Тема 11. Мінімальні диз’юнктивні та кон’юнктивні нормальні форми

11.1. Індекс простоти

Якщо всім можливим наборам значень аргументів якої-небудь функції поставити у відповідність такі самі поєднання значень вхідних сигналів якої-небудь системи з невідомою внутрішньою структурою (“чорного ящика”) і якщо при цьому значення функції збігаються зі значеннями вихідних сигналів, то така система реалізує задану логічну функцію або ця функція є законом функціонування системи. Система складається з окремих компонентів – логічних елементів.

Основною метою синтезу є пошук системи за заданим описом її роботи. Одним з основних питань є таке: як для довільної функції алгебри логіки $f(x_1,\ldots,x_n)$ побудувати її мінімальну ДНФ або КНФ. Ця задача називається проблемою мінімізації булевих функцій. Найзрозумілішим є алгоритм, що ґрунтується на переборі, тобто перегляді всіх можливих ДНФ і КНФ функції. Проте ним не можна скористатися практично вже при n=3, а при n=1 та n=2 проблема є тривіальною.

Спочатку знаходять конкретну функцію алгебри логіки, визначену для будь-яких наборів значень аргументів. Після цього функцію подають у будь-якій з двох досконалих форм. Потім здійснюють низку спрощень, що досягається за допомогою різних тотожних перетворень з метою здобуття формули, еквівалентної початковій, але яка реалізується простіше.

При оцінюванні складності приймають коефіцієнт простоти.

Розглянемо функцію

$$A = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3),$$

еквівалентну формулі

$$B = A = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee x_1.$$

При цьому постає завдання вибору форми, найприйнятнішої для практичної реалізації. З цією метою вводиться індекс (коефіцієнт) простоти $L(A)$, що характеризує складність ДНФ (КНФ).

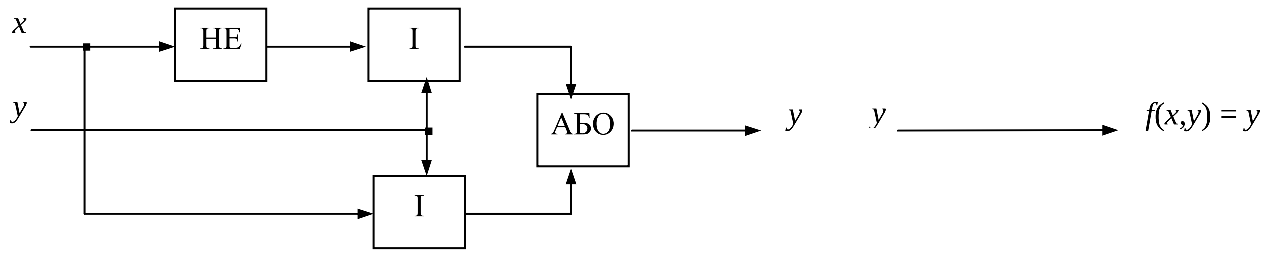
Найчастіше зустрічаються такі типи **коефіцієнтів простоти**:

- $L_1(A)$ – число символів змінних, які зустрічаються в запису ДНФ. Якщо проаналізувати формули A та B, то можна встановити, що $L_1(A) = 15$, а $L_1(B) = 3$, тобто функція B є простішою;
- $L_2(A)$ – число елементарних кон’юнкцій, що входять у функцію A. Для ДНФ A та B очевидно, що $L_2(A) = 5$, а $L_2(B) = 2$, тобто функція B теж є простішою за цим критерієм;
- $L_3(A)$ – число символів інверсій, які зустрічаються в запису ДНФ. Для ДНФ A та B $L_3(A) = 7$, а $L_3(B) = 2$, тобто функція B за цим критерієм є також простішою.

Досконалі ДНФ та КНФ використовуються для первинного подання заданої булевої функції. Однак ці форми є незручними для опису і побудови логічних схем, тому що схеми, що реалізують їх, часто виявляються складними, тобто містять елементи, які можна виключити при синтезі схем.

Наприклад, функція “змінна y” $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$, виходячи з ДДНФ, реалізується на чотирьох елементах, як показано на рис. 11.1,а. Ця функція записується як $f(x,y) = y$ і при побудові схеми за цією формою не потрібно жодного елемента, оскільки вона реалізується відрізком дроту (рис. 11.1,б).

