Задание 3

1 Введение

Для задачи

$$\begin{cases} -\omega^2 u = c^2(x) u_{xx} \\ u(0) = 1 \\ i\omega u(1) + c(1) u_x(1) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

полученной из волнового уравнения подстановкой $p(t,x) = \operatorname{Im}\left[e^{i\omega t} u(x)\right]$ в задании 2, граничное условие на правой границе означало выход волн за пределы области без отражений.

Для более сложных задач такой подход уже не работает. Для решения проблемы постановки прозрачных (вернее, поглощающих) условий был разработан PML. PML расшифровывается как perfectly matching layer или идеально согласованный слой. Суть метода в том, что расчетная область увеличивается, и в добавленном участке решается исходное уравнение, исправленное так, чтобы волны, попадающие в него, быстро затухали. При этом граничные условия (которые теперь ставятся на границе PML, а не расчетной области) могут быть произвольными.

Добавим к отрезку $[0,1]$, который мы рассматривали ранее, поглощающий слой на отрезке $[1,2]$. Необходимо понять, как нужно модифицировать уравнение на $[1,2]$, чтобы волны в этой среде затухали.

2 Основы PML

Рассмотрим волновое уравнение

$$p_{tt} = c^2(x)p_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $p(t,x)$ — аналитическая по x в каждый момент времени t функция. Эту функцию можно рассматривать как «срез» решения уравнения

$$P_{tt} = c^2(z)P_{zz}, \quad z \in \mathbb{C}$$

на линии $z = x + 0i$: $p(t,x) = P(t, x+0i)$. Фактически, задавая разные линии в плоскости $\mathbb{C}$, мы будем получать разные срезы одной и той же функции $P(t,z)$. Рассмотрим изображенную на следующем рисунке линию в комплексной плоскости:

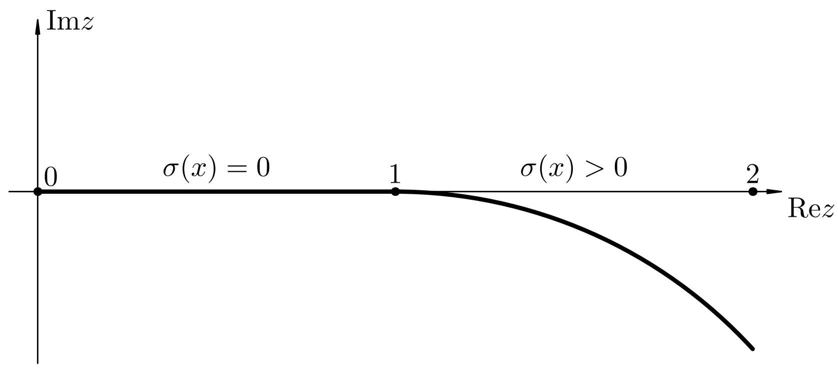

Рис. 1: Вид линии $z(x)$, используемый для одномерного PML

Она параметризована следующим образом:

$$z(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{i}{\omega}\sigma(\xi)\right) d\xi = x - \frac{i}{\omega}\int_0^x \sigma(\xi)d\xi \tag{2}$$

Там, где $\int_0^x \sigma(\xi)d\xi = 0$, линия не отличается от отрезка действительной оси.

На линии $z(x)$ мы можем получить уравнение для $p(t,x) = P(t, z(x))$ из уравнения для $P(t,z)$. Для этого нужно сделать замену переменных

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{dx}{dz}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{dz/dx}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3}$$

Смысл ω в формулах (2) и (3) в том, что конкретная замена координат оказывается разной для разных Фурье-компонент решения. В нашей задаче фиксировано стационарное решение, состоящее всего из одной компоненты $e^{i\omega t}u(x)$, поэтому ω в этой формуле — просто константа.

Производя эту замену в уравнении $P_{tt} = c(z)^2 P_{xx}$, получаем уравнение следующего вида:

$$P_{tt} = c^2(z(x)) \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \tag{4}$$

Чтобы понять, к чему приводит такая замена координат, рассмотрим задачу (4) с постоянными коэффициентами:

$$u_{tt} = c^2 \frac{\omega^2}{(\omega - i\sigma)^2} u_{xx}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $u(t,x) = e^{i\omega t}\hat{u}(x)$:

$$-\omega^2 \hat{u} = c^2 \frac{\omega^2}{(\omega - i\sigma)^2} \hat{u}_{xx}$$

Каждая волна вида $\hat{u} = e^{ikx}$ будет решением этого уравнения при

$$(\omega - i\sigma)^2 = (ck)^2 \qquad \omega = i\sigma \pm ck$$

Общее решение u будет состоять из суперпозиции затухающих волн:

$$\exp\{-\sigma t + ik(x \pm ct)\}$$

Поскольку все составляющие решения затухают, все решение также будет затухать с течением времени.

