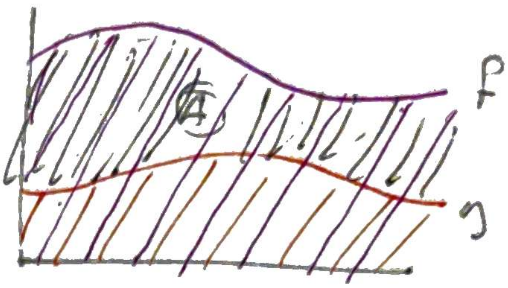
Arean mellan grafer

$f \geq g$

A kan uttryckas

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Ex arean mellan $\underset{\text{under}}{y = x^2}$ $\underset{\text{över}}{y = x + 2}$

Lös skärningspunkter, integral mellan punkter.

$= 9/2$

Förenklat sätt att tänka på Riemannsumma : 11:00 föreläsning 11.

Bestäm area på $[0, \pi]$

↳ finns ingen övre eller undre

↳ Dela upp intervall i skärning

↳ $x = \pi/4$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

⋮

$$= 2\sqrt{2}$$

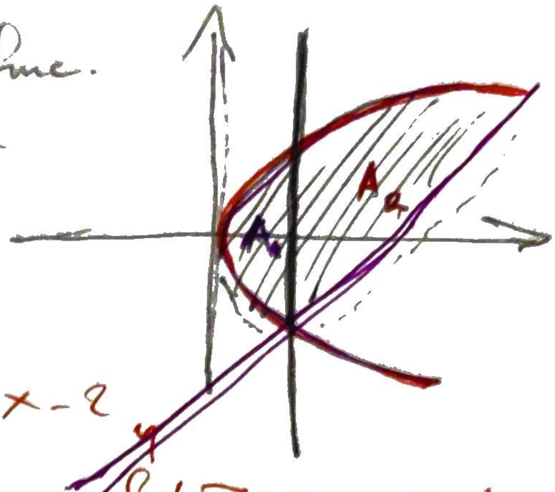
Anmärkning: Osäker vilken som är övre

$$A = \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,dx = \int_0^{\pi/4} | \quad |\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} | \quad |\,dx$$

Ex: Beräkna arean mellan $x=y^2$ och $x=y+2$

⇒ påminner om $y=x^2$ och $y=x+2$.

Lösning: Nedre är inte en func.



A_1 ligger mellan olika delar av parabeln:

$x=y^2 \iff y=\pm\sqrt{x}$

A_2 ligger mellan $y=\sqrt{x}$ och $y=x-2$

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left(\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right)dx+\int_1^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=$$

$$=\int_0^1 2\sqrt{x}+\int_1^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx=\left[\frac{4x^{3/2}}{2}\right]+\frac{x^2}{2}+2x\Big]_1^4$$

$$=\dots=\underline{9/2}$$

Kan man inte bara byta på x och y och räkna i den arean istället?

Kurvor på parameterform.

Vanligtvis

$(x, f(x))$ ⇒ Bara en skärningspunkt på ett $x=a$ streck.

Mer flexibelt med ekvationer

ex $x=y^2$ eller $x^2+y^2=1$

↳ Men måste ändå lösa ekvationen.

En bra blandning mellan dessa två sätt: Parametrisk beskrivning

$(x,y)=(x(t),y(t)),\ t\in[a,b]$

som anger sambandet mellan koordinaten genom funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ med en parameter t.

(tips: Tänk på det som t är tid. Vad blir då $x(t)$? $y(t)$?

↳ (Slå dessa samman till en punkt)

Ex enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ MVA

Parametrering:

hur beror x värdet av tiden...
↳ Jo cos t.
↳ Samma för sin.

$$(x,y) = (\cos t, \sin t) \; ; \; 0 \le t \le 2\pi$$

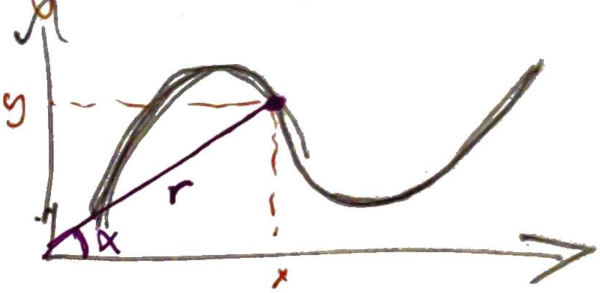
Ofta görs det med klammerparentes: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Ex $x = y^2$ blir $(x,y) = (t^2, t)$; $t \in \mathbb{R}$

Anmärkning: En kurva kan ha många parametriseringar
↳ Cirkel kan vara $(\cos t, \sin t)$
↳ kan även vara $(\cos 2t, \sin 2t)$

Kurvor på polär form

En viktig klass av parametrisering är kurvor på polär form:



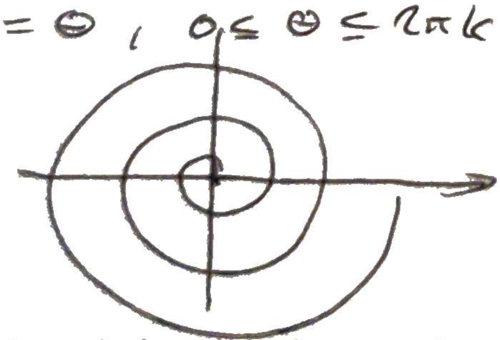
$$\begin{cases} x = r(\alpha)\cos\alpha \\ y = r(\alpha)\sin\alpha \end{cases}$$

$\alpha \in [\theta, \beta]$

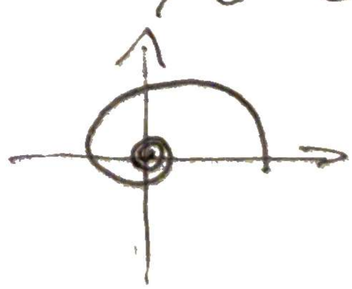
Ofta beskrivs detta som $r = r(\alpha)$

Ex enhetscirkeln $r = 1$; $0 \le \alpha \le 2\pi$
↳ blir ex $x^2+y^2=1$

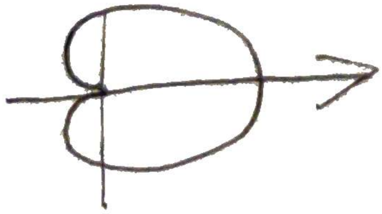
$r = \theta$, $0 \le \theta \le 2\pi k$



$r = e^{-\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi k$



$r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$



Ex enhetscirkeln $x^2+y^2=1$

Parametrering:

hur beror x värdet av tiden ...
↳ Jo $\cos t$.
↳ Samma för sin.

$$(x,y) = (\cos t, \sin t) \;;\; 0 \le t \le 2\pi$$

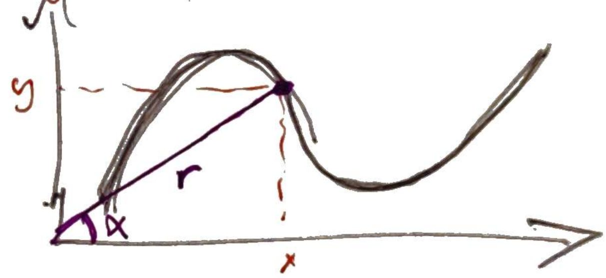
Ofta ges det med komponenter: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Ex $x = y^2$ blir $(x,y) = (t^2, t)$; $t \in \mathbb{R}$

Anmärkning: En kurva kan ha många parametriseringar
↳ Cirkel kan vara $(\cos t, \sin t)$
↳ kan även vara $(\cos 2t, \sin 2t)$

Kurvor på polär form

En viktig klass av parametrisering är kurvor på polär form:



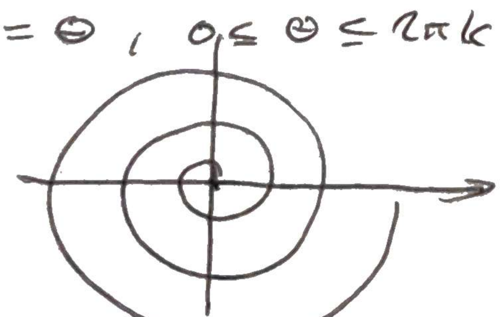
$$\begin{cases} x = r(\alpha)\cos\alpha \\ y = r(\alpha)\sin\alpha \end{cases}$$

