Задание 6
Черновик

1 Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача о распространении звуковых волн (акустическое приближение). Расчётная область Ω представляет собой единичный квадрат в координатах (x, y) (см. рис. 1). Границу расчётной области $\partial\Omega$ можно представить как объединение четырёх отрезков, именуемых в дальнейшем $\mathrm{Up}, \mathrm{Down}, \mathrm{Left}, \mathrm{Right}$.

Задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(x,y)(u_{xx} + u_{yy}) \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{Up} = v(t,x) \\ (u_t + c(x,y)u_x)\big|_{Right} = 0 \\ (u_t - c(x,y)u_x)\big|_{Left} = 0 \\ (u_t - c(x,y)u_y)\big|_{Down} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

где $u(t, x, y)$ — искомая функция (давление или смещение) в момент времени t в точке (x, y), $c(x, y)$ — скорость звука в точке (x, y), $v(t, x)$ — известная функция.

2 Построение метода

Разобьем область Ω на равные прямоугольники со сторонами $h_x = \frac{1}{N}, h_y = \frac{1}{M}$, при этом каждый из полученных прямоугольников разобьём

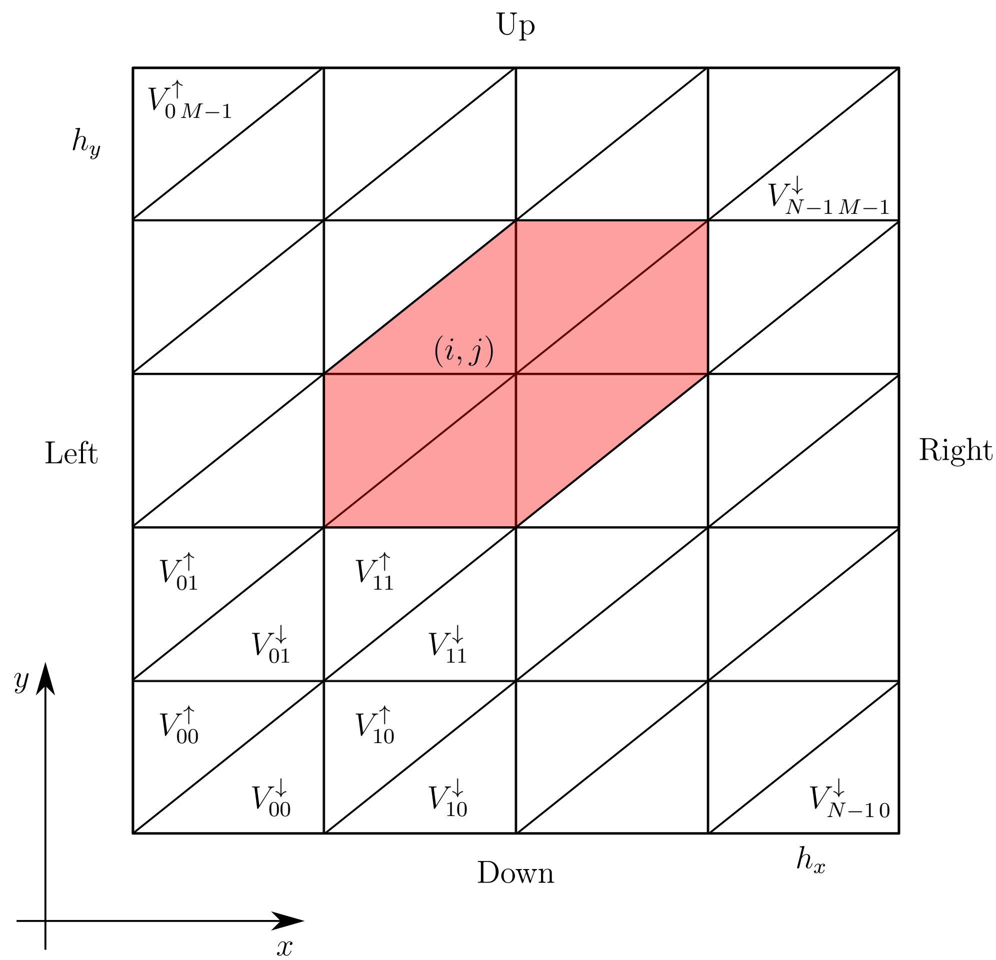

Рис. 1: Расчётная область с сеткой.
Красным выделен носитель базисной функции $\psi_{i,j}(x,y)$

