Тема 36. Незалежні множини вершин. Паросполучення

36.1. Незалежні множини вершин. Кліки

Означення 36.1. Нехай G — простий граф. Множину його вершин називають **незалежною** (або **внутрішньо стійкою**), якщо ніякі вершини цієї множини не суміжні. Незалежну множину називають **максимальною**, якщо вона не є підмножиною жодної іншої незалежної множини з більшою кількістю вершин. Найпотужнішу максимальну незалежну множину називають **найбільшою**. Кількість вершин у найбільшій незалежній множині графа G називають **числом незалежності** (**числом внутрішньої стійкості, нещільністю**) і позначають $\alpha(G)$.

Наприклад, у графі на рис. 36.1 розглянемо множину вершин $Y_1 = \{v_7, v_8, v_2, v_5\}$, $Y_2 = \{v_7, v_8, v_2\}$, $Y_3 = \{v_1, v_3, v_7\}$, $Y_4 = \{v_4, v_6\}$. Максимальні незалежні множини – Y_1, Y_3 та Y_4. Множина Y_2 незалежна, але не максимальна. Найбільша незалежна множина – $Y_1 = \{v_7, v_8, v_2, v_5\}$. Отже $\alpha(G) = 4$.

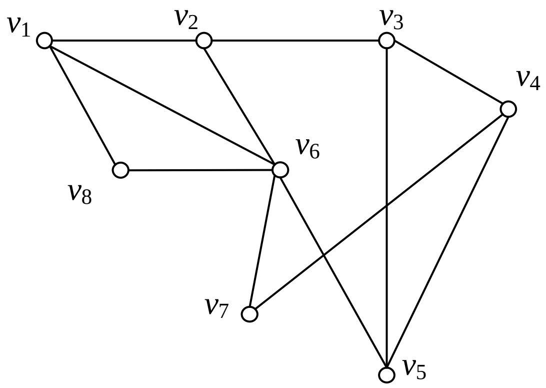


Рис. 36.1.

Для повного графа $\alpha(K_n) = 1$. Для повного дводольного графа $\alpha(K_{m,n}) = \max(m, n)$. Для незв'язного графа $\alpha(G_1 \cup G_2) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$.

Із поняттям незалежності в графі пов'язане поняття домінування.

Означення 36.2. Підмножину V' вершин графа $G = (V, E)$ називають **домінантною** (або **зовнішньо стійкою**), якщо кожна вершина з $V \backslash V'$ суміжна з якоюсь вершиною з V'. Інакше кажучи, кожна вершина графа віддалена від домінантної множини не більше, ніж на одиницю. Домінантна множина має назву **мінімальної**, якщо жодна з її власних підмножин не домінантна. Домінантну множину з найменшою потужністю називають **найменшою**.

У відшуканні в графі найменшої домінантної множини полягає зміст багатьох практичних задач. Типова задача така. Є множина населених пунктів, зв'язаних дорогами. У деяких із них потрібно розмістити підприємства обслуговування так, щоб віддаль від кожного з населених пунктів до будь-якого підприємства не перевищувала заданої величини. Розміщення слід виконати так, щоб обійтися мінімальною кількістю підприємств. Населеним пунктам поставимо у відповідність вершини графа, у якому дві вершини з'єднано ребром тоді й лише тоді, коли віддаль між відповідними пунктами не перевищує заданої величини. Тоді задача зводиться до побудови в цьому графі найменшої домінантної множини.

Уведемо ще одне поняття, пов'язане з поняттям незалежності.

Означення 36.3. Говорять, що вершина й ребро графа **покривають одне одного**, якщо вони інцидентні. Отже, ребро $e = \{u, v\}$ покриває вершини u та v, а кожна з цих вершин покриває ребро e.

Означення 36.4. Підмножину вершин $V' \subset V$ називають **покриттям** (**вершинним покриттям, опорою**) графа $G = (V, E)$, якщо кожне ребро з E інцидентне принаймні одній вершині з V'. Покриття графа G називають **мінімальним**, якщо воно не містить покриття з меншою кількістю вершин, і **найменшим**, якщо кількість вершин у ньому найменша серед усіх покриттів графа G. Кількість вершин у найменшому покритті графа G називають **числом покриття** (або **числом вершинного покриття**) графа G та позначають як $\beta(G)$.