$\alpha \in [\theta, \beta]$

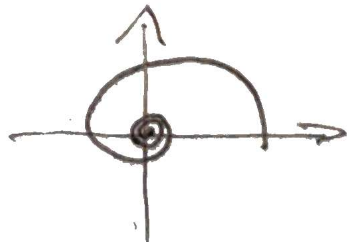
Ofta beskrivs detta som $r = r(\alpha)$

Ex enhetscirkeln $r = 1$; $0 \le \alpha \le 2\pi$
↳ blir en $x^2+y^2=1$

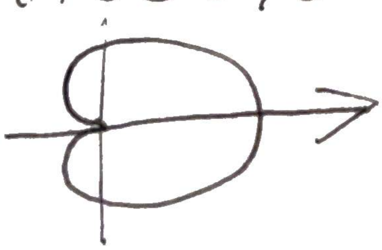
$r = \theta$, $0 \le \theta \le 2\pi k$



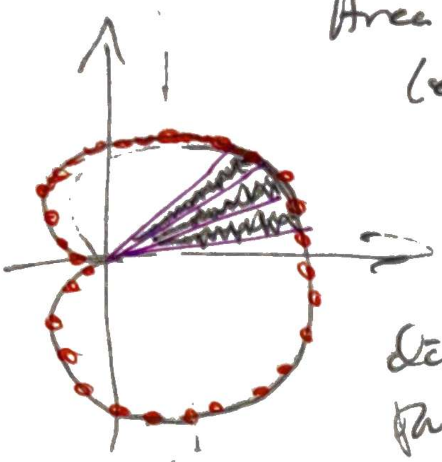
$r = e^{-\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi k$



$r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$



Area på polär form
(exempeluppgift 'bitt')

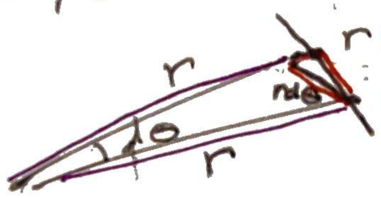


$r(\theta) = 1 + \cos\theta$
$0 \le \theta \le 2\pi$

Lösning: Indela $[0, 2\pi]$ i massor punkter θ_k som motsvarar punkter med $r(\theta_k)$ på kurvan. Dra sträcka till origo. Delas i små areor D_A (små trianglar)
↳ om man har väldigt litet mellan punkterna.

Träna:
Rita snäckan
som vanlig
kurva
(om det går?!)

Varje bit:



$r(\theta + d\theta)$
$r(\theta)$

dr och $rd\theta$ är röda

Den lilla arean: $\frac{1}{2} r d\theta \cdot dr$
→ väldigt litet försumma

Stora triangel $= dA = \frac{1}{2} r^2 \underbrace{\sin d\theta}_{= d\theta \text{ för små } \theta}$

$dA = \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$

Totala arean: $A = \int dA = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta$

Ex pascals snäcka

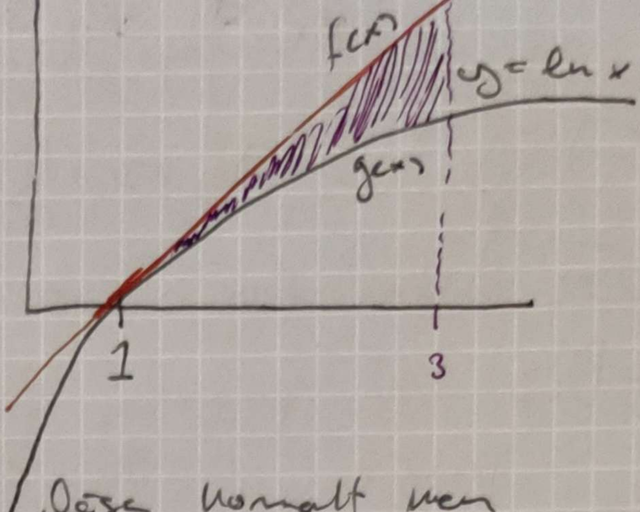
$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$ Lös.

(Mer exempel i sista slide av förel. 11)

Ex Beräkna arean av:

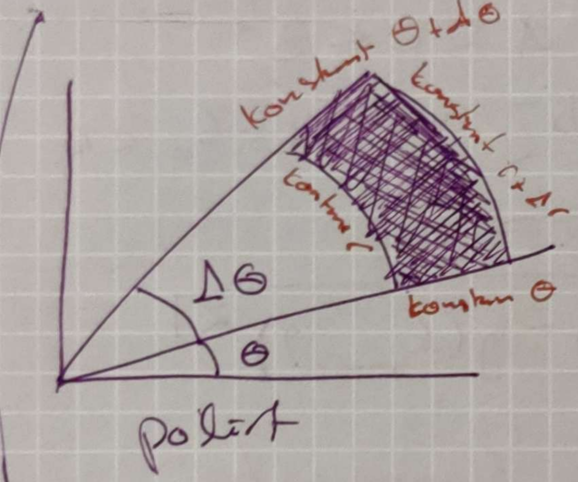
$y = \ln x$

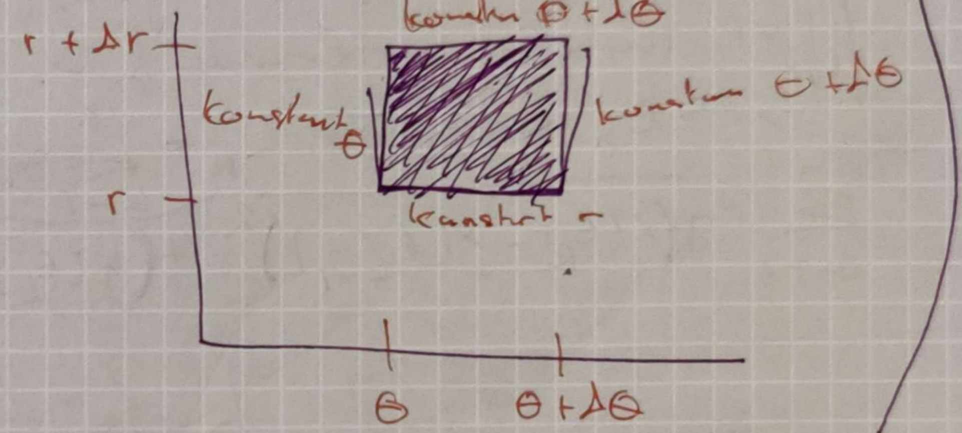
Tangent: $\underbrace{\frac{y-y_0}{x-x_0} = k \Rightarrow y = x-1}_{\text{gör detta själv.}}$



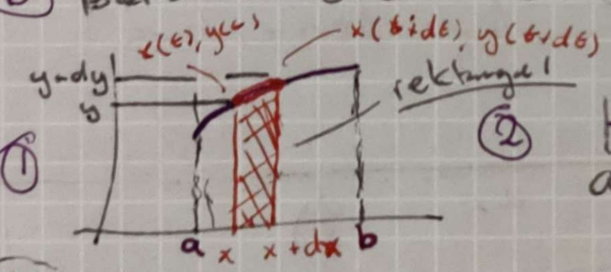
$$A = \int_1^3 (x - 1 - \ln x)\,dx$$

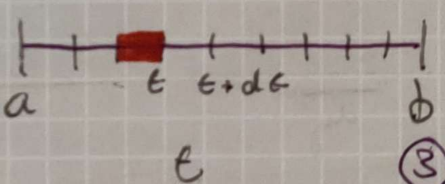
(kan lösa normalt men löser med polära för att träna)





⓪ Beräkna arean av $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$





Skillnad i t

area  $= y \cdot dx$

④ $A_{tot} = \text{"} \underbrace{\int y\,dx}_{\text{vill ha en variabel i t}} \text{"} = \int_a^b \underbrace{y(t)}_{y}\, \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx}$

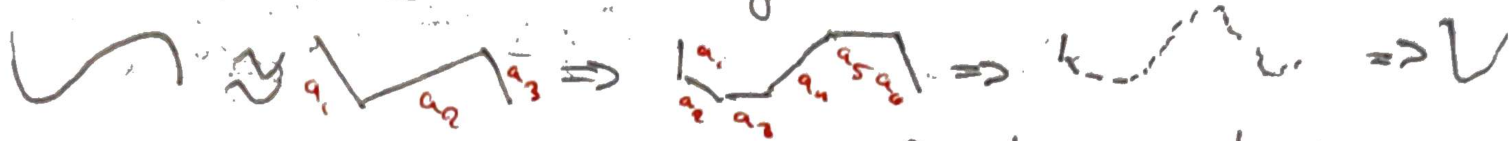
③ $\frac{dx}{dt} = x'(t)$

$\underbrace{dx = x'(t)\,dt}_{\text{Samband mellan skillnad av x och t.}}$

$\underbrace{dy = y'(t)\,dt}_{\text{Samband mellan skillnad i y och t}}$

⑤ $A_{tot} = \int_a^b t^3 \cdot 2t \cdot dt \Rightarrow$ lätt löst.

Kurvans längd



$\equiv$ - alla små streckar. Fler dellängder - bättre.

Definition kurvans längd

↳ talet $L = \max(L)$; där L är summan av alla små indelningar $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

↳ om L är ändligt kallas kurvan rektifierbar.

