# Тема 5. Потужність множин

### 5.1. Визначення потужності

Поняття потужності множин зв'язано з оцінкою кількості елементів у них. У скінченній множині кількість елементів можна перерахувати. Кількість елементів у множині $A$ позначається як $|A|$. Наприклад, якщо $A = \{a, b, c\}$, то $|A| = 3$. Якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі скінченні множини, які мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні по кількості елементів у них і визначають один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності може бути позначений натуральним числом, яке визначає кількість елементів у множині. Всі одноелементі множини утворюють один клас еквівалентності, двоелементі – другий і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, який об'єднує всі скінченні множини із кількістю елементів, що дорівнює даному числу.

Розглянемо тепер нескінченні множини. Для деяких нескінченних множин також можна встановити взаємно однозначну відповідність елементів. Наприклад, для множини парних натуральних чисел, яку можна представити у вигляді списку: $\{2, 4, 6, \ldots\}$, послідовність $(1, 2, 3, \ldots)$ буде нумерацією цього списку, тобто існує відображення $f(n) = 2n$, для кожного $n\in \boldsymbol{N}$ множини натуральних чисел $\boldsymbol{N}$ у множину усіх парних додатних чисел, яке є бієкцією. Відповідно, множина всіх парних натуральних чисел еквівалентна множині всіх натуральних чисел, тобто парних чисел рівно стільки скільки усіх натуральних чисел. Але, з іншого боку, множину натуральних чисел можна розбити на дві підмножини парних та непарних чисел, тобто парних чисел рівно половина із усіх натуральних чисел! Отримуємо, що в деякому сенсі *частина дорівнює цілому*. І це дійсно так. Можна показати, що існує бієкція із множини натуральних чисел на будь-яку її нескінченну підмножину. Дійсно, нехай $P\subset \boldsymbol{N}$. Оберемо в $P$ найменший елемент і позначимо його $x_1$; видалимо цей елемент із $P$ і найменший елемент із усіх, що залишились, позначимо як $x_2$. Продовжуючи цей процес, ми привласнимо номер кожному елементу із $P$. Ця нумерація є бієкція $\boldsymbol{N} \to P$: $n \to x_n$, де $x_n$ є $(n+1)$-й елемент $P$ за порядком зростання. Таким чином, множина непарних чисел, множина квадратів натуральних чисел і множина будь-яких лінійних комбінацій, наприклад, $ax + b$, де $a,b\in N$, будуть еквівалентні між собою і ввійдуть у один клас еквівалентності.

<u>Означення 5.1.</u> Відношення еквівалентності, яке визначається взаємно однозначною відповідністю двох множин, називається **рівнопотужністю**, а клас еквівалентності рівнопотужних множин називається **потужністю** цих множин або **кардинальним числом**.

Потужність множини $A$ позначається $cardA$. Кількість елементів скінченної множини також називається потужністю, тоді $cardA = |A|$. Для рівнопотужних множин часто використовується позначення $A\sim B$.

### 5.2. Кардинальні числа

Порівняння нескінченних множин можливе завдяки властивостям функціональних відображень. Із визначення ін'єкції слідує, що ін'єкція із множини $A$ у множину $B$ можлива тільки в тому випадку, коли кількість елементів у $A$ не більше кількості елементів у $B$: $|A| \le |B|$ (для скінченних множин). До того ж, якщо не існує ін'єкція із $B$ у $A$, то ця нерівність перетворюється у строгу нерівність $|A| < |B|$. Якщо ж існує ін'єкція із $B$ у $A$, яка може не співпадати із оберненим відображенням для ін'єкції $A \to B$, то це можливо тільки тоді, коли кількість елементів у них співпадає, тобто $|A| = |B|$. А в цьому випадку можна знайти і взаємно однозначне відображення між $A$ та $B$, тобто бієкцію.

