Розділ IV. Логічні числення

Логіка – наука про правильні міркування, про засоби та методи пізнання за допомогою міркувань. Слово "логіка" походить від давньогрецького "логос": "поняття", "розум", "міркування". Логіка як наука про правильні міркування була закладена у Давній Греції Аристотелем. Він розглянув конкретні види тверджень, які назвав **силогізмами**. А саме, Аристотель розглянув так звані категоричні твердження чотирьох видів:

- всі А мають властивість В (всі А суть В);
- деякі А мають властивість В (деякі А суть В);
- всі А не мають властивість В (всі А суть не В);
- деякі А не мають властивості В (деякі А суть не В)

та зафіксував всі випадки, коли із засновків такого вигляду виводяться наслідки одного з цих же видів.

Наприклад, "Всі люди смертні. Сократ – людина. Відповідно, Сократ смертний". Це міркування правильно, тому що підходить під один з типів силогізмів Аристотеля.

На протязі багатьох століть логіка розвивалась як частина філософії. Тільки в кінці 19-го сторіччя з появою булевої алгебри почався бурний розвиток математичної (формальної) логіки. На сьогоднішній день розрізняють традиційну логіку та формальну математичну логіку.

Логіка, вивчаючи правильні міркування, оперує поняттями істинності та хибності. Правильні міркування або висловлювання є істинними, неправильні – хибними. Методологічні основи формальної логіки полягають у виконання деяких принципів.

Принцип тотожності. Істинність фактів, які лежать в основі висловлювань та міркувань, встановлюється на основі дійсності, відомих законів, спостережень. Якщо істинність якого-небудь факту встановлена, то вона не піддається сумніву і не змінюється у процесі міркування. Це означає також, що один й той самий термін використовується завжди в одному й тому самому сенсі.

Принцип несуперечливості. Цей принцип означає, що, стверджуючи що-небудь, неможливо заперечувати теж саме. Один й той самий факт (висловлювання) не може бути одночасно істинним та хибним.

Наприклад, висловлювання Сократа "Я знаю, що нічого не знаю" суперечливе, так як одночасно стверджує і заперечує один й той самий факт: якщо Сократ знає, що він нічого не знає, то він не знає також й цього. Згідно принципу несуперечливості, з розгляду вилучаються такі висловлювання, істинність або хибність яких не може бути встановлена.

Принцип достатності засновків. Довільне висловлювання може бути обґрунтоване, тобто істинність твердження не можна приймати на віру. Якщо твердження виводиться з яких-небудь суджень, даних, фактів – засновків, то їх має бути достатньо для встановлення істинності твердження.

Логіку застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи й засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій.

Тема 14. Формальні системи

14.1. Логіка висловлювань

Твердження або висловлювання – це думка, в якій стверджується наявність або відсутність яких-небудь фактів або зв'язків між фактами.

<u>Означення 14.1.</u> **Просте висловлювання** – це просте розповідне речення, про яке можна сказати, що воно є або істинним, або хибним, але й не те та інше одночасно.

Прикладами висловлювань є:

1. Сніг білий.

2. Лондон – столиця України.
3. Земля – третя планета від Сонця.
4. На вулиці йде дощ.

Перші три висловлювання є істинними або хибними відносно незалежно від обставин, під час яких вони стверджуються. Для визначення істинності четвертого висловлювання треба мати додаткові знання: виглянути на вулицю.

Значення "істина" чи "хибність", яких набуває висловлювання, називають його **значеннями істинності**. Значення "істина" позначають буквою T (від англ. "*truth*" – істина), а "хибність" – буквою F (від англ. "*false*" – хибність). Для позначення висловлювань використовують літери латинського алфавіту (з індексами або без), які називаються **пропозиціональними символами**, **атомарними формулами** або **атомами**: A, B, C,…

Складні висловлювання складаються з простих за допомогою логічних операцій: заперечення ($\neg$), кон'юнкції (& або $\wedge$), диз'юнкції ($\vee$), імплікації ($\rightarrow$), еквівалентності (~ або $\equiv$). Символи операцій називають **пропозиційними зв'язками**. Істинність або хибність складного висловлювання залежить від істинності або хибності простих висловлювань, що входять до нього, а також тим способом, яким вони комбінуються, тобто зв'язками, які використовуються для побудови складного висловлювання.