Konkret: $(x(t), y(t))$, $\alpha \le t \le \beta$:

indelar intervallet $[\alpha, \beta]$ med $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \beta \Rightarrow L_n = \sum_{k=1}^{n} a_k =$

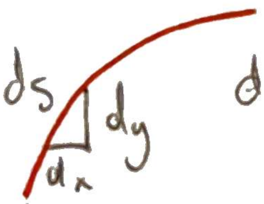
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

Kurvans längd i kartesiska koordinater

(betrakta endast släta kurvor)

↳ Dvs $(x, y) = (x(t), y(t))$, $\alpha \le t \le \beta$

$x(t)$ och $y(t)$ kontinuerligt deriverbara



$$ds^2 = \underbrace{dx^2}_{dx} + \underbrace{dy^2}_{dy} \Rightarrow ds = \sqrt{\underbrace{x'(t)^2}_{dx} + \underbrace{y'(t)^2}_{dy}}\, dt$$

$$L = \int ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Längd på en cykloid

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = \left[1 - \cos 2x = \underline{2\sin^2 x} \right]$$

(Svårt ha uppläg

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2 t/2}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin t/2}\, dt.$$

→ $\sin\alpha \ge 0$ för intervallet $t/2 = [0, 2\pi]$ så behövs ingen $\pm$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\, dt = 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \boxed{8} \text{ l.e}$$

Special fall: kurvlängd av funktionsgraf.

$(x, y) = (x, f(x))$. kan då välja $x = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} ; \quad a \le t \le b \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(t) \end{cases}$$

$$L = \underbrace{\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}_{\text{kom ihåg den}} = \underbrace{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}_{\text{konstruera den}}$$

Anmärkning: längden av ds från innan kallas längdelement eller bågelement

$$\left(ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \right)$$

Längden på parabel $y = x^2$ på $[0,1]$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+4x^2}}_{g(x)=1\;\; f(x)=}\,dx$$

$= [$ partiell integration $] = \dots$

$$= \sqrt{5} - 0 - \int_0^1 \frac{1+4x^2-1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \sqrt{5} - \int_0^1 \underline{\sqrt{1+4x^2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

$$= \sqrt{5} - L + \frac{1}{2}\left[\ln(2x + \sqrt{1+(2x)^2})\right]_0^1 = \sqrt{5} - L + \frac{1}{2}\ln(2+$$

Slutligen $2L = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) \Rightarrow$ lös L.

Kurvlängd i polära koordinater

$r = r(\theta)$ i beskrivs i kartesiska koordinater

$x = r(\theta)\cos\theta$; $\theta \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \begin{cases} x' = r'\cos\theta + r(-\sin \\ y' = r'\sin\theta + r\cos\theta \end{cases}$

$y = r(\theta)\sin\theta$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\,d\theta$$

$x'(\theta)^2 + y(\theta)^2$

$x'(\theta)^2 = r'^2\cos^2\theta - 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta$

$x'(\theta)^2 = r'\sin^2\theta + 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta$

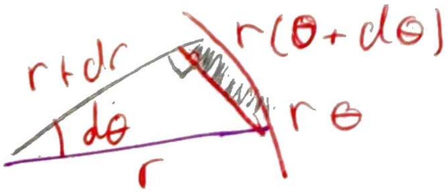
$x'^2 + y^2 = r'\cdot 1 + 0 + r^2 \cdot 1$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta$$ " formel lönar sig att memorera

↳ lös.

Alternativt: förenklat med Riemannsummer. (intuition)

↳ tänk på integral som oändligt av små element



Se Ändring i 1h in i föreläsning.

Ex: längden på pascals snäcka

$r(\theta) = 1 + \cos\theta \;, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$r'(\theta) = -\sin\theta$

$\Rightarrow \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}$

$= \int \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta$

$= \int \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$

kan inte ha kvar abs för från $0 \to 2\pi$ blir cos båda pos. först och negativt

↳ uppdela abs.

Viktigt med abs

↳ Annars får man längd ∅.

$= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} -\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$= 2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - 2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} = 4(1-0) - 4(0-1) = \underline{8\ \text{le}}$

$\begin{cases} x = 20u^3 \\ y = 20(1-(1-u^2)^{3/2}) \end{cases}, \quad 0 \le u \le 1$

längd och tid?

Hans hastighet är $\frac{600}{30+s}$ efter s kilometer

$x' = 20 \cdot 3u^2$

$y' = 20 \cdot \left(-\tfrac{3}{2}(1-u^2)^{1/2}(-2u)\right) = 20 \cdot 3(1-u^2)^{1/2}\, u$

$L = \underbrace{20 \cdot 3}_{\text{från att hon hade } \sqrt{(20\cdot 3)^2}} \cdot \int_0^1 \sqrt{u^4 + (1-u^2)\cdot u^2}\, du$

$20 \cdot 3 \int_0^1 \sqrt{\cancel{u^4} + u^2 - \cancel{u^4}}\, du = 20 \cdot 3 \int_0^1 u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$= 20 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} \boxed{= 30}$

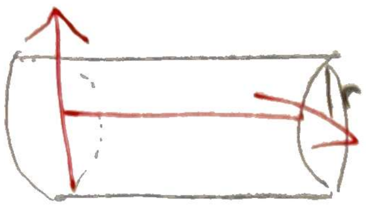
$T = \frac{S}{V}$ [konstant!] $\Rightarrow dt = \frac{ds}{600} = \frac{30+s}{600} ds$

$30+s$

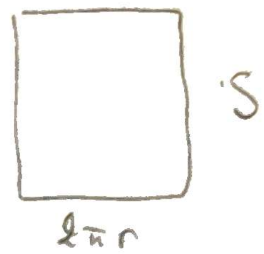
$T = \int dt = \int_0^{30} \frac{30+s}{600} ds$

Rotationsarea

Kurva roteras kring en symmetriaxel
↳ mantelarea

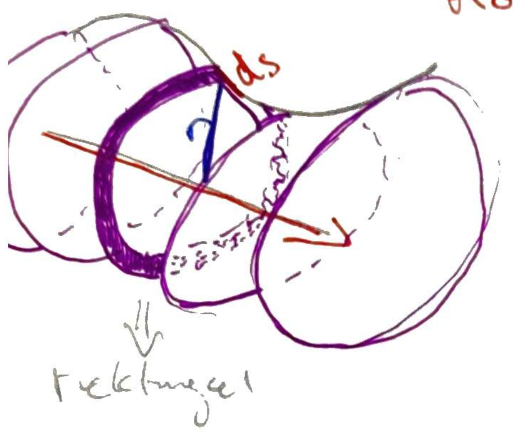


⇒ Cylinder
↳ kan rullas ut till



Allmänt:

Rotationsarea allmänt

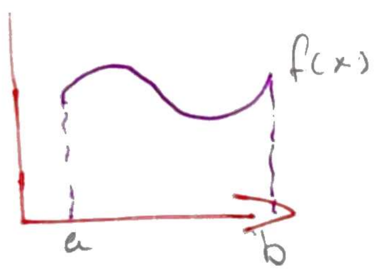


Tag en oändligt liten kurvbit ds och titta på rotationsytan som uppstår då den roteras

$$dA = \pi(r+r)ds = 2\pi r\,ds$$

$$\boxed{A = \int dA = 2\pi \int r\,ds}$$

Rotationsarea kring x-axeln



$f(x)$ på $[a,b]$ roteras kring x-axeln
↳ Antag $\boxed{f(x) \geq 0}$

$A = 2\pi \int r\,ds$ [Uttryck r och ds i samma variabel]

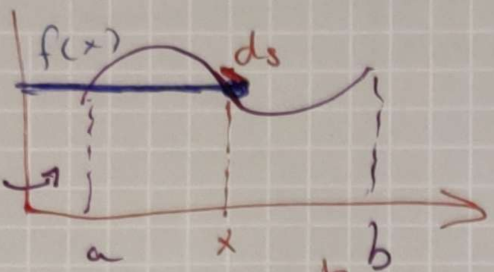
längdelementet vid punkt x_i

$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ (från innan)

Radie:
$r = f(x)$

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Rotationsarean: kring y-axeln.



$A = 2\pi \int r\, ds$ ⇒ kom ihåg detta

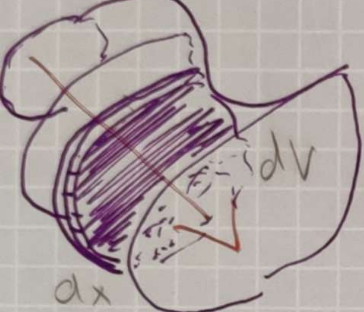
$r = x$

$ds = \sqrt{\quad \dots \quad}\, dx$

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$ ⇒ härled detta.

⇒ Som innan men med x.

