Тема 4. Відношення еквівалентності та порядку

Різні відношення, які зустрічаються на практиці, можуть мати (чи не мати) ті або інші властивості. Ці властивості були представлені у темі 2. Більш того, виявляється, що деякі стійкі комбінації цих властивостей зустрічаються настільки часто, що заслуговують окремої назви та спеціального вивчення. Тут розглядаються класи відношень, які мають визначений набір властивостей. Таке абстрактне вивчення класів відношень має ті переваги, що один раз встановивши деякі наслідки із наявності у відношення визначеного набору властивостей, далі ці наслідки можна автоматично розвинути на всі конкретні відношення, що мають даний набір властивостей. Ми розглянемо у цій лекції відношення еквівалентності та порядку.

4.1. Відношення еквівалентності

Означення 4.1. Бінарне відношення на множині A називається **відношенням еквівалентності**, якщо це відношення є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Відношення еквівалентності будемо позначати символом “$\equiv$”.

Прикладом відношення еквівалентності є відношення рівності чисел чи множин, геометричне відношення подібності трикутників, відношення паралельності прямих у евклідовому просторі. Відношення “жити в одному місті” є також відношенням еквівалентності. Множина всіх громадян (або мешканців) України, розбивається останнім відношенням на підмножини, що не перетинаються. Два мешканця вважаються еквівалентними по цьому відношенню, якщо вони живуть в одному й тому самому місті, тобто вони мають одну й ту саму властивість – “мешкати у місті X”. З іншого боку не можна жити одночасно в двох різних містах, тому множини мешканців різних міст не перетинаються. Таким чином відношення “жити в одному місті” б’є множину всіх мешканців України на ряд підмножин, що не перетинаються, таких, що у кожній підмножині всі мешканці еквівалентні по цьому відношенню і жодні два мешканці різних підмножин не знаходяться у цьому відношенні, тобто не еквівалентні один одному. Такі підмножини мають назву класів еквівалентності.

Означення 4.2. Нехай $\equiv$ - відношення еквівалентності на A і $x \in A$. Тоді підмножина елементів множини A, які еквівалентні x, називається **класом еквівалентності** для x:

$$[x]_{\equiv} = \{y \mid y \in A,\ x \equiv y\}.$$

Якщо зрозуміло про яке відношення йде мова, то його позначення опускається.

Лема 4.1. $\forall a \in A,\ a \in [a]$.

Це природно випливає із рефлексивності відношення еквівалентності.

Лема 4.2. $a \equiv b \Leftrightarrow [a] = [b]$.

Доведення. Необхідність доведемо від супротивного. Нехай $[a] \neq [b]$. Оскільки множини $[a]$ та $[b]$ не є рівними, то існує такий елемент c, що або $c \in [a]$ та $c \notin [b]$, або $c \in [b]$ та $c \notin [a]$. Розглянемо перший випадок: $c \in [a] \Rightarrow a \equiv c$. За умови $a \equiv b$ та за властивістю симетричності, $b \equiv a$. Оскільки відношення еквівалентності транзитивне, маємо $b \equiv a$ та $a \equiv c$ $\Rightarrow b \equiv c$, тобто $c \in [b]$, що суперечить умові. Другий випадок доводиться аналогічно.

Доведемо достатність також від супротивного. Нехай a не є еквівалентним b, тобто ці елементи не можуть належати одному класу еквівалентності, що суперечить умові $[a] = [b]$. Одержана суперечність доводить твердження. ►

Лема 4.3. $a \not\equiv b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$.

Доведення. Від супротивного. Нехай $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, тоді існує елемент $c \in [a] \cap [b]$, тобто $c \in [a]$ та $c \in [b]$. Звідси отримуємо, що $c \equiv a$ та $c \equiv b$. Використовуючи властивість симетричності маємо: $a \equiv c$ та $c \equiv b$. А за властивості транзитивності отримуємо $a \equiv b$, що суперечить припущенню. ►

