# Тема 19. Біноміальні коефіцієнти. Розбиття

## 19.1. Біном Ньютона

Кількість сполучень $C_n^r$ називають також **біноміальними коефіцієнтами**. Зміст цієї назви встановлює наступна теорема, відома також як формула **бінома Ньютона**.

Теорема 19.1 (біноміальна). Нехай $x$ та $y$ – змінні, $n$ – додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j .$$

*Доведення.* Будемо проводити доведення за методом математичної індукції. Доведемо для $n = 1$:

$$(x+y)^1 = x+y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1 = C_1^0x^1y^0 + C_1^1x^0y^1 = \sum_{j=0}^{1} C_1^j x^j y^{1-j} .$$

Припустимо, що рівність виконується для $n-1$ і доведемо її для довільного $n$.

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} xC_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} yC_{n-1}^j x^j y^{n-j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^{j+1} y^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} x^j y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j y^{n-j} =$$

$$= C_{n-1}^0 x^0 y^n + \sum_{j=1}^{n-1} (C_{n-1}^{j-1} + C_{n-1}^j) x^j y^{n-j} + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j}.$$

Аналогічно доводиться друга рівність. ►

Наслідок 1. $\sum_{j=0}^{n} C_n^j = 2^n$ .

*Доведення.*

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 1^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \ .►$$

Наслідок 2. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j = 0$.

*Доведення.*

$$0^n = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \ .►$$

Наслідок 3. $(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^j y^{n-j}$ .

*Доведення.* Залишаємо читачеві на самостійну роботу. ►

Наприклад, запишемо розклад вигляду $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою отримаємо:

$$(x+y)^4 = C_4^0x^4y^0 + C_4^1x^3y^1 + C_4^2x^2y^2 + C_4^3x^1y^3 + C_4^4x^0y^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти мають цілий ряд важливих властивостей, які встановлює наступні теореми.

Теорема 19.2. $\sum_{j=0}^{n} jC_n^j = n2^{n-1}$.

*Доведення.* Розглянемо наступну послідовність, яка складається з чисел 1,…,$n$. Спочатку виписані всі підмножини довжиною 0, потім всі підмножини довжиною 1 і т.д. Маємо $C_n^j$ підмножин потужності $j$, де кожна підмножина має довжину $j$, таким чином всього в цій послідовності $\sum_{j=0}^{n} jC_n^j$ чисел. З іншого боку, кожне число $x$ входить в цю послідовність $2^{|\{1,\ldots,n\}\setminus\{x\}|} = 2^{n-1}$ разів, а всього чисел $n$. ►

<u>Теорема 19.3.</u> $C_{n+m}^k = \sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$ .

*Доведення.* $C_{n+m}^k$ - це число способів вибрати $k$ предметів з $n$+$m$ предметів. Предмети можна вибирати в два прийоми: спочатку вибрати $j$ предметів з перших $n$ предметів, а потім вибрати недостатні $k-j$ предметів з $m$ предметів, які залишились. Звідси загальне число способів вибрати $k$ предметів складає $\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$ .►

З твердження 18.4 $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ випливає ефективний спосіб рекурентного обчислення значень біноміальних коефіцієнтів, який можна зобразити в графічному способі, відомий як **трикутник Паскаля**.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

В цьому рівносторонньому трикутнику кожне число (окрім одиниць збоку) є сумою двох чисел, які стоять над ним. Число сполучень $C_n^r$ знаходиться в ($n$+1) рядку на ($r$+1) місці.

## 19.2. Поліноміальна теорема

Як узагальнення біному Ньютона розглянемо вираз у вигляді $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

<u>Теорема 19.4</u> (поліноміальна).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

*Доведення.* Запишемо $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ у вигляді добутку $n$ співмножників і розкриємо дужки. Коефіцієнт при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ дорівнює кількості перестановок із повтореннями таких, що елемент $x_1$ міститься в кожній з них $n_1$ разів, $x_2$ – $n_2$ разів і т.д., а всього елементів $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. ►

Отриману формулу називають **поліноміальною**. Вона, зокрема, дає змогу доводити деякі властивості чисел $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Зазначимо дві з них.