Аналогічно, якщо існує сюр'єкція із $A$ на $B$ така, що один образ у $B$ має декілька прообразів у $A$, то кількість елементів у $A$ строго більше кількості елементів у $B$, тобто $|A| > |B|$.

Ці властивості узагальнюються для випадку нескінченних множин наступною теоремою.

Теорема 5.1 (Кантора-Бернштейна) (без доведення).

Нехай $A$ та $B$ – дві довільні нескінченні множини. Тоді:

а) або існує ін'єкція із $A$ в $B$, або існує ін'єкція із $B$ в $A$ (одно не виключає інше),

б) якщо існують ін'єкції $A \to B$ та $B \to A$, то існує бієкція із $A$ в $B$.

Іншими словами, якщо множина $A$ рівнопотужна деякій підмножині множини $B$, а множина $B$ рівнопотужна деякій підмножині множини $A$, то $A$ та $B$ рівнопотужні.

Ця теорема має наступні наслідки.

1) *Якщо існує ін'єкція $A \to B$, але не існує ін'єкція $B \to A$, то множина $B$ має потужність, яка строго більша потужності $A$: $cardB > cardA$.*

2) *Якщо існує ін'єкція $B \to A$, але не існує ін'єкція $A \to B$, то множина $B$ має потужність, яка строго менша потужності $A$: $cardB < cardA$.*

3) *Якщо існує бієкція із $A$ в $B$, то множини $A$ та $B$ рівнопотужні: $cardB = cardA$.*

Класи еквівалентності рівнопотужних скінченних множин є скінченними кардинальними числами. Ці числа за означенням є натуральними числами, які відповідають кількості елементів у кожній множині. Потужність порожньої множини дорівнює нулю: $card\varnothing = 0$.

Означення 5.2. Потужність нескінченної множини називається **трансфінітним кардинальним числом**, або просто **трансфінітним числом**.

Таким чином, множина кардинальних чисел – це фактор-множина рівнопотужних множин, яке являє собою об'єднання множин натуральних та трансфінітних чисел.

### 5.3. Зліченні множини

Означення 5.3. Потужністю зліченної множини називається потужність множини натуральних чисел $\boldsymbol{N}$. **Зліченною** називається всяка множина $A$, рівнопотужна множині натуральних чисел $\boldsymbol{N}$. Потужність зліченної множини позначається кардинальним трансфінітним числом $\aleph_0$ (читається: *алеф-нуль*).

Зліченність множини $A$ позначає, що існує принаймні одна така бієкція із $A$ на $\boldsymbol{N}$ (але це не означає, що така бієкція задана). Іншими словами, зліченну множину можна визначити як множину, елементи якої можна розташувати у вигляді списку (навіть, якщо цей список буде нескінченним). Тоді кожному елементу множини можна поставити у відповідність його порядковий номер у цьому списку, тобто може бути побудоване відображення із $\boldsymbol{N}$ в $A$ $f(n) : \boldsymbol{N} \to A$, де $n \in \boldsymbol{N}$. Таке відображення називається **нумерацією**. Очевидно, що пронумерувати можна будь-яку скінченну множину. Множина $A$ скінченна або зліченна тоді і тільки тоді, коли існує ін'єкція $A$ в $\boldsymbol{N}$, або, якщо $A \neq \varnothing$, тоді і тільки тоді, коли існує сюр'єкція $\boldsymbol{N}$ на $A$.

Наприклад, множина всіх парних натуральних чисел $A$ та множина натуральних чисел $\boldsymbol{N}$ рівнопотужні, так як існує ін'єкція $A \to \boldsymbol{N}$ і сюр'єкція $\boldsymbol{N} \to$ А.

Теорема 5.2. Множина додатних раціональних чисел $\boldsymbol{Q}^+$ зліченна.

