Тема 12. Повні системи функцій

12.1. Алгебра Жегалкіна

Означення 12.1. Система елементів $\{0,1\}$, на якій визначені операції $\wedge$ (кон'юнкція) та $\oplus$ (диз'юнктивна сума або додавання за модулем 2), для яких виконуються співвідношення

1) $x \oplus y = y \oplus x$;
2) $x \wedge (y \oplus z) = x \wedge y \oplus x \wedge z$;
3) $x \oplus x = 0$;
4) $x \oplus 0 = x$,

а також решта відношень булевої алгебри, які відносяться до кон'юнкції та констант, називається **алгеброю Жегалкіна**.

З таблиці істинності операції додавання за модулем 2 слідує, що

5) $\bar{x} = x \oplus 1$.

Операцію диз'юнкції можна виразити через $\oplus$ та $\wedge$ так:

6) $x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \oplus 1 = (x \wedge y) \oplus x \oplus y$.

Означення 12.2. Довільна формула алгебри Жегалкіна, яка має вигляд суми (за модулем 2) кон'юнкцій булевих змінних, називається **поліномом Жегалкіна**. Якщо у кожний член поліному Жегалкіна кожна змінна входить один раз та поліном не містить однакових членів, то такий поліном Жегалкіна називається **канонічним**.

Теорема 12.1. Довільна булева функція єдиним чином представляється у вигляді канонічного поліному Жегалкіна.

Доведення. Довільну булеву функцію можна представити у вигляді поліному Жегалкіна, використовуючи співвідношення (5) та (6). З (6) слідує, що якщо дві функції f_1 та f_2 такі, що $f_1 \wedge f_2 = 0$, то $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2$. Звідси слідує правило для представлення булевої функції у вигляді поліному Жегалкіна: для булевої функції, яка задана у вигляді ДДНФ, достатньо замінити знак $\vee$ на знак $\oplus$, представити заперечення змінних як $\bar{x} = x \oplus 1$, розкрити дужки по закону дистрибутивності (2) та привести подібні члени за законами (3) та (4). ►

Наприклад, зведемо до канонічного поліному Жегалкіна булеву функцію:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Оскільки функція знаходиться у ДДНФ, замінимо символи $\vee$ на $\oplus$, отримаємо:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \oplus (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \oplus (x \wedge y \wedge z) =$$
$$= (x \wedge (y \oplus 1) \wedge z) \oplus (x \wedge (y \oplus 1) \wedge (z \oplus 1)) \oplus (x \wedge y \wedge z) =$$
$$= (x \wedge y \wedge z) \oplus (x \wedge z) \oplus (x \wedge y \wedge z) \oplus (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus x \oplus (x \wedge y \wedge z) =$$
$$= (x \wedge y \wedge z) \oplus (x \wedge y) \oplus x$$

12.2. Властивості булевих функцій

Означення 12.3. Функція, яка представляється поліномом Жегалкіна вигляду:

$$(\alpha_1 \wedge x_1) \oplus (\alpha_2 \wedge x_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \wedge x_n) \oplus \gamma,$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma$ є 0 або 1, називається **лінійною**.

Усі функції однієї змінної лінійні. Лінійними функціями двох змінних є $x \oplus y$ та $x \equiv y = x \oplus y \oplus 1$.

Означення 12.4. Для двох наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ виконується **відношення передування**, якщо $\alpha_1 \le \beta_1$, ..., $\alpha_n \le \beta_n$, тобто номер набору α не більше номеру набору β.

Наприклад, набори $\alpha = (0,1,0,1)$ та $\beta = (1,1,0,1)$ знаходяться у відношенні передування. Набори (0,1,0) та (1,0,0) не знаходяться у відношенні передування. Вони є незрівнянні.

Означення 12.5. Функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається **монотонною**, якщо для будь-яких двох наборів α і β, що знаходяться у відношенні передування (тобто номери наборів не зменшуються), справджується нерівність: $f(\alpha) \le f(\beta)$.

Серед булевих функцій однієї та двох змінних кон'юнкція, диз'юнкція, константи 0 та 1 – монотонні, а функції заперечення, імплікації, еквівалентності, штрих Шефера, стрілка Пірса – немонотонні. Наприклад, імплікація на наборі (0,0) дорівнює 1, а на наборі (1,0) – 0, а оскільки (0,0) передує (1,0), то отримуємо, що $f(0,0) \geq f(1,0)$, тобто властивість монотонності не виконується.

Означення 12.6. Булева функція називається функцією, що **зберігає 0**, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0, тобто $f(0,\ldots,0) = 0$.

Неважко пересвідчитись, що функції 0, x, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \oplus y$ зберігаються 0, а функції 1, $\bar{x}$, $x \equiv y$ не зберігають 0.