<u>Наслідок 1.</u> Нехай $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$; тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = k^n.$$

<u>Наслідок 2.</u>

$$P_n(n_1, n_2,\ldots,n_k) = P_{n-1}(n_1-1, n_2,\ldots,n_k) + P_{n-1}(n_1, n_2-1,\ldots,n_k) + \ldots + P_{n-1}(n_1, n_2,\ldots,n_k-1).$$

*Доведення.* Цей вираз отримуємо з теореми 19.4, помноживши обидві частини поліноміальної формули для $n-1$ на $(x_1+x_2+\ldots+x_k)$ та порівнявши коефіцієнти при однакових доданках. ►

## 19.3. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах, де $n$ – ціле невід'ємне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, що $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$, можна отримати сполучення з повтореннями з $k$ елементів по $n$, а саме: елементів першого типу – $x_1$ одиниць, другого – $x_2$ одиниць і т.д. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з $k$ елементів по $n$, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівнянню $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює

$$\tilde{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Наприклад, знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 11$. Безпосереднє використання попередньої формули дає:

$$\tilde{C}_3^{11} = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = 78.$$

Кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ у цілих невід'ємних числах можна визначити й тоді, коли на змінні накладено певні обмеження.

Наприклад, знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 11$ за умов $x_1\geq 1$, $x_2\geq 2$, $x_3\geq 3$. Очевидно, що ця задача еквівалентна рівнянню $x_1+x_2+x_3 = 5$ без обмежень. Справді, потрібно взяти щонайменше один елемент першого типу, два елементи другого типу, три елементи третього типу – разом $1 + 2 + 3 = 6$ елементів; отже, $11 – 6 = 5$ елементів залишається для довільного вибору,

$$\tilde{C}_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21.$$

Визначимо кількість розв'язків нерівності $x_1+x_2+x_3 \leq 11$ у цілих невід'ємних числах. Уведемо допоміжну змінну $x_4$, яка може набувати цілих невід'ємних значень і перейдемо до еквівалентної задачі: визначити кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4 = 11$ у цілих невід'ємних числах. Отже,

$$\tilde{C}_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!\cdot 3!} = 364.$$

### 19.4. Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднані множин. Для двох множин справджується формула

$$|A\cup B| = |A| + |B| – |A\cap B|.$$

Наприклад, знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та ділять на 7 або на 11. Позначимо як $A$ множину чисел, які діляться на 7, $B$ – множину чисел, які діляться на 11. Тоді

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7\cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об'єднанні ускладнюється:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| – |A\cap B| – |A\cap C| – |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

<u>Теорема 19.1</u> (принцип включення-виключення). Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{1\leq i\leq n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j| +$$
$$+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$$

*Доведення*. Достатньо довести, що кожний елемент в об'єднанні множин ураховано в правій частині рівності точно один раз. Припустимо, що елемент $a$ належить рівно $r$ множинам з $A_1, A_2, \ldots, A_n$, де $1\leq r\leq n$. Тоді цей елемент ураховано $C_r^1$ разів у $\sum_{1\leq i\leq n}|A_i|$, $C_r^2$ разів у $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}|A_i\cap A_j|$; загалом його враховано $C_r^m$ разів під час сумування членів, які містять перетин $m$ множин $A_i$. Отже, елемент $a$ враховано точно $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + (-1)^{r+1}C_r^r$ разів у виразі в правій частині рівності. За властивістю біноміальних коефіцієнтів $C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - ... + (-1)^r C_r^r = 0$. Отже, $C_r^0 = C_r^1 + C_r^2 - ... + (-1)^{r+1}C_r^r$, але $C_r^0 = 1$ і тому $C_r^1 + C_r^2 - ... + (-1)^{r+1}C_r^r = 1$. Це й означає, що кожний елемент об'єднання множин ураховано в правій частині рівності точно один раз.

Зазначимо, що формула включення-виключення містить $2^n$–1 доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1, A_2, …, A_n\}$.►

Принцип включення-виключення можна розглянути в альтернативній формі. Ця форма є корисною, коли потрібно знайти кількість елементів заданої множини $A$, які не мають жодної з $n$ властивостей $\alpha_1, \alpha_2, …, \alpha_n$.

Уведемо такі позначення:

- $A_i \subset A$ – підмножина елементів, які мають властивість $\alpha_i$;
- $N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, …, \alpha_{ik})$ – кількість елементів множини $A$, які водночас мають властивості $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, …, \alpha_{ik}$;
- $N(\overline{\alpha}_{i1}, \overline{\alpha}_{i2}, ..., \overline{\alpha}_{ik})$ – кількість елементів множини $A$, які не мають жодної з властивостей $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, …, \alpha_{ik}$;
- $N$ – кількість елементів у заданій множин $A$.