Примечание: Зависимость преобразования координат от частоты — необходимость. Например, простым преобразованием

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{1 - i\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x}$$

обойтись не получается, так как аналогичные рассуждения приводят нас к следующей связи между ω и k:

$$-\omega^2 \hat{u} = c^2 \frac{-k^2}{1 - i\sigma} \hat{u} \qquad \omega = \pm \frac{ck}{\sqrt{1 - i\sigma}} = \pm ck(\alpha + i\beta)$$

При этом одно из решений

$$\exp\{\mp ck\beta t + ik(x \pm ct\alpha)\}$$

во времени уменьшается, а второе — растет.

3 Постановка задачи

Поскольку нас интересует стационарная компонента $P = e^{i\omega t}u(x)$, рассмотрим следующее уравнение:

$$-\omega^2 u(x) = c^2(z(x))\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{5}$$

Здесь ω — просто числовая константа. Заметим, что в уравнение входит скорость звука, взятая на линии $z = x + \frac{i}{\omega}\int_0^x \sigma(\xi)d\xi$. Значение $c(z)$ получается из функции $c(x)$ её аналитическим продолжением. При этом скорость звука вдоль линии $z(x)$ вполне может стать комплексной, что не желательно. Поэтому в области $x > 1$, где находится PML слой, скорость необходимо положить равной константе $c(x) = c(1), x > 1$. При этом аналитическое продолжение также будет константой $c(1)$. Теперь можно в уравнении (5) заменить $c(z(x))$ на $c(x)$, поскольку они совпадают как в области решения, так и в PML области.[1]

$$-\omega^2 u(x) = c^2(x)\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{6}$$

Применим ту же технику интегрирования с весом $w(x)$, что и раньше, предварительно перенеся множитель перед $\frac{\partial}{\partial x}$ влево:

$$-\omega^2\frac{\omega - i\sigma(x)}{\omega}u(x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

$$-\omega^2\int_0^2 \frac{\omega - i\sigma(x)}{\omega}u(x)w(x)dx - \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}u'(x)w(x)\Big|_0^2 + \\ + \int_0^2 \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)}u'(x)w'(x)dx = 0 \tag{8}$$

Условие $u(0) = 1$ накладывает ограничение на $w(x)$: $w(0) = 0$. В точке $x = 2$ положим $u'(2) = 0$. Поскольку PML поглощает все волны, условие на правой границе не существенно: ослабленные отраженные волны снова будут вынуждены пройти поглощающий слой (как мы видели выше, PML поглощает волны как с $k > 0$, так и с $k < 0$ с одинаковым коэффициентом затухания).

[1] Для корректного продолжения функции $c(x)$ необходимо сгладить её в точке $x = 1$. Так или иначе, все рассуждения этого абзаца требуются для удобной дальнейшей записи уравнений.

Как следует из граничных условий, выражение $u'(x)w(x)$ обращается в ноль в точках $x = 0,\ 2$. В уравнении (8) остается только

$$-\omega^2 \int_0^2 \frac{\omega - i\sigma(x)}{\omega c^2(x)} u(x)w(x)dx + \int_0^2 \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)} u'(x)w'(x)dx = 0$$

Подставляя разложение $u(x)$ и $w(x)$:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} u_k \psi_k(x) \qquad w(x) = \psi_j(x), j = 1, 2, \ldots, N,$$

получаем систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N} (-\omega^2 M_{jk} + K_{jk}) u_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Здесь введены обозначения:

$$M_{jk} = \int_0^2 \frac{\omega - i\sigma(x)}{\omega c^2(x)} \psi_j(x)\psi_k(x)dx \qquad K_{jk} = \int_0^2 \frac{\omega}{\omega - i\sigma(x)} \psi_j'(x)\psi_k'(x)dx$$

4 Задание

Получить формулы для коэффициентов линейной системы (9). Запрограммировать её решение методом редукции (см. задание 2) при следующих параметрах:

$$N = 400, \quad h = \frac{2}{N}, \quad \omega = 5$$

$$c(x) = \begin{cases} 0.1 + 3.6(x - 0.5)^2, & x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \mu(x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

В качестве решения представить выражения для коэффициентов СЛАУ и графики $u(x)$ при нескольких (не менее трех) значениях $\mu \in 10 \div 1000$. Убедиться, что решения существенно отличаются только в PML области.