

## Розділ III. Математична логіка

Основи математичної логіки закладено в працях англійського математика Джорджа Буля (1815-1864). Це такі праці, як “Математичний аналіз логіки” (1847) і “Закони мислення” (1854), де він уперше виклав алгебру логіки – алгебру Буля. Її формули застосовні незалежно від того, що мати на увазі під літерами, які вживаються в алгебрі. В алгебрі Буля літери позначають висловлювання, а всі правила звичайної алгебри залишаються без зміни. Оскільки всі наші міркування складаються з висловлювань та думок, булева алгебра є логікою, через що вона дістала назву алгебри логіки.

Дж. Буль запропонував у формулах літерами позначати не числа, а висловлювання і показав, що можна так вибирати дії додавання та множення, щоб формули звичайної алгебри залишалися без зміни. В алгебрі логіки висловлювання розглядаються не за їхнім змістом або значенням, а тільки відносно того, істинні вони чи хибні. Приймається, що кожне висловлювання може бути тільки істинним або хибним.

### Тема 9. Булеві функції

Визначення булевої алгебри було дано в темі 8. Оскільки довільні ґратки можна розглядати як алгебру з двома операціями, булеві ґратки, в якій кожний елемент має єдине доповнення, можна розглядати як булеву алгебру з трьома операціями. Ми розглядаємо мінімальну булеву алгебру, яка містить два елементи: 0 – хибність, 1 – істинність. Операції ґраток (об’єднання, перетин та доповнення) мають інші назви і розглядаються як алгебраїчні операції. Всі властивості булевих ґраток, звісно, зберігаються.

#### 9.1. Основні поняття та способи задання булевих функцій

Булеві функції належать до класу двозначних однорідних функцій. Це найпростіший і водночас найважливіший клас однорідних функцій, що використовуються для опису скінченних автоматів та ЕОМ. Останні, у свою чергу, призначаються для опрацювання дискретної інформації. Як модель засобів опрацювання застосовується поняття автомата.

І хоча символи 0 та 1 – елементи булевої алгебри – є абстрактними, зручніше розглядати булеву алгебру як таку, що оперує висловлюваннями. Образно кажучи, висловлення – це деяке твердження, про яке можна сказати, що воно є істинним або хибним. Наприклад, “Київ – столиця України”, “Земля – третя планета від Сонця” – істинні висловлювання, “Квадрат має п’ять сторін” – хибне, а висловлювання “На вулиці сонячна погода” може бути хибним або істинним залежно від додаткових відомостей.

Будемо розглядати функції  $f(x_1, \dots, x_n)$ , аргументи яких визначено на множині  $E_2 = \{0, 1\}$ , такі, що  $f(x_1, \dots, x_n) \in E_2$ , коли  $x_i \in E_2$ ,  $i = 1..n$ . Тобто  $f: E_2^n \rightarrow E_2$ .

Означення 9.1. Функції  $f: E_2^n \rightarrow E_2$ , де  $E_2 = \{0, 1\}$ , називаються **функціями алгебри логіки** або **булевими функціями**. Множину булевих функцій від  $n$  змінних будемо позначати  $P_n$ :  $P_n = \{f \mid f: E_2^n \rightarrow E_2\}$ .

Логічними (булевими) змінними в булевій алгебрі називаються величини, які незалежно від їхньої конкретної суті можуть набувати лише двох значень.

Означення 9.2. Сукупність значень аргументів функції є **кортежем** або **набором**.

Функція, що залежить від  $n$  аргументів, називається  $n$ -місною і є повністю визначеною, якщо задано її значення для всіх наборів (кортежів) значень аргументів.

Наприклад, для булевої функції  $f(x, y, z)$  сукупність значень  $x=1, y=0, z=1$  записується як набір 101.

Існує три способи задання булевої функції: вербальний (або словесний), аналітичний і табличний. Аналітичне задання функції – опис її аналітичним виразом (формулою).

Наприклад,  $f_1(x, y, z) = x \wedge (y \vee z)$ . Одним із поширених способів задання булевої функції є її задання за допомогою таблиці відповідності (істинності).

