Задание 2

1 Постановка задачи

Решение задачи

$$\begin{cases} p_{tt} = c^2(x) p_{xx} \\ p\big|_{t=0} = 0 \\ p_t\big|_{t=0} = 0 \\ p\big|_{x=0} = \sin \omega t \\ \left[p_t + c(1) p_x\right]\big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

довольно быстро становится периодическим во времени:

$$p = \operatorname{Im}\left[e^{i\omega t} u(x)\right] = \operatorname{Re} u(x) \sin \omega t + \operatorname{Im} u(x) \cos \omega t, \tag{1}$$

где $u(x)$ — комплексная амплитуда колебаний в точке x.

Подстановкой (1) в исходное уравнение получаем:

$$\begin{cases} -\omega^2 u = c^2(x) u_{xx} \\ u(0) = 1 \\ i\omega u(1) + c(1) u_x(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

При этом начальные условия были отброшены, поскольку мы ищем стационарное решение на $t \to \infty$. Если бы в (1) вместо Im использовалось Re, то это повлияло бы на граничное условие для $u(0)$. Требуется решить задачу (2) и найти комплексную амплитуду $u(x)$.

2 Построение метода

Запишем задачу (2) в слабой постановке, интегрируя с функцией $w(x)$:

$$0 = \int_0^1 \left[-u_{xx}(x) - \frac{\omega^2}{c^2(x)} u(x) \right] w(x) dx =$$
$$= -u_x w \Big|_0^1 + \int_0^1 u_x(x) w_x(x) dx - \omega^2 \int_0^1 \frac{u(x) w(x)}{c^2(x)} dx \quad (3)$$

Далее, следуя уже известной процедуре, разложим $u(x)$ по базису $\psi_i(x)$:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} u_k \psi_k(x)$$

Граничное условие в точке $x = 0$ позволяет сразу же определить $u_0 = 1$. Это жесткое граничное условие, и, следовательно, для проверочной функции $w(x)$ нужно поставить граничное условие $w(0) = 0$. Разложение $w(x)$ имеет вид:

$$w(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j \psi_j(x)$$

Из-за линейности в качестве $w(x)$ достаточно взять все $\psi_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$. Подставляя $w(0) = 0, u_x(1) = -\dfrac{i\omega}{c(1)} u(1)$, получаем:

$$0 = -u_x w \Big|_0^1 + \int_0^1 u_x(x) w_x(x) dx - \omega^2 \int_0^1 \frac{u(x) w(x)}{c^2(x)} dx =$$
$$= i\omega \frac{u(1) w(1)}{c(1)} + \int_0^1 u_x(x) w_x(x) dx - \omega^2 \int_0^1 \frac{u(x) w(x)}{c^2(x)} dx \quad (4)$$

Подставляя вместо функций их разложения по базису, получаем систему линейных уравнений:

$$i\omega \sum_{k=0}^{N} u_k \frac{\psi_k(1) \psi_j(1)}{c(1)} + \sum_{k=0}^{N} u_k \int_0^1 \psi_k'(x) \psi_j'(x) dx - \omega^2 \sum_{k=0}^{N} u_k \int_0^1 \frac{\psi_k(x) \psi_j(x)}{c^2(x)} dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \left(i\omega D_{jk} + K_{jk} - \omega^2 M_{jk} \right) u_k = 0 \quad (5)$$

Здесь матрицы K, M и D — те же, что и в задании 1. Исключим из системы известное значение $u_0 = 1$:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(i\omega D_{jk} + K_{jk} - \omega^2 M_{jk} \right) u_k = \omega^2 M_{j0} - K_{j0} - i\omega D_{j0} \equiv f_j, \qquad j = 1, \ldots, N$$

или в матричной форме

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2\gamma_{1/2} + 2\gamma_{3/2} & \gamma_{3/2} & & & \\ \gamma_{3/2} & 2\gamma_{3/2} + 2\gamma_{5/2} & \gamma_{5/2} & & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & & \gamma_{N-3/2} & 2\gamma_{N-3/2} + 2\gamma_{N-1/2} & \gamma_{N-1/2} \\ & & & \gamma_{N-1/2} & 2\gamma_{N-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \frac{1}{c(1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega^2 h}{6} \gamma_{1/2} + \dfrac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Данная система является трехдиагональной системой линейных уравнений относительно неизвестных $u_1, \ldots, u_N$ с комплексными коэффициентами.

