



Южно-Уральский
государственный
университет

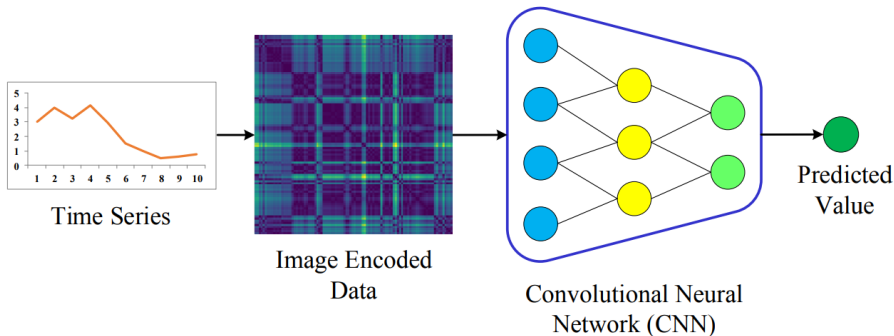
Национальный
исследовательский
университет

Преобразование временных рядов в изображения

- 1 Спектрограмма
- 2 Скалограмма
- 3 Hilbert–Huang transform (HHT)
- 4 Recurrence Plot (RP)
- 5 Gramian Angular Field (GAF)
- 6 Markov Transition Field (MTF)

Временной ряд → изображение

В последнее время очень популярно преобразование временных рядов в изображения для дальнейшего обучения сверточных нейронных сетей.



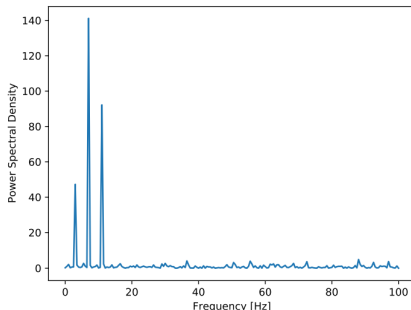
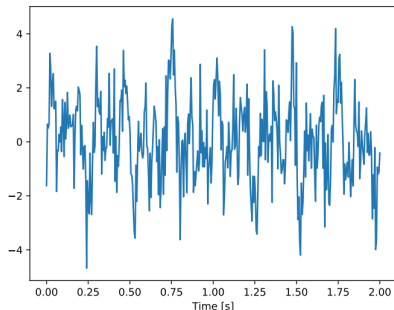
Преобразование Фурье, Fourier transform

для сигнала $x(t)$ определяется по формуле:

$$F(x(t)) = \hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau.$$

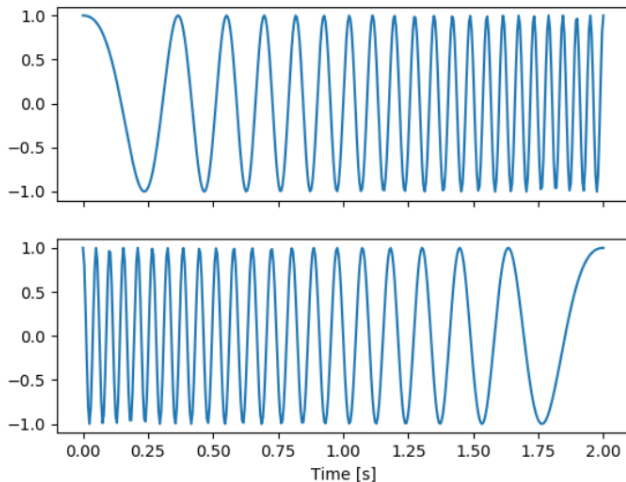
$|\hat{x}(f)|$ называется спектральной плотностью сигнала (PSD, Power Spectral Density).

$$x(t) = 0.7 \sin(2\pi \cdot 3t) + 1.2 \sin(2\pi \cdot 7t) + 1.0 \sin(2\pi \cdot 11t)$$