У графі на рис. 36.1 кожна з множин $X_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, $X_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $X_3 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_8\}$, $X_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7, v_8\}$ являє собою покриття, причому X_1 – найменше покриття, а X_3, X_4 – мінімальні.

Для повного графа $\beta(K_n) = n - 1$. Для повного дводольного графа $\beta(K_{m,n}) = \min(m, n)$. Для незв'язного графа $\beta(G_1 \cup G_2) = \beta(G_1) + \beta(G_2)$.

Наступна теорема свідчить про тісний зв'язок між покриттями та незалежними множинами графа.

<u>Теорема 36.1.</u> Множина X вершин графа $G = (V, E)$ являє собою (найменше, мінімальне) покриття тоді й лише тоді, коли $Y = V \setminus X$ – (найбільша, максимальна) незалежна множина. Отже, $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

Доведення. За означенням множина Y незалежна тоді й лише тоді, коли в графі немає ребра, обидва кінці якого містяться в Y, тобто хоча б один із кінців кожного ребра належить X. Останнє означає, що X — вершинне покриття. Оскільки $|Y| + |X| = |V|$, то, очевидно, найбільшим Y відповідають найменші X і навпаки. ►

Протилежне до поняття незалежної множини поняття кліки.

<u>Означення 36.5.</u> Підмножину $V' \subset V$ вершин графа G називають **клікою**, якщо будь-які дві вершини з V' суміжні, тобто породжений підграф $G(V')$ повний. Кліку називають **максимальною**, якщо вона не є підмножиною жодної іншої кліки з більшою кількістю вершин. Найпотужнішу максимальну кліку називають **найбільшою.** Кількість вершин у найбільшій кліці графа називають **щільністю**, або **кліковим числом**, і позначають $\varphi(G)$.

<u>Означення 36.6.</u> **Доповнювальним** до графа G називають граф $\overline{G}$ з тією самою множиною вершин, будь-які дві вершини якого з'єднано ребром тоді й лише тоді, коли їх не з'єднано ребром у графі G.

<u>Теорема 36.2.</u> Підмножина вершин графа G являє собою кліку тоді й лише тоді, коли вона незалежна в доповнювальному графі $\overline{G}$. Отже, $\varphi(G) = \alpha(\overline{G})$.

Доведення випливає з означень.

36.2. Побудова всіх максимальних незалежних множин вершин у простому графі

Із теореми 36.2 випливає, що побудову максимальної кліки можна звести до побудови максимальної незалежної множини вершин. Один із методів побудови такої множини ґрунтується на застосуванні бектрекінгу. Розглянемо його. Нехай маємо граф $G = (V, E)$, який подано відповідністю Г, котра показує, як зв'язані між собою вершини (див. тему 24).

Почнемо з порожньої множини та будемо додавати до неї вершини зі збереженням незалежності. Нехай S_k – уже отримана множина з k вершин, Q_k – множина вершин, котрі можна додати до S_k, тобто $S_k \cap \Gamma(Q_k) = \varnothing$. Серед вершин Q_k розрізняють ті, котрі вже було використано для розширення S_k (їх позначають Q^-_k), і ті, котрі ще не використано (їх позначають Q^+_k). Загальна схема алгоритму бектрекінгу для задачі побудови максимальних незалежних множин вершин у простому графі має такий вигляд.

Прямий крок від k до k+1 полягає у виборі вершини $x \in Q^+_k$:

- $S_{k+1} = S_k \cup \{x\}$;
- $Q^-_{k+1} = Q^-_k \setminus \Gamma(x)$;
- $Q^+_{k+1} = Q^+_k \setminus (\Gamma(x) \cup \{x\})$.

Крок повернення від k+1 до k:

- $S_k = S_{k+1} \setminus \{x\}$;
- $Q^+_k = Q^+_k \setminus \{x\}$;
- $Q^-_{k+1} = Q^-_k \cup \{x\}$.

Якщо множина вершин S_k максимальна, то $Q^+_k = \varnothing$. Якщо $Q^+_k \neq \varnothing$, то множину S_k було розширено раніше, і вона не максимальна. Отже, перевірку максимальності задають такою умовою: $Q^+_k = Q^-_k = \varnothing$.