*Доведення*. Будь-яке раціональне число можна представити у вигляді дробу $m/n$, де $m$, $n$ – натуральні числа, $n \neq 0$. Запишемо раціональні числа у вигляді таблиці:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1/1 | 2/1 | 3/1 | 4/1 | ... |
| 1/2 | 2/2 | 3/2 | 4/2 | ... |
| 1/3 | 2/3 | 3/3 | 4/3 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 10 | ... |
| 4 | 3 | 6 | 11 | ... |
| 9 | 8 | 7 | 12 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

Права таблиця задає нумерацію елементів лівої таблиці (стрілки вказують напрямок нумерації). Тоді ми можемо виписати елементи лівої таблиці (множину раціональних додатних чисел) у вигляді списку, в якому кожному елементу відповідає натуральне число:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/1 | 2/1 | 2/2 | 1/2 | 3/1 | 3/2 | 3/3 | 2/3 | 1/3 | 4/1 | 4/2 | 4/3 | ... |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ... |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |

Отриманий перелік доводить зліченність множини додатних раціональних чисел. ►

Можна помітити, що раціональні числа входять у цей перелік із повторами: наприклад, 1/1 = 2/2 = 3/3 = ... = 1. Проте неважко скласти ефективну процедуру викреслення чисел, які повторюються, із цього переліку.

Аналогічно можна довести, що множина цілих чисел $\boldsymbol{Z}$, множина всіх раціональних чисел (і додатних, і від'ємних) є зліченними.

<u>Теорема 5.3.</u> Потужність зліченної множини $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним кардинальним числом. Це означає, що будь-яка нескінченна множина $A$ має принаймні одну зліченну частину (тобто зліченну підмножину).

*Доведення*. Припустимо, що для деякої нескінченної множини $A$ відношення $cardA > \aleph_0$ не виконується, тобто $cardA \le \aleph_0$. Це означає, по теоремі Кантора-Бернштейна, що існує ін'єкція $A \to \boldsymbol{N}$, тобто в $\boldsymbol{N}$ існує нескінченна частина $P$, така що між $A$ та $P$ існує бієкція. Але між множиною $\boldsymbol{N}$ і її нескінченною частиною $P$ також існує бієкція. Відображення $n \to x_n$, де $x_n$ є $(n+1)$-й за порядком зростання елемент $P$, визначає бієкцію $\boldsymbol{N}$ на $P$. Тобто отримали, що $cardA = \aleph_0$. ►

Якщо існує сюр'єкція $A \to B$, то $cardB \le cardA$. Дійсно, прообраз кожної точки $B$ не порожній, і якщо у кожному із прообразів обрати по одному елементу, то отримуємо деяку частину $A$, рівнопотужну $B$. Звідси та за теоремою 5.3 слідує, що у класі кардинальних чисел існує відношення порядку: якщо $\alpha$ є кардинальним числом деякої підмножини множини потужності $\beta$, то $\alpha \le \beta$.

Неважко показати (для скінченних множин це просто, а для нескінченних це слідує із теореми Кантора-Бернштейна), що це відношення рефлексивне, антисиметричне та транзитивне. Відповідно воно дійсно є відношенням порядку. Із теореми Кантора-Бернштейна також слідує, що це відношення є відношенням лінійного порядку, тобто будь-які два кардинальних числа зрівнянні.

На множині кардинальних чисел можна визначити операції додавання, добутку та піднесення у степінь.

1. **Додавання**. Нехай $\alpha$ та $\beta$ кардинальні числа, а множини $A$ та $B$ мають відповідно потужності $cardA = \alpha$ та $cardB = \beta$. Тоді $\alpha + \beta$ – сума потужностей $A$ та $B$, – це потужність будь-якої множини, яка дозволяє розбиття на два класи еквівалентності, рівнопотужні $A$ та $B$ відповідно. Іншими словами, якщо множини $A$ та $B$ не перетинаються, то потужність їх об'єднання дорівнює $\alpha + \beta$.

2. **Добуток**. Через $\alpha{\cdot}\beta$ позначається потужність декартового добутку $A \times B$. Іншими словами, добуток $\alpha{\cdot}\beta$ – це кардинальне число об'єднання $\alpha$ частин, які не перетинаються між собою та кожна з яких має потужність $\beta$.

