

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
(Специализация «Компьютерное моделирование
в механике, биомеханике и физиологии»)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ
ИЗДЕЛИЙ ИЗ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Магистерская диссертация

студента 031 группы
Казакова Александра Олеговича

Научный руководитель
Васюков Алексей Викторович, к.ф.-м.н.

г.Долгопрудный
2016

Содержание

Введение	3
1 Обзор существующих работ по данной тематике	5
2 Уравнения механики линейно-упругого тела	6
2.1 Общий вид уравнений	6
2.2 Случай изотропного линейно-упругого тела	6
2.3 Случай произвольно анизотропного линейно-упругого тела . . .	8
2.4 Отдельные виды анизотропии	11
2.4.1 Изотропный случай как подвид анизотропного	11
2.4.2 Орторомбическая анизотропия	11
2.4.3 Трансверсально-изотропное тело	11
2.5 Спектральное разложение матриц из уравнения	12
2.6 Преобразование тензора упругих постоянных при повороте . . .	14
3 Численный метод	15
3.1 Численный метод в одномерном случае	15
3.2 Расщепление на упругую и пластическую части	16
3.3 Решение линейно-упругой части задачи	17
3.3.1 Матричная форма уравнений линейной упругости	17
3.3.2 Гиперболические свойства систем уравнений линейной упругости	18
3.3.3 Расщепление по пространственным направлениям	19
3.3.4 Расчёт граничных узлов	20
3.4 Пластический корректор	21
4 Полученные результаты	22
4.1 Расчёты в 1D	22
4.1.1 Линейная упругость	22
4.1.2 Упругопластика	26
4.1.3 Неявный метод	26
4.2 Расчёты в 3D	29
4.2.1 Расчёт бокового удара по телу упругопластической реологии	29

4.2.2	Расчёт прохождения пластической волны через контакт двух материалов	31
5	Заключение	38
	Литература	39
6	Приложение	41
6.1	Диагонализация матриц из уравнений модели в случае ортотромбической анизотропии и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии	41

Введение

В последнее время всё более широкое распространение в различных областях науки и техники получает применение композиционных материалов. Из них изготавливается спортивное и медицинское оборудование, детали двигателей, обшивка и силовые конструкции корпусов самолётов и космических аппаратов, бронежилеты и элементы брони военной техники, детали и кузова автомобилей.

Композиционный материал - неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов с чёткой границей раздела между ними. Правильное комбинирование нескольких элементов, каждый из которых обладает неким выдающимся качеством, позволяет получить материал, совмещающий эти свойства или близкий к этому, а также, возможно, имеющий новые интересные свойства.

К примеру, кевларовые нити в несколько раз превосходят сталь по прочности на разрыв и при этом намного легче. Изготовленная из них пластина не только сохраняет прочностные свойства кевлара и его лёгкость, но и обладает повышенной трещиностойкостью вследствие наличия границ раздела между нитями и матрицей [1].

Интенсивное использование материалов приводит к их износу и выходу из строя выполненных из них конструкций. Как правило, серьёзные разрушения происходят не внезапно, им предшествует накопление и рост дефектов внутри материала. Однако очень часто обнаружить такие дефекты невозможно без применения специальных средств.

Неразрушающий контроль - проверка надежности основных рабочих параметров объекта или отдельных его элементов, не требующий выведения объекта из работы либо его демонтажа. Существует множество методов, среди которых акустические, тепловые, радиационные, радиоволновые, проникающими веществами и другие.

Акустический, он же, в зависимости от частоты, ультразвуковой способ основан на регистрации и анализе параметров упругих волн в объекте контроля. Выделяют пассивный, при котором анализируются существующие в образце шумы, и активный, основанный на измерении интенсивности пропускаемого или отражаемого сигнала.

Большинство существующих методов анализа показаний прибора акустического неразрушающего контроля - ультразвукового дефектоскопа - осно-

вывается на так называемом лучевом приближении, аналогичном геометрической оптике. Во многих случаях это даёт необходимый результат. Однако в сложных случаях, связанных с анизотропными и композиционными материалами и множественными дефектами, результат не всегда удовлетворителен.