У табл. 9.1 наведено приклад задання булевої функції від двох змінних. Перші два стовпці містять значення аргументів, а третій – значення функції при відповідних значеннях аргументів. Рядки містять всі можливі кортежі для двох булевих змінних.

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Табл. 9.1. Приклад задання функції за допомогою таблиці істинності.

В загальному випадку для довільного  $n$  таблицю істинності можна представити в наступному вигляді.

$x_1$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	...	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
...	...	...	...	...
1	...	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Табл. 9.2. Загальний вигляд таблиці істинності.

Множину наборів у таблиці істинності прийнято записувати у лексикографічному порядку, так що кожний набір являє двійкове число. Відповідне йому десяткове число будемо називати **номером** набору (кортежу). Так, номер набору 101 дорівнює 5, номер набору 110 – 6.

**Лема 9.1.** Кількість наборів булевої функції  $f(x_1, \dots, x_n)$  від  $n$  змінних дорівнює  $2^n$ . Кількість булевих функцій від  $n$  змінних дорівнює  $2^{2^n}$ .

*Доведення.* Дійсно, множина всіх наборів булевої функції від  $n$  змінних утворена декартовим добутком  $\{0,1\}^n$ , потужність якого дорівнює  $2^n$ . Множина всіх булевих функцій від  $n$  змінних є множина відображень  $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , потужність якого дорівнює  $2^{2^n}$ . ►

Таким чином, булева функція від двох змінних повністю визначена, якщо задано її значення в кожному із чотирьох можливих наборів ( $2^2 = 4$ ); булева функція трьох аргументів – в кожному з восьми наборів ( $2^3 = 8$ ). Кількість різних можливих булевих функцій від двох аргументів дорівнює 16, від трьох – 256.

Функції двох змінних відіграють важливу роль, тому що з них може бути побудована будь-яка булева функція.

## 9.2. Булеві функції однієї змінної

Загальна таблиця істинності для булевих функцій однієї змінної має вигляд табл. 9.3.

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Табл. 9.3. Булеві функції однієї змінної

Тут функції  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  є функціями-константами:  $f_1(x)$  – абсолютно істинна (константа одиниці);  $f_2(x)$  – абсолютно хибна (константа нуля).  $f_3(x)$  – логічне заперечення або НЕ, інверсія  $x$  (читається як “не  $x$ ”, зображується  $\bar{x}$ ), це єдина нетривіальна функція;  $f_4(x)$  – змінна  $x$  (повторює значення змінної  $x$  і тому збігається з нею).

## 9.3. Булеві функції двох змінних

В табл. 9.4 наведено всі функції від двох змінних  $f(x, y)$  з назвами.

Позначення	Назва	Змінна $x$			
		Змінна $y$			
		0	0	1	1
		0	1	0	1
$f_1 = 0$	Константа нуль	0	0	0	0
$f_2 = x \& y = x \wedge y$	Кон'юнкція	0	0	0	1
$f_3 = x \rightarrow y$	Інверсія імплікації	0	0	1	0
$f_4 = x$	Повторення $x$	0	0	1	1
$f_5 = x \leftarrow y$	Інверсія оберненої імплікації	0	1	0	0
$f_6 = y$	Повторення $y$	0	1	0	1
$f_7 = x \oplus y$	Сума за модулем 2	0	1	1	0
$f_8 = x \vee y = x + y$	Диз'юнкція	0	1	1	1
$f_9 = x \downarrow y$	Стрілка Пірса-Вебба	1	0	0	0
$f_{10} = x \equiv y = x \sim y$	Еквівалентність	1	0	0	1
$f_{11} = \bar{y} = \neg y$	Інверсія $y$	1	0	1	0
$f_{12} = x \leftarrow y$	Обернена імплікація	1	0	1	1
$f_{13} = \bar{x} = \neg x$	Інверсія $x$	1	1	0	0
$f_{14} = x \rightarrow y$	Імплікація	1	1	0	1
$f_{15} = x   y$	Штрих Шеффера	1	1	1	0
$f_{16} = 1$	Константа одиниця	1	1	1	1

Табл. 9.4. Булеві функції двох змінних

Як вже зазначалось, булевих функцій від двох змінних 16, з яких шість є константами або функціями одного аргументу:  $f_1 = 0$ ,  $f_4 = x$ ,  $f_6 = y$ ,  $f_{11} = \bar{y}$ ,  $f_{13} = \bar{x}$ ,  $f_{16} = 1$ . Інші 10 функцій залежать від двох змінних і мають свої загальноприйняті позначення та назви.

