Тема 15. Числення висловлювань

15.1. Числення висловлювань

В попередній темі було уведено означення формальної теорії та розглянуто загальні властивості формальних теорій, а також правила виведення та властивості виведення у формальних теоріях, включаючи виведення з гіпотезами. В цій темі розглядається числення висловлювань – конкретний приклад формальної теорії. Можна сказати, що це числення є базовим та, в деякому сенсі, найпростішим, тому знайомство з формальними теоріями прийнято починати саме з нього.

Для того, щоб означити числення висловлювань, ми маємо задати його складові як формальної системи: алфавіт, формули, аксіоми та правила виведення.

Означення 15.1. **Числення висловлювань** – це формальна теорія L, в якій:

1) Алфавіт включає пропозиційні літери: A, B, C,... з індексами або без; пропозиційні зв'язки: $\neg$ (заперечення) та $\rightarrow$ (імплікація); допоміжні символи: (та);
2) Визначення формули числення L:
   - Довільна пропозиційна літера є формулою.
   - Якщо A та B формули, то формулами також є $(\neg A)$ та $(A\rightarrow B)$.
   - Інших формул в численні L не існує.
3) У численні L визначена нескінченна множина аксіом, які будуються за допомогою трьох **схем аксіом**:
   A1. $A\rightarrow (B\rightarrow A)$;
   A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$;
   A3. $(\neg B\rightarrow\neg A) \rightarrow ((\neg B\rightarrow A) \rightarrow B)$.
4) У численні L визначено єдине правило виведення МP: $A, A\rightarrow B \vdash B$.

У пункті 3 визначення числення висловлювань йде мова про схеми аксіом. Це означає, що для отримання конкретної аксіоми, ми маємо взяти одну з трьох схем ($A1$, $A2$, $A3$) та замість пропозиційних літер, які входять до неї, підставити певні формули (якими також є й атомарні формули, тобто пропозиційні літери). До того ж, замість однієї й тієї самої пропозиційної літери аксіоми ми маємо підставляти одну й ту саму формулу. Наприклад, зі схеми $A1$ отримуються такі аксіоми:

- $A\rightarrow (A\rightarrow A)$,
- $(A\rightarrow B) \rightarrow (B\rightarrow(A\rightarrow B))$,
- $A \rightarrow (\neg A\rightarrow A)$.

Слід звернути увагу на те, що в численні висловлювань використовуються тільки символи зв'язок імплікації та заперечення. Як і в алгебрі висловлювань, це робиться для зменшення кількості операцій. Інші зв'язки ми можемо виразити за допомогою імплікації та заперечення:

- $A\wedge B$ означає $\neg(A\rightarrow\neg B)$;
- $A\vee B$ означає $\neg A\rightarrow B$;
- $A\sim B$ означає $\neg((A\rightarrow B) \rightarrow \neg(B\rightarrow A))$.

Тепер ми можемо розглянути приклади виведення теорем у теорії L. Доведемо теорему $A\rightarrow A$. Оскільки єдиним правилом виведення є МР, то нам потрібно взяти таку аксіому, щоб формула $A\rightarrow A$ була у кінці формули. Для цього підходять перші дві схеми аксіом. Третя не підходить, тому що в ній зустрічається зв'язка заперечення, яка не присутня у теоремі, яку ми доводимо. У схемі $A1$ формула $A\rightarrow A$ з'являється вкінці, якщо замінити літеру B на A. Але для того, щоб вивести формулу $A\rightarrow A$ з $A \rightarrow (A\rightarrow A)$ за правилом МР нам необхідна наявність вже виведеної формули A. Тож перша схема не підходить.

Розглянемо схему $A2$ и змінимо літери B та C на формули $A\rightarrow A$ та A відповідно. Отримаємо аксіому:

$$(A\rightarrow((A\rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A\rightarrow (A\rightarrow A)) \rightarrow (A\rightarrow A)).$$

Як ми бачимо, в кінці цієї аксіоми зустрічається потрібна нам формула $A \to A$. Але для її виведення нам потрібні тепер вивести дві формули: $A \to ((A \to A) \to A)$ та $A \to (A \to A)$. Обидві формули ми отримуємо з першої схеми за підстановкою замість літери B формул $A \to A$ та A відповідно.

