# Тема 13. Нечіткі множини

Однією з важливих властивостей людського інтелекту є здатність приймати рішення в умовах неповної або неточної інформації. Побудова моделей, які відтворюють цю властивість людського інтелекту, є однією з найважливіших задачах розвитку комп’ютерних наук та технологій.

Основи теорії нечітких множин та нечіткої логіки були закладені в 60-х роках 20 ст. американським вченим Лотфі Заде. Його робота "Fuzzy Sets" з'явилася в 1965 році в журналі "Information and Control". Вона заклала основи моделювання інтелектуальної діяльності людини і стала поштовхом до розвитку нової області науки -"fuzzy logic" (fuzzy - нечіткий, розмитий, м'який).

Апарат теорії нечітких множин, продемонстрував ряд багатообіцяючих можливостей застосування - від систем керування літальними апаратами до прогнозування підсумків виборів.

## 13.1. Нечіткі множини

Означення 13.1. Нехай $U$ – універсальна множина, $x$ – елемент $U$, а $P$ – певна властивість. **Звичайна** (**чітка**) **підмножина** $A$ універсальної множини $U$, елементи якої задовольняють властивості $P$, визначається як множина впорядкованої пари $A = \{\mu_A(x) / x\}$, де $\mu_A(x)$ – **характеристична функція**, що приймає значення 1, якщо $x$ задовольняє властивості $P$, і 0 – в іншому випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів $x$ з $U$ немає однозначної відповіді "ні" відносно властивості $P$.

Означення 13.2. **Нечітка підмножина** $A$ універсальної множини $U$ визначається як множина впорядкованої пари $A = \{\mu_A(x) / x\}$, де $\mu_A(x)$ – характеристична функція приналежності (або просто функція приналежності), що приймає значення в деякій впорядкованій множині $M$ (наприклад, $M = [0, 1]$).

Функція приналежності вказує ступінь (або рівень) приналежності елемента $x$ до підмножини $A$. Множину $M$ називають множиною приналежностей. Якщо $M = \{0, 1\}$, тоді нечітка підмножина $A$ може розглядатися як звичайна або чітка множина.

Розглянемо множину $X$ всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину $A$ множини $X$ всіх дійсних чисел від 5 до 8: $A = [5, 6, 7, 8]$. Покажемо функцію приналежності множини $A$. Ця функція ставить у відповідність число 1 чи 0 кожному елементу в $X$, у залежності від того, належить даний елемент підмножині $A$ чи ні. Результат представлений на наступному рис. 13.1.

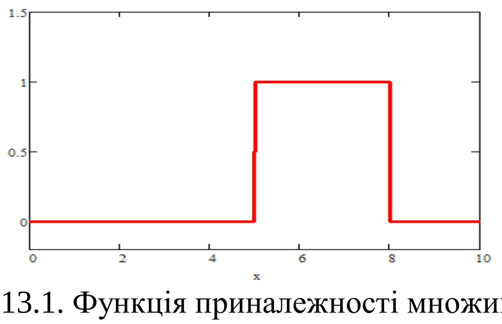



Рис. 13.1. Функція приналежності множини $A$.

Можна інтерпретувати елементи, яким поставлена у відповідність 1, як елементи, що знаходяться в множині $A$, а елементи, яким поставлено у відповідність 0, як елементи, що не знаходяться в множині $A$. Ця концепція використовується в багатьох областях застосувань. Але можна легко знайти ситуації, в яких даній концепції буде бракувати гнучкості.

Наприклад, опишемо множину молодих людей, яку позначимо $B$. Оскільки, вік починається з 0, то нижня межа цієї множини повинна бути нулем. Верхню межу визначити небагато складніше. Спочатку встановимо верхню межу, наприклад 20 років. Таким чином, маємо $B$ як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0, 20]$. Виникає питання: чому людина в двадцятирічний ювілей – молода, а наступного дня вже не молода? Очевидно, це структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна задати таке ж питання.

Більш природний шлях отримання множини $B$ складається в послабленні строгого поділу на молодих і не молодих. Розглянемо як за допомогою нечіткої множини визначити такий вираз, як «він ще молодий».

В першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простим способом узагальнити дану концепцію є введення значення між 0 і 1. Можна навіть допустити нескінченне число значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі [0, 1]. Інтерпретація чисел при співвідношенні всіх елементів множини стає тепер більш складною. Звичайно, знову число 1 ставиться у відповідність до того елемента, що належить множині $B$, а 0 означає, що елемент точно не належить множині $B$. Всі інші значення визначають ступінь приналежності до множини $B$ (рис. 13.2).

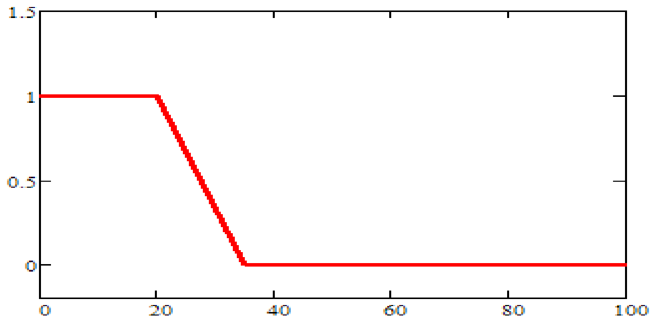


Рис 13.2. Функція приналежності нечіткої множини $B$.

Якщо множина $A$ скінченна, то для її задавання можна використовувати перелік, де кожний елемент – це пара вигляду $(\mu_A(x) / x)$. Наприклад, нехай $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$, $A$ – нечітка множина для якої виконується: $\mu_A(x_1) = 0{,}3$, $\mu_A(x_2) = 0$, $\mu_A(x_3) = 1$, $\mu_A(x_4) = 0{,}5$, $\mu_A(x_5) = 0{,}9$. Тоді $A$ можна представити у вигляді:

$$A = \{0{,}3/x_1,\ 0/x_2,\ 1/x_3,\ 0{,}5/x_4,\ 0{,}9/x_5\}.$$

Часто елементи $x$, для яких $\mu_A(x)=0$, можуть опускатись в переліку.

## 13.2. Характеристики нечітких множин

Нехай $M = [0, 1]$ і $A$ – нечітка множина з елементами універсальної множини $U$ і множиною приналежностей $M$.

Означення 13.3. Величина $\sup\limits_{x\in U}\mu_A(x)$ називається **висотою** нечіткої множини $A$. Нечітка множина $A$ є **нормальною**, якщо її висота дорівнює 1. При $\mu_A(x)<1$ нечітка множина називається **субнормальною**.

Означення 13.4. Нечітка множина є **порожньою**, якщо $\forall x\in U\ \mu_A(x) = 0$.

Непорожню субнормальну множину можна нормалізувати, якщо для всіх $x\in U$ провести перетворення:

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in U}\mu_A(x)}.$$

Означення 13.5. Нечітка множина є **унімодальною**, якщо $\mu_A(x) = 1$ лише для одного $x\in U$.

Означення 13.6. **Носієм** нечіткої множини $A$ є звичайна підмножина з властивістю $\mu_A(x) > 0$, тобто носій $A$ є множина $A' = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Означення 13.7. Елементи $x\in U$, для яких $\mu_A(x) = 0{,}5$ називаються **точками переходу** множини $A$.

Розглянемо множину $U = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $M = [0, 1]$. Нечітку множину, яка відповідає терміну «декілька», можна визначити таким чином: «декілька» = {0,5/3, 0,8/4, 1/5, 1/6, 0,8/7, 0,5/8}. Таким чином, числа 5, 6 – це 100% «декілька», 4 і 7 – це «майже декілька» та 3 і 8 – це «схоже на декілька». Характеристики цієї множини: висота – 1, носій – {3, 4, 5, 6, 7, 8}, точки переходу – {3, 8}.

Розглянемо інший приклад. Нехай $U$ = {0, 1, …, 100} відповідає поняттю «вік», тоді нечітку множина «молодий» можна визначити за характеристичною функцією:

$$\mu_{молодий}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [1,25] \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2},\ x \geq 25 \end{cases}.$$

Дана характеристична зображена на рис. 13.3.