Rotationsvolym



Massor cylindrar (egentligen stympad kon men den är tillräckligt liten för att bli en cylinder

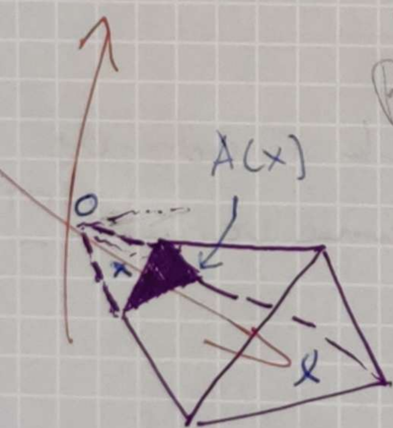
$$dV = \pi r^2 dx = \pi f(x)^2 dx$$

$$\boxed{V = \int dV = \int_a^b \underbrace{\pi f(x)^2}\, dx}$$

Note: Detta är en skiva som summeras ihop

Skivsformel ~~[illegible]~~

Precis som basen gånger höjden fungerar för en cylinder så fungerar det för alla former.



$$V = \int_a^b A(x)\, dx \quad \text{(skivsformel)}$$

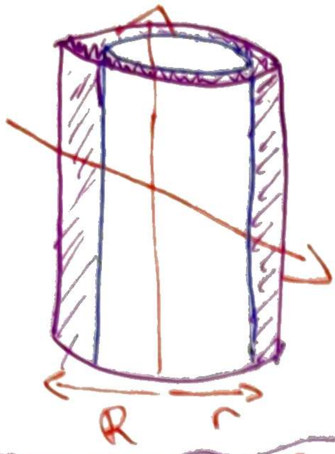
$A(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot B$ (det beskriver hur stor procent av B som x har traveled)

upphöjt till 1 i 2D.

upphöjt till 2 i 3D

$$\boxed{V = \int_0^l \frac{x^2}{l^2} B\, dx}$$

Rörvolym



$$V = \underline{\pi R^2 h} - \underline{\pi r^2 h}$$

$$V = \pi h (R^2 - r^2)$$

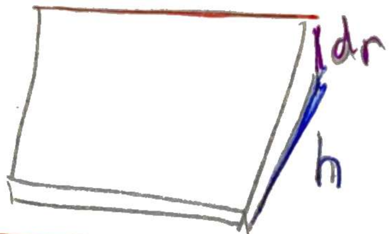
Om $R - r \approx 0$? $dr \approx 0$

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h((r+dr)^2 - r^2) = \pi h(2r\,dr + (dr)^2)$$

försumbar

$$\approx \boxed{2\pi r h\,dr}$$

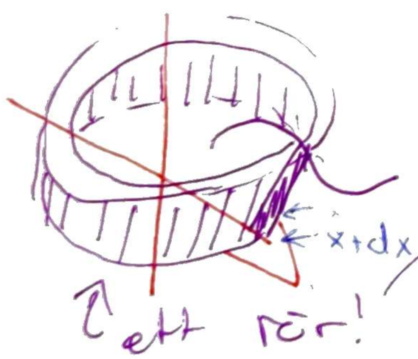
Anmärkning: Uppklippt



$= 2\pi r h\,dr$

Rotationsvolym kring y-axeln

$$dV = 2\pi x f(x)\,dx.$$



$$V = \int dV = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \quad \text{(rörformel)}$$

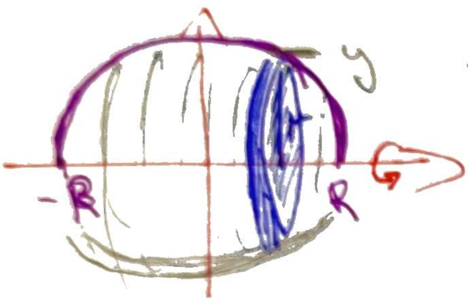
Exempel i video
↳ föreläsning 13.

Gemensam princip

Lär dig princip!!! och skaffa formel från scratch.

- area: $\int h\,dx$
- längd: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
- volym:
  - skivformel $V = \int_a^b A(x)$
    - ↳ Rotationsvolym $V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$
  - Rörformel

Ex <u>Volym av klot med Radie R</u>



inget ±

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = +\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow$ halvcirkel

$A(x) = \pi r^2 = \pi y^2$

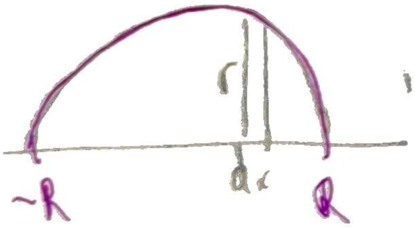
$\Rightarrow V = \int_{-R}^{R} \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx$ positivt så behöver inget absolutbelopp

$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx$

$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$

$= \dots$ V.e.

I parameter form



$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

$V = \int dV = \int \pi R^2 \sin^2 t \cdot R\,|-\sin t|$

$dV = \pi r^2 dx$

$|dx| = |x'(t)|\,dt$

$dV = \pi r^2 dx = \pi\, y(t)^2$

$\Rightarrow$ får negativ volym då dx går åt vänster.