Тоді очевидно,

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

За принципом включення-виключення можна записати

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(\alpha_i, \alpha_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + ... + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Ця формула подає принцип включення-виключення в **альтернативній формі**.

Наприклад, знайдемо кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3 = 11$ у невід'ємних цілих числах у разі обмежень $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 6$.

Розглянемо альтернативі властивості.

- $\alpha_1$: $x_1 \ge 4$;
- $\alpha_2$: $x_2 \ge 5$;
- $\alpha_3$: $x_3 \ge 7$.

Кількість розв'язків, які водночас задовольняють нерівності $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 6$:

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) +$$
$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Далі маємо:

$N = \tilde{C}_3^{11} = C_{13}^{11} = 78$ (загальна кількість розв'язків);

$N(\alpha_1) = \tilde{C}_3^7 = C_9^7 = 36$ (кількість розв'язків, які задовольняють умову $x_1 \ge 4$);

$N(\alpha_2) = \tilde{C}_3^6 = C_8^6 = 28$ ($x_2 \ge 5$);

$N(\alpha_3) = \tilde{C}_3^4 = C_6^4 = 15$ ($x_3 \ge 7$);

$N(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{C}_3^2 = C_4^2 = 6$ ($x_1 \ge 4$ та $x_2 \ge 5$);

$N(\alpha_1, \alpha_3) = \tilde{C}_3^0 = 1$ ($x_1 \ge 4$ та $x_3 \ge 7$);

$N(\alpha_2, \alpha_3) = 0$ ($x_2 \ge 5$ та $x_3 \ge 7$);

$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ ($x_1 \ge 4$ та $x_2 \ge 5$ та $x_3 \ge 7$).

Отже, кількість розв'язків із зазначеними обмеженнями дорівнює

$$N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$

### 19.5. Розбиття. Числа Стірлінга другого роду та числа Белла

Пригадаємо означення розбиття множини з теми 1 (означення 1.10). Сукупність множин $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ називається **розбиттям** множини $A$, якщо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ та $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$.
Підмножини $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ множини $A$ називаються **блоками розбиття**.

Наприклад, якщо $A = \{a, b, c\}$, то є такі розбиття цієї множини на $k$ непорожніх частин:
$k = 1$: $\{\{a,b,c\}\}$ (одне розбиття);
$k = 2$: $\{\{a,b\},\{c\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\}\}$, $\{\{b,c\},\{a\}\}$ (три розбиття);
$k = 3$: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (одне розбиття).

Означення 19.1. Кількість розбиттів $n$-елементної множини на $k$-блоків називається **числом Стірлінга другого роду** і позначається $\Phi(n, k)$. За означенням встановимо:
$\Phi(n, 0) = 0$ при $n>0$?
$\Phi(n, n) = 1$,
$\Phi(0, 0) = 1$,
$\Phi(n, k) = 0$ при $k>n$.

Теорема 19.5. $\Phi(n, k) = \Phi(n-1, k-1) + k\cdot\Phi(n-1, k)$.

*Доведення*. Довільне розбиття множини $A$ на $k$ непорожніх частин можна отримати так:
- із розбиття множини $A\setminus\{a_n\}$ на $(k-1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$ – кількість дорівнює $\Phi(n-1, k-1)$;
- із розбиття множини $A\setminus\{a_n\}$ на $k$ непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента $a_n$ (це можна зробити $k$ способами) – кількість дорівнює $k\cdot\Phi(n-1, k)$.

Звідси випливає, що $\Phi(n, k) = \Phi(n-1, k-1) + k\cdot\Phi(n-1, k)$ ►

За допомогою цієї теореми можна побудувати таблицю для чисел $\Phi(n, k)$.

| $n$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | … |
| 2 | 1 | 1 | | | | | … |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | … |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | … |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | … |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … |

Теорема 19.6 (без доведення). $\Phi(n,k) = \sum_{j=k-1}^{n-1} C_{n-1}^{j} \cdot \Phi(j, k-1)$.

Означення 19.2. Кількість усіх розбиттів $n$-елементної множини називають **числом Белла** і позначають $\Phi(n)$. За означенням:

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(n,k).$$

Теорема 19.7 (без доведення). $\Phi(n+1) = \sum_{j=0}^{n} C_n^{j} \cdot \Phi(j)$.