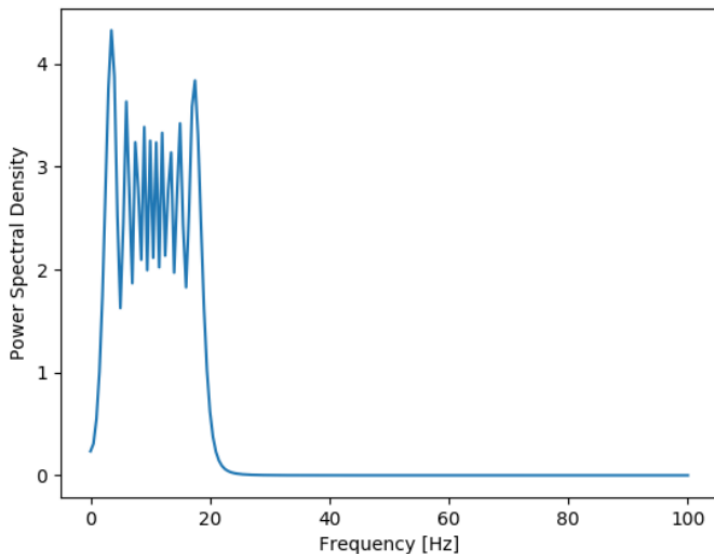


Недостаток спектральной плотности

У данных chirp сигналов частота меняется линейно с 1 до 20 и наоборот. Спектральная плотность у них будет одинакова!

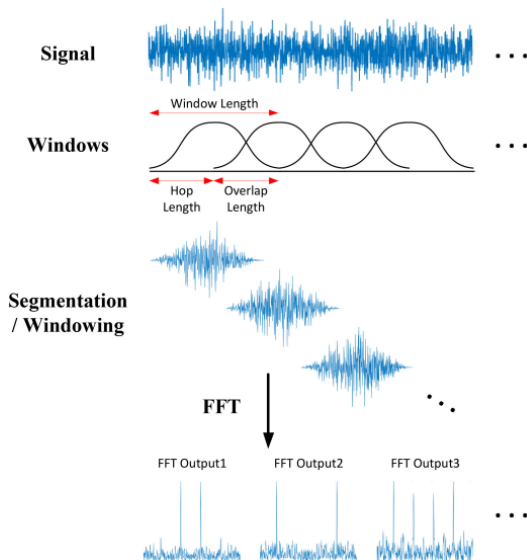


Спектральная плотность chirp сигнала

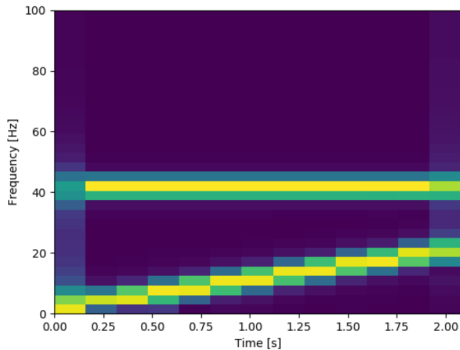
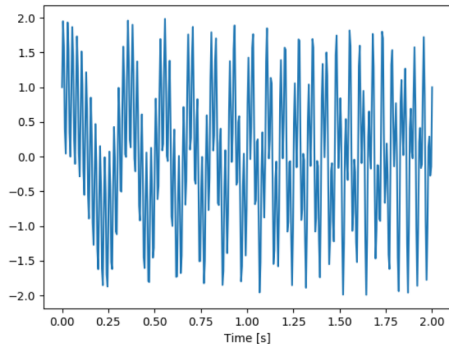


Short Time Fourier Transform, STFT

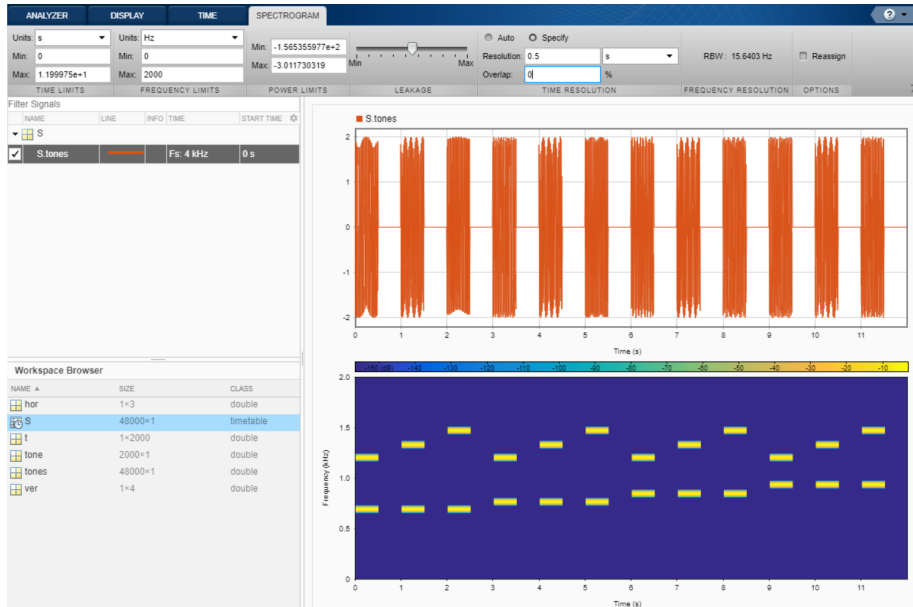
$$\hat{x}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) W(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \quad W(\tau - t) - \text{око́нная функция.}$$



