HOJA N° 1

FECHA

Lenguaje del Cálculo de Predicados de Primer Orden

El lenguaje LCP, necesitamos conocer la terna $\langle \Sigma, G, S \rangle$.

Σ (alfabeto) → conjunto de símbolos individuales.

G (gramática) → conjunto de reglas p/manipular símbolos de Σ.

S (semántica) → conjunto de reglas p/interpretar símbolos de Σ.

Alfabeto

El alfabeto Σ del lenguaje LCP tiene como símbolos:

VARIABLES: letras minúsculas, últimas del alfabeto, con o sin nro natural suscripto.

$x_1 \quad x \quad z \quad z_{21}$

CONSTANTES: letras minúsculas, primeras del alfabeto, con o sin nro natural suscripto.

$a_1 \quad a \quad a_2 \quad b$

PREDICADOS: letras mayúsculas con o sin nro natural como subíndice y/o superíndice.

$P \quad P^3 \quad P_1^2 \quad Q \quad Q_1 \quad M_{25}^2$

FUNTORES O LETRAS DE FUNCIONES: $f^n \quad f_i^n$

CONECTIVAS LÓGICAS: $\neg \quad \& \quad \vee \quad \rightarrow$

CUANTIFICADORES: $\forall \quad \exists$

SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN: ( ) ,

Términos de LCP

Definición:

Un término en el lenguaje LCP es:

I. C/variable y c/constante

II. $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ o $f^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, donde cada t_j es un término.

III. Los generados por I. y II.

Formulas Atómicas

Más simples del lenguaje. Atómica significa: indivisible, con ellas se construyen todas las restantes fórmulas bien formadas del lenguaje LCP.

Definición:

Una fórmula átomica en el lenguaje LCP es:

III I. Letra del predicado sin número natural súper escrito.

II. Letra del predicado con número n como superíndice y con o sin número como subíndice, seguida de n términos.

NOTA

Gramática G de Lcp

Reglas de G

Una fórmula es bien formada en el lenguaje Lcp si:

I- Es una fórmula atómica.

II- Es una fórmula del tipo $\neg A$, $\neg B$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, con A y B f.b.f.

III- Es una fórmula del tipo $(\forall x) A$, $(\exists x) A$, con A f.b.f.

IV- Es una fórmula generada por I, II y/o III.

Alcance o radio de un cuantificador

Definición:

En f.b.f cuantificadas $(\forall x) A$ y $(\exists x) B$, la fórmula A es el alcance del cuantificador $(\forall x)$ y la fórmula B es el alcance del cuantificador $(\exists x)$.

Variables libres y ligadas

LIGADAS: si interviene en el alcance de un cuantificador y es la variable de ese cuantificador.

LIBRE: si no pertenece a ningún alcance de cuantificadores o si interviene en un alcance de un cuantificador, no es la variable de ese cuantificador.

Forma Normal Prenex de f.b.f. Clausurada

Definición

Una f.b.f. clausurada de Lcp está en forma normal Prenex (F.N.P) si verifica:

1- No tiene cuantificadores o si los tiene, son adyacentes y preceden a una fórmula libre de cuantificadores.

2- Intervienen conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y la conectiva $\neg$ afecta sólo a subfórmulas.

Métodos para obtener la F.N.P

PASO 1/ Escribir la fórmula con sólo conectivas $\neg$, $\vee$, $\wedge$, aplicando equivalencia p/sustituir subfórmulas con conectivas $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

PASO 2/ Aplicar equivalencias p/que la conectiva $\neg$ afecte solo a fórmulas atómicas.

PASO 3-/ Evitar la repetición de variables en los cuantificadores. Reemplazar c/variable repetida por otra $\neq$, tanto en el cuantificador como en su alcance.

PASO 4/- Extraer todos los cuantificadores de la fórmula del paso 3 y anteponerlos, en el orden que intervienen, a la fórmula que quedó sin cuantificar.

Cláusulas

Definición

Es una expresión $(\forall x_1) \ldots (\forall x_k) (A_1, A_2, \ldots, A_n \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_m)$, los símbolos A_i y B_j representan fórmulas atómicas en las que pueden intervenir las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

que mencionan los cuantificadores.