Доцільно намагатися почати кроки повернення якомога раніше, бо це обмежить розміри «непотрібної» частини дерева пошуку. У зв'язку з цим зауважимо таке. Нехай $v \in Q^-_k$ і $\Gamma(v) \cap Q^+_k = \varnothing$. Цю вершину неможливо вилучити з Q^-_k, оскільки можна вилучити лише вершини, суміжні з вершинами множини Q^+_k. Отже, існування такої вершини v, що $v \in Q^-_k$ і $\Gamma(v) \cap Q^+_k = \varnothing$ - достатня умова для повернення. Окрім того, $k \le n-1$.

36.3. Паросполучення в графах. Теорема Холла

Означення 36.7. **Паросполученням** або **незалежною множиною ребер** у простому графі $G = (V, E)$ називають множину ребер, у якій ніякі два ребра не суміжні. Паросполучення графа G називають **максимальним**, якщо воно не міститься в жодному паросполученні з більшою кількістю ребер, і **найбільшим**, якщо кількість ребер у ньому найбільша серед усіх парасполучень графа G.

Теорема Холла має багато різних застосувань, два з яких ми розглянемо перед тим, як сформулювати цю теорему.

1. Задача про весілля. Розглянемо множину юнаків, кожний з яких знайомий із кількома дівчатами (табл. 36.1). Потрібно визначити умови, за яких кожен з юнаків міг би одружитися зі знайомою йому дівчиною.

Юнак	Дівчата, з якими знайомий юнак
b_1	g_1, g_4, g_5
b_2	g_1
b_3	g_2, g_3, g_4
b_4	g_2, g_4

Табл. 36.1.

2. Досконале паросполучення. Нехай граф $G = (V, E)$ – дводольний граф ($V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, кінці ребер належать різним множинам V_1, V_2). **Досконалим паросполученням** із V_1 у V_2 називають паросполучення, яке покриває вершини V_1 (тобто всі вершини з V_1 інцидентні ребрам, що утворюють паросполучення). За яких умов існує досконале паросполучення з V_1 у V_2?

Можна довести, що задачі 1 та 2 – це по суті, одна й та сама задача. Нехай V_1 – множина юнаків, V_2 – множина дівчат; ребра — знайомства юнаків із дівчатами (рис. 36.2). У такому разі досконале паросполучення у дводольному графі — це шукана множина весіль (один із можливих розв'язків на рисунку зображено потовщеними лініями).

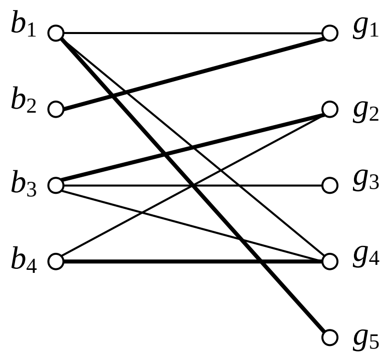


Рис. 36.2.

Теорема 36.3 (Холла). Нехай $G = (V, E)$ – дводольний граф, $V = V_1 \cup V_2$. Досконале паросполучення з V_1 у V_2 існує тоді й тільки тоді, коли для кожної множини $A \subset V_1$ виконується умова $|A| \le |\Gamma(A)|$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує досконале паросполучення з V_1 у V_2. Тоді множина $\Gamma(A)$ містить $|A|$ вершин із V_2, які відповідають вершинам з A у цьому паросполученні, і, можливо, ще якісь вершини з V_2. Отже, $|A| \le |\Gamma(A)|$.

Достатність. Застосуємо індукцію за кількістю вершин у множині V_1. Нехай $|V_1| = m > 0$. У разі $m = 1$ єдина вершина з V_1 інцидентна принаймні одному ребру. Це ребро і являє собою потрібне паросполучення. Нехай $m > 1$ і теорема справджується для графів, у яких $|V_1| < m$. Окремо розглянемо два можливі випадки.