Хоча читачеві вже відомі з попередніх тем властивості цих операцій та як вони визначаються через таблиці істинності, але не буде зайвим навести ці таблиці ще раз (використовуючи вже нові позначення).

A	B	$\neg A$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\rightarrow B$	$A\sim B$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Табл. 14.1. Пропозиційні зв'язки

За допомогою зв'язки заперечення зі стверджуючого висловлювання отримується заперечуюче. Наприклад, якщо висловлювання A – "горобець – птах" істинно, то висловлювання $\neg A$ – "горобець – не птах" – хибне, а висловлювання $\neg\neg A$ – "Невірно, що горобець не птах" еквівалентне висловлюванню "горобець – птах".

Кон'юнкція $A\wedge B$, яка відповідає сполучникам "і", "та", істинна тільки в тому випадку, коли істинні обидва висловлювання, що входять до її складу. Наприклад, твердження "найбільше місто України, Київ (A), є її столицею (B)" можна записати як $A\wedge B$. Висловлювання "на вулиці йде дощ (A) з сильним вітром (B)" також виражається формулою $A\wedge B$. Кон'юнкція комутативна, тому висловлювання "на вулиці сильний вітер (B) та дощ (A)", яке виражається формулою $B\wedge A$, еквівалентне попередньому. Але, в природних мовах подібні висловлювання не завжди еквівалентні, наприклад, висловлювання "я пішов в театр (A) і зустрів друга (B)" та "я зустрів друга (B) і пішов в театр (A)", які еквівалентні в силу комутативності кон'юнкції, швидше за все, різні, тому що описують ситуації, у яких неявно представлена часова послідовність подій. Для опису таких ситуацій засобів логіки висловлювань недостатньо.

Диз'юнкція $A\vee B$, відповідає сполучнику "або", істинна в будь-якому випадку, коли істинно хоча б одне висловлювання, яке входить до неї, і хибна тільки тоді, коли обидва висловлювання хибні. Наприклад, висловлювання "два помножити на два – чотири (A) або п'ять (B)" виражається формулою $A\vee B$ і є істинним.

Імплікацію як логічну операцію називають також умовним реченням. Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв'язок обов'язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: "якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку". Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань, вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають всіх завдань, то вони можуть отримати оцінку "відмінно", а можуть й не отримати її залежно від інших обставин.

Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку "відмінно", то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації $A \to B$ припущення A "Ви виконаєте всі завдання" істинне, а її висновок B "Ви отримаєте відмінну оцінку" хибний.

Розуміння імплікації в логіці дещо відрізняється від його розуміння в природній мові. Наприклад, "якщо буде сніжна зима, то ми поїдемо в Карпати кататися на лижах" – умовне речення, уживане в звичайній мові. Воно залишається істинним до того моменту, коли настане сніжна зима, а ми не поїдемо в Карпати. За означенням імплікації умовне речення "якщо сьогодні четвер, то 2+3 = 5" істинне, бо висновок імплікації істинний. При цьому значення істинності припущення в імплікації тут не має відношення до висновку. Імплікація "якщо сьогодні четвер, то 2+3 = 6" істинна щодня, крім четверга, хоча висловлювання 2+3 = 6 хибне.

Еквівалентність $A \sim B$ стверджує рівнозначність (рівносильність, тотожність) двох висловлювань A та B. Вона істинна тоді, коли істинність висловлювань A та B співпадає. Наприклад, висловлювання "тварина є птахом (A) тоді і тільки тоді, коли в неї є крила (B)" виражається формулою $A \sim B$.

За допомогою логічних зв'язків складні висловлювання можна записати у вигляді формули, яку називають пропозиційною формою.

Означення 14.2. (1) Кожна пропозиційна літера (атом) є формулою. (2) Якщо A та B – формули, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$. (3) Інших формул немає.

Побудувавши формулу логіки висловлювань, ми відволікаємося від її змісту та оперуємо тільки поняттями істинності та хибності.