В связи с этим предлагается провести более глубокий анализ волновых процессов, происходящих при акустическом неразрушающем контроле, проведя прямое численное моделирование этого процесса в рамках модели механики деформируемого твёрдого тела. Сеточно-характеристический численный метод, напрямую учитывающий волновые свойства уравнений математической модели, подходит для этого как нельзя лучше.

При распространении акустических волн в среде деформации пренебрежимо малы. Из этого следует два факта. Во-первых, для математического описания задачи подходит линейная теория упругости. Во-вторых, расчётная сетка численного метода может быть выбрана неподвижной. Это, однако, не даёт возможности полностью ограничиться структуризованными сетками, так как они не позволяют смоделировать дефекты произвольной формы.

Таким образом, данная работа посвящена применению сеточно-характеристического метода к расчёту распространения акустических волн в линейно-упругом теле. Рассматриваются задачи с анизотропией упругих свойств материала, наличием внутренних дефектов, несколькими слоями в образце.

Проведены расчёты постановок с параметрами, близкими к параметрам реальных производственных ситуаций неразрушающего контроля композитных материалов.

1 Обзор существующих работ по данной тематике

Комбинация математической модели линейно-упругого тела и сеточно-характеристического численного метода для расчёта волновых задач используется уже давно и хорошо себя зарекомендовала.

Сеточно-характеристический метод численного решения уравнений в частных производных гиперболического типа был впервые предложен в [4]. В последствии его авторами была выпущена подробная монография по различным аспектам его применения и реализации [5].

Одно из первых применений метода к расчёту волновых задач механики деформируемого твёрдого тела было осуществлено в [6] на структурированных расчётных сетках. Возможность применения метода с высоким порядком аппроксимации на неструктурных расчётных сетках была продемонстрирована в работе [7]. Значительные улучшения метода, связанные со спектральным разложением матриц системы уравнений и расчётом граничных и контактных узлов, были предложены в [8]. В работе [10] был предложен способ диагонализации матриц системы уравнений для произвольного случая анизотропии материала. Реализация метода на структурированных иерархических тетраэдральных сетках с кратным шагом по времени продемонстрирована в работе [9].

В монографии [11] рассмотрены различные математические вопросы сеточно-характеристического метода и других родственных ему методов численного решения динамических волновых задач.

Таким образом, данная область знаний уже является хорошо изученной, однако полная реализация всех методов в трёхмерном пространстве с различной реологией материалов, сложной геометрией областей и другими практическими аспектами, важными в прикладных задачах, всё ещё оставляет много вопросов.

2 Уравнения механики линейно-упругого тела

2.1 Общий вид уравнений

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твёрдом теле используется система динамических уравнений [2, 3] в виде

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i && \text{(уравнения движения)} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij} && \text{(реологические соотношения).}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты векторов скорости частиц среды, σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты симметричных тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – производная по j -й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – силы, обусловленные вязкостью, q_{ijkl} – тензор упругих постоянных.

В случае малых деформаций тензор скоростей деформаций $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается через компоненты скорости смещения линейным образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \quad (2.2)$$

Компоненты тензора 4-го порядка q_{ijkl} , сил вязкости F_{ij} и плотности ρ определяются реологией среды.

2.2 Случай изотропного линейно-упругого тела

Для невязкого изотропного линейно-упругого материала

$$\begin{aligned}q_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) && \text{(изотропия)} \\ F_{ij} &= 0 && \text{(отсутствует вязкость)}\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\rho = \text{const} \quad \text{(изменения пренебрежимо малы).} \quad (2.4)$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, связанные с более известными модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν (модулем сдвига G) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

В этом случае уравнения (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Обозначив искомый вектор $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$, уравнения (2.1) можно переписать в матричной форме [6]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0, \tag{2.7}$$

где матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z принимают следующий вид:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