Можна побудувати класи еквівалентності наступним чином. Оберемо елемент a_1, який належить A, та створимо підмножину $A_1 \subseteq A$ із a_1 та всіх елементів еквівалентних a_1. Тобто $A_1 = \{x \mid x \in A$ та $x \equiv a_1\}$. Далі оберемо елемент $a_2 \in A$ та $a_2 \notin A_1$. Також визначимо клас A_2, що містить всі елементи з A, які еквівалентні a_2, тобто $A_2 = \{x \mid x \in A$ та $x \equiv a_2\}$. Далі будемо продовжувати цей самий процес, поки не переберемо всі елементи множини A. Вкінці отримаємо систему класів $A_1, A_2, \ldots$, таку що кожний елемент $a_i \in A$ входить тільки в один клас. Об'єднання всіх класів визначає множину A, а для будь-яких i,j $A_i \cap A_j = \varnothing$. Тобто множина класів еквівалентності визначає розбиття множини A.

Теорема 4.1. Всяке відношення еквівалентності на множині A визначає розбиття множини A, притому серед елементів розбиття немає порожніх. Це розбиття єдине. Зворотно, всяке розбиття множини A, яке не містить порожніх елементів, визначає відношення еквівалентності на множині A.

Доведення. Необхідність доводиться за допомогою визначення способу побудови розбиття за заданим відношенням еквівалентності. Цей спосіб ми навели вище.

Доведемо достатність. Нехай відношення $R = \{(a,b) \mid a \in A_i,\ b \in A_i$, де A_i – елемент розбиття множини $A\}$. Покажемо, що це відношення має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності, а тому є відношенням еквівалентності.

1) За умовою розбиття $A = \bigcup_i A_i$, маємо що для кожного елементу $a \in A$ існує i таке, що $a_i \in A_i$. Ми можемо переписати це наступним чином: $a_i \in A_i$ та $a_i \in A_i$, що відповідає aRa. Тобто R – рефлексивне.

2) За побудовою відношення R існує таке i, що $a \in A_i$ та $b \in A_i$. Так само $b \in A_i$ та $a \in A_i$. Це відповідає тому, що $aRb \Leftrightarrow bRa$, тобто відношення R – симетричне.

3) Нехай aRb та bRc. Звідси маємо, що $a \in A_i$ та $b \in A_i$ і $b \in A_j$ та $c \in A_j$. Так як одночасно $b \in A_i$ і $b \in A_j$, то $A_i = A_j$. Тобто aRc – відношення R є транзитивним. ►

4.2. Матриця та граф відношення еквівалентності

Нехай відношення еквівалентності задано на множині A. Елементи, що належать одному класу еквівалентності, попарно еквівалентні між собою. Отже, стовпці матриці відношення еквівалентності для елементів одного класу еквівалентності однакові та містять одиниці у всіх рядках, які відповідають цим елементам. Оскільки класи еквівалентності не перетинаються, у стовпцях, які відповідають елементам різних класів, не буде одиниць в одних і тих самих рядках.

При побудові матриці відношення розташуємо елементи множини так, щоб ті елементи, які належать одному класу еквівалентності, були поруч. Тоді одиничні елементи матриці відношення еквівалентності утворять непересічні квадрати, діагоналі яких розташовуються на головній діагоналі матриці.

Наприклад, нехай $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ і є наступні класи еквівалентності: $A_1 = \{a, e, f\}$, $A_2 = \{c, g\}$, $A_3 = \{d\}$, $A_4 = \{b, h\}$. Матриця після перестановок матиме такий вигляд:

	a	*e*	*f*	*c*	*g*	*d*	*b*	*h*
a	1	1	1	0	0	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0	0	0
f	1	1	1	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0	0
g	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	1
h	0	0	0	0	0	0	1	1

Граф відношення еквівалентності також має характерний вигляд. Це граф, кожна компонента з'єднання якого, що відповідає класу еквівалентності, є повним підграфом із петлями на кожній вершині.

Для попереднього прикладу граф має вигляд, зображений на рис. 4.1.