диагональю “слева снизу — направо вверх” на два треугольника. Обозначения треугольников введены на рисунке 1. Совокупность полученных ячеек образует расчётную сетку:

$$V = \left\{ V_{ij}^{\mathrm{dir}}, \mathrm{dir} \in \{\uparrow, \downarrow\}, i = 0..N-1, i = 0..M-1 \right\}$$

Естественным образом обозначим координаты вершин прямоугольников: $x_i = ih_x, i = 0..N$; $y_j = jh_y, i = 0..M$. Используя данные обозначения, введём базисные функции $\psi_{i,j}$:

$$\psi_{i,j}(x,y):\ \psi_{i,j}(x,y)\big|_{V_{ij}^{\mathrm{dir}}} \in \mathcal{P}^{1,1}(x,y),\ \psi_{i,j}(x_k,y_l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l},$$

т.е. базисные функции $\psi_{i,j}(x,y)$ являются линейными по обеим координатам функциями на каждом из треугольников разбиения V. В силу такого определения можно каждой функции $\psi_{i,j}(x,y)$ поставить в соответствие одну из точек области — (x_i, y_j), и наоборот.

Легко видеть, что график $\psi_{i,j}(x,y)$, соответствующей *внутренней точке области*, в окрестности этой точки, является шестиугольной пирамидой (см. рисунок 2). Для точек на границе области могут получаться два типа четырёхугольной пирамиды и тетраэдр.

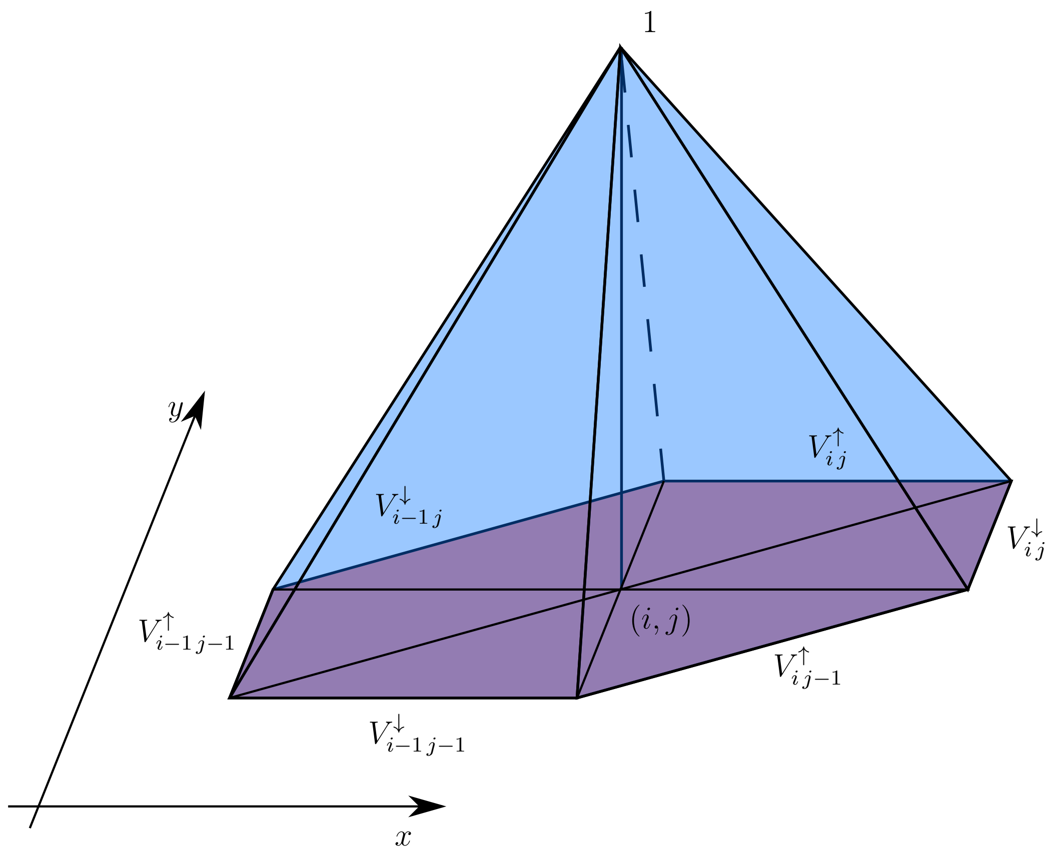

Рис. 2: Базисная функция $\psi_{i,j}(x,y)$

Будем искать решение $u(t,x,y)$ в качестве линейной комбинации базисных функций в каждый момент времени:

$$u(t,x,y)=\sum_{i,j=0}^{N,M}u_{i,j}(t)\psi_{i,j}(x,y)$$

В силу выбора функций $\psi_{i.j}(x,y)$ коэффициенты $u_{i,j}(t)$ имеют смысл значений функции $u(t,x,y)$ в точках (x_i,y_j).

