Вырождение матрицы граничного корректора СХМ в зависимости от угла между нормалью к границе и направлением расчёта

1 Упругость 3D – фиксированная внешняя сила

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T \tag{1.1}$$

Запись произвольного линейного граничного условия:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}. \tag{1.2}$$

Допустим, расчёт производится вдоль оси x. Это не уменьшает общности, так как направление нормали к границе $\vec{n}$ выбирается произвольно:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \tag{1.3}$$

Возьмём три внешних инварианта – три однонаправленных волны вдоль оси x:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{c_2} \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

здесь первый столбец – p-волна, далее – две s-волны, λ, μ – параметры Ламе, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн.

Рассматриваем граничное условие фиксированной силы, приложенной к границе:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}. \tag{1.5}$$

Запись $\sigma \cdot \vec{n}$ даёт выражение для силы, приложенной к полупространству с внешней нормалью $\vec{n}$, в глобальном базисе. Обычно в программе расчёт делается в локальном базисе, связанном с границей, однако это не меняет сути дела (проверено численно в том числе), поэтому далее для упрощения формул будем писать в глобальном базисе.

Для (**??**) уравнение граничного условия (1.1) сводится к $\vec{b} = \vec{f}$ и

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

После внутреннего расчёта – учёта волн, пришедших изнутри – выполняется граничная коррекция. Идея: добавление такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение граничного условия.

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}_{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}. \tag{1.7}$$

Как видно, для определения коэффициентов в линейной комбинации необходимо решить систему:

$$\mathbf{B\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}_{inner}. \tag{1.8}$$

Таким образом, нас интересует обусловленность именно матрицы $\mathbf{B\Omega}$ размером $D \times D$, где D – размерность пространства.

После перемножения получаем:

$$\mathbf{B\Omega} = \frac{1}{c_1 c_2} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) n_x c_2 & \mu n_y c_1 & \mu n_z c_1 \\ \lambda n_y c_2 & \mu n_x c_1 & 0 \\ \lambda n_z c_2 & 0 & \mu n_x c_1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

$$\det(\mathbf{B\Omega}) = \frac{\mu^2}{c_1 c_2^2} \cdot n_x \cdot (2(\lambda + \mu) n_x^2 - \lambda) \tag{1.10}$$

Из условия $\det(\mathbf{B\Omega}) = 0$ получаем:

$$\left[\begin{aligned} & n_x = 0 \\ & n_x^2 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \equiv \nu < \frac{1}{2}, \end{aligned}\right. \tag{1.11}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

2 Упругость 2D – фиксированная внешняя сила

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})^T \tag{2.1}$$

Два внешних инварианта – p- и s-волны вдоль оси x:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_1} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_2} \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_x & n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

$$\mathbf{B\Omega} = \frac{1}{c_1 c_2} \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) n_x c_2 & \mu n_y c_1 \\ \lambda n_y c_2 & \mu n_x c_1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

$$\det(\mathbf{B\Omega}) = \frac{\mu}{c_1 c_2} \cdot (2(\lambda+\mu) n_x^2 - \lambda) \tag{2.5}$$

Из условия $\det(\mathbf{B\Omega}) = 0$ получаем:

$$n_x^2 = \nu. \tag{2.6}$$

3 Упругость – фиксированная скорость на границе

В глобальном базисе:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

В локальном базисе $\{\vec{m}, \vec{n}\}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_x & m_y & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Как видно из (**??**), в случае фиксированной скорости первые D столбцов матрицы $\mathbf{B}$, которые сами являются векторами локального или глобального базиса, умножаются на плюс-минус единичную матрицу, поэтому в данном случае всегда

$$\det(\mathbf{B\Omega}) = \pm 1. \tag{3.3}$$

4 Акустика

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

Независимо от размерности только один внешний инвариант – p-волна вдоль направления $\vec{l}$:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \vec{l} \\ c\rho \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

Матрица для фиксированного давления:

$$\mathbf{B_p} = \begin{pmatrix} \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B_p\Omega} = c\rho > 0. \tag{4.3}$$

Матрица для фиксированной нормальной скорости:

$$\mathbf{B_v} = \begin{pmatrix} \vec{n}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B_v \Omega} = (\vec{n} \cdot \vec{l}), \tag{4.4}$$

что в терминах выше означает $n_x = 0$.

5 Заключение

Как видно, наивное представление о том, что матрица граничного корректора вырождается только при перпендикулярности нормали и направления расчёта, не соответствует действительности. Более того, она может быть и не вырожденной при таком условии:

Модель	Фикс. сила	Фикс. скорость
Упругость 3D	$\left[\begin{array}{l} n_x = 0 \\ n_x^2 = \nu \end{array}\right.$	-
Упругость 2D	$n_x^2 = \nu$	-
Акустика	-	$n_x = 0$