Випадок 1. Для кожної підмножини $A \subset V_1$, $A \neq V_1$ виконується строга нерівність $|A| < |\Gamma_G(A)|$. Тут і далі в доведенні індекс біля Г показує, якого графу стосується позначення. Виберемо в графі G довільне ребро (x, y). Розглянемо граф $\tilde{G}$, отриманий із графу G вилученням вершин x та у і ребер, які інцидентні цим вершинам:

$$\tilde{V}_1 = V_1 \setminus \{x\}, \tilde{V}_2 = V_2 \setminus \{y\}.$$

$$\tilde{E} = E \setminus \{\{x,u\},\{v,y\} \mid u \in V_2, v \in V_1\}.$$

Отриманий граф $\tilde{G} = (\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2, \tilde{E})$ дводольний, причому $\tilde{V}_1 = m-1$. Нехай $\tilde{A}$ – довільна підмножина множини $\tilde{V}_1$. Оскільки $|\tilde{A}| < |\Gamma_G(\tilde{A})|$, а з множини V_2 вилучено лише одну вершину, то $|\tilde{A}| \le |\Gamma_{\tilde{G}}(\tilde{A})|$. За індуктивним припущенням у графі $\tilde{G}$ існує паросполучення M, яке покриває $\tilde{V}_1$. Додамо до паросполучення M ребро (x, y) і одержимо потрібне паросполучення в графі G.

Випадок 2. У множині V_1 існує така підмножина $A_0 \subset V_1$, $A_0 \neq V_1$, що $|A_0| = |\Gamma_G(A_0)|$. Позначимо $B = A_0 \cup \Gamma_G(A_0)$, і нехай H_1 та H_2 — підграфи графа G, породжені відповідно множинами вершин B та $V \setminus B$.

Розглянемо спочатку підграф H_1. Для будь-якої множини $A \subset A_0$ маємо $\Gamma_G(A) = \Gamma_{H_1}(A)$; отже, $|A| \le |\Gamma_{H_1}(A)|$. Тому за індуктивним припущенням в H_1, існує паросполучення, яке покриває множину A_0.

Тепер розглянемо підграф H_2. Для будь-якої підмножини $A \subset V_1 \setminus A_0$

$$|A_0| + |A| = |A_0 \cup A| \le |\Gamma_G(A_0 \cup A)| = |\Gamma_G(A_0)| + |\Gamma_{H_2}(A)|.$$

З урахуванням рівності $|A_0| = |\Gamma_G(A_0)|$ одержимо, що $|A| \le |\Gamma_{H_2}(A)|$, і за припущенням індукції в графі H_2 існує паросполучення, яке покриває множину $V_1 \setminus A_0$. Об'єднаємо його з паросполученням, яке покриває множину A_0, і отримаємо паросполучення, що покриває всю множину V_1. ►

36.4. Найбільше паросполучення у дводольних графах

Задача побудови найбільшого паросполучення в графі широко розповсюджена, і є ефективні алгоритми її розв'язування. Ці алгоритми ґрунтуються на методі почергових шляхів, ідея якого належить Дж. Петерсену. Нехай M – паросполучення в графі G.

<u>Означення 36.8.</u> Простий шлях, ребра якого почергово входять і не входять в M, називають **почерговим шляхом** відносно паросполучення M. Шлях довжиною 1 за означенням також почерговий. Ребра шляху називають **темними** (**світлими**), якщо вони належать (не належать) паросполученню M. Вершини графа G, інцидентні ребрам із паросполучення M, називають **насиченими**, усі інші вершини − **ненасиченими**.

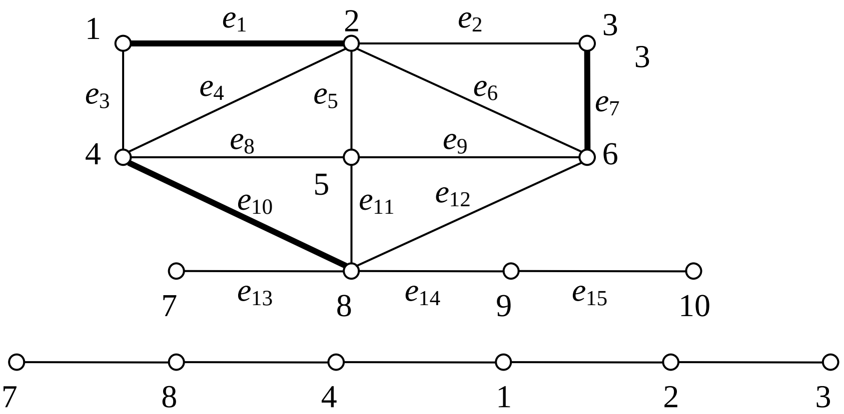


Рис. 36.3.