Функція  $f_2 = x \wedge y$  – кон'юнкція (логічне множення) істинна тоді, коли  $x$  і  $y$  істинні. Кон'юнкцію називають також функцією **I**.

Функція  $f_8 = x \vee y$  – диз'юнкція (логічне додавання) істинна тоді, коли істинними є або  $x$ , або  $y$ , або обидві змінні. Кон'юнкцію називають також функцією **АБО**.

Від диз'юнкції потрібно відрізнити функцію  $f_7 = x \oplus y$ , яка називається додаванням за модулем 2 (диз'юнктивна сума або нерівнозначність) і є істинною, коли істинні або  $x$ , або  $y$  окремо.

Наприклад, маємо два висловлювання: “Завтра буде холодна погода”, “Завтра піде сніг”. Диз'юнкція цих висловлювань – нове висловлення “Завтра буде холодна погода або піде сніг”. З'єднувальний сполучник, що утворив нове висловлення – **АБО**. Кон'юнкція утворюється таким чином: “Завтра буде холодна погода і піде сніг” – за допомогою сполучника **I**.

Функція Шеффера (штрих Шеффера) –  $f_{15} = x | y$ , є хибною тільки тоді, коли  $x$  і  $y$  є істинними. Німецький математик Д. Шеффер на основі цієї функції створив алгебру, названу алгеброю Шеффера.

Функція стрілка Пірса-Вебба – це функція  $f_9 = x \downarrow y$ , що є істинною тільки тоді, коли  $x$  і  $y$  є хибними. Математики Ч. Пірс та Д. Вебб, які незалежно один від одного вивчали властивості цієї функції, створили алгебру, названу алгеброю Пірса-Вебба.

Імплікація – це функція  $f_{14} = x \rightarrow y$ , яка є хибною тоді й тільки тоді, коли  $x$  є істинним, а  $y$  – хибним.

#### 9.4. Булевий простір

Часто для спрощення запису булевої функції замість повного переліку змінних наборів використовують двійкові значення наборів, для яких функція набуває одиничних значень. Наприклад, запис

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1^3 F(1, 4, 7)$$

означає, що функція набуває одиничних значень на наборах 1, 4 і 7. Таку форму запису називають числовою (табл. 9.5).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Табл. 9.5.

**Означення 9.3.** Булевым простором називається множина всіх наборів булевих векторів:  $M = \{X\}$ .

Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам  $x_1, x_2, \dots, x_n$  множини  $X$  двійкові змінні, що позначаються тими самим літерами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , але набувають значень із множини  $\{0, 1\}$ , а у відповідність елементам булевого простору  $M$  поставимо набори (кортежі) змінних, вважаючи, що змінна  $x_i$  набуває значення 1 в деякому кортежі, якщо елемент  $x_i$  множини  $X$  належить відповідному простору  $M$  і набуває значення 0 в іншому випадку.

Таким чином, упорядковану сукупність двійкових змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можна розглядати як деякий змінний вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що набуває значення з множини  $M$  усіх сталих  $n$ -компонентних булевих векторів. Сукупність значень вектора  $X$ , на яких булева функція набуває значення 1, позначимо через  $M^1$ , а сукупність значень, на яких функція перетворюється на 0, - через  $M^0$ . Очевидно,  $M^1 \cup M^0 = M$  (для повністю визначеної булевої функції).

Безпосередній перелік цих векторів можна здійснити за допомогою булевої матриці, кожний рядок якої задає один з елементів множини  $M^1$ . Наприклад, функція

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigvee_1^3 F(3, 6, 10)$  набуває значення 1 на трьох кортежах. Булева матриця має

вигляд

$$\|M^1 \in X\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

## 9.5. Властивості функцій алгебри логіки

**Означення 9.4.** Функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  **суттєво залежить** від змінної  $x_i$ , якщо існує такий набір значень  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ , що

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В цьому випадку змінна  $x_i$  називається **суттєвою** змінною, інакше  $x_i$  називають **несуттєвою (фіктивною)** змінною.

