y_n) + f(y_n + h f(y_n))), \end{aligned}$$

первое из которых есть явный метод Эйлера, а второе представляет собой правило второго порядка точности, которое мы будем изучать в следующих темах. Дальнейшие итерации уже не увеличивают порядка точности, так как он не может быть выше, чем в исходной схеме (14.6).

Для вычисления интеграла в правой части (14.4) можно воспользоваться и правилом средних прямоугольников, что приводит к алгоритму

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right), n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (14.8)$$

Но точка $x_n + \frac{h}{2}$ в расчетах не участвует и у нас нет значения $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$. Поэтому можно воспользоваться приближенной заменой $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{2}(y(x_n) + y(x_{n+1}))$. Правило (14.8) при этом также будет неявным и для нахождения y_{n+1} из него необходимо использовать итерационный процесс.

14.3. Устойчивость методов Эйлера

Одним из различий между явным и неявным методом Эйлера является их устойчивость, при этом явный метод Эйлера обладает свойством условной устойчивости (т. е. он устойчив при выполнении определенных условий). Эти свойства продемонстрируем на примере решения модельной задачи Коши вида

$$u'(x) = -\alpha u(x), \alpha > 0, u(x_0) = u_0, x_0 \leq x \leq X. \quad (14.9)$$

Легко видеть, что (14.9) имеет решение $u(x) = cu^{-\alpha x}$ и при выполнении начального условия получим $c = u_0$. Значит, $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$. Кроме того, необходимо отметить, что если $x \rightarrow \infty$, то $u(x) \rightarrow 0$. При построении вычислительного правила надо заботиться о том, чтобы, по крайней мере, этим свойством обладало и приближенное решение $y_n = y(x_n)$.

Для решения (14.9) воспользуемся явным методом Эйлера, который для этой простейшей задачи примет вид

$$y_{n+1} = y_n - h\alpha y_n, y_0 = u_0, \quad (14.10)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$. Раскрывая последнее соотношение рекуррентно по n , получим $y_{n+1} = (1 - h\alpha)^{n+1} y_0$, из которого следует, что если $|1 - h\alpha| > 1$, то $|y_{n+1}| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для выполнения условия $|y_{n+1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ необходимо потребовать, чтобы $|1 - h\alpha| < 1$. Это условие и есть необходимое условие устойчивости явного метода Эйлера решения модельной задачи (14.9).

Для решения задачи (14.9) воспользуемся теперь неявным методом Эйлера, который для этого конкретного случая примет вид

$$y_{n+1} = y_n - h\alpha y_{n+1}, y_0 = u_0.$$

После приведения подобных приходим к алгоритму $y_{n+1} = (1 + h\alpha)^{-1} y_n$. Раскрывая последнее соотношение рекуррентно, получим $y_{n+1} = (1 + h\alpha)^{-(n+1)} y_0$. Так как $\alpha > 0$, то $0 < (1 + h\alpha)^{-1} < 1$ и $y_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любых h . Другими словами, неявный метод Эйлера решения модельной задачи устойчив при любом шаге h . Это одно из самых важных преимуществ неявного метода Эйлера по сравнению с явным.

Пример 2. Исследовать устойчивость неявного метода (14.6), основанного на квадратурном правиле трапеций.

Решение. Использование правила (14.6) решения модельной задачи (14.9) приводит нас к соотношению

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\alpha h}{2}(y_n + y_{n+1}), y_0 = u_0, \alpha > 0.$$

После приведения подобных для y_{n+1} получим

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{\alpha h}{2}}{1 + \frac{\alpha h}{2}} y_n, y_0 = u_0.$$

Раскрывая последнее равенство рекуррентно, будем иметь

$$y_{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\alpha h}{2}}{1 + \frac{\alpha h}{2}} \right)^{n+1} u_0.$$

Так как при $\alpha > 0$ выполняется $\left| \frac{1 - \frac{\alpha h}{2}}{1 + \frac{\alpha h}{2}} \right| < 1$, то $y_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

неявный метод (14.6) является абсолютно устойчивым (т. е. устойчив без каких-то ограничений на шаг h).

Замечание. Мы здесь рассматривали задачу Коши на конечном промежутке $[x_0, X]$. Условие же $n \rightarrow \infty$ предполагает $X \rightarrow \infty$ при конкретных h . С другой стороны, условие $n \rightarrow \infty$ на ограниченном отрезке изменения x предполагает $h \rightarrow 0$. В этом случае условие устойчивости можно интерпретировать как влияние ошибки округлений, возникшей на каком-то этапе вычислений, на окончательный результат при неограниченном увеличении числа точек сетки на отрезке.

Задачи и упражнения

1. На отрезке $x \in [a, b]$ с шагом h , используя:

I) явный метод Эйлера;

II) неявный метод Эйлера с реализацией по методу Ньютона ($k = 1$);

III) неявный метод с использованием двух итераций по формуле трапеций,

найти решение следующих задач Коши:

а) $u' = \frac{u-1}{u+1} + x, x \in [1; 2], u(1) = 1, h = 0,25;$

б) $u' = \frac{u^2-1}{u+1} + x + \frac{1}{2}, x \in [0,5; 1,5], u(0,5) = 1, h = 0,25;$

в) $u' = ue^x - u^2 - 1, x \in [1; 1,4], u(1) = 1, h = 0,1;$

г) $u' = u^2 e^{x+1} - u + 1, x \in [0; 0,5], u(0) = 0, h = 0,15;$

д) $u' = u \cdot \sin x + \cos x + 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], u(0) = 0, h = \frac{\pi}{16};$

е) $u' = e^x - u - 1, x \in [0; 1], u(0) = 1, h = 0,25;$

ж) $u' = \frac{u - e^x}{u + e^x} + 1, x \in [0; 1], u(1) = 1, h = 0,25;$

з) $u' = \sin u + u^2 - 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], u(0) = 1, h = \frac{\pi}{16};$

и) $u' = e^{-u} - x - 1, x \in [1; 2], u(1) = 2, h = 0,25;$

к) $u' = e^{-2u} - u + 1, x \in [1; 2], u(1) = 0, h = 0,25;$

л) $u' = \ln u + \frac{1}{x} + 1, x \in [1; 2], u(1) = 1, h = 0,25;$

м) $u' = \ln(u+1) + u - x, x \in [1; 2], u(1) = 1, h = 0,25;$

н) $u' = \ln \frac{u-1}{u+1} + x, x \in [1; 2], u(1) = 2, h = 0,25;$

о) $u' = \operatorname{ctg} u + x + 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], u(0) = 1, h = \frac{\pi}{8};$

п) $u' = \operatorname{ctg} u + x^2 + 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], u(0) = 1, h = \frac{\pi}{8}.$

Тема 15. Методы Рунге – Кутта

15.1. Построение методов Рунге – Кутты

Будем рассматривать задачу Коши

$$u'(x) = f(x, u(x)), u(x_0) = u_0, x_0 \leq x \leq X, \quad (15.1)$$

и для ее решения запишем известный алгоритм

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), h = x_{n+1} - x_n, \quad (15.2)$$

который является явным методом Эйлера. Построим другой класс расчетных формул, которому принадлежит указанный метод. Будем предполагать, что известно значение $u(x)$ и требуется вычислить значение $u(x + h)$. Рассмотрим равенство

$$u(x + h) = u(x) + \int_0^h u'(x + t) dt. \quad (15.3)$$

При замене интеграла в правой части на величину $hu'(x)$ погрешность имеет порядок $0(h^2)$, т. е. $u(x + h) = u(x) + hu'(x) + 0(h^2)$, но поскольку $u'(x) = f(x, u(x))$, то отсюда имеем

$$u(x + h) = u(x) + hf(x, u(x)) + 0(h^2).$$

Отбрасывая член порядка $0(h^2)$ и обозначая $x = x_n$, $x + h = x_{n+1}$, получаем расчетную формулу (15.2). Для получения более точного правила нужно точнее вычислить интеграл в правой части (15.3). Используя формулу трапеций, получим

$$u(x + h) = u(x) + \frac{h}{2} (y'(x) + y'(x + h)) + 0(h^3),$$

или, что то же самое,

$$u(x + h) = u(x) + \frac{h}{2} (f(x, u(x)) + f(x + h, u(x + h))) + 0(h^3). \quad (15.4)$$

Отбрасывая $0(h^3)$, получаем расчетную формулу

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})), \quad (15.5)$$

Но это уравнение неразрешимо явно относительно y_{n+1} . Для обеспечения разрешимости формулы (15.5) относительно y_{n+1} проведем замену $u(x + h)$ в правой части (15.4) на некоторую величину

$$u^* = u(x + h) + 0(h^2). \quad (15.6)$$

Тогда правая часть изменится на величину

$$\frac{h}{2} (f(x+h, u^*) - f(x+h, u(x+h))) = \frac{h}{2} f_u(x+h, \tilde{u})(u^* - u(x+h)),$$

где \tilde{u} находится между u^* и $u(x+h)$. Так как u^* удовлетворяет условию (15.6), то

$$u(x+h) = u(x) + \frac{h}{2} (f(x, u(x)) + f(x+h, u^*)) + O(h^3).$$

Но условию (15.6) удовлетворяет результат вычислений по расчетной формуле Эйлера

$$y_{n+1}^* = y_n + h f(x_n, y_n).$$

Последнее соотношение определяет пару расчетных формул

$$\begin{cases} y_{n+1}^* = y_n + h f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*), \end{cases} \quad (15.7)$$

которые также можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n)).$$

Построим другую пару формул с погрешностью на шаге того же порядка. Интеграл в правой части (15.3) вычислим с помощью квадратурного правила средних прямоугольников

$$u(x+h) = u(x) + h u' \left(x + \frac{h}{2} \right) + O(h^2),$$

или, что то же самое,

$$u(x+h) = u(x) + h f \left(x + \frac{h}{2}, u \left(x + \frac{h}{2} \right) \right) + O(h^3).$$

По аналогии с предыдущим случаем имеем

$$u(x+h) = u(x) + h f \left(x + \frac{h}{2}, u^* \right) + O(h^3).$$

В качестве u^* возьмем результат вычислений по формуле Эйлера с шагом $\frac{h}{2}$, т. е. $y^* = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$. Тогда получим

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}}^* = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h f \left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^* \right) \end{cases} \quad (15.8)$$

или, что то же самое,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right).$$

Полученные методы относятся к семейству методов Рунге – Кутты, которые могут быть получены следующим образом:

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, \quad (\alpha)$$

$$\beta_{21} \\ \beta_{31}, \beta_{32} \quad (\beta)$$

.....

$$\beta_{q1}, \beta_{q2}, \dots, \beta_{qq-1}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_q, \quad (p)$$

последовательно получая

$$k_1(h) = hf(x, y),$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)),$$

$$k_3(h) = hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)),$$

.....

$$k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \beta_{q2} k_2(h) + \dots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h)).$$

Теперь полагаем

$$u(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h).$$

Изучим вопрос о выборе параметров (α) , (β) и (p) . Обозначим $\varphi(h) = u(x+h) - z(h)$. Если $f(x, u)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов, то $k_1(h), \dots, k_q(h)$ и $\varphi(h)$ – гладкая функция параметра h . Предположим, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$$

при произвольных достаточно гладких функциях $f(x, u)$, а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой гладкой $f(x, u)$. Согласно формуле Тейлора, справедливо равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\Theta h)}{(s+1)!} h^{s+1} = \frac{\varphi^{(s+1)}(\Theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad (15.9)$$

$0 < \Theta < 1$. Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а s порядком погрешности метода. Таким образом, правила Рунге – Кутты определенного порядка точности могут быть построены за счет выполнения условий $\varphi^{(i)}(0) = 0, i = \overline{0, s}$, а последние могут быть

выполнены за счет выбора параметров (α) , (β) и (p) , которые пока не определены.

15.2. Методы Рунге – Кутты второго порядка точности

При $q = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= u(x+h) - u(x) - p_1 h f(x, u(x)), \\ \varphi(0) &= 0, \\ \varphi'(0) &= (u'(x+h) - p_1 f(x, u(x)))|_{h=0} = f(x, u(x))(1 - p_1), \\ \varphi''(h) &= u''(x+h).\end{aligned}$$

Очевидно, что равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется при всех $f(x, u)$ только в случае $p_1 = 1$. Этому значению p_1 соответствует явный метод Эйлера. Для погрешности этого метода на шаге согласно (15.9) получаем выражение

$$\varphi(h) = \frac{u''(x + \Theta h)}{2!} h^2.$$

Рассмотрим случай $q = 2$. Тогда

$$\varphi(h) = u(x+h) - u(x) - p_1 h f(x, u) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{u}),$$

где $\bar{x} = x + \alpha_1 h$, $\bar{u} = \beta_{21} h f(x, u)$. Производные функции $\varphi(h)$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= u'(x+h) - p_1 f(x, u) - p_2 f(\bar{x}, \bar{u}) - p_2 h (\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{u}) + \beta_{21} f_u(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u)), \\ \varphi''(h) &= u''(x+h) - 2p_2 (\alpha_2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{u}) + \beta_{21} f_{xu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u) - p_2 h (\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{u}) + \\ &+ 2\alpha_2 \beta_{21} f_{xu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u) + \beta_{21}^2 f_{uu}(\bar{x}, \bar{u}) f^2(x, u))), \\ \varphi'''(h) &= u'''(x+h) - 3p_2 (\alpha_2^2 f_{xxx}(\bar{x}, \bar{u}) + 2\alpha_2 \beta_{21} f_{xuu}(\bar{x}, \bar{u}) f(x, u) + \\ &+ \beta_{21}^2 f_{uuu}(\bar{x}, \bar{u}) f^2(x, u)) + 0(h).\end{aligned}$$

Из исходного дифференциального уравнения имеем

$$u' = f, u'' = f_x + f_u f, u''' = f_{xx} + 2f_{xu} f + f_{uu} f^2 + f_u u''.$$

Воспользовавшись этими соотношениями и подставляя $h = 0$ в выражения $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$, $\varphi'''(h)$, получим

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= u - u = 0, \\
\varphi'(0) &= (1 - p_1 - p_2)f(x, u), \\
\varphi''(0) &= (1 - 2p_2\alpha_2)f_x(x, u) + (1 - 2p_2\beta_{21})f_u(x, u)f(x, u), \\
\varphi'''(0) &= (1 - 3p_2\alpha_2^2)f_{xx}(x, u) + (2 - 6p_2\alpha_2\beta_{21})f_{xu}(x, u)f(x, u) + \\
&\quad + (1 - 3p_2\beta_{21}^2)f_{uu}(x, u)f^2(x, u) + f_u(x, u)u''(x).
\end{aligned} \tag{15.10}$$

Соотношение $\varphi'(0) = 0$ выполняется при всех f , если

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \tag{15.11}$$

Соотношение $\varphi''(0) = 0$ выполняется, если

$$1 - 2p_2\alpha_2 = 0, 1 - 2p_2\beta_{21} = 0. \tag{15.12}$$

Таким образом, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ при всех $f(x, u)$, если выполнены три соотношения (15.11)–(15.12) относительно четырех параметров. Произвольно задавая один из параметров, получим различные методы Рунге – Кутты с погрешностью второго порядка малости по h . Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ получим $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, что соответствует расчетным формулам (15.7). При $p_1 = 0$ получим $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, что соответствует паре расчетных формул (15.8).

В случае уравнения $u' = u$ согласно (15.10) имеем $\varphi'''(0) = u$ независимо от значений $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$. Отсюда следует, что формул Рунге – Кутты со значениями $q = 2$ и $s = 3$ не существует.

Пример 1. Используя метод Рунге – Кутты второго порядка точности (15.8), найти решение задачи Коши $u'(x) = u^2 + x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = 0$ с $h = 1$ и $h = 0,5$.

Решение. В таблице приведен численный расчет

x_n	y_n		$u(x_n)$
	$h = 1$	$h = 0,5$	
0,0	0,000	0,000	0,000
0,5	–	0,031	0,042
1,0	0,250	0,317	0,350

по правилу (15.8). Из таблицы видно, что правило второго порядка точности дает существенно лучшие результаты, чем явный метод Эйлера. Даже расчет по грубой сетке с $h = 0,5$ можно считать удовлетворительным.

1.14. Методы Рунге – Кутта третьего и четвертого порядка точности

Приведем окончательные результаты аналогичных построений для случая $q = 3$. Расчетных формул, соответствующих значению $s = 4$, для этого случая не существует. Для $s = 3$ необходимо выполнить соотношения

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \beta_{21}, \\ \alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32}, \\ \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{32}\alpha_2(2 - 3\alpha_3) &= 0, \\ \beta_{31}\beta_{32}\alpha_2 &= \frac{1}{6}, \\ p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 &= \frac{1}{2}, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1.\end{aligned}$$

Эта система шести уравнений с восемью неизвестными имеет бесчисленное множество решений. Наиболее употребительной является следующая совокупность расчетных формул:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf(x + h, y - k_1 + 2k_2), \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).\end{aligned}$$

При $q = 4,5$ не удастся построить расчетных формул рассматриваемого вида со значением $s = 5$. При $q = 4$ наиболее употребительной является следующая совокупность формул:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x + h, y + k_3), \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}\tag{15.14}$$

Среди других правил Рунге – Кутта четвертого порядка точности отметим и следующее:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h f(x, y), \\
k_2 &= h f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{k_1}{3}\right), \\
k_3 &= h f\left(x + \frac{2h}{3}, y - \frac{k_1}{3} + k_2\right), \\
k_4 &= h f(x + h, y + k_1 - k_2 + k_3), \\
y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{8} (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4).
\end{aligned} \tag{15.15}$$

В случае систем дифференциальных уравнений первого порядка правила Рунге – Кутты переносятся при помощи формальной замены u на вектор и функцию правой части f на соответствующую вектор-функцию. Нетрудно произвести покомпонентную запись этих схем. Например, для системы двух уравнений

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x), v(x)), \\ v'(x) = g(x, u(x), v(x)), \end{cases}$$

обозначая через y, z приближенные значения $u(x), v(x)$, запишем аналогичное (15/14) вычислительное правило в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6} h(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n, z_n), \\
q_1 &= g(x_n, y_n, z_n), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1\right), \\
q_2 &= g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2\right), \\
q_3 &= g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2\right), \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3), \\
q_4 &= g(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3).
\end{aligned}$$

Отметим, что именно это правило четвертого порядка точности, записанное для системы произвольного числа уравнений, лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ.

Пример 2. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности (15.14) найти решение задачи Коши из примера 1, приняв шаг $h = 0,2$. Результат сравнить с решением, полученным по методу Пикара (тема 1).

Решение. Вычисления удобно располагать по схеме, указанной в следующей таблице:

n	x	y	$k = hf(x, y)$	$\Delta y = y(x+h) - y(x)$
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
				$\Delta y = k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}$
1	x_1	y_1		

Тогда результаты вычислений принимают вид

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$k = hf(x_n, y_n)$	Δy_n
0	0	0	0	0	0
	0,1	0	0,01	0,002	0,004
	0,1	0,001	0,010001	0,002	0,004
	0,2	0,002	0,040004	0,008001	0,008001
					0,016001
1	0,2	0,002667	0,040007	0,008001	0,008001
	0,3	0,006668	0,090044	0,018009	0,036018
	0,3	0,011671	0,090136	0,018027	0,036054
	0,4	0,020694	0,160428	0,032086	0,032086
					0,112159
2	0,4	0,02136	0,160456	0,032091	0,032091
	0,5	0,37406	0,251399	0,050280	0,10056
	0,5	0,465	0,252162	0,050432	0,100865
	0,6	0,71793	0,365154	0,073031	0,073031
					0,306547
3	0,6	0,072451	0,365249	0,073050	0,07305
	0,7	0,108976	0,501876	0,100375	0,20075

	0,7	0,122639	0,50504	0,101008	0,202016
	0,8	0,173459	0,670088	0,134018	0,134018
					0,609834
4	0,8	0,174090	0,670307	0,134061	0,134061
	0,9	0,241121	0,868139	0,173628	0,347256
	0,9	0,260904	0,878071	0,175614	0,351228
	1,0	0,349704	1,122293	0,224459	0,224459
5	1,0	0,350258			

В заключение приведем следующую сводную таблицу значений решения, которые получены по методу Рунге – Кутта (y_{pk}) и по методу Пикара (y_n), а также $\varepsilon = y_{pk} - y_n$ в соответствующих точках сетки:

$\begin{matrix} y \\ x_n \end{matrix}$	y_{pk}	y_n	ε
0,2	0,002669	0,002667	0,000002
0,4	0,021606	0,02136	0,000246
0,6	0,076669	0,072451	0,004218
0,8	0,205702	0,17409	0,031612
1,0	0,500979	0,350258	0,150721

Задачи и упражнения

1. Методом Рунге – Кутта второго порядка точности на отрезке $x \in [a, b]$ с шагом $h = \frac{b-a}{5}$ найти решение следующей задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $\begin{cases} u' = u + v - x, \\ v' = u - v^2 + x, \end{cases} \quad u(0) = 1, v(0) = 0,5, x \in [0; 1];$

б) $\begin{cases} u' = \sin u - v + x, \\ v' = \cos v - u + x^2, \end{cases} \quad u(0) = 1, v(0) = 0, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

в) $\begin{cases} u' = u^2 - \sin v + x, \\ v' = v' - \sin u + x^2, \end{cases} \quad u(0) = 1, v(0) = \frac{1}{2}, x \in [0; 1];$

$$\begin{aligned}
\Gamma) & \begin{cases} u' = e^{-u} + e^{-\frac{1}{2}v}, \\ v' = e^{-v} + e^{-\frac{1}{2}u}, \end{cases} \quad u(0)=1, v(0)=\frac{1}{2}, x \in [0; 1]; \\
Д) & \begin{cases} u' = u^2 - v + e^x, \\ v' = v^2 + 2u - e^x, \end{cases} \quad u(1)=1, v(1)=0, x \in [1; 1,5]; \\
е) & \begin{cases} u' = \sin u - \cos v, \\ v' = \sin(u+v) - u, \end{cases} \quad u(0)=0, v(0)=1, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \\
ж) & \begin{cases} u' = uv - x^2 + 1, \\ v' = u + v - x^3 + 3, \end{cases} \quad u(0)=0,5, v(0)=1, x \in [0; 1,5]; \\
з) & \begin{cases} u' = e^{u+v} - x, \\ v' = e^{u-v} + x, \end{cases} \quad u(1)=0, v(1)=0, x \in [1; 1,5]; \\
и) & \begin{cases} u' = u^2 + v^2 + x, \\ v' = v^2 - u^2 - x, \end{cases} \quad u(0)=0, v(0)=0, x \in [0; 1]; \\
к) & \begin{cases} u' = u^3 - v^2 - x, \\ v' = v^3 + u^2 + x, \end{cases} \quad u(1)=0, v(1)=0, x \in [1; 1,5]; \\
л) & \begin{cases} u' = \sin u + \cos v, \\ v' = \sin u + 2 \cos v, \end{cases} \quad u(0)=1, v(0)=\frac{1}{2}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \\
м) & \begin{cases} u' = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}, \\ v' = u + v - 1, \end{cases} \quad u(1)=\frac{1}{2}, v(1)=0, x \in [1; 1,5]; \\
н) & \begin{cases} u' = \sqrt{u^2 + v^2 + 4}, \\ v' = u - v - 1, \end{cases} \quad u(0,5)=0,5, v(0,5)=0,5, x \in [0,5; 1,5]; \\
о) & \begin{cases} u' = uv + x - 1, \\ v' = \sqrt{u^2 + 1} - v, \end{cases} \quad u(1)=1,5, v(1)=0,75, x \in [1; 2]; \\
п) & \begin{cases} u' = \sin(u+v) + x, \\ v' = \cos(u-v) - x, \end{cases} \quad u\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, v\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

2. Методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с шагом $h = 0,2$ найти решение следующих задач Коши:

а) $u' = xu + x^2 - 1, \quad u(0)=1, x \in [0; 1];$

б) $u' = \frac{u}{x^2 + 1}, \quad u(0)=1, x \in [0; 1];$

$$\text{в)} \quad u' = u^2 - x + 1, \quad u(1) = 1, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{г)} \quad u' = \sin u - u, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0,5; 1,5];$$

$$\text{д)} \quad u' = e^u - x + 1, \quad u(0) = 0, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{е)} \quad u' = \frac{u^2}{x^2 + 2}, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{ж)} \quad u' = u^2 - e^x, \quad u(1) = 1, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{з)} \quad u' = u^2 + \ln x, \quad u(1) = 0, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{и)} \quad u' = \frac{1}{2}e^2 - x + 1, \quad u(0) = 0, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{к)} \quad u' = u - x^2 + 1, \quad u(1) = 2, \quad x \in [1; 2];$$

$$\text{л)} \quad u' = \cos u + x - 1, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{м)} \quad u' = \frac{\sin u}{x^2 + 1}, \quad u(0) = 1, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{н)} \quad u' = \sin u + \cos u, \quad u(0) = 0,5, \quad x \in [0; 1];$$

$$\text{о)} \quad u' = \cos 2u + x - 1, \quad u(2) = 1, \quad x \in [2; 3];$$

$$\text{п)} \quad u' = e^u + x^2, \quad u(0) = 0, \quad x \in [0; 1].$$

Тема 16. Методы предиктор – корректор

1.15. Общий подход к построению правил предиктор – корректор.

Изложение основных идей предлагаемого способа построения методов численного решения дифференциальных уравнений будем проводить на примере решения задачи Коши

$$u'(x) = f(x, u), u(x_0) = u_0, x_0 \leq x \leq X. \quad (16.1)$$

Как и в случае методов Рунге – Кутты, при построении вычислительных правил будем исходить из равенства

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt,$$

которое после замены $t = x_n + \alpha h$ приводит к соотношению

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) d\alpha$$

и которое для наших целей удобнее записать в виде

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \int_0^1 Z_n(\alpha) d\alpha, \quad (16.2)$$

где $Z_n(\alpha) = f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h))$. Заменим интеграл в (16.2) квадратурной суммой $\sum_{i=0}^q A_i Z_n(\alpha_i)$. Тогда вместо (16.2) получим

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + h \sum_{i=0}^q A_i Z_n(\alpha_i) = u(x_n) + h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, u(x_n + \alpha_i h)). \quad (16.3)$$

Выбор параметров $A_i, \alpha_i, i = 0, 1, \dots, q$ в этом приближенном равенстве будем осуществлять, например, на основании требования, чтобы квадратурная формула

$$\int_0^1 Z_n(\alpha) d\alpha \approx \sum_{i=0}^q A_i Z_n(\alpha_i) \quad (16.4)$$

была точна для всевозможных алгебраических многочленов до степени $k - 1$ ($0 < k < 2q + 2$) включительно. Это приводит к следующей системе k уравнений с $2q + 2$ неизвестными $A_i, \alpha_i, i = 0, 1, \dots, q$:

$$\sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^j = \frac{1}{j+1}, j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (16.5)$$

Так как весовая функция в случае интеграла $\int_0^1 Z_n(\alpha) d\alpha$ равна единице, то квадратурная формула (16.4) может быть построена с НАСТ = $2q + 1$ и притом единственным образом для любого $q \geq 0$. Поэтому при $k = 2q + 2$ система (16.5) имеет единственное решение, при этом $0 \leq A_i \leq 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 0, 1, \dots, q$.

