# Тема 3. Відображення і функції

У попередній лекції були розглянуті бінарні відношення, які є підмножинами декартового добутку двох множин. Бінарні відношення, які визначені на декартовому квадраті множини, представляють найбільший інтерес через те, що вони володіють деякими важливими властивостями: симетричність, рефлективність, транзитивність тощо. Для відношень, що утворені різними множинами, коли $R \subseteq A \times B$, говорити про зазначені вище властивості немає сенсу, тому що перша та друга координати $R$ мають різну природу. Наприклад, відношення “$x$ народився в році $y$” є підмножиною декартового добутку множини людей та множини років і ставить у відповідність кожній людині рік її народження. Для аналізу подібних відношень вводяться поняття відображення та функції.

## 3.1. Функціональні відношення

Означення 3.1 Відношення $f \subset A \times B$ називається **функціональним** (або просто функцією), якщо виконується наступне:

$$\forall a\ (a, b) \in f \text{ та } (a, c) \in f \Rightarrow b = c.$$

Іншими словами, кожному $a \in A$ з області визначення: $(a, b) \in f$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$.

Іноді функціональне відношення $f$ також позначають у префіксному записі: $b = f(a)$, де $a \in A$, $b \in B$.

**Область** (**множина**) **визначення** функції буде наступна множина:

$$\mathrm{Dom}\, f == \{a \in A \mid \exists\ b \in B,\ b = f(a)\}.$$

**Область (множина) значень** функції буде наступна множина:

$$\mathrm{Im}\, f == \{b \in B \mid \exists\ a \in A,\ b = f(a)\}.$$

Очевидно, для функціонального відношення $f$ кожний переріз за будь-яким $a \in A$ містить не більше як один елемент. Якщо $a \notin \mathrm{Dom}\, f$, то переріз за $a$ – порожній.

Якщо $\mathrm{Dom}\, f = A$, то функціональне відношення $f$ називається **всюди визначеним**. Матриця функціонального відношення містить у кожному рядку не більше як один одиничний елемент, а його граф характеризується тим, що з кожної вершини може виходити тільки одна дуга (враховуючи й петлі).

Наприклад, розглянемо множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$ та $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, тоді відношення $R = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ та $Q = \{(1,1), (2,4), (3,4), (4,16)\}$ є функціональними. Відношення $P = \{(1,1), (1,4), (3,9)\}$, навпаки, не є функціональним.

Розглянемо інший приклад – українсько-англійський словник. Він установлює відповідність між множиною українських та англійських слів. Ця відповідність не є функціональною (оскільки одному українському слову, як правило, ставляться у відповідність декілька англійських слів); крім того, вона практично ніколи не є повністю визначеною: завжди можна знайти українське слово, що не міститься в цьому словнику.

Усяке функціональне відношення можна розглядати як функцію. При цьому перша координата $a$ впорядкованої пари $(a, b) \in f$ є **прообразом** (аргументом, змінною), а друга $b$ – **образом** (значенням). Потрібно розрізняти функцію $f$ як множину впорядкованих пар (відношення) і значення функції $b = f(a)$ як другу координату однієї з таких пар.

Слід зазначити, що відношення, обернене до функціонального, загалом не є функціональним. У розглянутому вище прикладі відношення $Q$ є функціональним, але обернене йому відношення $Q^{-1} = \{(1,1), (4,2), (4,3), (16,4)\}$ не є функціональним.

Якщо функціональне відношення $f \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ всюди визначене на $A$, то його називають **відображенням** множини $A$ в $B$ і записують $f : A \rightarrow B$. Очевидно, що різниця між відображенням та функцією зводиться до способу означення цих відношень на множині $A$, причому відображення потрібно розглядати як окремий випадок функції. Більшість математиків не розрізняють поняття відображення і функції.

### 3.2. Типи відображень

При відображенні $A$ в $B$ кожен елемент $a$ з $A$ має один і тільки один образ ($\forall a \in A\ \exists!\ b \in B\ (a = f(b))$. Однак зовсім не обов'язково, щоб кожний елемент $B$ був образом деякого елемента з $A$. Графічно ця ситуацію показана на рис. 3.1а. Для порівняння на рис. 3.1б наведено приклад функціонального відношення, яке не є відображенням.


а б

Рис. 3.1. Приклади відображення (а) та функціонального відношення (б).

Означення 3.2. Якщо для відображення $f : A \to B$ будь-який елемент $b$ з $B$ є образом принаймні одного елементу $a$ з $A$, тобто:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A : b = f(a),$$

то кажуть, що множина $A$ накриває множину $B$, а відображення буде мати назву **сюр'єкції** (рис. 3.2).

Обернене відображення до сюр'єкції $f^{-1}$ не буде порожнім.