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & & & \\ a_2 & b_2 & a_3 & & & \\ & a_3 & b_3 & a_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & a_N \\ & & & & a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}$$

3 Задание

Численно найти решение системы уравнений методом редукции. Использовать следующие параметры:

$$N = 200, \quad \omega = 5, \quad T = 10, \quad c(x) = 0.1 + 3.6(x - 0.5)^2$$

В качестве решения представить графики функций $\operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x)$ и функцию $\operatorname{Im}\left[u(x)\exp^{i\omega T}\right]$.

4 Метод редукции

Для удобства будем нумеровать уравнения и неизвестные начиная с 0.

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & a_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \end{pmatrix}$$

Чтобы использовать данный метод, нужно дополнить систему фиктивными уравнениями до системы размера $K+1 = 2^k+1 \geq N > K/2+1$. Для этого можно положить

$$a_i = 0,\, b_i = 1,\, c_i = 0,\, d_i = 0, \quad i = N, \ldots, K$$

В основе алгоритма лежит процедура исключения из системы каждой нечетной неизвестной, при этом размер системы уменьшается вдвое, а сама она остается трехдиагональной (каждое уравнение содержит три соседние *четные* неизвестные).

Возьмем три последовательных уравнения — с номерами $2m-1, 2m$ и $2m+1$:

$$\begin{aligned} a_{2m-1}u_{2m-2} + b_{2m-1}u_{2m-1} + c_{2m-1}u_{2m} \quad & = d_{2m-1} \\ a_{2m}u_{2m-1} + b_{2m}u_{2m} + c_{2m}u_{2m+1} \quad & = d_{2m} \\ a_{2m+1}u_{2m} + b_{2m+1}u_{2m+1} + c_{2m+1}u_{2m+2} \quad & = d_{2m+1} \end{aligned}$$

Преобразуем их к виду

$$\begin{array}{lllllll}
a_{2m-1}u_{2m-2} + b_{2m-1}u_{2m-1} + c_{2m-1}u_{2m} & & & & & = d_{2m-1} \\
a'_{2m}u_{2m-2} & + & b'_{2m}u_{2m} & + & c'_{2m}u_{2m+2} & = d'_{2m} \\
& & a_{2m+1}u_{2m} + b_{2m+1}u_{2m+1} + c_{2m+1}u_{2m+2} & & & = d_{2m+1}
\end{array}$$

Из нечетных уравнений будут вычислены нечетные неизвестные на втором этапе алгоритма. Новые коэффициенты в четных уравнениях имеют вид:

$$\begin{aligned}
b'_{2m} &= b_{2m} - \frac{a_{2m}c_{2m-1}}{b_{2m-1}} - \frac{c_{2m}a_{2m+1}}{b_{2m+1}} \\
d'_{2m} &= d_{2m} - \frac{a_{2m}d_{2m-1}}{b_{2m-1}} - \frac{c_{2m}d_{2m+1}}{b_{2m+1}} \\
a'_{2m} &= -\frac{a_{2m}a_{2m-1}}{b_{2m-1}} \\
c'_{2m} &= -\frac{c_{2m}c_{2m+1}}{b_{2m+1}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Предположим, что мы уже проредили неизвестные, оставив только каждую $s = 2^p$ неизвестную. Тогда формулы (6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
b'_{2sm} &= b_{2sm} - \frac{a_{2sm}c_{2sm-s}}{b_{2sm-s}} - \frac{c_{2sm}a_{2sm+s}}{b_{2sm+s}} \\
d'_{2sm} &= d_{2sm} - \frac{a_{2sm}d_{2sm-s}}{b_{2sm-s}} - \frac{c_{2sm}d_{2sm+s}}{b_{2sm+s}} \\
a'_{2sm} &= -\frac{a_{2sm}a_{2sm-s}}{b_{2sm-s}} \\
c'_{2sm} &= -\frac{c_{2sm}c_{2sm+s}}{b_{2sm+s}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Далее, когда от системы уравнений остается только два уравнения с двумя неизвестными, она решается явно:

$$\begin{cases} b_0u_0 + c_0u_K = d_0 \\ a_Ku_0 + b_Ku_K = d_K \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{d_0b_K - c_0d_K}{b_0b_K - a_Kc_0} \\ u_K = \dfrac{b_0d_K - a_Kd_0}{b_0b_K - a_Kc_0} \end{cases}$$

Теперь $u_{K/2}$ можно найти из уравнения

$$
a_{K/2}u_0 + b_{K/2}u_{K/2} + c_{K/2}u_K = d_{K/2}
$$
$$
u_{K/2} = \frac{d_{K/2} - a_{K/2}u_0 - c_{K/2}u_K}{b_{K/2}}
$$

Аналогичным образом, найдя значения неизвестных с шагом $s = 2^p$, пользуясь уравнениями с номерами $ms + s/2$, восстанавливаются значения неизвестных с шагом $s = 2^{p-1}$.

Алгоритм имеет ту же сложность $O(N)$, что и алгоритм прогонки, однако, в отличие от алгоритма прогонки, алгоритм редукции достаточно хорошо параллелится, поскольку его основные операции — получение новых четных уравнений во время первой части и одновременное вычисление решения во всех “серединах” во второй части подхода. Этот алгоритм используется на массивно-параллельных архитектурах (видеокартах). К тому же, метод более устойчив к вычислительным ошибкам, нежели алгоритм прогонки, хотя оба они устойчивы, если матрица имеет диагональное преобладание. В нашей задаче (о ужас!) диагонального преобладания нет.

Алгоритм 1 Метод редукции для решения трехдиагональной системы

$K \Leftarrow 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil}$
for $j = N,\ N+1,\ \ldots, K$ **do**
  $a_j \Leftarrow 0$ ▷ Дополнить матрицу до подходящего размера
  $c_j \Leftarrow 0$
  $d_j \Leftarrow 0$
  $b_j \Leftarrow 1$
end for
for $s = 1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ K/2$ **do**
  $C \Leftarrow -\dfrac{c_0}{b_s}$ ▷ Обработать нулевое уравнение отдельно
  $b_0 \Leftarrow b_0 + C a_s$
  $d_0 \Leftarrow d_0 + C d_s$
  $c_0 \Leftarrow C c_s$
  $A \Leftarrow -\dfrac{a_K}{b_{K-s}}$ ▷ Обработать последнее уравнение отдельно
  $b_K \Leftarrow b_K + A c_{K-s}$
  $d_K \Leftarrow d_K + A d_{K-s}$
  $a_K \Leftarrow A a_{K-s}$
  for $j = 2s,\ 4s,\ 6s,\ \ldots,\ K-2s$ **do**
    $A \Leftarrow -\dfrac{a_j}{b_{j-s}}$
    $C \Leftarrow -\dfrac{c_j}{b_{j+s}}$
    $b_j \Leftarrow b_j + A c_{j-s} + C a_{j+s}$
    $d_j \Leftarrow d_j + A d_{j-s} + C d_{j+s}$
    $a_j \Leftarrow A a_{j-s}$
    $c_j \Leftarrow C c_{j+s}$
  end for
end for
$u_0 = \dfrac{d_0 b_K - c_0 d_K}{b_0 b_K - a_K c_0}$ ▷ Найти крайние неизвестные из системы 2×2
$u_K = \dfrac{b_0 d_K - a_K d_0}{b_0 b_K - a_K c_0}$
for $s = K/2,\ K/4,\ \ldots, 4, 2, 1$ **do**
  for $j = s,\ 3s,\ 5s,\ \ldots,\ K-s$ **do**
    $u_j = \dfrac{d_j - a_j u_{j-s} - c_j u_{j+s}}{b_j}$
  end for
end for