Тема 16. Логіка першого порядку

16.1. Поняття предикату. Квантори

Існують такі логічні схеми міркувань, які не можуть бути означені у логіці предикатів. Розглянемо умовивід: "Всі люди смертні (A). Сократ – людина (B). Відповідно, Сократ смертний (C)." Очевидно, C слідує з A та B, але логічне слідування A, $B \vdash C$ не доводиться у логіці висловлювань. Причина полягає у внутрішній структурі висловлювань, а саме у наявності таких слів, як "всі" або "існує".

Внутрішню структуру висловлювань можна розділити на суб'єкт та предикат, де суб'єктом є підмет, а предикат визначає властивість суб'єкта. Наприклад, Сократ – це суб'єкт, який має властивість бути людиною. Ця властивість представляє собою одномісний предикат, визначений на множині людей: "бути людиною". Позначимо його $P(x)$, де x – змінна. Підставляючи на місце змінної x об'єкти з області визначення предиката, отримуємо висловлювання. Таким чином, одномісний предикат, визначений на деякій множині об'єктів, задає властивість, якою ці об'єкти можуть володіти чи не володіти. Отже, предикат розбиває цю множину на дві області: область істинності та хибності.

Означення 16.1. **Одномісним предикатом** $P(x)$, визначеним на множині M, називається вираз, який після підстановки в нього замість x об'єкта з області визначення M, перетворюється у висловлювання. Область визначення предиката називається **предметною областю**. Елементи з області визначення називаються **предметними константами**. Змінна, від якої залежить предикат, називається **предметною змінною**.

Отже, одномісний предикат виражає певну властивість деякого об'єкта або предмета з множини визначень. Також можуть існувати й двомісні предикати, та й, взагалі, предикати із довільною місткістю, тобто арністю. Тоді двомісний предикат буде виражати певне відношення між об'єктами. Ці об'єкти можуть належати одній множині, а можуть належати й різним множинам. Наприклад, речення "x більше y" можна виразити двомісним предикатом $P(x,y)$, $x,y \in R$, який буде приймати істинне значення, якщо число, яке підставлено замість x, буде більше за число, що підставлене замість y. Речення "місто x є столицею країни y" може бути представлене у вигляді предикату $Q(x,y)$, де x належить множині міст, а y – множині країн. Прикладом використання тримісного предикату є речення "p народився у місті q у році r", де p належить множині людей, q – множині міст, а r – множині років, тобто цілих чисел з певного проміжку.

Означення 16.2. N-**місним предикатом**, визначеним на множинах $M_1,\ldots,M_n$, називається вираз, який перетворюється у висловлювання після заміни кожної предметної змінної на елемент з її області визначення. Якщо всі змінні визначені на одній та й самій множині, то предикат називається **однорідним**.

Отже предикат можна розглядати як функцію, що відображає множину (або декартовий добуток множин) об'єктів на множину {T, F}. Таким чином, над предикатами визначено всі булеві операції, а також дві нові операції – квантори: $\forall$ – квантор загальності та $\exists$ – квантор існування.

Якщо $P(x)$ означає деяку властивість на множині M, то формула $\forall xP(x)$ означає висловлювання: "для будь-якого предмету $m \in M$ виконується властивість $P(x)$" або "всі x мають властивість $P(x)$". Формула $\forall xP(x)$ набуває значення "істина", коли властивість P виконується для всіх об'єктів з M, та набуває значення "хибність" у протилежному випадку, тобто коли існує хоча б один об'єкт з множини M, для якого ця властивість не виконується.

Формула $\exists xP(x)$ означає: "існує принаймні один предмет x, який має властивість P» або «деякі x мають властивість P». Значення формули $\exists xP(x)$ є істинним, коли властивість P виконується хоча б для одного об'єкту з множини M, та хибним, коли не існує жодного об'єкта, для якого ця властивість виконувалась би.

Якщо $M = \{a_1,\ldots,a_n\}$ – скінченна область визначення предикату $P(x)$, то формули з кванторами можуть бути виражені через кон'юнкції та диз'юнкції:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$
$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Таким чином, квантор загальності є узагальненням кон'юнкції, а квантор існування – узагальненням диз'юнкції на нескінченну область визначення.