Если бы в (16.3) все значения $y(x_n + \alpha_i h), i = 0, 1, \dots, q$ были известны точно, то это приближенное равенство позволило бы найти искомое решение $y(x_n + h)$ по известному значению $y(x_n)$ с ошибкой порядка $O(h^{k+1})$. Хотя точными значениями величин $y(x_n + \alpha_i h)$ мы не располагаем, но, подобно (16.3), заменив h на $\alpha_i h$, легко получить правила их приближенного вычисления через значения $y(x_n + \alpha_i \beta_j h)$, которые могут быть определены по аналогичным формулам. При этом следует иметь в виду, что наличие множителя h перед суммой в (16.4) позволяет находить значения $y(x_n + \alpha_i h)$ с погрешностью $O(h^k)$, а значения $y(x_n + \alpha_i \beta_j h)$ с ошибкой $O(h^{k-1})$ и т. д. Параметры соответствующих приближенных равенств должны удовлетворять системе типа (16.5), в которой с понижением порядка точности правил следует отбрасывать последние уравнения. Часто целесообразно уменьшать и число q , определяющее количество подлежащих выбору параметров. Следуя этой схеме построений, мы придем, наконец, к приближенному равенству

$$u(x_n + \alpha_i \beta_j \dots \gamma_k h) \approx u(x_n) + \alpha_i \beta_j \dots \gamma_k h f(x_n, u(x_k)),$$

на котором процесс заканчивается. Погрешность такого правила будет величиной $O(h^2)$. Оно получается из равенства типа (16.3) в случае, когда квадратурная формула (16.4) является простейшей формулой левых прямоугольников, а сам метод становится явным методом Эйлера.

16.2. Частные правила предиктор – корректор

Вначале рассмотрим методы первого порядка точности. Система (16.5) в этом случае вырождается в единственное уравнение

$$\sum_{i=0}^q A_i = 1. \quad (16.6)$$

Параметры α_i могут принимать при этом, вообще говоря, произвольные значения, но в случае одношаговых методов их выбор должен быть подчинен ограничению $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Положив, например, $q = 0$, найдем $A_0 = 1$ и при $\alpha_0 = 0$ получим известный метод Эйлера $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. При $\alpha_0 = 1$ получим неявный метод Эйлера

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n^{[2]} + hf(x_n, y_{n+1}^{[2]}),$$

где в записи последнего метода использовано обозначение $[i]$, указывающее на локальный порядок точности определения величин, над которыми оно стоит.

Для методов второго порядка точности требование (16.6) нужно дополнить условием

$$\sum_{i=0}^q A_i \alpha_i = \frac{1}{2}. \quad (16.7)$$

При $q = 0$ система (16.6)–(16.7) имеет единственное решение $A_0 = 1$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, что приводит к следующему вычислительному правилу:

$$\begin{aligned} y_{n+\frac{1}{2}}^{[2]} &= y_n^{[3]} + \frac{h}{2} f_n^{[3]}, \\ y_{n+1}^{[3]} &= y_n^{[3]} + hf_{n+\frac{1}{2}}^{[2]}, \end{aligned}$$

где индекс $n + \frac{1}{2}$ указывает на вычисление функции в точке $x_n + \frac{h}{2}$. При

$q = 1$ система (16.6)–(16.7) принимает вид $A_0 + A_1 = 1$, $A_0 \alpha_0 + A_1 \alpha_1 = \frac{1}{2}$.

Выбрав, например, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, найдем $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$ и получим неявный метод трапеций

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[2]} &= y_n^{[3]} + hf_n^{[3]}, \\ y_{n+1}^{[3]} &= y_n^{[3]} + \frac{h}{2} (f_n^{[3]} + f_{n+1}^{[2]}). \end{aligned}$$

В методах третьего порядка точности требования (16.6)–(16.7) необходимо дополнить уравнением $\sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}$. Этим условиям при $q = 2$ удовлетворяет правило

$$\begin{aligned} y_{n+\frac{1}{4}}^{[2]} &= y_n^{[4]} + \frac{h}{4} f_n^{[4]}, \\ y_{n+\frac{1}{2}}^{[3]} &= y_n^{[4]} + \frac{h}{2} f_{n+\frac{1}{4}}^{[2]}, \\ y_{n+1}^{[3]} &= y_n^{[4]} + h f_{n+\frac{1}{2}}^{[3]} - \text{предиктор}, \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n^{[4]} + \frac{h}{6} \left(f_n^{[4]} + 4f_{n+\frac{1}{2}}^{[3]} + f_{n+1}^{[3]} \right) - \text{корректор}. \quad (16.9)$$

Заметим, что приближенное значение величины y_{n+1} , найденное по формуле (16.8) с локальной погрешностью $O(h^3)$, уточняется затем по правилу (16.9), имеющему локальную погрешность $O(h^4)$. Сравнение значений $y_{n+1}^{[3]}$ и $y_{n+1}^{[4]}$ дает практическую возможность по ходу вычислений без дополнительных затрат составить представление о локальной точности полученного приближения $u(x_{n+1})$. Такое сравнение, в частности, может быть положено в основу правила автоматического выбора шага интегрирования.

Для получения правил четвертого порядка точности в системе (16.5) необходимо положить $k = 4$. В качестве примера приведем здесь лишь одно семейство вычислительных правил предиктор – корректор четвертого порядка точности:

$$\begin{aligned} y_{n+\frac{1}{m}}^{[2]} &= y_n^{[5]} + \frac{h}{m} f_n^{[5]}, \\ y_{n+\frac{1}{3}}^{[4]} &= y_n^{[5]} + \frac{h}{3} \left(\frac{6-m}{6} f_n^{[5]} + \frac{m}{6} f_{n+\frac{1}{m}}^{[2]} \right), \\ y_{n+\frac{1}{2}}^{[4]} &= y_n^{[5]} + \frac{h}{8} \left(f_n^{[5]} + 3f_{n+\frac{1}{3}}^{[3]} \right), \\ y_{n+1}^{[4]} &= y_n^{[5]} + \frac{h}{2} \left(f_n^{[5]} - 3f_{n+\frac{1}{3}}^{[3]} + 4f_{n+1}^{[4]} \right) - \text{предиктор}, \\ y_{n+1}^{[5]} &= y_n^{[5]} + \frac{h}{6} \left(f_n^{[5]} + 4f_{n+\frac{1}{2}}^{[4]} + f_{n+1}^{[4]} \right) - \text{корректор}, \end{aligned}$$

где m – любое (вообще говоря) натуральное число.

16.3. Правило Рунге

Будем рассматривать исходную задачу Коши (16.1). Сейчас нас интересует преимущественно лишь погрешность метода, т. е. та часть погрешности приближенного решения, которая зависит лишь от неточности формулы. Рассмотрим эту погрешность, например, для метода Эйлера $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Предварительно запишем исходное уравнение на двух соседних узлах x_n и x_{n+1} следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} &= u'(x_n) + \frac{h}{2} u''(x_n) + O(h^2) = \\ &= f(x_n, u(x_n)) + \frac{h}{2} \frac{d}{dx} f(x_n, u(x_n)) + O(h^2),\end{aligned}$$

из которого получаем

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) + \frac{h^2}{2} u''(x_n) + O(h^3)$$

или, что то же самое,

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) + h^2 \rho^*(x_n) + u''(x_n) + O(h^3), \quad (16.10)$$

где $h^2 \rho^*(x_n) + O(h^3)$ – остаточный член, который мы отбросили при построении правила Эйлера. Вычтем почленно из (16.10) соотношение $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, введя в рассмотрение погрешность $Z_{n+1} = u(x_{n+1}) - y_{n+1}$. Получим

$$Z_{n+1} = Z_n + h(f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, y_n)) + h^2 \rho^*(x_n) + O(h^3).$$

Воспользовавшись гладкостью функции $f(x, u(x))$, запишем следующее представление:

$$f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, y_n) = Z_n \frac{\partial f(x_n, u(x_n) + \Theta Z_n)}{\partial u} = Z_n f_{u_n},$$

где $0 \leq \Theta \leq 1$. Тогда $Z_{n+1} = Z_n + h Z_n f_{u_n} + h^2 \rho^*(x_n) + O(h^3)$ или, что то же самое,

$$Z_{n+1} = (1 + h f_{u_n}) Z_n + h^2 \rho^*(x_n) + O(h^3), \quad Z_0 = 0.$$

Последнее соотношение раскроем рекуррентно. Так как

$$Z_n = (1 + h f_{u_{n-1}}) Z_{n-1} + h^2 \rho^*(x_{n-1}) + O(h^3),$$

$$Z_{n-1} = (1 + h f_{u_{n-2}}) Z_{n-2} + h^2 \rho^*(x_{n-2}) + O(h^3),$$

.....

$$Z_1 = (1 + hf_{u_0})Z_0 + h^2\rho^*(x_0) + o(h^3) = h^2\rho^*(x_0) + o(h^3),$$

то

$$Z_2 = (1 + hf_{u_1})Z_1 + h^2\rho^*(x_1) + o(h^3) = (1 + hf_{u_1})h^2\rho^*(x_0) + h^2\rho^*(x_1) + o(h^3) + o(h^3),$$

$$Z_3 = (1 + hf_{u_2})(1 + hf_{u_1})h^2\rho^*(x_0) + (1 + hf_{u_2})h^2\rho^*(x_1) + h^2\rho^*(x_2) + o(h^3) + o(h^3) + o(h^3),$$

$$Z_4 = (1 + hf_{u_3})(1 + hf_{u_2})(1 + hf_{u_1})h^2\rho^*(x_0) + (1 + hf_{u_3})(1 + hf_{u_2})h^2\rho^*(x_1) + (1 + hf_{u_3})h^2\rho^*(x_2) + h^2\rho^*(x_3) + o(h^3) + o(h^3) + o(h^3) + o(h^3),$$

.....

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^k (1 - hf_{u_{n-i+1}}) \rho^*(x_{n-k+1}) h^2 \right) + h^2\rho^*(x_n) + o(h^2).$$

При достаточно малых h последнюю формулу в приближенном виде можно записать следующим образом:

$$Z_{n+1} \approx \rho(x)h, \quad (16.11)$$

где $\rho(x)h$ – главный член погрешности, так как при написании (16.11) отброшены члены более высоких порядков. При этом для $\rho(x)$ можно записать следующее представление:

$$\rho(x) = \int_{x_0}^{x_n} \rho^*(t) \exp(f_n(t)) dt.$$

Формулу для погрешности типа (16.11) можно получить для любого одношагового метода.

Предположим, что в некоторой фиксированной точке x отрезка $[x_0, X]$ при двух значениях h_1 и h_2 шага сетки данным одношаговым методом k -го порядка точности найдены соответственно два приближенных значения y_{h_1} и y_{h_2} решения $u(x)$ исходной задачи Коши (16.1). Тогда в силу (16.11) можно ожидать, что

$$u(x) - y_{h_1} \approx h_1^k \rho(x), \quad u(x) - y_{h_2} \approx h_2^k \rho(x).$$

Исключая из этих неравенств неизвестное значение $u(x)$, находим

$$\rho(x) \approx \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k}. \quad (16.12)$$

Это дает возможность после проведения вычислений до точки x с шагами h_1 и h_2 получить приближенное значение каждой из величин y_{h_1} и y_{h_2} . Кроме того, при заданной границе ε допустимой ошибки на основании приближенного равенства $\varepsilon \approx \rho(x)h_\varepsilon^b$ по результатам этих вычислений можно выбрать практически более приемлемое при данных требованиях к точности значения шага

$$h_\varepsilon \approx \sqrt[k]{\varepsilon \left| \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k} \right|}. \quad (16.13)$$

В практике вычислений наиболее часто в качестве значений шагов h_1 и h_2 выбирают h и $\frac{h}{2}$. В этом случае формулы (16.12)–(16.13) принимают соответственно вид

$$\rho(x) \approx \frac{2^k(y_{\frac{h}{2}} - y_h)}{h^k(2^k - 1)}, \quad h_\varepsilon \approx \frac{h}{2} \sqrt[k]{\frac{(2^k - 1)\varepsilon}{|y_{\frac{h}{2}} - y_h|}}. \quad (16.14)$$

Используя (16.14), в частности, можно записать, что

$$u(x) - y_{\frac{h}{2}} \approx \frac{y_{\frac{h}{2}} - y_h}{2^k - 1}.$$

Эта формула, как и все приближенные равенства, основанные на представлении типа (16.11) для погрешности метода, носят асимптотический характер и при конкретных значениях шага h не играют роли гарантированной оценки погрешности. Записав же последнее равенство в виде

$$u(x) \approx y_{\frac{h}{2}} + \frac{y_{\frac{h}{2}} - y_h}{2^k - 1},$$

его можно использовать как возможность увеличения точности приближенного решения.

Изложенный здесь метод приближенного определения погрешности решения, а также определения шага сетки, гарантирующего заданную точность вычислений, получил название правила Рунге.

Задачи и упражнения

1. Используя метод предиктор – корректор третьего порядка точности и полагая для начала $h = 0,2$, найти решение следующих задач Коши с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, обеспечивая ее путем сравнения $y_{n+1}^{[3]}$ и $y_{n+1}^{[4]}$:

а) $u' = \frac{u-1}{u^2+1}, u(0) = 1, x \in [0; 1];$

б) $u' = \frac{u-x}{u^2+x^2}, u(1) = 1, x \in [1; 2];$

в) $u' = \frac{x-1}{x^2+1}u + x - 1, u(0) = 0, x \in [0; 1];$

г) $u' = \frac{e^x-1}{e^x+1}u - e^x, u(0) = 1, x \in [0; 1];$

д) $u' = \frac{u^2+1}{e^x+1}, u(0) = 0, x \in [0; 1];$

е) $u' = \frac{u^2-1}{e^x+1}, u(1) = 1, x \in [1; 2];$

ж) $u' = \sin xu - \cos x, u(0) = 0, x \in [0; 1];$

з) $u' = \cos xu - \sin x, u(0) = 1, x \in [0; 1];$

и) $u' = \operatorname{tg} xu - \sin x, u(0) = 0, x \in [0; 1];$

к) $u' = \operatorname{ctg} xu - \cos x, u(1) = 1, x \in [1; 2];$

л) $u' = e^xu - e^{-x}, u(1) = 0, x \in [1; 2];$

м) $u' = \frac{\sin u + x}{\cos u + 2}, u(0) = 0, x \in [0; 1];$

н) $u' = \frac{e^x-1}{e^x+1}u^2, u(1) = 1, x \in [1; 2];$

о) $u' = u \ln(x^2+1), u(0) = 1, x \in [0; 1];$

п) $u' = u \ln(x^2+2), u(0) = 1, x \in [0; 1].$

2. Используя явный метод Эйлера, найти приближенное решение следующих задач Коши с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, определяя ее с помощью правила Рунге и полагая первоначально $h_1 = 0,2, h_2 = \frac{h_1}{2}$:

а) $u' = u^2 + xu + 2, u(1) = 0, x \in [1; 2];$

б) $u' = u^3 - x + 3, u(0) = 1, x \in [0; 1];$

- в) $u' = x^2 u + \frac{u}{2}, u(1) = 1, x \in [1; 2];$
- г) $u' = \frac{u^2}{x^2 + 1} + u, u(0) = 1, x \in [0; 1];$
- д) $u' = \frac{u - x}{u + x} + u, u(1) = 1, x \in [1; 2];$
- е) $u' = e^u(x + 1), u(0) = 0, x \in [0; 1];$
- ж) $u' = e^{-u}(x^2 + 1), u(0) = 0, x \in [0; 1];$
- з) $u' = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) + x, u(0) = 0, x \in [0; 1];$
- и) $u' = \sin u + \cos u, u(0) = 1, x \in [0; 1];$
- к) $u' = \sin u - \cos u + 1, u(0) = 1, x \in [0; 1];$
- л) $u' = e^x(u^2 + 1), u(1) = 0, x \in [1; 2];$
- м) $u' = (e^x + e^{-x})u + 1, u(0) = 0, x \in [0; 1];$
- н) $u' = u \ln(x + 1), u(0) = 1, x \in [0; 1];$
- о) $u' = \frac{u}{\ln(x^2 + 2)}, u(0) = 1, x \in [0; 1];$
- п) $u' = \frac{u}{\ln(x^2 + 1) + 2}, u(0) = 1, x \in [0; 1].$

Тема 17. Многошаговые правила

1.16. Понятие о многошаговых правилах

В предыдущих темах мы рассмотрели одношаговые методы решения задачи Коши, при построении которых предполагается привлекать информацию о решаемой задаче только на отрезке длиной в один шаг, поэтому такая информация на каждом этапе процесса должна быть получена заново. Отказавшись от требования одношаговости, вычислительные методы можно строить так, чтобы часть полученной информации могла быть использована повторно на нескольких соседних шагах вычислительного процесса. При этом иногда целесообразно привлекать информацию с забеганием вперед за ту точку, решение в которой мы вычисляем сейчас. Методы, использующие информацию о решаемой задаче на отрезке длиной более одного шага, будем называть многошаговыми. Как и прежде, будем рассматривать задачу Коши

$$u'(x) = f(x, u), u(x_0) = u_0. \quad (17.1)$$

Для ее решения ограничимся методами вида

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^q a_i y_{n-i} + h \sum_{j=-s}^q A_j f(x_{n-j}, y_{n-j}),$$

позволяющими искать приближенное решение y_{n+1} рассматриваемой задачи в точке x_{n+1} в виде линейной комбинации нескольких известных, вообще говоря, приближенных значений y_{n-i} с коэффициентами a_i и приближенных значений производной в точках x_{n-j} , $j = -s, \dots, q$. При $s < 1$ вычислительные методы называются явными, при $s = 1$ – неявными (при $A_{-1} \neq 0$), а при $s > 1$ – с забеганием вперед. В дальнейшем будем рассматривать только равномерную сетку узлов и ограничимся вычислительными правилами вида

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-s}^q A_j f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (17.2)$$

Среди вычислительных правил (17.2) особенно широко известны экстраполяционные ($s = 0$) и интерполяционные ($s = 1$, $A_{-1} \neq 0$) методы Адамса.

17.2. Экстраполяционный метод Адамса

Построение многошаговых методов вида

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q A_i f(x_{n-i}, y_{n-i}) \quad (17.3)$$

можно осуществить, например, способом, который был изложен ранее. Как и в случае одношаговых методов, будем исходить из равенства

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) d\alpha. \quad (17.4)$$

На его основании построим приближенное равенство

$$u(x_n + h) \approx u(x_n) + h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, u(x_n + \alpha_i h)),$$

где параметром α_i , $i = 0, 1, \dots, q$ заранее придадим нужные для (17.3) значения

$$\alpha_i = -i, i = 0, 1, \dots, q. \quad (17.5)$$

Соответствующие значения параметров A_i , $i = 0, 1, \dots, q$ могут быть найдены из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^q A_i = 1, \sum_{i=0}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = 1, 2, \dots, q. \quad (17.6)$$

Так как определитель этой системы есть определитель Вандермонда, а все α_i , $i = 0, 1, \dots, q$, — различны, то значения A_i , $i = 0, 1, \dots, q$, удовлетворяющие (17.6), могут быть выбраны для любого $q \geq 0$ и притом единственным образом. При заданном значении q тем самым будет построен соответствующий экстраполяционный метод Адамса. Легко показать, что погрешность формулы (17.3) при таком выборе α_i и A_i имеет вид

$$r_{n+1} = h^{q+2} u^{(q+2)}(x_n) \left(\frac{1}{(q+2)!} - \frac{1}{(q+1)!} \sum_{i=0}^q A_i (-i)^{q+1} \right) + O(h^{q+3}). \quad (17.7)$$

Можно непосредственно проверить, что те же вычислительные правила экстраполяционного метода Адамса можно построить и следующим образом. Для приближенного вычисления интеграла $\int_0^1 u'(x_n + \alpha h) d\alpha$ предварительно подынтегральную функцию $u'(x_n + \alpha h)$ на

отрезке интегрирования аппроксимируем интерполяционным многочленом степени q , построенным по ее значениям в точках $x_n - ih, i = 0, 1, \dots, q$, предшествующих отрезку интегрирования. Такое интерполирование за пределы таблицы значений интегрируемой функции называют экстраполированием. Осуществив затем простую операцию интегрирования алгебраического интерполяционного многочлена, придем к указанному методу. Эта формула может быть записана по-разному в зависимости от того, в каком виде предварительно был представлен соответствующий интерполяционный многочлен. Если его взять в форме Лагранжа, то метод будет записан непосредственно в виде (17.3), при этом коэффициенты будут вычислены по формулам Ньютона – Котесса:

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!(q-i)!} \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q)}{\alpha+i} d\alpha, i = 0, 1, \dots, q.$$

Если же соответствующий интерполяционный многочлен для $u'(x_n + \alpha h) = f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h))$ представить в форме Ньютона для интерполирования в конце таблицы, то экстраполяционный метод Адамса может быть записан через конечные разности функции $f(x, u(x))$. Такая форма записи метода позволяет получить интересующее нас значение приближенного решения в виде разложения по последовательным главным частям, что может быть использовано для контроля практической локальной точности. Уравнение (17.3) еще называют разностным уравнением. Замена исходного дифференциального уравнения (17.1) разностным уравнением (17.3) при одном начальном условии $y_0 = u_0$ приводит, вообще говоря, к некорректной задаче, так как задание y_0 не обеспечивает единственности решения (17.3). Чтобы построенное правило позволяло находить единственное решение, достаточно задать дополнительные к y_0 значения y_1, y_2, \dots, y_q . Для их нахождения можно использовать любой из рассмотренных ранее одношаговых методов. Однако точность построения начала таблицы (т. е. определения y_1, y_2, \dots, y_q) должна быть согласована с точностью нахождения последующих значений решения исходной задачи.

Пример 1. Построить экстраполяционный метод Адамса при $q = 1$ и оценить его погрешность.

Решение. При $q = 1$ система (17.6) принимает вид $A_0 + A_1 = 1, A_1 = -\frac{1}{2}$, откуда находим $A_0 = \frac{3}{2}, A_1 = -\frac{1}{2}$. Метод Адамса при таком значении q принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}).$$

Погрешность последней формулы в силу (17.7) задается равенством $r_{n+1} = \frac{5}{12}h^3 u''(x_n) + O(h^4)$, при этом построенный метод уже предполагает предварительное нахождение величины y_1 .

Пример 2. Построить экстраполяционный метод Адамса при $q = 2$ и оценить его погрешность.

Решение. В случае $q = 2$ имеем $A_0 + A_1 + A_2 = 1, A_1 + 2A_2 = -\frac{1}{2}, A_1 + 4A_2 = -\frac{1}{3}$. Отсюда находим $A_0 = \frac{23}{12}, A_1 = -\frac{4}{3}, A_2 = \frac{5}{12}$. Это позволяет написать следующий метод:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}).$$

Погрешность метода, согласно (17.7), будет

$$r_{n+1} = \frac{3}{8}h^4 u^{(4)}(x_n) + O(h^5),$$

и этот вычислительный метод можно применить, начиная со значения $n = 2$.

При $q = 3$ экстраполяционный метод Адамса принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (17.8)$$

Погрешность формулы (17.8) задается равенством

$$r_{n+1} = \frac{251}{720}h^5 u^{(5)}(x_n) + O(h^6). \quad (17.9)$$

Без подробного вывода дадим другой вид экстраполяционных методов Адамса, запись которого связана с использованием конечных разностей функции $u'(x) = f(x, u(x))$:

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_n + \frac{1}{2}\Delta\varphi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{n-3} + \frac{251}{720}\Delta^4\varphi_{n-4} + \\ + \frac{95}{288}\Delta^5\varphi_{n-5} + \dots + C_q\Delta^q\varphi_{n-q},$$

где $\varphi_n = hf_n$, $C_q = \frac{1}{q!} \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q-1)d\alpha$, $\Delta^j \varphi_{n-j}$ – конечная разность порядка j , составленная для $\varphi = hf$ по ее приближенным значениям в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}$, при этом

$$r_{n+1} = \frac{h^{q+2}}{(q+2)!} u^{(q+2)}(\xi) \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q)d\alpha, \xi \in [x_{n-q}, x_n].$$

Эти формулы эквивалентны исходным формулам (17.3) (17.7), отвечающим одним и тем же значениям q , но могут давать разные результаты, так как они отличаются организацией вычислений.

17.3. Интерполяционный метод Адамса

При $s = 1$ формула (17.2) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=-1}^q A_i f(x_{n-i}, y_{n-i}). \quad (17.10)$$

Построение таких вычислительных правил может быть проведено аналогично формулам (17.3). Положив $\alpha_i = -i, i = -1, 0, 1, \dots, q$, для нахождения соответствующих значений параметров $A_i, i = -1, 0, 1, \dots, q$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=-1}^q A_i = 1, \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = 1, 2, \dots, q+1,$$

которая однозначно разрешима при любом $q \geq 1$. Для нахождения параметров $A_i, i = -1, 0, 1, \dots, q$ вычислительных методов типа (17.10), подобно случаю экстраполяционных методов Адамса, можно дать следующее явное выражение:

$$A_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!(q-i)!} \int_0^1 \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q)}{\alpha+i} d\alpha, i = -1, 0, 1, \dots, q.$$

Погрешность формулы (17.10), аналогично (17.7), может быть записана в виде

$$r_{n+1} = h^{q+3} u^{(q+3)}(x_n) \left(\frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!} \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^{q+2} \right) + O(h^{q+4}). \quad (17.11)$$

Приведем несколько примеров интерполяционных методов Адамса.

При $q = -1$ будем иметь

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}, r_{n+1} = -\frac{h^2}{2} u''(x_n) + O(h^3).$$

В случае $q = 0$ находим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n), r_{n+1} = -\frac{h^3}{12} u^{(3)}(x_n) + O(h^4).$$

При $q = 1$ получаем

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), r_{n+1} = -\frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_n) + O(h^5).$$

Взяв $q = 2$, найдем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), r_{n+1} = \\ &= -\frac{19}{720} h^5 u^{(5)}(x_n) + O(h^6). \end{aligned}$$

Пример 3. Построить интерполяционную формулу Адамса через конечные разности функции f и получить ее погрешность.

Решение. Будем исходить из интегрального представления (17.4) и подынтегральную функцию в нем заменим интерполяционным многочленом в форме Ньютона, построенном по значениям функции в точках $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-q}$ (т. е. при $\alpha_i = -1, 0, 1, \dots, q$). Получим

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h)) &= f_{n+1} + \frac{\alpha-1}{1!} \Delta f_n + \frac{(\alpha-1)\alpha}{2!} \Delta^2 f_{n-1} + \\ &+ \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)}{3!} \Delta^3 f_{n-2} + \dots + \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-1)}{(q+1)!} \Delta^{q+1} f_{n-q} + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q)}{(q+2)!} f^{(q+2)}(\xi_n), x_{n-q} \leq \xi_n \leq x_{n+1}.$$

Подставим теперь это выражение для подынтегральной функции в (17.4). Так как все конечные разности от функции f постоянны, то, вычисляя определенные интегралы от соответствующих многочленов относительно α , получим следующую интерполяционную формулу Адамса:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \varphi_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \varphi_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \varphi_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \varphi_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 \varphi_{n-3} - \dots - \\ &- C_{q+1} \Delta^{q+1} \varphi_{n-q}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

где

$$\varphi_i = hf_i, \quad C_{q+1} = \frac{1}{q+1} \int_0^1 (\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q-1)d\alpha, \quad (17.13)$$

$$r_{n+1} = h^{q+3} u^{(q+3)}(x_n) C_{q+2} + O(h^{q+4}). \quad (17.14)$$

Распределение узлов интерполирования, положенное в основу интерполяционного метода Адамса, более удачно, чем в случае экстраполяционного метода, и интерполяционный метод дает, вообще говоря, более точный результат при одном и том же числе узлов интерполирования. Это, в частности, проявляется и в том факте, что коэффициенты равенства (17.12) с ростом q убывают по абсолютной величине быстрее, чем коэффициенты соответствующей формулы для экстраполяционного метода. Это позволяет при одинаковых требованиях к точности в случае интерполяционного метода увеличить шаг h по сравнению с экстраполяционным методом.

Заметим, что построенные интерполяционные методы Адамса не дают явных выражений для нахождения y_{n+1} , а представляют собой уравнение относительно этой неизвестной. Обычно значение y_{n+1} находят лишь приближенно, пользуясь, как правило, каким-нибудь методом последовательных приближений. Чаще всего при использовании интерполяционного метода Адамса в форме (17.12) в качестве начального приближения y_{n+1} берут соответствующее значение, полученное экстраполяционным методом. Если ограничиться лишь одной итерацией, то вычислительный процесс приобретает характер методов предиктор – корректор.

