

Побудова апостеріорного оцінювача з усередненням градієнта

Курсова робота
Дімітрієва Олександра

Научний керівник: к. фіз.-мат. наук, доцент Вербицький В.В.

Одесса, 2018

Для краевой задачи:

$$\begin{aligned} -u(x)'' + q(x)u(x) &= f(x), x \in (a, b), \\ u(a) &= 0, u(b) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $q(x) \in C^0[a, b]$, $q(x) \geq 0$.

Надо построить:

- конечно-элементную аппроксимацию с использованием линейных непрерывных сплайнов на неравномерной сетке.

- Апостериорный оценщик погрешности конечно-элементного решения краевой задачи, основанный на осреднении градиента конечно-элементного решения.

- Программное приложение на языке пакета MATLAB, которое находит приближенное решение поставленной задачи, адаптируя сетки к структуре точного решения.

Метод конечных элементов позволяет найти приближенное решение задачи (1) в виде линейного непрерывного сплайна

$$u_h = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$ — базисные функции пространства линейных непрерывных сплайнов, а коэффициенты α_i необходимо определить из СЛАУ

$$Ay = b, \quad (3)$$

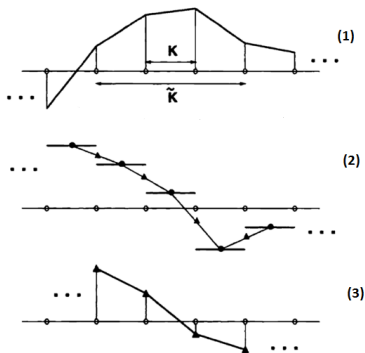
где

$$A = \begin{bmatrix} 2/h + hq(x_1) & -1/h & & & \\ -1/h & 2/h + q(x_2) & -1/h & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1/h & 2/h + q(x_{n-1}) & -1/h \\ & & & & -1/h & 2/h + hq(x_n) \end{bmatrix},$$

$$y = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T,$$

$$b = [hf(x_1), hf(x_2), \dots, hf(x_{n-1}), hf(x_n)]^T.$$

Апостериорный оценщик, основанный на осреднении градиента приближенного решения



(1) Конечно-элементное решение u_h краевой задачи

(2) Градиент u'_h конечно-элементного решения:

$$u'_h(x) = \frac{u_h(x_i) - u_h(x_{i-1}))}{h}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4)$$

(3) Осредненный градиент $G(u'_h)$

Апостериорный оценщик, основанный на осреднении градиента приближенного решения

Оценщик на конечном элементе $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как:

$$\eta_i = \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (G(u'_h) - u'_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Глобальный оценщик:

$$\eta = \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

В качестве тестового примера рассматривалась следующая задача Дирихле:

$$\begin{aligned} -u(x)'' &= f(x), \\ u(-2) &= 0, u(2) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$f(x) = \frac{\pi^2}{16} \sin\left(\frac{\pi}{4}(2+x)\right).$$

Точное решение этой задачи

$$u(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(2+x)\right). \tag{8}$$

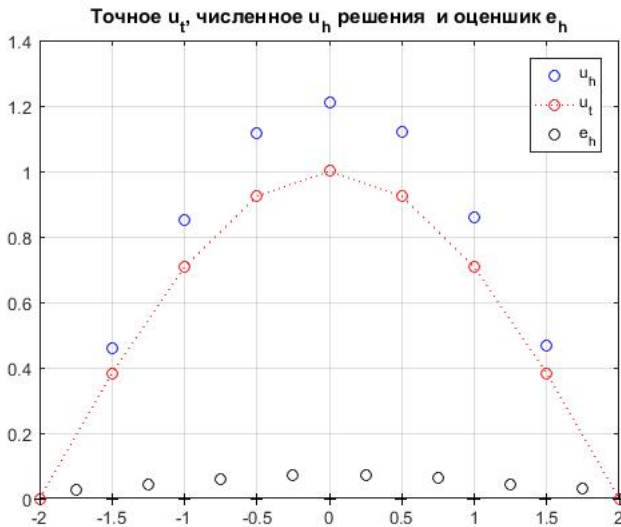


Рис.: Равномерная сетка с шагом $h = 0.5$

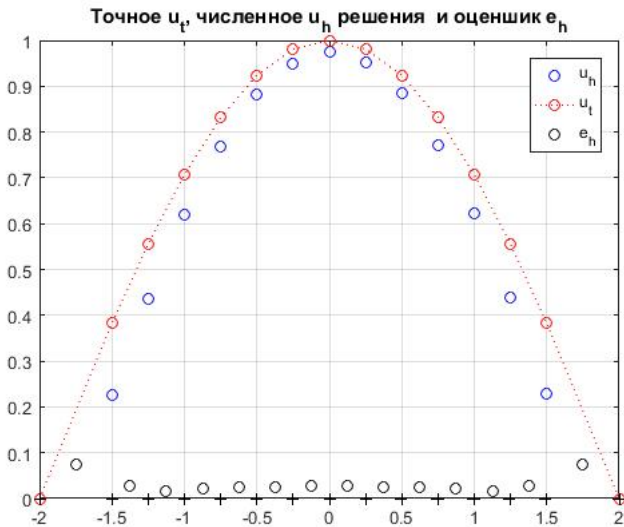


Рис.: Первое сгущение сетки

- 1 Для задачи Дирихле уравнения второго порядка построена конечно-элементная аппроксимация с использованием линейных непрерывных сплайнов на неравномерной сетке.
- 2 Построен апостериорный оценщик погрешности конечно-элементного решения краевой задачи основанный на осреднении градиента конечно-элементного решения.
- 3 Написано программное приложение на языке пакета MATLAB, которое находит приближенное решение поставленной задачи, адаптируя сетки метода конечных элементов к структуре точного решения.
- 4 Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность апостериорного оценщика.
- 5 Основным достоинством построенного апостериорного оценщика является его исключительная простота и отсутствие существенных дополнительных затрат.