Розглянемо декілька прикладів коли речення природної мови записуються на мові першого порядку. Почнемо з речення: "Кожний студент групи вивчав дискретну математику". Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: "Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику". Тепер уведемо змінну x, і речення набуде вигляду: "Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику". Уведемо предикат $C(x)$: "x вивчав дискретну математику". Якщо предметна область змінної x – усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall x C(x)$. Є й інші коректні подання з різними предметними областями та предикатами. Зокрема, можна вважати, що нас цікавлять інші групи людей, окрім тих, які вчаться в одній академічній групі. Узявши як предметну область усіх людей, можна записати задане речення так: "Для кожної особи x, якщо ця особа x – студент групи, то x вивчав дискретну математику". Якщо предикат $S(x)$ має вигляд "особа x вчиться в групі", то задане речення треба записати у вигляді $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$. Зауважимо, що задане речення не можна записати як $\forall x(S(x) \wedge C(x))$, бо тоді це означало б, що всі особи з предметної області вчаться в групі та вивчали дискретну математику.

І ще один спосіб записати задане речення – це ввести двомісний предикат $Q(x,y)$: "Студент x вивчає дисципліну y". Тоді можна замінити $C(x)$ на $Q(x,$'*Дискретна математика*'$)$, що дасть можливість переписати формули у вигляді $\forall x Q(x,$'*Дискретна математика*'$)$ чи $\forall x(S(x) \rightarrow Q(x,$'*Дискретна математика*'$))$.

Розглянемо наступний приклад. Задане речення: "Сума двох додатних чисел – додатне число". Спочатку перепишемо це речення так: "Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число". Уведемо змінні x та y і отримаємо речення: "Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x+y$, яка є додатнім числом". Запишемо його формулою $\forall x \forall y(((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y > 0))$. Тут предметна область кожної змінної – усі дійсні числа.

16.2. Терми та формули

У мові логіки першого порядку присутні наступні символи:

- пропозиційні зв'язки $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
- квантори загальності $\forall$ та існування $\exists$;
- допоміжні символи: кома ",", та дужки "(", ")";
- предметні змінні $x_1, x_2, \ldots$;
- предметні константи $a_1, a_2, \ldots$;
- функціональні символи $f_1, f_2, \ldots$;
- предикатні символи $P_1, P_2, \ldots$

Введемо поняття терму та формули логіки першого порядку.

<u>Означення 16.3.</u> (1) Кожна предметна змінна є **термом**. (2) Кожна предметна константа є термом. (3) Якщо f – функціональний символ та $t_1,\ldots,t_n$ – терми, то $f(t_1,\ldots,t_n)$ є термом. (4) Інших термів не існує.

<u>Означення 16.4.</u> (1) $P(t_1,\ldots,t_n)$, де P – предикатний символи, $t_1,\ldots,t_n$ – терми, є **атомарною формулою**. (2) Якщо A та B – формули та x – предметна змінна, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$, $\forall x A$, $\exists x A$. (3) Інших формул немає.

<u>Означення 16.5.</u> Формула, на яку розповсюджується дія квантора, називається **областю дії квантора**. Змінна, за якою "навішується" квантор та яка попадає в його область дії, називається **зв'язаною змінною**. Змінна, яка лежить за межами області дії квантора, називається **вільною змінною**. Формула, що не містить вільних змінних, називається **замкненою**.

Замкнуті формули є висловлюваннями.

Наприклад, розглянемо формулу $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$ та її підформули. У підформулу $\exists y Q(x,y)$ змінна x входить вільно, а обидва входження змінної y зв'язані (квантором загальності). Таким чином, ця підформула не є замкненою. З іншого боку, теж саме входження змінної x у підформулу $Q(x,y)$ є зв'язаним входженням у формулі $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$. В цій формулі всі входження всіх змінних зв'язані, тому ця формула замкнена.

Розглянемо інший приклад. Нехай $Q(x,z)$ означає: "x народився у році z", де x належить множині людей, а z – множині років, тоді формула $\forall x \exists z Q(x,z)$ означає висловлювання: "Кожна людина народилася в якомусь році", а формула $\exists z \forall x Q(x,z)$ – висловлювання: "Існує такий рік, в якому народились люди". З цього прикладу видно, що різні квантори в загальному випадку не комутативні.

У формулах логіки першого порядку можна робити заміну змінних (в загальному випадку – термів) при виконанні певних умов, які полягають в тому, щоб жодне вільне входження змінної не стало зв'язаним в наслідок заміни.

<u>Означення 16.6.</u> Кажуть, що терм y є **вільним для змінної** x в формулі $A(x)$, якщо жодне вільне входження x в $A(x)$ не знаходиться в області дії жодного квантора по z, де z – змінна, яка входить в терм y.