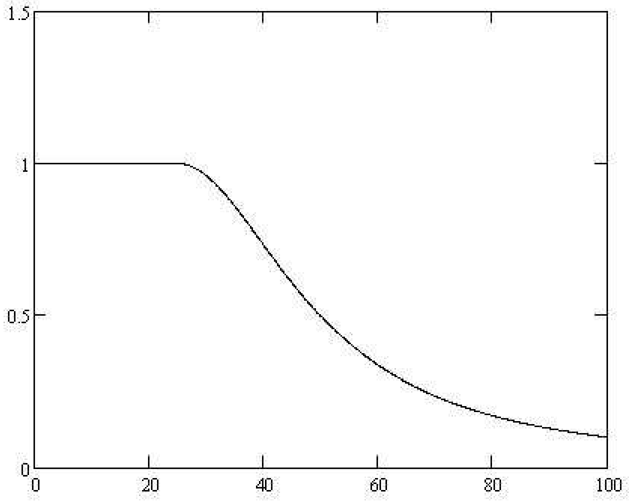



Рис. 13.3. Функція $\mu_{молодий}(x)$.

### 13.3. Методи побудови функцій приналежності нечітких множин

У приведених вище прикладах використані прямі методи, коли експерт або просто задає для кожного $x \in U$ значення $\mu_A(x)$, або визначає функцію приналежності. Як правило, прямі методи завдання функції приналежності використовуються для понять, що вимірюються, таких як швидкість, година, відстань, тиск, температура тощо, тобто коли виділяються полярні значення.

У багатьох задачах при характеристиці об'єкта можна виділити набір ознак і для кожного з них визначити полярні значення, що відповідають значенням функції приналежності, 0 чи 1.

Наприклад, у задачі розпізнавання обличчя можна виділити наступні пункти:

| | | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | висота чола | низький | широкий |
| $x_2$ | профіль носа | кирпатий | горбатий |
| $x_3$ | довжина носа | короткий | довгий |
| $x_4$ | розріз очей | вузькі | широкі |
| $x_5$ | колір очей | світлі | темні |
| $x_6$ | форма підборіддя | гострий | квадратний |
| $x_7$ | товщина губ | тонкі | товсті |
| $x_8$ | колір обличчя | темний | світлий |
| $x_9$ | обрис обличчя | овальнее | квадратне |

Для конкретного обличчя $A$ експерт, виходячи з приведеної шкали, задає $\mu_A(x) \in [0, 1]$, формуючи векторну функцію приналежності { $\mu_A(x_1)$, $\mu_A(x_2)$, ..., $\mu_A(x_9)$}.

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей, через які визначається потрібна нечітка множина. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій приналежності були нам відомі, наприклад, $\mu_A(x_i) = w_i$, $i = 1, 2, ..., n$, тоді попарні порівняння можна представити матрицею відношень $C = \{c_{ij}\}$, де $c_{ij} = w_i / w_j$ (операція ділення).

### 13.4. Операції над нечіткими множинами

Над нечіткими множинами, як і над звичайними множинами, можна визначити певні операції. Більше того, це ті самі операції, які знайомі нам з розділу теорії множин (об'єднання, перетин, доповнення тощо), але просто перевизначені для використання з нечіткими множинами.

Нехай *A* та *B* – нечіткі множини на універсальній множині *U*.

Означення 13.8. **Порожньою нечіткою множиною** $\varnothing$ називається така множина, для якої характеристична функція дорівнює 0 для всіх елементів $x \in U$.

Означення 13.9. Говорять, що множина *A* міститься (або включається) в множині *B*, якщо $\forall x \in U\ \mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Позначається $A \subseteq B$.

Інколи використовують термін «домінування», тобто у випадку, коли $A \subseteq B$, то говорять, що *B* домінує над *A*.

Означення 13.10. Множини *A* та *B* рівні, тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in U\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$. Позначається $A=B$.

Означення 13.11. Нехай $M = [0, 1]$. Говорять, що множини *A* та *B* доповнюють одна одну, якщо $\forall x \in U\ \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$. Позначається як $B = \overline{A}$ та $A = \overline{B}$.

Нехай множина $A = \{0{,}4/x_1, 0{,}2/x_2, 0/x_3, 1/x_4\}$. Тоді $\overline{A} = \{0{,}6/x_1, 0{,}8/x_2, 1/x_3, 0/x_4\}$. Вигляд характеристичної функції для *A* та $\overline{A}$ представлений на рис. 13.4.