Це свідчить про те, наскільки важливо мати ефективні методи пошуку найраціональніших щодо технічної реалізації форм подання булевих функцій. Тому чергова задача синтезу схем полягає у спрощенні виразів для булевих функцій. Цей етап називається їх мінімізацією. Уведемо деякі означення.



а б

Рис. 11.1. Види схем для функції $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$.

<u>Означення 11.1.</u> ДНФ (КНФ), що реалізує функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$ і має мінімальний індекс L, називається мінімальною відносно L.

Деякі булеві функцію мають кілька мінімальних ДНФ (КНФ).

<u>Означення 11.2.</u> ДНФ (КНФ) функції називається **мінімальною**, якщо кількість символів, які вона містить, буде не більшою, ніж у будь-якої іншої ДНФ (КНФ) тієї самої функції.

Мінімізацією називаються перетворення функції, яке веде до зменшення числа символів, а отже, числа змінних. Мінімізація веде до спрощення алгебраїчного виразу, тобто до спрощення автомату, що описується заданим виразом. Найпростішим є алгебраїчний метод мінімізації. Мінімальні форми також можуть бути знайдені аналітично або за допомогою мінімізаційних карт.

11.2. Скорочена форма

Уведемо поняття накриття для булевих функцій.

<u>Означення 11.3.</u> Функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ **накриває** функцію $g(x_1,\ldots,x_m)$ ($n<m$) на наборі аргументів $(a_1,\ldots,a_n)$, якщо $\forall x_{n+1},\ldots,x_m : g(a_1,\ldots,a_n, x_{n+1},\ldots,x_m) = f(a_1,\ldots,a_n)$.

Досконала ДНФ будується так, що кожна одиниця булевої функції накривається одиницею тільки одного добутку, що є конституентою одиниці. Тому кількість конституент одиниці, які входять у ДДНФ, дорівнює числу наборів, у яких функція дорівнює 1.

Ідея побудови скороченої ДНФ полягає в тому, що в неї включаються елементарні добутки, які накривають своїми одиницями не одну, а кілька одиниць заданої функції.

Наприклад, ДДНФ функції імплікації $f(x,y) = x \rightarrow y$ має вигляд:

$$f(x,y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Кожен із добутків накриває тільки одну одиницю функції – у наборах (0, 0), (0, 1) та (1, 1). Проте елементарний добуток $\bar{x}$ накриє одиницями дві одиниці функції у двох наборах: (0, 0) та (0, 1); елементарний добуток y - також у двох наборах (0, 1) та (1, 1); $\bar{x}$ та y спільно накривають всі одиниці функції, яка внаслідок цього може бути подана як

$$f(x,y) = \bar{x} \vee y .$$

<u>Означення 11.4.</u> Якщо деяка булева функція g дорівнює нулю в тих наборах, у яких дорівнює нулю інша функція f, то говорять, що функція g **входить** у функцію f, тобто функція g входить у функцію f тоді, кола вона накриває нулями всі нулі функції f, а одиниці функції f можуть бути накриті як нулями, так і одиницями функції g. Отже, функція g має не меншу кількість нулів, ніж функція f.

Умова входження записується як $g \in f$. Наприклад, у функцію $f(x,y) = x \oplus y$ входитимуть всі функції з нульовим значенням в наборах (0, 0) та (1, 1), тобто функції $g_1(x,y) = x \overline{\rightarrow} y$, $g_2(x,y) = x \overline{\leftarrow} y$ та $g_3(x,y) = 0$.

Константа 0 входить у будь-яку булеву функцію, а в константу 1 входять усі функції.

<u>Означення 11.5.</u> Функцію g, що входить у задану функцію f, називають її **імплікантою**.

Застосування терміна "імпліканта" пов'язано з булевої функцією імплікації. Можна пересвідчитись, що функція $g \to f$ тотожно дорівнює 1, тобто завжди є істинною тоді, коли функція g входить у f.

Власною частиною імпліканти називають кон'юнкцію, здобуту вилученням із неї одного або кількох співмножників. Наприклад, добуток $(x \wedge y \wedge z)$ має власні частини: $x \wedge y$, $x \wedge z$, $y \wedge z$, x, y, z.

Означення 11.6. **Простими імплікантами** булевої функції називаються елементарні кон'юнкції, що самі входять у задану функцію f, але ніяка власна частина їх у функцію f не входить.