Будь-який терм, який не містить змінних, є вільним для довільної змінної у будь-який формулі. Будь-який терм є вільним для x в формулі $A(x)$, якщо $A(x)$ не містить вільних входжень x. Терм y є вільним для довільної змінної в формулі A, якщо жодна змінна терму y не є зв'язаною змінною в формулі A.

Наприклад, терм y є вільним для змінної x в формулі $P(x)$, але той самий терм y не є вільним для змінної x в формулі $\forall y P(x)$. Терм $f(x,z)$ є вільним для змінної x в формулі $\forall y P(x,y) \rightarrow Q(x)$, але той самий терм $f(x,z)$ не є вільним для змінної x в формулі $\exists z \forall y P(x,y) \rightarrow Q(x)$.

16.3. Інтерпретації формул логіки першого порядку

Формули мають зміст тільки тоді, коли є яка-небудь інтерпретація символів, які входять до її складу.

<u>Означення 16.7.</u> **Інтерпретацією** називається система I, яка складається з непорожньої множини D, яка називається **областю інтерпретації**, а також відповідності, яка ставить кожному n-місному предикату P_i деяке відношення на області D^n, кожній предметній константі a_i – деякий елемент з області D, кожній функціональній літері f_i – деяку n-місну операцію з області D (тобто функцію $D^n \rightarrow D$).

Коли задана область інтерпретації всі предметні змінні пробігають всі значення з області D, а логічні зв'язки мають звичайний логічний зміст.

Розглянемо декілька прикладів. Нехай є формула логіки першого порядку $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. В таблиці 16.1. наведені три інтерпретації цієї формули.

Область інтерпретації D	Інтерпретація	Висловлювання $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
Множина живих істот	$P(x)$: x – риба, $Q(x)$: x мешкає у воді.	Усі риби мешкають у воді
Множина живих істот	$P(x)$: x – людина, $Q(x)$: x смертний.	Усі люди смертні
Множина цілих чисел	$P(x)$: x ділиться на 6, $Q(x)$: x ділиться на 3.	Всі числа, які діляться на 6, діляться на 3

Табл. 16.1. Приклади інтерпретацій

Тепер інший приклад: нехай задана формула $\exists x \exists y P(f(x,y), t)$. Предикат $P(v, u)$ – двомісний, змінні x, y – зв'язані, t – вільна змінна. Задамо наступну інтерпретацію: область інтерпретації D – множина дійсних чисел R, $t = 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, предикат $P(u, t)$: $u = t$. Тоді формула набуває вигляд: $\exists x\exists y(x^2 + y^2 = 1)$. Вона істинна, тому що існують такі x та y, які задовольняють рівнянню кола $x^2 + y^2 = 1$.

Якщо покласти $f(x,y) = x^2 + y^2$, $t = r^2$, то формула $\exists x\exists y(x^2 + y^2 = r^2)$ – одномісний предикат, область істинності якого – множина дійсних чисел, які задовольняють рівнянню кола $x^2 + y^2 = r^2$ з радіусом r.

Означення 16.8. Інтерпретація називається **моделлю** для даної множини формул Г, якщо кожна формула з Г істинна в даній інтерпретації.

Означення 16.9. Формула називається **виконуваною**, якщо існує хоча б одна інтерпретація, на якій формула істинна. Формула називається **загальнозначущою**, якщо вона істинна на будь-якій інтерпретації для будь-яких значень змінних. Формула, яка є хибною на будь-якій інтерпретації при будь-яких значеннях змінних, називається **протиріччям**.

Ми позначаємо загальнозначущі формули як і тавтології, тобто $\vdash A$. Схематично співвідношення виконуваних, загальнозначущих формул та протиріч ми можемо представити за допомогою наступної діаграми.

Через те, що область визначення предиката може бути нескінченною, то, очевидно, що побудова таблиць істинності не може служити алгоритмом для визначення, чи є формула загальнозначущою. Але існують інші способи, які в часткових випадках дозволяють визначити, чи є формула загальнозначущою, виконуваною, або перевірити еквівалентність формул. Можна побудувати таблиці істинності формул логіки предикатів для часткових інтерпретацій на обмежених скінчених областях. Наприклад, візьмемо область інтерпретації, яка складається з двох довільних елементів: $D = \{a, b\}$. Побудуємо таблицю істинності формул: $E_1 = \exists xP(x)$ та $E_2 = \forall xP(x)$. Одномісний предикат на області визначень з двох елементів може приймати одне з чотирьох значень, які визначаються таблицями істинності (табл. 16.2).