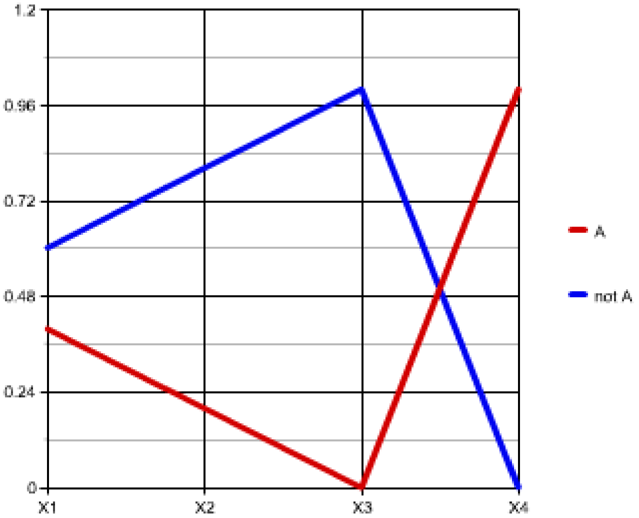



Рис. 13.4. Характеристичні функції множин *A* та $\overline{A}$.

Означення 13.12. **Перетином** (або **перерізом**) двох нечітких множин називається найбільша нечітка множина, яка міститься одночасно в *A* і *B*. Позначається перетин $A \cap B$. Характеристична функція перетину двох множин визначається за формулою:

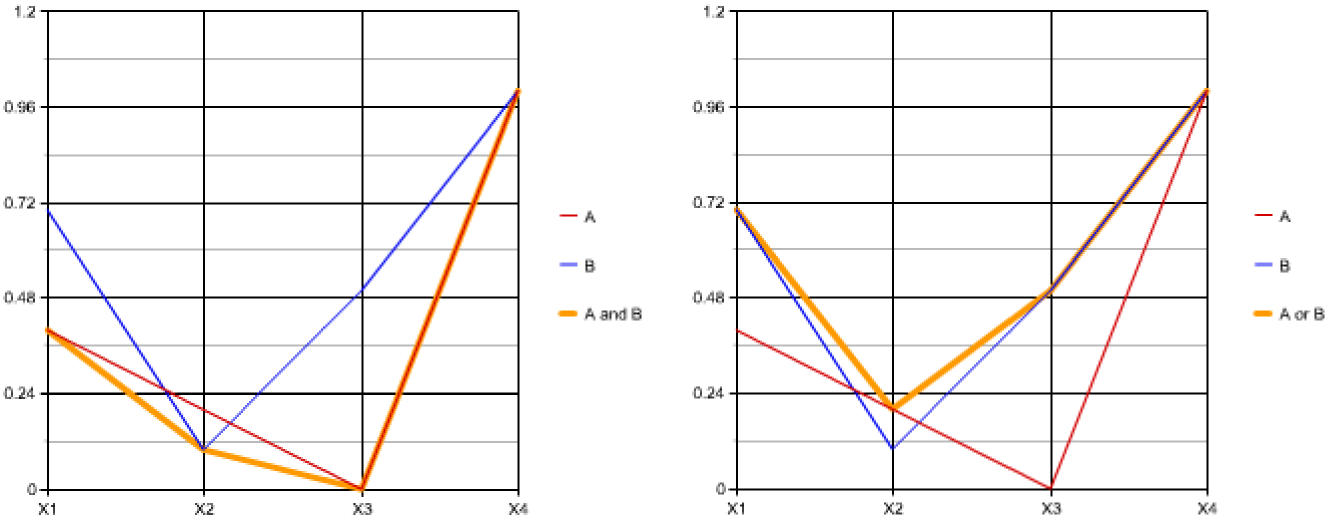
$$\forall x \in U\ \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\ \mu_A(x), \mu_B(x)\ \}.$$

Нехай задані множини $A = \{0{,}4/x_1, 0{,}2/x_2, 0/x_3, 1/x_4\}$ та $B = \{0{,}7/x_1, 0{,}1/x_2, 0{,}5/x_3, 1/x_4\}$. Тоді їх перетином буде множина $A \cap B = \{0{,}4/x_1, 0{,}1/x_2, 0/x_3, 1/x_4\}$. Характеристичні функції множин *A*, *B* та їх перетину $A \cap B$ наведені на рис. 13.5(а).