3. **Піднесення у степінь**. Через $\alpha^\beta$ позначається потужність множини $A^B$, тобто потужність множини усіх функціональних відображень із $B$ в $A$: $card(B \to A) = card(A^B) = card\mathrm{A}^{cardB}$.

<u>Теорема 5.4.</u> Для будь-якого скінченного числа $m \ge 1$ виконуються рівності:

$$m \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \text{ та } \aleph_0^{\,m} = \aleph_0.$$

*Доведення*. Скористаємось методом математичної індукції. Покажемо спочатку, що $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ рівнопотужне $\boldsymbol{N}$, тобто $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (базис індукції).

Елементи декартового добутку $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ можна виписати у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{ccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \dots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Введемо діагональну нумерацію. Отримаємо послідовність (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), …. Ця послідовність визначає бієкцію $\boldsymbol{N}$ на $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Відповідно, $\boldsymbol{N}$ еквівалентно $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, тобто $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0^{\,2}$.

Припустимо тепер, що $\aleph_0^{\,m-1} = \aleph_0$, і покажемо, що тоді $\aleph_0^{\,m} = \aleph_0$.

За припущенням індукції декартовий добуток $\aleph_0^{m-1}$ зліченний. Тоді, відповідно базису індукції, декартовий добуток двох зліченних множин $\boldsymbol{N}^{m-1} \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^m$ також зліченний, тобто $\aleph_0^{m} = \aleph_0$. ►

Наслідок теореми 5.4. Об’єднання скінченної або зліченної кількості скінченних або зліченних підмножин множини $A$ скінченне або зліченне.

*Доведення*. Нехай $I$ – деяка частина $N$ ($I \subset \boldsymbol{N}$) і $A_i$ ($i \in I$) – деякі підмножини $A$, і для будь-якого $i$, $A_i \neq \varnothing$ (але, якщо $A_i = \varnothing$, то це нічого не змінить, так як якщо $A_i = \varnothing$, то об’єднання не зміниться). Нехай $f_i$ – сюр’єкція $\boldsymbol{N}$ на $A_i$. Тоді відображення $(i, n) \to f_i(n)$ буде сюр’єкцією $I\times\boldsymbol{N}$ на $\bigcup_{i\in I} A_i$ . Оскільки $I\times\boldsymbol{N}$ зліченна, то $\bigcup_{i\in I} A_i$ скінченне або зліченне. ►

Теорема 5.5. Якщо $A$ – нескінченна множина, а $B$ скінченне або зліченне, то $A\cup B \sim A$ (рівнопотужні), тобто $card(A\cup B) = cardA$.

*Доведення*. Нехай $A_1$ – зліченна підмножина множини $A$. Об’єднання зліченної та скінченної множин зліченне, об’єднання зліченних множин також зліченне, тому $A_1\cup B \sim A_1$. Множина $A\cup B$ не зміниться, якщо з неї видалити, а потім додати підмножину $A_1$. Тоді $A\cup B = (A\backslash A_1) \cup (A_1\cup B)$. Оскільки $A_1\cup B \sim A_1$, то $(A\backslash A_1) \cup (A_1\cup B) \sim (A\backslash A_1) \cup A_1$. Але $(A\backslash A_1) \cup A_1 = A$, тож маємо, що $A\cup B \sim A$. ►

Наслідок цієї теореми полягає в тому, що множина, утворена внаслідок вилучення з нескінченної множини елементів зліченної, рівнопотужна початковій.

Теорема 5.6 (без доведення). Якщо $\alpha$ та $\beta$ - кардинальні числа, такі що $\alpha \neq 0$ та $\beta \neq 0$, і якщо принаймні одне з них є трансфінітним, то сума $\alpha + \beta$ та добуток $\alpha\cdot\beta$ дорівнюють найбільшому з них, тобто $\alpha + \beta = max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha\cdot\beta = max\{\alpha, \beta\}$.