Означення 3.3. Якщо для відображення $f : A \to B$ для будь-яких двох різних елементів $a_1$ та $a_2$ з $A$ їх образи $b_1$ та $b_2$ також різні, то відображення $f$ називається **ін'єкцією** (рис. 3.3). Іншим чином це можна записати як:

$$b = f(a_1) \text{ та } b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

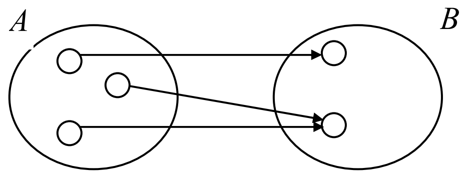


Рис. 3.2. Сюр'єкція

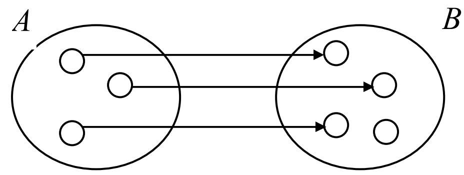


Рис 3.3. Ін'єкція

Означення 3.4. Відображення, яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним називається **бієкцією** (накладанням). У цьому випадку кажуть, що між елементами $A$ та $B$ існує взаємно однозначна відповідність (рис. 3.4).

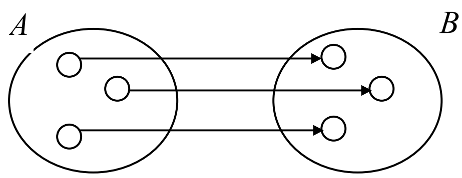


Рис 3.4. Бієкція

Якщо $f$ – взаємно однозначне відображення, а $A = B$, то $f : A \to A$ називається відображенням множини $A$ на себе. Елементи $(a, a) \in A \times A$ утворюють **тотожне відображення** $E$, причому $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$.

Означення 3.5. Відображення множини в її фактор-множину називається **канонічною сюр'єкцією.**

Наприклад, нехай $A$ та $B$ – множини дійсних чисел і $f : A \to B$ визначено таким чином: $f(a) = 3a + 5$. Функція $f$ ін'єктивна, тому що якщо $f(a_1) = f(a_2)$, тоді $3a_1+5 = 3a_2+5$ і відповідно

$a_1 = a_2$. Функція $f$ є також сюр'єкцією. Для будь-якого дійсного числа $b$ треба знайти таке $a$, що $f(a) = b = 3a + 5$. Розв'язуючи це рівняння відносно $a$, знаходимо, що якщо $a = (1/3)(b - 5)$, тоді $f(a) = b$. Тому функція $f$ представляє собою бієкцію або взаємно однозначну відповідність.

Розглянемо інший приклад. Нехай знову $A$ та $B$ – множини дійсних чисел, а функція $f: A \to B$ визначена як $f(a) = a^2$. Функція $f$ не є ін'єктивною, тому що $f(2) = f(-2)$, але $2 \neq -2$. Функція $f$ не є також сюр'єкцією, тому що не існує такого дійсного числа $a$, для якого $f(a) = -1$. Зазначимо, що якщо $A$ та $B$ – множини невід'ємних дійсних чисел, то тоді $f$ буде і сюр'єктивним, і ін'єктивним. У випадку коли $A$ та $B$ будуть множинами натуральних чисел, то $f$ збереже ін'єктивність, але втратить сюр'єктивність.

Прикладом бієкційного, але не функціонального відображення є функція $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$, де $f(a) = \pm\sqrt{a}$.

Різні види кодування (подання чисел у різних системах числення, секретні шифри тощо) є відповідністю між об'єктами, що кодуються, і кодами, що присвоюються їм. Ця відповідність, як правило, має всі властивості взаємно однозначної відповідності, крім, може бути, однієї – сюр'єктивності. Єдність образу та прообразу в кодуванні гарантує однозначність шифрування і дешифрування. Відсутність сюр'єктивності означає, що не кожний код має значення, тобто відповідає якому-небудь об'єкту. Наприклад, кодування телефонів міста Києва семизначними номерами не є сюр'єктивним, оскільки деякі семизначні номери не відповідають жодним телефонам. У випадку коли мова йде про шифрування слів і не виконується умова ін'єкції, то це означає, що неможливо однозначно встановити початкове слово за його шифром або кодом.

### 3.3. Властивості відображень

Загалом при відображенні $f: A \to B$ елемент із $B$ може бути образом не одного, а кількох елементів із $A$.

<u>Означення 3.6.</u> Сукупність усіх елементів, образом яких є заданий елемент $b$, називається **повним прообразом** елемента $b$ і позначається $f^{-1}(b)$. Сукупність елементів $f$(a), які є образами всіх елементів множини $C \subset A$, називається **образом множини** $C$ та позначається $f(C)$. Сукупність усіх елементів із $A$, образи яких належать якійсь множині $D \subset B$, називається **повним прообразом множини** $D$ і позначається $f^{-1}(D)$.