Розглянемо граф на рис. 36.3. Множина ребер $M = \{e_1, e_7, e_{10}\}$ являє собою паросполучення; L = 7, 8, 4, 1, 2, 5 – почерговий шодо M шлях; $e_1 = (1, 2)$, $e_{10} = (4, 8)$ – темні ребра шляху L; $e_3 = (1, 4)$, $e_5 = (2, 5)$, $e_{13} = (7, 8)$ – світлі; {1, 2, 3, 4, 6, 8} і {5, 7, 9, 10} – множини відповідно насичених і ненасичених вершин.

Очевидно, що коли в графі G існує почерговий відносно паросполучення M шлях, який з'єднує дві різні ненасичені вершини, то в цьому графі можна побудувати паросполучення з більшою кількістю ребер, ніж у паросполученні M. Справді, у такому разі кількість темних ребер на одиницю менша, ніж кількість світлих. Вилучивши з M усі темні ребра та приєднавши всі світлі, отримаємо нове паросполучення, у якому на одне ребро більше. Тому почерговий щодо паросполучення M шлях, який з'єднує дві різні ненасичені вершини, називають **збільшувальним** відносно M шляхом у графі G. Отже, відсутність збільшувальних відносно M шляхів – необхідна умова того, що паросполучення найбільше. Ця ж умова виявляється й достатньою.

Теорема 36.4. Паросполучення M у графі найбільше тоді й лише тоді, коли в цьому графі немає збільшувальних щодо M шляхів.

Доведення. Необхідність, як уже було зазначено, очевидна. Достатність доведемо від протилежного. Нехай M_1 – також паросполучення в графі G, $|M_1| > |M|$. Розглянемо граф H, утворений ребрами $(M \cup M_1) \setminus (M \cap M_1)$. Оскільки довільна його вершина v інцидентна не більше ніж одному ребру кожного паросполучення M і M_1, то її степінь не більший ніж 2. Якщо $deg(v) = 2$, то одне з інцидентних вершині V ребер належить паросполученню M, друге — M_1. Тому будь-яка зв'язна компонента графа H являє собою або цикл, що містить однакову кількість ребер із паросполучень M і M_1, або почерговий відносно M шлях. Але $|M_1| > |M|$, тому серед цих компонент обов'язково є почерговий щодо паросполучення M шлях, крайні ребра якого (перше й останнє) належать M_1. Тоді крайні вершини цього шляху не насичені паросполученням M, що суперечить умові теореми. ►

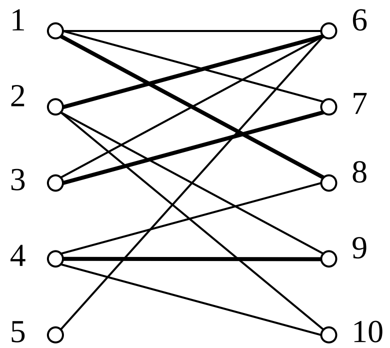
Знову розглянемо граф, зображений на рис. 36.3. Почерговий шлях з'єднує ненасичені вершини 5 і 7. Отже, можна побудувати паросполучення M' із більшою кількістю ребер: $M' = (M \setminus \{e_1, e_{10}\}) \cup \{e_3, e_5, e_{13}\} = \{e_3, e_5, e_7, e_{13}\}$. Паросполучення M' також не найбільше: 9, 10 — збільшувальний щодо M' шлях. Паросполучення $M' = M' \cup \{e_{15}\} = \{e_3, e_5, e_7, e_{13}, e_{15}\}$ найбільше в графі.