Спектрограмма

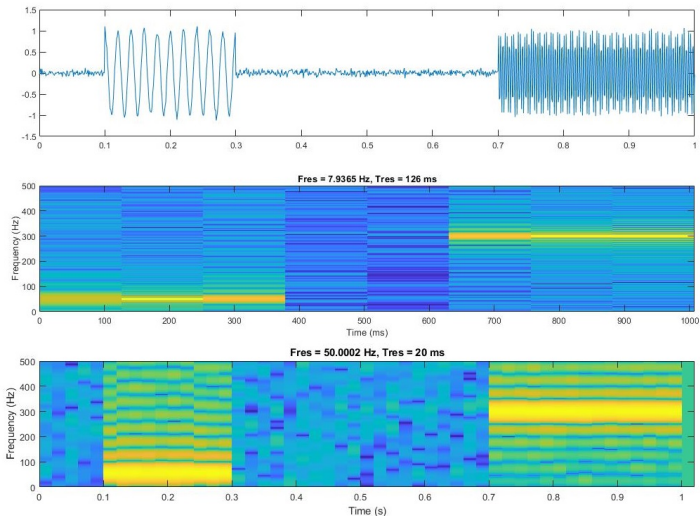


Спектрограмма в Matlab



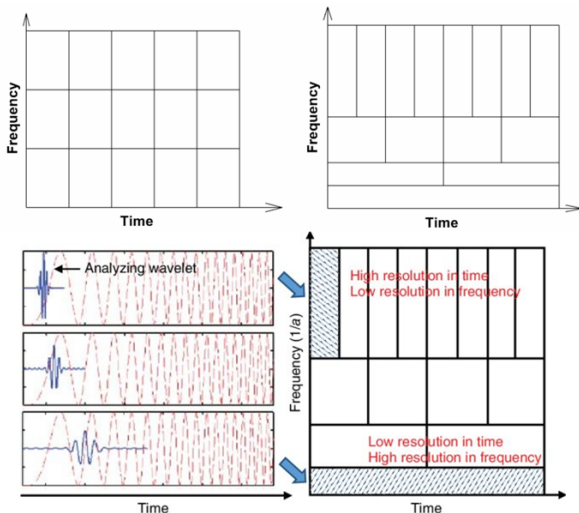
Компромисс

При построении спектрограммы мы можем рассчитывать либо на хорошее разрешение по времени, либо по частоте.