Заметим, что $u_{i,M}(t), i=0..N$ являются известными, поскольку из постановки задачи $u(t,x,y)\big|_{Up}=v(t,x)$. Таким образом, неизвестными являются только $u_{i,j}(t), i=0..N, j=0..M-1$ (всего $N\times(M-1)$ неизвестных).

В соответствии с методом Галёркина, перейдём к слабой постановке задачи, используя пробные функции из того же множества, что и базисные (за исключением функций, соответствующих верхней границе, в силу жесткого граничного условия):

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{c^2(x,y)}u_{tt}-\operatorname{div}\mathbf{F}\right]\psi_{k,l}(x,y)dxdy=0,\quad k=0..N;\ l=0..M-1,\quad(2)$$

где $\mathbf{F}=\nabla u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^T$ — градиент функции $u(t,x,y)$.

Заметим, что:

$$\psi\cdot\operatorname{div}\mathbf{F}=\operatorname{div}(\mathbf{F}\cdot\psi)-(\mathbf{F}\cdot\nabla\psi)\qquad(3)$$

Преобразуем выражение (2) с учётом (3):

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{c^2}u_{tt}\psi_{i,j}-\operatorname{div}\left(\mathbf{F}\cdot\psi_{i,j}\right)+\left(\mathbf{F}\cdot\nabla\psi_{i,j}\right)\right]dxdy=0$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса для учёта граничных условий, используемых в (1):

$$0=\int_\Omega\left[\frac{1}{c^2}u_{tt}\psi_{i,j}+\left(\mathbf{F}\cdot\nabla\psi_{i,j}\right)\right]dxdy-\int_{\partial\Omega}\left(\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\right)\psi_{i,j}\right)dl,\qquad(4)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленный во внешность области Ω, а второй интеграл является поверхностным и берётся по границе Ω. Заметим, что этот интеграл можно представить как сумму четырёх интегралов по сторонам квадрата. При этом:

- $\displaystyle\int_{Up} \left((\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, \psi_{i,j} \right) dl = 0$, поскольку $\psi_{i,j}\big|_{Up} \equiv 0, j < M$

- $\displaystyle\int_{Down} \left((\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, \psi_{i,j} \right) dl = \int_{Down} (-u_y \psi_{i,j})\, dl = \int_{Down} \left(-\frac{u_t}{c} \psi_{i,j} \right) dl$

- $\displaystyle\int_{Left} \left((\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, \psi_{i,j} \right) dl = \int_{Left} (-u_x \psi_{i,j})\, dl = \int_{Left} \left(-\frac{u_t}{c} \psi_{i,j} \right) dl$

- $\displaystyle\int_{Right} \left((\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, \psi_{i,j} \right) dl = \int_{Right} (+u_x \psi_{i,j})\, dl = \int_{Right} \left(-\frac{u_t}{c} \psi_{i,j} \right) dl$

Таким образом, введя единую нумерацию для индексов $\{i, j\} \to q$; $\{k, l\} \to p$ имеем:

$$-\int_{\partial\Omega} \left((\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, \psi_{i,j} \right) dl = \sum_q D_{p,q} u'_q(t), \tag{5}$$

где $D_{p,q} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\psi_p(x,y)\psi_q(x,y)}{c(x,y)} \right] dl$ — матрица демпфирования.

Обратим внимание, что в уравнении (5) суммирование происходит по всем степеням свободы в задаче: $i = 0..N$, $j = 0..M$.