↳ ta abs

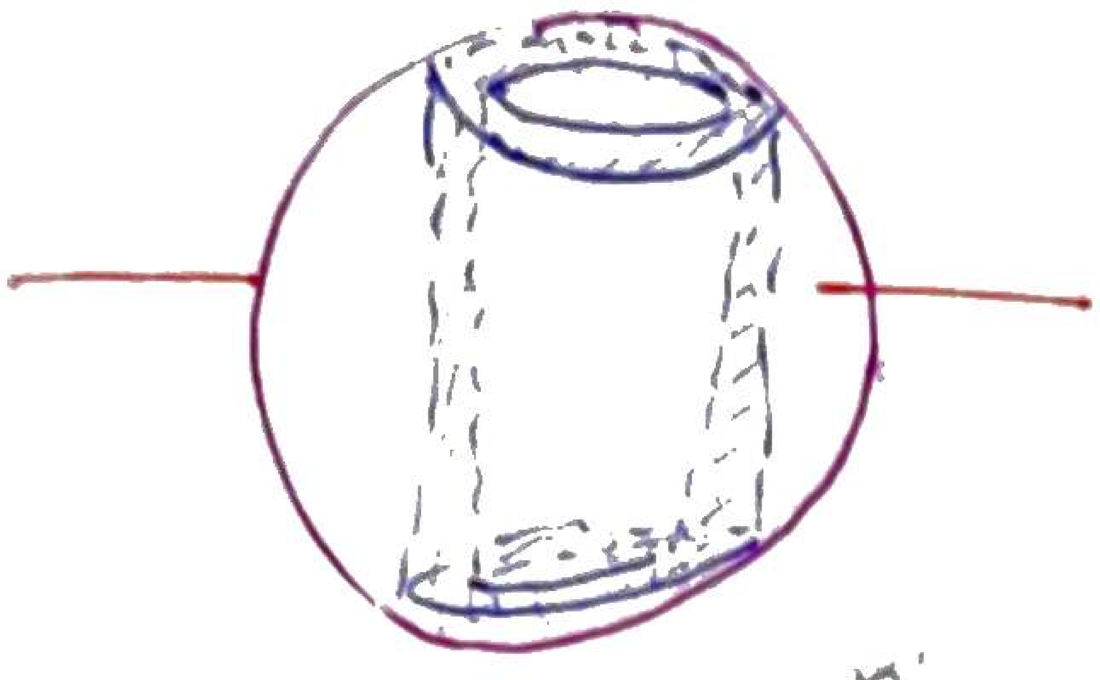
$= \pi R^3 \int_0^\pi \sin^3 t\,dt$

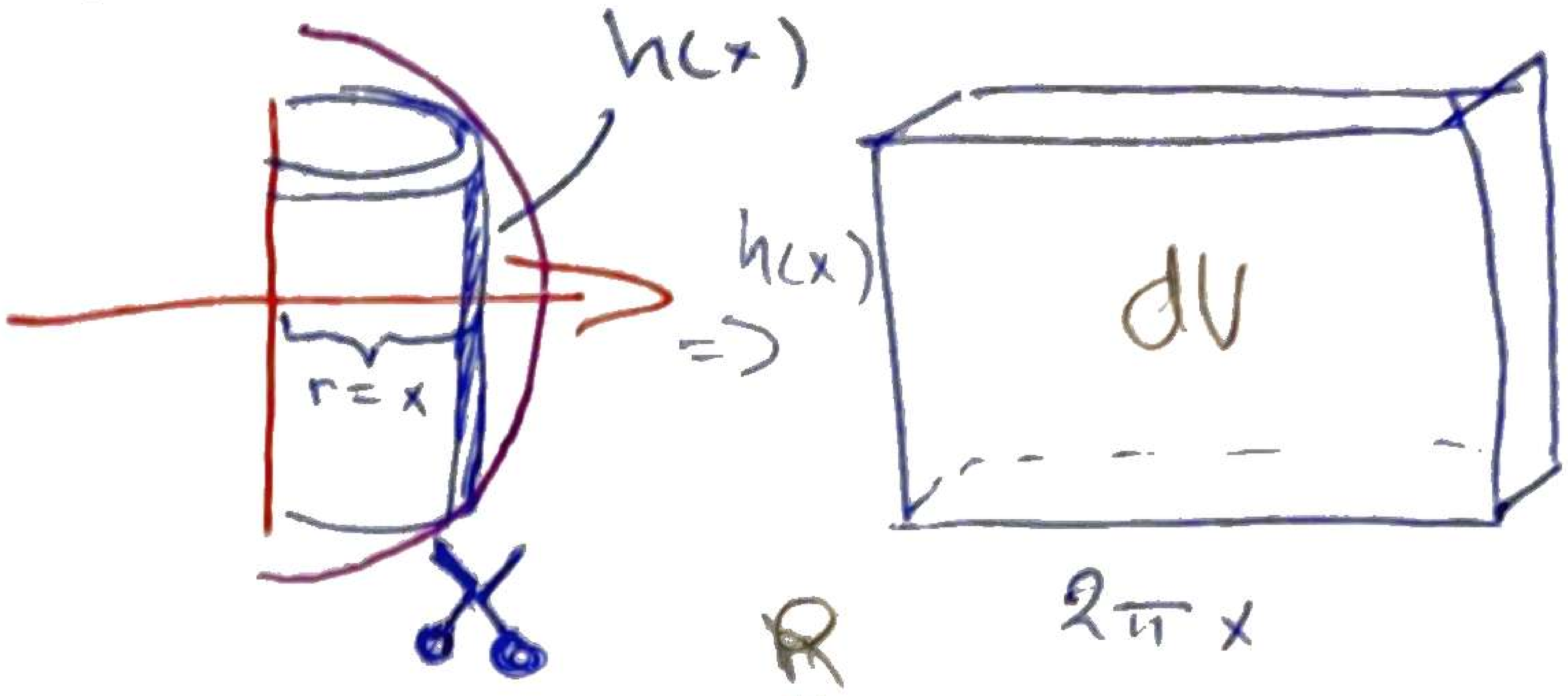
$= -\text{"}- \int_0^\pi (1 - \cos^2 t)\sin t\,dt$

$= \dots$

$= \frac{4}{3}\pi R^3$

Ex Samma klot.





$$V = \int dV = \int_0^R 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\pi \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[t = R^2 - x^2,\ dx = \frac{dt}{-2x} \right] = -2\pi \int_{R^2}^{0} \sqrt{t} = -2\pi \left[\frac{t^{1.5}}{1.5} \right]_{R}^{0^2}$$

$$= \frac{2\pi R^{1.5}}{1.5}$$ Ska vara 3 (lost grejs)

$\int_{-1}^{1} f(x)$ där f(x) är udda $= 0$

$\int \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow$ variabelbyte $x = a\sin t$

↳ får det till $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$

Ex Sfär av radie R

↳ ihåligt klot.

ALLTID (TYP)

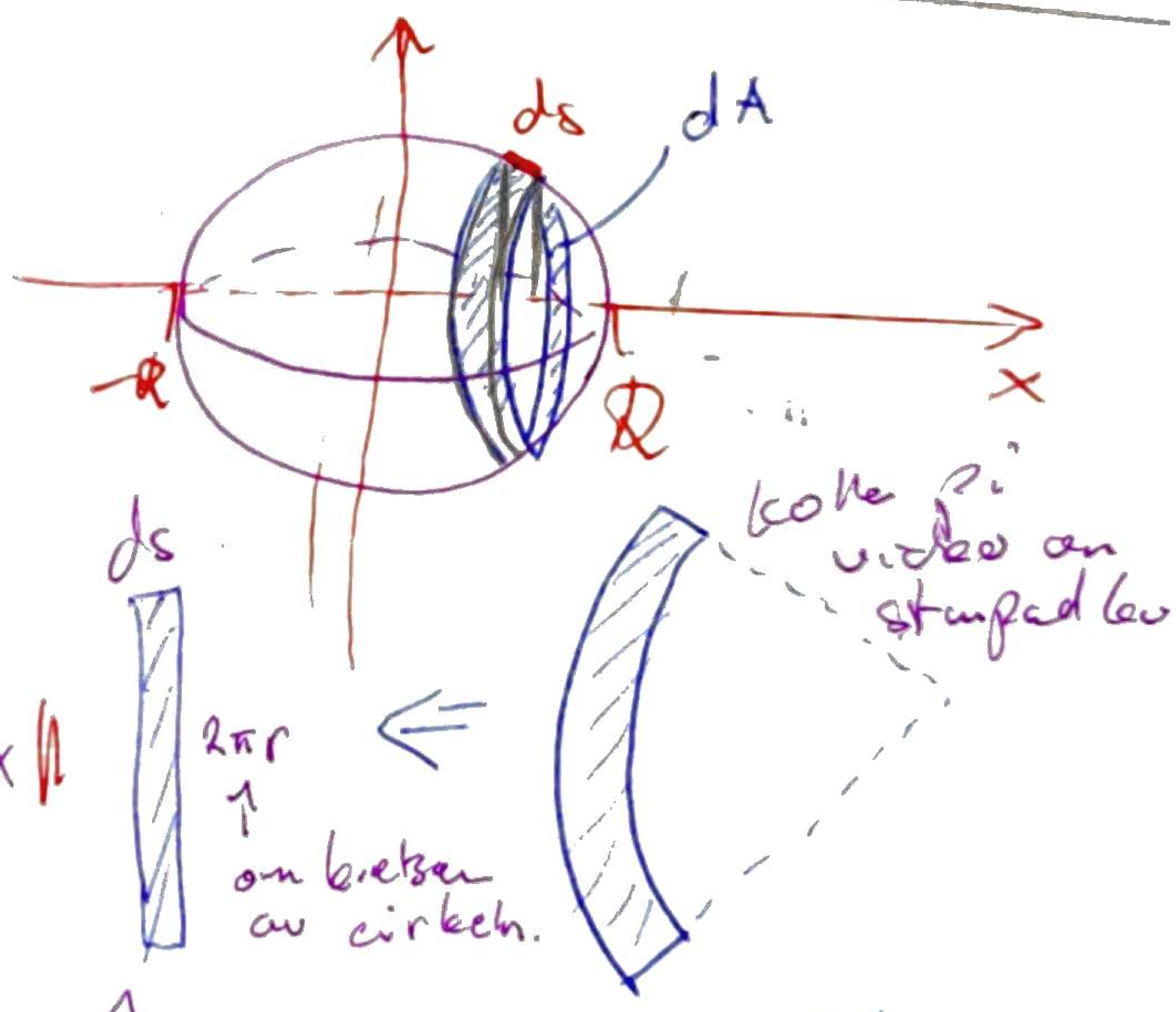
↳ Ta liten bit

↳ ta area av bit

↳ Summera

$$A = 2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

allmän form för rotationsarea tror jag.



Om ds är liten

Räcker på tenta att utgå från detta

Note mantelarea är derivatan av volymen.

Allmänt

$$\rho \text{ (densitet)} = \frac{M}{V} \quad (3D)$$

$$= \frac{M_{massa}}{A_{area}} \quad (2D)$$

$$= \frac{M}{l_{längd}} \quad (1D)$$

Om homogenitet inte skrivs så är den ohomogen

$\rho(x) = 1 + x^2$ [kg/m]

lösning: $\underbrace{\rho = \frac{M}{b-a}}_{}$ $\Rightarrow$ Fel!