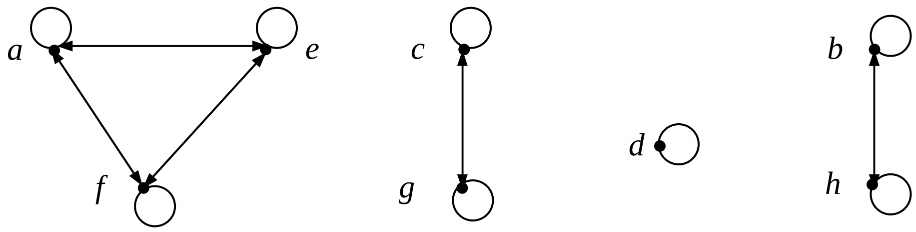

Рис. 4.1. Граф відношення еквівалентності

4.3. Відношення порядку

Означення 4.3. Бінарне відношення на множині A називається відношенням **нестрогого порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Часто відношення нестрогого порядку позначають як “≤”, оскільки нестрога нерівність є прикладом відношення нестрогого порядку в множині $\boldsymbol{Z}$ або $\boldsymbol{R}$. Як приклад відношення нестрогого порядку в множині людей можна назвати відношення “бути не старшим” або “бути не молодшим”.

Означення 4.4. Бінарне відношення на множині A називається відношенням **строгого порядку**, якщо воно асиметричне та транзитивне.

Для позначення відношення строгого порядку зазвичай використовується символ “<” або “$\prec$”. Як приклад відношення строго порядку можна навести відношення строгої нерівності на множинах цілих або дійсних чисел, а також відношення “бути молодшим” або “бути старшим” у множині людей. Якщо виконується співвідношення $x<y$ (або $x\le y$), то кажуть що елемент x передує y, а y іде за x.

Множина, в якій визначено відношення порядку (строгого або нестрогого), називається **упорядкованою**, і кажуть, що порядок уведено цим відношенням. Це позначають наступним чином: $< A, \le >$.

Означення 4.5. Множина A називається **лінійно (абсолютно) впорядкованою**, якщо для будь-яких двох її елементів x та y виконується $x<y$ або $y<x$ ($x\le y$ або $y\le x$). Лінійно впорядкована множина зі строгим порядком також називається **ланцюгом**.

Наприклад, множина дійсних чисел з відношенням порядку “<” є лінійно впорядкованою.

Може виявитись, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x<y$ або $y<x$ не виконується. Такі елементи x та y називаються **незрівнянними**. У цьому випадку кажуть, що множина є **частково впорядкованою**.

Розглянемо наступний приклад. Нехай є множина $A = \{1, 2, 3\}$ та її булеан $\mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Визначимо відношення R на $\mathrm{P}(A)$ наступним чином: $(X, Y)\in R$: $X\subseteq Y$. Таким чином, $(\{2\}, \{1,2\})\in R$, тому що $\{2\}\subseteq\{1, 2\}$, але $(\{1,2\}, \{2\})\notin R$, тому що $\{1,2\} \not\subseteq \{2\}$. Легко перевірити, що побудоване відношення:

- рефлексивне: $\forall X\in \mathrm{P}(A) \mid X\subseteq X$.
- антисиметричне: $X\subseteq Y$ та $Y\subseteq X \Rightarrow X=Y$.
- транзитивне: $X\subseteq Y$ та $Y\subseteq Z \Rightarrow X\subseteq Z$ (див. лему 1.2).

Отже, відношення R є відношенням нестрогого порядку. Проте очевидно, що знайдуться такі множини X та Y серед $\mathrm{P}(A)$, що не виконується ні $X\subseteq Y$, ні $Y\subseteq X$. Отже, множина $\mathrm{P}(A)$ з відношенням нестрогого порядку “$\subseteq$” є частково впорядкованою множиною.

Інший приклад – відношення “x – пращур y”, яке визначене на множині всіх людей. Це відношення є відношенням строгого порядку, тому що воно антирефлексивне (жодна людина не є пращуром самої себе). Множина людей із цим відношенням є частково впорядкованою множиною, бо існують люди, які не знаходяться між собою у родинних зв’язках.

Як ілюстрацію відношення лінійного порядку можна навести також відношення старшинства на множині офіцерських звань: лейтенант, старший лейтенант, капітан, майор, підполковник, полковник, генерал. Очевидно, що на заданій множині виконується відношення “бути молодшим за званням”. Отже, оскільки побудоване відношення є транзитивним і асиметричним, це відношення строгого порядку. Крім того, воно виконується для будь-яких елементів множини, які розглядається. Отже, цей порядок є лінійним.