Підсумуємо наші міркування, записавши їх у вигляді наступного виводу, наводячи для кожного пункту схему аксіом або правило виведення із засновками, які застосовувались для отримання цього пункту.

Теорема $L1$. $\vdash A \to A$

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	$A2$
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	$A1$
3.	$A \to (A \to A)$	$A1$
4.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP (1,2)
5.	$A \to A$	MP (3,4)

Наведемо приклад виведення ще двох теорем теорії L.

Теорема $L2$. $A \vdash B \to A$

1.	A	гіпотеза
2.	$A \to (B \to A)$	$A1$
3.	$B \to A$	MP (1,2)

Теорема $L3$. $\vdash (\neg A \to A) \to A$

1.	$(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$	$A3$
2.	$\neg A \to \neg A$	$L1$
3.	$(\neg A \to A) \to A$	MP (1,2)

В останньому виводі ми використали вже виведену теорему $L1$. Це дозволяє нам зробити третя властивість виведень з гіпотезами (див. тему 14).

15.2. Теорема дедукції

У математичних міркуваннях часто якесь твердження B доводиться у припущенні правильності якогось іншого твердження A, після чого встановлюють, що правильним є твердження "якщо A, то B". У численні висловлювань цей метод обґрунтовується такою теоремою.

Теорема 15.1 (теорема дедукції Ербрана). Нехай Γ – множина формул, A і B – формули й $\Gamma, A \vdash B$. Тоді $\Gamma \vdash A \to B$.

Доведення. Нехай $B_1,...,B_n$ є виведенням B з Γ та A. Доведення проведемо методом індукції за n – довжиною виведення. При n=1 формула B збігається з B_1. Згідно з означенням виведення можливі є три випадки:

- B_1 – аксіома:

1.	$\vdash B_1$	
2.	$\vdash B_1 \to (A \to B_1)$	$A1$
3.	$\vdash A \to B_1$	за правилом MP
4.	$\Gamma \vdash A \to B_1$	за першою властивістю виведення з гіпотезами.

- B_1 – формула з множини Γ – доведення аналогічно попередньому пунктові.
- B_1 збігається з A. Але ми вже довели теорему $L1$: $\vdash A \to A$ і за першою властивістю виведення з гіпотезами маємо $\Gamma \vdash A \to A$.

Припустимо тепер, що коли довжина виведення B з Γ, A менша від n, твердження теореми є правильним. Доведемо його для випадку, коли довжина виведення дорівнює n. При цьому можливі чотири випадки:

- B_n – аксіома – доводиться аналогічно коли n=1;
- B_n – формула з множини Γ – доводиться аналогічно коли n=1;
- B_n збігається з A – доводиться аналогічно коли n=1;
- B_n виводиться за MP з попередніх формул, тобто у послідовності $B_1,...,B_n$ є формули: B_m та $B_l = B_m \to B_n$, $l<n$, $m<n$. Тоді за припущенням індукції маємо:

1. $\Gamma \vdash A \to B_m$
2. $\Gamma \vdash A \to B_l$, тобто $\Gamma \vdash A \to (B_m \to B_n)$
3. $\Gamma \vdash (A \to (B_m \to B_n)) \to ((A \to B_m) \to (A \to B_n))$ $A2$
4. $\Gamma \vdash (A \to B_m) \to (A \to B_n)$ МР (2,3)
5. $\Gamma \vdash A \to B_n$ МР (1,4)

Теорему доведено. ►

Справедлива обернена зворотна теорема дедукції.

Теорема 15.2 (зворотна теорема дедукції). Якщо існує вивід $\Gamma \vdash A \to B$, то формула B виводиться з Γ та A, тобто якщо $\Gamma \vdash A \to B$, то $\Gamma, A \vdash B$.