Означення 13.13. **Об'єднанням** двох нечітких множин називається найменша нечітка множина, яка включає як *A*, так і *B*. Позначається об'єднання $A \cup B$. Характеристична функція об'єднання двох множин визначається за формулою:

$$\forall x \in U\ \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\ \mu_A(x), \mu_B(x)\ \}.$$

Для двох вищенаведених множин *A* та *B* їх об'єднанням буде множина $A \cup B = \{0{,}7/x_1, 0{,}2/x_2, 0{,}5/x_3, 1/x_4\}$. Характеристичні функції множин *A*, *B* та їх перетину $A \cup B$ наведені на рис. 13.5(б).




а) б)

Рис. 13.5. Характеристичні функції множин $A$, $B$, $A \cap B$ та $A \cup B$.

Означення 13.14. **Різницею** двох нечітких множин називається нечітка множина $A \setminus B$, яка має характеристичну функцію:

$$\forall x \in U \ \mu_{A \setminus B}(x) = \min\{ \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}.$$

Характеристична функція для різниці легко отримується, якщо згадати, що за означенням $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

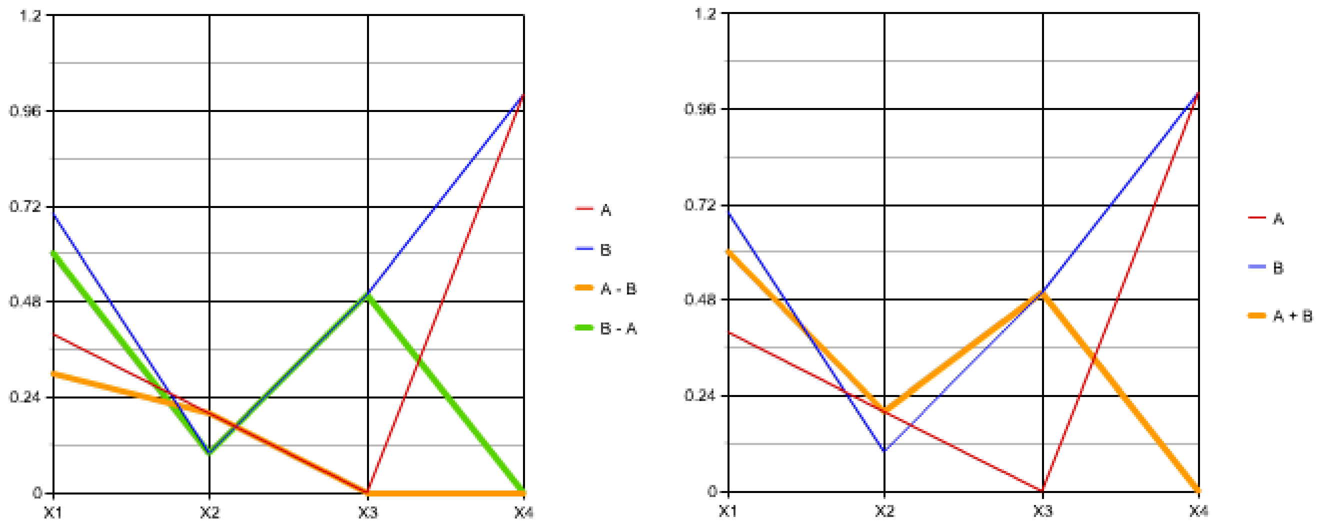
Для наведених вище множин $A$ та $B$ їх різницями будуть множини $A \setminus B = \{0{,}3/x_1, 0{,}2/x_2, 0/x_3, 0/x_4\}$ та $B \setminus A = \{0{,}6/x_1, 0{,}1/x_2, 0{,}5/x_3, 0/x_4\}$. Характеристичні функції множин $A$, $B$ та їх різниць $A \setminus B$ та $B \setminus A$ наведені на рис. 13.6(а).