Наприклад, визначимо потужність множини всіх скінченних послідовностей натуральних чисел. Множина одноелементних послідовностей – це множина $\boldsymbol{N}$, всі двоелементні послідовності утворюють декартовий добуток $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$, триелементні – $\boldsymbol{N}^3$, $k$-елементні – $\boldsymbol{N}^k$ і так далі. Яке б велике число $k$ ми б не взяли, для нього існує число $k$+1 і, відповідно, існує послідовність довжиною $k$+1. Тому процес побудови послідовностей направлений у нескінченність. В результаті отримуємо, що множина всіх скінченних послідовностей є $A = \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{N}^2 \cup \boldsymbol{N}^3 \cup \ldots \cup \boldsymbol{N}^k \cup\ldots$, тобто це об’єднання зліченної кількості зліченних підмножин множини $A$. Оскільки $card\boldsymbol{N} = \aleph_0$, $card\boldsymbol{N}^2 = \aleph_0^2,\ldots$, $card\boldsymbol{N}^k = \aleph_0^k,\ldots$, то потужність цієї множини визначається виразом $cardA = \aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \ldots + \aleph_0^k + \ldots = \aleph_0$.

### 5.4. Незліченні множини

Теорема 5.7. Якою б не була множина $A$, множина її підмножин має потужність, яка строго більша потужності $A$.

Ця теорема показує, що послідовність трансфінітних кардинальних чисел не обмежена.

*Доведення*. Припустимо, що існує сюр’єкція $f$: $A \to \mathrm{P}(A)$, тобто сюр’єкція $f$ множини $A$ на множину її підмножин $\mathrm{P}(A)$. Тоді для $x\in A$ $f(x)$ є елементом $\mathrm{P}(A)$, тобто деякою підмножиною $A$. Позначимо через $B$ підмножину $A$, яка утворена з таких $x\in A$, що $x\notin f(x)$. Так як $B\in \mathrm{P}(A)$, то в $A$ існує принаймні один елемент $y$ такий, що $f(y) = B$. Якщо $y\in f(y) = B$, то, за визначенням множини $B$, $y\notin B$, що неможливо. Якщо $y\notin f(y) = B$, то $y\in B$. В обох випадках ми приходимо до протиріччя.

Однак, оскільки існує ін’єкція $A$ в $\mathrm{P}(A)$, а саме $x \to \{x\}$, то $A$ має потужність, яка менша за потужність $\mathrm{P}(A)$, а, значить, і строго менша потужності $\mathrm{P}(A)$. ►

Теорема 5.8. Якщо множина $A$ нескінченна, то множина $\mathrm{P}'(A)$ скінченних підмножин $A$ рівнопотужна множині $A$.

Цю теорему легко довести, проводячи міркування аналогічно тим, які наведені у прикладі про потужність всіх скінченних послідовностей натуральних чисел.

Означення 5.4. **Характеристичною функцією** деякої підмножини $B$ множини $A$ називається функція $\varphi_B$, яка визначена на $A$ та приймає значенні в множині {0, 1}, така, що $\varphi_B(x) = 1$, якщо $x\in B$, та $\varphi_B(x) = 0$, якщо $x\notin$ B.

Визначення цієї функції однозначно визначає підмножину (частину) $B$ множини $A$. Тоді кожній підмножині буде відповідати характеристичний вектор, який містить 0 та 1. Наприклад, якщо $A = \{a, b, c\}$, то підмножині $B = \{a, c\}$ буде відповідати вектор $\varphi_B = (1,0,1)$, підмножині $B = \{b\}$ – вектор $\varphi_B = (0,1,0)$ і т.д.