Наприклад, нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$ та $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, а $f = \{(1,5), (2,6), (2,7), (3,8), (3,5)\}$. Тоді повним прообразом елемента "5" з множини $B$ буде $f^{-1}(5) = \{1, 3\}$. Нехай також $C = \{1, 2\}$. Тоді образ множини $C$ буде $f(C) = \{5, 6, 7\}$. Нехай $D = \{6, 7\}$. Тоді $f^{-1}(D) = \{2\}$.

<u>Теорема 3.1.</u> Нехай $f$ є відображення $f: A \to B$. Тоді справедливі наступні властивості відображень:

а) Якщо $X \subset Y$, то $f(X) \subset f(Y)$, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$,

б) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,

в) $f(X \backslash Y) = f(X) \backslash f(Y)$, $f^{-1}(X \backslash Y) = f^{-1}(X) \backslash f^{-1}(Y)$,

г) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

д) $f^{-1}(X') = (f^{-1})'(X)$.

*Доведення.*

Розглянемо перше твердження пункту б) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$. Отримаємо наступне:

$f(a) \in f(X \cup Y) \Rightarrow a \in X \cup Y \Leftrightarrow a \in X$ або $a \in Y \Rightarrow f(a) \in f(X)$ або $f(a) \in f(Y) \Leftrightarrow f(a) \in f(X) \cup f(Y) \Rightarrow f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.

$f(a) \in f(X) \cup f(Y) \Leftrightarrow f(a) \in f(X)$ або $f(a) \in f(Y) \Rightarrow a \in X$ або $a \in Y \Leftrightarrow a \in X \cup Y \Rightarrow f(a) \in f(X \cup Y) \Rightarrow f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$.

З цих двох результатів отримуємо, що $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

Розглянемо друге твердження пункту б) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Отримаємо наступне:

$a \in f^{-1}(X \cup Y) \Rightarrow f(a) \in X \cup Y \Leftrightarrow f(a) \in X$ або $f(a) \in Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ або $a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow$

$a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \Rightarrow f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

$a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cup a \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(a) \in X$ або $f(a) \in Y \Leftrightarrow f(a) \in X \cup Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X \cup Y) \Rightarrow f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

Тому отримуємо, що $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Розглянемо перше твердження пункту в) $f(X \backslash Y) = f(X) \setminus f(Y)$. Отримаємо наступне доведення:

$f(a) \in f(X \backslash Y) \Rightarrow a \in X \backslash Y \Leftrightarrow a \in X$ та $a \notin Y \Rightarrow f(a) \in f(X)$ та $f(a) \notin f(X) \Leftrightarrow f(a) \in f(X) \setminus f(Y) \Rightarrow f(X \backslash Y) \subseteq f(X) \setminus f(Y)$,

Випадок зворотного включення $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \backslash Y)$ доводиться аналогічно і тому отримуємо, що $f(X \backslash Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Розглянемо друге твердження пункту г) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Отримаємо наступне доведення:

$a \in f^{-1}(X \cap Y) \Rightarrow f(a) \in X \cap Y \Leftrightarrow a \in X$ та $a \in Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ та $a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \Rightarrow f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Випадок зворотного включення $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cap Y)$ доводиться аналогічно і тому отримуємо, що $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Решту тверджень читачеві пропонується довести самостійно. ►

<u>Означення 3.7.</u> Нехай функцію $f : A \to B$ задано на $A$, $f_1$ – на множині $C \subset A$, причому для кожного $a \in C$ виконується $f(a) = f_1(a)$. Тоді $f_1$ називається **обмеженням** (**звуженням**) функції $f$ на $C$, а $f$ – **продовженням** функції $f_1$ на $A$.

Наприклад, функція $f(a) = a^3$, яка задана на множині дійсних чисел, відображає цю множину на себе. Якщо ввести обмеження, щоб область визначення була лише множиною цілих чисел, то дістанемо звуження $f_1(a)$ функції $f(a)$ на цілих числах. Причому $f_1(a)$ відображає множину цілих чисел, але не на саму себе, оскільки не кожне ціле число є кубом самого себе.

### 3.4. Композиція відображень

<u>Означення 3.8.</u> Якщо $f : A \to B$, $g : B \to C$, то їх **композиція** $(g \circ f) : A \to C$, причому $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Іншими словами, якщо існує множина пар $(a, b) \in f$ та $(b, c) \in g$, то множина пар $(a, c) \in f \circ g$ утворює композицію $(g \circ f)$. Запис $(g \circ f)$ проводиться в порядку, який є зворотнім до того, в якому виконується операції $f : A \to B$, $g : B \to C$. Таким чином, в математиці прийнято правило, згідно з яким композицію відображень $(g \circ f)$ треба починати з виконання операції $f$, яка розташована справа.