Можно подобный процесс организовать и так, чтобы экстраполяционная формула применялась при значении q на единицу больше, чем интерполяционная. Тогда они будут характеризоваться погрешностями одного порядка малости по h . Но эти погрешности будут иметь разные знаки, что позволяет составить такую линейную комбинацию этих приближений, которая будет на порядок точнее приближать y_{n+1} . Коэффициенты этой линейной комбинации очевидным образом представляются через известные множители при $h^{q+3} u^{(q+3)}(x_n)$ в главных членах погрешностей соответствующих формул.

Задачи и упражнения

1. С помощью интерполяционного метода Адамса ($q = 2$) найти приближенное решение задачи Коши на сетке узлов с $h = 0,1$,

построив начало таблицы с использованием метода Рунге – Кутта. Для нахождения y_{n+1} построить вычислительный процесс типа предиктор – корректор, взяв в качестве предиктора соответствующий экстраполяционный метод Адамса. Результаты вычислений представить в виде таблицы значений y_{n+1} , полученных по формулам предиктор и корректор, при следующих входных данных:

а) $u' = \frac{e^x}{u} - 1, u(1) = 0,5, x \in [1; 2,5];$

б) $u' = \frac{e^u - 1}{e^u + 1} + x^2 + 1, u(0) = 0, x \in [0; 1,5];$

в) $u' = \sin(u^2 + 1) - u + 1, u(1) = 1, x \in [1; 2,5];$

г) $u' = \frac{2^x}{(u^2 + 1)} - 2, u(0) = 1, x \in [0; 1,5];$

д) $u' = \ln(u^2 + 1) + 2, u(0) = 1, x \in [0; 1,5];$

е) $u' = \ln(u^2 + 1) - 3u + 1, u(1) = 0, x \in [1; 2,5];$

ж) $u' = \ln(u + 2) - 2x, u(0) = 0, x \in [0; 1,5];$

з) $u' = e^{-u} - 2, u(0) = 1, x \in [0; 1,5];$

и) $u' = (u^2 + 2)e^{-u} + 1, u(0) = 0, x \in [0; 1,5];$

к) $u' = \frac{(e^{-u} + 1)}{(u^2 + 1)}, u(0) = 0, x \in [0; 1,5];$

л) $u' = \sin(u + 1) - 2 \cos u, u(0) = 1, x \in [0; 1,5];$

м) $u' = \frac{(x^2 + 1)}{u^2}, u(1) = 1, x \in [1; 2,5];$

н) $u' = \frac{u^{-2} - 1}{x^2 + 1}, u(1) = 2, x \in [1; 2,5];$

о) $u' = \frac{x^2 - 1}{u^2 + 1}, u(0) = 0, x \in [0; 1,5];$

п) $u' = x^2 u^2 - 2xu + \frac{2}{u^2 + 1}, u(0) = 0, x \in [0; 1,5].$

Тема 18. Метод сеток решения граничной задачи

1.17. Идея метода сеток

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано дифференциальное уравнение

$$L(u) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad (18.1)$$

$a \leq x \leq b$ с граничными условиями

$$l_a(u) = \alpha_1 u'(a) + \alpha_0 u(a) = A, \quad \alpha_1^2 + \alpha_0^2 > 0, \quad (18.2)$$

$$l_b(u) = \beta_1 u'(b) + \beta_0 u(b) = B, \quad \beta_1^2 + \beta_0^2 > 0. \quad (18.3)$$

Будем предполагать, что эта граничная задача имеет единственное решение.

Идея метода сеток состоит в следующем. Рассмотрим на $[a, b]$ некоторую систему точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Совокупность этих точек называют сеткой, а каждое значение x_k – узлом сетки. Значения функции $u(x)$ в точках сетки называют сеточными значениями функции. В методе сеток находят приближенные значения функции $u(x)$, которые в точках x_k обозначают y_k , так что $y_k \approx u(x_k)$. Для нахождения y_k рассматривается некоторая система уравнений

$$\Lambda(y_k) = \sum_{j=0}^n C_{kj} y_j = D_k f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (18.4)$$

где C_{kj}, D_k – некоторые численные коэффициенты, $f_k = f(x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, $f_0 = A$, $f_n = B$. О том, как выбираются эти величины, скажем ниже. Допустим, что система (18.4) однозначно разрешима, и мы нашли значения y_0, y_1, \dots, y_n . По смыслу задачи эти значения принимаются в качестве приближенных для точного значения $u(x)$, т. е.

$$y_k \approx u(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (18.5)$$

Для того чтобы равенства (18.5) имели место с возможно меньшей по норме погрешностью, к системе (18.4) должны быть предъявлены некоторые требования. Наиболее естественными из них являются следующие:

1) система (18.4) должна хорошо отражать свойства граничных условий. Это означает, что первое ее уравнение $\Lambda(y_0) = D_0 f_0$

аппроксимирует граничное условие (18.2), а последнее $\Lambda(y_n) = D_n f_n$ аппроксимирует граничное условие (18.3);

2) во внутренних точках отрезка $[a, b]$ система (18.4) должна хорошо отражать свойства дифференциального уравнения (18.1), т. е. $\Lambda(y_k) = D_k f_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ аппроксимирует уравнение (18.1) в соответствующих точках сетки.

Близость равенства $\Lambda(y_k) = D_k f_k$ к дифференциальным уравнениям (18.1)–(18.3) в точках сетки будем характеризовать величиной погрешности, с которой выполняется это равенство при подстановке в него вместо приближенных значений y_0, y_1, \dots, y_n соответствующих точных значений $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n)$. Величину погрешности охарактеризуем указанием на ее порядок относительно числа $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$. Заметим, что число h определяет густоту выбранной сетки. Точное решение $u(x)$ системы (18.4), вообще говоря, не удовлетворяет, поэтому после подстановки в эту систему значений $u(x_i)$ вместо y_i , $i = 0, 1, \dots, n$ мы получим

$$\Lambda(u(x_k)) = D_k f_k + r_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где r_k имеет смысл погрешности, с которой точное решение граничной задачи удовлетворяет системе (18.4). В дальнейшем эту величину мы будем называть погрешностью аппроксимации.

18.2. Замена граничной задачи системой алгебраических уравнений

Вначале рассмотрим метод, в основе которого лежит замена производных от функции $u(x)$ разностными отношениями. Пусть имеем граничную задачу (18.1)–(18.3). Выберем на $[a, b]$ сетку равноотстоящих узлов (равномерную сетку) $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, и дифференциальное уравнение (18.1) будем рассматривать только во внутренних узлах сетки, полагая $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, а граничные условия будем рассматривать при $x_0 = a$ и $x_n = b$. Положим в (18.1) $x = x_k$:

$$u''(x_k) + p(x_k)u'(x_k) + q(x_k)u(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (18.6)$$

и поставим задачу выразить $u'(x_k)$ и $u''(x_k)$ через значения $u(x)$ в узлах x_{k-1}, x_k, x_{k+1} , т. е. через сеточные значения $u(x_{k-1}), u(x_k), u(x_{k+1})$. Для этой

цели запишем разложение $u(x_{k+1}), u(x_{k-1})$ в окрестности x_k по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$u(x_{k+1}) = u(x_k) + \frac{h}{1!} u'(x_k) + \frac{h^2}{2!} u''(x_k) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_k) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_k + \Theta_1 h), \quad (18.7)$$

$$u(x_{k-1}) = u(x_k) - \frac{h}{1!} u'(x_k) + \frac{h^2}{2!} u''(x_k) - \frac{h^3}{3!} u'''(x_k) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_k - \Theta_2 h), \quad (18.8)$$

$0 \leq \Theta_1, \Theta_2 \leq 1$. Предполагаем, что $u(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывные производные до четвертого порядка включительно. Переносим в (18.7) в левую часть $u(x_k)$ и делим обе части на h , получим

$$\frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} = u'(x_k) + O(h). \quad (18.9)$$

Если в (18.9) отбросить $O(h)$, то мы получим приближенное выражение $u'(x)$ через $u(x_{k+1})$ и $u(x_k)$, которое часто называют правосторонней разностной производной. Аналогично из (18.8) можно получить левостороннюю производную следующего вида:

$$\frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{h} = u'(x_k) + O(h). \quad (18.10)$$

Взяв полуразность (18.7) и (18.8), получим симметричное выражение для $u'(x)$:

$$\frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1}))}{2h} = u'(x_k) + O(h^2). \quad (18.11)$$

Сложив формулы (18.7) и (18.8), легко получить симметричное выражение для $u''(x)$:

$$\frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} = u''(x_k) + O(h^2). \quad (18.12)$$

Это не единственные возможные выражения для $u'(x)$ и $u''(x)$. Привлекая значения $u(x)$ в других точках, кроме указанных, можно получить более точные замены, но они будут и более сложными. Положим теперь в (18.1) $x = x_k$ и значения $u''(x)$ и $u'(x)$ заменим по формулам (18.11), (18.12), а все возникающие члены порядка h^2 перенесем в правую часть. Тогда получим

$$\frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} + p(x_k) \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1}))}{2h} + q(x_k) u(x_k) = f(x_k) + O(h^2).$$

Умножив теперь обе части последнего равенства на h^2 и отбросив член, имеющий вид $O(h^4)$, для $y_k \approx u(x_k)$ будем иметь

$$\left(1 + \frac{h}{2} p(x_k)\right)y_{k+1} + (h^2 q(x_k) - 2)y_k + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_k)\right)y_{k-1} = h^2 f(x_k), \quad (18.13)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично на основании граничных условий (18.2), (18.3) можно получить

$$\alpha_1 y_1 + (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 = hA, \quad (18.14)$$

$$(\beta_1 + h\beta_0)y_n - \beta_1 y_{n-1} = hB. \quad (18.15)$$

Отметим, что при записи (18.14), (18.15) в точных равенствах мы отбросили величины $O(h^2)$.

Уравнения (18.13), (18.14), (18.15) в совокупности образуют систему линейных алгебраических уравнений для определения сеточных значений y_0, y_1, \dots, y_n . Матрица коэффициентов этой системы трехдиагональная и имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_0 h - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{h}{2} p_1 & h^2 q_1 - 2 & 1 + \frac{h}{2} p_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \frac{h}{2} p_{n-1} & h^2 q_{n-1} - 2 & 1 + \frac{h}{2} p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_1 & \beta_1 + h\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь обозначить $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$,

$F = (hA, h^2 f_1, h^2 f_2, \dots, h^2 f_{n-1}, hB)^T$, то для нахождения компонент Y получим систему линейных алгебраических уравнений в векторном виде

$$CY = F. \quad (18.16)$$

Эта система аппроксимирует исходную задачу (18.1)–(18.3) в точках сетки, при этом внутренние уравнения (18.16) аппроксимируют исходное уравнение (18.1) с погрешностью $O(h^2)$, а граничные условия (18.2), (18.3) аппроксимируются крайними условиями (18.16) с погрешностью $O(h)$, поэтому общим порядком аппроксимации будет $O(h)$. Для избежания такой потери порядка аппроксимации используются методы повышения порядка аппроксимации граничных условий.

18.3. Повышение порядка аппроксимации граничных условий

Предположим, что исходное уравнение (18.1) выполняется не только во внутренних точках сетки, но и в граничных точках $x = a$ и $x = b$.

Представим функцию $u(x)$ в точке $x = x_1$ через ее значение и значение ее производных в точках $x_0 = a$ по следующей формуле:

$$u(x_1) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0) + O(h^3).$$

Подставляя сюда вместо $u''(x_0)$ ее значение из исходного дифференциального уравнения

$$u''(x_0) = f(x_0) - p(x_0)u'(x_0) - q(x_0)u(x_0),$$

получим

$$u(x_1) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} (f(x_0) - p(x_0)u'(x_0) - q(x_0)u(x_0)) + O(h^3).$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$u(x_1) = u(x_0) + h u'(x_0) \left(1 - \frac{h}{2} p(x_0)\right) + \frac{h^2}{2} (f(x_0) - q(x_0)u(x_0)) + O(h^3).$$

Тогда при условии, что $1 - \frac{h}{2} p(x_0) \neq 0$, будем иметь

$$u'(x_0) = \frac{\left(\frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - \frac{h}{2} (f(x_0) - q(x_0)u(x_0)) + O(h^2)\right)}{\left(1 - \frac{h}{2} p(x_0)\right)}.$$

Сейчас это значение подставим в краевое условие (18.2):

$$\frac{\alpha_1 \left(\frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - \frac{h}{2} (f(x_0) - q(x_0)u(x_0))\right)}{\left(1 - \frac{h}{2} p(x_0)\right) + \alpha_0 u(x_0)} = A + O(h^2).$$

Отбросив теперь $O(h^2)$ в правой части последнего равенства и после некоторых преобразований для приближенного решения получим

$$y_1 \frac{\alpha_1}{1 - \frac{h}{2} p_0} + y_0 \left(\alpha_0 h - \frac{\alpha_1 - \frac{h}{2} q_0}{1 - \frac{h}{2} p_0} \right) = hA + \frac{\frac{h^2}{2} f_0}{\left(1 - \frac{h}{2} p_0\right)}.$$

Если теперь обозначить

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha_1}{1 - \frac{h}{2} p_0}, \alpha_0^* = \alpha_0 h - \frac{\alpha_1 - \frac{h}{2} q_0}{1 - \frac{h}{2} p_0}, hA^* = hA + \frac{\frac{h^2}{2} f_0}{\left(1 - \frac{h}{2} p_0\right)},$$

то соотношение (18.14) принимает вид

$$\alpha_1^* y_1 + \alpha_0^* y_0 = hA^*.$$

Точно таким же образом поступим с граничным условием (18.3), используя следующее представление по формуле Тейлора:

$$u(x_{n-1}) = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2} u''(x_n) + O(h^3).$$

Воспользовавшись исходным уравнением, получим

$$u(x_{n-1}) = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2} (f(x_n) - p(x_n)u'(x_n) - q(x_n)u(x_n)) + O(h^3).$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$u(x_n) - u(x_{n-1}) = hu'(x_n) \left(1 + \frac{h}{2} p(x_n)\right) + \frac{h^2}{2} (q(x_n)u(x_n) - f(x_n)) + O(h^3).$$

Отсюда при условии, что $1 + \frac{h}{2} p(x_0) \neq 0$, будем иметь

$$u'(x_n) = \frac{\left(\frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} + \frac{h}{2} (q(x_n)u(x_n) - f(x_n)) + O(h^2)\right)}{\left(1 + \frac{h}{2} p(x_n)\right)}.$$

Сейчас это значение подставим в краевое условие (18.3):

$$\frac{\beta_1 \left(\frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} + \frac{h}{2} (q(x_n)u(x_n) - f(x_n))\right)}{\left(1 + \frac{h}{2} p(x_n)\right) + \beta_0 u(x_n)} = B + O(h^2).$$

Отбросим теперь $O(h^2)$ в правой части последнего равенства и после некоторых преобразований для приближенного решения получаем

$$y_n \frac{\beta_1}{1 + \frac{h}{2} p_n} + y_{n-1} \left(\beta_0 h - \frac{\beta_1 - \frac{h}{2} q_n}{1 + \frac{h}{2} p_n} \right) = hB + \frac{\frac{h^2}{2} f_n}{\left(1 + \frac{h}{2} p_n\right)}.$$

Обозначим

$$\beta_1^* = \frac{\beta_1}{1 + \frac{h}{2} p_n}, \beta_0^* = \beta_0 h - \frac{\beta_1 + \frac{h}{2} q_n}{1 + \frac{h}{2} p_n}, B^* = B + \frac{\frac{h^2}{2} f_n}{\left(1 + \frac{h}{2} p_n\right)}.$$

Тогда уравнение (18.15) принимает вид $\beta_1^* y_n + \beta_0 y_{n-1} = hB^*$ и для y получаем систему, аналогичную (18.17), но имеющую погрешность аппроксимации граничных условий, равную $O(h^2)$.

18.4. Метод прогонки решения сеточных уравнений

Рассмотрим систему уравнений (18.13), записанную в виде

$$a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad (18.16)$$

где $a_k = 1 - \frac{h}{2} p(x_k)$, $b_k = 2 - h^2 q(x_k)$, $c_k = 1 + \frac{h}{2} p(x_k)$, $d_k = h^2 f(x_k)$. К системе (18.16) добавим аппроксимированные граничные условия, которые после введенных обозначений запишем в виде

$$\alpha_1^* y_1 + \alpha_0^* y_0 = a^*, \quad (18.17)$$

$$\beta_1^* y_n + \beta_0 y_{n-1} = b^*, \quad (18.18)$$

где $a^* = hA^*$, $b^* = hB^*$. Будем также предполагать выполнение условий $|b_i| > 2$, $|a_i| + |c_i| = 2$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $(\alpha_1^*)^2 + (\alpha_0^*)^2 > 0$, $(\beta_1^*)^2 + (\beta_0^*)^2 > 0$ и пусть $\alpha_0^* \neq 0$ (об остальных предположениях будет сказано ниже). Из (18.17) найдем

$$y_0 = -\frac{\alpha_1^*}{\alpha_0^*} y_1 + \frac{a^*}{\alpha_0^*}. \quad (18.19)$$

Решение y_k в остальных точках будем находить по аналогии с (18.19) в виде

$$y_k = \xi_{k+1} y_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (18.20)$$

Здесь ξ_{k+1} , η_{k+1} — пока неопределенные коэффициенты. Поскольку (18.20) имеет рекуррентный вид, то для $k-1$ можно записать $y_{k-1} = \xi_k y_k + \eta_k$. Подставив это выражение в (18.16), получим

$$a_k (\xi_k y_k + \eta_k) - b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Найдем отсюда y_k через y_{k+1} , предполагая, что $b_k - \xi_k c_k \neq 0$:

$$y_k = \frac{c_k}{b_k - \xi_k c_k} y_{k+1} + \frac{a_k \eta_k - d_k}{b_k - \xi_k c_k}. \quad (18.21)$$

Для совпадения (18.21) с (18.20) необходимо потребовать, чтобы

$$\xi_{k+1} = \frac{c_k}{b_k - \xi_k c_k}, \eta_{k+1} = \frac{a_k \eta_k - d_k}{b_k - \xi_k c_k}, k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (18.22)$$

Формулы (18.22) – рекуррентные формулы для определения ξ_k и η_k , но для задания «начала» счета необходимо обратиться к (18.19), откуда сразу же будет следовать

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1^*}{\alpha_0^*}, \eta_1 = -\frac{a^*}{\alpha_0^*}. \quad (18.23)$$

Таким образом, все ξ_{k+1} и η_{k+1} будут определены. Но для определения y_k по формуле (18.20) необходимо задать y_n . Для этого воспользуемся (18.20) при $k = n-1$ и граничным условием (18.18). Имеем

$$\begin{cases} \beta_1^* y_n + \beta_1 y_{n-1} = b^*, \\ y_{n-1} = \xi_n y_n + \eta_n. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$y_n = \frac{b^* - \beta_0^* \eta_0}{\beta_1^* + \beta_0^* \xi_n}. \quad (18.24)$$

Если исходная задача корректна, то можно показать, что $|\xi_k| < 1$ для всех k , т.е. метод прогонки устойчив и все действия в этом алгоритме правомочны. Итак, алгоритм метода прогонки заключается в следующих действиях:

- 1) записать систему сеточных уравнений (18.16), (18.17), (18.18), аппроксимирующих исходную дифференциальную задачу;
- 2) определить коэффициенты ξ_{k+1} и η_{k+1} по формулам (18.22) с начальными данными (18.23);
- 3) вычислить решение y_k в точках сетки по формуле (18.20) с начальным данным (18.24).

Еще раз отметим, что метод сеток позволяет найти приближенное решение исходной граничной задачи на конечном множестве точек из области, где рассматривается исходная задача.

Задачи и упражнения

1. Провести аппроксимацию дифференциального уравнения системой сеточных уравнений на равномерной сетке узлов с погрешностью $O(h^2)$, аппроксимировать граничные условия с погрешностью $O(h^2)$ и с

помощью метода прогонки при $h = 0,1$ найти приближенное решение исходной задачи при следующих входных данных:

а) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x + 2,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + u(0) = 0, u'(1) - 2u(1) = 1;$

б) $u''(x) - (x^2 + 1)u(x) = -x^5 - x^3 + 6x + 2,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 2;$

в) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -x^4 + x^2 + 2,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + 2u(0) = 0, 2u'(1) + u(1) = 5;$

г) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x + 2,$
 $0 \leq x \leq 1, 3u'(0) + u(0) = 0, u'(1) + u(1) = -1;$

д) $u''(x) - xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 6x - 2,$
 $0 \leq x \leq 1, 2u'(0) + 1,5u(0) = 0, u'(1) - 2u(1) = 1;$

е) $u''(x) - (x^2 + 1)u(x) = x^5 + x^3 - 6x,$
 $0 \leq x \leq 1, 2u'(0) + u(0) = 0, u'(1) - 3u(1) = -6;$

ж) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = x^4 + x^2 - 2,$
 $0 \leq x \leq 1, 2u'(0) + u(0) = 0, 3u'(1) - u(1) = -3;$

з) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 2,$
 $0 \leq x \leq 1, 2u'(0) + \frac{1}{2}u(0) = 0, u'(1) - 2u(1) = -9;$

и) $u''(x) - (x^2 + 1)u(x) = -2x^5 - 2x^3 + 12x,$
 $0 \leq x \leq 1, 3u'(0) + u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 5;$

к) $u''(x) + xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -2x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 + 12x + 2,$
 $0 \leq x \leq 1, 2u'(0) + u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 5;$

л) $u''(x) + 2xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -2x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 12x + 4,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + 2u(0) = 0, u'(1) - 2u(1) = 2;$

м) $u''(x) + 2xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + 1,5u(0) = 0, 2u'(1) - u(1) = 4;$

н) $u''(x) + 2xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -2x^4 + 6x^2 + 4,$
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) + 0,5u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 2;$

о) $u''(x) + 2xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 6x + 4,$

$$0 \leq x \leq 1, u'(0) + 2u(0) = 0, 2u'(1) - u(1) = 0;$$

п) $u''(x) + 2xu'(x) - (x^2 + 1)u(x) = -2x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 12x + 4,$

$$0 \leq x \leq 1, u'(0) + 0,5u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 6;$$

Тема 19. Метод моментов и метод Галеркина

19.1. Идея метода моментов

Метод моментов позволяет находить приближенное решение исходной задачи в аналитической форме. Этот метод мы рассмотрим на примере граничной задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть на $a \leq x \leq b$ задано дифференциальное уравнение

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0 \quad (19.1)$$

с граничными условиями

$$l_a(u) = \alpha_1 u'(a) + \alpha_0 u(a) = A, \alpha_1^2 + \alpha_0^2 > 0, \quad (19.2)$$

$$l_b(u) = \beta_1 u'(b) + \beta_0 u(b) = B, \beta_1^2 + \beta_0^2 > 0, \quad (19.3)$$

Будем считать, что поставленная задача имеет на $[a, b]$ единственное решение и это решение непрерывно дифференцируемо на $[a, b]$ до второго порядка. В методе моментов применительно к задаче (19.1)–(19.3) рассматриваются следующие две системы функций.

1. Система функций $\{\psi_k(x)\}$ подчинена условиям:
 - а) $\psi_k(x) \in C[a, b], k = 0, 1, 2, \dots;$
 - б) система функций $\{\psi_k(x)\}$ образует замкнутую на $[a, b]$ систему.
2. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ подчинена условиям:
 - а) $\varphi_k(x) \in C_2[a, b], k = 0, 1, 2, \dots;$
 - б) при любом конечном k функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ линейно независимы на $[a, b];$
 - в) функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям (19.2), (19.3), а функции $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют требованиям $l_a(\varphi_k) = 0, l_b(\varphi_k) = 0;$
 - г) функции $\varphi_k(x)$ образуют в классе функций $C_2[a, b]$ полную систему.

Сделаем некоторые пояснения. Систему функций $\{\psi_k(x)\}$ будем называть замкнутой на множестве интегрируемых на $[a, b]$ функций, если не существует такой непрерывной функции, кроме тождественного нуля, которая была бы ортогональной на $[a, b]$ ко всем функциям $\{\psi_k(x)\}$. Таким образом, если система функций $\{\psi_k(x)\}$ замкнута, то из условия

$$\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx = 0, k = 0, 1, \dots,$$

где $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, следует, что $f(x) \equiv 0$. Свойство полноты, о котором говорится в условии 2г, понимается так. Обозначим через G класс функций $u(x)$, принадлежащих $C_2[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (19.2), (19.3). Говорят, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ полна в классе G , если для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(x) \in G$ можно указать такое n и такие параметры a_1, a_2, \dots, a_n , что имеют место неравенства

$$|u^{(i)}(x) - u_n^{(i)}(x)| \leq \varepsilon, i = 0, 1, 2,$$

где $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$. Это говорит о том, что для любой функции $u(x) \in G$ найдется такая функция $u_n(x)$, которая на $[a, b]$ будет сколь угодно точно приближать функцию $u(x)$ вместе с ее производными $u'(x)$ и $u''(x)$.

Перейдем к построению приближенного решения задачи (19.1)–(19.3) методом моментов. Будем считать функцию $F(x, y, z, t)$ непрерывной по всем аргументам в области $\Omega = \{a \leq x \leq b, -\infty < y, z, t < \infty\}$. Рассмотрим

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x),$$

где a_k – некоторые численные параметры, на выбор которых будет указано ниже. Отметим, что функция $u_n(x)$ удовлетворяет граничным условиям (19.2), (19.3) при любых значениях a_k . Параметры a_1, a_2, \dots, a_n будем выбирать таким образом, чтобы функция $u_n(x)$ в указанном ниже смысле возможно лучше удовлетворяла дифференциальному уравнению (19.1). Подставим в $F(x, u, u', u'')$ вместо u, u', u'' соответственно выражения $u_n(x), u'_n(x), u''_n(x)$. Получим $F(x, u_n, u'_n, u''_n) = F_n(x)$. Образует

обобщенные моменты функции $\mu_k = \int_a^b F_n(x) \psi_k(x) dx, k = 0, 1, \dots$. По своему смыслу момент μ_k является некоторой функцией параметров a_1, a_2, \dots, a_n . Выберем их так, чтобы первые n моментов обратились в нуль

$$\mu_k = 0, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (19.4)$$

Эти равенства образуют систему n уравнений, из которых должны быть найдены коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n . Пусть мы решили систему (19.4) и нашли значения $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$. В методе моментов в качестве n -приближения к решению граничной задачи (19.1)–(19.3) принимают функцию $u_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k^* \varphi_k(x)$.

1.18. Метод Галеркина

Если уравнение (19.1) линейно, то запись системы уравнений для определения a_k упростится. Рассмотрим, например, уравнение

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = L(u) - f(x) = 0,$$

где $L(u) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x) \in C_1[a, b]$, $q(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ с граничными условиями $u(a) = A$, $u(b) = B$. В этом случае в методе моментов мы получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^n C_{ki} a_k - D_i = 0, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (19.5)$$

где $C_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) \psi_i(x) dx$, $D_i = \int_a^b \psi_i(x) (f(x) - L(\varphi_0)) dx$.

В методе Галеркина обе системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ совпадают, поэтому система уравнений (19.4) принимает следующую форму:

$$\int_a^b F(x, u_n(x), u_n'(x), u_n''(x)) \varphi_k(x) dx = 0, k = 1, 2, \dots, n. \quad (19.6)$$

Здесь мы считаем, что система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством замкнутости. Если исходное дифференциальное уравнение является

самосопряженным, то в методе Галеркина система уравнений (19.5) в силу (19.6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n C_{ki} a_k - D_i = 0, i = 0, 1, \dots, n, \quad (19.7)$$

где $C_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) \varphi_i(x) dx$, $D_i = \int_a^b \varphi_i(x)(f(x) - L(\varphi_0)) dx$.

