Тема 26. Зв'язність графів

26.1. Зв'язність простих графів

Означення 26.1. Дві вершини v і w називаються **зв'язаними**, якщо існує маршрут вигляду $(\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n\text{-}1}, e_{n\text{-}1}, v_n, \ldots)$ із кінцями v та w. В цьому випадку також говорять, що вершина v **досяжна** з вершини w.

За означенням кожна вершина зв'язана сама з собою маршрутом довжиною 0.

Означення 26.2. Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара його вершин є зв'язаною. **Зв'язністю** графу називається мінімальна кількість вершин, вилучення яких приводить до утворення незв'язного графу.

Зв'язність – це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивне (кожна вершина зв'язана сама із собою за означенням), симетричне (для кожного маршруту є обернений маршрут) та транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є маршрут з v до w та маршрут з w до u, то є маршрут з v до u. Це очевидно: щоб отримати такий маршрут, достатньо до послідовності ребер, які ведуть з v до w, дописати справа послідовність ребер, яка веде з w до u.

Таким чином, відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин графу G і розбиває цю множину на підмножини, що не перетинаються, – класи еквівалентності. Всі вершини одного класу зв'язані між собою, вершини різних класів між собою не зв'язані. Підграф, утворений всіма вершинами одного класу, називається **компонентною зв'язності** графу G.

Неважко показати, виконується наступна лема.

Лема 26.1. Нехай $G = (V, E)$ – граф із p компонентами зв'язності $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_p = (V_p, E_p)$. Тоді

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_p,\ E = E_1 \cup \ldots \cup E_p;$$
$$V_i \cap V_j = \varnothing,\ E_i \cap E_j = \varnothing \text{ при } i \neq j;$$
$$n(G_1) + \ldots + n(G_p) = n(G);\ m(G_1) + \ldots + m(G_p) = m(G).$$

Теорема 26.1. Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, який їх зв'язує.

Доведення. Дійсно, якщо маршрут, який зв'язує дві вершини, не є простим ланцюгом, то в ньому є вершина v, яка інцидентна більш ніж двом ребрам цього маршруту. Нехай e_i – перше з цих ребер, e_j – останнє ($j > i+1$). Тоді з даного маршруту можна видалити ділянку від $i+1$-го ребра до j–1-го. Отримана послідовність залишиться маршрутом: в ній всі ребра e_i та e_j стануть сусідніми, і при цьому вони мають спільну вершину v. Якщо отриманий маршрут не є простим ланцюгом, то процес повторюється до отримання простого ланцюга. ►

Розглянемо неорієнтовані графи K_n (повний граф з n вершинами) та C_n (граф, який складається з простого циклу з n вершинам). Обидва ці графи зв'язані, проте інтуїтивно зрозуміло, що для $n>3$ граф K_n «сильніше зв'язаний», ніж граф C_n. Розглянемо два поняття, які характеризують міру зв'язності простого графу.

Означення 26.3. **Числом вершинної зв'язності** $\kappa(G)$ (читається «каппа від G») простого графу G називають найменшу кількість вершин, вилучення яких утворює незв'язаний або одновершинний граф. Зазначимо, що вершину вилучають разом із інцидентними їй ребрами.

Наприклад, $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(K_n) = n–1$, $\kappa(C_n) = 2$.

Означення 26.4. Нехай G – простий граф з $n>1$ вершинами. **Числом реберної зв'язності** $\lambda(G)$ (читається «лямбда від G») графу G називають найменшу кількість ребер, вилучення яких дає незв'язаний граф. Число реберної зв'язності одновершинного графу вважають рівним 0.

Означення 26.5. Вершину u простого графу G називають **точкою з'єднання**, якщо граф G в разі її вилучення матиме більше компонент, ніж даний граф G. Тобто кількість компонент зв'язності при вилученні цієї вершини у графу G збільшується. Множина ребер графу називається **розрізом**, якщо вилучення цих ребер з графу G приводить до збільшення кількості компонент зв’язності. Якщо розріз містить одне ребро, то його називають **мостом**.