Означення 12.7. Булева функція називається функцією, що **зберігає 1**, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1, тобто $f(1,\ldots,1) = 1$.

Наприклад, функції 1, x, $x \wedge y$, $x \vee y$ зберігають 1, а 0, $\bar{x}$, $x \oplus y$ – ні.

12.3. Функціонально замкнуті класи булевих функцій

Означення 12.8. Клас функцій називається **функціонально замкненим,** якщо суперпозиція цих функцій належить даному класу.

Теорема 12.2. Суперпозиція лінійних функцій є лінійною функцією.

Доведення. Якщо у лінійному поліномі Жегалкіна на місті довільної змінної підставити лінійну функцію, то знову отриманий поліном буде також лінійним. Візьмемо поліном $(\alpha_1 \wedge x_1) \oplus (\alpha_2 \wedge x_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \wedge x_n) \oplus \gamma$. Підставимо замість x_1 лінійним поліном $(\beta_1 \wedge y_1) \oplus (\beta_2 \wedge y_2) \oplus \ldots \oplus (\beta_m \wedge y_m) \oplus \delta$. Отримаємо лінійний поліном:

$$(\alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge y_1) \oplus (\alpha_1 \wedge \beta_2 \wedge y_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_1 \wedge \beta_m \wedge y_m) \oplus (\alpha_1 \wedge \delta) \oplus (\alpha_2 \wedge x_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \wedge x_n) \oplus \gamma.$$

Відповідно, клас лінійних функцій функціонально замкнений. ►

Теорема 12.3. Суперпозиція монотонних функцій є функція монотонна. Відповідно, клас монотонних функцій є функціонально замкненим.

Доведення. Нехай функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots, g_n(y_1,\ldots,y_k)$ монотонні. Побудуємо суперпозицію функцій $\varphi = f(g_1,\ldots,g_n)$. Нехай α та β - два набори значень змінних $y_1,\ldots,y_k$, до того ж $\alpha \leq \beta$. Через те, що функції $g_1,\ldots,g_n$ монотонні, маємо:

$$g_1(\alpha) \leq g_1(\beta), \ldots, g_n(\alpha) \leq g_n(\beta),$$

тому набори значень функцій впорядковані:

$$(g_1(\alpha),\ldots,g_n(\alpha)) \leq (g_1(\beta),\ldots,g_n(\beta)),$$

а через монотонність функції f маємо:

$$f(g_1(\alpha),\ldots,g_n(\alpha)) \leq f(g_1(\beta),\ldots,g_n(\beta)).$$

Звідси отримуємо $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$. ►

Теорема 12.4. Клас функцій, які зберігають нуль, є функціонально замкненим.

Доведення. Нехай функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g_1(y_1,\ldots,y_k)$, …, $g_n(y_1,\ldots,y_k)$ зберігають нуль. Побудуємо суперпозицію функцій $\varphi = f(g_1,\ldots,g_n)$. Тоді

$$\varphi(0,...,0) = f(g_1(0,...,0),\ldots,g_n(0,...,0)) = f(0,\ldots,0) = 0.$$ ►

Теорема 12.5. Клас функцій, які зберігають одиницю, є функціонально замкненим.

Доведення аналогічно теоремі 12.4.

Нагадаємо, що за теоремою 10.1 клас самодвоїстих функцій є також функціонально замкненим.

Позначимо: T_0 – клас функцій, які зберігають 0; T_1 – клас функцій, які зберігають 1; S – клас самодвоїстих функцій; M – клас монотонних функцій; L – клас лінійних функцій.

12.4. Набори повних систем

Означення 12.9. Система функцій $(f_1,\ldots,f_s)$ з P $(f_i \in P)$ називається **функціонально повною**, якщо будь-яка булева функція може бути записана у вигляді формули через функції цієї системи.

Наприклад, система P – множина всіх булевих функцій. Кількість функцій 2^{2^n}. Так, усі 16 функцій двох змінних утворюють повну систему. Система функцій $\{\neg, \wedge, \vee\}$ є також повною. Але система $\{0, 1\}$ не є повною. Звідси маємо таку теорему.

Теорема 12.6. Нехай задано дві системи функцій $A = \{f_1,\dots,f_n\}$ та $B = \{g_1,\dots,g_m\}$, відносно яких відомо, що система A повна і кожна її функція виражається у вигляді формули через функції системи B. Тоді система B також є повною.