Означення 13.15. **Диз'юнктивною сумою** двох нечітких множин називається нечітка множина $A \oplus B$, яка має характеристичну функцію:

$$\forall x \in U \ \mu_{A \oplus B}(x) = \max\{ \min\{ \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}, \min\{ \mu_B(x), 1 - \mu_A(x) \} \}$$

Характеристична функція для різниці легко отримується, якщо згадати, що за означенням $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Для наведених вище множин $A$ та $B$ їх диз'юнктивною сумою буде множина $A \oplus B = \{0{,}6/x_1, 0{,}2/x_2, 0{,}5/x_3, 0/x_4\}$. Характеристичні функції множин $A$, $B$ та їх диз'юнктивної суми $A \oplus B$ наведені на рис. 13.6(б).




а) б)

Рис. 13.5. Характеристичні функції множин $A$, $B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ та $A \oplus B$.

Про наведені вище множини $A$ та $B$ не можна сказати, що $A \subseteq B$ чи $B \subseteq A$. Але якщо розглянути множину $C = \{0{,}5/x_1,\ 0{,}3/x_2,\ 0{,}2/x_3,\ 1/x_4\}$, то тоді множина $A$ входить у множину $C$, $A \subseteq C$. В такому випадку графік характеристичної функції $\mu_A(x)$ буде скрізь не вище графіку характеристичної функції $\mu_C(x)$ (див. рис. 13.6).

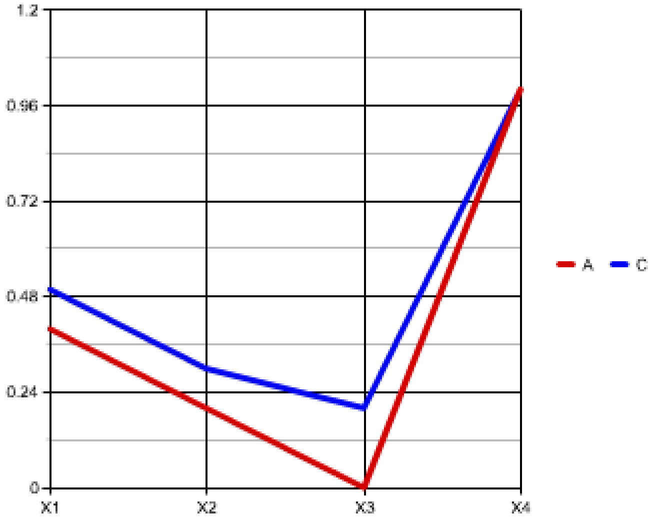



Рис. 13.6. Характеристичні функції множин $A$ та $C$, $A \subseteq C$.

### 13.5. Властивості операцій над нечіткими множинами

Для операцій над нечіткими множинами виконуються майже всі властивості, що й для звичайних множин (див. тему 1 «Множини»).

Теорема 13.1. Для будь-яких множин $A$, $B$ та $C$ справедливі наступні властивості:

- *ідемпотентність* (*самопоглинання*)
  1а) $A \cup A = A$ — 1б) $A \cap A = A$
- *комутативність*
  2а) $A \cup B = B \cup A$ — 2б) $A \cap B = B \cap A$
- *асоціативність*
  3а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — 3б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *дистрибутивність*
  4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — 4б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *властивості* $\varnothing$ *та* $U$
  5а) $A \cup \varnothing = A$ — 5б) $A \cap \varnothing = \varnothing$
  6а) $A \cup U = U$ — 6б) $A \cap U = A$
  7а) $\overline{\varnothing} = U$ — 7б) $\overline{U} = \varnothing$
- *поглинання*
  8а) $A \cup (A \cap B) = A$ — 8б) $A \cap (A \cup B) = A$
- *закони де Моргана*
  9а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ — 9б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

*Доведення.* Доведемо деякі з наведених властивостей. Візьмемо властивість дистрибутивності 4а. Характеристична функції множини лівої частини виглядатиме наступним чином:

$$\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) = \max\{\ \mu_A(x),\ \min\{\ \mu_B(x),\ \mu_C(x)\ \}\ \}.$$

Таким чином, спочатку для $\forall x \in U$ знаходиться мінімальне значення між $\mu_B(x)$ та $\mu_C(x)$, а потім максимальне між отриманим результатом та $\mu_A(x)$. Зрозуміло, що нічого не зміниться, якщо спочатку знайти максимальні значення в парах $\{\ \mu_A(x), \mu_B(x)\ \}$ та $\{\ \mu_A(x), \mu_C(x)\ \}$, а потім знайти мінімальне значення поміж цих пар. Тобто це те саме, що отримати характеристичну функцію правої частини:

$$\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \min\{\ \max\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\ \},\ \max\{\ \mu_A(x),\ \mu_C(x)\ \}\ \}.$$

Іншими словами, розглянемо елемент $a \in U$. Загалом всього можливі наступні шість варіантів.

