Тема 8. Ґратки

8.1. Основні означення

Досі розглядалися алгебри, тобто множини, на яких задано операції. Множини, де крім операцій задано відношення, називаються алгебраїчними системами. Таким чином, алгебри можна вважати окремим випадком алгебраїчних систем (в яких множина відношень – порожня). Іншим окремим випадком алгебраїчних систем є моделі множин, на яких задано тільки відношення. Поняття ізоморфізму для алгебраїчних систем уводиться аналогічно тому, як це було зроблено вище для алгебр, з тією різницею, що до умови збереження операцій додається умова збереження відношень при ізоморфізмі.

Розглянемо ґратки, як приклад алгебраїчної системи, що найчастіше зустрічається в теоретичній алгебрі та її застосуваннях.

Означення 8.1. **Ґратками** називається частково впорядкована множина, в якій два елемента x та y мають точну нижню межу, яка називається **перетином** (позначається $x\wedge y$), та точну верхню межу, яка називається **об'єднанням** (позначається $x\vee y$). Ґратки називаються **повними**, якщо будь-яка їх підмножина має точні верхні та нижні межі.

Очевидно, що будь-які не порожні повні ґратки мають найменший елемент 0 та найбільший елемент 1. Дійсно, якщо два кожні елементи мають точну верхню межу, то в ґратках є тільки один максимальний елемент, який буде й універсальною верхньою межею, тобто одиницею впорядкованої множини. Аналогічно, існування точної нижньої межі для двох довільних елементів забезпечує існування універсальної нижньої межі – нуля впорядкованої множини.

Лема 8.1. Будь-який ланцюг є ґратками, в яких $x\wedge y$ співпадає з найменшим, а $x\vee y$ – з найбільшим із елементів x та y.

Це очевидно, тому що для будь-якого ланцюга або $x\leq y$, або $y\leq x$, тому або $x\wedge y = x$, або $x\wedge y = y$.

Наприклад, будь-яку абсолютно впорядковану множину (множину цілих чисел) можна перетворити на ґратки, означивши для будь-яких елементів x та y $x\wedge y = min(x, y)$, $x\vee y = max(x, y)$.

Система підмножин будь-якої множини A (булеан A) – частково впорядкована множина за включенням множин. Ця система є ґратками, елементами яких є множини, а операціями – звичайні теоретико-множинні операції об'єднання та перерізу.

Впорядкована множина раціональних чисел не є повними ґратками, тому що в ній немає універсальних меж 0 та 1. У впорядкованій множині дійсних чисел умова повноти буде виконуватись, якщо додати до неї в якості універсальних меж $-\infty$ та $+\infty$.

Означення 8.2. **Підґратками** ґраток L називається підмножина $X\subset L$ така, що якщо $a\in X$, $b\in X$, то $a\wedge b \in X$ та $a\vee b \in X$.

Порожня підмножина та будь-яка одноелементна підмножина є підґратками. Підґратки ґраток самі є ґратками з тими самими операціями об'єднання та перетину. Взагалі, якщо $a\leq b$ в ґратках L, то (замкнений) інтервал $[a, b]$, що містить всі елементи $x\in L$, які задовольняють умові $a \leq x \leq b$, завжди буде підґратками. Для ланцюга та його елементів $a\leq b$ можна визначити поняття напіввідкритих інтервалів: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ та $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, а також відкритий інтервал $(a,b) = \{x \mid a< x <b\}$. Якщо ці множини не порожні, то вони також є підґратками.

На рис. 8.1. підмножина $Y = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$ є підґратками. Дійсно, $\{b\}\in Y$, $\{c\}\in Y$, $\{b\}\wedge\{c\} = \varnothing\in Y$, $\{b\}\vee\{c\} = \{b,c\}\in Y$, $\{b\}\vee\{b,c\} = \{b,c\}\in Y$. Ця множина утворює замкнений інтервал $[\varnothing, \{b,c\}]$. Підмножина $Z = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c\}\}$ не є підґратками, тому що $\{a,b\}\vee\{a,c\}=\{a,b,c\}\notin Z$. Ця підмножина також не є інтервалом. Підґратками будуть також підмножини: $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{\{c\}, \{a,c\}\}$, $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ і т.д., всі ланцюги, наприклад, $\{\varnothing, \{b\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}, \{b,c\}\}$, а також всі елементи ґраток.