Граф називається **роздільним**, якщо він містить хоча б одну точку з’єднання, та **нероздільним** в іншому випадку. Максимальні нероздільні підграфи графу називаються **блоками**.

Отже, точки з’єднання й мости – це своєрідні «вузькі місця» простого графу.

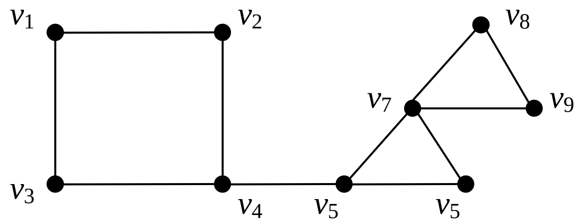


Рис. 26.1

Граф на рис. 26.1 має три точки з’єднання v_4, v_5 та v_7 та один міст (v_4, v_5).

Позначимо як $\delta(G)$ мінімальний степінь вершин графу G. Можна довести, що $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

Означення 26.6. Простий граф називається ***t*-зв’язним**, якщо $\kappa(G) \ge t$, тобто, якщо вилучаючи будь-яку його t–1 вершину, не можна порушити його зв’язність, а при вилученні деяких t вершин зв’язність може порушитися. Граф називається ***t*-ребернозв’язним**, якщо $\lambda(G) \ge t$, тобто якщо t – максимальне з таких p, що при вилученні будь-яких p–1 ребер зв’язність графу не порушується.

Теорема 26.2. Вершина v є точкою з’єднання зв’язного графу G тоді й тільки тоді, коли існують такі вершини w та u, відмінні від v, що довільний маршрут між ними проходить через v.

Доведення. Нехай v – точка з’єднання. Її видалення дає новий граф G', який містить декілька компонент зв’язності. Оберемо вершини w та u таким чином, щоб вони містились в різних компонентах зв’язності. Тоді у G' між ними немає маршруту. Але в G (в силу його зв’язності) між ними є маршрути (принаймні один). Отже, саме видалення v розірвало ці маршрути, а, відповідно, всі вони проходять через v.

Нехай тепер існують вершини w та u, вказані в умові теореми. Тоді видалення v розірве всі маршрути між ними, граф стає незв’язним, і, відповідно, v – точка з’єднання. ►

Очевидно, що кількість ребер у зв’язномі графі з n вершинами не перевищує кількості ребер у графі K_n, тобто $n(n-1)/2$. Але скільки може бути ребер у простому графі з n вершинами й фіксованою кількістю компонент?

Теорема 26.3. Якщо простий граф G має n вершин і k компонент зв’язності, то кількість m його ребер задовольняє нерівності

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Доведення. Доведемо спочатку верхню оцінку. Нехай G – простий граф з n вершинами, k компонентами та максимальною для таких графів кількістю ребер $m_{\max}$. Очевидно, що кожна компонента графу G – повний граф. Нехай K_p, K_q – дві компоненти, $p \ge q > 1$, v – вершина з другої компоненти. Вилучимо з графу всі ребра, інцидентні вершині v, і з’єднаємо цю вершину ребром із кожною вершиною першої компоненти. Кількість вершин і компонент при цьому не зміниться, а кількість ребер зросте на $p-(q-1) = p-q+1$, що неможливо, бо граф G має максимально можливу кількість ребер. Отже, лише одна компонента графу G являє собою повний граф із більшою ніж 1 кількістю вершин $n-(k-1) = n-k+1$. Отже, $m_{\max} = (1/2)(n-k)(n-k+1)$.