2.3 Случай произвольно анизотропного линейно-упругого тела

Для материала с произвольным типом анизотропии тензор упругих постоянных q_{ijkl} обладает 21 независимым параметром. Это видно из следующих рассуждений [13]. Вообще говоря, число его компонент $3^4 = 81$. Однако симметричные в рассматриваемой модели тензоры напряжений и деформаций имеют не 9, а 6 независимых компонент. Остаётся 36 независимых компонент q_{ijkl} . Теперь рассмотрим выражение для потенциала упругой энергии W :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (2.11)$$

$$q_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \quad (2.12)$$

$$q_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (2.13)$$

Из независимости второй производной от порядка дифференцирования следует $q_{ijkl} = q_{klij}$. Теперь зависимость σ от ε можно записать в более компактном виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Таким образом, для случая произвольной анизотропии уравнения (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= c_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{14} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{15} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= c_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{24} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{25} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{26} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= c_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{34} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{35} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{36} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= c_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{24} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{44} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{46} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= c_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{55} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= c_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{46} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{66} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Записывая эти уравнения в матричном виде (2.7), получаем следующие

выражения для матриц:

$$\mathbf{A}_x = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{16} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{26} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{A}_y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ c_{16} & c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{66} & c_{26} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{25} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A}_z = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ c_{15} & c_{14} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

2.4 Отдельные виды анизотропии

2.4.1 Изотропный случай как подвид анизотропного

Из условия изотропии – неизменности свойств материала при произвольных поворотах – следует, что число независимых компонент тензора q_{ijkl} сокращается до двух:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где $c_{44} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$, причём $c_{12} = \lambda$ и $c_{44} = \mu$ – параметры Ламе.

2.4.2 Орторомбическая анизотропия

Орторомбическая анизотропия – различные свойства материала вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений. Число независимых компонент сокращается до девяти.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.4.3 Трансверсально-изотропное тело

Трансверсальная анизотропия – отличные свойства вдоль одной выделенной оси. Это частный случай орторомбической. Число независимых компо-

нент – пять.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

где $c_{66} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$.

2.5 Спектральное разложение матриц из уравнения

Как будет показано ниже, для реализации сеточно-характеристического метода необходимо диагонализовать матрицы из (2.7), то есть представить их в виде $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{L}\boldsymbol{\Omega}$, где \mathbf{L} – диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{A} , $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ – матрица собственных векторов матрицы \mathbf{A} , $\boldsymbol{\Omega}$ – матрица собственных строк матрицы \mathbf{A} .

В случае орторомбической анизотропии материала и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии разложение выписывается аналитически и представлено в 6.1. Трансверсально-изотропный и изотропный сводятся к орторомбическому как его частные случаи.

Однако общий случай, когда имеется 21 независимая компонента или главные оси материала повёрнуты по отношению к координатным, требует больших усилий. Итак, проведём диагонализацию матриц (2.16), (2.17), (2.18), как было предложено в [10]. Пусть $\lambda^2 = t$, где λ – собственное значение матрицы \mathbf{A}_x , тогда из векового уравнения имеем:

$$\begin{aligned} t^3 - \frac{1}{\rho}(c_{11} + c_{55} + c_{66})t^2 - \frac{1}{\rho^2}(c_{15}^2 - c_{11}c_{55} + c_{16}^2 - c_{11}c_{66} + c_{56}^2 - c_{55}c_{66})t + \\ + \frac{1}{\rho^3}((c_{56}^2 - c_{55}c_{66})c_{11} + (c_{16}c_{55} - c_{15}c_{56})c_{16} + (c_{15}c_{66} - c_{16}c_{56})c_{15}) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Решение может быть получено, например, с помощью тригонометрической формулы Виета или других методов. После чего собственные значения \mathbf{A}_x :

$$\{\sqrt{t_{11}}, -\sqrt{t_{11}}, \sqrt{t_{12}}, -\sqrt{t_{12}}, \sqrt{t_{13}}, -\sqrt{t_{13}}, 0, 0, 0\}, \quad (2.23)$$

где t_{11}, t_{12}, t_{13} – действительные положительные корни (2.22). Требования к действительности и положительности корней (2.22) являются фактически

требованием гиперболичности системы уравнений.