Запись коэффициентов C_{ki} можно упростить следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \int_a^b \left(\frac{d}{dx} (p(x) \varphi'_k(x) - q(x) \varphi_k(x)) \right) \varphi_i(x) dx = \\ &= p(x) \varphi'_k(x) \varphi_i(x) \Big|_a^b - \int_a^b (p(x) \varphi'_k(x) \varphi'_i(x) + q(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x)) dx = \\ &= - \int_a^b (p(x) \varphi'_k(x) \varphi'_i(x) + q(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x)) dx, \end{aligned}$$

так как $\varphi'_k(a) \varphi_i(a) = 0$, $\varphi'_k(b) \varphi_i(b) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Отметим, что $C_{ki} = C_{ik}$ и матрица системы (19.7) симметрична. Аналогично для D_i получим

$$D_i = \int_a^b (p(x) \varphi'_k(x) \varphi'_i(x) + q(x) \varphi_0(x) \varphi_i(x) + f(x) \varphi_i(x)) dx.$$

Можно показать, что система (19.7) однозначно разрешима.

Пример 1. Методом Галеркина найти приближенное решение задачи

$$\begin{aligned} u''(x) + 2xu'(x) - u(x) &= 3x^2 - x + 1, \\ u'(0) &= -1, u'(1) + u(1) = 2. \end{aligned}$$

Решение. Подберем систему функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, используя комбинации функций $1, x, x^2, \dots$. Функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять условиям $\varphi'_0(0) = -1$, $\varphi'_0(1) + \varphi_0(1) = 2$. Будем искать $\varphi_0(x)$ в виде $\varphi_0(x) = kx + b$. Так как $\varphi'_0(x) = k$, то $k = -1$, $b = 4$ и $\varphi_0(x) = -x + 4$. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ должны удовлетворять условиям $\varphi'_k(0) = 0$, $\varphi'_k(1) + \varphi_k(1) = 0$. Первое условие будет выполняться для всякой функции $\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$. Значения b_k найдем из второго условия. Имеем $k + 1 + b_k + 1 = 0$, т. е. $b_k = -(k + 2)$. Пусть $k = 1, 2$. Получим систему функций

$$\varphi_0(x) = -x + 4, \varphi_1(x) = x^2 - 3, \varphi_2(x) = x^3 - 4.$$

Запишем вид их производных первого и второго порядка:

$$\varphi'_0(x) = -1, \varphi'_1(x) = 2x, \varphi'_2(x) = 3x^2,$$

$$\varphi''_0(x) = 0, \varphi''_1(x) = 2, \varphi''_2(x) = 6x.$$

Прежде чем составлять систему для определения a_k , отметим, что наше исходное уравнение имеет вид, отличный от того, для которого мы вводили метод Галеркина. Если исходное уравнение имеет вид $u''(x) + p(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x)$, то коэффициенты системы для a_k определяются следующими формулами:

$$C_{ki} = \int_a^b (\varphi''_k(x) + p(x)\varphi'_k(x) - q(x)\varphi_k(x))\varphi_i(x) dx,$$

$$d_i = \int_a^b (f(x) - \varphi''_k(x) - p(x)\varphi'_k(x) + q(x)\varphi_0(x))\varphi_i(x) dx.$$

Тогда

$$\varphi''_1(x) + p(x)\varphi'_1(x) - q(x)\varphi_1(x) = 2 - 2x \cdot 2x - x^2 + 3 = 3x^2 + 5;$$

$$\varphi''_2(x) + p(x)\varphi'_2(x) - q(x)\varphi_2(x) = 6x + 2x \cdot 3x^2 - x^3 + 4 = 5x^3 + 6x + 4;$$

$$f(x) - \varphi''_0(x) - p(x)\varphi'_0(x) + q(x)\varphi_0(x) =$$

$$= 3x^2 - x + 1 - 0 + 2x(-1) + x - 4 = 4x^2 - 3x - 4.$$

Найдем значения C_{ki} и d_i для $k = 1, 2$:

$$C_{11} = \int_0^1 (3x^2 + 5)(x^2 - 3) dx = \int_0^1 (3x^4 - 4x^2 - 15) dx = -\frac{236}{15} = -15,7333;$$

$$C_{12} = \int_0^1 (3x^2 + 5)(x^3 - 4) dx = \int_0^1 (3x^5 + 5x^3 - 12x^2 - 20) dx = -\frac{89}{4} = -22,25;$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= \int_0^1 (5x^3 + 6x + 4)(x^2 - 3) dx = \\ &= \int_0^1 (5x^5 + 15x^3 + 6x^3 - 18x + 4x^2 - 12) dx = -21,4167; \end{aligned}$$

$$C_{22} = \int_0^1 (5x^3 + 6x + 4)(x^3 - 4) dx =$$

$$= \int_0^1 (5x^6 - 20x^3 + 6x^4 - 24x + 4x^3 - 16) dx = -30,0857;$$

$$d_1 = \int_0^1 (3x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3) dx =$$

$$= \int_0^1 (3x^4 + 9x^2 - 2x^3 + 6x - 3x^2 + 9) dx = \frac{81}{10} = 8,1;$$

$$d_2 = \int_0^1 (3x^2 - 2x - 3)(x^3 - 4) dx =$$

$$= \int_0^1 (3x^5 - 12x^2 - 2x^4 + 8x - 3x^3 + 12) dx = \frac{227}{20} = 11,35.$$

Тогда для a_1, a_2 будем иметь систему

$$\begin{cases} -15,7333a_1 - 22,25a_2 = 8,1, \\ -21,4167a_1 - 30,0857a_2 = 11,35, \end{cases}$$

из которой получим $a_1 = -2,7865$, $a_2 = 1,6064$. Решение нашей задачи:

$$u(x) \approx 4 - x - 2,2786(x^2 - 3) + 1,6064(x^3 - 4).$$

Задачи и упражнения

1. Методом Галеркина при $n = 2,3$ найти решение граничных задач:

а) $u''(x) + xu'(x) - u(x) = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 6$;

б) $u''(x) + xu'(x) - u(x) = x^2 + 2$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 6$;

в) $u''(x) - xu'(x) - u(x) = x^2 - 2x - 3$,
 $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 0$;

г) $u''(x) - xu'(x) - u(x) = 3x^2 - 2x - 1$,
 $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = -2$;

д) $u''(x) + xu'(x) - u(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 7$;

е) $u''(x) + xu'(x) - u(x) = -2x$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 4$, $u'(1) + u(1) = 8$;

ж) $u''(x) + 2xu'(x) - u(x) = 6x^2 + x + 2$,
 $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 9$;

з) $u''(x) + 2xu'(x) - 2u(x) = 4x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $u'(0) = 1$, $u'(1) + u(1) = 12$;

- и) $u''(x) + 2xu'(x) - u(x) = 6x^2 + x + 2$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = 10$;
- к) $u''(x) + xu'(x) - 2u(x) = -2x - 2, 0 \leq x \leq 2, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = 9$;
- л) $u''(x) - xu'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 6x - 4$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 2, u'(1) + u(1) = 2$;
- м) $u''(x) - xu'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 6x - 6$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 2, u'(1) + u(1) = 3$;
- н) $u''(x) - xu'(x) - u(x) = 3x^2 - 2x - 4$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = 1$;
- о) $u''(x) - 2xu'(x) - u(x) = 10x^2 - 3x - 2$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = -3$;
- п) $u''(x) - 2xu'(x) - u(x) = 10x^2 - 3x - 3$,
 $0 \leq x \leq 1, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = -5$.

Тема 20. Метод наименьших квадратов и метод Ритца

20.1. Метод наименьших квадратов решения операторных уравнений

Рассмотрим алгоритм метода наименьших квадратов применительно к операторным уравнениям. Пусть $L_2[a, b]$ – пространство вещественных функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$, A – линейный оператор со знаменателем из $L_2[a, b]$ и определен на множестве $D(A)$, всюду плотном в $L_2[a, b]$. Рассмотрим уравнение

$$Au = f \quad (20.1)$$

и будем считать, что оно имеет единственное решение. Поставим в соответствие (20.1) функционал

$$I(u) = \|Au - f\|^2, \quad (20.2)$$

где под знаком $\| \cdot \|$ будем понимать норму в пространстве $L_2[a, b]$. Если в $L_2[a, b]$ определено скалярное произведение и Z – некоторый элемент из L_2 , то

$$\|Z\| = (Z, Z)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b Z^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Задачу нахождения решения уравнения (20.1) заменим эквивалентной задачей об определении элемента, минимизирующего в $D(A)$ функционал (20.2). Очевидно, что

$$\min_{u \in D(A)} I(u) = I(u^*) = 0,$$

и элемент u^* является решением уравнения (20.1). Метод решения (20.1) основанный на минимизации функционала (20.2), получил название метода наименьших квадратов. Функционал $I(u)$ можно минимизировать различными способами. Можно это выполнить так. Выберем последовательность линейно независимых элементов $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in D(A)$. Определим элемент u_n – n -приближение к решению уравнения (20.1) по формуле

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (20.3)$$

где a_k – некоторые параметры. Они определяются из условия, чтобы функционал $I(u_n) = \|Au_n - f\|^2$ принимал минимальное значение на подпространстве $D_n(A) \in D(A)$, натянутом на элемент $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Это требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (20.4)$$

Если $a_1^*, a_1^*, \dots, a_n^*$ – решение системы уравнений (20.4), то n -приближение к решению $u(x)$ дается формулой (20.3) при подстановке в нее вместо a_k величин a_k^* .

20.2. Метод наименьших квадратов решения линейной граничной задачи

Дадим более подробное описание метода наименьших квадратов на примере линейной граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$L(u) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad (20.5)$$

с граничными условиями

$$l_a(u) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \quad (20.6)$$

$$l_b(u) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B. \quad (20.7)$$

Будем считать, что задача (20.5)–(20.7) имеет единственное решение и это решение вместе со своими производными до второго порядка включительно непрерывно на $[a, b]$. В методе наименьших квадратов система функций $\{\varphi_k(x)\}$ выбирается применительно к решению (20.5)–(20.7) точно так же, как и в методе моментов. Приближенное решение (20.5)–(20.7) ищется в виде

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (20.8)$$

где a_k – некоторые параметры. Функция $u_n(x)$ удовлетворяет граничным условиям (20.6), (20.7) при любых значениях параметров a_k . Выберем их так, чтобы $u_n(x)$ возможно легче удовлетворяла уравнению (20.5). Подставив (20.8) в (20.5), получим $L(u_n) - f(x) = \varepsilon_n(x)$, при этом почти всегда $\varepsilon_n(x) \neq 0$. Мы заинтересованы в том, чтобы погрешность $\varepsilon_n(x)$ по абсолютной величине была возможно меньшей. Введем в рассмотрение величину δ_n^2 , определяя ее по правилу $\delta_n^2 = \int_a^b \varepsilon_n^2(x) dx$. Параметры

a_1, a_2, \dots, a_n выберем так, чтобы δ_n^2 принимала наименьшее значение. Заметим, что $\delta_n^2 = I(u_n)$, если $I(u_n)$ выбрать по правилу

$$I(u) = \|L(u) - f\|^2 = (L(u) - f, L(u) - f).$$

Здесь скалярное произведение имеет следующий смысл:

$$(q, h) = \int_a^b q(x)h(x) dx$$

для любых $q(x)$ и $h(x)$, принадлежащих $L_2[a, b]$. Имеем

$$L(u_k) = L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n a_k L(\varphi_k),$$

$$\delta_n^2 = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k L(\varphi_k) - f_0 \right)^2 dx,$$

где $f_0 = f - L(\varphi_0)$. Для определения искоемых параметров a_k получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n^2}{\partial a_i} = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k L(\varphi_k) - f_0 \right) L(\varphi_i) dx = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Последнюю запись можно упростить

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k - B_i = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (20.9)$$

где $A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) L(\varphi_i) dx$, $B_i = \int_a^b f_0(x) L(\varphi_i) dx$.

Пример 1. Методом наименьших квадратов решить следующую граничную задачу:

$$u''(x) - xu(x) = 7x - x^4, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = -1, u(1) = 0.$$

Решение. Приближенное решение будем искать в виде (8), положив $n = 2$. Пусть $\varphi_0(x) = ax + b$. Поскольку $\varphi_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям, то легко получить $b = -1$, $a = 1$, т. е. $\varphi_0(x) = x - 1$. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ должны обращаться в нуль на концах отрезка, поэтому выберем их следующим образом: $\varphi_1(x) = x(x - 1)$, $\varphi_2(x) = x^2(x - 1)$. Поскольку $L(u) = u''(x) - xu(x)$, то $L(\varphi_0) = x - x^2$, $L(\varphi_1) = 2 - x^3 + x^2$, $L(\varphi_2) = 6x - 2 - x^4 + x^3$, $f_0 = 6x - x^4 + x^2$.

Тогда

$$A_{11} = \int_0^1 (2 - x^3 + x^2) dx = 4,3429;$$

$$A_{12} = \int_0^1 (2 - x^3 + x^2)(6x - 2 - x^4 + x^3) dx = -1,1607;$$

$$A_{22} = \int_0^1 (6x - 2 - x^4 + x^3)^2 dx = -1,696;$$

$$B_1 = \int_0^1 (6x - x^4 + x^2)(2 - x^3 + x^2) dx = 6,5821;$$

$$B_2 = \int_0^1 (6x - x^4 + x^2)(6x - 2 - x^4 + x^3) dx = 5,2432.$$

Для a_1, a_2 получаем систему

$$\begin{cases} 4,3429a_1 - 1,1607a_2 = 6,5821, \\ -1,1607a_1 - 1,696a_2 = 5,2432, \end{cases}$$

из которой определяем $a_1 = 0,5827, a_2 = -3,49$. Таким образом, приближенное решение принимает вид

$$u_2(x) = x - 1 + 0,5827x(x - 1) - 3,49x^2(x - 1).$$

20.3. Метод Ритца

Вычислительную схему метода Ритца изложим на частном примере решения следующей граничной задачи:

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (20.10)$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad (20.11)$$

где $p(x) \geq p_0 > 0, p(x) \in C_1[a, b], q(x) \geq 0, q(x), f(x) \in C[a, b]$. Будем предполагать, что задача (20.11)–(20.12) имеет единственное решение. Рассмотрим функционал

$$I(u) = \int_a^b (p(x)(u'(x))^2 + q(x)u^2(x) + 2f(x)u(x)) dx. \quad (20.12)$$

Имеет место утверждение, что его минимальное значение на классе непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (20.11), достигается на точном решении исходной задачи (20.10)–(20.11).

В методе Ритца n -приближение к минимизирующей функции $u(x)$ ищется в виде

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x),$$

где φ_k – некоторые известные функции, выбор которых подчинен следующим условиям:

- 1) $\varphi_k(x) \in C_1[a, b], k = 0, 1, \dots$;
- 2) $\varphi_0(a) = A, \varphi_0(b) = B, \varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0, k = 1, 2, \dots$;
- 3) при любом конечном n $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – линейно независимы;

4) образованное по $\varphi_k(x)$ семейство функций удовлетворяет условию C_1 – полноты.

Отметим, что при любом выборе параметров a_k функции $u_n(x) \in C_1[a, b]$, $u_n(a) = A$, $u_n(b) = B$. Подставив $u_n(x)$ в (20.12), получим

$$I(u_n) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^n A_k a_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ik} a_i a_k,$$

где

$$A_0 = \int_a^b (p(x)(\varphi'_0(x))^2 + q(x)\varphi_0^2(x) + 2f(x)\varphi_0(x)) dx,$$

$$A_k = \int_a^b (p(x)\varphi'_0(x)\varphi'_k(x) + q(x)\varphi_0(x)\varphi_k(x) + f(x)\varphi_k(x)) dx,$$

$$A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b (p(x)\varphi'_k(x)\varphi'_i(x) + q(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)) dx, i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Параметры a_1, a_2, \dots, a_n определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I(u_n)}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n A_{ik} a_i + A_k = 0, k = 1, 2, \dots, n. \quad (20.13)$$

Пример 2. Методом Ритца найти решение следующей граничной задачи

$$u''(x) - xu(x) = x, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 0, u(1) = 1,$$

положив $n = 2$.

Решение. Для определения $u_2(x)$ нам необходимо найти a_1, a_2 , которые удовлетворяют (20.13). Определим коэффициенты этой системы, предварительно выбрав $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_1(x) = x(x-1)$, $\varphi_2(x) = x^2(x-1)$. Для нашей задачи имеем $p(x) = 1$, $q(x) = x$, $f(x) = x$, $\varphi'_0(x) = 1$, $\varphi'_1(x) = 2x - 1$, $\varphi'_2(x) = 3x^2 - 2x$.

Тогда

$$A_1 = \int_0^1 (2x - 1 + x^3(x-1) + 2x^2(x-1)) dx = -0,05,$$

$$A_2 = \int_0^1 (3x^2 - 2x + x^4(x-1) + 2x^3(x-1)) dx = -0,1333,$$

$$A_{11} = \int_0^1 ((2x-1)^2 + x^3(x-1)^2) dx = 0,35,$$

$$A_{12} = \int_0^1 ((2x-1)(3x^2-2x) + x^4(x-1)^2) dx = 0,4262,$$

$$A_{22} = \int_0^1 ((3x^2-2x)^2 + x^5(x-1)^2) dx = 0,806.$$

И для a_1, a_2 получим систему

$$\begin{aligned} 0,35a_1 + 0,4262a_2 &= 0,05, \\ 0,4262a_1 + 0,806a_2 &= 0,1333, \end{aligned}$$

из которой определяем $a_1 = -0,166, a_2 = 0,253$. Таким образом, приближенное решение граничной задачи принимает вид

$$u_2(x) = x - 0,166x(x-1) + 0,253x^2(x-1).$$

Задачи и упражнения

1. Методом наименьших квадратов при $n = 2$ найти решения следующих граничных задач:

а) $u''(x) + (x+1)u'(x) - 2u(x) = 2(2x-1), \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$

$$4u\left(\frac{1}{2}\right) - u'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, u(1) + 2u'(1) = 0;$$

б) $u''(x) + (x-1)u'(x) - 2u(x) = -4x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$

$$4u\left(\frac{1}{2}\right) - u'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, u(1) = 3;$$

в) $u''(x) - xu'(x) - 3u(x) = 2 + 6x - x^2, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$

$$u'\left(\frac{1}{2}\right) = 1,75, u(1) + u'(1) = 7;$$

г) $u''(x) + 2u'(x) - u(x) = -2xe^{-x}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) - u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, u'(1) = 0;$$

$$\text{д) } u''(x) + \frac{2}{x+1} u'(x) - (x+1)u(x) = -1, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, 2u(1) + u'(1) = \frac{3}{4};$$

$$\text{е) } u''(x) - (x+1)u'(x) - u(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, u(1) = \frac{1}{2};$$

$$\text{ж) } u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) = 0, \frac{1}{2} \leq x \leq 1, u'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, u(1) + u'(1) = 1;$$

$$\text{з) } u''(x) + \frac{1}{2x+1} u'(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u(1) = 2\sqrt{3};$$

$$\text{и) } u''(x) + \frac{1}{4x+1} u'(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u(1) = 2\sqrt{5};$$

$$\text{к) } u''(x) + \frac{1}{8x+1} u'(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u(1) = 6;$$

$$\text{л) } u''(x) + (x+1)u'(x) - 0,5u(x) = -0,5(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u(1) = 2\sqrt{2};$$

$$\text{м) } u''(x) + (x+1)u'(x) - u(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 1, u(1) = 2;$$

$$\text{н) } u''(x) + (x+1)u'(x) - u(x) = 1, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 1, u(1) = 2;$$

$$\text{о) } u''(x) + (x+1)u'(x) - 3u(x) = 2(x+1), 0 \leq x \leq 1, u(0) = \frac{1}{3}, u(1) = \frac{8}{3};$$

$$\text{п) } u''(x) + (x+1)u'(x) - 4u(x) = 3(x+1)^2, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 0,25, u(1) = 4.$$

2. Методом Рунге при $n = 2$ найти решение следующих граничных задач:

$$\text{а) } ((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 2, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 0, u(1) = 1;$$

$$\text{б) } ((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 1, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 1, u(1) = 2;$$

$$\text{в) } ((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u(1) = 3;$$

$$\text{г) } ((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x - 1, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 3, u(1) = 4;$$

$$\text{д) } ((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x - 2, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 4, u(1) = 5;$$

$$\text{е) } (xu'(x))' - u(x) = 2x^3, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 1, u(2) = 8;$$

$$\text{ж) } (xu'(x))' - u(x) = 2x^3 + 1, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 2, u(2) = 9;$$

$$\text{з) } (xu'(x))' - u(x) = 2x^3 + 2, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 3, u(2) = 10;$$

- и) $(x u'(x))' - 3u(x) = 0, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 1, u(2) = 8;$
- к) $(x u'(x))' - 3u(x) = -3, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 2, u(2) = 9;$
- л) $(x u'(x))' - 3u(x) = -6, 1 \leq x \leq 2, u(1) = 3, u(2) = 10;$
- м) $((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 3, 0 \leq x \leq 1, u(0) = -1, u(1) = 0;$
- н) $((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 4, 0 \leq x \leq 1, u(0) = -2, u(1) = -1;$
- о) $((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 5, 0 \leq x \leq 1, u(0) = -3, u(1) = -2;$
- п) $((x+1)u'(x))' - u(x) = -x^2 + 4x + 6, 0 \leq x \leq 1, u(0) = -4, u(1) = -3.$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Методом Пикара ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши $u'(x) = u + x, u(0) = 1$.
2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.
3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.
4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = x + 1, 0 \leq x \leq 1, u'(0) = 0, u'(1) + u(1) = 2$.
5. Краевую задачу из п. 4 решить методом наименьших квадратов, полагая $n = 2$.

Вариант 2

1. Методом рядов ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши $u'(x) = u + x, u(0) = 1$.
2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.
3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.
4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + xu'(x) - 3u(x) = 2x - 1, 0 \leq x \leq 1, u'(0) = 2, u'(1) + u(1) = 8\frac{1}{3}$.

5. Краевую задачу из п. 4 решить методом наименьших квадратов, полагая $n = 2$.

Вариант 3

1. Исследовать устойчивость явного метода Эйлера решения следующей задачи Коши: $u'(x) = -2u$, $u(0) = 3$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты третьего порядка точности решения следующей задачи Коши: $u'(x) = u^2x + x + 1$, $u(0) = 1$.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + xu'(x) - 3u(x) = 4x - 1$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + u(0) = \frac{4}{3}$, $u'(1) = 4$.

5. Краевую задачу из п. 4 решить методом наименьших квадратов, полагая $n = 2$.

Вариант 4

1. Исследовать устойчивость явного метода Эйлера решения следующей задачи Коши: $u'(x) = -2u$, $u(0) = 2$.

2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор третьего порядка точности решения следующей задачи Коши: $u'(x) = u^2x + x + 1$, $u(0) = 1$.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = x - 2$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = 2$, $u'(1) + u(1) = 8$.

5. Краевую задачу из п. 4 решить методом наименьших квадратов, полагая $n = 2$.

Вариант 5

1. Методом Пикара ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши: $u'(x) = u - x$, $u(0) = 1$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.

4. Методом Рунге ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи: $\left((x^2 + 1)u'(x)\right)' - 12u(x) = 6x^2 - 12$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$.

5. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = -1 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 1$, $u'(1) = 1$.

Вариант 6

1. Методом рядов ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши: $u'(x) = u - x$, $u(0) = 1$.

2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.

3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.

4. Методом Рунге ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи: $\left((x^2 + 1)u'(x)\right)' - 12u(x) = 3x^2 - 6$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = \frac{1}{2}$, $u(1) = 1$.

5. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = -1 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) = 0$, $u'(1) = -\frac{2}{3}$.

Вариант 7

1. Исследовать устойчивость явного метода Эйлера решения следующей задачи Коши: $u'(x) = -3u(x)$, $u(0) = 2$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности решения следующей задачи Коши: $u'(x) = ux + x^2$, $u(0) = 1$.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Галеркина ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = 2x - 2$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + u(0) = 2$, $u'(1) = 1$.

5. Методом наименьших квадратов ($n = 2$) решить краевую задачу из п. 4.

Вариант 8

1. Исследовать устойчивость явного метода Эйлера решения следующей задачи Коши: $u'(x) = -3u(x)$, $u(0) = 1$.
2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор третьего порядка точности решения следующей задачи Коши: $u'(x) = ux + x^2$, $u(0) = 1$.
3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.
4. Методом Рунге ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи: $\left((x^2 + 1)u'(x)\right)' - 12u(x) = -6x^2 - 3$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = \frac{1}{4}$, $u(1) = -\frac{3}{4}$.
5. Методом наименьших квадратов ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи:

$$u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = -3, \quad u(1) = -2\frac{2}{3}.$$

Вариант 9

1. Методом Пикара ($n = 3$) найти приближенное решение следующей задачи Коши: $u'(x) = u + x^2 + 1$, $u(0) = 0$.
2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты второго порядка точности решения задачи Коши из п. 1.
3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.
4. Методом Рунге ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи: $\left((x^2 + 1)u'(x)\right)' - 12u(x) = x^2 - 1$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = \frac{1}{12}$, $u(1) = \frac{1}{4}$.
5. Методом Галеркина ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + 2u(0) = -2$, $u'(1) = 1$.

Вариант 10

1. Методом рядов ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши:

$$u'(x) = u + x^2 + 1, \quad u(0) = 1.$$
2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор третьего порядка точности решения задачи Коши из п. 1.

3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.

4. Методом Рунге ($n = 2$) найти приближенное решение следующей краевой задачи: $\left((x^2 + 1)u'(x)\right)' - 12u(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0) = -\frac{1}{12}$, $u(1) = -\frac{1}{4}$.

5. Методом наименьших квадратов ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{3}xu'(x) - u(x) = 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + 2u(0) = -2$, $u'(1) = 1$.

Вариант 11

1. Методом Пикара ($n = 3$) найти приближенное решение следующей задачи Коши: $u'(x) = u^2 + x^2 - 1$, $u(0) = 1$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.

4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + u(0) = 0$, $u'(1) = 1$.

5. Методом Рунге ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи:

$$\left(x^2u'(x)\right)' - 6u(x) = -6, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Вариант 12

1. Методом рядов ($n = 3$) найти приближенное решение задачи Коши: $u'(x) = u + x^2 - 1$, $u(0) = 1$.

2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор четвертого порядка точности решения задачи Коши из п. 1.

3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 1.

4. Методом Галеркина ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = x + 3$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + u(0) = -1$, $u'(1) = 2$.

5. Методом наименьших квадратов при $n = 2$ решить краевую задачу из п. 4.

Вариант 13

1. Для решения задачи Коши $u'(x) = -2u(x)$, $u(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ исследовать устойчивость метода $\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = -(y(x) + y(x+h))$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутты третьего порядка точности решения задачи Коши: $u'(x) = e^u + x^2 - 1$, $u(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$.

3. Записать алгоритм экстраполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = x + 3$, $0 \leq x \leq 1$, $u'(0) + u(0) = -1$, $u'(1) = 2$.

5. Методом Ритца ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи:

$$(x^2 u'(x))' - 6u(x) = -1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = -\frac{1}{6}, \quad u(1) = \frac{5}{6}.$$

Вариант 14

1. Для решения задачи Коши $u'(x) = -\frac{1}{3}u(x)$, $0 \leq x \leq 1$ исследовать устойчивость неявного метода Эйлера.

2. Записать алгоритм метода предиктор – корректор третьего порядка точности решения задачи Коши: $u'(x) = e^{2u} - x^2 + 1$, $u(0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 4$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Галеркина при $n = 2$ найти решение следующей краевой задачи:

$$u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = x - 5, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u'(0) + u(0) = -1, \quad u(1) = 5.$$

5. Методом наименьших квадратов найти решение краевой задачи из п. 4.