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

Табл. 16.2.

Формули E_1 та E_2 будуть приймати на цих інтерпретаціях наступні значення (табл. 16.3).

$P(\cdot)$	$\exists xP(x)$	$\forall xP(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

Табл. 16.3.

Побудуємо таблиці істинності на області інтерпретації з двох елементів $D = \{a, b\}$ для наступних формул:

$$E_1 = \forall yP(y) \to \exists xQ(x),\ E_2 = \forall y(P(y) \to \exists xQ(x)),\ E_3 = \forall y\exists x(P(y) \to Q(x)).$$

Для цих формул існує 16 інтерпретацій, тому що кожний з одномісних предикатів P та Q приймає по 4 значення у відповідності з таблицею 16.2. Розглянемо обчислення формул на інтерпретації P_2, Q_1.

$E_1 = \forall yP_2(y) \to \exists xQ_1(x) = \text{F} \to \text{F} = \text{T}$;

$$E_2 = \forall y(P_2(y) \to \exists x Q_1(x)) = \forall\begin{pmatrix} P_2(a) \to \mathrm{F} \\ P_2(b) \to \mathrm{F} \end{pmatrix} = \forall\begin{pmatrix} \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \\ \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F};$$

$$E_3 = \forall y \exists x(P_2(y) \to Q_1(x)) = \forall y\begin{pmatrix} \exists x(P_2(a) \to Q_1(x)) \\ \exists x(P_2(b) \to Q_1(x)) \end{pmatrix} = \forall\begin{pmatrix} \exists x\begin{pmatrix} P_2(a) \to Q_1(a) \\ P_2(a) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \\ \exists x\begin{pmatrix} P_2(b) \to Q_1(a) \\ P_2(b) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \forall y\begin{pmatrix} \exists x\begin{pmatrix} \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \end{pmatrix} = \mathrm{T} \\ \exists x\begin{pmatrix} \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F}.$$

Аналогічно можна знайти значення для цих формул для решти 15 інтерпретацій та дізнатись, які з формул є виконуваними.

16.4. Властивості формул логіки першого порядку

Очевидно, для формул логіки першого порядку зберігаються всі рівності та правила рівносильних перетворень логіки висловлювань. Крім того, справедлива наступна теорема.

Теорема 16.1. В логіці першого порядку виконуються наступні тотожності:

1. $\neg(\forall x A(x)) = \exists x(\neg A(x))$;
2. $\neg(\exists x A(x)) = \forall x(\neg A(x))$;
3. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$;
4. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$;
5. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$;
6. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$;
7. $\forall y \forall x A(x,y) = \forall x \forall y A(x,y)$;
8. $\exists y \exists x A(x,y) = \exists x \exists y A(x,y)$.

У пунктах 3-6 формула B не містить вільних входжень змінної x.

Доведення. Наведемо доведення деяких з описаних тотожностей. Решта залишаються читачеві на самостійну роботу.

Розглянемо тотожність (1). Нехай $x_1,\ldots,x_n$ – множина (можливо порожня) всіх вільних змінних формули A, відмінних від x. Нехай D – довільна область інтерпретації. Доведемо, що на будь-якому наборі значень своїх вільних змінних $[a_1,\ldots,a_n]$, $a_i \in D$, формули $\neg(\forall x A(x))$ та $\exists x(\neg A(x))$ набувають однакових значень істинності.

Можливими є два випадки:

- для всіх елементів $a \in D$ $A(a, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{T}$;
- для деякого елементу $a \in D$ $A(a, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{F}$.

У першому випадку для будь-якого елементу $a \in D$ маємо $\neg A(a, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{F}$. Звідси за означенням $\exists x(\neg \mathrm{A}(x, [a_1,\ldots,a_n])) = \mathrm{F}$. З іншого боку, в цьому випадку $\forall x A(x, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{T}$. Звідси $\neg(\forall x A(x, [a_1,\ldots,a_n])) = \mathrm{F}$.

У другому випадку для елемента $a \in D$ маємо $\neg A(a, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{T}$. Звідси $\exists x(\neg \mathrm{A}(x, [a_1,\ldots,a_n])) = \mathrm{T}$. З іншого боку, в цьому випадку $\forall x A(x, [a_1,\ldots,a_n]) = \mathrm{F}$. Звідси $\neg(\forall x A(x, [a_1,\ldots,a_n])) = \mathrm{T}$. Отже тотожність (1) доведено.