Аналогично для \mathbf{A}_y :

$$\begin{aligned} t^3 - \frac{1}{\rho}(c_{22} + c_{44} + c_{66})t^2 - \frac{1}{\rho^2}(c_{24}^2 - c_{22}c_{44} + c_{26}^2 - c_{22}c_{66} + c_{46}^2 - c_{44}c_{66})t + \\ + \frac{1}{\rho^3}((c_{46}^2 - c_{44}c_{66})c_{22} + (c_{26}c_{44} - c_{24}c_{46})c_{26} + (c_{24}c_{66} - c_{26}c_{46})c_{24}) = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\{\sqrt{t_{21}}, -\sqrt{t_{21}}, \sqrt{t_{22}}, -\sqrt{t_{22}}, \sqrt{t_{23}}, -\sqrt{t_{23}}, 0, 0, 0\}, \quad (2.25)$$

Аналогично для \mathbf{A}_z :

$$\begin{aligned} t^3 - \frac{1}{\rho}(c_{33} + c_{44} + c_{55})t^2 - \frac{1}{\rho^2}(c_{34}^2 - c_{33}c_{44} + c_{35}^2 - c_{33}c_{55} + c_{45}^2 - c_{44}c_{55})t + \\ + \frac{1}{\rho^3}((c_{45}^2 - c_{44}c_{55})c_{33} + (c_{35}c_{44} - c_{34}c_{45})c_{35} + (c_{34}c_{55} - c_{35}c_{45})c_{34}) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\{\sqrt{t_{31}}, -\sqrt{t_{31}}, \sqrt{t_{32}}, -\sqrt{t_{32}}, \sqrt{t_{33}}, -\sqrt{t_{33}}, 0, 0, 0\}, \quad (2.27)$$

Нахождение собственных векторов (2.16)-(2.18) благодаря разреженности матриц сводится от СЛАУ 9×9 к СЛАУ 3×3 . Например, для матрицы \mathbf{A}_x :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{16} & c_{15} & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{26} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

где \vec{l} – собственный вектор \mathbf{A}_x , соответствующий собственному значению λ . Выражая l_4, l_5, l_6 из первых трёх строк и подставляя их в 4-ую, 5-ую и 6-ую

строки, получим СЛАУ на компоненты l_1, l_2, l_3 :

$$\begin{pmatrix} c_{11} + \rho\lambda^2 & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} + \rho\lambda^2 & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} + \rho\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Полученная матрица (2.29) имеет ранг либо 1, что соответствует корню кратности 2, либо ранг 2, что соответствует корню кратности 1. Находя невырожденный минор соответствующей размерности и решая подсистему, получаем l_1, l_2, l_3 , а затем и весь вектор \vec{l} .

2.6 Преобразование тензора упругих постоянных при повороте

Запишем изменение тензора упругих постоянных при повороте материала относительно системы координат.

Пусть $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – углы поворота материала вокруг соответствующих осей. Имеем матрицы поворотов $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$. Например, \mathbf{G}_x :

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

Итоговая матрица преобразования базиса $\mathbf{G} = \mathbf{G}_x \mathbf{G}_y \mathbf{G}_z$, если поворот производился сначала вокруг z , потом вокруг y , потом вокруг x .

Выражение для тензора упругих постоянных q_{ijkl} при таком повороте определяется правилом преобразования тензоров:

$$q_{mnpq} = \sum_{i,j,k,l=1}^3 G_{mi} G_{nj} G_{pk} G_{ql} q_{ijkl}. \quad (2.31)$$

3 Численный метод

3.1 Численный метод в одномерном случае

Как следует из ??, для моделирования сплошной среды можно использовать уравнения в эйлеровой, лагранжевой или смешанной форме. При этом рассчётная сетка может быть неподвижной или двигаться вместе с частицами тела. Возможны также промежуточные варианты, когда сетка движется вместе с телом, но не "вморожена" в него, для большего постоянства расстояния между рассчётными узлами.

Из наиболее простых и распространённых вариантов следует отметить следующие два:

- Неподвижная сетка и эйлеровы уравнения. К его недостаткам можно отнести сложность реализации при макроскопических деформациях тел.
- "Вмороженная" в тело сетка и уравнения в смешанной форме, где дифференцирование по времени подразумевается в фиксированной частице тела, а пространственная производная рассчитывается именно из координат рассчётных узлов в неподвижном пространстве.

В любом случае все указанные методы моделируют одну и ту же физическую систему и должны давать одинаковые результаты в пределах их точности и применимости.

В данной работе был реализован второй метод. Он подразумевает расщепление шага по времени на два физических процесса: распространение возмущения в веществе и перенос самого вещества.

Расчёт распространения возмущения осуществляется методом, являющимся упрощением его трёхмерного аналога, описанного в 3.3.2. Сама по себе реализация движения узлов сетки со вторым порядком точности по времени также не вызывает затруднений.