Приписування пропозиційним літерам їх значень істинності називається **інтерпретацією** формули. Множина всіх інтерпретацій формули утворює її **таблицю істинності**. Якщо виконати відображення $0 \Leftrightarrow$F та $1 \Leftrightarrow$T, то кожній пропозиційній зв'язці буде відповідати булева операція, а кожній формулі логіки висловлювань – булева формула, відповідно, логіка висловлювань є інтерпретацією булевої алгебри. У зв'язку з цим в ній зберігаються всі аксіоми і теореми булевої алгебри, враховуючи представлення формул логіки висловлювань у вигляді ДДНФ та ДКНФ.

Означення 14.3. Тотожньо істинна формула називається **тавтологією** або **загальнозначущою**. Тотожньо хибна формула називається **суперечністю**. Формула, яка приймає істинне значення хоча б на одній своїй інтерпретації, називається **виконуваною**. Дві формули називаються **еквівалентними**, якщо їх таблиці істинності співпадають.

Якщо формула A є тавтологією, то це позначають $\vdash A$. Очевидно, що якщо A – тавтологія, то $\neg A$ – суперечність.

14.2. Логічне слідування

Означення 14.4. Якщо A та B – формули, то кажуть, що B **логічно слідує** з A, або з A **логічно випливає** B, якщо всюди де A приймає істинне значення, B також приймає істинне значення. Це позначається як $A \vdash B$ або $A \Rightarrow B$.

Кажуть, що логічне слідування **зберігає істинність**.

Теорема 14.1. Логічне слідування $A \vdash B$ виконується тоді і тільки тоді, коли формула $A \to B$ – тавтологія.

Доведення. Нехай логічне слідування $A \vdash B$ виконується. Це означає, що на всіх інтерпретаціях, на яких формула $|A|$ = T, формула $|B|$ = T, відповідно, $|A \to B|$ = T. Якщо формула $|A|$ = F, то $|A \to$B$|$ = T незалежно від значень B, відповідно, формула $A \to B$ – тавтологія.

Припустимо тепер, що формула $A \to B$ – тавтологія. Тоді не існує такої інтерпретації, на якій $|A \to B|$ = F. Відповідно, якщо формула $|A|$ = T, то й $|B|$ = T, що відповідає означенню логічного слідування, тобто $A \vdash B$. ►

Означення 14.5. Формула B логічно слідує з формул $A_1,...,A_n$, всюди де $A_1,..., A_n$ приймають істинні значення одночасно, формула B також приймає істинне значення. Це позначається $A_1,...,A_n \vdash B$.

Теорема 14.2. (1) $A_1,...,A_n \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли $A_1\wedge...\wedge A_n \to B$ – тавтологія. (2) $A_1,...,A_n \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли $A_1\wedge...\wedge A_n\wedge\neg B$ суперечність.

Доведення. Частина (1) доводиться аналогічно попередній теоремі. Доведемо частину (2). З частини один маємо, що $A_1,...,A_n \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли $A_1\wedge...\wedge A_n \to B$. За означенням тавтології, маємо, що $\neg(A_1\wedge...\wedge A_n \to B)$ – суперечність. Звідси маємо:

$\neg(A_1\wedge...\wedge A_n \to B) = \neg(\neg(A_1\wedge...\wedge A_n) \vee B) = \neg\neg(A_1\wedge...\wedge A_n) \wedge \neg B = A_1\wedge...\wedge A_n\wedge\neg B$ ►

Означення 14.6. Якщо $A \vdash B$ і $B \vdash A$, то формула A **логічно еквівалентна** формулі B. Це позначається як $A\Leftrightarrow B$ або $A\equiv B$.

Якщо формула A логічно еквівалентна B, то $A\sim B$ – тавтологія.

14.3. Тавтології

Наступні теореми о тавтологіях надають можливості отримувати нові тавтології з доведених раніше.

Теорема 14.3 (правило **modus ponens**). Якщо A – тавтологія і $A\to B$ – тавтологія, то B – тавтологія, тобто якщо $\vdash A$ та $\vdash A\to B$, то $\vdash B$.

Доведення. Припустимо, що на деякій інтерпретації $|B|$ = F. Тоді $|A\to$F$|$ = T на тій же інтерпретації (за умовами теореми). Відповідно, $|A|$ = F, що неможливо, так як A – тавтологія. ►

Правило modus ponens (скорочено M*P*) встановлює логічне слідування $A, A\to B \vdash B$ і має назву **правила відділення**.