Розглянемо доведення тотожності (3). Нехай $x_1,\ldots, x_n$ – усі вільні змінні формули $\exists x(A(x) \wedge B)$. Тоді вони ж будуть усіма вільними змінними формули $\exists x A(x) \wedge B$.

Розглянемо довільну область інтерпретації D. Нехай $[a_1,\ldots,a_n]$, $a_i \in D$, – довільний набір значень вільних змінних $x_1,\ldots,x_n$. Оскільки формула B не містить змінної x, можна визначити значення цієї формули в наборі $[a, a_1,\ldots,a_n]$ (точніше, в його частині, яка стосується вільних змінних формули B). Якщо $B = \mathrm{F}$, то $\exists x A(x) \wedge B = \mathrm{F}$ і для будь-якого елементу a з множини D у наборі значень $[a_1,\ldots,a_n]$ своїх вільних змінних x, $x_1,\ldots,x_n$ формула $A(x) \wedge B$ набуває значення F. Звідси $\exists x(A(x) \wedge B) = F$.

Якщо $B = T$, то для будь-якого елемента a з множини D у наборі $[a, a_1,\ldots,a_n]$ формули $A(x) \wedge B$ та $A(x)$ набувають однакових значень істинності. Звідси $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists xA(x) = \exists xA(x) \wedge B$. ►

Зазначимо, що коли не вимагати, щоб формула B не містила змінної x, то будуть справджуватися тільки дві тотожності з тотожностей 3-6:

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists xA(x) \vee \exists xB(x),$$
$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x).$$

Теорема 16.2. Якщо замінити зв'язану змінну довільної формули A іншою змінною, що не входить у цю формулу, у кванторі й усюди в області його дії, дістанемо формулу, рівносильну A.

Доведення. Пропонується довести самостійно. ►

16.5. Перевірка загальнозначущості формул логіки першого порядку

Перевірка, чи є формула загальнозначущою, може бути зроблена зведенням до протиріччя, тобто методом редукції. Припустимо, що існує така інтерпретація формули E, на якій вона приймає хибне значення, тобто $E^* = F$, та спробуємо знайти таку інтерпретацію. Якщо в результаті знайдемо протиріччя, то це означатиме, що таких інтерпретацій не існує, і, відповідно, формула є загальнозначущою.

Наприклад, розглянемо формулу $\forall x(A(x) \vee B) \sim \forall xA(x) \vee B$, де B не залежить від x. Припустимо, що існує така інтерпретація, на якій хибна імплікація $\forall x(A^*(x) \vee B^*) \rightarrow \forall xA^*(x) \vee B^* = F$. Це можливо, якщо $\forall x(A^*(x) \vee B^*) = T$ та $\forall xA^*(x) \vee B^* = F$. З останнього рівняння слідує, що $B^* = F$ та $\forall xA^*(x) = F$. Якщо $\forall xA^*(x) = F$, то існує хоча б одне значення $x = a$, таке, що $A^*(a) = F$. Формула $\forall x(A^*(x) \vee B^*) = T$. Але в області інтерпретації даної формули існує значення $x = a$, для якого $A^*(a) = F$ та $B^* = F$. Можливо, що існує інше значення $x = b$, для якого $A^*(b) = T$. Тоді $\forall x(A^*(x) \vee B^*) = \forall \left\{ \begin{matrix} A^*(a) \vee B^* = F \vee F = F \\ A^*(b) \vee B^* = T \vee F = T \end{matrix} \right\} = F$, що суперечить припущенню $\forall x(A^*(x) \vee B^*) = T$.

Перевіримо виконання другої імплікації. Припустимо, що $\forall xA^*(x) \vee B^* \rightarrow \forall x(A^*(x) \vee B^*) = F$. Тоді $\forall xA^*(x) \vee B^* = T$ та $\forall x(A^*(x) \vee B^*) = F$. З останнього слідує, що існує таке $x = a$, що $A^*(a) \vee B^* = F$. Звідси слідує, що $A^*(a) = F$ та $B^* = F$. Відповідно, в області визначення предиката $A(x)$ існує значення $x = a$, при якому предикат $A^*(a) = F$, значить, $\forall xA^*(x) = F$. Тоді формула $\forall xA^*(x) \vee F = F$, що суперечить припущенню. Відповідно, формула $\forall x(A(x) \vee B) \sim \forall xA(x) \vee B$ загальнозначуща.