Доведення. Нехай вивід формули $A \to B$ має вигляд: $B_1,...,B_{n-1}, A \to B$, де $B_1,...,B_{n-1}$ – формули з множини Γ. Тоді вивід формули B з Γ та A буде мати вигляд: $B_1,...,B_{n-1}, A \to B, A, B$, так як B слідує з $A \to B$ та A по правилу МР. ►

Теорема дедукції має наступні наслідки.

Наслідок 1 (правило силогізму). $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Побудуємо виведення.

1. $A \to B$ гіпотеза
2. $B \to C$ гіпотеза
3. A гіпотеза
4. B МР (1,3)
5. C МР (2,5)

Тоді отримали $A \to B, B \to C, A \vdash C$. За теоремою дедукції маємо $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Наслідок 2 (правило видалення середньої посилки). $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

Після двократного застосування правила МР дістаємо $A \to (B \to C), B, A \vdash C$. Звідси за теоремою про дедукцію маємо $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

15.3. Приклади виведень у теорії *L*

Застосування теореми дедукції та її наслідків дуже спрощує побудову виведень у теорії L. Наведемо декілька прикладів таких виведень.

Теорема $L4$. $\vdash \neg\neg A \to A$

1. $(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$ А3
2. $\neg A \to \neg A$ $L1$
3. $(\neg A \to \neg\neg A) \to A$ наслідок 2 до 1,2
4. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ А1
5. $\neg\neg A \to A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема $L5$. $\vdash A \to \neg\neg A$

1. $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ А3
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$ $L4$
3. $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ МР (2,3)
4. $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ А1
5. $A \to \neg\neg A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема $L6$. $\vdash \neg A \to (A \to B) \Leftrightarrow \neg A, A \vdash B$

1. $\neg A$ гіпотеза 1
2. A гіпотеза 2
3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ А3
4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ А1
5. $A \to (\neg B \to A)$ А1
6. $\neg B \to \neg A$ М*Р* (1,4)
7. $\neg B \to A$ М*Р* (2,5)
8. $(\neg B \to A) \to B$ М*Р* (3,5)
9. B М*Р* (7,9)

Теорема $L7$. $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \Leftrightarrow \neg A \to \neg B \vdash B \to A$

1. $\neg A \to \neg B$ гіпотеза
2. $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ A3
3. $(\neg A \to B) \to A$ MP (1,2)
4. $B \to (\neg A \to B)$ A1
5. $B \to A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема $L8$. $\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B) \Leftrightarrow B \to A \vdash \neg A \to \neg B$

1. $B \to A$ гіпотеза
2. $\neg\neg B \to B$ $L4$
3. $A \to \neg\neg A$ $L5$
4. $\neg\neg B \to A$ наслідок 1 з 1,2
5. $\neg\neg B \to \neg\neg A$ наслідок 1 з 3,4
6. $(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$ $L7$
7. $\neg A \to \neg B$ MP (5,6)

Теорема $L9$. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B)) \Leftrightarrow A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$

1. A гіпотеза
2. $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ $L8$
3. $A, A \to B \vdash B$ правило MP
4. $A \vdash (A \to B) \to B$ теорема дедукції до 3
5. $(A \to B) \to B$ MP (1,4)
6. $\neg B \to \neg(A \to B)$ MP (2,5)

Теорема $L10$. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B) \Leftrightarrow A \to B, \neg A \to B \vdash B$

1. $A \to B$ гіпотеза 1
2. $\neg A \to B$ гіпотеза 2
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ $L8$
4. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$ $L8$
5. $\neg B \to \neg A$ MP (1,3)
6. $\neg B \to \neg\neg A$ MP (2,4)
7. $(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$ A3
8. $(\neg B \to \neg A) \to B$ MP (6,7)
9. B MP (5,8)

15.4. Інші формалізації логіки висловлювань

Теорія L не є єдиною можливою формалізацією числення висловлювань. Її основна перевага – лаконічність при збереженні певної наочності. Дійсно, у теорії L всього лиш дві зв'язки, три схеми аксіом та одне правило. Відомі також і інші формалізації числення висловлювань, запропоновані різними авторами.

Теорія L_1 (Гілберт, Акерман). Основні зв'язки: $\vee$, $\neg$ ($A \to B = \neg A \vee B$).

