Задание 1

1 Постановка задачи

Рассматривается одномерная задача о распространении звуковых волн (акустическое приближение) от гармонического источника на поверхности по неоднородной среде:

$$\begin{cases} p_{tt} = c^2(x) p_{xx} \\ p\big|_{t=0} = 0 \\ p_t\big|_{t=0} = 0 \\ p\big|_{x=0} = \sin \omega t \\ p_t + c(1) p_x\big|_{x=1} = 0 \end{cases},$$

где $p(t, x)$ — давление в момент времени t в точке x, ω — циклическая частота, с которой воздействуют на поверхность, $c(x)$ — скорость звука в точке x.

2 Построение метода

Введем на отрезке $[0, 1]$ сетку с шагом $h = \frac{1}{N}$:

$$x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}$$

Приблизим $p(t, x)$ кусочно-линейной на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ функцией:

$$p(t, x) = \sum_{i=0}^{N} p_i(t) \psi_i(x)$$

В качестве базисных функций $\psi_i(x)$ возьмем функции, изображенные на рисунке 1.

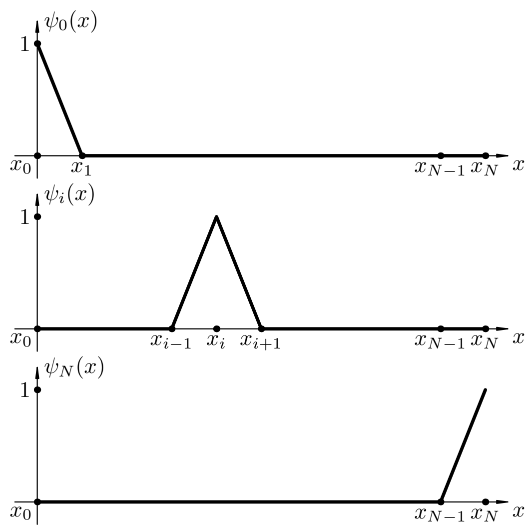

Рис. 1: Базисные функции $\psi_i(t, x)$

Для таких функций $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$, и, как следствие, коэффициенты $p_i(t)$ имеют смысл значений функции $p(t, x)$ в точках $x = x_i$.

Заметим, что $p_0(t)$ является известной, так как $p_0(t) = p(t, 0) = \sin \omega t$, поэтому неизвестными являются только $p_1(t), \ldots, p_N(t)$.

Чтобы найти приближенное решение задачи, заменим строгое условие

$$\frac{1}{c^2(x)} p_{tt} - p_{xx} = 0$$

на более мягкое

$$\mathcal{G}(p, w) \equiv \int_0^1 \left[\frac{1}{c^2(x)} p_{tt} - p_{xx} \right] w(x) dx = 0$$

для всех $w(x)$ из некоторого набора.

Заметим, что $w(x)$ входит в функционал $\mathcal{G}(p, w)$ линейно, то есть если $\mathcal{G}(p, w_1) = 0$ и $\mathcal{G}(p, w_2) = 0$, то и $\mathcal{G}(p, \alpha w_1 + \beta w_2) = 0$. Следовательно, достаточно потребовать, чтобы функционал $\mathcal{G}(p, w)$ обращался в 0 не для всех $w(x)$ из некоторого семейства функций, а только для функций $w(x)$ из базиса в этом семействе.

Значение p в точке $x = 0$ зафиксировано. В этом смысле граничные условия называются жесткими. Напротив, граничное условие в точке $x = 1$ называется естественным. Это условие должно быть учтено в функционале $\mathcal{G}(p, w)$.

Для метода Галёркина семейство функций $w(x)$ выбирается из того же класса, что и класс функций-решений, то есть кусочно-линейных непрерывных для данного случая. Жесткое граничное условие налагает на функцию $w(x)$ дополнительное условие $w(0) = 0$. В некотором смысле, вместо требования выполнения уравнения в точке $x = 0$ мы требуем выполнение жесткого условия $p(t, 0) = p_0(t)$. Итого, все функции $w(x)$ представимы в виде $w(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j \psi_j(x)$ (коэффициент при $\psi_0(x)$ равен 0). Поскольку $\{\psi_j\}_{j=1}^{n}$ — базис в пространстве функций $w(x)$, достаточно потребовать $\mathcal{G}(p, \psi_j) = 0$ для $j = 1, \ldots, N$.