Доведення. Нехай h – довільна функція, $h \in P$. З урахуванням повноти системи A, h можна виразити як

$$h = C(f_1,\dots,f_n),$$

де C – деяка формула. За умовою:

$$f_1 = C_1(g_1,\dots,g_m),\ \dots,\ f_n = C_n(g_1,\dots,g_m).$$

Тому у формулі $h = C(f_1,\dots,f_n)$ можна замінити f_i відповідно до цих рівностей і отримати наступне:

$$h = C(f_1,\dots,f_n) = C(\ C_1(g_1,\dots,g_m),\dots,\ C_n(g_1,\dots,g_m)).$$

Цей вираз визначає формулу B з будовою C':

$$C(\ C_1(g_1,\dots,g_m),\dots,\ C_n(g_1,\dots,g_m)) = C'(g_1,\dots,g_m).$$

Таким чином, B належить до повних систем. ►

Спираючись на цю теорему, можна встановити повноту ще кількох систем і таким чином розширити список повних систем.

Так система функцій $\{\neg, \wedge\}$ є повною. Це доводиться за допомогою теореми 12.6, де система $A = \{\neg, \wedge, \vee\}$, а функція диз'юнкції виражається через $\neg$ та $\wedge$ наступним чином:

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}\ .$$

Так само можна довести, що система $\{\neg, \vee\}$ є повною.

Системи функцій, що складаються лише з функції Шеффера або лише з функції стрілки Пірса є також повними.

Функціонально повна система утворює **базис** у логічному просторі.

Означення 12.10. Система функцій називається **мінімально повним базисом**, якщо вилучення з неї будь-якої функції перетворює цю систему на неповну.

Теорема 12.7 (Поста). Для того, щоб система функцій була повною, необхідно і достатньо, щоби вона містила хоча б одну немонотонну функцію, хоча б одну нелінійну функцію, хоча б одну несамодвоїсту функцію, хоча б одну функцію, що не зберігає нуль, та хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю.

Доведення. Необхідність умови теореми випливає з функціональної замкнености та неповноти класів монотонних, лінійних, самодвоїстих функцій та функцій, які зберігають 0 та 1. Доведено (теореми 10.1, 12.2 – 12.5), що функція, яка не належить даному функціональному замкненому класові, не може бути побудована шляхом суперпозиції функцій цього класу.

Для доведення достатності покажемо, що за допомогою функцій, які не належать деяким з класів T_0, T_1, S, M, L, можна побудувати деяку повну систему функцій. Такою повною систему є, наприклад, заперечення та кон'юнкція. Дійсно, довільна булева функція може бути представлена у вигляді ДДНФ, тобто як суперпозиція $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Відповідно, система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ є функціонально повною. Можна виключити з неї $\vee$, так що вона може бути представлена як суперпозиція $\neg$ та $\wedge$: $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$.

Спочатку побудуємо константи. Почнемо з константи 1. Нехай $\varphi(x) = f_0(x,\dots,x)$, де f_0 – функція, що не зберігає нуль. Тоді $\varphi(0) = f_0(0,\dots,0) \neq 0$, тобто $\varphi(0) = 1$. Можливі два випадки:

1) $\varphi(1) = 1$. В цьому випадку формула φ реалізує 1.
2) $\varphi(1) = 0$. Тоді формула φ реалізує заперечення. В цьому випадку розглянемо несамодвоїсту функцію f_*. Маємо:

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\ \ f_*(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq \overline{f_*(\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_n)}\,.$$

Відповідно: $f_*(\alpha_1,...,\alpha_n) = f_*(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)$. Нехай тепер $\psi(x) = f_*(x^{\alpha_1},...,x^{\alpha_n})$. Тоді:

$$\psi(0) = f_*(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n}) = f_*(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n) = f_*(\alpha_1,...,\alpha_n) = f_*(1^{\alpha_1},...,1^{\alpha_n}) = \psi(1).$$

Таким чином, $\psi(0) = \psi(1)$, звідки $\psi = 1$ або $\psi = 0$. Якщо $\psi = 1$, то ми побудували константу 1. В іншому випадку ψ реалізує 0, а тому, $\varphi(\psi(x)) = 1$.

Константа 0 будується аналогічно, тільки замість f_0 треба брати f_1 – функцію, що не зберігає 1.