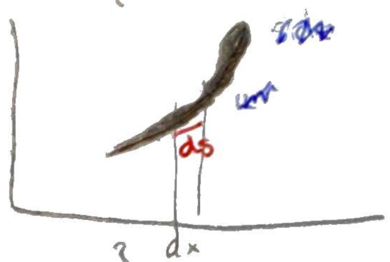
tråden är inte homogen
för massa som funktion, inte hur M förändras över tid.

lösning: OHOMOGEN
Dela i oändligt många små delar

$$\int_a^b \underbrace{\rho}_{\text{massa för liten bit}} dx = \ldots$$

Tips: kolla att första steg är rätt

Bestäm trådens massa om $l = x^2$ för $1 \le x \le 2$
Och $\rho(x) = x$

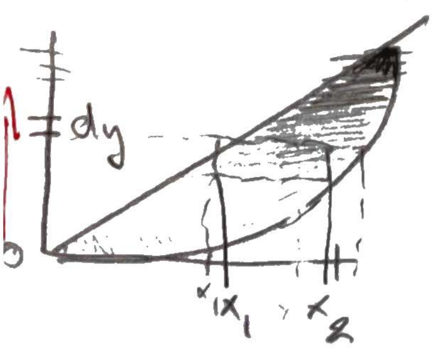


$$dM = \rho(x)\, ds = x \underbrace{\sqrt{1 + (2x)^2}}_{\text{längden av ds (längdformeln)}} dx$$

OBS: $dM \neq \rho(x)\, dx$
$dx \neq ds$

$$M = \int^2 x\sqrt{1 + 4x^2} = \text{kedjeregeln.}$$

Massan av skivan begränsas av $y = x$ och $y = x^2$
har densitet $\rho(y) = y$



lösning: dela kring y (konstant i ett litet y)

$$dM = \rho(y)\, dA = y \cdot dA$$

$\blacksquare = dA = (x_2 - x_1)\, dy$

(x_1, y) $x_1 = y$ (x_2, y) $x_2 = \sqrt{y}$

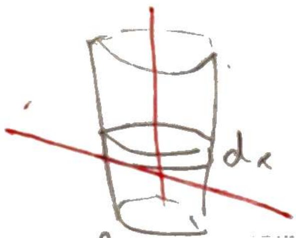
$$dA = (\sqrt{y} - y)$$

$$M = \int dM = \int \underbrace{y}_{\rho(y)} \underbrace{(\sqrt{y} - y)\, dy}_{dA}$$

Ex Silo är full. Radi 2m. Höjd 1m

$\rho(x) = 1 + \frac{1}{1+h^2}$. Bestäm massan

<u>Lösning</u> vi riktar x-axeln uppåt (ty densitet beror av höjd. Naturligt att dela in i olika höjder



$dV = \pi r^2 dx = 4\pi dx$

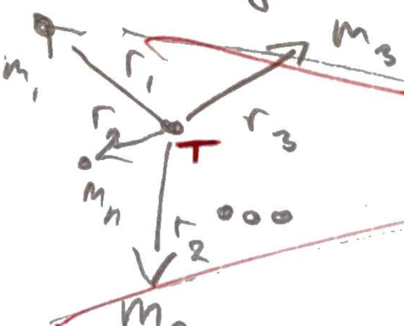
densitet konstant i dV.

$dM = \rho(x) dV = (\quad) 4\pi dx$

$4\pi\int_0^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

Masscentrum.

Linalg



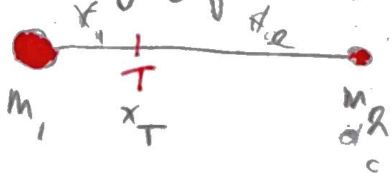
~~för alla massor~~

~~Definition~~

~~Punkt T är masscentrum för massorna m_k, $k = 1, \dots, n$ om~~

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = 0$$

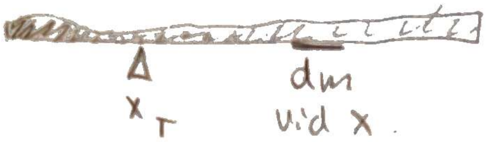
Tyngdpunkt i x-led: två massor.



$$\underbrace{m_1 g(x_1 - x_T)}_{m \cdot \ell} + \underbrace{m_2 g(x_2 - x_T)}_{m \cdot \ell} = 0$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$ flyttar om.

Tyngdpunkter i x-led. ...



$$\rho(x) = f(x)$$

$$dM = \underbrace{(x - x_T)\, dm\, g}_{\ell \cdot f}$$

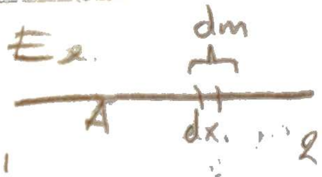
$$0 = \int dM = \int (x - x_T)\, dm$$

$$\Leftrightarrow \underline{\int x\, dm} = \int x_T = x_T \int dm = \underline{x_T M}$$

⇒ lös ut detta själv ⇔ så jag uppfattar om glesrum

$$\Rightarrow x_T = 1/m \int_\ell x\, dm$$

Ex.



$$\rho = 1 + x^2$$

$$x_T = 1/m \int x\, dm$$

Uttryck dm i x: $dm = \rho(x)\, dx = (1+x^2)\, dx$

lös massa: $m = \int dm = \int_1^2 (1+x^2)\, dx = \boxed{10/3}$

lös $\int x\, dm = \int_1^2 x(1+x^2)\, dx = \ldots = \boxed{21/4}$

Svar $\frac{3}{10} \cdot \frac{21}{4}$ (Eller: $x_T = 3/10 \int_1^2 x(1+x^2)\, dx$)

$= \frac{63}{40}$. Anmärkning $63/40$ ligger mellan 1 och 2. Mest tyngd ligger mot två (se funktionen) och 1.6 mellan 1 och 2 ligger där emellan..

Tyngdpunkt, alla led

$$x_T = 1/m \int x\, dm, \quad y_T = 1/m \int y\, dm, \quad z_T = 1/m \int z\, dm$$

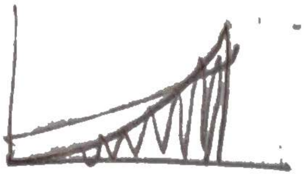
Anmärkning: Räkna inte alla 3!

Symmetri!

Det förekommer många uppgifter där man inte behöver räkna alla integraler utan symmetrin avgör svaret i förtid.

I alla fall ska m bara beräknas en gång!

Exempel. Beräkna tyngdpunkten av homogena skivan som begränsas av $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$



Ingen symmetri på x och y.

$$x_T = 1/m \int x\,dm, \quad x_T = 1/m \int y\,dm$$

$y = x^2 = \int 2x \,]$ ...
vad inte
S:?
Homogen ju

3 integraler:

$m = \rho \cdot A \Rightarrow dm = \rho \cdot dA$

leder till att

$$x_T = 1/m \int x\,dm = \frac{1}{\rho A}\int x \cdot \rho\,dA$$

ρ är konstant tal $\Rightarrow$ bryt ut

$$= \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho} A}\int x\,dA$$

↳ kan anta $\rho = 1$ om homogen

x led: $dm = dA = x^2\,dx$

$$m = \int dm = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

$$\int x\,dm = \int_0^1 x \cdot x^3 = 1/4$$

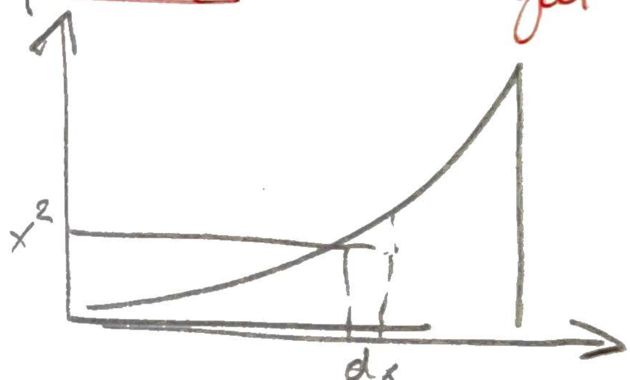
y led samma

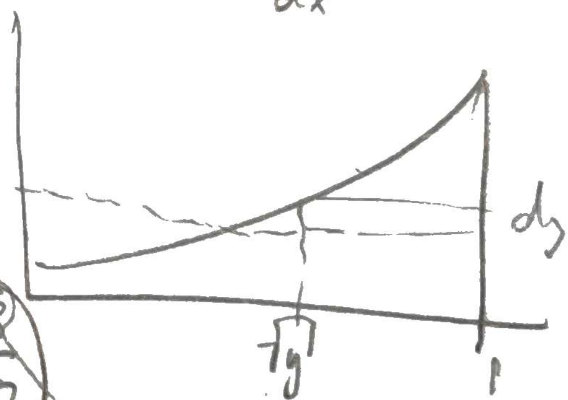
$$dm = dA = (1 - \sqrt{y})\,dy$$

$$m = 1/3$$

$$\int y\,dm = \int_0^1 y(1-\sqrt{y})\,dy = 1/10 \; y$$

$$x_T = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad y_T = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$



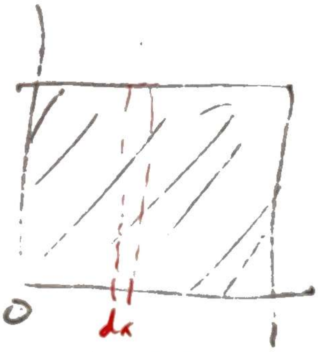


Ex

$\rho(x) = 1 + x^2$

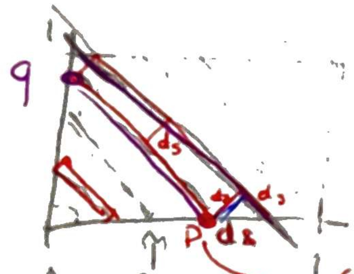
$\rho = \frac{dm}{A} \Rightarrow m = \rho A = \underbrace{\rho}_{\rho}\underbrace{f(x)dx}_{dA} = \rho(x)dx$

$\int_0^1 1+x^2 dx = \dots$



Ex

Samla ihop delar med konstant densitet



Summa konstant ρ

$\rho(x,y) = 1+x+y \Rightarrow x+y = C-1$

$y = -x + \text{konst}$

$\Rightarrow ds^2 + ds^2 = dx$

$dx = \sqrt{2}\, ds$

$(x;0)$ $dA = \text{bred} \cdot \text{längd} = \sqrt{2}\,x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = x\,dx$

$dM = \rho \cdot dA = \underbrace{(1+x)}_{} x\,dx$

varför togs y bort?