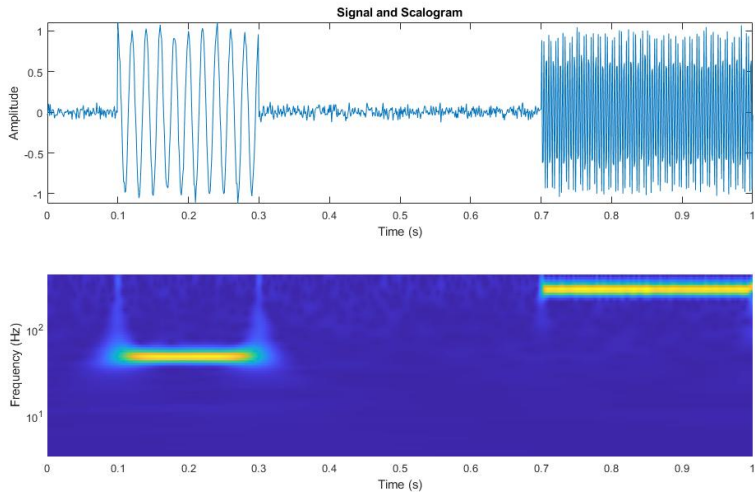


Вейвлет-преобразование

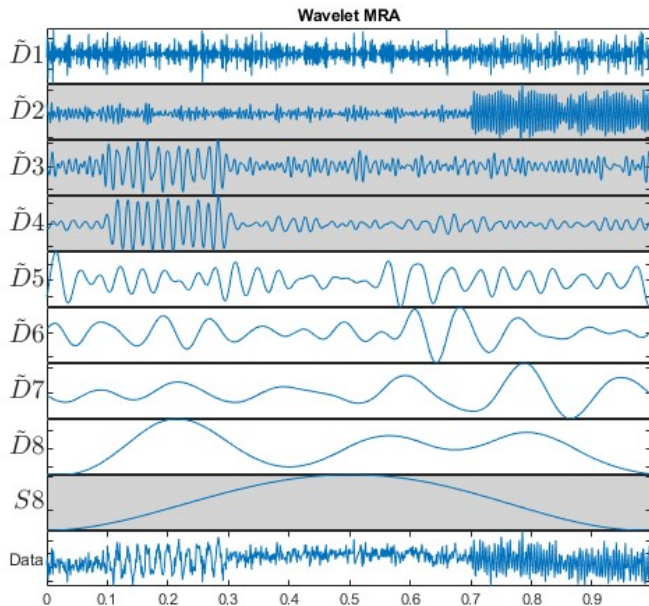
В случае оконного преобразования Фурье берется окно фиксированной ширины. Для вейвлет-преобразования ширина окна (вейвлета) разная.



Скалограмма



Кратномасштабный анализ

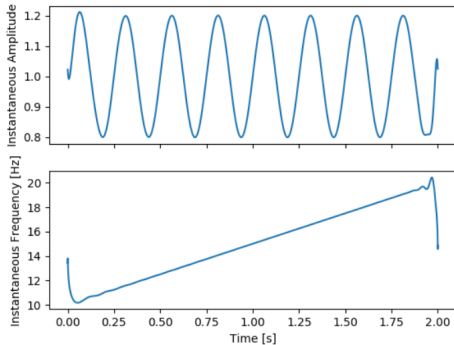
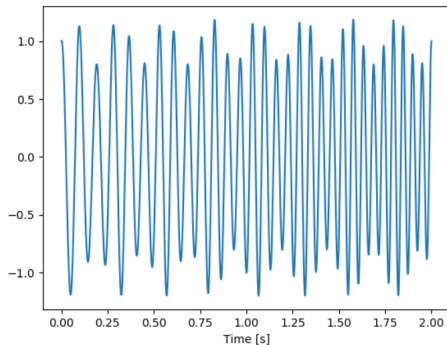


Преобразование Гильберта

$$H(x(t)) = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A(t)e^{j\theta(t)},$$

где $A(t) = \sqrt{|x(t)|^2 + |\hat{x}(t)|^2}$, $\theta(t) = \arctan \frac{\hat{x}(t)}{x(t)}$ - мгновенная амплитуда и фаза. Мгновенная частота: $w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$.