Схеми аксіом:

A1. $A \vee A \to A$

A2. $A \to A \vee B$

A3. $A \vee B \to B \vee A$

A4. $(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$

Правило виведення: MP.

Теорія L_2 (Росер). Основні зв'язки: $\wedge$, $\neg$ ($A \to B = \neg(A \wedge \neg B)$).

Схеми аксіом:

A1. $A \to (A \wedge A)$

A2. $(A \wedge B) \to A$

A3. $(C \to B) \to (\neg(A \wedge B) \to \neg(C \wedge A))$

Правило виведення: MP.

Теорія L_4 (Кліні). Основні зв'язки: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$.

Схеми аксіом:

А1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

А2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

А3. $(A \wedge B) \rightarrow A$

А4. $(A \wedge B) \rightarrow B$

А5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

А6. $A \rightarrow A \vee B$

А7. $B \rightarrow A \vee B$

А8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

А9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.

А10. $\neg\neg A \rightarrow A$

Правило виведення: М*Р*.

15.5. Модельні властивості теорії *L*

У минулій лекції нами були розглянуті властивості, якими можуть володіти формальні теорії. Розглянемо виконуваність цих властивостей для теорії *L*. В якості інтерпретації формальної теорії *L* оберемо алгебру висловлювань. Поставимо у відповідність кожній літері теорії *L* пропозиційну літеру, кожній формулі *L* – формулу логіки висловлювань, кожній теоремі – тавтологію логіки висловлювань. Неважко пересвідчитись, що схеми аксіом теорії *L* є тавтологіями алгебри висловлювань. Відповідно, логіка висловлювань є моделлю теорії *L*.

Теорема 15.3 (повнота теорії *L*). Формула *A* виводиться у теорії *L* тоді і тільки тоді, коли *A* – тавтологія.

Доведення. В один бік доведення випливає з того факту, що аксіоми А1 – А3 є тавтологіями, в чому неважко пересвідчитись, побудувавши для них таблиці істинності. А застосування правила МР до тавтологій зберігає логічне слідування, тобто отримані формули також будуть тавтологіями (див. теорему 14.3). Отже, всяка теорема теорії *L* – тавтологія.

Доведення в протилежний бік в рамках даного курсу не розглядається. Додатково з ним можна ознайомитись у [2, 4, 7, 9, 11]. ►

Теорема 15.4. Теорія *L* несуперечлива.

Доведення. Кожна теорема теорії *L* є тавтологією логіки висловлювань. Заперечення формули, яка є тавтологією, відповідно, не є тавтологією. Отже, для жодної формули *A* неможливо, щоби *A* та $\neg A$ були теоремами теорії *L*. ►

Теорема 15.5. Теорія *L* неповна у широкому сенсі.

Доведення. Дійсно, не всяка формула або її заперечення є теоремами теорії *L*. Якщо взяти нейтральну формулу логіки висловлювань, то її заперечення також є нейтральною формулою, тобто ані сама формула, ані її заперечення не є тавтологіями алгебри висловлювань. Тому ці формули не є теоремами числення *L*. ►

Теорема 15.6. Теорія *L* повна у вузькому сенсі.

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що теорія *L* стає суперечливою при додаванні до її системи аксіом довільної формули цієї теорії, яка не доводиться.

Дійсно, теорія *L* має три схеми аксіом А1, А2, А3 та правило виведення МР. Побудуємо нову теорію L', додавши до системи аксіом *L* формулу *A*, яка не є тавтологією логіки висловлювань. Тоді формула *A* приймає хоча б одне хибне значення на деякій інтерпретації. Значить, якщо *A* представлена кон'юнктивною нормальною формою, то ця форма має містити хоча б одну елементарну диз'юнкцію δ, яка не містить жодну змінну разом із її запереченням: $\delta = B'_1 \vee \ldots \vee B'_n$, де $B'_i = \neg B_i$, якщо $|B_i| = \text{T}$, та $B'_i = B_i$, якщо $|B_i| = \text{F}$. У елементарній диз'юнкції δ замінимо кожне входження пропозиційної літери B_i на B, якщо $|B_i| = \text{F}$, та на $\neg B$, якщо $|B_i| = \text{T}$. Отримуємо: $\delta' = B \vee \neg\neg B \vee \ldots \vee B \vee \neg\neg B = B$. Зробимо іншу заміну: змінемо B_i на B, якщо $|B_i| = \text{T}$, та на $\neg B$, якщо $|B_i| = \text{F}$. Тоді, $\delta'' = \neg B \vee \ldots \vee \neg B = \neg B$. У новій теорії L'.