Правило M*P* виражає елементарний акт дедукції. Імплікацію $A\to B$, яка за означенням має зміст "якщо A, то B", можна інтерпретувати, як правило, в якому A є "засновком", а B – "наслідком". Тоді правило MP говорить про те, що наслідок B наступає при виконанні умови A, тобто при істинності засновку. Наприклад, формула $A\to B$ може виражати таке правило: "якщо бачиш зеленого чоловічка, то можна переходити дорогу". Ми чекаємо моменту, щоб побачити зеленого чоловічка на світлофорі, тобто неявно використовуємо правило MP: коли засновок стає істинним (зелений чоловічок), то істинний і наслідок (можна переходити дорогу). Тим самим ми виконуємо елементарний акт дедукції: з істинності засновків ми виводимо істинні наслідки. Дійсно, цей вивід правильний тільки в тому випадку, коли правило $A\to B$ істинно.

Теорема 14.4 (правило підстановки). Якщо A – тавтологія, що містить пропозиційні змінні $x_1,…,x_n$, то формула B, яка отримується з A підстановкою формул $A_1,...,A_n$ замість кожного входження $x_1,…,x_n$ відповідно, також буде тавтологією.

Доведення. Нехай задано істинний кортеж значень пропозиційних літер, що входять у B. Формули $A_1,...,A_n$ для цього кортежу приймуть деякі значення $\delta_1,...,\delta_n$, де δ_i є T або F. Якщо такі значення надати пропозиційним літерам $x_1,…,x_n$, то значення формули A співпаде зі значенням формули B. Так як A – тавтологія, то значення B на цьому кортежі буде T. Таким чином B на довільному істинному кортежі буде приймати значення T. Відповідно, B – тавтологія. ►

Наприклад, формула $C\to(D\to C)$ – тавтологія. Підставимо $E\vee C$ замість C, отримуємо нову тавтологію: $\vdash E\vee C \to (D\to E\vee C)$. Таким чином, кожну тавтологію можна розглядати як схему, з якої за допомогою підстановки можна отримувати нескінченну множину тавтологій.

Теорема 14.5 (правило еквівалентної заміни). Якщо B отримується з A підстановкою формули B_1 замість одного або декількох входжень підформули A_1 до A, то $((A_1\sim B_1) \to (A\sim B))$ є тавтологія, і, відповідно, якщо A_1 та B_1 логічно еквівалентні, то A та B також логічно еквівалентні.

Іншими словами, якщо є тавтологія A, то в ній є підформула A_1, і якщо замінити A_1 на еквівалентну їй формулу B_1, то отримана формула B буде еквівалентна A.

Доведення. Розглянемо довільний кортеж пропозиційних літер, що входять до A, B, A_1, B_1. Якщо при цьому кортежі A_1 та B_1 мають різні значення, то $|A_1 \sim B_1| = \mathrm{F}$ і, відповідно, $((A_1 \sim B_1) \to (A \sim B))$ набуде значення Т. Якщо ж A_1 та B_1 набувають однакових значень, то однакові значення істинності приймуть A та B, так як B відрізняється від A тільки тим, що деякі входження підформули A_1 замінені в ній на B_1, яка має теж саме значення істинності. Відповідно, в цьому випадку, якщо $|A_1 \sim B_1| = \mathrm{T}$, то й $|A \sim B| = \mathrm{T}$, і $((A_1 \sim B_1) \to (A \sim B))$ є тавтологія. ►

Наприклад., у тавтології $C \to (D \to C)$ замінимо підформулу $D \to C$ на еквівалентну їй формулу $\neg D \vee C$, отримаємо нову тавтологію $C \to (\neg D \vee C)$.

14.4. Формальні системи та аксіоматичний підхід

Формальні системи – це системи операцій над об’єктами, які розуміються як послідовності символів (тобто як слова у фіксованих алфавітах). Самі операції також є операціями над словами. Термін “формальний” підкреслює, що об’єкти й операції над ними розглядаються суто формально, без будь-яких змістовних інтерпретацій символів. Передбачається, що між символами не існує жодних зв’язків і відношень, крім тих, які явно описуються засобами самої формальної системи.

Історично поняття формальної системи було розроблено у період інтенсивних досліджень в галузі основ математики для формалізації логіки та теорії доведень. Зараз цей апарат широко використовується при створенні спеціальних числень для розв’язання конкретних прикладних задач.