Вариант 15

1. Определить шаг h сетки узлов, при котором будет устойчив явный метод Эйлера решения следующей задачи Коши: $u'(x) = -2u(x)$, $u(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$.

2. Записать алгоритм метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности решения следующей задачи Коши:

$$u'(x) = \ln(u^2 + 1) + xu + 1, u(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

3. Записать алгоритм интерполяционного метода Адамса ($n = 3$) решения задачи Коши из п. 2.

4. Методом Ритца ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи:

$$(x^2 u'(x))' - 6u(x) = 3, 0 \leq x \leq 1, u(0) = -\frac{1}{2}, u(1) = 0.$$

5. Методом Галеркина ($n = 2$) найти решение следующей краевой задачи: $u''(x) + \frac{1}{2}xu'(x) - u(x) = \frac{1}{4}x, 0 \leq x \leq 1, u'(0) + u(0) = \frac{1}{2}, u'(1) = 1.$

Индивидуальное задание № 3

Вариант 1

1. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = u(x) - e^x - x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, определяя шаг h с помощью правила Рунге.

2. Задачу Коши из п. 1 решить с помощью интерполяционного метода Адамса ($\varepsilon = 10^{-4}$), определяя шаг h путем сравнения приближенного решения с решением, полученным по экстраполяционному методу Адамса.

3. С помощью метода сеток найти решение следующей краевой задачи:

$$u''(x) + xu'(x) - 2xu(x) = 2(u - 1)(x + 1) + 1,$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) = 2, u'(1) = 2, \text{ полагая } h = 0,01.$$

Вариант 2

1. Методом предиктор – корректор четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = u(x) - e^x - x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, определяя шаг h с помощью правила Рунге.

2. Задачу Коши из п. 1 решить с помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 4, \varepsilon = 10^{-4}$), определяя шаг h путем сравнения приближенного решения с решением, полученным по экстраполяционному методу Адамса.

3. С помощью метода сеток найти решение следующей краевой задачи:

$$u''(x) + u'(x) - 2xu(x) = 2(u-1)(x+1) + 1, \\ 0 \leq x \leq 1, u'(0) = 2, u(1) = e + 2, \text{ полагая } h = 0,01.$$

Вариант 3

1. Методом предиктор – корректор четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = 2e^{x+1} - 4x(u + 2x^2) - 6x - 2$, $u(0) = e + 1$, $0 \leq x \leq 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, используя автоматический выбор шага.

2. Задачу Коши из п. 1 решить с помощью экстраполяционного метода Адамса ($n = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$), определяя шаг h с помощью правила Рунге.

3. С помощью метода сеток найти решение следующей краевой задачи:

$$u''(x) + u'(x) - 2xu(x) = 2(u-1)(x+1) + 1, \\ 0 \leq x \leq 1, u'(0) - u(0) = 0, u(1) = e + 1, \text{ полагая } h = 0,01.$$

Вариант 4

1. Методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с $h = 0,05$ найти приближенное решение следующей задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$u' = -2xu + v^2 - x^2 - 1, \\ v' = v^2 - u + xv^{-1}, \\ u(0) = 1, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

2. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 4$) найти приближенное решение с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ следующей задачи Коши:

$$u' = \frac{\left(1 + e^{\frac{x}{u}}\right)}{\left(e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{x}{u} - 1\right)\right)}, u(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти приближенное решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - (x+1)u'(x) - u(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, 0 \leq x \leq 1, u(0) = 1, u(1) = \frac{1}{2}.$$

Вариант 5

1. Методом сеток с $h = 0,02$ найти приближенное решение следующей граничной задачи: $u''(x) - (x^2 + 1)u'(x) - 2xu(x) = 2 \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^3}$,

$$0 \leq x \leq 1, u(0) - 2u'(0) = 1, u(1) = \frac{1}{2}.$$

2. С помощью экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$) найти с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ решение задачи Коши $u' = -\frac{x}{u} + \ln x \cdot u^2$, $u(1) = -2$, $1 \leq x \leq 2$, определяя шаг сетки узлов с помощью правила Рунге.

3. Методом Рунге – Кутта третьего порядка точности с $h = 0,05$ найти приближенное решение следующей задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = e^{-(u^2+v^2)} + 2x, \\ v' = 2u^2 + v, \end{cases}$$

$$u(0) = \frac{1}{2}, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант 6

1. С помощью экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$, $h = 0,02$) найти приближенное решение следующей задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = e^{-(u^2+v^2)} + 2x, \\ v' = 2u^2 + v, \end{cases}$$

$$u(0) = \frac{1}{2}, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

2. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти приближенное решение задачи Коши $u' = -u \cos x + \sin x \cos x$, $u(0) = -1$, $0 \leq x \leq 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, определяя шаг h по правилу Рунге.

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - \frac{3}{(x+2)^2} u(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x+2}}, 0 \leq x \leq 1, 3u(0) - 2u'(0) = 2\sqrt{2}, u(1) = \sqrt{3}.$$

Вариант 7

1. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 3$, $h = 0,02$) найти приближенное решение следующей задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = e^{-(u^2+x^2)} + 2x, \\ v' = 2u^2 + v, \end{cases}$$

$$u(0) = \frac{1}{2}, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

2. Методом предиктор – корректор четвертого порядка точности найти приближенное решение задачи Коши $u' = -u \cos x + \sin x \cos x$, $u(0) = -1$, $0 \leq x \leq 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ автоматическим выбором шага.

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - (x + 0,3)^2 u'(x) - \frac{2}{(x + 0,3)^2} u(x) = 0,3,$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) - u'(0) = \frac{13}{3}, u(1) = \frac{3}{13}.$$

Вариант 8

1. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = \frac{xu}{1+x^2}$, $u(0) = 2$, $0 \leq x \leq 1$, обеспечивая

точность $\varepsilon = 10^{-4}$ выбором шага h по правилу Рунге.

2. Задачу Коши из п. 1 решить интерполяционным методом Адамса ($n = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$), выбирая шаг h путем сравнения приближенных решений, полученных экстраполяционным и интерполяционным методом Адамса.

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти приближенное решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - u'(x) - u(x) = 3 \sin x - \cos x,$$

$$0 \leq x \leq 1, u'(0) = -1, u(1) + 2u'(1) = -\cos 1 - 3 \sin 1.$$

Вариант 9

1. Методом предиктор – корректор четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = \frac{xu}{1+x^2}$, $u(0) = 2$, $0 \leq x \leq 1$,

обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ автоматическим выбором шага.

2. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 3$, $h = 0,02$) найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = e^{-(u^2+v^2)} + 3x, \\ v' = 3u^2 + v, \end{cases}$$

$$u(0) = \frac{1}{2}, u(1) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

3. Методом сеток с $h = 0,01$ найти приближенное решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) + \frac{3}{2(x+2)} u'(x) - (x+2)u(x) = -2\sqrt{x+2} + 2(x+2),$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) - 2u'(0) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2, u'(1) = -\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

Вариант 10

1. С помощью экстраполяционного метода Адамса ($n = 3$, $h = 0,02$) найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = -2xu^2 + v^2 - x^2 - 1, \\ v' = \frac{1}{v^2} - u - \frac{x}{v}, \end{cases}$$

$$u(0) = 1, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

2. Методом Рунге – Кутты третьего порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = \frac{1}{x}(x^2 + u^2 - (2x+1)u + 1)$, $u(1) = 0$, $1 \leq x \leq 2$,

обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ выбором шага h по правилу Рунге.

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти приближенное решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - (x+3)u'(x) - \frac{2}{(x+3)^2} u(x) = -3,$$

$$0 \leq x \leq 1, u(0) - u'(0) = \frac{4}{3}, u'(1) = \frac{3}{4}.$$

Вариант 11

1. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 3$, $h = 0,02$) найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = -2xu^2 + v^2 - x^2 - 1, \\ v' = v^2 - u - xv^{-1}, \end{cases}$$
$$u(0) = 1, v(0) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

2. Методом предиктор – корректор третьего порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = x^{-1}(x^2 + u^2 - (2x + 1)u + 1)$, $u(1) = 0$, $1 \leq x \leq 2$, обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ автоматическим выбором шага.

3. Методом сеток с $h = 0,02$ найти приближенное решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - u'(x) - u(x) = 2,112 \sin 0,8x - \cos 0,8x, 0 \leq x \leq 1, u'(0) = -0,64, \\ 0,8u(1) + 2u'(1) = -0,48 \cos 0,8 - 2,24 \sin 0,8.$$

Вариант 12

1. Методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности найти решение задачи Коши $u'(x) = \left(1 + e^{\frac{x}{u}}\right) e^{-\frac{x}{u}} \left(\frac{x}{u} - 1\right)^{-1}$, $u(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ выбором шага h по правилу Рунге.

2. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 4$) найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) - \cos x, \\ v'(x) = u(x) + \sin x, \end{cases}$$
$$u(0) = v(0) = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

3. Методом сеток с $h = 0,01$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) + \frac{3}{2}(1+x)^{-1}u'(x) = 2(1+x)^{-\frac{1}{2}}, 0 \leq x \leq 1, 3u(0) - u'(0) = 1, u'(1) = \sqrt{2}.$$

Вариант 13

1. Методом предиктор – корректор четвертого порядка точности найти приближенное решение задачи Коши $u'(x) = \left(1 + e^{\frac{x}{u}}\right) e^{\frac{x}{u}} \left(\frac{x}{u} - 1\right)^{-1}$,

$u(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, обеспечивая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ автоматическим выбором шага h .

2. С помощью экстраполяционного метода Адамса ($n = 5$) найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) - \cos x, \\ v'(x) = u(x) + \sin x, \end{cases}$$

$$u(0) = v(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Методом сеток с $h = 0,025$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)u'(x) - 2xu(x) = 2 \frac{3x^2 - \frac{1}{2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^3},$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad u(0) - 2u'(0) = 2, \quad u'(1) = \frac{2}{3}.$$

Вариант 14

1. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = -4u^2 + v^2 - x^2 - 1, \\ v' = \frac{1}{2}v^{-2} - u - xv^{-1}, \end{cases}$$

$$u(0) = \frac{1}{2}, \quad v(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{полагая } h = 0,02.$$

2. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$) найти приближенное решение задачи Коши $u' = -ux^{-1} + \ln x \cdot u^2$, $u(1) = -2$, $1 \leq x \leq 2$.

3. Методом сеток с $h = 0,025$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - 0,09u(x) = -0,09x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = e^{0,3} + 1.$$

Вариант 15

1. Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найти приближенное решение задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = v - \cos x, \\ v' = u + \sin x, \end{cases}$$

$u(0) = v(0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, полагая $h = 0,01$.

2. С помощью интерполяционного метода Адамса ($n = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$) найти приближенное решение задачи Коши $u' = -ux^{-1} + \ln x \cdot u^2$, $u(1) = -2$, $1 \leq x \leq 2$.

3. Методом сеток с $h = 0,01$ найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -3e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) + 2u'(1) = 0.$$

Глава 5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тема 21. Математический аппарат теории разностных схем

21.1. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов.

При численном решении той или иной математической задачи мы, как правило, не можем производить приближенное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства. Поэтому является естественным выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется сеткой. Отдельные точки называются узлами. Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной. Таким образом, мы заменяем область непрерывного изменения аргумента сеткой, т. е. областью дискретного изменения. Другими словами, мы осуществляем аппроксимацию пространства решений, например дифференциального уравнения, пространством сеточных функций.

Пусть \bar{G} – область непрерывного изменения аргумента x . Заменяем ее сеткой $\bar{\omega}_h$, т. е. множеством точек x_i , принадлежащих \bar{G} . Здесь h указывает на густоту расположения точек $\bar{\omega}_h$. Вместо функций $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in \bar{G}$ будем рассматривать сеточные функции $u_h(x_i)$, т. е. функции точки x_i , являющейся узлом сетки $\bar{\omega}_h$. Значения $u_h(x_i)$ по отношению к $u(x_i)$ будет его приближением и в дальнейшем с целью упрощения выкладок мы его будем обозначать $y(x_i) = y_i$. Сеточную функцию $y(x_i)$ можно представить в виде вектора $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Функция $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in \bar{G}$ является элементом некоторого функционального пространства H_0 . Множество сеточных функций $u_h(x_i)$ образует множество H_h . Таким образом, мы заменим пространство H_0 пространством H_h сеточных функций. Рассмотрим множество сеток $\{\bar{\omega}_h\}$. Получим множество пространств $\{H_h\}$ сеточных функций, зависящих от параметра h . В линейном пространстве H_h вводится норма $\|\cdot\|_h$, являющаяся сеточным аналогом $\|\cdot\|_0$ в

пространстве H_0 . Укажем простейшие типы норм в H_h в случае сетки $\bar{\omega}_h = x_i = ih$, $i = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$ на отрезке $[0; 1]$:

$$1) \text{ Сеточный аналог нормы } C : \|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)| = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i)|,$$

$$2) \text{ Сеточный аналог формы } L_2 : \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ или } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для того чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую данное дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие два шага:

- 1) необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения;
- 2) необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностные аналоги для краевых условий и для начальных данных.

После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений относительно приближенного решения исходной дифференциальной задачи.

Пусть дан линейный дифференциальный оператор L , действующий на функцию $v = v(x)$. Заменяя входящие в Lv производные разностными отношениями, мы получим вместо Lv разностные выражения $L_h v_h$, являющиеся линейной комбинацией значений сеточной функции v_h на некотором множестве узлов сетки, называемом шаблоном, т. е.

$$L_h v_h = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) v_h(\xi),$$

где $A_h(x, \xi)$ – коэффициенты; h – шаг сетки; $\Pi(x)$ – шаблон в точке x . Такая приближенная замена Lv на $L_h v_h$ называется аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором или разностной аппроксимацией оператора L .

Ранее мы уже рассмотрели простейшую аппроксимацию дифференциальных операторов первого и второго порядка в одномерном случае при изучении сеточных методов решения линейной граничной задачи. Здесь разностная аппроксимация была получена путем разложения решения в ряд Тейлора.

Одним из универсальных методов построения разностной аппроксимации дифференциальных операторов является метод неопределенных коэффициентов. Пусть имеется трехточечный шаблон

(три расположенных подряд узла сетки x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) и требуется найти разностный оператор L_h , локально аппроксимирующий дифференциальный оператор L на функции $u(x)$ в узлах x_n . Для нахождения неопределенных коэффициентов a_{-1}, a_0, a_1 с помощью формулы Тейлора в начале находятся коэффициенты при $u(x), u'(x), u''(x), \dots$ в выражении

$$(L_h(u))_h - (Lu)_h \Big|_{x=x_n} = (a_{-1}u(x_{n-1}) + a_0u(x_n) + a_1u(x_{n+1}) - (Lu)_h) \Big|_{x=x_n}.$$

Затем приравняются к нулю коэффициенты последовательно при $u(x_n), u'(x_n), u''(x_n), \dots$. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно a_{-1}, a_0, a_1 .

Пример 1. С помощью метода неопределенных коэффициентов построить аппроксимацию дифференциального оператора $Lu = u''(x)$ на шаблоне $x_{k-1} = x_k - h_-, x_{k+1} = x_k + h_+, h_- \neq h_+$ (нерегулярный шаблон из трех точек).

Решение. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & a_{-1}u(x_{k-1}) + a_0u(x_k) + a_{+1}u(x_{k+1}) - u''(x_k) = \\ & = a_{-1} \left(u(x_k) - h_- u'(x_k) + \frac{h_-^2}{2!} u''(x_k) - \frac{h_-^3}{3!} u'''(x_k) + O(h_-^4) \right) + \\ & + a_0 u(x_k) + a_{+1} \left(u(x_k) + h_+ u'(x_k) + \frac{h_+^2}{2!} u''(x_k) + \frac{h_+^3}{3!} u'''(x_k) + O(h_+^4) \right) - u''(x_k) \end{aligned}$$

и приравняем к нулю коэффициенты при соответствующих $u^{(i)}(x_k)$. Получим

$$\begin{aligned} u(x_k) : & \quad a_{-1} + a_0 + a_{+1} = 0 \\ u'(x_k) : & \quad -h_- a_{-1} + h_+ a_{+1} = 0 \\ u''(x_k) : & \quad \frac{h_-^2}{2!} a_{-1} + \frac{h_+^2}{2!} a_{+1} - 1 = 0 \\ u'''(x_k) : & \quad -\frac{h_-^3}{3!} a_{-1} + \frac{h_+^3}{3!} a_{+1} = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения получим $a_{-1} = \frac{h_+}{h_-} a_{+1}$. Подставив это выражение в третье уравнение, будем иметь

$$\frac{h_+ h_- + h_+^2}{2!} a_{+1} = 1, \text{ т. е. } a_{+1} = \frac{2}{h_+(h_- + h_+)}.$$

Тогда $a_{-1} = \frac{2}{h_-(h_- + h_+)}$ и $a_0 = -\frac{2}{h_- + h_+} \left(\frac{1}{h_-} + \frac{1}{h_+} \right) = -\frac{2}{h_- h_+}$,

при этом последнее уравнение (коэффициент при $u'''(x_k)$ равен нулю) выполняться уже не будет. Итак,

$$\begin{aligned} u''(x_k) &\approx \frac{2u(x_{k-1})}{h_-(h_- + h_+)} - \frac{2u(x_k)}{h_+ h_-} + \frac{2u(x_{k+1})}{h_+(h_+ + h_-)} = \\ &= \frac{1}{h_+ + h_-} \left(\frac{u(x_{k-1})}{h_-} - \frac{(h_- + h_+)u(x_k)}{h_+ h_-} + \frac{u(x_{k+1})}{h_+} \right) = \\ &= \frac{2}{h_+ + h_-} \left(\frac{u(x_{k-1}) - u(x_k)}{h_+} - \frac{u(x_k) - u(x_{k+1})}{h_-} \right). \end{aligned}$$

Пример 2. Построить аппроксимацию дифференциального оператора $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, где $v = v(x, t)$.

Решение. Пусть $\bar{G} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ и на этой области рассмотрим сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = 1, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, M\tau = T\} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$$

с шагами h и τ по переменным x и t соответственно. Чтобы написать разностную аппроксимацию $L_{h\tau}$ для оператора L , мы должны прежде всего определить шаблон. Остановимся сначала на аппроксимации простейшего типа. Пусть шаблон состоит из четырех точек (x, t) , $(x + h, t)$, $(x - h, t)$, $(x, t + \tau)$, где (x, t) – любая внутренняя точка сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$ (такую область мы будем обозначать $\omega_{h\tau}$). Определим $L_{h\tau}$ так:

$$L_{h\tau}^{(0)}v = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x + h, t) - 2v(x, t) + v(x - h, t)}{h^2}. \quad (21.1)$$

Для упрощения записи разностных выражений весьма важным является вопрос о введении рациональной символики. Условимся о следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} v &= v(x, t), \hat{v} = v(x, t + \tau), \check{v} = v(x, t - \tau), \\ v_x &= \frac{v(x + h, t) - v(x, t)}{h}, v_{\bar{x}} = \frac{v(x, t) - v(x - h, t)}{h}, v_{\circ_x} = \frac{v(x + h, t) - v(x - h, t)}{2h}, \\ v_t &= \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau}, v_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{v(x + h, t) - 2v(x, t) + v(x - h, t)}{h^2}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений соотношение (21.1) принимает вид

$$L_{h\tau}^{(0)}v = v_t - v_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (21.2)$$

Если в качестве шаблона взять точки (x, t) , $(x, t + \tau)$, $(x - h, t + \tau)$, $(x + h, t + \tau)$, то получим

$$L_{h\tau}^{(1)}v = v_t - \hat{v}_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (21.3)$$

Взяв линейную комбинацию (21.2) и (21.3), получим однопараметрическое семейство разностных операторов

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}v = v_t - \left(\sigma \hat{v}_{\bar{x}\bar{x}} + (1 - \sigma)v_{\bar{x}\bar{x}} \right), \quad (21.4)$$

определенное при $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$ на шаблоне из шести точек $(x \pm h, t)$, $(x \pm h, t + \tau)$, (x, t) , $(x, t + \tau)$.

Для определения порядка погрешности разностной аппроксимации $\psi = L_{h\tau}v - Lv$ воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial t} + O(\tau^2), \\ v_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^4} + O(\tau^4) = \\ &= \frac{\partial^2 v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2), \\ \hat{v}_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{\partial^2 v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы для $L_{h\tau}^{(0)}v$, $L_{h\tau}^{(1)}v$, $L_{h\tau}^{(\sigma)}v$, получим

$$1) \quad L_{h\tau}^{(0)}v = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) = Lv(x, t) + O(h^2 + \tau),$$

$$\text{т.е. } \psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)}v - Lv(x, t) = O(h^2 + \tau);$$

$$2) \quad L_{h\tau}^{(1)}v = \frac{\partial v(x, t + \tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) = Lv(x, t + \tau) + O(h^2 + \tau),$$

$$\text{т.е. } \psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)}v - Lv(x, t) = O(h^2 + \tau);$$

$$3) \quad L_{h\tau}^{(0,5)}v = \frac{\partial v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau^2) = Lv\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) + O(h^2 + \tau^2), \text{ т.}$$

$$\text{е. } \psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)}v - Lv\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) = O(h^2 + \tau^2).$$

Таким образом, оператор $L_{h\tau}^{(0,5)}v$ аппроксимирует L со вторым порядком по h при любом σ , с первым порядком по τ при $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ и со вторым порядком по τ при $\sigma = 0,5$.

Дадим более строгое определение порядка аппроксимации. Рассмотрим некоторый оператор L , заданный в H_0 , и оператор L_h , преобразующий сеточную функцию v_h в сеточную функцию $L_h v_h$, заданную на ω_h (т. е. действующий из H_h в H_h). Назовем погрешностью аппроксимации оператора L разностным оператором L_h сеточную функцию $\psi_h = L_h v_h - (Lv)_h$, где $(Lv)_h$ – значение исходного оператора в соответствующей точке сетки. Если $\|\psi_h\|_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L . Будем считать, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$, если

$$\|\psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\| = O(h^m)$$

или $\|L_h v_h - (Lv)_h\| \leq Ch^m$, где C – положительная постоянная, не зависящая от h .

21.2. Постановка разностной задачи

Задачи математической физики помимо дифференциального уравнения включают и дополнительные условия – краевые и начальные, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений. Поэтому при формулировке разностной задачи помимо аппроксимации дифференциального уравнения необходимо эффективно описать в разностном виде эти дополнительные условия. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основные дифференциальные уравнения и дополнительные условия (краевые и начальные), называют разностной схемой. Рассмотрим процесс построения разностной схемы на примере первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пусть $u = u(x, t)$ – функция температуры, удовлетворяющая внутри прямоугольника $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ уравнению

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (21.5)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (21.6)$$

а на границах области $x = 0, x = 1$ – краевым условиям первого рода

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (21.7)$$

На Ω выберем равномерную сетку узлов

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = \overline{0, N}, Nh = 1, j = \overline{0, N_1}, N_1\tau = T\} \quad (21.8)$$

и простейший четырехточечный шаблон, состоящий из точек $(x_{i\pm 1}, t_j)$, (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_j) . Рассмотрим следующую разностную задачу, записанную в индексной форме:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \quad 1 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N_1-1, \quad (21.9)$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), y_N^j = \mu_2(t_j), y_i^0 = u_0(x_i).$$

Здесь $F_i^j = F(x_i, t_j)$. Правую часть φ_i^j можно задавать различными способами, например $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$ или $\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1})$. Разностная задача (21.9) является примером использования так называемой явной схемы: значение решения на верхнем временном слое y_i^{j+1} определяется через значения решения на предыдущем слое по явной формуле $y_i^{j+1} = y_i^j + \tau(y_{xx}^j + \varphi_i^j)$. Для аппроксимации (21.5)–(21.7) выберем шаблон, состоящий из точек $(x_{i\pm 1}, t_{j+1})$, (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_j) , и на нем рассмотрим неявную разностную схему

$$y_t = \hat{y}_{xx} + \varphi, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t),$$

$x \in \omega_h, t \in \omega_\tau$. Для определения $\hat{y} = y_i^{j+1}$ на $j+1$ -м временном слое получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{y_i^{j+1}}{\tau} - y_{xx,i}^{j+1} = \frac{y_i^j}{\tau} + \varphi_i^j$$

или

$$y_{i-1}^{j+1} - \left(2 - \frac{h^2}{\tau}\right) y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1} = -\frac{h^2}{\tau} y_i^j - h^2 \varphi_i^j,$$

$$i = \overline{1, N-1}, j = 0, \dots, N-1,$$

$$y_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), y_N^{j+1} = \mu_2(t_{i+1})$$

с трехдиагональной матрицей. Эту систему можно решать методом прогонки. В краевой задаче первого рода (21.5)–(21.7) краевые условия аппроксимируются точно. В случае краевых условий третьего рода вопрос об аппроксимации требует специального рассмотрения.

21.3. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), x \in G, \quad (21.8)$$

удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$lu = \mu(x), x \in \Gamma, \quad (21.9)$$

где $f(x), \mu(x)$ – заданные функции (входные данные задачи); l – некоторый линейный дифференциальный оператор. Предположим, что решение задачи (21.8)–(21.9) существует и единственно. Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек – сеткой. Пусть h – векторный параметр, характеризующий плотность расположения узлов, ω_h – множество внутренних узлов сетки, γ_h – множество граничных узлов. Задаче (21.8)–(21.9) поставим в соответствие разностную задачу

$$L_h y_h = \varphi_h, x \in \omega_h, l_h y_h = \chi_h, x \in \gamma_h, \quad (21.10)$$

где φ_h, χ_h – известные сеточные функции. Систему соотношений (21.10) называют разностной схемой.

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий. Чтобы выяснить этот вопрос, мы должны сравнить y_h и $u(x)$. Это сравнение будем проводить в пространстве H_h сеточных функций. Пусть u_h – значение $u(x)$ на сетке ω_h , так что $u_h \in H_h$. Рассмотрим погрешность $z_h = y_h - u_h$. Напишем условие для z_h . Подставив $y_h = z_h + u_h$ в (21.10), получим для z_h задачу того же типа, что и (21.10):

$$L_h z_h = \psi_h, x \in \omega_h, l_h z_h = v_h, x \in \gamma_h. \quad (21.11)$$

где ψ_h и v_h – невязки, равные $\psi_h = \varphi_h - L_h u_h$, $v_h = x_h - L_h u_h$. Правые части ψ_h и v_h задачи (21.11) называются погрешностью аппроксимации уравнения (21.8) разностным уравнением (21.10) и соответственно погрешностью аппроксимации условия (21.9) разностным условием на решении задачи (21.8)–(21.9).

Будем говорить, что решение разностной задачи (21.10) сходится к решению задачи (21.8)–(21.9), если

$$\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Разностная схема (21.10) сходится со скоростью $O(|h|^n)$ или имеет n -й порядок точности, если при достаточно малом $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\|z_h\|_h \leq M|h|^n,$$

где $M > 0$ – постоянная, не зависящая от h , $n > 0$.

Говорят, что разностная схема (21.10) обладает n -м порядком аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_h = O(|h|^n), \|v_h\|_h = O(|h|^n).$$

При построении разностной схемы необходимо заботиться, чтобы погрешность аппроксимации краевых и начальных условий была по порядку не ниже, чем погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения. В связи с этим рассмотрим примеры повышения порядка аппроксимации краевых и начальных условий без увеличения шаблона.