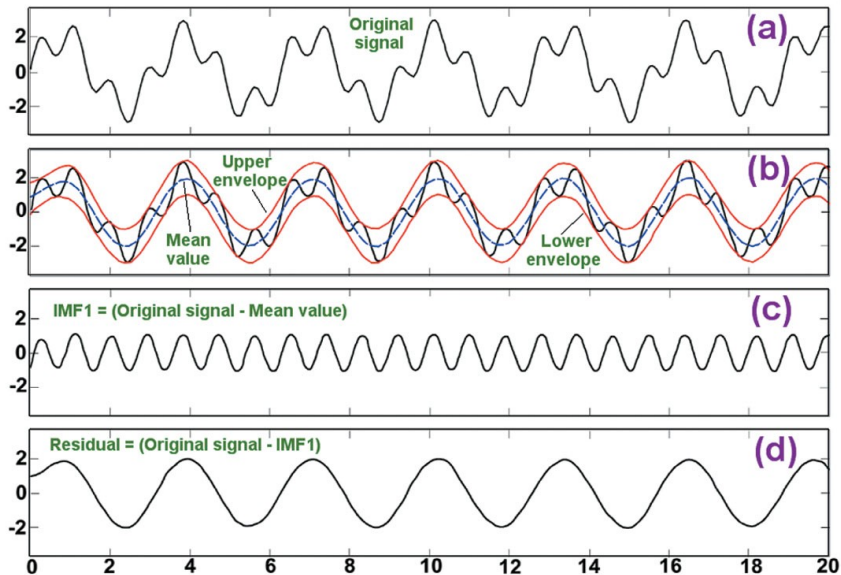


Эмпирическое модовое разложение

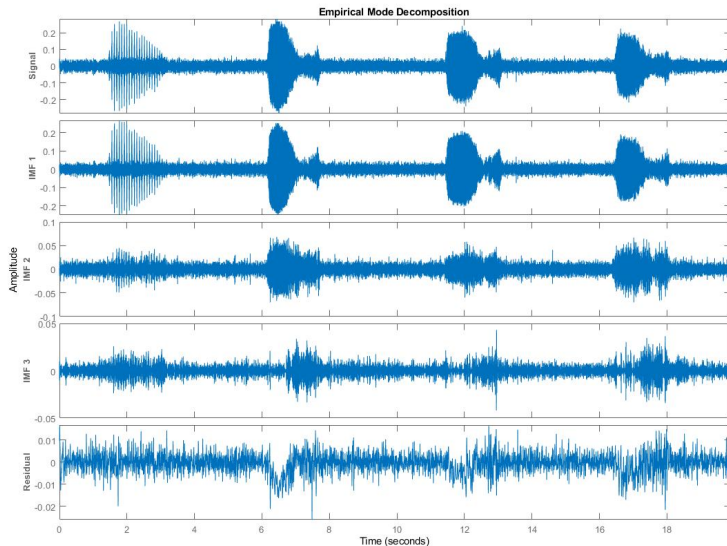
– метод разложения сигнала на так называемые внутренние моды (Intrinsic Mode Functions, IMF).

- Находим верхнюю $e_{up}(t)$ и нижнюю $e_{low}(t)$ огибающие сигнала $h_i(t)$, $h_0(t) = x(t)$
- Находим среднее $m_i(t) = 0.5 \cdot (e_{up}(t) + e_{low}(t))$
- Находим $h_{i+1}(t) = h_i(t) - m_i(t)$. Если выполнен критерий остановки, $h_{i+1}(t)$ есть IMF, иначе повторяем **shifting процесс** для $h_{i+1}(t)$.
- Как только найдена IMF, вычитаем ее из сигнала и повторяем процесс для поиска следующей IMF.

Эмпирическое модовое разложение



EMD of Whale Song



Спектр Гильберта

После EMD разложения для каждой IMF моды находятся мгновенные амплитуда $a_j(t)$ и частота $w_j(t)$. Соответствующий ей спектр Гильберта вычисляется по формуле:

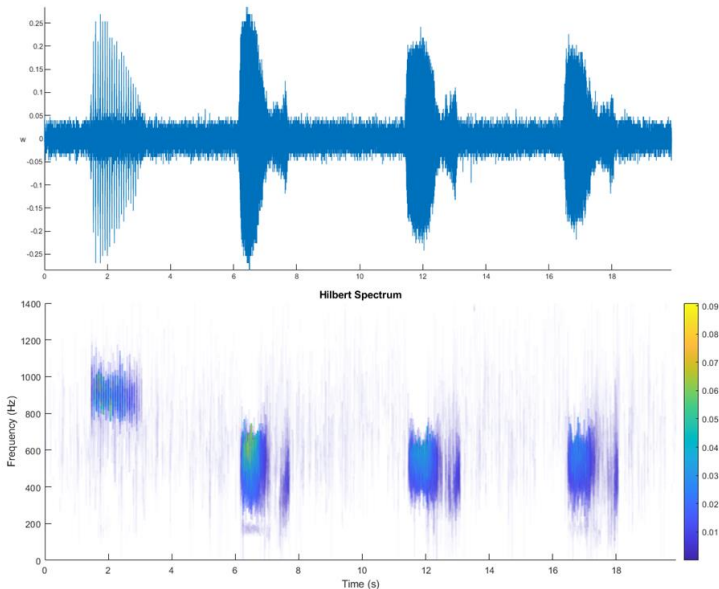
$$H_j(w, t) = \begin{cases} a_j(t), & \text{if } w = w_j(t), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Спектр всего сигнала:

$$H(w, t) = \sum_{j=1}^N H_j(w, t).$$

Процесс получения спектра Гильберта есть **алгоритм Гильберта - Хуанга** (Hilbert-Huang transform, ННТ).