Означення 4.6. Відношення R на множині A, що задовольняє властивості рефлексивності та симетричності, називається відношенням **толерантності**.

Як приклад можна навести відношення "відстань між двома точками на площині не перевищує деякого заданого числа a". Це означає, що толерантними є будь-які дві точки, відстань між якими не перевищує a.

4.4. Вагові функції та відношення квазіпорядку

Нехай $f : A \to \boldsymbol{R}$ є функціональним відображенням, заданим на множині A. Це означає, що кожному елементу $x \in A$ відповідає деяке дійсне число $y = f(x)$, яке називається вагою. Відображення f при цьому має назву **вагової функції**.

Іноді поняття ваги збігається з буквальним значенням цього слова (наприклад, маса деталі), а іноді – ні (це може бути будь-яка числова характеристика об'єкта, наприклад, опір резистора, об'єм тіла, площа геометричної фігури).

Теорема 4.2. Якщо функціональне відображення $f : A \to \boldsymbol{R}$ ін'єктивне, то на множині A можна встановити строгий порядок.

Доведення. Задамо на множині A відношення P: xPy, якщо в $\boldsymbol{R}$ справджується $f(x) < f(y)$. Покажемо, що це відношення є асиметричним і транзитивним.

Для будь-яких двох x та y, для яких виконується співвідношення xPy, маємо $f(x) < f(y)$, тобто нерівності $f(x) > f(y)$ не може бути; тому маємо $(y, x) \notin P$. Отже, введене відношення P – асиметричне.

Для будь-яких трьох елементів x, y та $z \in A$, для яких xPy та yPz, це означає $f(x) < f(y)$ та $f(y) < f(z)$. Внаслідок транзитивності нерівності на дійсних числах маємо $f(x) < f(z)$, тобто xPz. Отже, введене відношення P – транзитивне.

Таким чином, доведено, що введене відношення P є відношенням строгого порядку. Покажемо, що множина A з уведеним відношенням строгого порядку P є лінійно впорядкованою. Розглянемо будь-які два елементи $x, y \in A$ $(x \neq y)$. Внаслідок того, що $x \neq y$, а відображення f є ін'єктивним, виконується нерівність $f(x) < f(y)$ або $f(y) < f(x)$. Це означає, що справджується або відношення xPy, або yPx. Отже, будь-які два елементи множини A порівнянні, а тому множина A є лінійно впорядкованою. ►

Прикладом лінійно впорядкованої множини з відношенням строгого порядку, заданим ваговою функцією, може бути відношення на множині студентів групи за номерами у журналі відвідувань.

Якщо відображення $f : A \to \boldsymbol{R}$ не ін'єктивне, то для двох різних елементів $x, y \in A$ може виконуватись рівність $f(x) = f(y)$. Тому абсолютно строгий порядок задати на множині A не можна. Водночас якщо об'єднати в окремі класи A_i, $i = 1, 2,...$ елементи, вага яких однакова, то матимемо розбиття множини A на класи еквівалентності.

Тепер можна говорити про впорядкування сукупності класів еквівалентності $\{A_1, A_2, ...\}$ за їхніми представниками $a_1, a_2, \ldots$, де $a_i \in A_i$. Оскільки система представників не містить однакових елементів, у цій системі можна задати строгий порядок: $a_i P a_j \Leftrightarrow f(a_i) < f(a_j)$.

Таке впорядкування ототожнює елементи множини A, які належать одному й тому самому класу еквівалентності, і задає на цій множині **квазіпорядок** (майже порядок). Також кажуть, що строгий порядок на множині класів еквівалентності $\{A_1, A_2, ...\}$ множини A індукує квазіпорядок на цій множині.

Якщо на множині A введений квазіпорядок, то класи еквівалентності множини A, на яких вагова функція набуває фіксованих значень, називаються областями рівня.

Якщо розглянути попередній приклад із списками студентів, але зняти обмеження щодо однієї групи, тобто розглядати, наприклад, потік, що складається з декількох груп, то виявиться, що деякі студенти з потоку матимуть однакові вагові коефіцієнти – номери за списками відвідувань. Таких студентів ми можемо об'єднати у класи еквівалентності і за наведеним вище правилом побудувати квазіпорядок на множині всіх студентів потоку.