Наприклад, якщо $f = \sin$, $g = \ln$, то $(g \circ f)(a) = (\ln \circ \sin)(a) = \ln(\sin(a))$.

Легко показати, що композиція відображень асоціативна, тобто $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ і записується у вигляді $h \circ g \circ f$. Так само легко з'ясувати, що композиція відображень не комутативне (це випливає з означення композиції відображень).

<u>Теорема 3.2.</u> Функція $f$ є взаємно однозначним функціональним відношенням тоді і тільки тоді, коли $f^{-1}$ – взаємно однозначне відношення.

*Доведення.* Доведемо, що $f^{-1}$ – функція. Нехай $(b, a_1) \in f^{-1}$, $(b, a_2) \in f^{-1}$. за означенням оберненого відношення маємо $(a_1, b) \in f$, $(a_2, b) \in f$. Оскільки $f$ за умовою є взаємно однозначною функцією, дістанемо $a_1 = a_2$, а це означає, що $f^{-1}$ – функціональне відношення. Покажемо, що $f^{-1}$ – взаємно однозначне функціональне відношення. Нехай $(b_1, a) \in f^{-1}$, $(b_2, a) \in f^{-1}$. Це означає, що $(a, b_1) \in f$, $(a, b_2) \in f$. Оскільки $f$ – функція, маємо $b_1 = b_2$, а це означає, що $f^{-1}$ є взаємно однозначним функціональним відношенням. Таким чином, необхідну умову теореми доведено. Читачеві пропонуємо показати, що таким чином доведено також її достатню умову. ►

<u>Теорема 3.3.</u> Композиція двох функціональних відношень є функціональним відношенням.

*Доведення.* Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$. За означенням композиції відношень $h = (g \circ f) = \{(a, c) \mid ((a, b) \in f$ та $(b, c) \in g\}$. Отже, це за означенням – підмножина декартового добутку $A \times C$. Доведемо, що $h$ – функціональне відношення. Нехай задано дві пари, які належать $h$:

$$\begin{cases}(a,c_1)\in h \Rightarrow \exists b_1 \in B \mid (a,b_1)\in f,\ (b_1,c_2)\in g;\\ (a,c_2)\in h \Rightarrow \exists b_2 \in B \mid (a,b_2)\in f,\ (b_2,c_2)\in g.\end{cases}$$

Оскільки $f$ – функціональне відношення, маємо $b_1=b_2$, а оскільки $g$ – функціональне відношення, дістаємо $c_1=c_2$. Отже $h$ – функціональне відношення. ►

Теорема 3.4 (без доведення). Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тоді

а) якщо $f$ і $g$ – сюр’єкції $A$ на $B$ та $B$ на $C$ відповідно, то $g \circ f$ є сюр’єкцією $A$ на $C$. Іншими словами, композиція двох сюр’єкцій – сюр’єкція.

б) якщо $f$ і $g$ – ін’єкції, то $g \circ f$ є ін’єкцією. Іншими словами, композиція двох ін’єкцій – ін’єкція.

в) якщо $f$ і $g$ – бі’єкції, то $g \circ f$ є бі’єкцією. Іншими словами, композиція двох бі’єкцій – бі’єкція.

Для багатомісних функції $f : A^m \to B$, $g : B^n \to C$ можливими є різні варіанти підстановки $f$ у $g$, які дають функції різних типів. Наприклад, при $m = 3$, $n=4$ функція $h_1=g(b_1,f(a_1,a_2,a_3),b_3,b_4)$ має шість аргументів і діє з $B \times A^3 \times B^2 \to C$, а функція $h_1=g(f(a_1,a_2,a_3),f(d_1,d_2,d_3),b_3,b_4)$ має вісім аргументів та діє з $A^6 \times B^2 \to C$. Особливо цікавим є випадок, коли задано множину функцій типу $f_i :\ A^{m_1} \to A,\ A^{m_2} \to A, \ldots, A^{m_n} \to A$. У цьому разі може виконане будь-яке перейменування аргументів, наприклад, перейменування $a_3$ в $a_2$, що породжує з функції $f(a_1,a_2,a_3,a_4)$ функцію трьох аргументів $f(a_1,a_2,a_2,a_4)$.

Означення 3.9. Функція, що утворюється з функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ деякою підстановкою їх одна в одну і перейменуванням аргументів, називається **суперпозицією** $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Наприклад, у функції $f_1(a_1,a_2,a_3) = a_1 + 2a_2 + 7a_3$ перейменування $a_3$ в $a_2$ приводить до функції $f_1(a_1,a_2,a_2) = a_1 + 2a_2 + 7a_2 = f_2(a_1,a_2) = a_1 + 9a_2$. Перейменування $a_1$ та $a_3$ в $a_2$ приводить до одномісної функції $f_3(a_2) = 10a_2$.