Пример 3. Построить аппроксимацию третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \sigma u(0, t) - \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t). \end{aligned} \quad (21.12)$$

Решение. На сетке $\omega_{h\tau}$, описанной ранее, напомним явную разностную схему

$$y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi, y(x, 0) = u_0(x), y(1, t) = \mu_2(t), \quad (21.13)$$

где $\varphi = \varphi_i^j = f(x_i, t_j)$. Эта схема имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau)$. Построим аппроксимацию того же порядка для краевого условия при $x = 0$. Для этого рассмотрим

$$u_{x,0} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Пользуясь уравнением теплопроводности при $x = 0$, найдем

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - f(0,t).$$

Отсюда следует, что

$$u_{x,0} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - f(0,t) \right) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + O(h^2),$$

т. е. выражение, стоящее слева, аппроксимирует производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = 0$ с погрешностью $O(h^2)$. Заменяя $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0}$ разностной производной

$$u_{t,0} = \frac{u(0,t+\tau) - u(0,t)}{\tau},$$

получим разностное краевое условие при $x = 0$:

$$y_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \sigma y_0 - \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0,t). \quad (21.14)$$

Оно имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau^2)$ на решении задачи (21.12). В случае неявной схемы

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi$$

вместо (21.14) следует взять условие

$$\hat{y}_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \sigma \hat{y}_0 - \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_1 + 0,5hf(0,t).$$

Задачи и упражнения

1. Для уравнения $u' = f(x, u)$ построить схему наиболее высокого порядка аппроксимации вида:

а) $\frac{y_{m+1} + ay_m + by_{m-1}}{2h} = \frac{1}{6} f_{m-1} + df_m + cf_{m+1};$

б) $\frac{y_{m+1} - ay_m + by_{m-1}}{2h} = \frac{1}{6} f_{m-1} + df_m + cf_{m+1};$

в) $\frac{y_{m+1} + ay_m - by_{m-1}}{2h} = \frac{1}{6} f_{m-1} + df_m + cf_{m+1};$

г) $\frac{y_{m+1} - ay_m + by_{m-1}}{2h} = \frac{1}{6} f_{m-1} - df_m + cf_{m+1};$

д) $\frac{ay_{m+1} + by_{m-1}}{h} = cf_{m-1} + df_m + ef_{m+1};$

е) $\frac{ay_{m+1} - by_{m-1}}{h} = cf_{m-1} + df_m + ef_{m+1};$

ж) $\frac{ay_{m+1} + by_{m-1}}{h} = cf_{m-1} - df_m + ef_{m+1};$

з) $\frac{ay_{m+1} - by_{m-1}}{h} = cf_{m-1} - df_m + ef_{m+1};$

и) $\frac{by_{m+1} + ay_m - y_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} + \frac{2}{3} f_m + df_{m+1};$

к) $\frac{by_{m+1} - ay_m - y_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} + \frac{2}{3} f_m + df_{m+1};$

л) $\frac{-by_{m+1} + ay_m - y_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} + \frac{2}{3} f_m + df_{m+1};$

м) $\frac{y_{m+1} + ay_m + by_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} + df_m + \frac{1}{6} f_{m+1};$

н) $\frac{y_{m+1} - ay_m + by_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} + df_m + \frac{1}{6} f_{m+1};$

о) $\frac{y_{m+1} - ay_m + by_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} - df_m + \frac{1}{6} f_{m+1};$

п) $\frac{y_{m+1} - ay_m - by_{m-1}}{2h} = cf_{m-1} - df_m + \frac{1}{6} f_{m+1}.$

2. На шаблоне, который содержит не более шести точек $(x_{i\pm 1}, t_{j\pm 1})$, (x_i, t_j) , (x_i, t_{j+1}) , построить разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ и записать алгоритм нахождения приближенного решения по ней следующих краевых задач:

- а) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 2t, u(1, t) = t^2;$
- б) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = tu(0, t) - \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- в) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-xt}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = e^t u(0, t) - \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- г) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^2 + 1}{t^2 + 1}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = (t^2 + 1)u(0, t) - \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- д) $\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = (t^2 + 1)u(0, t) - \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- е) $\frac{\partial u}{\partial t} = (e^{xt} + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- ж) $\frac{\partial u}{\partial t} = (2 + \cos xt)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t);$
- з) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $u(0, t) = \mu_1(t), \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 2t;$
- и) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, u(x, 0) = u_0(x),$
 $u(0, t) = \mu_1(t), \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -tu(0, t) + \mu_2(t);$

$$\begin{aligned}
\kappa) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-xt}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -e^t u(1, t) + \mu_2(t); \\
\lambda) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^2 + 1}{t^2 + 1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -(t^2 + 1)u(1, t) + \mu_2(t); \\
\mu) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \mu_2(t); \\
\nu) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = (e^{xt} + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -u(1, t); \\
\omicron) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = (2 + \cos xt) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0; \\
\pi) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\
& u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 3.
\end{aligned}$$

Тема 22. Разностные схемы для уравнения теплопроводности

22.1. Некоторые разностные формулы

Для преобразования различных разностных выражений нам потребуются формулы разностного дифференцирования произведения, формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина. Здесь мы получим эти формулы, проводя аналогию с соответствующими формулами дифференциального исчисления.

Как известно, в дифференциальном исчислении имеет место следующая формула дифференцирования произведения функций $u(x)$ и

$v(x)$: $(uv)' = u'v + uv'$. Ранее для сеточных функций были введены два типа разностных производных первого порядка: левая $u_{\bar{x}}$ и правая u_x . Соответственно этому имеются и две формулы разностного дифференцирования произведения:

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x, \quad (22.1)$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}, \quad (22.2)$$

где $f^{(\pm 1)} = f(x \pm h)$. В справедливости формул (22.1), (22.2) легко убедиться непосредственно, расписывая по определению соответствующие разностные производные.

Рассмотрим формулу интегрирования по частям

$$\int_0^1 uv' dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 vu' dx.$$

Для сеточных функций, как и в предыдущем случае, имеют место аналогичные формулы двух типов:

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v), \quad (22.3)$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - (u_x, v). \quad (22.4)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h u_i v_i, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N h u_i v_i, \quad [u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} h u_i v_i.$$

Равенство

$$\int_0^1 u(kv')' dx = - \int_0^1 ku'v' dx + ku'v \Big|_0^1$$

обычно называют первой формулой Грина. Для сеточных функций аналог формулы Грина можно получить, пользуясь формулой суммирования по частям. Подставив в (22.3) $u = z$, $v = ay_{\bar{x}}$, получим первую разностную формулу Грина

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + az y_{\bar{x}} \Big|_N - a_1 y_{x,0}, z_0. \quad (22.5)$$

Если $z_0 = z_N = 0$, то первая формула Грина принимает вид

$$(z, \Lambda y) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x.$$

В частности, если $z = y$, то

$$(\Lambda y, y) = -\left(a, y_{\bar{x}}^2\right], y_0 = y_N = 0.$$

В интегральном исчислении вторая формула Грина имеет вид

$$\int_0^1 u(kv')' dx - \int_0^1 v(ku')' dx = k(uv' - vu') \Big|_0^1.$$

Для получения разностного аналога второй формулы Грина подставим в (22.3) $u = y$, $v = az_{\bar{x}}$. Получим

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] - ayz_{\bar{x}}|_N - a_1 y_0, z_{x,0}. \quad (22.6)$$

Вычитая теперь из (22.6) формулу (22.5), приходим к разностному аналогу второй формулы Грина

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (az_{\bar{x}})_x) = a_N (zy_{\bar{x}} - yz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x z - yz_x)_0.$$

В дальнейшем нам понадобится неравенство Коши – Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \text{ где } \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}},$$

а так же ε – неравенство

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \leq \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|^2, \varepsilon = \text{const} > 0,$$

которое мы здесь примем без доказательства.

Приведем здесь также неравенства, которые соответствуют простейшим теоремам вложения Соболева.

Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, справедливо неравенство

$$\|y\|_c \leq \frac{1}{2} |(y_{\bar{x}})], \quad (22.7)$$

где $\|y\|_c = \max_{x \in \omega_h} |(y(x))|$, $|(y_{\bar{x}})] = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]^{\frac{1}{2}}$.

Если рассматривать не единичный отрезок, а отрезок произвольной длины l , то оценка (7) принимает вид

$$\|y\|_c \leq \frac{\sqrt{l}}{2} |(y_{\bar{x}})].$$

Если же $y(x)$ – произвольная, то будем иметь

$$\|y\|_c^2 \leq 2(l|(y_{\bar{x}})]^2 + y_0^2) \text{ или } \|y\|_c^2 \leq 2(l|(y_{\bar{x}})]^2 + y_N^2).$$

Для всякой ограниченной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i, i = 0, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ и обращающейся в нуль при $x = 0$, $x = 1$, справедливы оценки

$$\frac{h^2}{4} \|(y_{\bar{x}})\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|(y_{\bar{x}})\|^2.$$

22.2. Метод энергетических неравенств

Одним из общих и весьма эффективных способов получения априорных оценок является метод энергетических неравенств. Приведем пример использования этого метода для получения априорных оценок применительно к разностным задачам и покажем, как на основании этих оценок можно определить, например, скорость сходимости разностной схемы.

Рассмотрим простейшую модельную задачу

$$u''(x) + f(x) = 0, 0 < x < 1, u(0) = u(1) = 0. \quad (22.8)$$

Пусть на отрезке $[0, 1]$ введена равномерная сетка $\bar{\omega}_h$ и в соответствие (22.8) поставим следующую разностную задачу:

$$y_{\bar{x}x} + f(x) = 0, x \in \omega_h, y_0 = y_N = 0. \quad (22.9)$$

Умножим уравнение (22.9) на $h y_i$ и просуммируем полученное равенство по всем узлам сетки ω_h :

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x}x,i} y_i h + \sum_{i=1}^{N-1} f_i y_i h = 0.$$

Перепишем последнее соотношение через скалярные произведения

$$(y_{\bar{x}x}, y) + (f, y) = 0. \quad (22.10)$$

Преобразуем первое слагаемое в (22.10) с помощью первой разностной формулы Грина

$$-(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) + (f, y) = 0.$$

Второе слагаемое здесь оценим при помощи неравенства Коши - Буняковского

$$|(f, y)| \leq \|f\| \cdot \|y\|.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\|y\| \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \|(y_{\bar{x}})\|,$$

получим $|(y_{\bar{x}})| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{8}}$. Но так как $\|y\|_c \leq \frac{1}{2}|(y_{\bar{x}})|$, то окончательно будем иметь

$$\|y\|_c \leq \frac{\|f\|}{2\sqrt{8}}.$$

Аналогичные рассуждения могут быть использованы при оценке скорости сходимости разностной схемы (22.9). Напишем вначале задачу для погрешности $z = y - u$ этой схемы. Подставив в (22.9) $y = z + u$, получим

$$z_{\bar{x}x} + \psi(x) = 0, x \in \omega_h, z_0 = z_N = 0,$$

где $\psi = u_{\bar{x}x} + f(x)$ – погрешность аппроксимации разностной схемы (22.9), которая, как известно, при достаточной гладкости $u(x)$ есть величина порядка $O(h^2)$. Легко видеть, что для $z(x)$ мы получили задачу того же типа, что и для функции $y(x)$. Поэтому для $z(x)$ справедлива оценка $\|z\|_c \leq \frac{\|\psi\|}{4\sqrt{2}}$. Но $\|\psi\| = O(h^2)$ и, следовательно, $\|z\|_c = \|y - u\| \leq Mh^2$, где $M \geq 0$ и не зависит от h . Отсюда следует, что решение разностной задачи (22.9) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (22.8) со скоростью $O(h^2)$.

22.3. Семейство шеститочечных разностных схем для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу: в прямоугольнике $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ требуется найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \quad (22.11)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (22.12)$$

и условиями на границах

$$u(0, t) = u_1(x), u(1, t) = u_2(x), 0 \leq t \leq T. \quad (22.13)$$

Введем сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_i = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагами $h = \frac{1}{N}$ и $\tau = \frac{T}{j_0}$ по пространственной и временной переменной соответственно. Обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y , определенной на $\bar{\omega}_{h\tau}$. Заменяя $\frac{\partial u}{\partial t}$ первой разностной производной u_t , а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – второй разностной производной $u_{\bar{x}\bar{x}} = \Lambda u$ и вводя произвольный вещественный параметр σ , рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j, \quad (22.14)$$

$i = \overline{1, N-1}$, $j = 0, j_0 - 1$. Схему (22.14) будем называть схемой с весами. Начальные и краевые условия аппроксимируются точно

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad (22.15)$$

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j. \quad (22.16)$$

В (22.14) φ_i^j – сеточная функция, аппроксимирующая правую часть f уравнения (22.1), например,

$$\varphi_i^j = f\left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}\right), t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\tau}{2},$$

а Λu – оператор второй разностной производной, т. е.

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

При $\sigma = 0$ получим явную разностную схему, при $\sigma \neq 0$ – неявную, которая при $\sigma = 1$ называется чисто неявной, а при $\sigma = \frac{1}{2}$ получим разностную схему Кранка – Николсона, которая определена на шеститочечном шаблоне.

Изучим вопрос о погрешности аппроксимации и точности схемы (22.14)–(22.16). Для этого сравним решение $y = y_i^j$ задачи (22.14)–(22.16) с решением $u = u(x_i, t_j)$ исходной задачи в соответствующих точках сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$. Рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Перейдем к безиндексным

обозначениям, полагая $y_i^j = y$, $y_i^{j+1} = \hat{y}$, $y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}$. Перепишем задачу (22.14)–(22.16) в виде

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y) + \varphi, (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) &= u_1(t), y(1, t) = u_2(t), t \in \overline{\omega_\tau}, \\ y(x, 0) &= u_0(x), x \in \overline{\omega_h}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Найдем условия, определяющие $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в (22.17), для z получим задачу

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda(\sigma\hat{z} + (1-\sigma)z) + \psi, (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0, t \in \overline{\omega_\tau}, \\ z(x, 0) &= 0, x \in \overline{\omega_h}, \end{aligned} \quad (22.18)$$

где $\psi = \Lambda(\sigma\hat{u} + (1-\sigma)u) - u_t + \varphi$ – погрешность аппроксимации схемы (22.17) на решении $u = u(x, t)$ исходной задачи (22.11)–(22.13).

Перейдем к оценке погрешности аппроксимации схемы (22.17), предполагая, что $u = u(x)$ имеет нужное по ходу изложения число непрерывных по x и t производных. Будем пользоваться обозначениями $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\bar{u} = u\left(x, t_j + \frac{\tau}{2}\right)$. Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \hat{u} &= 0,5(\hat{u} + u) + 0,5(\hat{u} - u) = 0,5(\hat{u} + u) + 0,5\tau u_t, \\ u &= 0,5(\hat{u} + u) - 0,5(\hat{u} - u) = 0,5(\hat{u} + u) - 0,5\tau u_t, \\ \sigma\hat{u} + (1-\sigma)u &= 0,5(\hat{u} + u) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau u_t. \end{aligned}$$

Тогда ψ примет вид

$$\psi = 0,5\Lambda(\hat{u} + u) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\Lambda u_t + \varphi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \Lambda u &= u'' + \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2u + O(h^4), Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \hat{u} &= \bar{u} + 0,5\tau\bar{u}' + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3), \\ u &= \bar{u} - 0,5\tau\bar{u}' + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3), \\ 0,5(\hat{u} + u) &= \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3), u_t = \bar{u}' + O(\tau^2), \end{aligned}$$

то получим

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{u} + \varphi) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{u} + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4). \quad (22.19)$$

Отсюда видно, что $\psi = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{u} + O(h^2 + \tau^2)$ при $\varphi = \bar{f}$, так как $\dot{u} = Lu + f$. Учитывая, что $L\dot{u} = L^2u + Lf = u^{IV} + f''$ и $L^2u = L\dot{u} - Lf$, из (22.19) получим

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{h^2}{12}\right)L\bar{u} - \frac{h^2}{12}L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2). \quad (22.20)$$

При $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*$ и $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}L\bar{f}$ схема (22.17) имеет погрешность аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$. Порядок погрешности не нарушается, если $L\bar{f}$ заменить разностным отношением. Пусть $C_n^m(\bar{D})$ – класс функций, имеющих m производных по x и n производных по t в D . Из (22.20) следует, что схема (22.17) имеет погрешность аппроксимации:

- 1) $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi = \bar{f}$ или $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$, если $u \in C_3^4(\bar{D})$;
- 2) $O(h^2 + \tau)$, при $\sigma \neq \frac{1}{2}$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$, если $u \in C_2^4(\bar{D})$;
- 3) $O(h^4 + \tau^2)$, при $\sigma = \sigma_*$, $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}L\bar{f}$, если $u \in C_3^6(\bar{D})$.

Таким образом, введенный параметр σ оказывает существенное влияние на порядок погрешности аппроксимации разностной схемы. Но его выбор, как оказывается, связан и с устойчивостью (а следовательно, и со сходимостью) разностной схемы. Введем следующие определения.

1. Схема (22.17) устойчива, если для решения задачи (22.17) верна оценка

$$\|y(t)\|_1 \leq M_1\|u_0\|_1 + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t_0} \|\varphi(t')\|_2, \quad t \in \omega_\tau,$$

где M_1, M_2 – положительные постоянные, не зависящие от h и τ , $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ – некоторые нормы на временном слое (т. е. на сетке ω_h при фиксированном t).

2. Пусть $\varphi = 0$. Тогда оценка

$$\|y(t)\|_1 \leq M_1\|u_0\|_1, \quad t \in \omega_\tau$$

обозначает устойчивость схемы по начальным данным.

3. Если $y(x, 0) = 0$, то неравенство

$$\|y(t)\|_1 \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t_0} \|\varphi(t')\|_2$$

означает устойчивость схемы по правой части.

4. Разностная схема называется условно устойчивой, если она устойчива лишь при наличии связи между τ и h и безусловно устойчивой – в противном случае. Схема, устойчивая при любых τ и h , называется абсолютно устойчивой.

Без доказательства приведем следующее утверждение: если выполнено условие

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad (22.19)$$

то схема (22.17) устойчива по начальным данным и по правой части, так что для решения задачи (22.17) справедливы оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|. \quad (22.20)$$

Из (22.19) следует, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива, если $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Неявная схема при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ устойчива при любых h и τ . Неявная схема с $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ условно устойчива при $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2 - 4\sigma}$.

Сходимость схемы (22.17) следует из ее устойчивости и аппроксимации. Для исследования сходимости нужно провести исследования, аналогичные исследованию устойчивости для системы соотношений (22.18), которая отличается от (22.17) правой частью (вместо φ надо взять ψ) и нулевыми начальными и правыми условиями. Тогда для $\|z\|$ легко получить оценку

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\| \text{ при } \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}.$$

Другими словами, если схема устойчива по правой части и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится, причем порядок ее сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

Задачи и упражнения

1. На равномерной сетке узлов $\bar{\omega}_{h\tau}$ найти приближенное решение следующих краевых задач с использованием:

- I). явной разностной схемы ($h = 0,05$), выбирая шаг τ из условия ее устойчивости;
- II). чисто неявной разностной схемы с $\tau = h = 0,05$;
- III). разностной схемы Кранка – Николсона с $\tau = h = 0,05$.

Провести описание процесса построения соответствующей схемы, исследование погрешности аппроксимации и алгоритма реализации построенной схемы по ЭВМ.

p) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^3 - 6x_0t, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = -1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = t, u(1, t) = 4t;$$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^3 - 6xt, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 4t, u(2, t) = 9t + 1;$$

т) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^3 - 6xt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = -1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -t, u(1, t) = 2t;$$

y) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3 - 6xt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 1, u(0, t) = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 2t;$$

ф) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3 + 6xt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = -1, u(0, t) = -1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = -2t;$$

х) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3 + 6xt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 1, u(0, t) = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = -2t;$$

$$\text{ц)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3 + 6xt, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = -1, \quad u(1, t) = -2t - 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=2} = -13t;$$

$$\text{ч)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3 + 6xt, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(1, t) = -2t + 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=2} = -13t;$$

$$\text{ш)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t} - e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = e^x + 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha e;$$

$$\text{щ)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t} - e^{-x}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha e, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=2} = \alpha e^2;$$

$$\text{ы)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} - e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha e;$$

$$\text{э)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} - e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = e^x + 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1, \quad u(1, t) = \alpha e - e^{-t} - 1;$$

$$\text{ю)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t} + e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = -e^x + 2, \quad u(0, t) = -\alpha + 1 + e^{-t}, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -e;$$

$$\text{я)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x + e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = -e^x - 2, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -e, \quad u(1, t) = -2 - e^{-t};$$

$$\text{аа)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x + e^{-t}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = -e^x - 2, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \alpha e, \quad u(2, t) = -e^2 - e^{-t} - 1.$$

Тема 23. Разностные схемы для гиперболических уравнений

23.1. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

Рассмотрим уравнение колебаний струны в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (23.1)$$

В начальный момент времени заданы условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (23.2)$$

Здесь $u_0(x)$ – начальное отклонение и $\bar{u}_0(x)$ – начальная скорость являются известными функциями. Концы отрезка движутся по заданным законам

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (23.3)$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ рассмотрим семейство схем с весами

$$\begin{aligned} y_{it} &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \bar{y}) + \varphi, \quad \varphi = (x_i, t_j), \\ y_0 &= \mu_1(t), \quad y_N = \mu_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \end{aligned} \quad (23.4)$$

где $\tilde{u}_0(x)$ определим таким образом, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия (23.2) была бы не ниже погрешности аппроксимации исходного уравнения. Из формулы

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \dot{u}(x, 0) + 0,5\tau \ddot{u}(x, 0) + O(\tau^2) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) = \\ &= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u_0''(x) + f(x, 0)) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

видно, что $\tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u_0''(x) + f(x, 0))$. Таким образом, разностная схема (23.4) определена. Для нахождения $\hat{y} = \hat{y}_i = y_i^{j+1}$ из (23.4) получим разностную краевую задачу

$$\begin{aligned} \sigma \gamma^2 (y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (1 + 2\sigma \gamma^2) y_i^{j+1} &= -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad \gamma = \frac{\tau}{4}, \quad F_i = (2y_i^j - 2y_i^{j-1}) + \tau^2(1 - 2\sigma)\Lambda y^j + \sigma \tau^2 \Lambda y^{j-1} + \tau^2 \varphi_i^j, \end{aligned}$$

которая решается методом прогонки. Прогонка устойчива при $\sigma > 0$.

Исследование устойчивости по начальным данным проведем методом энергетических неравенств, полагая $\varphi \equiv 0$. Будем рассматривать разностную задачу

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}t} &= \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}), \\ y_0 &= y_N = 0, y(x, 0) = u_0(x), y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x). \end{aligned} \quad (23.5)$$

Так как $\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}$, то перепишем (23.5) в виде

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}t} = \Lambda y, \quad (23.6)$$

где E – единичный оператор. Умножим (23.6) на $y_{\circ_t} = \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar{t}})$. Получим

$$\left((E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}t}, y_{\circ_t} \right) = \left(\Lambda y, y_{\circ_t} \right). \quad (23.7)$$

Воспользовавшись очевидными тождествами

$$\begin{aligned} \left(y_{\bar{t}t}, y_{\circ_t} \right) &= \frac{1}{2} \left(\|y_{\bar{t}}\|^2 \right)_t, \\ \left(-\Lambda y_{\bar{t}t}, y_{\circ_t} \right) &= \left(y_{\bar{x}\bar{t}t}, y_{\circ_{t\bar{x}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 \right)_t, \end{aligned}$$

преобразуем левую часть (23.7) следующим образом:

$$\left(E - \sigma\tau^2\Lambda y_{\bar{t}t}, y_{\circ_t} \right) = \frac{1}{2} \left(\|y_{\bar{t}}\|^2 + \sigma\tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 \right)_t, \quad (23.8)$$

Покажем далее, что для любых функций $y = y(x, t)$, обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, справедливо тождество

$$\left(-\Lambda y, y_{\circ_t} \right) = \frac{1}{8} \left(\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t - \frac{\tau^2}{8} \left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 \right)_t. \quad (23.9)$$

Действительно, из формулы Грина следует, что

$$\left(-\Lambda y, y_{\circ_t} \right) = \left(v, v_{\circ_t} \right),$$

где $v = y_{\bar{x}}$, и так как $v v_{\circ_t} = \frac{1}{8}(v + \check{v})_t^2 - \frac{\tau^2}{8}((v_{\bar{t}})^2)_t$, то получаем (23.9).

Подставив эти формулы в (23.7), получаем следующее энергетическое тождество:

$$\|y_{\bar{t}}\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{4} \left(\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t = 0 \quad (23.10)$$

или $\varepsilon^{j+1} = \varepsilon^j$, где $\varepsilon^j = \|y_{\bar{t}}\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2$.

Найдем значения σ при которых величина ε^j неотрицательна при любых y^j и y^{j-1} . Для этого заметим, что $\|y_{i\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y_i\|^2$, и поэтому

$$\|y_i\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau \|y_{i\bar{x}}\|^2 \geq \left(\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2\right) \|y_{i\bar{x}}\|^2.$$

Следовательно, правая часть будет неотрицательна при $\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2}$. При

этом выражение $(\varepsilon^j)^{\frac{1}{2}}$ можно считать нормой и тождество (23.10) означает устойчивость во введенной норме $\|y^j\|_* = (\varepsilon^j)^{\frac{1}{2}}$. В частности, схема (23.5) устойчива по начальным данным при $\sigma = 0$, если выполняется условие Куранта $\tau \leq h$.

23.2. Явные разностные схемы для уравнения переноса

Построение и исследование разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа часто проводят в открытой полуплоскости

$$D = \{(x, t) : \infty > x > -\infty, t > 0\}$$

на примере уравнения для оператора переноса

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad (23.11)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ при } t = 0. \quad (23.12)$$

На D рассмотрим равномерную сетку узлов $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$,

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h > 0\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, \tau > 0\}$$

с шагами h и τ по x и t соответственно.

Для задачи Коши естественно использовать явные схемы. Начнем со следующей схемы:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a_i^j \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} = f_i^j, \quad y_i^0 = u_0(x_i) \quad (23.13)$$

или $y_t + ay_x = f$. Шаблон этой схемы состоит их точек

$$\begin{array}{c} (x_i, t_{j+1}) \\ \cdot \\ (x_i, t_j) \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ (x_{i+1}, t_j) \end{array}.$$

Схема (23.13) имеет, очевидно, первый порядок аппроксимации по h и τ , так как невязка

$$\psi = u_t + au_x = (\dot{u} + a\dot{u}') + 0,5\tau\ddot{u} + 0,5ah\ddot{u}'' + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h).$$

Пусть $f = 0$ и покажем, что при $a = \text{const} > 0$ эта схема абсолютно неустойчива. Для этого достаточно убедиться в неустойчивости какого-либо частного решения этого разностного уравнения. Перепишем уравнение (23.13) в виде

$$y_k^{j+1} = -\gamma y_{k+1}^j + (1 + \gamma)y_k^j, \quad \gamma = \frac{\tau\phi}{h}. \quad (23.14)$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде гармоник $y_k^j = q^j e^{ik\phi}$ (здесь $i = \sqrt{-1}$, $\phi \neq 0$). Подставляя это выражение в (23.14), получим

$$q = -\gamma e^{i\phi} + \gamma + 1 = 1 + (1 - \cos\phi)\gamma - i\gamma \sin\phi$$

и вычислим

$$|q|^2 = (1 + (1 - \cos\phi)\gamma)^2 + \gamma^2 \sin^2\phi = 1 + 4\gamma(\gamma + 1)\sin^2\frac{\phi}{2}.$$

Отсюда видно, что $|q|^2 > 1$ при любом фиксированном γ (ограниченном снизу при $\tau \rightarrow 0$), если только $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \neq 0$ (случай $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0$ соответствует

$y_k^0 = 1 = \text{const}$. Тогда $|y_k^j| = |q|^j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще одну явную схему на шаблоне

$$\begin{array}{c} (x_i, t_{j+1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ (x_{i-1}, t_j) \quad (x_i, t_j) \end{array}$$

следующего вида:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = 0, \quad a > 0 \quad (23.15)$$

или $y_t + ay_{\bar{x}} = 0$. Эта схема тоже имеет первый порядок аппроксимации, так как $\psi = u_t + ay_{\bar{x}} = O(\tau + h)$. Из уравнения

$$y_i^{j+1} = (1-\gamma)y_i^j + \gamma y_{i-1}^j, \gamma = \frac{a\tau}{h} > 0$$

видно, что при $\gamma \leq 1$ будем иметь

$$\|y^{j+1}\|_C \leq (1-\gamma)\|y^j\|_C + \gamma\|y^j\|_C = \|y^j\|_C,$$

т. е. схема устойчива в C

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C \quad \text{при } 0 < \gamma \leq 1.$$

Аналогично можно убедиться, что при $a < 0$ схема (23.15) неустойчива (по аналогии со схемой (23.13) при $a > 0$), а схема (23.13) устойчива при $|\gamma| = \left|\frac{a\tau}{h}\right| \leq 1$, так как для нее выполнено неравенство $\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C$, $j = 0, 1, \dots$.