Легко показати, що відношення квазіпорядку має властивості рефлексивності та транзитивності.

4.5. Структура впорядкованих множин

Теорема 4.3. (принцип подвійності). Відношення, обернене до відношення часткового порядку, теж буде відношенням часткового порядку.

Доведення. Нехай R^{-1} – відношення, обернене до відношення часткового порядку R. Покажемо, що R^{-1} є відношенням часткового порядку.

1) рефлексивність: оскільки $I \subseteq R$, то $I = I^{-1} \subseteq R^{-1}$.
2) транзитивність: якщо $R \circ R \subseteq R$, то в силу теореми 2.1 $R^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1}$.
3) антисиметричність: якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$ (умова антисиметричності), то $R^{-1} \cap R \subseteq I$ та в силу теореми 2.1 $R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \subseteq I$. ►

Відношення часткового порядку R^{-1} називається **подвійним** до відношення часткового порядку R. Відношення $\leq^{-1}$ позначається $\geq$ і $a \leq^{-1} b$ означає $a \geq b$. Якщо $a \leq b$ або $b \leq a$, то a, b називаються елементами, що **порівнюються відносно порядку** $\leq$.

З принципу подвійності випливає, що коли в якому-небудь твердженні про частково упорядковану множину замінити частковий порядок на подвійний до нього порядок, то одержане твердження теж буде вірне.

Теорема 4.4 (без доведення). Всяка підмножина частково упорядкованої множини теж буде частково упорядкованою множиною.

Означення 4.7. **Мінімальним** (**максимальним**) елементом множини A, на якій задано відношення порядку $\leq$, називається такий елемент $x \in A$, що для всякого елемента $y \in A$, що порівнюється з x, має місце $x \leq y$ ($y \leq x$).

Наприклад, розглянемо множину людей. Деякі з них утворюють родини, в яких хтось буде батьками, а хтось дітьми. Відношенням строгого порядку може бути відношення "x та y – діти однієї родини та x молодше y". В кожній родині, яка має дітей, такому відношенню буде відповідати лише один мінімальний елемент, але взагалі у множині людей таких елементів буде декілька.

Означення 4.8. Елемент $x \in A$ називається **найменшим** (**найбільшим**), якщо для кожного елемента $y \in A$ виконується $x \leq y$ ($y \leq x$).

Теорема 4.5. В кожній частково упорядкованій множині існує не більше одного найменшого (а в силу принципу подвійності і найбільшого) елементу.

Доведення. Припустимо, що x і y – два найменші елементи в множині A, тоді $x \leq y$ в силу того, що x – найменший елемент і $y \leq x$ в силу того, що y – найменший елемент. Але тоді із антисиметричності відношення $\leq$ випливає, що $x = y$. ►

Теорема 4.6. Будь-яка скінченна непорожня впорядкована множина має мінімальні та максимальні елементи.

Доведення. Нехай множина $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Позначимо $m_1 = x_1$, а $m_k = x_k$, якщо $x_k < m_{k-1}$, та $m_k = m_{k-1}$ в зворотному випадку. Тоді елемент m_n буде мінімальним. Аналогічно можна довести існування в A максимального елемента.

В будь-якому кінцевому ланцюзі поняття найменшого та мінімального (найбільшого та максимального) елементів співпадають. Таким чином, будь-який кінцевий ланцюг містить найменший (перший) та найбільший (останній) елементи. ►

Теорема 4.7. Будь-який частковий порядок на кінцевій множині може бути доповненим до лінійного.

В даному випадку слова "може бути доповненим" означають, що існує відношення лінійного порядку, яке є надмножиною заданого відношення часткового порядку.

Доведення. Для доведення теореми наведемо процедуру, яка будує лінійний порядок на основі заданого часткового на множині A. Ця процедура має назву алгоритму топологічного сортування (в наведеному нижче алгоритмі A – вхідна впорядкована множина, B – порожня множина):

1) Вибрати мінімальний елемент множини *A*. Якщо їх декілька, то обрати перший знайдений.
2) Додати знайдений елемент до множини *B* та видалити його з множини *A*.
3) Якщо множина *A* ще містить елементи, то перейти на пункт 1. Інакше – кінець.