Характеристична функція $\varphi(x)$ задає множину відображень $\varphi: A \to \{0, 1\}$, тобто $\{0,1\}^A$. Тоді існує бієкція множини-степені $P(A)$ множини $A$ на множину відображень $\varphi: A \to \{0, 1\}$. Дійсно, кожній підмножині $B$ множини $A$ ($B \in P(A)$) можна поставити у відповідність один і тільки один вектор $\varphi_B$. Так само, кожному вектору $\varphi_B$ можна знайти відповідну підмножину $B$ множини $A$. Отже множини $P(A)$ та $\{0, 1\}^A$ рівнопотужні, тобто кардинальне число множини $P(A)$ є $card\{0,1\}^E = 2^{cardE}$.

Тепер теорему 5.7 можна сформулювати наступним чином. Яким би не було кардинальне число $\alpha$, $2^\alpha > \alpha$.

Так, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Звідси випливає, що існують незліченні множини.

Ми показали, що множина всіх скінченних послідовностей натуральних чисел зліченна. Можна довести, що множина всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел є незліченною. Ця множина є нічим іншим, як множиною всіх відображень $\varphi$: $\boldsymbol{N} \to \{0, 1\}$, тобто $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$, і потужність цієї множини дорівнює $2^{\aleph_0}$. Але множину всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел можна також інтерпретувати як множину всіх функцій, визначених на $\boldsymbol{N}$ і приймаючих значення в $\boldsymbol{N}$, тобто як множину функціональних відображень $f(n)$: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, тобто $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$, відповідно, потужність цієї множини є $\aleph_0^{\aleph_0}$. Оскільки ці дві множини рівнопотужні, то отримуємо, що $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

<u>Теорема 5.9</u> (Кантора). Множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незліченна.

*Доведення*. Для доведення скористаємось діагональним методом Кантора. Будемо представляти будь-яке число з інтервалу (0, 1) у вигляді нескінченного десяткового дробу. Скінченні дроби також можна представити у такому вигляді, наприклад, число 0,5 може бути записано як 0,49999...

Припустимо, що множина цих чисел зліченна. Тоді їх можна записати у вигляді списку. Побудуємо цей список і запишемо його у вигляді таблиці, де представлені десяткові частини чисел:

| | 1 | 2 | 3 | … | k | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | … | $a_{1k}$ | … |
| $a_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | … | $a_{2k}$ | … |
| $a_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | … | $a_{3k}$ | … |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $a_k$ | $a_{k1}$ | $a_{k2}$ | $a_{k3}$ | … | $a_{kk}$ | … |
| … | … | … | … | … | … | … |

Утворимо тепер нескінченне антидіагональне число $b = b_1b_2…b_k…$ за правилом: $i$-й розряд числа $b_i$ буде дорівнювати $1+a_{ii}$, якщо $a_{ii}\neq 9$ і 8 (або будь-якому іншому числу, відмінному від 9), якщо $a_{ii}=9$. Якщо множина чисел з (0, 1) зліченна, то побудоване число $b$ повинно увійти у цей список з яким-небудь номером, наприклад, з номером $k$: $b=a_k$. Але тоді $b_1 = a_{k1} = a_{11}+1$, $b_2 = a_{k2} = a_{22}+1,…$, $b_k = a_{kk} = a_{kk}+1$, що неможливо. Відповідно, множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незліченна. ►

<u>Означення 5.6.</u> Потужність множини (0, 1) називається **потужністю континууму**. Потужність континууму позначається $\aleph_1$ (алеф-один).

Потужність континуума – це потужність множини дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, тобто $card\boldsymbol{R} = \aleph_1$, тому що існує бієкція $(0, 1) \to \boldsymbol{R}$.

Наприклад, множина всіх точок $\boldsymbol{R}^n$ з раціональними або алгебраїчними координатами зліченна, тому що її кардинальне число дорівнює $\aleph_0^n = \aleph_0$, а множина всіх точок $\boldsymbol{R}^n$ з дійсними координатами незліченна і дорівнює континууму.