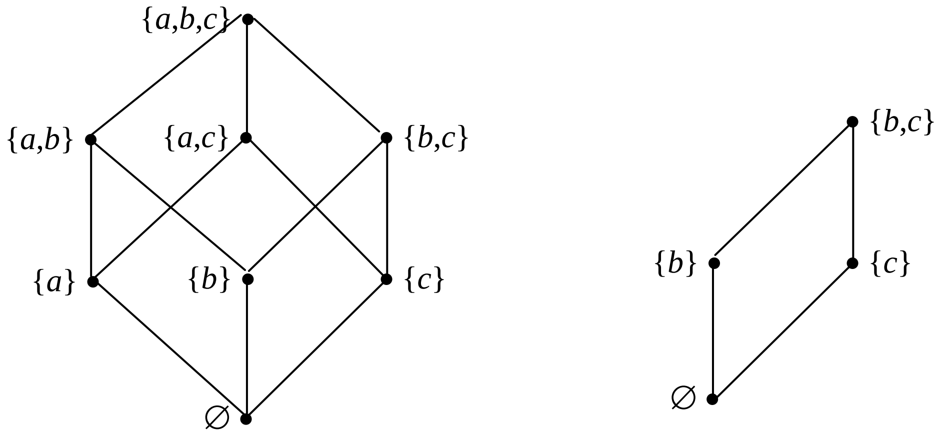


Рис. 8.1. Ґратки та їх підґратки.

8.2. Ґратки як алгебри

Ґратки можна визначити як алгебраїчну систему: $L = \langle P;\ \wedge,\ \vee;\ \leq\rangle$ з двома бінарними операціями та відношенням порядку, яке задано на множині P. Операції ґраток $\wedge$ та $\vee$ володіють важливими алгебраїчними властивостями. В цьому розділі ми дослідимо властивості операцій $\wedge$ та $\vee$ і покажемо, що операції, які мають ці властивості, визначають відношення порядку на множині P, що дозволяє розглядати ґратки як алгебри з двома операціями.

<u>Теорема 8.1.</u> В будь-якій впорядкованій множині для операцій перетину та об'єднання виконуються наступні закони:

$x\wedge x = x$, $x\vee x = x$ (самопоглинання)

$x\vee y = y\vee x$, $x\wedge y = y\wedge x$ (комутативність)

$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$ (асоціативність)

$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$

$x\wedge(x\vee y) = x$, $x\vee(x\wedge y) = x$ (поглинання)

Крім того, нерівність $x\leq y$ рівнозначна одній з умов

$x\wedge y = x$ та $x\vee y=y$ (сумісність)

Доведення. Умова самопоглинання та комутативності виконуються очевидно. Асоціативний закон також очевидний: $x\wedge(y\wedge z) = inf\ \{x,\ inf\{y,\ z\}\} = inf\ \{\ inf\{x,\ y\},\ z\} = (x\wedge y)\wedge z$. Закон поглинання виконується в силу того, що $x\wedge(x\vee y) = inf\ \{\ x,\ sup\{x,y\}\}$. Якщо $x\leq y$, то $sup\{x,\ y\} = y$, тоді $inf\{x,y\} = x$, а якщо $y\leq x$, то $sup\{x,\ y\} = x$, і тоді $inf\{x,\ x\} = x$. Умова сумісності: $x\wedge y = x$, якщо $x\leq y$, та $x\vee y = y$, якщо $x\leq y$, – виконується також очевидно. ►

<u>Теорема 8.2.</u> Якщо впорядкована множина P має 0, то $0\wedge x = 0$ та $0\vee x = x$ для довільного $x\in P$, і якщо впорядкована множина P має 1, то $1\wedge x = x$ та $1\vee x = 1$ для довільного $x\in P$.

Доведення очевидно. ►

<u>Теорема 8.3.</u> В довільних ґратках операції об'єднання та перетину ізотонні:

якщо $y\leq z$, то $x\wedge y \leq x\wedge z$ та $x\vee y \leq x\vee z$.

Доведення. Згідно законів з теореми 8.1, якщо $y\leq z$, то $x\wedge y = (x\wedge x) \wedge (y\wedge z) = (x\wedge y) \wedge (x\wedge z)$. Враховуючи, що $x\wedge x = x$ та $y\wedge z = y$, за умовою сумісності отримуємо $x\wedge y \leq x\wedge z$. Друга нерівність доводиться аналогічно. ►

<u>Теорема 8.4.</u> В довільних ґратках мають місце наступні **нерівності дистрибутивності**:

$$x\wedge(y\vee z) \geq (x\wedge y) \vee (x\wedge z),$$
$$x\vee(y\wedge z) \leq (x\vee y) \wedge (x\vee z).$$