1) $\mu_A(a) < \mu_B(a) < \mu_C(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_B(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} = \mu_B(a)$.

2) $\mu_A(a) < \mu_C(a) < \mu_B(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_C(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} = \mu_C(a)$.

3) $\mu_B(a) < \mu_A(a) < \mu_C(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_A(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} = \mu_A(a)$.

4) $\mu_B(a) < \mu_C(a) < \mu_A(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_A(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_A(a), \mu_A(a) \} = \mu_A(a)$.

5) $\mu_C(a) < \mu_A(a) < \mu_B(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_A(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_B(a), \mu_A(a) \} = \mu_A(a)$.

6) $\mu_C(a) < \mu_B(a) < \mu_A(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(a), \min\{ \mu_B(a), \mu_C(a) \} \} = \mu_A(a)$, а $\min\{ \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \}, \max\{ \mu_A(a), \mu_C(a) \} \} = \min\{ \mu_A(a), \mu_A(a) \} = \mu_A(a)$.

Як бачимо значення лівої та правої частини рівності 4а співпали в усіх шести варіантах.

Доведемо рівність поглинання 8а. Характеристична функція лівої частини буде мати вигляд:

$$\mu_{A\cup(A\cap B)}(x) = \max\{ \mu_A(x), \min\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \}.$$

За аналогією з попереднім доведенням ми будемо мати тільки два варіанти:

1) $\mu_A(a) < \mu_B(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(x), \min\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \} = \max\{ \mu_A(x), \mu_A(x) \} = \mu_A(x)$.

2) $\mu_B(a) < \mu_A(a)$. Тоді $\max\{ \mu_A(x), \min\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \} = \max\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} = \mu_A(x)$.

В обох варіантах отримали значення $\mu_A(x)$, що відповідає значенню характеристичної функції множини правої частини рівності.

Доведемо рівність де Моргана 9а. Характеристична функція лівої частини буде мати вигляд $1 - \max\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$, а правої частини – $\min\{ 1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x) \}$. Знову маємо два можливих випадки:

1) $\mu_A(a) < \mu_B(a)$. Тоді в лівій частині отримуємо $1 - \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \} = 1 - \mu_B(a)$. Якщо $\mu_A(a) < \mu_B(a)$, то тоді $-\mu_A(a) > -\mu_B(a)$, а отже $1-\mu_A(a) > 1-\mu_B(a)$. Таким чином, в правій частині отримуємо $\min\{ 1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x) \} = 1-\mu_B(x)$.

2) $\mu_B(a) < \mu_A(a)$. Тоді в лівій частині отримуємо $1 - \max\{ \mu_A(a), \mu_B(a) \} = 1 - \mu_A(a)$. Якщо $\mu_B(a) < \mu_A(a)$, то тоді $1-\mu_B(a) > 1-\mu_A(a)$. Таким чином, в правій частині отримуємо $\min\{ 1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x) \} = 1-\mu_A(x)$.

Решта рівностей доводяться аналогічно. ►

На відміну від звичайних множин, для нечітких множин в загальному випадку не виконуються співвідношення $A \cup \overline{A} = U$ та $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Так, для множини $A = \{0{,}4/x_1, 0{,}2/x_2, 0/x_3, 1/x_4\}$, її заперечення $\overline{A} = \{0{,}6/x_1, 0{,}8/x_2, 1/x_3, 0/x_4\}$. Тоді $A \cup \overline{A} = \{0{,}6/x_1, 0{,}8/x_2, 1/x_3, 1/x_4\} \neq U$ та $A \cap \overline{A} = \{0{,}4/x_1, 0{,}2/x_2, 0/x_3, 0/x_4\} \neq \varnothing$.