Доведемо нижню оцінку математичною індукцією за кількістю ребер m. Для m=0 твердження очевидне, оскільки тоді $k = n$ і, отже, $0 \le 0$. Нехай тепер $m>0$, і нижня оцінка справджується для графів із меншою кількістю ребер, ніж m. Припустимо, що граф G має найменшу можливу кількість ребер m_{min} серед усіх простих графів з n вершинами та k компонентами. Вилучивши довільне ребро отримаємо граф з n вершинами, k+1 компонентою й m_{min} – 1 ребром. Для нього справджується припущення індукції: $n - (k + 1) \le m_{min} - 1$, звідки випливає нерівність $n - k \le m_{min}$. ►

Наслідок. Всякий граф порядку n, який має більше $(n - 1)(n - 2)/2$ ребер, зв'язний.

Доведення. Дійсно, в цьому випадку число компонентів зв'язності такого графу повинне бути строго менше двох. Отже, k=1, тобто граф зв'язний. ►

Теорема 26.4. Для будь-якого графу G або він сам, або його доповнення $\overline{G}$ є зв'язним.

Доведення. Нехай $G = (V, E)$ – незв'язний граф, A – одна із його компонент зв'язності і $B = V \backslash A$. Тоді для будь-яких вершин u із A і v із B в графі $\overline{G}$ є маршрут довжиною 1, оскільки ці вершини зв'язані ребром (u,v). Отже, всяка вершина із B зв'язана з вершиною u маршрутом довжини 1, а всяка вершина із A – з u маршрутом довжини, не більше 2. Тобто всяка вершина u зв'язана з будь-якою вершиною v маршрутом. Значить, $\overline{G}$ – зв'язний граф. ►

Теорема 26.5. Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Тоді якщо e належить деякому циклу, то $G–e$ зв'язний. Якщо ж e не належить жодному циклу, то граф G–е має рівно дві компоненти зв'язності.

Доведення. Нехай $e = (v, u)$ належить деякому циклу C графу G. Виконаємо заміну в кожному ланцюгу, який з'єднує вершини x та y і включає ребро e, ланцюгом $C–e$. Отримаємо маршрут з вершин x в вершину y, який не має ребра e. Тобто в графі G всякі дві вершини, які не співпадають між собою, з'єднані маршрутом. А це означає, що $G–e$ зв'язний.

Нехай тепер $e = (v, u)$ не входить в жодний цикл графу G. Тоді очевидно, що вершини u і v належать різним компонентам зв'язності, наприклад: G_v і відповідно G_u графу $G–e$. Для довільної вершини $x \ne v$ в G існує маршрут із x в v в силу зв'язності G. Якщо e в цей маршрут не входить, то $x \in G_u$. Тобто G_v і G_u – компоненти зв'язності. ►

Ці теореми дають деяку характеристику операцій вилучення ребра по відношенню до властивості зв'язності. Ясно, що обернена операція – операція введення ребра – не порушує цієї властивості.

26.2. Зв'язність орієнтованих графів

Означення 26.7. Орієнтований граф називається **сильнозв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях в обох напрямках. Орієнтований граф називається **однобічно-зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях хоча б в одному напрямку.

Означення 26.8. Псевдографом, асоційованим з орієнтованим псведографом $D_1(V)$, називається псевдограф $D_2(V)$ такий, коли кожну дугу графу D_1 замінено на ребро графу D_2. Орієнтований граф називається **слабкозв'язним**, якщо зв'язним є асоційований з ним псевдограф. Якщо граф (орієнтований граф) не є зв'язним (слабкозв'язним), то він називається **незв'язним**.

Перевірка сильної, слабкої або однобічної зв'язності шляхом безпосереднього перебору може виявитись дуже трудомісткою, оскільки в орграфі з n вершинами є $n(n–1)/2$ пар вершин, тобто дуг. Тут ми наведемо деякі теореми, які дозволяють віднести орграф до одного з трьох класів.

У сильнозв'язаному орграфі довільна вершин v входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з v до деякої іншої u та назад з u до v. Цикли, які проходять через v та інші вершини графу, не обов'язково всі різні. Так, сильнозв'язний граф, який містить n вершин, може представляти собою один простий цикл, який проходить скрізь всі вершини.