$M = \int dM = \int_0^1 (1+x)\,x\,dx$

⇒ först halvan av kvadrat (bara ~~triangel~~)

i punkt P $(x,0)$ och hela linjen vi räknar på $\rho = 1+x+0$ hade även kunnat ta punkt q och $\rho = 1+y+0$ på hela linjen men vi vill uttrycka i x

---

Ex Massa av ett klot med radie 1 och densitet $\rho = 2-r$

⇔ densitet konstant

$dM = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$r^3 + 3r^2 dr + 3r\,\cancel{dr^2} + \cancel{dr^3}$

kan stryka allt som går snabbare till 0 än dr

Alternativt:

$dV = \boxed{1}\, dr$

$\frac{dV}{dr} = \boxed{2} \Rightarrow V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

"$4\pi r^2 dr$" $V'(r) = 4\pi r^2 = \frac{dV}{dr}$

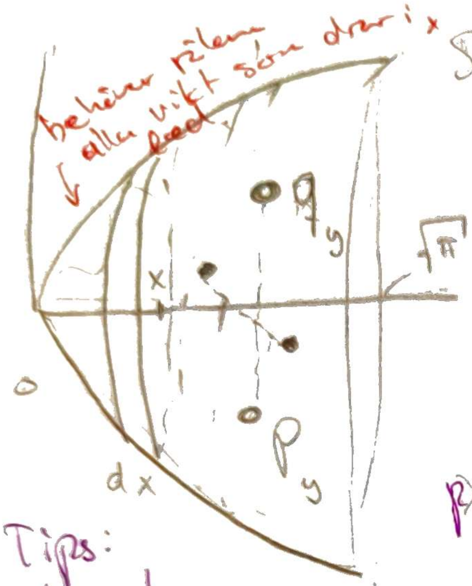
$dM = \rho \cdot dV = (2-r)\,4\pi r^2 dr$

$M = \int dM$

Note formeln för masscentrum kommer antydligen ... som $x_{mc} = 1/m \int x\,dm$

Ex $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$ roteras längs x-axeln.

Bestäm Mc om $\rho = x$



Symmetri i y och z

ρ_y och q_y är symmetriska ut för ut

↳ lika långt borta

↳ Samma densitet

↳ Symmetri i densitet och position

På tavlan: $y_{mc} = z_{mc} = 0$ (symmetri)

Tips: Inbilla hur den skulle balansera den i verklighet

$$dM = \rho\, dV = x \pi x\, dx$$

$$dV = \pi r^2 dx = \pi \sqrt{x}^2 dx$$

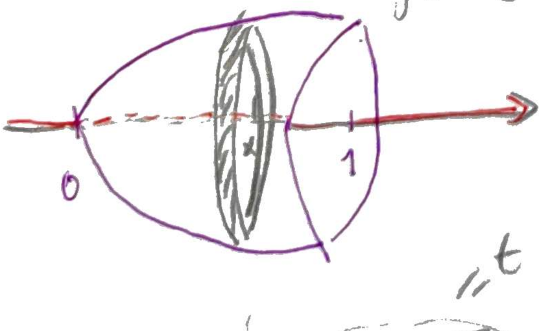
$$\int x\,dm = \int x \rho\, dV = \int_0^1 x x \pi \sqrt{x}^2 = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi/4$$

$$x_{mc} = \frac{\pi/4}{\pi/3} = 3/4$$

Svar $(3/4, 0, 0)$

Ex $y = \sqrt{x}$ ⟳ x-axeln $\rho = x$

Bestäm Mc för skalet



$dm = \rho \cdot dA$ — punkter på skalet med samma x

← varför ds nu?

↳ Area var ju skillnad då se innan

$$dA = 2\pi\sqrt{x}\, ds = \ldots$$

$$= 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + 1/4x}$$

$$= \pi\sqrt{4x+1}\, dx$$

$$= x\pi\sqrt{4x+1}$$

$$M = \pi \int_0^1 x \underbrace{\sqrt{4x+1}}_{t} dx$$

$$\int x\,dm = \int_0^1 x^2 \sqrt{4x+1}$$ ⇒ lös med x_{mc} formeln tillslut.

Differentialekvationer

↳ Se newtons andra lag

$$\underbrace{m v'}_{\text{acceleration}\cdot\text{massa}} = \underbrace{\underbrace{-mg}_{\text{en kraft}} + f_r}_{\text{kraft}}$$

Populationsmodellen (har bara värdena för vissa år)

$N(t)$ är folkmängd vid tid t. [år]

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = \text{årlig medeltillväxt}$$

$$N'(t) = \text{årlig momentantillväxt}$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \text{årlig momentantillväxt per capita}$$

Under normala förutsättningar så är konstant tillväxt per capita

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \Rightarrow \underline{N'(t) = rN(t)}$$

↳ populationsmodellen

Ex om $r = 1$ så är $N(t) = Ce^t$ en uppenbar lösning till differentialekvationen

---

Ex: kan även gälla annat än människor

Sönderfall av atomer: $\underline{N(t) = \lambda N'(t)}$

↳ bekant.

Massbalans

Mängden av materia inom ett begränsat område måste balanseras

ändring i mängd per tidsenhet = inflöde - utflöde

Om $M(t)$ är mängd vid tid t.

$$M'(t) = Q_{in} - Q_{ut}$$

Ex Till en vattentank med 100L rent vatten tillförs saltvatten med koncentration 2g/L med flöde 3L/h. Det blandas fullständigt och tappas ut med samma flöde 3L/h

$M(t)$ = massa salt i gram vid tid t.

$$M' = Q_{in} - Q_{ut} \Rightarrow$$

Q_{in} = [salt i rinner in] = 2 g/L · 3L/h = 6g/h

Q_{ut} = [salt i rinner ut] = $C(t)$ g/L · 3L/h

↑ koncentration i tanken.

$C(t)$ = [koncentration i tank vid tid t] $= \frac{M(t)}{100}$ g/L

$$M'(t) = 6 - 3\frac{M(t)}{100} = 6 - 0.03M(t)$$

Differentialekvationer

ordning: högsta derivatan.

grad: Hur många gånger vi multiplicera. (polynom;)

$(y'')^3 = y' + x$ ordning 2, grad 3.

Differentialekvationer utan x är stationära

$\hookrightarrow y' = y^2$

Linjär DE läa ordning

$y'(x) + g(x)\,y(x) = h(x)$

specialfall 1: $g(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = h(x) \Leftrightarrow y(x) = \int h(x)\,dx$

specialfall 2: $h(x) = 0 \Rightarrow y' = k(x)\,y$

$\boxed{\text{Lös } y' = y}$ ↗ kedjeregel

Ex $x^2 y' + 2xy = 0 \Rightarrow x^2 \cdot y' (x^2)' \cdot y = 0 \Rightarrow (x^2 y)' = 0$

Ex $xy' + 2y = 0 \Rightarrow$ multiplicera med x.

Nu. $y' - y = 0 \Rightarrow \Phi(x)(y' - y) = 0$ ←dividera? $(\Phi(x) = \phi)$

$= \Phi \cdot y' + \underline{(-\Phi)} \cdot y$ (Vill ha $\Phi \cdot y' + \underline{(-\Phi)'} \cdot y =$

$-\Phi = \Phi'$ ⇐ får sedan $(\Phi \cdot y)'$

$\hookrightarrow$ speciallfall 2.

$\hookrightarrow \Phi(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow (e^{-x} y)' = 0$

$\Rightarrow e^{-x} y(x) = C$

$\boxed{y(x) = Ce^x}$

Maclaurinutvecklinger.

Maclaurinpolynom intuitiv

Bytet $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

funkar bara $\theta \approx 0$

↳ Har vi något som fungerar för större intervall?