Доведення. Очевидно, що $x\wedge y \leq x$ та $x\wedge y \leq y \leq y\vee z$, звідки маємо $x\wedge y \leq x \wedge(y\vee z)$. Аналогічно, $x\wedge z \leq x$ та $x\wedge z \leq z \leq y\vee z$, звідки $x\wedge z \leq x \wedge(y\vee z)$. Таким чином, $x\wedge(y\vee z)$ є верхньою межею для $x\wedge y$ та $x\wedge z$, тобто виконується $x\wedge(y\vee z) \geq (x\wedge y) \vee (x\wedge z)$. Аналогічно доводиться друга нерівність. ►

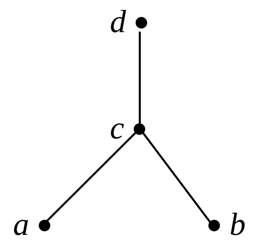
Теорема 8.5. Елементи довільних ґраток задовольняють **нерівності модулярності**:

якщо $x \le z$, то $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge z$.

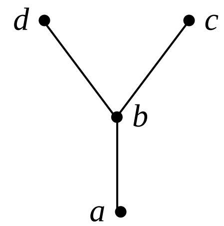
Доведення. $x \le x \vee y$ та $x \le z$, значить $x \le (x \vee y) \wedge z$. Аналогічно, $y \wedge z \le y \le x \vee y$ та $y \wedge z \le z$, відповідно, $y \wedge z \le (x \vee y) \wedge z$, звідки $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge z$. ▶

Означення 8.3. Система з однією операцією, для якої виконуються закони самопоглинання, комутативності та асоціативності, називається **півґратками**. Впорядкована множина P, в якій два будь-яких елемента мають перетин, є півґратками відносно бінарної операції $\wedge$. Такі півґратки називаються $\wedge$-півґратками або **нижніми півґратками**. Впорядкована множина P, в якій два будь-які елементи мають об'єднання, є півґратками відносно бінарної операції $\vee$. Такі півґратки називаються $\vee$-півґратками або **верхніми півґратками**.

На рис. 8.2. наведені діаграми верхніх та нижніх півґраток. У першій множині два довільних елементи мають об'єднання, але елементи a та b не мають перетину, тому ця множина є верхніми півґратками. У другій множині два довільних елементи мають перетин, але елементи c та d не мають об'єднання, тому це нижні півґратки.



а) Верхня півґратки



б) Нижня півґратки

Рис. 8.2. Півґратки

Теорема 8.6 (без доведення). Будь-яка алгебра $L = \langle P;\ \wedge,\ \vee \rangle$ з двома бінарними операціями, які задовольняють законам з теореми 8.1, є ґратками та навпаки.

Наприклад, нехай на множині $L = \{a, b, c, d\}$ задані бінарні операції + та $\times$:

$\times$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

Безпосередньо з таблиці видно, що обидві операції ідемпотентні – виконується самопоглинання (див. значення на діагоналі таблиць) та комутативні (таблиці симетричні). Асоціативність операцій також легко перевірити. Будемо вважати, що $x \le y$ кожного разу, коли $x \times y = x$. Тоді з першого рядка таблиці отримуємо: $a \le b$, $a \le c$, $a \le d$, далі: $b \le d$, так як $b \times d = b$, та $c \le d$, так як $c \times d = c$. Маємо також $b \times c = c \times b = a$, звідки слідує, що a – точна нижня межа для b та c, та, враховуючи перший рядок, є універсальною нижньою межею. Тоді, побудувавши діаграму двох ланцюгів: $a \le b$, $b \le d$ та $a \le c$, $c \le d$, отримаємо діаграму на рис. 8.3, де операція «×» – перетин, а «+» – об'єднання довільних двох елементів. Таким чином, множина L є ґратками.

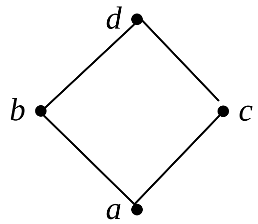


Рис. 8.3. Ґратки $L = \{a, b, c, d\}$.

8.3. Дистрибутивні та модулярні ґратки

Можна виділити окремі типи ґраток, які мають певні властивості.

Означення 8.4. Ґратки називаються **дистрибутивними**, якщо в них для всіх x, y, z виконуються тотожності:

$$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y) \vee (x\wedge z),$$
$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y) \wedge (x\vee z).$$

Треба відмітити, що виконання першої тотожності для окремих елементів ґраток не призводить до виконання для них другої тотожності (тобто друга тотожність для тих самих елементів може не виконуватись, якщо ґратки не дистрибутивні). Але виконання однієї з тотожностей для всіх елементів ґраток призводить до виконання й другої. Тоді для перевірки дистрибутивності ґраток досить встановити першу або другу тотожність для всіх елементів. Інша властивість буде слідувати з теореми 8.7.