В методе первого порядка достаточно в конце (или в начале, что несущественно) каждого расчёта распространения возмущения в веществе перемещать узел сетки на расстояние $x_{n+1} - x_n = v_{n+1}\tau$ или $v_n\tau$. Схема данного простейшего расщепления показана на рис.1, а.

Однако для того, чтобы расчёт целиком проходил со вторым порядком точности по времени, необходимо осуществить более симметричное расщеп-

ление, чем вышеописанное. Его схема показана на рис.1, b. На очередном шаге сначала за половинное время $\tau/2$ со вторым порядком точности перемещаются рассчётные узлы. Для этого приходится рассчитать скорости в узлах в момент $t_n + \tau/2$. После этого производится расчёт скоростей и напряжений на новом слое t_{n+1} . При этом для аппроксимации берутся значения скоростей и напряжений в t_n , а координаты узлов – только что пересчитанные. После этого окончательно сдвигается сетка.



Рис. 1. Схема расщепления на процессы распространения возмущения в веществе и переноса частиц вещества а) первого, б) второго порядка точности.

Далее рассмотрим идеи численного метода в трёхмерной постановке.

3.2 Расщепление на упругую и пластическую части

Пластическая задача решается расщеплением на два физических процесса: упругая деформация и пластическое течение. Расщепление проводилось на каждом из трёх подшагов по пространственным координатам, которые будут описаны ниже. На этапе предиктора расчёт значений на новом временному слое делается как для линейно-упругого тела. Затем, в случае выхода напряжений за пределы поверхности текучести, пластический корректор возвращает их обратно на $f(\sigma_{ij}) = 0$.

3.3 Решение линейно-упругой части задачи

3.3.1 Матричная форма уравнений линейной упругости

Уравнения ?? и ?? можно переписать в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = \vec{f}. \quad (3.1)$$

Здесь $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$ – вектор искомых функций, \vec{f} – вектор правых частей той же размерности, x, y, z – независимые пространственные переменные, t – время,

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Гиперболические свойства систем уравнений линейной упругости

Рассмотрим сначала одномерное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = \vec{f}. \quad (3.2)$$

Если матрица \mathbf{A} имеет полный набор вещественных собственных значений, то такое уравнение называется гиперболическим, и его решения соответствуют процессам, которые носят волновой характер. В этом случае справедливо разложение:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – матрица, составленная из векторов $\vec{\omega}_i$, где $\vec{\omega}_i$ есть собственные векторы матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющие соотношениям

$$\vec{\omega}_i \mathbf{A} = \lambda_i \vec{\omega}_i,$$

а $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}$ – диагональная матрица собственных значений. В предложении независимости компонент матрицы \mathbf{A} от времени и координаты, домножив уравнение 3.2 слева на $\boldsymbol{\Omega}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Omega} \vec{u} + \boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\Omega} \vec{u} = \boldsymbol{\Omega} \vec{f},$$

которое после перехода к Римановым инвариантам $\vec{v} = \boldsymbol{\Omega} \vec{u}$ распадается на n одномерных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} v_i = \tilde{f}_i, \quad (3.3)$$

где $\tilde{f}_i = (\Omega \vec{f})_i$. Таким образом, решение уравнения 3.2 представляется в виде суммы плоских волн, движущихся со скоростями λ_i . Вдоль прямой с наклоном $\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i$, называемой характеристикой, 3.3 переходит обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_i}{dt} = \tilde{f}_i. \quad (3.4)$$

Благодаря этому для численного решения 3.2 предлагается использовать сеточно-характеристический метод, суть которого состоит в следующем. Из того узла m временного слоя $n+1$, в котором требуется получить решение, опускаются характеристики. Из точки пересечения характеристики со слоем n значение

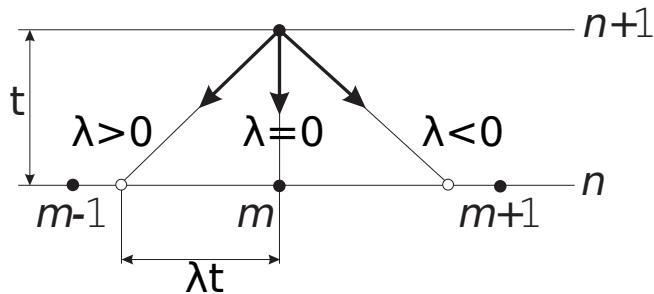


Рис. 2. Принципиальная схема сеточно-характеристического метода.