HHT example



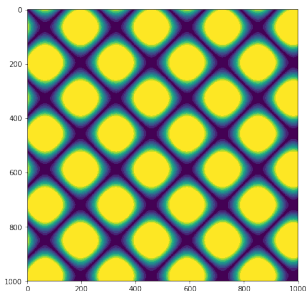
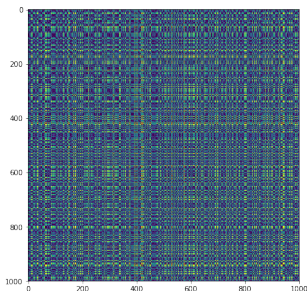
Рекуррентные диаграммы, RP, Recurrence plot

Интенсивность пикселя (i, j) вычисляется по формуле:

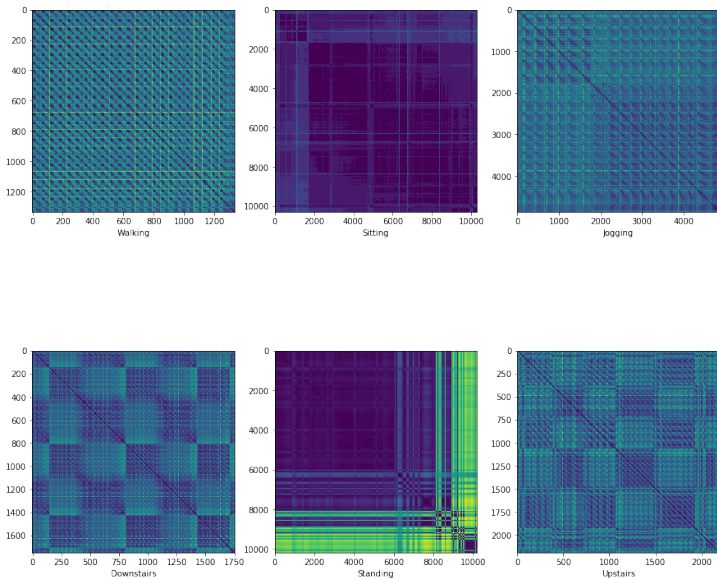
$$RP(i, j) = \theta(\epsilon - \|x(i) - x(j)\|),$$

где $x(i) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$, θ – функция Хевисайда (ступенька):

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$



RP for MotionSense data set



Матрица GAF, Gramian Angular Field

- Приводим диапазон изменений значений ряда к $[a, b]$, $-1 \leq a < b \leq 1$:

$$\tilde{x}_i = a + (b - a) \cdot \frac{x_i - \min(x)}{\max(x) - \min(x)};$$

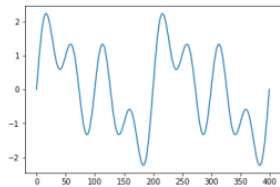
- Полученные значения переводим в полярную систему координат:

$$\phi_i = \arccos(\tilde{x}_i);$$

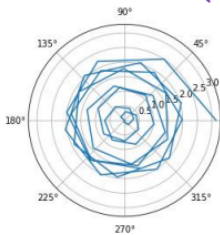
Вычисляем значения GASF или GADF:

$$GASF(i, j) = \cos(\phi_i + \phi_j), \quad GADF(i, j) = \sin(\phi_i - \phi_j).$$

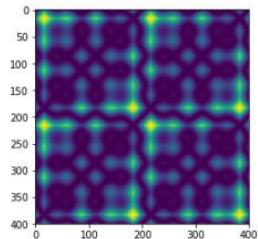
GAF example



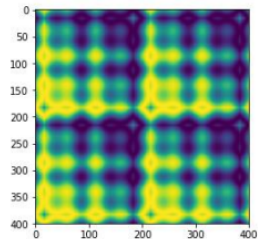
(a)



(b)



(c)



(d)

Матрица MTF, Markov Transition Field

- Разбиваем всё множество значений наблюдений на m квантильных бинов – отрезки с одинаковой вероятностью попадания значения наблюдения в каждый из них.
- Пусть w_{ij} - это количество пар соседних наблюдений во временном ряде, который мы рассматриваем – таких, что левое наблюдение лежит в i -том бине, а правое в j -том бине. \hat{w}_{ij} – это отнормированные w_{ij} так, что $\sum_i \hat{w}_{ij} = 1, \forall j$. Тогда матрица MTF для временного ряда – это матрица вероятностей переходов между бинами:

$$M = \begin{pmatrix} \hat{w}_{11} & \dots & \hat{w}_{1m} \\ \hat{w}_{21} & \dots & \hat{w}_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_{m1} & \dots & \hat{w}_{mm} \end{pmatrix}.$$

MTF example