Теорема 8.7. Якщо в ґратках для всіх елементів виконуються тотожність $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y) \vee (x\wedge z)$, то виконується тотожність $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y) \wedge (x\vee z)$ і навпаки.

Доведення. Покажемо, що з першої тотожності слідує друга. Протилежний випадок доводиться аналогічно. Для всіх x, y, z:

$(x\vee y) \wedge (x\vee z) = [(x\vee y) \wedge x] \vee [(x\vee y) \wedge z] =$ згідно першої тотожності,
$= x \vee [z \wedge (x\vee y)] =$ за законом поглинання та асоціативності,
$= [x \vee (z\wedge x) \vee (z\wedge y)] =$ за першою тотожністю,
$= x\vee(z\wedge y)$ за законом поглинання. ►

Означення 8.5. Ґратки називаються **модулярними**, якщо в них виконується модулярний закон:

$$\text{якщо } x\le z, \text{ то } x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge z.$$

Відмітимо, що за принципом подвійності, якщо $z\le x$, то $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee z$, тобто закон модулярності є самодвоїстим.

Модулярний закон може бути отриманий з тотожності $x\vee(z\wedge y) = [x \vee (z\wedge x) \vee (z\wedge y)]$, якщо $x\le z$. Таким чином, модулярний закон виконується в будь-яких дистрибутивних ґратках.

Теорема 8.8. Якщо ґратки є дистрибутивними, то вони є й модулярними.

Доведення випливає з попередніх міркувань.

Розглянемо декілька прикладів ґраток. Почнемо з ґраток, які мають назву «пентагон» (N_5) (рис. 8.4а). Доведемо, що вона немодулярна. Всі ланцюги в ґратках дистрибутивні, відповідно, для будь-яких двох елементів, які лежать на одному ланцюзі, умова модулярності виконується. Візьмемо елементи $a\le b$ та елемент c, який не лежить з ними на одному ланцюзі. Перевіримо умову модулярності: $a\vee(c\wedge b) = (a\vee c)\wedge b$. Отримаємо $a\vee(c\wedge b) = a\vee 0 = a$, $(a\vee c)\wedge b = 1\wedge b = b$. Так як $a\ne b$, то закон модулярності не виконується. Перевіримо закон дистрибутивності: $a\vee(c\wedge b) = (a\vee c) \wedge (a\vee b)$, але $a\vee 0 \ne 1\wedge b$, відповідно, ґратки N_5 не є дистрибутивними. Отже отримали, що якщо ґратки є немодулярними, то вони є недистрибутивними.

Рис. 8.4. Пентагон (а) та діамант (б).

Розглянемо ґратки «діамант» (M_3) на рис 8.4б. Всі ланцюги $\{0, a, 1\}$, $\{0, b, 1\}$, $\{0, c, 1\}$ дистрибутивні, отже, й модулярні. Візьмемо три елементи, які не лежать на одному ланцюзі: $a\le 1$ та c. Умова модулярності для них виконується: $a\vee(c\wedge 1) = (a\vee c)\wedge 1$, так як $a\vee c = 1\wedge 1$, тобто $1 = 1$. Неважко пересвідчитись, що умова модулярності в M_3 буде виконуватись для будь-яких трьох елементів, два з яких знаходяться у відношенні порядку, і, відповідно, ґратки M_3 є модулярними. Перевіримо властивість дистрибутивності для елементів a, b, c (всі решти трійки елементів в цих ґратках дистрибутивні): $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b) \wedge (a\vee c)$. Рівність не виконується, так як $a\vee(b\wedge c) = a\vee 0 = a$, але $(a\vee b) \wedge (a\vee c) = 1\wedge 1 = 1 \neq a$. Отже, ґратки модулярні, але не дистрибутивні. Всі елементи a, b, c незрівнянні,відповідно, для них не визначений закон модулярності, але дистрибутивний закон повинен виконуватись для всіх елементів, в тому числі й для a, b, c. Звідси отримуємо висновок: ґратки можуть бути модулярними, але недистрибутивними.