Формальна система має бути такою, яка алгоритмічно реалізується. Мається на увазі, що для пошуку будь-якого виведення у формальній системі повинен не тільки існувати алгоритм виведення, але цей алгоритм має ще допускати реалізацію на існуючих ЕОМ. Інакше формальна система залишиться абстрактною побудовою.

Таблиці істинності дають змогу відповісти на багато питань, що стосуються формул логіки висловлювань (наприклад, на питання про рівнозначність двох формул). Однак складніші питання логіки висловлювань вже не можуть бути вирішені за допомогою таблиць істинності. Для розв’язання цих проблем використовується інший спосіб опису – аксіоматичний, при якому застосовуються формальні (аксіоматичні) теорії – конкретні випадки формальних систем.

<u>Означення 14.7.</u> Формальна теорія S – це:

1. множина A символів, які утворюють алфавіт;
2. множина Φ слів алфавіту A, які називаються формулами;
3. підмножина B формул, $B \subset \Phi$, які називаються аксіомами;
4. множина P відношень R на множині формул, $R \in P$, $R \subset \Phi^{n+1}$, які називаються правилами виведення.

Множина символів A може бути скінченною або нескінченною. Зазвичай для утворення символів використовується скінченна множина літер, до яких, якщо необхідно, приписують в якості індексів натуральні числа.

Множина формул Φ звичайно задається індуктивним означенням, наприклад, за допомогою породжувальної формальної граматики. Як правило, ця множина нескінченна. Множини A та Φ у сукупності визначають мову або сигнатуру формальної системи.

Множина аксіом B може бути скінченною або нескінченною. Якщо множина аксіом нескінченна, то, як правило, вона задається за допомогою скінченної множини схем аксіом та правил породження конкретних аксіом зі схеми аксіом. Зазвичай аксіоми поділяються на два види: **логічні аксіоми** (загальні для цілого класу формальних теорій або систем) та **нелогічні** (або **власні**) аксіоми (які визначають специфіку та зміст конкретної теорії або системи).

Множина правил виведення P зазвичай скінчена.

<u>Означення 14.8.</u> Нехай $F_1,\ldots,F_n$, G – формули теорії S, тобто $F_1,\ldots,F_n, G \in \Phi$. Якщо існує таке правило виведення R, $R \in P$, що $(F_1,\ldots,F_n, G) \in R$, то говорять, що формула G

безпосередньо виводиться з формул $F_1,\ldots,F_n$ за правилом виведення R. Зазвичай цей факт записують наступним чином:

$$\frac{F_1,...,F_n}{G}R,$$

де формули $F_1,\ldots,F_n$ називаються засновками, а формула G – висновком правила R. Наприклад, формула $D\to C$ виводиться з формул $C\to(D\to C)$ та C за правилом виведення MP:

$$\frac{C\to(D\to C),\,C}{D\to C}\,\mathrm{MP}.$$

Позначення правила виведення справа від лінії, яка розділяє засновки та висновок, часто опускають, якщо воно зрозуміло з контексту.

Означення 14.9. Виведенням формули G в формальній теорії S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i ($i<k$) є або аксіомою ($E_i\in B$), або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул. В цьому випадку формула G називається **теоремою** теорії S і позначається це $\vdash_S G$. Індекс формальної теорії можна опускати, коли зрозуміло до якої теорії відноситься виведення.

Означення 14.10. Виведенням формули G з множини формул Γ в формальній теорії S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i ($i<k$) є або аксіомою ($E_i\in B$), або належить до множини Γ ($E_i\in\Gamma$), або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул. Елементи Γ називаються посилками виведення або гіпотезами. Цей факт позначається $\Gamma\vdash_S G$.

Розглянемо властивості виведень з множини гіпотез.

1. Якщо $\Gamma\vdash A$ та $\Gamma\subset\Delta$, то $\Delta\vdash A$.

Ця властивість називається властивістю **монотонності виведення**. Вона означає, що формула A буде виводитися навіть якщо до множини гіпотез Γ, з яких виводиться формула A, додати інші гіпотези, тобто розширити множину гіпотез Γ до Δ.