Наприклад, нехай булеві функції  $f_1(x_1, x_2)$  та  $f_2(x_1, x_2)$  задані таблицею істинності:

$x_1$	$x_2$	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для цих функцій змінна  $x_1$  – суттєва, а  $x_2$  – несуттєва.

**Означення 9.5.** Функції  $f_1$  та  $f_2$  називаються рівними, якщо функцію  $f_2$  можна одержати з  $f_1$  додаванням і/або вилученням фіктивних аргументів.

Можна вважати, що коли задано функцію  $f_1$ , то задано також функцію  $f_2$ .

Існують два типи функцій, які не мають суттєвих змінних:

- функція, тотожна 0 (константа 0);
- функція, тотожна 1 (константа 1).

Константи 1 і 0 можна розглядати як функції порожньої множини змінних.

**Означення 9.6.** Булева функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається **симетричною відносно змінних**  $x_1, \dots, x_k$ , якщо для будь-якої підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}$$

стверджується рівність:

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Функції, тотожно рівні константам 1 та 0, є симетричними відносно будь-якої сукупності змінних.

### 9.6. Реалізація булевих функцій формулами

Як і в елементарній алгебрі, в алгебрі логіки, виходячи з елементарних функцій, можна будувати формули. Назвемо  $P$  множину всіх функцій.

**Означення 9.7.** Нехай  $L$  – деяка (не обов'язково скінченна) підмножина функцій з  $P$ ,  $L \subset P$  (**базис**). Кожна функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  з  $L$  ( $f \in L$ ) називається **формулою**. Нехай також  $A_1, \dots, A_n$  – вирази, що є або формулами, або символами змінних. Тоді вираз  $f(A_1, \dots, A_n)$  також називається формулою.

**Означення 9.8.** Усяке висловлювання, що є складеним із деяких початкових висловлювань за допомогою 14 логічних операцій з 16, крім 0 та 1, також називається формулою алгебри логіки.

При утворенні (побудові) формул використовуються знаки (символи) трьох категорій:

- символи змінних:  $x, y, a, b, c, \dots$ ;
- символи логічних операцій:  $\wedge, \vee, \rightarrow, \oplus, \neg$ ;
- пари символів  $( ), [ ], \{ \}$ .

Приклади формул. Нехай  $L$  – множина елементарних функцій. Такі вирази є формулами:

- $\{[(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1] \vee x_2\}$ ;
- $[\neg x_1 \wedge (x_1 \vee x_3)]$ ;
- $\{x_1 \vee [(x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_2)]\}$ ,

а ці вирази не є формулами:

- $(a \vee (x \wedge y$
- $\vee x \wedge y$ .

На практиці дужки розділяють на внутрішні та зовнішні. Формула  $F = A \wedge B$  без дужок не є формулою. Проте для скорочення запису зовнішні дужки часто пропускають, і тому цей вираз означає формулу.

**Означення 9.9.** Нехай  $F$  – довільна формула. Тоді формули, що використовувались для її побудови, називаються **підформулами** формули  $F$ .

Нехай формула  $F$  є формулою для множини функцій  $\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ . Розглянемо множину функцій  $\{g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_s(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ , де функція  $g_i$  має ті самі змінні, тобто залежить від тих самих змінних, що і функція  $f_i$ ,  $i=1..s$ .

Розглянемо формулу  $Fg$ , що отримується з  $F$  заміною  $(f_1, \dots, f_s)$  на  $(g_1, \dots, g_s)$ . У цьому випадку формула  $Fg$  має ту саму структуру, що й формула  $F$ .

**Означення 9.10.** Якщо формула  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  описує функцію  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тобто формула  $F$  є формулою для змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , де  $f \in L$ , то кажуть, що формулі  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  відповідає функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , або формулі  $F$  зіставлена функція  $f$ . Якщо функція  $f$  відповідає формулі  $F$ , то кажуть також, що формула  $F$  реалізує функцію  $f$ .