v_i переносится в точку ξ_m^{n+1} путём решения 3.4:

$$v_i^{n+1}(\xi_m) = v_i^n(\xi_m - \lambda_i \tau) + \tilde{f}_i \tau.$$

Если характеристика не попадает точно в рассчётный узел, то применяются различные методы реконструкции значения в данной точке (в данной работе используется интерполяция соответствующего порядка).

3.3.3 Расщепление по пространственным направлениям

Идея метода [?] решения исходной задачи состоит в расщеплении по трём пространственным координатам, то есть в разделении на этапе численного решения трёхмерной системы уравнений 3.1 на три одномерных. На уровне дифференциальных операторов это может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.7)$$

Эти уравнения решаются последовательно описанным в предыдущем параграфе методом с использованием на очередном подшаге результатов, полученных на предыдущем подшаге.

3.3.4 Расчёт граничных узлов

Описанный выше чистый метод характеристик применяется только для расчёта внутренних узлов сетки, то есть в том случае, если выпущенная из точки характеристика не выходит за пределы области интегрирования. В противном случае для нахождения значений на новом временном слое составляется система уравнений, в которой данные выводящих характеристик заменяются граничными и контактными условиями. Рассматриваемая система уравнений в граничных узлах имеет не более трёх [8] выводящих характеристик.

Границные условия могут быть нескольких видов, например (символы без волны – для первого тела, с волной – для второго):

- жёстко закреплённая граница

$$v_\tau = v_n = 0;$$

- свободная граница

$$\sigma_\tau = \sigma_n = 0;$$

- скольжение тел друг относительно друга

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ \sigma_n &= \tilde{\sigma}_n, \\ \sigma_\tau &= \tilde{\sigma}_\tau = 0; \end{aligned}$$

- слипание тел

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ v_\tau &= \tilde{v}_\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти условия доопределяют СЛАУ на значения инвариантов Римана на новом временном слое.

3.4 Пластический корректор

В данной работе был реализован простейший корректор, реализующий нормировку вектора напряжений. Этот способ известен как правило корректировки Уилкинса [?], и верен только для идеальнопластической среды без упрочнения.

Рассчитанные в ходе эластичного предиктора напряжения в случае выхода за поверхность текучести $f(\sigma_{ij}) \geq 0$ (см. ??), возвращаются на неё путём умножения на нормировочный коэффициент:

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^e \frac{k_F}{J_2^e} \quad (3.9)$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (3.10)$$

4 Полученные результаты

4.1 Расчёты в 1D

Для одномерной модели сплошной среды были реализованы расчёты линейно-упругой и пластической реологии, движение сетки со вторым порядком точности по времени, получена ударная волна, а также исследован неявный метод второго порядка точности.

4.1.1 Линейная упругость

Неподвижная сетка На неподвижной сетке был реализован метод второго порядка по координате, основанный на аппроксимации инвариантов Римана по трём точкам. Расчёт по данному методу не учитывает движение тела в направлении вдоль колебаний, и может быть применён только в случае малости скоростей или моделировании поперечных колебаний. На рис.3 показана скорость частиц тела в разные моменты времени, в том числе после отражения от жёстко закреплённой границы (граничное условие $v = 0$, скорость изменяет знак).

В отличие от метода первого порядка, данный в сочетании с лимитером "minmax" даёт значительно меньшее размытие волнового фронта, при этом осцилляций практически не возникает.

Подвижная сетка В силу равенства нулю правой части и неподвижности сетки вышеизложенный метод абсолютно точен по времени. В случае движения сетки возникают проблемы с порядком точности по времени, которые решаются более симметричным расщеплением процессов распространения возмущения и переноса вещества, описанным в .

На рис.4 показано отражение упругой волны от свободной границы (граничное условие $\sigma = 0$, скорость сохраняет знак). Благодаря расщеплению размытие фронта остаётся таким же, как и в методе на неподвижной сетке.