Узагальнюючи отримані результати, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 8.9 (без доведення). Справедливі наступні твердження:

а) ґратки L модулярні тоді й тільки тоді, коли вони не містять пентагонів;

б) модулярні ґратки L дистрибутивні тоді й тільки тоді, коли вони не містять діамантів;

в) ґратки L дистрибутивні тоді й тільки тоді, коли вони не містять ні пентагонів, ні діамантів.

8.4. Булеві ґратки

Означення 8.6. У повних ґратках елемент a' називається **доповненням** елемента a, якщо $a\wedge a' = 0$ та $a\vee a' = 1$.

Взагалі, доповнення не мусить існувати та не мусить бути єдиним. Якщо кожний елемент ґраток має доповнення, то ґратки називаються ґратками із доповненням. Дистрибутивні ґратки з доповненням називаються **булевими**.

Теорема 8.10. У булевих ґратках довільний елемент x має одне й тільки одне доповнення x'. При цьому виконується:

1) інволюція: $(x')' = x$,

2) межі доповнюють одна одну: $1' = 0$, $0' = 1$,

3) виконуються закони де Моргана: $(x\wedge y)' = x'\vee y'$, $(x\vee y)' = x'\wedge y'$.

Доведення. Нехай y, z – доповнення x. Тоді $x\wedge y = 0$, $x\vee y = 1$, $x\wedge z = 0$, $x\vee z = 1$. Маємо:

$y = y\wedge 1 = y\wedge(x\vee z) = (y\wedge x) \vee (y\wedge z) = 0 \vee (y\wedge z) = y\wedge z$,

$z = z\wedge 1 = z\wedge(x\vee y) = (z\wedge x) \vee (z\wedge y) = 0 \vee (z\wedge y) = z\wedge y = y\wedge z$.

Звідки отримуємо, що $z = y$.

Тотожність (1) доводиться очевидно. Доведемо (2). З $1\wedge 0 = 0$ та $0'\wedge 0 = 0$ випливає $1 = 0'$. Аналогічно, з $1\vee 0 = 1$ та $1'\vee 1 = 1$, $1' = 0$.

Доведемо (3). Якщо елементи x та y мають доповнення x' та y' відповідно, то елемент $x\wedge y$ має доповнення $(x\wedge y)'$, а елемент $x\vee y$ – $(x\vee y)'$. Через те, що доповнення єдине для доведення першої рівності з (3) досить показати, що

$(x\wedge y) \vee (x'\vee y') = 1$ та $(x\wedge y) \wedge (x'\vee y') = 0$.

Дійсно, $(x\wedge y) \vee (x'\vee y') = (x'\vee y'\vee x) \wedge (x'\vee y'\vee y) = 1\wedge 1 = 1$,

$(x\wedge y) \wedge (x'\vee y') = (x\wedge y\wedge x') \vee (x\wedge y\wedge y') = 0\vee 0 = 0$.

Друга тотожність доводиться аналогічно. ►

Через те, що доповнення у булевих ґратках єдині, то їх можна розглядати як алгебру.

Означення 8.7. **Булевою алгеброю** $B = \langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ називається алгебра з двома булевими операціями $\vee$ та $\wedge$, однією унарною операцією ’ та двома нульарними операціями (константами) 0 та 1, для яких виконуються:

1. $a\vee a = a$, $a\wedge a = a$;	самопоглинання
2. $a\vee b = b\vee a$, $a\wedge b = b\wedge a$	комутативність
3. $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$	Асоціативність
4. $(a\wedge b)\vee a = a$, $(a\vee b) \wedge a = a$	поглинання
5. $a\vee(b\wedge c) = (a\wedge b) \vee (a\wedge c)$ $a\wedge(b\vee c) = (a\vee b) \wedge (a\vee c)$	дистрибутивність
6. $a\vee 1 = 1$, $a\wedge 0 = 0$ $a\vee 0 = a$, $a\wedge 1 = a$	властивості 0 та 1
7. $(a')' = a$	властивості доповнення

8. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ закони де Моргана

9. $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$ існування доповнення

Наприклад, $\langle P(M);\ \cup,\ \cap,\ \bar{}\ \rangle$ - булева алгебра, причому M – верхня межа, $\varnothing$ - нижня межа, “$\subset$” – природній частковий порядок.

$\langle \{0, 1\};\ \wedge,\ \vee,\ \neg \rangle$ – булева алгебра, причому 1 – верхня межа, 0 – нижня межа.

Будь-яке поле множин і, зокрема, множина всіх підмножин деякої множини є булевою алгеброю. Довільна підалгебра булевої алгебри сама також є булевою алгеброю. Прямий (декартовий) добуток булевих алгебр є булевою алгеброю.