Подставляя выражение (5) в (4), получаем:

$$\sum_q \left(M_{p,q} u''_q(t) + D_{p,q} u'_q(t) + K_{p,q} u_q(t) \right) = 0, \tag{6}$$

где:

- $M_{p,q} = \displaystyle\int_{\Omega} \left[\frac{\psi_p(x,y)\psi_p(x,y)}{c^2(x,y)} \right] dxdy$ – матрица масс

- $K_{p,q} = \displaystyle\int_{\Omega} \left(\nabla\psi_p(x,y) \cdot \nabla\psi_p(x,y) \right) dxdy$ – матрица жесткости

Будем использовать обозначение $\gamma(x,y) = c^{-2}(x,y)$. Как и раньше, отметим, что все матрицы $M_{p,q}$, $D_{p,q}$ и $K_{p,q}$ оказались симметричными. Для простоты вычисления матриц M и D ограничимся случаем кусочно-постоянной функции $c(x,y)$. Пусть значение $c(x,y)$ в треугольниках $V_{ij}^{\uparrow}$ и $V_{ij}^{\downarrow}$ равно $c(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \equiv c_{i+1/2,j+1/2}$.

Основным элементом интегралов, возникающих в задаче, являются интегралы от произведения базисных функций и их производных по треугольникам разбиения и границе. Для нахождения всех коэффициентов матриц, выпишем вначале все функции.

Итак, по определению $\psi_{i,j}$ является линейной функцией на каждом из треугольников, т.е. представима в виде: $a + bx + cy$. Рассмотрим треугольник $V^{\downarrow}_{i,j}$. Считая точку (x_i, y_i) началом координат, в нём:

- $\psi_{i,j}(x,y)\big|_{V^{\downarrow}_{i,j}} = 1 - \dfrac{x}{h_x} \stackrel{def}{=} f_1(x,y)$
- $\psi_{i+1,j}(x,y)\big|_{V^{\downarrow}_{i,j}} = \dfrac{x}{h_x} - \dfrac{y}{h_y} \stackrel{def}{=} f_2(x,y)$
- $\psi_{i+1,j+1}(x,y)\big|_{V^{\downarrow}_{i,j}} = \dfrac{y}{h_y} \stackrel{def}{=} f_3(x,y)$

В качестве минимальной проверки заметим, что выполняется $f_1+f_2+f_3 \equiv 1$, как и должно быть (разберитесь, почему).

Для упрощения выкладок здесь и далее будем считать, что $h_x = h_y = h$. Посчитаем всевозможные интегралы от произведений этих функций и их производных по этому треугольнику:

- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} f_i^2(x,y)dxdy = \frac{1}{12}h^2$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} f_i(x,y)f_j(x,y)dxdy = \frac{1}{24}h^2,\ i \neq j$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_1(x,y))^2 dxdy = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_2(x,y))^2 dxdy = 1$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_3(x,y))^2 dxdy = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_1(x,y) \cdot \nabla f_2(x,y))dxdy = -\frac{1}{2}$

- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_2(x,y) \cdot \nabla f_3(x,y))dxdy = -\frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{V^{\downarrow}_{i,j}} (\nabla f_3(x,y) \cdot \nabla f_1(x,y))dxdy = 0$

Интегралы по треугольнику $V^{\uparrow}_{i,j}$ вычисляются аналогичным образом (достаточно сделать замену координат $x \to -x$, $y \to -y$).

Таким образом, имеем следующую структуру матрицы $M_{p,q}$:

- $M_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = M_{(i_2,j_2),(i_1,j_1)}$
- $M_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = 0$, при $|i_1 - i_2| > 1$ или $|j_1 - j_2| > 1$
- $M_{(i,j),(i+1,j-1)} = 0$, так как носители соответствующих базисных функций не пересекаются

  В следующих соотношениях слагаемые равны нулю, если они не имеют смысла:

- $M_{(i,j),(i,j+1)} = \dfrac{1}{24}h^2(\gamma_{i-1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j+1/2})$
- $M_{(i,j),(i+1,j+1)} = \dfrac{1}{12}h^2(\gamma_{i+1/2,j+1/2})$
- $M_{(i,j),(i+1,j)} = \dfrac{1}{24}h^2(\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2})$
- $M_{(i,j),(i,j)} = \dfrac{1}{12}h^2(2\gamma_{i+1/2,j+1/2} + \gamma_{i+1/2,j-1/2} + 2\gamma_{i-1/2,j-1/2} + \gamma_{i-1/2,j+1/2})$

Матрица $K_{p,q}$ имеет вид:

- $K_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = K_{(i_2,j_2),(i_1,j_1)}$
- $K_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = 0$, при $|i_1 - i_2| > 1$ или $|j_1 - j_2| > 1$
- $K_{(i,j),(i+1,j-1)} = 0$, так как носители соответствующих базисных функций не пересекаются