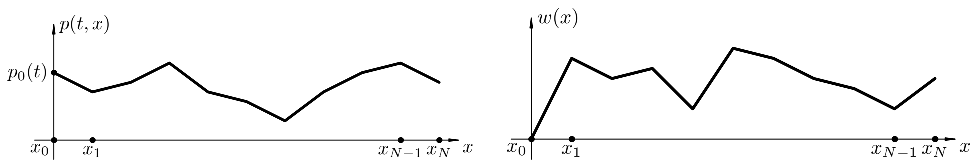

Рис. 2: Кусочно-линейные функции $p(t, x)$ и $w(x)$

Преобразуем выражение для $\mathcal{G}(p, w) = 0$:

$$0 = \mathcal{G}(p, w) = \int_0^1 \left[\frac{1}{c^2(x)} p_{tt} - p_{xx} \right] w(x) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{p_{tt}(t, x) w(x)}{c^2(x)} dx - p_x(t, x) w(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 p_x(t, x) w'(x) dx$$

Учтем граничные условия $w(0) = 0$ и $p_x(t, 1) = -\dfrac{1}{c(1)} p_t(t, 1)$:

$$0 = \mathcal{G}(p, w) = \int_0^1 \frac{p_{tt}(t, x) w(x)}{c^2(x)} dx + \frac{p_t(t, 1) w(1)}{c(1)} + \int_0^1 p_x(t, x) w'(x) dx$$

Подставляя разложение для $p(t, x)$ и $\psi_j(x)$ вместо $w(x)$, получаем систему дифференциальных уравнений для $p_i(t)$:

$$0 = \sum_{i=0}^{N} \ddot{p}_i(t) \int_0^1 \frac{\psi_i(x) \psi_j(x)}{c^2(x)} dx + \sum_{i=0}^{N} \dot{p}_i(t) \frac{\psi_i(1) \psi_j(1)}{c(1)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} p_i(t) \int_0^1 \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx, \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (1)$$

Для краткости введем несколько обозначений:

- Матрица масс $M_{ij} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\psi_i(x)\psi_j(x)}{c^2(x)} dx$

- Матрица демпфирования $D_{ij} = \dfrac{\psi_i(1)\psi_j(1)}{c(1)}$

- Матрица жесткости $K_{ij} = \displaystyle\int_0^1 \psi_i'(x)\psi_j'(x) dx$

- $\gamma(x) = \frac{1}{c^2(x)}$

Отметим, что все матрицы оказались симметричными.

Для простоты вычисления матрицы M ограничимся случаем кусочно-постоянной функции $c(x)$. Пусть значение $c(x)$ на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ равно $c_{i+1/2}$ (см. рис. 3).

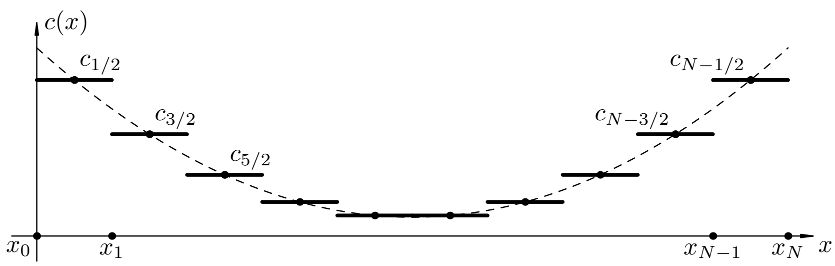

Рис. 3: Кусочно-постоянная функция $c(x)$

Элементы матриц M_{ij}, D_{ij} и K_{ij} равны нулю при $|i-j| > 1$, поскольку подынтегральные выражения обращаются в нуль тождественно (носители функций $\psi_i(x)$ и $\psi_j(x)$ не пересекаются). Для остальных элементов верны следующие выражения:

$$M_{00} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_0^2(x)dx = \gamma_{1/2}\int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx = h\gamma_{1/2}\int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi = \frac{\gamma_{1/2}h}{3}$$

$$M_{NN} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_N^2(x)dx = \gamma_{N-1/2}\int_{1-h}^1 \left(\frac{x+h-1}{h}\right)^2 dx = h\gamma_{N-1/2}\int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{\gamma_{N-1/2}h}{3}$$

$$M_{ii} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_i^2(x)dx = \gamma_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \gamma_{i+1/2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{(\gamma_{i-1/2}+\gamma_{i+1/2})h}{3}, \quad i = 1,\dots,N-1$$

$$M_{i,i+1} = M_{i+1,i} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx = \gamma_{i+1/2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx =$$
$$= \gamma_{i+1/2}h\int_0^1 \xi(1-\xi)d\xi = \frac{\gamma_{i+1/2}h}{6}, \quad i = 0,\dots,N-1$$

$$M = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 2\gamma_{1/2} & \gamma_{1/2} & & & & & \\ \gamma_{1/2} & 2\gamma_{1/2}+2\gamma_{3/2} & \gamma_{3/2} & & & & \\ & \gamma_{3/2} & 2\gamma_{3/2}+2\gamma_{5/2} & \gamma_{5/2} & & & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & & \gamma_{N-3/2} & 2\gamma_{N-3/2}+2\gamma_{N-1/2} & \gamma_{N-1/2} \\ & & & & \gamma_{N-1/2} & 2\gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

Матрица демпфирования D содержит только один ненулевой элемент:

$$D_{NN} = \frac{1}{c(1)}$$

Ненулевые элементы матрицы K равны:

$$K_{00} = \int_0^1 \left[\psi_0'(x)\right]^2 dx = \int_0^h \frac{1}{h^2}dx = \frac{1}{h}$$

$$K_{NN} = \int_0^1 \left[\psi_N'(x)\right]^2 dx = \frac{1}{h}$$

$$K_{ii} = \int_0^1 \left[\psi_i'(x)\right]^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2}dx = \frac{2}{h}, \quad i = 1,\dots,N-1$$

$$K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = \int_0^1 \psi_i'(x)\psi_{i+1}'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h^2}dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 0,\dots,N-1$$

$$K = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В данных обозначениях система уравнений (1) записывается как:

$$\sum_{i=0}^{N} \ddot{p}_i(t) M_{ij} + \sum_{i=0}^{N} \dot{p}_i(t) D_{ij} + \sum_{i=0}^{N} p_i(t) K_{ij} = 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

В этой системе только функции $p_i(t)$ при $i > 0$ являются неизвестными, в то время как $p_0(t)$ известна и ее следует исключить из системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} \ddot{p}_i(t) M_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i(t) D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} p_i(t) K_{ij} = f_j(t), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

где

$$f_i(t) = -M_{0,i}\ddot{p}_0(t) - D_{0,i}\dot{p}_0(t) - K_{0,i}p_0(t)$$

В таком виде систему можно записать в матричных обозначениях (используется тот факт, что все матрицы диагональны):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{2}$$

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 2\gamma_{1/2} + 2\gamma_{3/2} & \gamma_{3/2} & & & \\ \gamma_{3/2} & 2\gamma_{3/2} + 2\gamma_{5/2} & \gamma_{5/2} & & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & & \gamma_{N-3/2} & 2\gamma_{N-3/2} + 2\gamma_{N-1/2} & \gamma_{N-1/2} \\ & & & \gamma_{N-1/2} & 2\gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \frac{1}{c(1)} \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{M}, \mathbf{D}$ и $\mathbf{K}$ — подматрицы матриц M, D и K, но без нулевой строки и нулевого столбца, а $\mathbf{p}(t)$ — вектор-столбец из функций $p_1(t), \ldots, p_N(t)$. Вектор $\mathbf{f}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} -M_{0,1}\omega^2 \sin\omega t + \dfrac{1}{h}\sin\omega t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

Система (2) не разрешена относительно старшей производной $\ddot{\mathbf{p}}(t)$, а вычислять обратную матрицу $\mathbf{M}^{-1}$ или решать линейную систему на каждом временном шаге иногда оказывается слишком трудоемко на практике. Вместо этого пытаются модифицировать метод так, чтобы матрица $\mathbf{M}$ получилась диагональной.