Прості імпліканти є найкоротшими елементарними кон'юнкціями, що входять у задану булеву функцію.

Якщо яка-небудь елементарна кон'юнкцію входить у задану функцію, то при додаванні до неї будь-яких співмножників нова кон'юнкція також входитиме в цю функцію, тому що вона стає нулем разом із початковою кон'юнкцією.

Наприклад, для функції

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y})$$

простими імплікантами будуть кон'юнкції $(\bar{x} \wedge y \wedge z)$ та $(x \wedge \bar{y})$, а $(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$ та $(x \wedge \bar{y} \wedge z)$ не є ними, оскільки їх власна частина $(x \wedge \bar{y})$ входить у задану функцію.

Теорема 11.1. Будь-яка булева функція дорівнює диз'юнкції всіх своїх простих імплікант.

Доведення. У нульових наборах (кортежах) за означенням усі прості імпліканти входять у булеву функцію, якщо вони також дорівнюватимуть 0 у цих наборах і, отже, дорівнюватиме 0 їх диз'юнкція.

В одиничних наборах для кожного такого набору знайдеться хоча б одна імпліканта, що дорівнює 1. Прості імпліканти вибираються серед усіх елементарних кон'юнкцій, які входять у булеву функцію. У число цих добутків входять усі конституенти одиниці заданої функції, а будь-яка проста імпліканта є власною частиною деяких (однієї або більше) конституент одиниці. Якщо деяка конституента одиниці не входить у набір усіх простих імплікант, то це означає, що вони замінюються коротшими елементарними добутками – простими імплікантами. Проста імпліканта дорівнює 1 у тому самому наборі, на якому дорівнюють 1 конституенти, що входять у неї.

Отже, серед усіх простих імплікант завжди знайдуться такі, які разом із заданою функцією перетворюються на 1 у цьому наборі. Таким чином, диз'юнкція всіх простих імплікант накриває всі нулі й одиниці заданої функції, тобто збігається з нею. ►

Означення 11.7. Диз'юнкція всіх простих імплікант називається **скороченою ДНФ** булевої функції.

11.3. Метод Квайна утворення скороченої диз'юнктивної нормальної форми

При мінімізації за методом Квайна передбачається, що початкова функція задається в ДДНФ. Використовується перетворення ДДНФ за допомогою операцій неповного склеювання і поглинання.

В операції неповного склеювання

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) = y \wedge (x \vee \bar{x}) = y,$$

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = y \vee (x \wedge \bar{x}) = y$$

два члени $(x \wedge y)$ та $(\bar{x} \wedge y)$ склеюються за змінною x.

В операції поглинання

$$(x \wedge y) \vee y = y,$$

$$(x \vee y) \wedge y = y$$

член $(x \wedge y)$ поглинається членом y.

Теорема 11.2 (Квайна). Якщо в ДДНФ булевої функції виконати операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ, тобто диз'юнкцію всіх простих імплікант.

Доведення. Розглянемо операцію розгортання, що є оберненою до операції склеювання. Розгортання – це множення деяких членів на вираз типу $(x \vee \bar{x})$, що, природно, не змінює значення цих членів. За допомогою операції розгортання проста імпліканта може бути подана у вигляді диз'юнкції мінтермів – конституент одиниці.

Якщо утворений вираз міститиме кілька однакових мінтермів, то, замінивши диз'юнкцію мінтермів одним мінтермом, дістанемо у підсумку ДДНФ. Оскільки операція розгортання є оберненою до операції склеювання, то, застосувавши операції склеювання до ДДНФ, можна знайти прості імпліканти.

Виконавши спочатку операції неповного склеювання, здобудемо всі прості імпліканти. Тому при проведенні операцій склеювання кожний член потрібно залишити у виразі для використання його при інших склеюваннях. Але після цього ДНФ міститиме зайві члени. Провівши далі операції поглинання, дістанемо тільки прості імпліканти. ►

Наприклад, нехай задана наступна булева функція:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z).$$

Проведемо всі операції неповного склеювання:

$(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = \bar{x} \wedge z$,

$(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) = x \wedge \bar{y}$,

$(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = \bar{y} \wedge z$.