Теорема 26.6. Орграф є сильнозв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, який проходить через всі вершини.

Теорема 26.7. Орграф є однобічно-зв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

Для введення критеріїв слабкої зв'язності нам буде потрібне наступне означення.

<u>Означення 26.9.</u> **Півшлях** в орієнтованому графі – це послідовність дуг, така, що будь-які дві сусідні дуги різні й мають спільну інцидентну їм вершину. Іншими словами, півшлях – це шлях без урахування орієнтації дуг.

<u>Теорема 26.8.</u> Орграф є слабкозв'язаним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний півшлях.

26.3. Властивості матриць графів

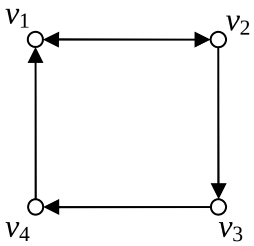
Багато інформації відносно графу G можна представити в зручній формі, використовуючи матриці, відповідні графу G. Матрицю суміжності $\Delta(G)$ графу G можна використовувати для підрахування кількості різних маршрутів (шляхів для орграфів) у G. Сама матриця Δ задає ребра G, тобто маршрути довжиною 1. Виявляється, що матриця Δ^k (k-степінь Δ) задає число маршрутів довжини k.

<u>Теорема 26.9.</u> Елемент $(i, j) = \delta_{ij}^{(k)}$ матриці Δ^k графу G дорівнює кількості маршрутів довжини k з v_i у v_j.

Доведення. Методом індукції по довжині k. Для $k = 1$ теорема очевидна: матриця суміжності задає маршрут довжиною 1. Нехай для деякого k теорема вірна, тобто елемент $\delta_{ij}^{(k)}$ матриці Δ^k дорівнює кількості маршрутів довжини k з v_i у v_j. Доведемо її для k+1. Довільний маршрут довжини k+1 з v_i у v_j складається з ребра, яке прямує з v_i у суміжну з нею вершиною v_r, а потім маршруту довжини k з v_r у v_j. Кількість маршрутів довжини k+1 з v_i у v_j, які проходять на першому кроці через v_r, дорівнює $\delta_{ir}\delta_{rj}^{(k)}$ (якщо ребро з v_i у v_r немає, то $\delta_{ir} = 0$ і $\delta_{ir}\delta_{rj}^{(k)} = 0$, а якщо таке ребро є, то $\delta_{ir}\delta_{rj}^{(k)} = \delta_{rj}^{(k)}$, тому що $\delta_{ir} = 1$). Загальна кількість маршрутів довжини k+1 з v_i у v_j отримаємо, якщо просумуємо цю величину по всім r: $\sum_{r=1}^{n} \delta_{ir}\delta_{ir}^{(k)}$. Ця сума дорівнює елементу (i, j) добутку матриці Δ та Δ^k, тобто елементу (i, j) матриці Δ^{k+1}, що й доводить теорему. ►

<u>Наслідок.</u> Елемент (i, j) матриці $\Delta+\Delta^2+\ldots+\Delta^k$ графу G дорівнює кількості всіх маршрутів довжини не більше за k з v_i у v_j.

Ця теорема справедлива як для неорієнтованих, так і для орієнтованих графів. Наприклад, на рис. 26.2 наведено орграф та його матриці суміжності Δ, Δ^2, Δ^3 та Δ^4.



$$\Delta = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Delta^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Delta^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Delta^4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 26.2.

Корисною виявляється нова матриця – **матриця відстаней** $D = \|d_{ij}\|$, де $d_{ij} = d(i, j)$ – відстань від v_i до v_j, яка визначається як довжина найкоротшого маршруту з v_i у v_j. (Нагадаємо, що величина d_{ij} не визначена, якщо маршрут з v_i у v_j не існує).