2. $\Gamma\vdash A$ тоді й тільки тоді, коли існує $\Delta\subseteq\Gamma$, таке що $\Delta\vdash A$. Це властивість **повноти** множини гіпотез: для того, щоб формула B виводилась з множини гіпотез Γ, необхідно і достатньо, щоб у Γ існувала підмножина $\Delta\subseteq\Gamma$, з якої виводиться формула A. Іншими словами, не всі гіпотези з заданої множини Γ обов'язково мають використовуватися підчас побудови виводу, – деякі можуть бути зайвими, але заданих гіпотез має бути достатньо для виведення A.

3. Якщо $\Delta\vdash A$ і для кожного $B_i\in\Delta$, $\Gamma\vdash B_i$, то $\Gamma\vdash A$. Це властивість **транзитивності** відношення виводимості. Воно дозволяє використовувати раніше доведені теореми (виведення), не повторюючи всього переліку формул, які складають доведення (виведення). Тому раніше виведені теореми можуть використовуватись в інших виведеннях як схеми, в яких кожне входження змінної (пропозиційної літери) може замінюватись довільною формулою.

14.5. Властивості формальних теорій

Означення 14.11. **Інтерпретація** формальної теорії S в області інтерпретації M називається функція I: $S\to M$, яка кожній формулі формальної системи S однозначно зіставляє деяке змістовне висловлювання відносно об'єктів множини M. Це висловлювання може бути істинним або хибним (або не мати значення істинності). Якщо відповідне висловлювання є істинним, то кажуть, що формула **виконується** в даній інтерпретації.

Означення 14.12. Інтерпретація I називається **моделлю** множини формул N, якщо всі формули цієї множини виконуються в інтерпретації I. Інтерпретація I називається моделлю формальної теорії S, якщо всі теореми цієї теорії виконуються в інтерпретації I (тобто всі формули що виводяться є істинними в даній інтерпретації).

Тепер наведемо означення фундаментальних властивостей формальних теорій. Наявність або відсутність цих властивостей в певній формальній теорії надає можливість вирішувати, чи є дана теорія практично корисною.

Означення 14.13. Формальна теорія S називається **семантично несуперечливою**, якщо жодна її теорема не є суперечністю.

Таким чином, формальна теорія підходить для опису тих множин, які є її моделями. Модель для формальної теорії S існує тоді й тільки тоді, коли S семантично несуперечлива.

Означення 14.14. Формальна теорія S називається **формально несуперечливою**, якщо в ній не виводяться одночасно формули A та $\neg A$. Теорія S формально несуперечлива тоді й тільки тоді, коли вона семантично несуперечлива.

Означення 14.15. Нехай множина M є моделлю формальної теорії S. Формальна теорія S називається **повною** (або **адекватною**), якщо кожному істинному висловлюванню M відповідає теорема теорії S.

Також розрізнюють повноту у широкому та вузькому сенсі. Теорія є **повною у широкому сенсі**, якщо довільній формулі A теорії відповідає таке висловлювання моделі, яке є або істинне, або хибне. Тоді або A, або $\neg A$ є істинним і має виводитись у формальній теорії, тобто довільна формула A теорії або її заперечення $\neg A$ є теоремою формальної теорії.

Теорія, яка одночасно несуперечлива та повна, є максимальною в тому сенсі, що додавання до неї в якості аксіоми довільної формули, яка не є її теоремою, призводить до суперечності теорії. Ця властивість формальних теорій має назву **повноти у вузькому сенсі**.

Означення 14.16. Якщо для множини M існує формальна повна несуперечлива теорія S, то M називається такою, що **формалізується**.

Означення 14.17. Система аксіом формально несуперечливої теорії S називається **незалежною**, якщо жодна з аксіом не виводиться з решти за правилами виведення теорії S.

Властивість незалежності системи аксіом не є обов’язковою для формальних теорій, – це питання лаконічності та компактності засобів формальної теорії.

Означення 14.18. Формальна теорія S називається **розв’язуваною**, якщо існує алгоритм, який для будь-якої формули теорії визначає, чи є ця формула теоремою теорії. Формальна теорія S називається **напіврозв’язуваною**, якщо існує алгоритм, який для довільної формули A теорії може дати відповідь “так”, якщо A є теоремою теорії, і, можливо, не дати жодної відповіді, якщо A не є теоремою (тобто алгоритм застосовується не до всіх формул).