На виході алгоритму множина *B* буде містити всі елементи множини *A*, а послідовність, в якій елементи додавались до множини *B* під час роботи алгоритму, і буде визначати лінійний порядок на *B*. Коректність 1-го пункту алгоритму забезпечує теорема 4.6. ►

4.6. Діаграми впорядкованих множин

Граф відношення порядку буде містити велику кількість транзитивно замкнених дуг. Тому він буде виглядати занадто складно. Тож для відношення порядку зазвичай будується діаграма Гассе, яка відображає відношення домінування.

Означення 4.9. Нехай *A* – частково впорядкована множина з відношенням порядку $\leq$ і $x, y \in A$. Говорять, що елемент *y* **домінує** над елементом *x*, якщо $y>x$ і ні для якого елементу $z\in A$ невірно, що $y>z>x$.

Наприклад:

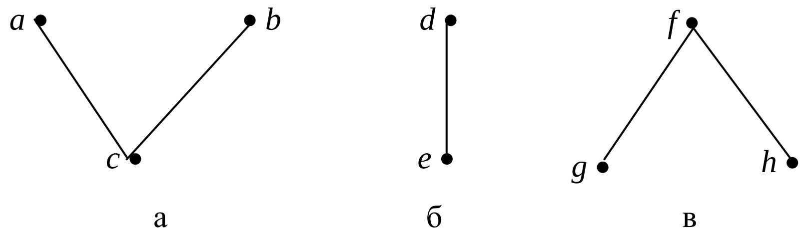

Рис. 4.2. а) *a* та *b* домінують над *c*; б) *d* домінує над *e*; в) *f* домінує над *g* та *h*

Тоді впорядковану множину множна зобразити у вигляді графу наступним чином. Граф будується знизу-вгору: якщо елемент *y* домінує над *x*, то він розташовується вище елементу *x* і з'єднується з ним прямою. Незрівнянні елементи розташовуються на одному рівні. Отриманий граф називається **діаграмою Гассе**. Граф відношення домінування не містить транзитивно замкнутих дуг та петель, які відображають рефлексивніть відношення, тому діаграма впорядкованої множини може бути отримана із орієнтованого графа відношення порядку видаленням петель та транзитивно замкнутих дуг.

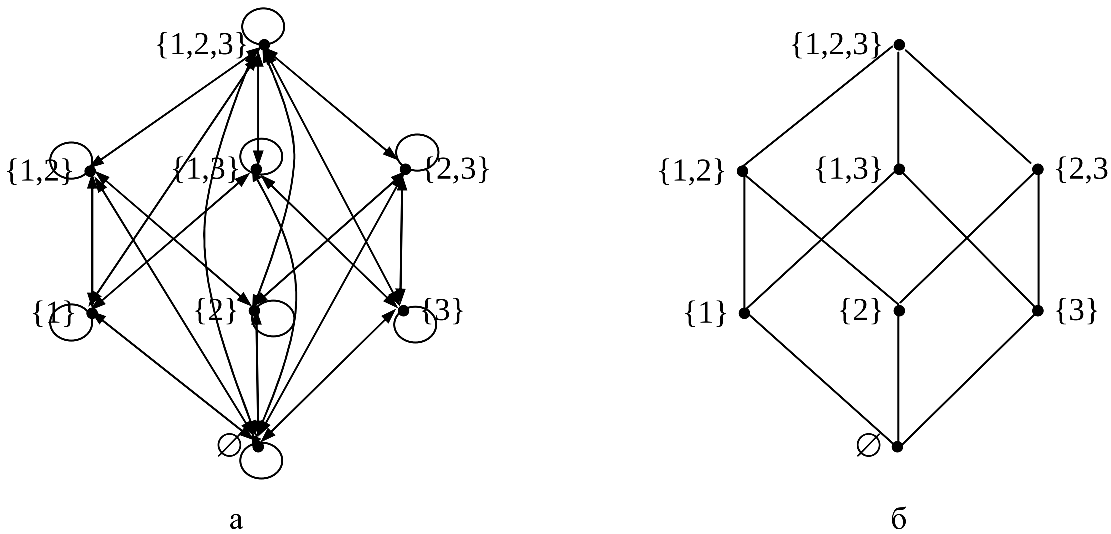

Рис. 4.3. Граф (а) та діаграма Гассе (б) відношення часткового порядку.