У новій теорії L' формула A – аксіома, тобто $\vdash A$. Оскільки A може бути представлена у ДКНФ, то за правилом видалення $\wedge$ довільна елементарна диз'юнкція δ кон'юнктивної нормальної форми також може бути доведена. А через те, що диз'нкція δ може бути представлена у вигляді як δ, так і δ' то в L' виконується і $\vdash \delta$, і $\vdash \delta'$ а це означає, що $\vdash B$ і $\vdash \neg B$. Тобто теорія L' суперечлива. ►

Теорема 15.7. Теорія L роз'вязувана.

Доведення. Це справедливо за тим міркуванням, що для кожної теореми теорії існує відповідна тавтологія, а для довільної тавтології можна побудувати таблицю істинності. ►

Теорема 15.8. Схеми аксіом А1, А2, А3 у теорії L незалежні.

Доведення. Для кожної зі схем аксіом ми маємо показати, що їй властива певна особливість, яку не мають інші схеми аксіом. Або ж навпаки, якщо дві з трьох схем мають певну особливість, то її не має схема, яка залишилась. До того ж, ця особливість, якщо вона виконується для певних схем, має зберігатись при використанні до цих схем правила виведення МР.

Доведемо незалежність А1. Для цього розглянемо наступні таблиці істинності для зв'язок заперечення та імплікації у трьохзначній логіці.

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

Табл. 15.1,а.

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Табл. 15.1,б.

Для довільних розподілень значень 0, 1, 2 для літер, які входять у формулу А, ці таблиці дозволяють знайти відповідне значення формули A. Якщо формула A завжди приймає значення 0, то вона називається виділеною. Правило МР зберігає цю властивість. В цьому можна пересвідчитись, звернувши увагу на перший рядок таблиці 15.1,б. Також неважко пересвідчитись в тому, що довільна аксіома, яка отримується за схемами А2 або А3, також буде виділеною. Відповідно, виділеною також буде і довільна формула, яка отримується з А2 та А3 за допомогою МР. Але формула $A \to (B \to A)$, яка є частковим випадком А1, не є виділеною, тому що вона приймає значення 2, коли A приймає значення 1 та B приймає значення 2.

Доведення незалежності А2 та А3 є аналогічним, тільки розглядаються інші варіанти таблиць 15.1. Для додаткової інформації можна звернутись до [7]. ►

15.6. Інші методи перевірки тотожної істинності формул логіки висловлювань

Таким чином, на даний момент ми знаємо принаймні три способи перевірки для довільної формули логіки висловлювань чи є вона тавтологією, тобто чи є вона тотожньо істинною. Перший, тривіальний, полягає в побудові таблиці істинності для цієї формули. Ми можемо це зробити через те, що кількість літер, що входять у довільну формулу є скінченною (n), а кількість можливих кортежів значень, що їх можуть приймати ці літери, відповідно, дорівнюватиме 2^n, що також є скінченним числом. Отже, за скінченну кількість кроків ми можемо побудувати таблицю істинності і, якщо в кожному рядку буде стояти значення Т, то цим буде доведено тотожна істинність обраної формули.

Другий метод відноситься до булевої алгебри. Тому він, відповідно, й називається – алгебраїчний. Він полягає у зведенні довільної формули логіки висловлювань до ДНФ або

КНФ. Якщо під час такого зведення формула перетвориться на 1, тобто T, то це й буде означати її тотожну істинність.