Виявилось, що всі мінтерми поглинаються отриманими імплікантами (імпліканти входять до всіх мінтермів ДДНФ функції). Таким чином скорочена ДНФ заданої функції набуває вигляду:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge z).$$

11.4. Тупикові нормальні форми

Нехай функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ має довільну ДНФ вигляду:

$$A = A' \vee K \text{ або } A = A' \vee (\alpha \wedge K'),$$

де K – елементарна кон'юнкція, A' – ДНФ, утворена з інших кон'юнкції, що входять в A (залишок); α - деякий множник з K; K' – кон'юнкція інших множників з K.

Існують два основних типи перетворень (операцій) ДНФ.

1. Операція вилучення елементарних кон'юнкцій. Перехід від A до A' – перетворення, яке здійснюється виключенням елементарних кон'юнкцій K, що можливо при $A = A'$.

2. Операція вилучення множника, тобто перехід від A до ДНФ вигляду $(A' \vee K')$ вилученням множника. Це перетворення можливо тільки при $A = A' \vee K'$.

Означення 11.8. ДНФ, яку не можна спростити за допомогою перетворень 1 та 2 (їх не можна застосувати), називають **тупиковою ДНФ**.

Можна сформулювати один з алгоритмів утворення тупикових ДНФ (алгоритм спрощення, тобто алгоритм найшвидшого спуску):

1. Функцію подають у ДДНФ.
2. Упорядковують ДДНФ (записують співмножники так, щоб було зручно здійснювати перетворення).
3. До ДДНФ застосовують операцію вилучення елементарних кон'юнкцій, а потім операцію вилучення співмножників.

Теорема 11.3 (без доведення). ДНФ, утворена після застосування алгоритму найшвидшого спуску, є тупиковою.

Результат використання алгоритму спрощення залежить від вибору впорядкування початкової ДДНФ і може мати різну складність та різний коефіцієнт простоти отриманої тупикової форми.

Черговий етап спрощення булевої функції полягає в пошуку тупикових, а потім мінімальних форм. Можна навести ще одне означення тупикової ДНФ.

Означення 11.9. Диз'юнкція простих імплікант, жодну з яких вилучити не можна, є **тупиковою ДНФ** заданої булевої функції. Деякі функції мають кілька тупикових форм. Тупикові форми, що містять найменшу кількість символів, будуть мінімальними.

Теорема 11.4. Будь-яка мінімальна ДНФ булевої функції є тупиковою.

Доведення. Від супротивного. Нехай мінімальна ДНФ функції $f(x_1,\ldots,x_n) = K_1\vee\ldots\vee K_m$, де $K_1,\ldots,K_m$ – елементарні кон'юнкції (прості імпліканти). Припустимо, що K_1 – непроста імпліканта. Тоді $K_1 = \alpha\wedge K_1'$, де K_1' – залишкові елементарні добутки, а α - елементарна імпліканта.

Тому $f(x_1,\ldots,x_n) = \alpha\vee K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_m = \alpha\vee(\alpha\wedge K_1') \vee K_2\vee\ldots\vee K_m = \alpha\vee K_2\vee\ldots\vee K_m$, оскільки проста імпліканта поглинає елементарні твори K_1.

Цей вираз містить менше число символів, ніж початковий, що суперечить мінімальності ДНФ. Отже, припущення, що K_1 – непроста імпліканта, є невірним. Тому всі члени мінімальної форми булевої функції – прості імпліканти. ►

Для утворення мінімальної ДНФ досить знайти всі тупикові форми заданої функції і вибрати з них мінімальні. Існує кілька методів пошуку тупикових форм. Розглянемо метод імплікативних матриць на попередньому прикладі, де отримали скорочену ДНФ:

$$f(x,y,z) = (\bar{x}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y})\vee(\bar{y}\wedge z)$$

Для знаходження мінімальної ДНФ побудуємо імплікативну матрицю, в якій у рядках записані імпліканти, а в стовпцях – мінтерми.