Простейший способ получить такой метод — изменить процедуру вычисления элементов матриц M и K, заменив точное интегрирование на интегрирование методом трапеций (матрица K при этом не меняется):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$\widetilde{M}_{00} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_0^2(x)dx = h\gamma_{1/2}\int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi \approx \frac{\gamma_{1/2}h}{2}$$

$$\widetilde{M}_{NN} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_N^2(x)dx = h\gamma_{N-1/2}\int_0^1 \xi^2 d\xi \approx \frac{\gamma_{N-1/2}h}{2}$$

$$\widetilde{M}_{ii} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_i^2(x)dx \approx \frac{(\gamma_{i-1/2} + \gamma_{i+1/2})h}{2}, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

$$\widetilde{M}_{i,i+1} = \widetilde{M}_{i+1,i} = \int_0^1 \gamma(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx = \gamma_{i+1/2}h\int_0^1 \xi(1-\xi)d\xi \approx 0, \quad i = 0, \ldots, N-1$$

$$\widetilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h}\sin\omega t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\widetilde{M} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} \gamma_{1/2} & & & & & \\ & \gamma_{1/2}+\gamma_{3/2} & & & & \\ & & \gamma_{3/2}+\gamma_{5/2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \gamma_{N-3/2}+\gamma_{N-1/2} & \\ & & & & & \gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} \gamma_{1/2}+\gamma_{3/2} & & & & \\ & \gamma_{3/2}+\gamma_{5/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma_{N-3/2}+\gamma_{N-1/2} & \\ & & & & \gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

Ту же матрицу можно получить, просуммировав в каждой строке M элементы и поместив сумму на диагональ. Система обыкновенных дифференциальных уравнений теперь тривиально разрешается относительно старшей производной, поскольку матрица $\widetilde{\mathbf{M}}$ диагональна.

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{p}(t) = \widetilde{\mathbf{f}}(t) \tag{3}$$

Дискретизируем временные производные стандартным образом:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\frac{\mathbf{p}^{n+1} - 2\mathbf{p}^n + \mathbf{p}^{n-1}}{\tau^2} + \mathbf{D}\frac{\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^{n-1}}{2\tau} + \mathbf{K}\mathbf{p}^n = \widetilde{\mathbf{f}}^n \tag{4}$$

Здесь верхний индекс означает номер шага по времени. Перепишем разностную задачу в разрешенном относительно $\mathbf{p}^{n+1}$ виде:

$$\left(\widetilde{\mathbf{M}} + \frac{\tau}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{p}^{n+1} + \left(\widetilde{\mathbf{M}} - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{p}^{n-1} + \left(\tau^2\mathbf{K} - 2\widetilde{\mathbf{M}}\right)\mathbf{p}^n = \tau^2\widetilde{\mathbf{f}}^n \tag{5}$$

В качестве начальных данных для (5) можно задать $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^1 = 0$, что соответствует начальным данным для исходной задачи.

3 Задание

Требуется запрограммировать метод (5) с параметрами $\omega = 5$, числом интервалов $N = 200$, шагом по времени $\tau = \frac{h}{2}$, и решить задачу до момента времени $t_{\max} = 10$.

Скорость звука зависит от координаты по следующему закону:

$$c_{i+1/2} = c\left((i + 1/2)h\right), \qquad c(x) = 0.1 + 3.6(x - 0.5)^2$$

В качестве решения требуется прислать график $p(t, x)$ в момент времени $t = t_{\max}$ и исходный код программы.