Отже, теорема 36.4 підказує таку стратегію пошуку найбільшого паросполучення: почати з довільного паросполучення M_1 і будувати послідовність $M_1, M_2, M_3, ...$, у якій паросполучення M_{k+1} отримано з M_k за допомогою щойно розглянутої зміни вздовж якогось збільшувального шляху. Оскільки $|M_{k+1}| = |M_k| + 1$, то для одержання найбільшого паросполучення потрібно не більше ніж $|V|/2$ ітерацій (тобто переходів від M_k до M_{k+1}). Початкове паросполучення M, завжди є в нашому розпорядженні: можна взяти довільне ребро графа чи, краще, якесь максимальне паросполучення. Тому розробка ефективного алгоритму, що ґрунтується на зазначеній стратегії, зводиться до побудови процедури, яка швидко знаходить збільшувальний шлях у графі чи виявляє, що його немає. Обмежимося дводольними графами, хоча така процедура відома й для довільних графів.

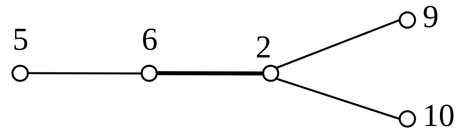
Отже, нехай $G = (V, E)$ – дводольний граф і множину його вершин V розбито на дві підмножини V_1 і V_2, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Побудуємо граф збільшувального шляху за рівнями $i = 0, 1, 2,...$, використовуючи процес, подібний до пошуку вшир. Граф збільшувального шляху рівня 0 містить усі ненасичені вершини з множини V_1. На рівні з непарним номером i додають нові вершини, суміжні з вершинами рівня $i - 1$ і з'єднані світлим ребром (яке не належить паросполученню). Це ребро також додають до будованого графа. На рівні з парним номером i також додають нові вершини, суміжні з вершинами рівня $i - 1$, але з'єднані темним ребром (яке належить паросполученню). Це ребро також додають до графа збільшувального шляху.

Процес побудови продовжують доти, доки до графа почергового шляху можна приєднувати нові вершини. Зазначимо, що ненасичену вершину можна приєднати до цього графа тільки на непарному рівні. У побудованому графі шлях від будь-якої ненасиченої вершини (яка може бути тільки на непарному рівні) до будь-якої вершини рівня 0 – збільшувальний шлях відносно паросполучення *M*.

На рис. 36.4, *а* зображено дводольний граф, а на рис. 36.4, *б* – граф збільшувального шляху для дводольного графа, щодо паросполучення, показаного потовщеними лініями (темні ребра).



а



б

Рис. 36.4

На рівні 0 маємо одну ненасичену вершину 5. На рівні 1 додано світле ребро (5, 6) (яке не належить паросполученню з рис. 36.4, а). На рівні 2 додано темне ребро (6, 2) (яке належить паросполученню). На рівні 3 додано світлі ребра (2, 9) і (2, 10), які не належать паросполученню. Оскільки вершина 10 у графі, зображеному на рис. 36.4, *а* , ненасичена, то можна зупинити процес побудови графа збільшувального шляху. Шлях 10, 2, 6, 5 збільшувальний відносно паросполучення, показаного на рис. 36.4, *а*. Із паросполучення рис. 36.4, *а* вилучимо всі темні ребра, що належать цьому шляху, і додамо всі світлі. Отримаємо нове паросполучення, яке містить на одне ребро більше (рис. 36.5).

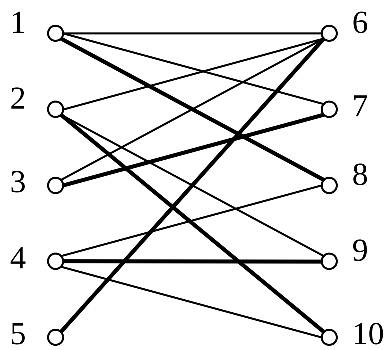


Рис. 36.5.

Для паросполучення, зображеного на рис. 36.5, очевидно, не існує збільшувальних шляхів. Отже, це паросполучення найбільше.

Нехай граф $G = (V, E)$ задано списками суміжності. Тоді на побудову графа збільшувального шляху потрібно часу порядку $O(|E|)$. Для знаходження найбільшого паросполучення, як уже було зазначено, потрібно побудувати не більше ніж $|V|/2$ збільшувальних шляхів. Тому найбільше паросполучення дводольного графа можна знайти за час порядку $O(|V|\cdot|E|)$.