Рассмотрим теперь явную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} = 0 \quad (23.16)$$

или $y_t + ay_{\bar{x}} = 0$, где $y_{\bar{x}} = \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h}$. Эта схема задана на четырехточечном шаблоне

$$\begin{array}{c} (x_i, t_{j+1}) \\ \vdots \\ (x_{i-1}, t_j) \quad (x_i, t_j) \quad (x_{i+1}, t_j). \end{array}$$

Но легко показать, что схема неустойчива при любых фиксированных $\gamma = \frac{a\tau}{h}$ и любом знаке коэффициента a . Чтобы получить на том же шаблоне устойчивую схему, заменим значение y_k^j полусуммой $0,5(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)$:

$$\frac{y_k^{j+1} - 0,5(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0. \quad (23.17)$$

Отсюда находим $y_k^{j+1} = 0,5(1+\gamma)y_{k-1}^j + 0,5(1-\gamma)y_{k+1}^j$, $\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C \leq \dots \leq \|y^0\|_C$ при $|\gamma| \leq 1$ и любом знаке a . Чтобы оценить невязку для схемы (23.17), перепишем ее в виде

$$y_t + \frac{0,5h^2}{\tau} y_{\bar{x}\bar{x}} + ay_{\bar{x}} = 0,$$

учитывая при этом, что

$$0,5(y_{k+1} + y_{k-1}) = 0,5(y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k) + y_k = y_k + 0,5h^2 y_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Невязка на решении $u(x, t)$ будет иметь вид

$$\psi = u_t + au_{\bar{x}} - \frac{0,5h^2}{\tau} u_{\bar{x}\bar{x}} = 0,5\tau\ddot{u} - 0,5\frac{h^2}{\tau} u'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Подставим сюда найденное из уравнения $\ddot{u} = a^2 u''$:

$$\psi = \left(\frac{a^2\tau}{2} - \frac{h^2}{2\tau} \right) u'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Отсюда замечаем, что схема (23.17) обладает условной аппроксимацией:

она аппроксимирует уравнение только при $\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 0$, если $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$.

Если выбрать $\tau = O(h)$, то $\psi = O(\tau + h)$.

23.3. Неявные разностные схемы для уравнения переноса

Рассмотрим теперь краевую задачу, когда при $x = 0$ задано граничное значение $\mu(t)$ и решение ищется при $x > 0$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty, \quad a = \text{const} > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (23.18)$$

причем $u_0(0) = \mu(0)$.

На шаблоне из точек

$$\begin{array}{ccc} (x_{k-1}, t_{j-1}) & \cdot & (x_k, t_{j+1}) \\ & \cdot & \\ & (x_k, t_j) \end{array}$$

напишем неявную схему

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} = 0, \quad (23.19)$$

т. е. $y_t + a\hat{y}_{\bar{x}} = 0$. Перепишем ее в виде

$$y_k^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} y_0^j + \frac{1}{\gamma+1} y_k^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h} > 0.$$

Отсюда видно, что счет можно начинать с точек $k = 1$, $j = 0$. Тогда

$$y_1^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} y_0^0 + \frac{1}{\gamma+1} y_1^0 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \mu(t_1) + \frac{1}{\gamma+1} u_0(x_1).$$

Зная y_0^j , можно вычислить все значения y_1^j до некоторого $j = j_0$, затем положив $k = 2$, найти y_2^j при $0 < j \leq j_0$ и т. д.

Рассмотрим семейство схем, заданное на четырехточечном шаблоне

$$\begin{array}{cc} (x_{k-1}, t_{j+1}) & (x_k, t_{j+1}) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (x_{k-1}, t_j) & (x_k, t_j) \end{array}$$

следующего вида:

$$\begin{aligned} y_t + \sigma \hat{y}_{\bar{x}} + (1 - \sigma) y_{\bar{x}} &= 0, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad y(0, t_j) = 0, \quad a \equiv 1. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Схема (23.19) принадлежит этому семейству и соответствует $\sigma = 1$.

Вычислим невязку этой системы:

$$\psi = u_t + \sigma \hat{u}_{\bar{x}} + (1 - \sigma) u_{\bar{x}}.$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} u_t &= \dot{\bar{u}} + O(\tau^2), \quad u_{\bar{x}} = u' - 0,5hu'' + O(h^2), \quad \hat{v} = \bar{v} + 0,5\tau\dot{\bar{v}} + O(\tau^2), \\ v &= \bar{v} - 0,5\tau\dot{\bar{v}} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

где $\bar{v} = v|_{t+\frac{1}{2}}$, получим

$$\psi = 0,5\tau(2\sigma - 1)\dot{\bar{u}}' - 0,5hu'' + O(\tau^2 + h^2) = 0,5\tau(2\sigma + h - \tau)\dot{\bar{u}}' + O(\tau^2 + h^2).$$

Отсюда видно, что схема с весом σ имеет второй порядок аппроксимации $\psi = O(\tau^2 + h^2)$, если

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0,$$

а при $\sigma \neq \sigma_0$ – первый порядок $\psi = O(\tau + h)$.

Покажем теперь, что схема (23.20) устойчива по начальным данным при $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0$.

Пусть $0 \leq x \leq l$ и сетка $\bar{\omega}_h$ введена на $[0, l]$. Скалярное произведение и норму определим так:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad \text{где } hN = l.$$

Учитывая, что $\hat{v} = 0,5(\hat{v} + v) + 0,5(\hat{v} - v)$, $v = 0,5(\hat{v} + v) - 0,5(\hat{v} - v)$ и полагая $v = y_{\bar{x}}$, перепишем схему в виде

$$y_t + (\sigma - 0,5)\tau y_{\bar{x}t} + 0,5(\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}) = 0, y(0, t) = 0.$$

Умножим это уравнение на $2\tau y_{\bar{x}t} = 2(\hat{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}})$ и учтем, что

$$2y_t y_{\bar{x}t} = (v^2)_{\bar{x}} + h(v_{\bar{x}})^2 = (y_t^2)_{\bar{x}} + h(y_{\bar{x}t})^2.$$

Тогда получим

$$\tau(y_t^2)_{\bar{x}} + 2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)(y_{\bar{x}t})^2 + (\hat{y}_{\bar{x}})^2 - (y_{\bar{x}})^2 = 0.$$

Умножая это соотношение на h и суммируя его по всем узлам сетки $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N$, получим

$$\tau(y_t^2)_N + 2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)\|y_{\bar{x}t}\|^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (23.21)$$

Здесь учтено, что

$$\sum_{i=1}^N (y_t^2)_{\bar{x},i} h = \sum_{i=1}^N \left((y_t^2)_i - (y_t^2)_{i-1} \right) = y_{t,N}^2 - y_{t,0}^2$$

$$\text{и } y_{t,0} = y_t(0, t) = 0, \text{ так как } y(0, t) = 0.$$

Из тождества (23.21) видно, что $\|y_{\bar{x}}^{j+1}\| \leq \|y_{\bar{x}}^j\| \leq \dots \leq \|y_{\bar{x}}^0\|$, если $(\sigma - 0,5)\tau + 0,5h \geq 0$, т. е. $\sigma \geq \sigma_0$. Таким образом, схема устойчива в энергетической норме

$$\|y\|_{(1)} = \|y_{\bar{x}}\|.$$

В заключение отметим, что если $a < 0$ и задача рассматривается на отрезке $0 \leq x \leq l$, то краевое условие для $u(x, t)$ необходимо задавать при $x = l$, т. е. $u(x, l) = \mu(t)$, $t \geq 0$. В этом случае следует рассматривать разностную схему

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + \sigma \frac{y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{k+1}^j - y_k^j}{h} = 0,$$

счет по которой будет проводиться, начиная с $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$ (здесь y_N^{j+1} будет задано через граничное условие). Все приведенные выше рассуждения без труда переносятся и на эту схему.

Задачи и упражнения

1. С помощью

а). явной разностной схемы ($\sigma = 0, h = 0,05$);

б). неявной разностной схемы ($\sigma = \frac{1}{2}, h = 0,05$ и $h = 0,01$)

найти решение следующих краевых задач для уравнения колебаний струны:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0,9 \cos 3t + 0,4 \sin 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 0,1 \sin 2x + 0,2, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0,2, u(1, t) = 0,1 \sin 2 + 0,2;$$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0,9 \cos 3t + 0,3 \sin 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 0,1 \sin 2x + 0,6, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,6, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0,2 \cos 2;$$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0,9 \cos 3t + 1,2 \sin 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 0,1 \sin 2x + 0,5, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0,2, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0,2 \cos 2;$$

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 1,2 \sin x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 0,3 \sin 2x + 0,6, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0,6, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0,6 \cos 2;$$

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 1,2 \sin x, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 0,5,$

$$u(x, 0) = 0,3 \cos 2x + 0,6, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0,6 \cos 2, u(2, t) = 0,3 \sin 4 + 0,2 \cos 3t + 0,4;$$

$$\text{е) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 2 \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,5, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,2 \cos 3t + 0,3, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2;$$

$$\text{ж) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 2 \cos 2x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,5, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2, \quad u(2, t) = 0,5 \sin 1 + 0,2 \cos 3t + 0,3;$$

$$\text{з) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 2 \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,6, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,2 \cos 3t + 0,4, \quad u(1, t) = 0,5 \sin 1 + 0,2 \cos 3t + 0,4;$$

$$\text{и) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1,8 \cos 3t + 2 \cos 2x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,6, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(1, t) = 0,5 \sin 1 + 0,2 \sin 3t + 0,4, \quad u(2, t) = 0,5 \sin 4 + 0,2 \cos 3t + 0,4;$$

$$\text{к) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3,6 \cos 3t + 2 \sin 2x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,5, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,4 \cos 3t + 0,1, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2;$$

$$\text{л) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3,6 \cos 3t + 2 \sin 2x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,5, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2, \quad u(2, t) = 0,5 \sin 4 + 0,4 \cos 3t + 0,1;$$

$$\text{м) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4,5 \cos 3t + 2 \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,8, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,5 \cos 3t + 0,3, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2;$$

$$\text{н) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4,5 \cos 3t + 2 \sin 2x, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,5 \sin 2x + 0,8, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \cos 2, \frac{\partial u(2, t)}{\partial x} = \cos 4;$$

$$\text{о) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2,7 \cos 3t + 2,4 \sin 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,6 \sin 2x + 0,5, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = 0,3 \cos 3t + 0,2, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 1,2 \cos 2;$$

$$\text{п) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2,7 \cos 3t + 2,4 \sin 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 0,6 \sin 2x + 0,5, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 1,2 \cos 2, u(2, t) = 0,6 \sin 4 + 0,3 \cos 3t + 0,2.$$

2. Используя

а). явную разностную схему с $h = 0,05$ (шаг τ выбирается из условия устойчивости);

б). неявную разностную схему с $\sigma = 1, h = 0,05, \tau = 0,1$;

с). неявную разностную схему с $\sigma = 0,5, \tau = h = 0,05$,

найти решение следующих краевых задач для уравнения переноса в прямоугольнике $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 2$:

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{1+x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 2t + 2x\sqrt{1+x+t},$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, u(0, t) = t^2 + 1;$$

$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{1+x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 2t - 2x\sqrt{1+x+t},$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, u(1, t) = t^2 + 2;$$

$$\text{в) } \frac{\partial u}{\partial t} + e^{x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t + 2xe^{x+t},$$

- $u(x, 0) = x^2 + 1, u(0, t) = 2t^2 + 1;$
 Г) $\frac{\partial u}{\partial t} - e^{x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t - 2xe^{x+t},$
 $u(x, 0) = x^2 + 1, u(1, t) = 2t^2 + 2;$
 Д) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 2t + \frac{4x}{1+x+t},$
 $u(x, 0) = 2x^2 + 1, u(0, t) = t^2 + 1;$
 Е) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{1+x+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 2t - \frac{4x}{1+x+t},$
 $u(x, 0) = 2x^2 + 1, u(1, t) = t^2 + 3;$
 Ж) $\frac{\partial u}{\partial t} + (2 + \sin xt) \frac{\partial u}{\partial x} = 2t + 2x(2 + \sin xt),$
 $u(x, 0) = x^2 + 2, u(0, t) = t^2 + 2;$
 З) $\frac{\partial u}{\partial t} - (2 + \sin xt) \frac{\partial u}{\partial x} = 2t - 2x(2 + \sin xt),$
 $u(x, 0) = x^2 + 2, u(1, t) = t^2 + 3;$
 И) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1+t}{1+x^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t + \frac{4x(1+t)}{1+x^2},$
 $u(x, 0) = 2x^2 + 1, u(0, t) = 2t^2 + 1;$
 К) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1+t}{1+x^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t - \frac{4x(1+t)}{1+x^2},$
 $u(x, 0) = 2x^2 + 1, u(1, t) = 2t^2 + 3;$
 Л) $\frac{\partial u}{\partial t} + (e^x + e^{-t}) \frac{\partial u}{\partial x} = 4t + 2 \frac{e^{xt} + 1}{e^t} x,$
 $u(x, 0) = x^2 + 2, u(0, t) = 2t^2 + 2;$
 М) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{e^{xt} + 1}{e^t} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t + 2x(e^x + e^{-t}),$
 $u(x, 0) = x^2 + 2, u(1, t) = 2t^2 + 3;$
 Н) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2+t^2}{1+x} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t + \frac{2+t^2}{1+x} 2x,$
 $u(x, 0) = x^2 + 2, u(0, t) = 2t^2 + 2;$
 О) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2+t^2}{1+x} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t - \frac{2+t^2}{1+x} 2x,$

$$\begin{aligned}
& u(x, 0) = x^2 + 2, u(1, t) = 2t^2 + 3; \\
\text{п) } & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x + t + 1}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}} \frac{\partial u}{\partial x} = 4t - 4x \frac{x + t + 1}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}}, \\
& u(x, 0) = 2x^2 + 2, u(0, t) = 2t^2 + 2.
\end{aligned}$$

Тема 24. Разностные схемы для эллиптических уравнений

24.1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона

Постановка задачи Дирихле состоит в следующем: найти непрерывную в $G + \Gamma$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G$$

и краевому условию $u|_\Gamma = \mu(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, G есть p -мерная конечная область с границей Γ . Рассмотрим аппроксимацию оператора Лапласа Δu для случая $p = 2$, т. е.

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (24.1)$$

на плоскости $x = (x_1, x_2)$. В точке $x = (x_1, x_2)$ каждый из операторов $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ и $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ аппроксимируем трехточечным разностным оператором Λ_1 и Λ_2 вида

$$L_1 u \approx \Lambda_1 u = u_{\bar{x}_1, x_1} = \frac{1}{h_1^2} (u(x_1 + h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2)), \quad (24.2)$$

$$L_2 u \approx \Lambda_2 u = u_{\bar{x}_2, x_2} = \frac{1}{h_2^2} (u(x_1, x_2 + h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h_2)), \quad (24.3)$$

где $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ – шаги сетки по направлениям x_1 и x_2 соответственно. Используя (24.2), (24.3), заменим оператор Лапласа (24.1) разностным оператором

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (24.4)$$

который определен на пятиточечном шаблоне, состоящем из узлов $(x_1 \pm h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm h_2)$, (x_1, x_2) . Вычислим погрешность аппроксимации оператора Лапласа (24.1) разностным оператором (24.4). Так как

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4) = L_\alpha u + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 u + O(h^4), \alpha = 1, 2,$$

$$\text{то } \Lambda u - Lu = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Отсюда следует, что $\Lambda u - Lu = O(|h|^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, если $u(x)$ – функция, имеющая не менее четырех ограниченных (хотя бы в прямоугольнике $x_\alpha - \bar{h}_\alpha \leq x_\alpha \leq \bar{h}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $\bar{h}_\alpha \geq h_\alpha$) производных по x_α , $\alpha = 1, 2$. Таким образом, разностный оператор (24.4) аппроксимирует оператор Лапласа (24.1) со вторым порядком на регулярном пятиточечном шаблоне. Аналогично строится аппроксимация p -мерного ($p > 2$) оператора Лапласа.

Рассмотрим аппроксимацию оператора Лапласа (24.1) на нерегулярном пятиточечном шаблоне, состоящем из точек $(x_1 + h_{1+}, x_2)$, $(x_1 + h_{1+}, x_2)$, (x_1, x_2) , $(x_1, x_2 - h_{2-})$, $(x_1, x_2 + h_{2+})$, где $h_{1\pm} > 0$, $h_{2\pm} > 0$ и $h_{\alpha+} \neq h_{\alpha-}$ по крайней мере для одного α . Каждый из операторов аппроксимируется по трем точкам с помощью разностных соотношений следующего вида:

$$L_1 u \approx \Lambda_1^* u = \frac{1}{h_1} \left(\frac{u(x_1 + h_{1+}, x_2) - u(x_1, x_2)}{h_{1+}} - \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 - h_{1-}, x_2)}{h_{1-}} \right),$$

$$L_2 u \approx \Lambda_2^* u = \frac{1}{h_2} \left(\frac{u(x_1, x_2 + h_{2+}) - u(x_1, x_2)}{h_{2+}} - \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2 - h_{2-})}{h_{2-}} \right),$$

где $\bar{h}_\alpha = 0,5(h_{\alpha+} + h_{\alpha-})$, $\alpha = 1, 2$. Разностный оператор Лапласа на нерегулярном шаблоне будет иметь вид

$$\Lambda^* u = \Lambda_1^* u + \Lambda_2^* u = u_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}, \quad (24.5)$$

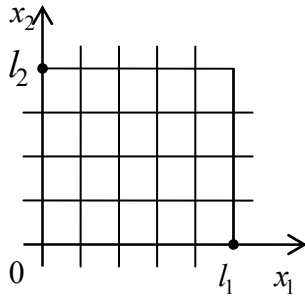
и можно показать, что на нерегулируемом шаблоне разностный оператор Λ^* , определяемый (24.5), аппроксимирует (24.1) с первым порядком.

Рассмотрим разностную задачу Дирихле в прямоугольнике. Пусть $\bar{G}_0 = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ –прямоугольник со сторонами l_1 и l_2 , Γ – его граница. Рассмотрим в $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$ задачу Дирихле для уравнений Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), x \in G_0, \quad (24.6)$$

$$u(x_1, x_2)|_{\Gamma} = \mu(x_1, x_2).$$

Построим в \bar{G}_0 сетку $\bar{\omega}_h$ с шагами $h_1 = \frac{l_1}{N_1}$, $h_2 = \frac{l_2}{N_2}$, где N_1 и N_2 – целые положительные числа. Для этого рассмотрим два семейства



параллельных прямых $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $i_1 = 0, 1, \dots, N_1$, $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_2 = 0, 1, \dots, N_2$ как показано на рисунке. Точки пересечения этих прямых $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ назовем узлами сетки $\bar{\omega}_h$. Если x лежит внутри прямоугольника, т. е. $0 < i_1 < N_1$, $0 < i_2 < N_2$, то такой узел назовем внутренним. Пусть ω_h – множество всех внутренних узлов, их общее количество равно $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$. Узлы, лежащие на границе прямоугольника (при $i_1 = 0, N_1$ или $i_2 = 0, N_2$), кроме четырех узлов $(0, 0)$, $(0, l_2)$, $(l_1, 0)$, (l_1, l_2) , назовем граничными и обозначим γ_h . Совокупность всех внутренних и граничных узлов назовем сеткой $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. В каждом внутреннем узле $x \in \omega_h$ может быть построен пятиточечный регулярный шаблон, все узлы которого принадлежат $\bar{\omega}_h$. Поэтому во всех внутренних узлах оператор Δu можно заменить разностным оператором $\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}$. Правую часть $f(x)$ уравнения (24.6) можно аппроксимировать сеточной функцией $\varphi(x)$ так, чтобы $f(x) - \varphi(x) = O(|h|^2)$. Считая $f(x)$ непрерывной функцией, обычно полагают $\varphi(x) = f(x)$. В результате задаче (24.6) ставится в соответствие разностная задача Дирихле: найти сеточную функцию $y(x)$, определенную на $\bar{\omega}_h$, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнению

$$\Lambda y = -f(x), \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, x \in \omega_h, \quad (24.7)$$

и принимающую на границе γ_h заданные значения

$$y(x) = \mu(x), x \in \gamma_h. \quad (24.8)$$

Из (24.7), (24.8) видно, что значения $\mu(x)$ в вершинах прямоугольника не используются. Это и определило выбор γ_h . В случае третьей краевой задачи или схемы порядка аппроксимации $O(|h^4|)$ γ_h состоит из всех узлов, лежащих на границе прямоугольника, включая его вершины. Рассмотрим методы численного решения системы $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ линейных алгебраических уравнений (24.7).

24.2. Методы Якоби и Зейделя

Будем рассматривать разностную задачу Дирихле в прямоугольнике (24.7)–(24.8), которую запишем в индексном виде

$$\frac{y_{i_1+1, i_2} - 2y_{i_1, i_2} + y_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{y_{i_1, i_2+1} - 2y_{i_1, i_2} + y_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} = -f_{i_1, i_2}, \quad (24.9)$$

$$y \Big|_{\gamma_h} = \mu(x) \Big|_{\gamma_h}, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2.$$

Легко видеть, что (24.9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, при этом число уравнений совпадает с числом неизвестных. Необходимо отметить, что пока не существует эффективных точных методов решения системы (24.9), и мы для ее решения будем рассматривать только итерационные методы.

Рассмотрим метод простых итераций или метод Якоби решения системы (24.9). С этой целью выразим из (24.9) значение y_{i_1, i_2} по формуле

$$y_{i_1, i_2} = \frac{\left(\frac{y_{i_1+1, i_2} + y_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{y_{i_1, i_2+1} + y_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} + f_{i_1, i_2} \right)}{\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)}, \quad (24.10)$$

считая эту запись каноническим видом системы (24.9). Пусть известно начальное приближение y_{i_1, i_2}^0 , $i_2 = \overline{1, N_\alpha - 1}$, $\alpha = 1, 2$ к решению (24.9). Построим следующий итерационный процесс:

$$y_{i_1, i_2}^{s+1} = \frac{\left(\frac{y_{i_1+1, i_2}^s + y_{i_1-1, i_2}^s}{h_1^2} + \frac{y_{i_1, i_2+1}^s + y_{i_1, i_2-1}^s}{h_2^2} + f_{i_1, i_2} \right)}{\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)}. \quad (24.11)$$

Для того чтобы судить о сходимости метода Якоби (24.11), необходимо записать (24.10) в матричном виде

$$Y = BY + F,$$

где $Y = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1N_2-1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{N_1-1, N_2-1})$; B – матрица коэффициентов при соответствующих $y_{i \pm 1, i_2 \pm 1}$; F – вектор правых частей. В этой записи легко видеть, что $\|B\|_C = 1$. Но поскольку эта норма одна из самых «грубых», то есть надежда, что какая-либо $\|B\| < 1$ и метод (24.11) будет сходиться. Но его сходимость будет не выше скорости сходимости бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \|B\|$. Приведенная схема принадлежит к семейству так называемых явных итерационных схем.

Простейшей неявной итерационной схемой является метод Зейделя. Этот метод строится в зависимости от определения последовательности уточнения предыдущих значений y_{i_1, i_2}^s . Условимся, что порядок уточнения итераций будет следующим: уточнение осуществляем, начиная от левого нижнего угла сеточной области и направо до правой границы, изменяя вначале индекс i_1 , а затем двигаемся последовательно вверх, изменяя индекс i_2 . С этой целью перепишем систему (24.9) в следующем виде:

$$y_{i_1 i_2} = \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{y_{i_1-1 i_2}}{h_1^2} - \frac{y_{i_1 i_2-1}}{h_2^2} + \frac{y_{i_1+1 i_2}}{h_1^2} + \frac{y_{i_1 i_2+1}}{h_2^2} + f_{i_1 i_2} \right),$$

а итерационный процесс запишем так:

$$y_{i_1 i_2}^{s+1} = \frac{\left(\frac{y_{i_1+1 i_2}^s + y_{i_1-1 i_2}^{s+1}}{h_1^2} + \frac{y_{i_1 i_2+1}^s + y_{i_1 i_2-1}^{s+1}}{h_2^2} + f_{i_1 i_2} \right)}{\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right)}, \quad (24.13)$$

$i_1 = N_1 - 1, \dots, 1$, $i_2 = N_2 - 1, \dots, 1$. Как правило, скорость сходимости итерационного процесса Зейделя (24.12)–(24.13) выше, чем скорость сходимости метода Якоби (24.11). Как метод Якоби, так и метод Зейделя позволяют определить решение на следующей итерации по явным формулам (24.11) или (24.12)–(24.13), при этом их скорость сходимости не слишком высока.

24.3. Метод переменных направлений решения разностной задачи Дирихле в прямоугольнике

Если при вычислении y^{k+1} используется только предыдущая итерация y^k , то говорят, что итерационный метод (схема) является одношаговым.

Пусть требуется решить уравнение

$$Ay = f, \quad (24.14)$$

где $A: H \rightarrow H$ – линейный оператор в конечномерном (размерности N) вещественном пространстве H со скалярным произведением и нормой $(\|y\|) = (y, y)^{\frac{1}{2}}$. Будем предполагать, что $A = A^* > 0$, $f \in H$ – любой вектор. Любой линейный одношаговый итерационный метод решения задачи (24.14) может быть записан в виде

$$B_k y^{k+1} = C_k y^k + F_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24.15)$$

где B_k, C_k – линейные операторы из H в H , зависящие, вообще говоря, от номера итерации k ; $F_k \in H$ – заданная функция y^k ; y^k – k -я итерация, причем B_k^{-1} – существует. Естественно требовать, чтобы независимое от k точное решение уравнения (24.14) тождественно удовлетворяло уравнению (24.15), т. е. $(B_k - C_k)y = F_k$. Это возможно только при условии, что $(B_k - C_k)A^{-1}f = F_k$. Отсюда следует, что существует обратный оператор $(B_k - C_k)^{-1}$ и $f = A(B_k - C_k)^{-1}F_k$. Всегда можно положить $\tau_{k+1}^{-1}(B_k - C_k) = A$, $F_k = \tau_{k+1}f$, $k = 0, 1, \dots$, где $\tau_{k+1} > 0$ – числовой параметр. В результате получим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau_{k+1}} + A y^k = f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (24.16)$$

При $k = 0$ задается произвольное начальное приближение $y^0 \in H$. Так как существует обратный оператор B_k^{-1} , то из (24.16) следует, что

$$y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1} B_k^{-1} \left(A y^k - f \right), \quad (24.17)$$

или $y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1} B_k^{-1} r_k = y^k - r_k \omega_k$, где $r_k = A y^k - f$ — невязка, $\omega_k = B_k^{-1} r_k$ — поправка. При известном y^0 значения y^{k+1} находятся из (24.17) рекуррентно. Очевидно, что итерационный метод имеет смысл, если он сходится, т. е. $\|y^k - y\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Обычно задают некоторую погрешность $\xi > 0$ и вычисления прекращаются, если, например,

$$\|A y^k - f\| \leq \xi \|A y^0 - f\|.$$

Напишем уравнение для погрешности $z^k = y^k - y$. Так как $Ay = f$, то

$$B_k \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau_{k+1}} + A z^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24.18)$$

$z^0 \in H$. Если $B_k = B$, т. е. не зависит от k , то поправка $\omega_k = B_k^{-1} r_k$ также удовлетворяет однородному уравнению

$$B \frac{\omega^{k+1} - \omega^k}{\tau_{k+1}} + A \omega^k = 0, \quad (24.19)$$

в чем легко убедиться непосредственно. Из (24.18) следует, что $z^{k+1} = s_{k+1} z^k$, $s_{k+1} = E - \tau_{k+1} B_k^{-1} A$ и s_{k+1} называется оператором перехода от итерации k к итерации $k+1$. Исключая z^k, z^{k-1}, \dots, z^1 , имеем при $k = n-1$

$$z^n = T_n z^0, \quad T_n = s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1, \quad (24.20)$$

где T_n — разрешающий оператор схемы (24.18). Из (24.20) находим $\|z^n\| = \|T_n z^0\| \leq \|z^0\| \|T_n\|$ или $\|z^n\| \leq q \|z^0\|$, $q_n = \|T_n\|$. Условие окончания итераций выполнено, если $q_n \leq \xi$. Таким образом, для выяснения вопроса о сходимости итераций надо оценить норму разрешающего оператора T_n , при этом B_k и T_n следует выбрать так, чтобы минимизировать норму $\|T_n\| = q_n$ разрешающего оператора. Кроме того, при выборе B_k естественно стремиться к минимуму арифметических действий, нужных для определения y^{k+1} при заданном y^k из уравнения (24.16).