Las fórmulas atómicas A_i se interpretan como conclusiones y las atómicas B_j como condiciones. En toda cláusula, las fórmulas atómicas están separadas por comas y no intervienen conectivas lógicas.

Dada la cláusula:

$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)\,(A_1, A_2, \ldots, A_n \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_m)$

Se lee: "p/todo x_1, p/todo x_2, ..., p/todo x_k, A_1 o A_2 o ... o A_n si B_1 y B_2 y ... y B_m"

Se interpreta: "p/todo x_1, ..., p/todo x_k, si las condiciones B_1, ..., B_m son aciertos, entonces una o más de las conclusiones A_1, ..., A_n son aciertos".

Forma Skolem de una Cláusula

En lenguaje LCP, la cláusula $(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)\,(A_1, A_2, \ldots, A_n \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_m)$ se escribe:

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)\,((B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_m) \rightarrow (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n))$$

Equivalente a la fórmula:

$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)\,(\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ denominada Forma Skolem.

C/forma Skolem determina una cláusula, las atómicas negadas son las condiciones de la cláusulas y se escriben a la derecha del símbolo $\leftarrow$, sin la conectiva $\neg$, las no negadas, son las conclusiones de la cláusula y se escriben en la cláusula a la izquierda de $\leftarrow$.

Métodos para obtener la Forma Clausal de una f.b.f clausurada

PASO 1- Escribimos la f.b.f en su F.N.P.

PASO 2- La fórmula sin cuantificar del paso 1 se escribe como conjunción de disyunciones.

PASO 3- Eliminación de cuantificadores existenciales: Dependerá si está precedido por cuantificadores universales.

* Si ningún cuantificador universal precede al existencial, se sustituye su variable por una cte en todas sus subfórmulas y se elimina ese existencial.
* Si el existencial es precedido por uno, o más, cuantificadores universales, se sustituye su variable por una cte que tiene, como subíndice, las variables de los cuantificadores universales que preceden al existencial y se elimina ese existencial.

PASO 4- En la fórmula obtenida en el paso 3 se reemplaza c/disyunción Skolem por la cláusula que representa y se omiten los cuantificadores.

PASO 5- Se forma un sistema con la/s cláusula/s obtenidas en el paso 4, este sistema es la Forma Clausal de la fórmula clausurada de LCP dada, las variables que intervienen se sobreentienden cuantificadas universalmente.

NOTA

Razonamientos o argumentaciones lógicas.

Definición:

Sucesión finita de fórmulas bien formadas clausuradas $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ del lenguaje LCP las fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ son premisas y la fórmula A_n es la conclusión del razonamiento.

- **Se lee:** "la f.b.f A_n se deduce del conjunto de premisas $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$"
- **Se simboliza:** $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \vdash A_n$.

Validez de un Razonamiento.

Definición:

Un razonamiento $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \vdash A_n$ es válido, si de la verdad de las premisas resulta la verdad de la conclusión.

El razonamiento $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \vdash A_n$ es válido si la fórmula $\{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1})$ implica la conclusión A_n, si el condicional $\{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}\} \rightarrow A_n$ es tautología en LCP.

En el lenguaje LCP, existen teoremas que permiten pasar de fórmulas lógicamente válidas a otras que también lo son. Este proceso se denomina "INFERENCIA" las fórmulas obtenidas se pueden volver a utilizar en otra inferencia.

Razonamiento Clausal.

Definición:

Sucesión de cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, C_k, \ldots, C_n$. Las $k-1$ primeras cláusulas son premisas y el sistema de cláusulas $C_k, \ldots, C_n$ es la conclusión.

- **Se simboliza:** $\{C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}\} \vdash C_k, \ldots, C_n$ ó $\{C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}\} \vdash \left\{ \begin{array}{l} C_k \\ \vdots \\ C_n \end{array} \right.$
- **Se lee:** "del conjunto de cláusulas $C_1, \ldots, C_{k-1}$ se deduce el sistema de cláusulas $C_k, \ldots, C_n$".