Повернемося до прикладу із буленом множини та відношенням нестрогого включення. Нехай множина $A = \{1,2,3\}$ та її булеан $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Граф відношення $\subseteq$ на елементах булеана $P(A)$ зображений на рис. 4.3,а. Діаграма Гассе того ж самого відношення на тій самій множині зображена на рис. 4.3,б. Відразу помітно, що діаграма Гассе більш легше сприймається ніж граф відношення.

Означення 4.10. Нехай A – множина на якій визначено порядок $<$ або $\leq$. **Верхньою межею** або **гранню** підмножини $B \subseteq A$ називають такий елемент $m \in A$, що для будь-якого елемента $x \in B$ справджується відношення $x<m$ або $x \leq m$. **Нижньою межею** або **гранню** підмножини $B \subseteq A$ називають такий елемент $n \in A$, що для будь-якого елемента $x \in B$ справджується відношення $n<x$ або $n \leq x$.

Верхні та нижні межі не повинні завжди існувати для будь-якої множини і вони не завжди єдині. У попередньому прикладі верхня межа для підмножини $\{\{1\}\}$ містить елементи $\{1,2\}$ та $\{1,3\}$. А нижня межа для підмножини $\{\varnothing\}$ не визначена.

Означення 4.11. Якщо існує найбільша нижня межа множини B, то вона називається **точною нижньою межею** і позначається *inf*(B) (*infinum*). Якщо існує найменша верхня межа множини B, то вона називається **точною верхньою межею** і позначається *sup*(B) (*supremum*).

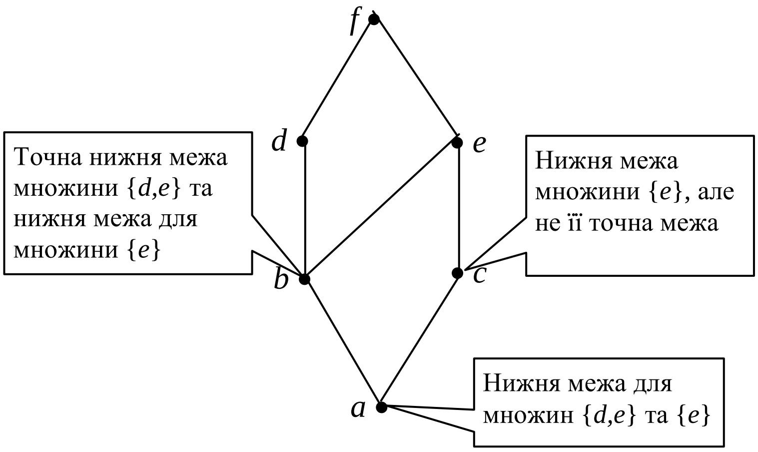

Рис. 4.4. Точні нижні межі

Розглянемо множину, що представлені на діаграмі Гассе на рис. 4.4. Для множини $\{d, e\}$ нижніми межами будуть елементи b, так як $b \leq d$, $b \leq e$, та a, так як $a \leq d$, $a \leq e$, але $a \leq b$, отже, b буде точною нижньою межею. Для множини $\{e\}$ нижніми межами будуть елементи c, так як $c \leq e$, b, так як $b \leq e$, та a, так як $a \leq e$, проте $a \leq c$ та $a \leq b$, але c та b незрівнянні, отже, ні b, ні c не є точною нижньою межею для множини $\{e\}$. Таким чином, в даній впорядкованій множині не для всіх підмножин існують точні нижні межі. Так само будуються верхні та точні верхні межі.

4.7. Повністю впорядкована множина

Означення 4.12. Лінійно впорядкована множина A називається **повністю впорядкованою**, якщо всяка її непуста підмножина B має найменший елемент.

Не треба плутати повністю впорядковану множину і множину, на якій визначено лінійний порядок. Лінійно впорядкована множина може і не бути повністю впорядкованою.