Третій метод був розглянутий у цій лекції і полягає у побудові для обраної формули виводу у формальній теорії L. Через те, що ця теорія є аксіоматичною, то й метод має відповідну назву – аксіоматичний. Якщо у теорії L побудований вивід для певної формули з використанням лише трьох схем аксіом A1, A2, A3, то за властивістю повноти теорії отримуємо, що ця формула буде тавтологією, тобто тотожньо істинною.

Перший метод є найпростішим, але й водночас найгроміздкішим. Якщо ж порівнювати другий метод із третім, то з'ясується, що для певних формул найліпшим, тобто економнішим за обчислювальними витратами, буде другий, а для інших - третій.

Нижче ми розглянемо ще два методи: метод Квайна та метод редукції. Для них так само не можна сказати, який з них у порівнянні з рештою є кращим: для формул різного вигляду найкращими будуть різні методи.

Отже, **метод Квайна** полягає в наступному. Нехай $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – упорядкована множина пропозиційних літер, що зустрічаються у формулі $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Візьмемо першу з літер – A_1 і припишемо їй, наприклад, значення T (F). Підставимо це значення у формулу P і виконаємо обчислення, які можуть виникнути в результаті такої підстановки. Після виконання обчислень одержимо деяку формулу $P'(A_2, \ldots, A_n)$, до якої знову застосовується описана процедура, тобто вибираємо літера A_2, приписується їй значення T (F), виконується обчислення і т.д. Може трапитися так, що на деякому кроці буде отримана формула P'', яка є тавтологією або суперечністю незалежно від значень висловлювань, які входять до складу формули P''. Отже, на цьому кроці роботу алгоритму можна зупинити. Таким чином, метод Квайна в деяких випадках приводить до розгляду значно меншої кількості інтерпретацій, ніж тривіальний алгоритм побудови таблиць істинності.

Наприклад, розглянемо формулу $P = (((A \wedge B) \to C) \wedge (A \to B)) \to (A \to C)$. Множина літер $\{A, B, C\}$. Вибираємо літеру A. При цьому можливі два випадки:

1) A = T. Тоді

$P = (((\mathrm{T} \wedge B) \to C) \wedge (\mathrm{T} \to B)) \to (\mathrm{T} \to C) = ((B \to C) \wedge B) \to C = P'$.

Тепер вибираємо B і розглядаємо знову можливі випадки:

1.1) B = T. Тоді $P' = ((\mathrm{T} \to C) \wedge \mathrm{T}) \to C = (C \wedge \mathrm{T}) \to C = C \to C$ – тавтологія.

1.2) B = F. Тоді $P' = ((\mathrm{F} \to C) \wedge \mathrm{F}) \to C = (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \to C = \mathrm{F} \to C = \mathrm{T}$.

2) A = F. Тоді:

$P = (((\mathrm{F} \wedge B) \to C) \wedge (\mathrm{F} \to B)) \to (\mathrm{F} \to C) = ((\mathrm{F} \to C) \wedge \mathrm{T}) \to \mathrm{T} = (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}) \to \mathrm{T} = \mathrm{T} \to \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

Отже, дана формула є тавтологією.

Метод редукції дає можливість виконувати перевірку формул логіки висловлювань шляхом зведення до абсурду. Він особливо зручний, коли в записі формули зустрічається багато імплікацій.

Нехай формула P має вигляд імплікації, наприклад, $P = A \to B$. Припустимо, що в деякій інтерпретації I формула P приймає значення F. Тоді у відповідності з таблицею істинності для імплікації маємо A = T та B = F. Таким чином, перевірка формули P зводиться до перевірки формул A та B. Після цього даний процес застосовується до формул A та B і т.д.

Наприклад, маємо формулу $P = ((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$. Нехай для деякої інтерпретації I маємо P = F. Тоді $(A \wedge B) \to C$ = T, а $A \to (B \to C)$ = F. Застосуємо цю процедуру до другої з формул. Отримуємо A = T та $B \to C$ = F. Звідси знаходимо, що A = T, B = T, C = F. Але при отриманих значеннях $(A \wedge B) \to C$ = F, що суперечить припущенню. Отже, формула P тотожньо істинна.