		$\bar{x}\wedge y\wedge z$	$x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$	$x\wedge\bar{y}\wedge z$	$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$
*	$\bar{x}\wedge z$	×			×
*	$x\wedge\bar{y}$		×	×	
	$\bar{y}\wedge z$			×	×
		*	*	+	+

У комірках таблиці хрестиками відмичаємо імпліканти, які накривають відповідні одиниці заданої функції. Знизу таблиці символом (*) помічаємо всі ті стовпці, в яких стоїть тільки один хрестик. Відповідні їм імпліканти також відмічаємо символом (*) – вони є обов'язковими. Відмічаємо також символом "+" ті стовпці, які покриваються обов'язковими імплікантами. Якщо всі стовпці відмічені, то отриманий набір обов'язкових імплікант утворює мінімальну ДНФ. Якщо частина стовпців лишається непокритою, то з решти імплікант обирається найменше число найбільш коротких імплікант так, щоб всі стовпці були покриті. В нашому прикладі мінімальна ДНФ набуває вигляду:

$$f(x,y,z) = (\bar{x}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}).$$

Аналогічно знаходяться мінімальні кон'юнктивні нормальні форми.

11.5. Метод мінімізаційних карт (діаграми Карно-Вейча)

Діаграми Карно-Вейча – це спеціальні таблиці, що використовуються для задання булевих функцій і дають змогу спростити процес пошуку мінімальних форм.

Передбачається, що функція подана у ДДНФ. Процес пошуку реалізується таким чином, що визначають елементарні кон'юнкції, що входять у ДДНФ, відмінні тільки одним символом, який в одну із кон'юнкцій входить із запереченням, а в інший - без, і далі виконують спрощення згідно з тотожністю неповного склеювання:

$$(x\wedge A)\vee(\bar{x}\wedge A) = A\wedge(x\vee\bar{x}) = A.$$

Можна склеювати чотири елементарні кон'юнкції:

$$(x\wedge y\wedge A)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge A)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge A)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge A) =$$
$$= A\wedge((x\wedge y)\vee(x\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\wedge y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})) = A,$$

а також будь-яке число 2^k елементарних кон'юнкцій, відмінних одна від одної тільки k символами, що входять у ці терми. Практичне застосування склеювання ускладнюється тим, що не завжди вдається помітити всі можливості подібного склеювання безпосередньо з виразів мінімізаційних функцій. Тому дуже корисним при формальному проектуванні виявляються діаграми Карно-Вейча, наочність яких можна порівняти з наочністю графіків для об’єктних функцій. Діаграми Карно-Вейча мають вигляд розгортки кубів на площині.

На діаграмі члени, що склеюються знаходяться в сусідніх комірках. При цьому дві сусідні комірки утворюють 1-куб, чотири – 2-куб, вісім – 3-куб і т.д.

Спочатку функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$ подають у ДДНФ. Далі шукають 1-, 2-, 3-куби тощо, починаючи зі старшого, тобто спочатку 3-куб, потім 2-куб і т.д. Чим вищий номер куба, тим простіша елементарна кон’юнкція, оскільки вона містить менше змінних (більше змінних виключається).

Діаграма Карно-Вейча для двох змінних має вигляд:

$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
00_0	01_1	11_3	10_2

, або

	x_1	$\bar{x}_1$
x_2	11_3	01_1
$\bar{x}_2$	10_2	00_0

Діаграма Карно-Вейча для трьох змінних набуває вигляду:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3$	000_0	010_2	110_6	100_4
x_3	001_1	011_3	111_7	101_5

Діаграма Карно-Вейча для чотирьох змінних набуває вигляду:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	
$\bar{x}_4$	0000_0	0100_4	1100_{12}	1000_8	$\bar{x}_3$
x_4	0001_1	0101_5	1101_{13}	1001_9	
x_4	0011_3	0111_7	1111_{15}	1011_{11}	x_3
$\bar{x}_4$	0010_2	0110_6	1110_{14}	1010_{10}	

Наприклад, розглянемо функцію від чотирьох змінних $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яка набуває значень одиниці на наборах з номерами: 0, 1, 3, 7, 8, 9, 13, 15.

Дістаємо наступну діаграму:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	
$\bar{x}_4$	1_0	4	12	1_8	$\bar{x}_3$
x_4	1_1	5	1_{13}	1_9	
x_4	1_3	1_7	1_{15}	11	x_3
$\bar{x}_4$	2	6	14	10	

На цій діаграмі маємо два 1-куби й один 2-куб. Отримаємо мінімальну ДНФ:

$$f_{\min} = (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)\,,$$

що містить три елементарні кон’юнкції. Як бачимо, метод досить ефективний. Він дає змогу швидко знайти мінімальну ДНФ.

Якщо ж функція представлена у вигляді ДКНФ, то даний метод працює аналогічно, з тією різницею, що об’єднання виконується по нулям.