Validez de un razonamiento clausal

Definición:

Es válido si de las cláusulas premisas que son aciertos, se deduce que las cláusulas conclusión también son aciertos.

Reglas de la derivación clausal.

REGLA 1: Regla de resolución.

$$\frac{\begin{array}{c}(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) \leftarrow (B_1, \ldots, B_m) \\ \leftarrow A_i\end{array}}{(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n) \leftarrow (B_1, \ldots, B_m)} \qquad \frac{\begin{array}{c}(A_1, \ldots, A_n) \leftarrow (B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_m) \\ B_i \leftarrow\end{array}}{(A_1, \ldots, A_n) \leftarrow (B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_m)}$$

NOTA

Caso Particular N° 1:

La clausula vacía ■ se deduce de las cláusulas X ←, ← X, cualquiera sea la fórmula X.

Caso Particular N° 2:

$$\frac{(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \leftarrow (B_1, \dots, B_m) \qquad \leftarrow M, A_i}{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) \leftarrow (M, B_1, \dots, B_m)} \qquad \frac{(A_1, \dots, A_n) \leftarrow (B_1, \dots, B_i, \dots, B_m) \qquad H, B_i \leftarrow}{(H, A_1, \dots, A_n) \leftarrow (B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_m)}$$

REGLA 2: Instanciación de variables.

Proviene de la regla Especificación Universal de la derivación lógica, sustituye la variable cuantificada universalmente por una cte.

(Demostraciones no formales. Aplicación de árboles arraigados)

Una demostración es NO formal si en los pasos de la deducción no se enuncian las reglas que se utilizan. Un método no formal p/demostrar validez de un razonamiento, utiliza árboles lógicos y clausales.

(Demostración no formal de razonamientos lógicos (árboles lógicos))

Método Directo.

Se suponen verdaderas las premisas $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$ del razonamiento $\{A_1, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n$ y, si es válido, se llega a la verdad de la conclusión A_n.

(Reglas de construcción de un árbol lógico: método directo)

1- Se etiqueta la raíz del árbol con la conjunción de todas las premisas y se desarrolla el árbol lógico. La etiqueta de c/vértice es una fórmula verdadera.

2- Se desprenden de la raíz solo vástagos con fórmulas útiles p/obtener la conclusión, se pueden utilizar mas de una vez en ≠ ramas.

3- Si en una misma rama hay un vértice etiquetado con una fórmula X y otro con ¬X, cerramos la rama con la cláusula vacía ■ Indica contradicción.

4- La conclusión se lee de las ramas que no se cierran.

(Reglas de construcción de un árbol lógico: método de reducción al absurdo)

Suponiendo verdadera c/u de las premisas y verdadera la negación de la conclusión del razonamiento $\{A_1, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n$, si es válido, se llega a una contradicción.

- Se etiqueta la raíz del árbol con la conjunción de las premisas y la negación de la conclusión.
- Se desarrolla el árbol lógico con la técnica del método directo.
- Si el razonamiento es válido, todas las ramas del árbol se cierran con contradicciones, etiquetadas con ■.

NOTA

Demostración no formal de razonamientos clausales.

Dado el razonamiento $\{C_1, \ldots, C_{k-1}\} \vdash C_k, \ldots, C_n$, c/cláusula premisa $C_1, \ldots, C_{k-1}$ y c/cláusula $D_1, \ldots, D_h$, que corresponden a la forma clausal de la negación lógica de la conclusión, es un acierto.

A partir de estos aciertos, si el razonamiento es válido, se infiere la cláusula vacía

Reglas de construcción de un árbol clausal: método por refutación.

1.- Se etiqueta la raíz del árbol con las cláusulas premisas $C_1, \ldots, C_{k-1}$ y las cláusulas $D_1, \ldots, D_h$ que corresponden a la forma clausal de la negación lógica de la conclusión $C_k, \ldots, C_n$.

2.- Se desarrolla el árbol clausal.

3.- Las cláusulas de la raíz se pueden utilizar más de una vez y en distintas ramas.

4.- Si en una misma rama hay un vértice con cláusula $X \leftarrow$ y otro con $\leftarrow X$, cerramos esa rama con $\blacksquare$, cláusula vacía.

NOTA