Обратимся к разностной задаче Дирихле в прямоугольнике (24.7), (24.8). Для ее решения в качестве итерационной схемы рассмотрим схему вида

$$\begin{aligned} \frac{y^{k+\frac{1}{2}} - y^k}{\tau_{k+1}^{(1)}} &= \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^k + f(x), x \in \omega_h, \quad y \Big|_{\gamma_h}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x) \Big|_{\gamma_h}, \\ \frac{y^{k+1} - y^{k+\frac{1}{2}}}{\tau_{k+1}^{(2)}} &= \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{k+1} + f(x), x \in \omega_h, \quad y \Big|_{\gamma_h}^{k+1} = \mu(x) \Big|_{\gamma_h}, \end{aligned} \quad (24.21)$$

где $k=0,1,\dots$, y^0 – задано. Здесь k – номер итерации, $y^{k+\frac{1}{2}}$ – промежуточная итерация, $\tau_{k+1}^{(1)}, \tau_{k+1}^{(2)} > 0$ – итерационные параметры, подлежащие выбору при условии минимума операций для получения заданной точности. Это и есть итерационная схема метода переменных направлений. Переход от k -ой итерации к $k+1$ -ой итерации осуществляется последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов соответственно для трехточечных уравнений

$$\begin{aligned} y^{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k+1}^{(1)} \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} &= F_k, F_k = y^k + \tau_{k+1}^{(1)} \Lambda_2 y^k + \tau_{k+1}^{(1)} f, \\ y^{k+1} - \tau_{k+1}^{(2)} \Lambda_2 y^{k+1} &= F_{k+\frac{1}{2}}, F_{k+\frac{1}{2}} = y^{k+\frac{1}{2}} + \tau_{k+1}^{(2)} \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} + \tau_{k+1}^{(2)} f. \end{aligned}$$

Выбор параметров $\tau_{k+1}^{(1)}, \tau_{k+1}^{(2)}$ можно осуществлять и на основании вычислительного эксперимента.

Задачи и упражнения

3. Используя

а). Метод Якоби;

б). Метод Зейделя;

с). Метод переменных направлений,

найти решение задачи Дирихле в области прямоугольной формы с указанными шагами при следующих входных данных:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 1,2x_1^2 + 6x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 1,5, 0 \leq x_2 \leq 1,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,1x_1^4 + 0,5x_2^2 + 1 \Big|_{\Gamma}, h_1 = h_2 = 0,1;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2,4x_1^2 + 6x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1,5,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,2x_1^4 + 0,5x_2^2 + 2 \Big|_{\Gamma}, h_1 = h_2 = 0,1;$$

$$\text{в) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 3,6x_1^2 + 7,2x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,3x_1^4 + 0,6x_2^2 + 1 \Big|_{\Gamma}, h_1 = h_2 = 0,1;$$

$$\text{г) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 3,6x_1^2 + 6x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,3x_1^4 + 0,5x_2^4 + 2 \Big|_{\Gamma}, h_1 = h_2 = 0,1;$$

$$\text{д) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4,8x_1^2 + 8,4x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,4x_1^4 + 0,7x_2^4 + 1 \Big|_{\Gamma}, h_1 = h_2 = 0,2;$$

$$\text{е) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4,8x_1^2 + 7,2x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1,$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,4x_1^4 + 0,6x_2^4 + 2 \Big|_{\Gamma}, h_1 = 0,2, h_2 = 0,1;$$

$$\text{ж) } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4,8x_1^2 + 9,6x_2^2, 0 \leq x_1 \leq 1,5, 0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$\begin{aligned}
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,4x_1^4 + 0,8x_2^4 + 1 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = h_2 = 0,15; \\
3) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 3,6x_1^2 + 9,6x_2^2, \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5, \quad 0 \leq x_2 \leq 0,5, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,3x_1^4 + 0,8x_2^4 + 3 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,01, \quad h_2 = 0,01; \\
и) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 3,6x_1^2 + 8,4x_2^2, \quad 0 \leq x_1 \leq 0,9, \quad 0 \leq x_2 \leq 0,9, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,3x_1^4 + 0,7x_2^4 + 1 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,1, \quad h_2 = 0,1; \\
к) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 6x_1^2 + 10,8x_2^2, \quad 1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2,5, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,5x_1^4 + 0,9x_2^4 + 3 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,1, \quad h_2 = 0,1; \\
л) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 6x_1^2 + 9,6x_2^2, \quad 1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2,5, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,5x_1^4 + 0,8x_2^4 + 2 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,1, \quad h_2 = 0,2; \\
м) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 6x_1^2 + 8,4x_2^2, \quad 1 \leq x_1 \leq 1,5, \quad 1 \leq x_2 \leq 1,4, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,5x_1^4 + 0,7x_2^4 + 1 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,01, \quad h_2 = 0,01; \\
н) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 7,2x_1^2 + 1,2x_2^2, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,6x_1^4 + 0,1x_2^4 + 2 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,1, \quad h_2 = 0,2; \\
о) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 7,2x_1^2 + 2,4x_2^2, \quad 1 \leq x_1 \leq 1,5, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \\
& u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,6x_1^4 + 0,2x_2^2 + 3 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,025, \quad h_2 = 0,05; \\
п) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 9,6x_1^2 + 9,6x_2^2, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 1 \leq x_2 \leq 1,5,
\end{aligned}$$

$$u(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma} = 0,8x_1^4 + 0,8x_2^4 + 1 \Big|_{\Gamma}, \quad h_1 = 0,02, \quad h_2 = 0,01.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + au = \cos x, \quad x \in [0, \pi], \quad a > 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить разностную схему десятого порядка аппроксимации.

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

3. Для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ исследовать устойчивость явной разностной схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n.$$

4. Для задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2)$, $u \in \Pi$, $\Pi = (0 < x_\alpha < l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, $u|_{\Gamma} = \mu(x_1, x_2)$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Якоби ее реализации.

5. Построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = x^2 - 1, \quad u(0, t) = 2t + 1, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = t^2 + 1.$$

Вариант 2

1. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + au = \cos x, \quad x \in [0, \pi], \quad a > 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить разностную схему восьмого порядка аппроксимации.

2. Показать, что разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^{n-1} - u_m^{n+1} + u_{m-1}^n}{h^2}$$

аппроксимирует гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $\frac{\tau}{h} = \text{const}$.

3. Для уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями исследовать устойчивость разностной схемы:

$$\frac{u_m^{j+1} - u_m^{j-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{j+1} - 2u_m^{j+1} + u_{m+1}^{j+1}}{h^2}.$$

4. Для задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2)$, $u \in \Pi$, $\Pi = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha\}$,

$\alpha = 1, 2$, $u|_\Gamma = \mu(x_1, x_2)$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Зейделя ее реализации.

5. Построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad u(0, t) = e^t + 1, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 2t + 1.$$

Вариант 3

1. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + au = \cos x, \quad x \in [0, \pi], \quad a > 0,$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить разностную схему шестого порядка аппроксимации.

2. Провести исследование устойчивости энергетическим методом простейшей разностной схемы

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i y_i = f_i, y_0 = y_N = 0.$$

3. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$ построить двухслойную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$.

4. Для задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2)$, $u \in \Pi$, $\Pi = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, $u|_\Gamma = \mu(x_1, x_2)$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода переменных направлений ее реализации.

5. Построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^4 + t^4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = 2x^4 + 2, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t^4 + 1, u(1, t) = t^4 + 2.$$

Вариант 4

1. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + au = \cos x, x \in [0, \pi], a > 0,$$

$$u(0) = 0, u(\pi) = 1$$

на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить разностную схему четвертого порядка аппроксимации.

2. При каких $\Theta \in [0; 1]$ устойчива схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \Theta \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + (1 - \Theta) \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0?$$

3. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^{n+1}$$

решения уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$.

4. Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

построить аппроксимацию с порядком $O(h_1^4 + h_2^4)$ граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u \Big|_{x_1=0} = 0, \text{ используя минимальное число узлов.}$$

5. Построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt} + 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) &= x(e^x + 1), \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t^2 + 1, u(1, t) = t + 1. \end{aligned}$$

Вариант 5

1. Доказать справедливость следующего соотношения:

$$(\varphi, h^2 \psi_{\bar{x}\bar{x}}) = h^2 - (\varphi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}) - h\varphi_{n-1}(\psi_n - \psi_{n-1}) - h\varphi_0(\psi_1 - \psi_0).$$

2. Исследовать с помощью спектрального метода устойчивость следующей разностной схемы при постоянном коэффициенте a :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

3. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ аппроксимируется явной разностной схемой

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{1}{4} \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2},$$

$$y_m^0 = u_0(mh), y_0^n = \mu_1(\tau n), y_N^n = \mu_2(\tau n), n \geq 0.$$

Определить условие устойчивости этой разностной схемы и записать алгоритм нахождения приближенного решения на верхнем временном слое.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2)$ построить аппроксимацию с порядком $O(h_1^2 + h_2^2)$ граничного условия $\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u \Big|_{x_1=0} = 0$, используя минимальное число узлов.

5. Построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x + t + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x + 1, \quad u(0, t) = t + 1, \quad u(1, t) = t + 2$$

и записать алгоритм метода прогонки нахождения приближенного решения.

Вариант 6

1. Доказать справедливость следующего соотношения:

$$(\varphi, h^2 \psi_{\bar{x}\bar{x}}) - (h^2 \varphi_{\bar{x}\bar{x}}, \psi) = (\varphi_{n-1} \psi_n - \varphi_n \psi_{n-1} + \varphi_1 \psi_0 - \varphi_0 \psi_1) h.$$

2. Исследовать с помощью спектрального метода устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a :

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x + 1, \quad u(0, t) = t + 1, \quad u(1, t) = t + 2.$$

На шаблоне из пяти точек $(x_{m \pm 1}, t_{n \pm 1})$, (x_m, t_n) записать явную разностную схему и алгоритм определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2)$, $0 \leq x_\alpha \leq 1$, $\alpha = 1, 2$ построить аппроксимацию порядка $O(h_1^2 + h_2^2)$ граничного условия $\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u \Big|_{x=1} = 0$, используя минимальное число узлов.

5. Построить неявную разностную схему с $\sigma = \frac{1}{2}$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x + t + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x + 1, \quad u(0, t) = t + 1, \quad u(1, t) = t + 2$$

и записать алгоритм метода прогонки нахождения приближенного решения.

Вариант 7

1. Доказать справедливость следующего соотношения:

$$(\varphi, h\varphi_x) = -(h\varphi_{\bar{x}}, \psi] + h(\varphi_N \psi_N - \varphi_0 \psi_1).$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ построить двухслойную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{x+t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^x - 1, \quad u(0, t) = e^t, \quad u(1, t) = e^t + 1.$$

На шаблоне из пяти точек $(x_{i \pm 1}, t_{j \pm 1})$, (x_i, t_j) записать явную разностную схему и алгоритм определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^2 + x_2^2$, в квадрате $\Pi = \{0 \leq x_\alpha \leq 1\}$, $\alpha = 1, 2$

с краевыми условиями $u(x_1, x_2)|_\Gamma = \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4)|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ и записать метод Якоби ее решения.

5. Построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, \quad u(0, t) = t^2 + 1, \quad u(1, t) = t^2 + 2$$

и записать алгоритм метода прогонки нахождения приближенного решения.

Вариант 8

1. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = f_i, \quad y_0 = y_1, \quad y_{N-1} = y_N, \quad Nh = 1.$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$ построить двухслойную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, \quad u(0, t) = \cos t, \quad u(\pi, t) = \sin t - 1.$$

На шаблоне из пяти точек $(x_{i \pm 1}, t_{j \pm 1})$, (x_i, t_j) записать явную разностную схему и алгоритм определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^2 + x_2^2$, в квадрате $\Pi = \{0 \leq x_\alpha \leq 1\}$, $\alpha = 1, 2$

с краевыми условиями $u(x_1, x_2)|_\Gamma = \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4)|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать метод Зейделя ее решения.

5. Построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (e^x + e^t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad u(0, t) = e^t, \quad u(1, t) = e^t + 1$$

и записать алгоритм метода прогонки нахождения приближенного решения.

Вариант 9

1. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad y_0 = 0, \quad y_{N-1} = y_N, \quad Nh = 1.$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$, $a > 0$, $u(x, 0) = \mu(x)$, $u(0, t) = \mu_1(t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h + \tau)$.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, \quad u(0, t) = \cos t, \quad u(\pi, t) = \sin t - 1.$$

На шаблоне, состоящем из точек $(x_{i\pm 1}, t_{j\pm 1})$, $(x_i, t_{j\pm 1})$, (x_i, t_j) , записать неявную разностную схему и алгоритм метода прогонки определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^2 + x_2^2$, в квадрате $\Pi = \{0 \leq x_\alpha \leq 1\}$, $\alpha = 1, 2$

с краевыми условиями $u(x_1, x_2)|_\Gamma = \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4)|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать метод переменных направлений ее решения.

5. Исследовать устойчивость неявной разностной схемы с $\sigma = 1$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (e^x + e^t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Вариант 10

1. Доказать формулу разностного дифференцирования

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x.$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + (x + t + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x, 0) = x + 1$, $u(0, t) = t + 1$, $x > 0$, $t > 0$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h + \tau)$.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{x+t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^x - 1, \quad u(0, t) = e^t, \quad u(1, t) = e^t + 1.$$

На шаблоне, состоящем из точек $(x_{i\pm 1}, t_{j\pm 1})$, $(x_i, t_{j\pm 1})$, (x_i, t_j) , записать неявную разностную схему и алгоритм метода прогонки определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = e^{x_1} + e^{-x_2}$, в прямоугольнике

$\Pi = \left\{ 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \right\}$, с краевым условием $u(x_1, x_2)|_{\Gamma} = e^{-x_1} + e^{x_2}|_{\Gamma}$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Якоби нахождения приближенного решения.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ решения следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(1, t) = t + 1.$$

Вариант 11

1. Доказать формулу разностного дифференцирования произведения

$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}.$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + (x + t + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x, 0) = x + 1$, $u(0, t) = t + 1$, $x > 0$, $t > 0$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, u(0, t) = \cos t, u(\pi, t) = \sin t - 1.$$

На девятиточечном шаблоне записать неявную разностную схему и алгоритм метода прогонки определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\cos x_1 - \cos x_2$, в прямоугольнике

$\Pi = \left\{ 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, с краевым условием

$u(x_1, x_2)|_{\Gamma} = \cos x_1 + \cos x_2|_{\Gamma}$, где Γ – граница Π , построить

разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Зейделя нахождения приближенного решения.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ решения следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x, u(0, t) = t, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \frac{1}{2}t + 1.$$

Вариант 12

1. Для сеточных функций u и v , заданных на

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}$$

доказать следующую формулу:

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v).$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} - (x + t + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x, 0) = x + 1$,

$u(1, t) = 2 + t$, в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h + \tau)$ и записать алгоритм нахождения приближенного решения.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, u(0, t) = \cos t, u(\pi, t) = \sin t - 1.$$

Для этой задачи записать неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ и алгоритм метода прогонки определения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{9} \sin \frac{1}{3} x_2$, в квадрате $\Pi = \left\{0 \leq x_\alpha \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, $\alpha = 1, 2$ с краевым условием

$u(x_1, x_2)|_\Gamma = \cos \frac{1}{2} x_1 + \sin \frac{1}{3} x_2 \Big|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить

разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Якоби ее реализации.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ решения следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0.$$

Вариант 13

1. Для сеточных функций u и v , заданных на

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}$$

доказать следующую формулу:

$$(u, v_{\bar{x}}] = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_{\bar{x}}, v).$$

2. Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} - (x + t + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + t^2 + 1$ с начальным $u(x, 0) = x + 1$ и краевым $u(1, t) = 2 + t$ условиями в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ и записать алгоритм нахождения приближенного решения.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(\pi, t) = \sin t - 1.$$

Для этой задачи записать неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ и алгоритм нахождения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{9} \sin \frac{1}{3} x_2$, в квадрате $\Pi = \left\{ 0 \leq x_\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $\alpha = 1, 2$ с краевым условием $u(x_1, x_2)|_\Gamma = \cos \frac{1}{2} x_1 + \sin \frac{1}{3} x_2 \Big|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Якоби ее реализации.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0$$

и алгоритм метода прогонки ее реализации.

Вариант 14

1. Для сеточных функций u и v , заданных на

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}$$

доказать первую разностную формулу Грина

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) = -(av_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}] + auv_{\bar{x}}|_N - a_1 v_{x,0} u_0.$$

2. Для краевой задачи $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(1, t) = \mu(t)$ в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h + \tau)$ и исследовать ее устойчивость.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x + t, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(1, t) = t + 2.$$

Для этой задачи записать явную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ и алгоритм нахождения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{9} \sin \frac{1}{3} x_2$, в квадрате

$\Pi = \left\{ 0 \leq x_\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $\alpha = 1, 2$ с краевым условием

$u(x_1, x_2)|_\Gamma = \cos \frac{1}{2} x_1 + \sin \frac{1}{3} x_2 \Big|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить

разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Зейделя ее реализации.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x^2 + t^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(1, t) = t + 2$$

и алгоритм метода прогонки ее реализации.

Вариант 15

1. Для сеточных функций z и y , заданных на

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\},$$

доказать вторую разностную формулу Грина

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (az_{\bar{x}})_x) = a_N (zy_{\bar{x}} - yz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x z - yz_x)_0.$$

2. Для краевой задачи $\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = \mu(t)$ в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$ построить неявную разностную схему порядка аппроксимации $O(h + \tau)$ и исследовать ее устойчивость.

3. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} t, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \cos \frac{1}{2} x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin \frac{1}{2} x, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u\left(\frac{\pi}{2}, t\right)}{\partial x} = 1.$$

Для этой задачи записать явную разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ и алгоритм нахождения приближенного решения.

4. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{9} \sin \frac{1}{3} x_2$, в квадрате

$\Pi = \left\{ 0 \leq x_\alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $\alpha = 1, 2$ с краевым условием

$u(x_1, x_2)|_\Gamma = \cos \frac{1}{2} x_1 + \sin \frac{1}{3} x_2 \Big|_\Gamma$, где Γ – граница Π , построить

разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода переменных направлений ее реализации.

5. Записать неявную разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ для решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (x + t + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5,$$

$$u(x, 0) = x^2 + 1, \quad u(0, t) = t^2 + 1, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0$$

и алгоритм метода прогонки ее реализации.

Литература

1. Численные методы: Учебное пособие. *Н. С. Бахвалов* – М.: Наука, 1975.
2. Численные методы. *Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков* – М.: Бином, 2004.
3. Численные методы в задачах и упражнениях. *Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чиженков* – М.: Высшая школа, 2000.
4. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. *Дж. Дэннис, Р. Шнабель* – М.: Мир, 1988.
5. Численные методы: Учебное пособие. *Н.Н. Калиткин* – М.: Наука, 1978.
6. Приближенное вычисление интегралов. *В.И. Крылов* – М.: Наука, 1967.
7. Вычислительные методы: Учебное пособие. *В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный* – М.: Наука, в 2 т.–1976, 1977.
8. Вычислительные методы высшей математики. *В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный* – Мн.: Высшая школа, в 2 т. 1972, 1975.
9. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. *Д. Мак-Крокен, У. М. Дорн*: – Мир, 1972.
10. Методы вычислительной математики: Учебное пособие. *Г.И. Марчук*– М.: Наука, 1989.
11. Лекции по методам вычислений. С.-Петербург. *И.П. Мысовских* – Изд-во Петербургского университета, 1988.
12. Введение в численные методы: Учебное пособие. *А.А. Самарский* – М.: Наука, 1983.
13. Численные методы: Учебное пособие. *Самарский А.А., Гулин А.В.* – М.: Наука, 1989.
14. Сборник задач по методам вычислений. Под ред. *П.И. Монастырного* Минск.: Изд-во БГУ, 1983.
15. Методы решения некорректных задач. Учебное пособие. *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин* – М.: Наука, 1986.
16. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. *Э. Хайрер, Г. Ваннер* – М.: Мир, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	
Глава 1. Приближение функций	
Тема 1. Интерполяционный многочлен Лагранжа	
1.1. Постановка задачи интерполирования. Алгебраическое интерполирование.....	
1.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа и его остаток.....	
Задачи и упражнения.....	
Тема 2. Интерполяционный многочлен Ньютона	
2.1. Конечные разности, разностные отношения и их свойства	
2.2. Интерполяционный многочлен Ньютона.....	
2.3. Задача обратного интерполирования.....	
Задачи и упражнения.....	
Тема 3. Интерполирование по сетке равноотстоящих узлов.	
3.1. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов	
3.2. Правила интерполирования внутри таблицы	
Задачи и упражнения.....	
Тема 4. Многочлены Чебышева	
4.1. Определение многочленов Чебышева и их свойства	
4.2. Минимизация остатка интерполирования	
Задачи и упражнения.....	
Тема 5. Интерполирование с кратными узлами	
5.1. Постановка задачи кратного интерполирования.....	
5.2. Интерполяционный многочлен Эрмита и его остаток	
Задачи и упражнения.....	
Тема 6. Сплайн – интерполирование	
6.1. Понятие сплайн – функции и интерполяционного сплайна	
6.2. Построение интерполяционного сплайна третьего порядка.....	
6.3. Построение интерполяционного сплайна третьего порядка методом моментов	
Задачи и упражнения.....	

Тема 7. Численное дифференцирование функций

- 7.1. Численное дифференцирование, основанное на интерполяционном многочлене Ньютона
- 7.2. Некоторые частные правила вычисления производных
- Задачи и упражнения.....

Тема 8. Среднеквадратичные приближения

- 8.1. Понятие о среднеквадратичном приближении.....
- 8.2. Метод наименьших квадратов
- Задачи и упражнения.....

- Контрольная работа № 1
- Индивидуальное задание №1
- Дополнительные задачи и упражнения.....

Глава 2. Численное интегрирование

Тема 9. Интерполяционные квадратурные формулы.

- 9.1. Квадратурные правила Ньютона – Котеса.....
- 9.2. Простейшие квадратурные формулы Ньютона – Котеса.....
- 9.3. Правило Рунге.....
- Задачи и упражнения.....

Тема 10. Квадратурные правила наивысшей алгебраической степени точности

- 10.1. Квадратурные формулы Гаусса
- 10.2. Квадратурные формулы НАСТ, отвечающие простейшим весовым функциям.....
- Задачи и упражнения.....

Глава 3. Численное решение интегральных уравнений

Тема 11. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

- 11.1. Метод замены ядра на вырожденное.....
- 11.2. Метод квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.....
- 11.3. Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.....

Задачи и упражнения.....

Тема 12. Методы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода

12.1. Метод последовательных приближений решения
интегрального уравнения Вольтерра второго рода.....

12.2. Метод квадратур решения интегрального уравнения Вольтерра
второго рода.....

Задачи и упражнения.....

Контрольная работа № 2

Индивидуальное задание № 2

Дополнительные задачи и упражнения.....

Глава 4. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 13. Приближенные методы решения задачи Коши

13.1. Постановка задачи. Метод Пикара

13.2. Метод рядов

Задачи и упражнения.....

Тема 14. Методы Эйлера

14.1. Явный метод Эйлера или метод ломаных.....

14.2. Неявный метод Эйлера

14.3. Устойчивость методов Эйлера.....

Задачи и упражнения.....

Тема 15. Методы Рунге – Кутта

15.1. Построение методов Рунге – Кутта

15.2. Методы Рунге – Кутта второго порядка точности.....

15.3. Методы Рунге – Кутта третьего и четвертого порядка точности.....

Задачи и упражнения.....

Тема 16. Методы предиктор – корректор

16.1. Общий подход к построению правил предиктор – корректор.....

16.2. Частные правила предиктор – корректор.....

16.3. Правило Рунге.....

Задачи и упражнения.....

Тема 17. Многошаговые правила

17.1. Понятие о многошаговых правилах	
17.2. Экстраполяционный метод Адамса	
17.3. Интерполяционный метод Адамса	
Задачи и упражнения.....	

Тема 18. Метод сеток решения граничной задачи

18.1. Идея метода сеток.....	
18.2. Замена граничной задачи системой алгебраических уравнений.....	
18.3. Повышение порядка аппроксимации граничных условий.....	
18.4. Метод прогонки решения сеточных уравнений	
Задачи и упражнения.....	

Тема 19. Метод моментов и метод Галеркина

19.1. Идея метода моментов	
19.2. Метод Галеркина	
Задачи и упражнения.....	

Тема 20. Метод наименьших квадратов и метод Рунге

20.1. Метод наименьших квадратов решения операторных уравнений	
20.2. Метод наименьших квадратов решения линейной граничной задачи	
20.3. Метод Рунге	
Задачи и упражнения.....	

Контрольная работа № 3	
Индивидуальное задание № 3	

Глава 5. Разностные схемы решения задач математической физики

Тема 21. Математический аппарат теории разностных схем

21.1. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов.....	
21.2. Постановка разностной задачи.....	
21.3. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы	
Задачи и упражнения.....	

Тема 22. Разностные схемы уравнения теплопроводности

22.1. Некоторые разностные формулы	
22.2. Метод энергетических неравенств.....	

22.3. Семейство шеститочечных разностных схем для уравнения теплопроводности	
Задачи и упражнения.....	

Тема 23. Разностные схемы для гиперболических уравнений

23.1. Разностные схемы для уравнения колебаний струны	
23.2. Явные разностные схемы для уравнения переноса	
23.3. Неявные разностные схемы для уравнения переноса.....	
Задачи и упражнения.....	

Тема 24. Разностные схемы для эллиптических уравнений

24.1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона.....	
24.2. Методы Якоби и Зейделя	
24.3. Методы переменных направлений решения разностной задачи Дирихле в прямоугольнике	
Задачи и упражнения.....	

Контрольная работа №4	
-----------------------------	--

Литература	
------------------	--

Учебное издание
Вакульчик Петр Алексеевич

Методы численного анализа

Пособие для студентов
физико-математического факультета

Редактор Е. А. Логвинович
Технический редактор Т. К. Раманович
Корректор Г. М. Добыш
Компьютерная верстка

Подписано в печать __. __ 2008. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура _____. Печать офсетная.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Белорусский Государственный университет.
ЛИ № 02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, МинскЮ проспект Независимости, 4

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского Государственного университета»
ЛП № 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6