Grad 1

$f(x) = \sin x$

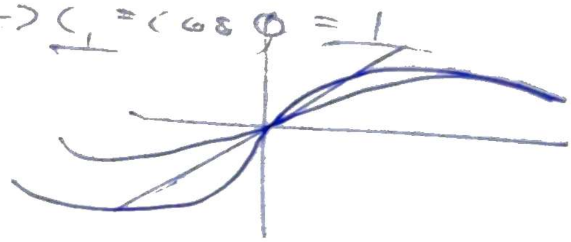
vilket $p(x) = c_0 + c_1 x$ approximerar $f(x)$ när $x = 0$ bäst?

värdena ska stämma $p(0) = f(0) \Rightarrow c_0 = \sin 0 = 0$

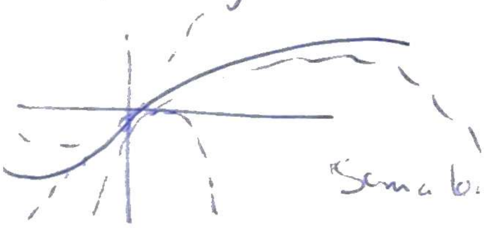
lutning ska fungera: $p'(0) = f'(0) \Rightarrow \underline{c_1} = \cos 0 = \underline{1}$

alltså: $p_1(x) = x$ är bästa

$\sin\theta = \theta$ —u—



Men grad 2?



$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ approx $f(x) = \sin x$

$p(0) = f(0) \Rightarrow \underline{c_0} = \sin 0 = \underline{0}$

Samma bild: $p'(0) = f'(0) \Rightarrow \underline{c_1} = p'(0) = \cos 0 = \underline{1}$

$p(x) = x + c_2 x^2$ kan

i vilken? derivatan ska vara mer lik $p''(0) = f''(0) \Rightarrow \underline{c_2} = -\sin 0 = \underline{0}$

↳ linje!

Grad 3

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = f(0) \Rightarrow c_0 = 0 \\ p'(0) = f'(0) \Rightarrow c_1 = 1 \\ p''(0) = f''(0) \Rightarrow c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Samma som innan!
↳ då x^3 försvinner i derivering bis osv.

$p'''(0) = f'''(0) \Rightarrow 2 \cdot 3 c_3 = D^3 \sin 0 = -\cos 0 = -1$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} =$$

Grad 4? grad 5? P.T.P.

Sats

antag att f kan deriveras $n+1$ gånger i intervall I som innehåller 0 och att $|f^{(n+1)}| \leq M$ på I

Då gäller för alla $x \in I$ att

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ex uppskatta felet då $f(x) = \sin$ $p_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ på $[-\pi, \ldots$

Lösning

ta alltid p_M över p_n om du får välja. Den har gör samma ~~ordning~~ grad.

ordning 3 men 4

4 är bättre då $(4+1)! > (3+1)!$

vi vet $|f^{(5)}(x)| \leq 1 = M$ → det är sinus

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| = |f(x) - p_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120} \ldots$$

Lagranges restterm

Ovan:

$$m \frac{x^3}{3!} \leq f(x) - p_2(x) \leq M \frac{x^3}{3!}$$

där m och M är största och minsta värde för f''' på $[0, \ldots$

kontinuerlig ~~[illegible]~~ lätt ...

omskriv

$$m \leq \frac{f(x) - p_2(x)}{x^3/3} \leq M$$

Sats om mellanliggande värde säger att f''' antar alla värden mellanliggande värd på f''' så kan dra slutsats att det existerar $\xi \in [0, x]$ sådan att

$$\frac{f(x) - p_2(x)}{x^3/3!} = f'''(\xi) \Longleftrightarrow f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$$

någonstans

Lagranges x-term

(Identiskt med antagandet att x är negativ

Lagranges restterms

Antag att $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig på ett intervall som innehåller origo, och x tillhör detta inter

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Anmärkning: praktiskt sätt att skriva ihåg
funktion = Maclaurinpolynom + Rest (fel)
$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$

Allt man ska minnas är $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ enda s

Men börjar $k=0$ osv till n

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(0)}{0!} x^0}_{k=0} + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!}}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{k=2} x^2 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{k=n} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n}}{(n+1)}}_{\text{rest fel}}$$

Ex Gör en uppskattning hur stor fel
Vi gör om vi på $[-1,1]$ ersätter
$f(x) = e^x$ med $P_4(x)$

Obs. enda skillnaden är 0 och ξ.

Lösning $f^{(k)}(x) = e^x$ alltså $f^{(k)}(0) = 1$
konstruera enligt $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ e^{ξ}

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{5!} x^5$$

Alltså $|e^x - P_4(x)| \le \frac{e^{\xi}}{5!}|x|^5 \le \frac{e}{5!}|x|^5$

ξ mellan 0 och $x = [-1,1]$.. (e). max $= 1$

Svagare form av resttermen.

Behöver inte alltid explicita funktioner på ett intervall kring origo (som lagranges restterm)
↳ Räcker iblund funktionen beter sig bra då $x \to 0$
↳ Räcker att veta storleksordning $n+1$ på resttermen, dvs vilken potens x^{n+1} den är.

Kolla lagranges restterm av ordning $n+1$ igen:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = B(x)\, x^{n+1}$$

och betecknar uttrycket framför x^{n+1} för $B(x)$ som vi säger att begränsas kring 0. eftersom $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig på ett intervall som innehåller 0 och ξ ligger

$\Rightarrow$ ~~Alla behöver~~

Denna svagare form → Mindre information
↳ Men tillräcklig för enkla assymptotiska beteende av

Ex $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ t.ex gränsvärde $x \to 0$

Lösning $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ nära 0. dvs $= \left[\frac{\sin x}{x^3} - \frac{x}{x^3}\right]$

$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$

$\approx 1 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \approx 0(?)$

Nej.

Maclaurin.

Hur långt approx

$\sin x = x + B_1(x)\, x^3.$

x^2 där. ... behöver x^3 där
↳ varför x^3 ⇒ bra för den första... tror jag

en första ordn. Ordning 2 ⇒ 1.

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_4} + \frac{B_2(x)\, x^5}{n+1}$$

utveckla till 2, 4, 6 eller högre.
↳ P.T.P.

$\sin x \ldots P_6 + B_3(x)\, x^7$

Taylorutveckling

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$ (mc laurin men man har flyttat till punkt a)

Mål: Skriv om till mclaurin.

$f(x) = \sin x$: $x = 1$ $t = x - 1$

$g(t) = \sin(1+t)$

ex: $\ln(1+x) = \ln(1+1+t) = \underbrace{\ln(2+t)}_{\text{inte standard}} = \ln(2\cdot(1+t/2))$

$= \ln 2 + \ln(1 + t/2) = \ln 2 + \ln(1+z)$

ser ut som mclaurin? $z = t/2$

Restterm: Samma:

Ⓐ $$\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ β ligger mellan a & x.

Note. e^{1+x} ($t = 1+x$) Nej!: Man bevarar inte nollan.

$e^t \to e^0 = 1 \neq e^{1+x} \to e^{1+0} = e$

... Tänk mer på det

Beräkna: $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^n}{(2n)!}$$ påminner om $(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ med $x = 2$

vad påminner det om? jag behöver lära mig alla mina termer

Svar: $\cos(x)$: två.

Svar: $\cos(2)$

Ex Beräkna $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ med fel mindre än 0.0001

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}_{P_n} + \underbrace{(-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}}_{\text{rest.}}$$

$= R_{2n}$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} = \underbrace{\int_0^1 P_n}_{\text{lätt att beräkna}} + \underbrace{\int_0^1 R}_{\text{max } 0.0001}$$

bra metod. behöver inte ta med funktioner vi kan ta deras begränsning

från innan:

$$\int_0^1 R_{2n}\,dx \le \int_0^1 |R_{2n}|\,dx \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx$$

$$\frac{x^{2n}}{(\dots)} \quad \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \le 0.0001 \quad \text{P.T.P}$$

Taylors formel

Antag att $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig i omgivning av
Då gäller det för x att (se ‖ på förra sida

Ex Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 i $x=1$ samt resttermen för $f(x) = 1 - x + x^3$

Lösning: $1 - x + x^3 = P_2(x) + R_3(x)$

$P_2(x) = 1 - x$ (?) $\Rightarrow$ Nej! Det är ett maclaurinpolynom!

$f(x) = 1 - x + x^3 \Rightarrow f'(x) = -1 + 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x)$

$$f(x) = \underbrace{f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2}_{\text{ordning } 2} + \frac{f'''(\beta)}{3!}(x-1)^3$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

Maclaurinserier.

Antag att f har derivator av alla ordningar.

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Sett tidigare att approximationen blir bättre än n blir större. Vad händer $n \to \infty$

- konvergerar approximationen mot funktionen?
- kan man beskriva alla x så $P_n(x) \to f(x)$ då $n \to \infty$
  - ↳ Detta är samma sak som $R_{n+1}(x) \to 0,\ n \to \infty$ (då $|f(x) - P_n(x)| = R_{n+1}(x)$)

Så kolla resttermen: $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

Lemma

För fixt x gäller $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,\ n \to \infty$