За допомогою немонотонної функції підстановкою в неї констант можна побудувати заперечення. Дійсно, нехай f_M – немонотонна функція. Тоді існують набори α та β, такі, що α передує β, тобто $\alpha \le \beta$, а $f_M(\alpha) = 1$, $f_M(\beta) = 0$. Оскільки $\alpha \le \beta$, то у α є декілька, наприклад, k елементів, які рівні 0, в той час як у β ті ж самі елементи рівні 1. Візьмемо набір α та замінимо в ньому перший такий нульовий елемент на 1, отримаємо набір α^1: $\alpha \le \alpha^1$, який відрізняється від α тільки одним елементом (такі набори мають назву сусідніх). Повторюючи цю операцію k разів, отримаємо послідовність наборів $\alpha \le \alpha^1 \le ... \le \alpha^{k-1} \le \beta$, в якій кожні два сусідніх набори відрізняються один від одного тільки одним елементом. В цьому ланцюжку знайдуться два таких набори α^j, α^{j+1}, що $f_M(\alpha^j) = 1$ та $f_M(\alpha^{j+1}) = 0$. Нехай ці набори відрізняються j-м елементом (значенням змінної x_j), а решта елементів однакові. Підставимо у f_M ці значення. Тоді отримаємо функцію $f_M(\alpha_1^i,...,\alpha_{j-1}^i, x_j, \alpha_{j+1}^i,...,\alpha_n^i) = g(x_j)$, яка залежить тільки від x_j. Тоді $g(0) = g(\alpha^j_j) = f(\alpha^j) = 1$, $g(1) = g(\alpha^{j+1}_j) = f(\alpha^{j+1}) = 0$. Звідси маємо, що $g(x_j) = \overline{x}_j$.

Побудуємо кон'юнкцію за допомогою підстановки у нелінійну функцію констант та використання заперечення. Дійсно, нехай f_L – нелінійна функція. Тоді в її поліномі Жегалкіна існує нелінійний доданок, який містить кон'юнкцію принаймні двох змінних. Нехай, для визначеності, це x_1 та x_2. Тоді:

$$f_L = (x_1 \wedge x_2 \wedge f_a(x_3,...,x_n)) \oplus (x_1 \wedge f_b(x_3,...,x_n)) \oplus (x_2 \wedge f_c(x_3,...,x_n)) \oplus f_d(x_3,...,x_n),$$

до того ж $f_a(x_3,...,x_n) \ne 0$. Відповідно, $\exists \alpha_3,...,\alpha_n \; f_a(\alpha_3,...,\alpha_n) = 1$. Нехай $b = f_b(\alpha_3,...,\alpha_n)$, $c = f_c(\alpha_3,...,\alpha_n)$, $d = f_d(\alpha_3,...,\alpha_n)$ та

$$\varphi(x_1,x_2) = f_L(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge b) \oplus (x_2 \wedge c) \oplus d.$$

Тоді нехай

$$\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1 \oplus c, x_2 \oplus b) \oplus (b \wedge c) \oplus d.$$

Тоді

$$\psi(x_1,x_2) = (x_1 \oplus c) \wedge (x_2 \oplus b) \oplus b \wedge (x_1 \oplus c) \oplus c \wedge (x_2 \oplus b) \oplus d \oplus (b \wedge c) \oplus d =$$
$$= (x_1 \wedge x_2) \oplus (c \wedge x_2) \oplus (b \wedge x_1) \oplus (b \wedge c) \oplus (b \wedge x_1) \oplus (b \wedge c) \oplus (c \wedge x_2) \oplus (b \wedge c) \oplus d \oplus (b \wedge c) \oplus d =$$
$$= x_1 \wedge x_2.$$

(Функція $x \oplus \alpha$ можна виразити, так як $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \oplus 0 = x$). ►

Наприклад, перевіримо повноту системи $\{\neg, \to\}$. Для цього укладемо таблицю Поста (табл. 12.1). Якщо функція входить у функціонально замкнений клас, то в таблиці Поста у відповідній комірці ставиться знак "+", інакше – знак "–".

	T_0	T_1	S	M	L
$\neg$	–	–	+	–	+
$\to$	–	+	–	–	–

Табл. 12.1. Таблиця Поста для системи $\{\neg,\to\}$.

Функція $\overline{x}$ не зберігає 0 та 1, так як на нульовому наборі вона приймає значення 1, а на одиничному – значення 0. Очевидно, що дана функція немонотонна. Функція є самодвоїстою, так як на протилежних наборах вона приймає протилежні значення. Функція лінійна – її поліном Жегалкіна: $\overline{x} = x \oplus 1$.

Функція $x \to y$ не зберігає 0 та зберігає 1. Ця функція немонотонна, так як набір (0,0) передує наборові (1,0), але $0 \to 0 = 1$, а $1 \to 0 = 0$. На протилежних наборах (0,0) та (1,1) функція приймає значення 1, відповідно, вона несамодвоїста. Для перевірки лінійності $x \to y$ побудуємо її канонічний поліном Жегалкіна:

$$x \to y = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus ((x \oplus 1) \wedge y) \oplus (x \wedge y) =$$

$$= (x \wedge y) \oplus x \oplus 1.$$

Функція нелінійна, так як містить елемент $x \wedge y$.

Система функцій $\{\neg, \to\}$ повна, так як в кожному стовпці таблиці Поста 12.1 є хоча б один знак “–“.