Задание 6

1 Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача о распространении звуковых волн (акустическое приближение). Расчётная область Ω представляет собой прямоугольник в координатах (x, y). Границу расчётной области $\partial\Omega$ можно представить как объединение четырёх отрезков, именуемых в дальнейшем $\mathrm{Up}, \mathrm{Down}, \mathrm{Left}, \mathrm{Right}$.

Задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(x,y)(u_{xx} + u_{yy}) \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{Up} = v(t,x) \\ (u_t + c(x,y)u_x)\big|_{Right} = 0 \\ (u_t - c(x,y)u_x)\big|_{Left} = 0 \\ (u_t - c(x,y)u_y)\big|_{Down} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

где $u(t, x, y)$ — искомая функция (давление или смещение) в момент времени t в точке (x, y), $c(x, y)$ — скорость звука в точке (x, y), $v(t, x)$ — известная функция.

2 Построение метода

Разобьем область Ω на равные прямоугольники со сторонами $h_x = \frac{1}{N}, h_y = \frac{1}{M}$. Совокупность полученных ячеек образует расчётную сетку.

$$V = \{V_{ij}, i = 0..N-1, i = 0..M-1\}$$

Естественным образом обозначим координаты вершин прямоугольников: $x_i = ih_x, i = 0..N$; $y_j = jh_y, i = 0..M$.

Дискретизируем уравнение, используя разностные формулы для производных второго порядка (шаблон “крест”):

$$\begin{gathered}\frac{u^{\uparrow}_{i,j} - 2u_{i,j} + u^{\downarrow}_{i,j}}{\tau^2} = \\ \left[c^2(x,y)\right]_{i,j} \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_x^2} \right),\end{gathered} \tag{2}$$

где $u^{\uparrow}$ и $u^{\downarrow}$ — значения сеточной функции со следующего и предыдущего временного слоя, соответственно.

В качестве начальных данных для (2) можно задать $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1 = 0$, что соответствует начальным данным для исходной задачи.

Значения $u_{i,M}$ вычисляются в соответствии с начальными данными:

$$u_{i,M}(t) = v(t, x_i), \tag{3}$$

а условия на левой, нижней и правой границах позволяют вычислить граничные значения U:

$$\begin{gathered}\frac{u^{\uparrow}_{i,0} - u_{i,0}}{\tau} - [c(x,y)]_{i,0} \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_y} = 0, \quad i = 0, N \\ \frac{u^{\uparrow}_{0,j} - u_{0,j}}{\tau} - [c(x,y)]_{0,j} \frac{u_{1,j} - u_{1,j}}{h_x} = 0, \quad j = 1, M-1 \\ \frac{u^{\uparrow}_{N,j} - u_{N,j}}{\tau} + [c(x,y)]_{N,j} \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{h_x} = 0, \quad j = 1, M-1\end{gathered} \tag{4}$$

3 Задание

Требуется реализовать метод (2) с граничными условиями (3) и (4). Считать, что $h_x = 0.01$, $h_y = 0.005$, $N = 100$, $M = 400$ (размер области 1×2). При этом:

$$c(x,y) = \begin{cases} 0.8,\ 1.0 < y \leqslant 1.2 \\ 1.0,\ 0.5 < y \leqslant 0.8,\ 0.2 < x \leqslant 0.5 \\ 0.5,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$v(t,x) = \begin{cases} \sin(5t)\exp(-30(x-0.5)^2),\ 5t < 2\pi \\ 0.0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

Шаг по времени считать постоянным и вычислить из условия Куранта $\tau = \dfrac{h}{2\max c(x,y)}$. Требуется решить задачу до момента времени $T = 5$.

Требования к реализации: Все вычисления должны проводиться на GPU. Должна быть использована разделяемая память для оптимизации обращений в глобальную память.