<u>Теорема 26.10.</u> Нехай граф G має матрицю суміжності Δ та матрицю відстаней D. Тоді, якщо величина d_{ij}, $i \neq j$, визначена, то вона дорівнює найменшому k, для якого елемент (i, j) в Δ^k, тобто $\delta_{ij}^{(k)}$, не дорівнює 0.

Доведення пропонується провести самостійно.

Слідуючи цій теоремі, можна побудувати матрицю відстаней, послідовно підводячи у степінь матрицю суміжності графу. Побудуємо матрицю відстаней для графу з рис. 26.2.

1. Матриця відстаней має нулі на головній діагоналі та спочатку співпадає з матрицею суміжності, тобто вона містить всі маршрути довжиною 1. Інші елементи матриці відстаней поки що не визначені.

2. Матриця Δ^2 вказує на всі маршруті довжиною 2. Невизначеним елементам матриці відстаней $\|d_{ij}\|$ присвоюється значення 2, якщо $\delta_{ij}^{(2)} \neq 0$.

3. Тим елементам $\|d_{ij}\|$, які ще не визначені, присвоюємо значення 3, якщо елементи Δ^3 $\delta_{rj}^{(3)} \neq 0$.

Тепер матриця відстаней повністю визначена.

$$1)\ D(G)=\begin{pmatrix}0&1&\infty&\infty\\1&0&1&\infty\\\infty&\infty&0&1\\1&\infty&\infty&0\end{pmatrix}\qquad 2)\ D(G)=\begin{pmatrix}0&1&2&\infty\\1&0&1&2\\2&\infty&0&1\\1&2&\infty&0\end{pmatrix}\qquad 3)\ D(G)=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&1&2\\2&3&0&1\\1&2&3&0\end{pmatrix}$$

<u>Теорема 26.11.</u> Для того, щоб n-вершиний граф з матрицею суміжності Δ мав хоча б один цикл, необхідно й достатньо, щоб матриця $K = \Delta^2+\ldots+\Delta^k$ мала хоча б один не нульовий діагональний елемент.

Матриця досяжності $R(G) = \|r_{ij}\|$ визначається наступним чином: $r_{ij} = 1$, якщо v_j є досяжною з v_i, і $r_{ij} = 0$ в протилежному випадку. Довільна вершина досяжна сама із себе, тому $r_{ii} = 1$ для всіх i. Матриця досяжності може бути отримана за допомогою матриці суміжності.

<u>Теорема 26.12.</u> Нехай Δ – матриця суміжності і R – матриці досяжності графу G з n вершинами. Тоді

$$R = B(I + \Delta + \Delta^2 + \ldots + \Delta^{n-1}) = B[(I + \Delta)^{n-1}],$$

де B – булеве перетворення (B: $N \to \{0, 1\}$; $B(x) = 0$, якщо $x = 0$, та $B(x) = 1$, якщо $x>0$), а I – одинична матриця.

Доведення. Дійсно, якщо v_j є досяжною з v_i, то існує простий ланцюг з v_i у v_j. Довжина цього маршруту не перебільшує n–1, оскільки у простому ланцюгу вершини не повторюються. Відповідно, елемент матриці $I + \Delta + \Delta^2 + \ldots + \Delta^{n-1}$ буде ненульовим, звідки й слідує теорема. ►

У наступній теоремі показано застосування матриці досяжності як методу визначення зв’язності орграфів.

<u>Теорема 26.13.</u> Нехай орграф G має матрицю досяжності R та матрицю суміжності Δ. Тоді:

1) G сильно зв’язананий тоді й тільки тоді, коли $R = J$, де J – матриця, елементами якої є тільки 1.
2) G однобічно зв’язананий тоді й тільки тоді, коли $B(R + R') = J$, де R' – транспонована матриця R;
3) G слабо зв’язананий тоді й тільки тоді, коли $B[(I + \Delta + \Delta')^{n-1}] = J$, де Δ' – транспонована матриця Δ.