Якщо функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що реалізується формулою  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , має несуттєву змінну  $x_i$ , то змінну  $x_i$  можна вилучити, замінивши функцію  $f$  рівною їй функцією  $f'$ , а формулу  $F$  – формулою  $F'$ , яка випливає з  $F$  завдяки ототожненню змінної  $x_i$  з будь-якою із змінних, що залишилися. Очевидно, формула  $F'$  є формулою, що реалізує функцію  $f'$ .

Знаючи таблиці істинності для функцій базису, можна побудувати таблицю істинності тієї функції, яку реалізує дана формула.

Наприклад,  $F_1 = (x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2))$ .

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1} \wedge x_2$	$(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)$	$x_1 \wedge x_2$	$F_1$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Таким чином, формула  $F_1$  реалізує диз'юнкцію. Розглянемо іншу формулу,  $F_2 = (x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$F_2$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Таким чином, формула  $F_2$  реалізує константу 1.

При складанні логічного висловлювання із простих використовується принцип суперпозиції, тобто підстановка у функцію замість її аргументу інших функцій. Замість будь-якої змінної використовується як власне незалежна змінна, аргумент, так і змінна, що є функцією інших змінних. Цей принцип є правильним також у звичайній алгебрі. За допомогою принципу суперпозиції з двомісних булевих функцій можна побудувати будь-яку булеву функцію.

Принцип суперпозиції дає змогу на основі трьох основних елементарних функцій (заперечення, кон'юнкція та диз'юнкція) здобути складне логічне висловлювання, що описує функціонування цифрових систем й автоматів.

При перетворенні формул використовуються такі операції підстановки змінних і неповторної підстановки функцій:

- операція підстановки змінних

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} \end{pmatrix}$$

що дає змогу виконати підстановку змінних у функцію  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  та здобути в результаті функцію  $f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ . Очевидно, підстановка змінних включає їх перейменування, перестановку й ототожнення;

- операція неповторної підстановки функцій дає можливість будувати вирази  $f(A_1, \dots, A_n)$ , де  $A_i$  – або формула, або змінна, причому хоча б одне з  $A$  відмінне від змінної, а множини змінних, що входять в  $A_i$  й  $A_j$  не перетинаються ( $i \neq j$ ).

Очевидно, кожна формула може бути здобута з функцій, що належать їх множині, застосуванням спочатку операції неповторної підстановки функцій, а потім операції підстановки змінних. Уведена мова формул зручна для запису функцій алгебри логіки, які описують різні умови для висловлювань.

### 9.7. Рівносильні формули

Означення 9.11. Формули  $F_1$  та  $F_2$  називаються **рівносильними**, якщо при будь-яких значеннях змінних  $x_1, \dots, x_n$ , що входять у ці формули, вони набувають однакових значень.

Наприклад:

- $\overline{\overline{x}}$  рівносильне  $x$ ;
- $x \vee x$  рівносильне  $x$ ;
- $(x \vee y) \wedge x$  рівносильне  $x$ .

Між поняттям рівносильності й еквівалентності існує зв'язок: формули  $F_1$  та  $F_2$  – рівносильні тоді і тільки тоді, коли формула  $(F_1 \sim F_2)$  набуває значення істини.

При визначенні рівносильності формул не обов'язково передбачати, що вони містять одні й ті самі значення змінних.

Приклади важливих рівносильних формул:

- |  |  |
|--|--|
| • $x \vee x = x$ ,   | $x \wedge x = x$ ;   |
| • $x \vee y = y \vee x$ ,                                      | $x \wedge y = y \wedge x$ ;                                  |
| • $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,                    | $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$              |
| • $(x \wedge y) \vee x = x$ ,                                  | $(x \vee y) \wedge x = x$ ;                                  |
| • $x \vee (y \wedge c) = (x \wedge y) \vee (x \wedge c)$ ,     | $x \wedge (y \vee c) = (x \vee y) \wedge (x \vee c)$ ;       |
| • $x \vee 1 = 1$ ,   | $x \wedge 1 = x$ ;   |
| • $x \wedge 0 = 0$ ,   | $x \vee 0 = x$ ;   |
| • $\overline{\overline{x}} = x$ ;                              |  |
| • $\overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$ , | $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ ; |
| • $x \vee \overline{x} = 1$ ,                                  | $x \wedge \overline{x} = 0$ .                                |