<u>Теорема 5.10.</u> Мають місце рівності:

$$m\cdot\aleph_1 = \aleph_0\cdot\aleph_1 = \aleph_1\cdot\aleph_1 = \aleph_1^m = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1, \text{ де } m\geq 1 \text{ – ціле.}$$

*Доведення.* Всі ці кардинальні числа не більше $\aleph_1^{\aleph_0}$ і не менше $\aleph_1$, тому достатньо показати, що $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Дійсно, $\aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Але треба довести, що $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Якщо взяти числа з $A = (0, 1)$, такі, що в їх зображенні присутні числа 0, 1, 2, ..., 7, то ця множина буде рівнопотужна множині $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}^{\boldsymbol{N}}$, відповідно, її потужність дорівнює $8^{\aleph_0}$. Сама множина $A$ має потужність $\leq 10^{\aleph_0}$ (ми пишемо $\leq$ через подвійність запису десяткового числа). Тому $8^{\aleph_0} \leq cardA \leq 10^{\aleph_0}$, звідки $2^{\aleph_0} \leq cardA \leq 16^{\aleph_0} = (2^4)^{\aleph_0} = 2^{4\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Відповідно $cardA = 2^{\aleph_0}$. З іншого боку, $cardA = \aleph_1$. Отже $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. ►

Наприклад, множина комплексних чисел має потужність континуум, через те що вона рівнопотужна $\boldsymbol{R}^2$: $\aleph_1^2 = \aleph_1$. Будь-який векторний простір скінченного числа вимірів $n$ над полем дійсних чисел або комплексних чисел має потужність континуум.

Множина всіх дійсних функцій дійсних змінних має потужність, яка є строго більшою за потужність континуума, тому що її потужність дорівнює $\aleph_1^{\aleph_1}$, а $\aleph_1^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0\aleph_1} = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$.

### 5.5. Континуум-гіпотеза

При дослідженні потужностей нескінченних множин був встановлений той факт, що множина кардинальних чисел є лінійно впорядкованою. Лінійна впорядкованість означає, що для кожного кардинального числа існує кардинальне число, яке безпосередньо слідує за ним. $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним числом. Але нічого невідомо про те, яке трансфінітне число є наступним за $\aleph_0$. Існує тільки припущення, яке називається континуум-гіпотезою.

**Континуум-гіпотеза**. Кардинальне число $2^{\aleph_0}$ безпосередньо слідує за $\aleph_0$.

Це означає, що $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ і між ними немає жодного іншого кардинального числа. Цей факт потребує доведення. Ми нічого не знаємо про множини, які незліченні, але менші ніж континуальні. Не знаємо навіть, чи існують такі множини. Відсутність прикладів подібних множин не є доведенням неможливості їх існування, тому твердження про безпосереднє слідування $2^{\aleph_0}$ за $\aleph_0$ є гіпотезою, а не теоремою.

Можна піти далі і сформулювати більш загальне твердження.

**Узагальнення континуум-гіпотези**. Для будь-якого кардинального числа $\alpha$ кардинальне число $2^{\alpha}$ безпосередньо слідує за $\alpha$. Звідси слідує, що послідовність кардинальних чисел необмежена: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$

Дійсно, $2^{\aleph_0}$ є потужність множини-степені $P(\boldsymbol{N})$ (замість $\boldsymbol{N}$ може бути будь-яка інша злічення множина). Але з цієї множини можна утворити знову множину всіх її підмножин $P(P(\boldsymbol{N}))$, потужність якої є $2^{2^{\aleph_0}}$, і цей процес можна продовжувати до нескінченості. Звідси слідує, що не існує найбільшого трансфінітного числа.

Намагання довести континуум-гіпотезу в якості теореми були безуспішні, а у 1963 році Коен довів, що континуум-гіпотеза нерозв'язана – її неможливо ні довести, ні спростувати, можна тільки прийняти її або протилежне їй твердження в якості аксіоми.