Наприклад, множина натуральних чисел зі звичайним відношенням порядку є повністю впорядкованою. Множина раціональних чисел Q зі звичайним відношенням порядку не є повністю впорядкованою, так як множина $A = \{x \in Q \mid x^2 > 2\}$ не має мінімального елемента. Але всяка скінченна лінійно впорядкована множина є повністю впорядкованою.

Означення 4.13. Кажуть, що дві повністю впорядковані множини A та B **ізоморфні** ($A \sim B$), якщо між ними існує взаємно однозначне відображення, яке зберігає порядок:

$$|A| = |B| \text{ та } (\forall a_1, a_2 \in A \; a_1 < a_2 \; \exists b_1, b_2 \in B : a_1 \to b_1,\; a_2 \to b_2 \Rightarrow b_1 < b_2)$$

Іншими словами, дві повністю впорядковані множини A та B ізоморфні, якщо між ними існує строго монотонна зростаюча взаємно однозначна відповідність. Наприклад, множина натуральних чисел та парних чисел зі звичайним порядком < ізоморфні, тому що відповідність $n \to 2n$ є строго монотонно зростаючою.

З поняттям повністю впорядкованої множини пов'язаний один з основних постулатів теорії множин.

Аксіома повної упорядкованості. Всяку непусту множину можна повністю впорядкувати.

Зауважимо, що ця аксіома логічно еквівалентна другій аксіомі теорії множин – аксіомі вибору.

Аксіома вибору. Якщо дана множина A, то існує функція f, яка ставить у відповідність кожній непустій підмножині B із множини A один визначений елемент $f(B)$ із множини B.

Логічну еквівалентність аксіом слід розуміти так: коли одну із них вибрати за аксіому, то другу можна строго довести як теорему і навпаки. Так, якщо приймається аксіома вибору, то аксіома повної упорядкованості стає твердженням, яке в теорії множин відоме як теорема Цермелло.

Завдяки аксіомі повної упорядкованості багато властивостей повністю впорядкованих множин можна доводити методом трансфінітної індукції.

Теорема 4.8 (**Метод трансфінітної індукції**). Нехай e – найменший елемент повністю впорядкованої множини A і $P(x)$ – деяка властивість елемента $x \in A$. Тоді якщо із істинності $P(e)$ і $P(x)$ для всіх $x<a$ випливає істинність $P(a)$, то $P(x)$ істинно для всіх x із A.

Доведення. Припустимо супротивне: існує така непуста підмножина B елементів із A, що для всіх $y \in B$ $P(y)$ хибне при виконанні умов теореми. Нехай b – мінімальний елемент в B. Оскільки $P(e)$ істинне, то $b \neq e$ і $b>e$. Із умов теореми витікає, що $P(x)$ істинне для всіх $x<b$, але тоді із цих же умов повинна витікати істинність і $P(b)$, а це суперечить нашому припущенню. ►

Звичайна математична індукція відповідає трансфінітній індукції по повністю упорядкованій множині натуральних чисел $\boldsymbol{N}$.

Метод трансфінітної індукції дає можливість не тільки доводити властивості по індукції, але і виконувати побудову по індукції або давати визначення по індукції. Дійсно, нехай A – повністю впорядкована множина, і нехай ми хочемо визначити на цій множині функцію $f(x)$, яка ставить у відповідність кожному елементу x із A деякий елемент множини B. Припустимо також, $f(x)$ повинна задовольняти деяким **рекурентним співвідношенням**, тобто співвідношенням, які однозначно визначають для всякого $a \in A$ значення $f(a)$ за значенням $f(b)$ для всіх $b<a$.

Метод побудови по індукції. Існує єдина функція $f(x)$, яка визначена на всій множині A, задовольняє вказаним рекурентним співвідношенням і приймає довільні задані значення на мінімальному елементі множини A. Ми приводимо цей метод без доведення.

Зауважимо, що метод трансфінітної індукції, як і метод побудови по індукції, можна застосовувати і до частково впорядкованих множин.

Умова індуктивності. Всі елементи частково впорядкованої множини A задовольняють властивості P, якщо:

1) всі мінімальні елементи із множини A задовольняють властивості P (в тому випадку, коли вони існують),

2) із того, що $P(x)$ істинне для всіх $x<a$, де x, $a \in A$, випливає істинність $P(a)$.