  Для (x_i, y_j) внутри области:

- $K_{(i,j),(i,j+1)} = -1$
- $K_{(i,j),(i+1,j+1)} = 0$
- $K_{(i,j),(i+1,j)} = -1$
- $K_{(i,j),(i,j)} = 4$

  Следующие соотношения верны, если они имеют смысл:

- $K_{(i,j),(i\pm 1,j)} = -\dfrac{1}{2}$, при $(x_i, y_j) \in \{Up,\, Down\}$
- $K_{(i,j),(i,j)} = 2$, при $(x_i, y_j) \in \{Up,\, Down\}$
- $K_{(i,j),(i,j\pm 1)} = -\dfrac{1}{2}$, при $(x_i, y_j) \in \{Left,\, Right\}$
- $K_{(i,j),(i,j)} = 2$, при $(x_i, y_j) \in \{Left,\, Right\}$
- $K_{(0,0),(0,0)} = K_{(N,M),(N,M)} = K_{(0,M),(0,M)} = K_{(N,0),(N,0)} = 1$

Основным проверочным соотношением является условие $\sum\limits_q K_{q,p} = \sum\limits_p K_{q,p} = 0$ (разберитесь, почему).

Матрица $D_{p,q}$ имеет вид:

- $D_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} \neq 0$, только при $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \partial\Omega$

  Следующие соотношения выполняются только для точек на границе и если они имеют смысл ($\pm$ в формулах выбирается в зависимости от того, какой границе принадлежит (i, j)):

- $D_{(i,j),(i+1,j)} = \dfrac{h}{6c_{i+1/2,j\pm 1/2}}$
- $D_{(i,j),(i-1,j)} = \dfrac{h}{6c_{i-1/2,j\pm 1/2}}$
- $D_{(i,j),(i,j+1)} = \dfrac{h}{6c_{i\pm 1/2,j+1/2}}$

- $D_{(i,j),(i,j-1)} = \dfrac{h}{6c_{i\pm 1/2, j-1/2}}$
- $D_{(i,j),(i,j)} = \dfrac{h}{3c_{i_1,j_1}} + \dfrac{h}{3c_{i_2,j_2}}$, где (i_1, j_1) и (i_2, j_2) — центральные точки двух граничных ячеек, которым принадлежит точка (i, j). Для угловых точек $(i_1, j_1) \equiv (i_2, j_2)$

Обратим внимание, что в соотношении (6) индекс p пробегает значения, соответствующие всем точкам в области за исключением точек из Up. Это означает, что при $p \in Up$ величина $D_{p,p}$, например, не должна использоваться вообще.

Систему (6) можно переписать в виде:

$$\mathbf{M}_{p,q}\mathbf{u}''_q(t) + \mathbf{D}_{p,q}\mathbf{u}'_q(t) + \mathbf{K}_{p,q}\mathbf{u}_q(t) = \mathbf{f}_p(t), \tag{7}$$

где

- $\mathbf{f}_p(t) = -\sum_{q\in Up} \left(M_{p,q}u''_q(t) + D_{p,q}u'_q(t) + K_{p,q}u_q(t)\right)$
- Размеры матриц $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ в (7) равны $N(M-1) \times N(M-1)$

Дискретизируем временные производные стандартным образом:

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} + \mathbf{D}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}}{2\tau} + \mathbf{K}\mathbf{u}^n = \widetilde{\mathbf{f}}^n \tag{8}$$

Здесь верхний индекс означает номер шага по времени. Перепишем разностную задачу (8) в разрешенном относительно $\mathbf{u}^{n+1}$ виде:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\tau}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{u}^{n+1} + \left(\mathbf{M} - \frac{\tau}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{u}^{n-1} + \left(\tau^2\mathbf{K} - 2\widetilde{\mathbf{M}}\right)\mathbf{u}^n = \tau^2\widetilde{\mathbf{f}}^n \tag{9}$$

В качестве начальных данных для (9) можно задать $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1 = 0$, что соответствует начальным данным для исходной задачи.

3 Задание

Требуется реализовать метод (9) с решением СЛАУ на GPU с заданными функциями $v(t, x)$, $c(x, y)$, размерами области, пространственным размером сетки h, шагом по времени $\tau = \dfrac{h}{2\max c(x, y)}$ и решить задачу до момента времени $t_{\max}$.