Ударная волна Подвижность сетки позволяет получать гораздо более реальные результаты – к примеру, в случае достаточно больших скоростей начальных возмущений, независимо от их гладкости, в материале образуется ударная волна (рис.5).

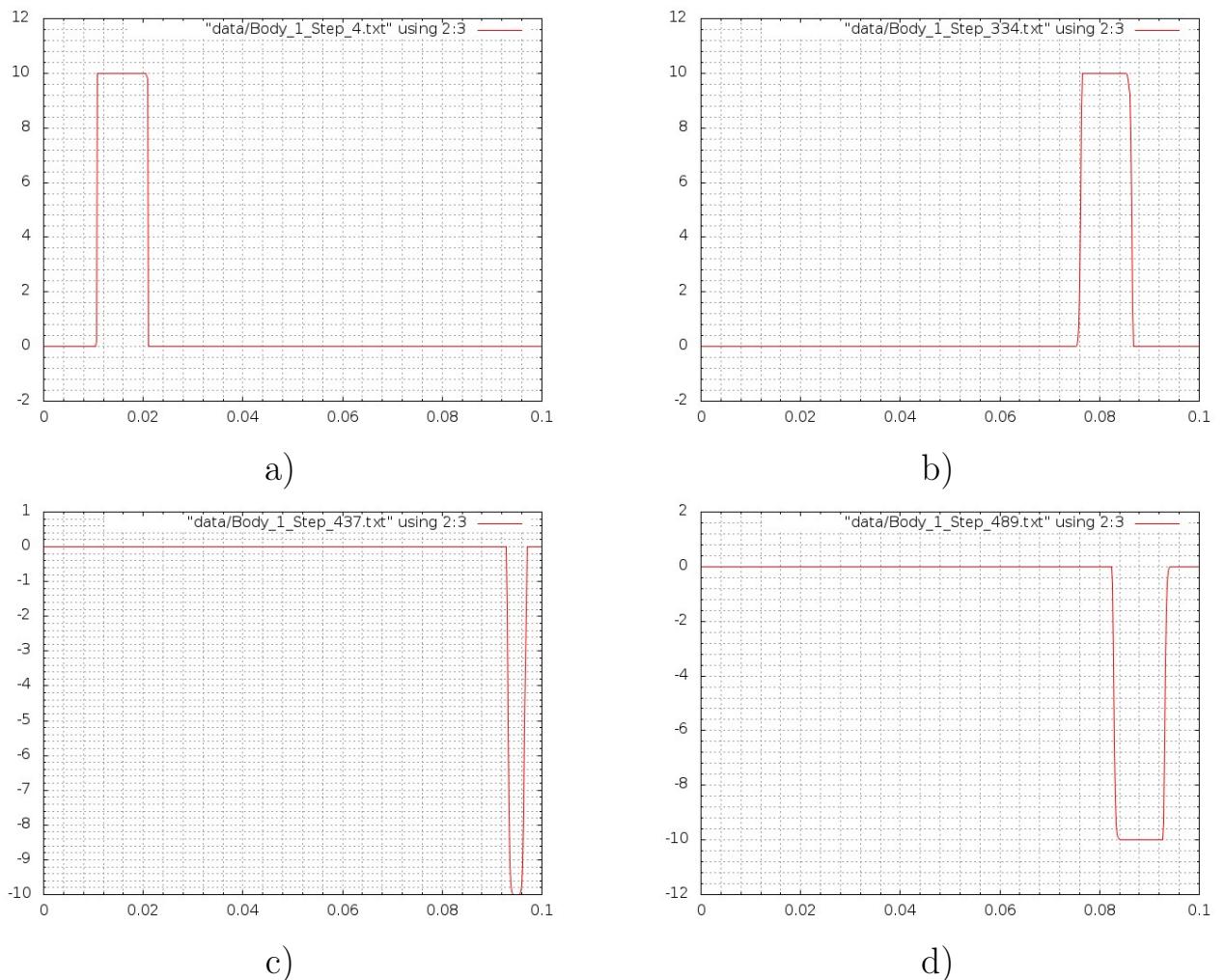


Рис. 3. Распространение прямоугольного импульса, неподвижная сетка а) начальное возмущение, б) импульс прошёл через всё тело, в) отражение от закреплённой границы, г) Отражённый импульс.

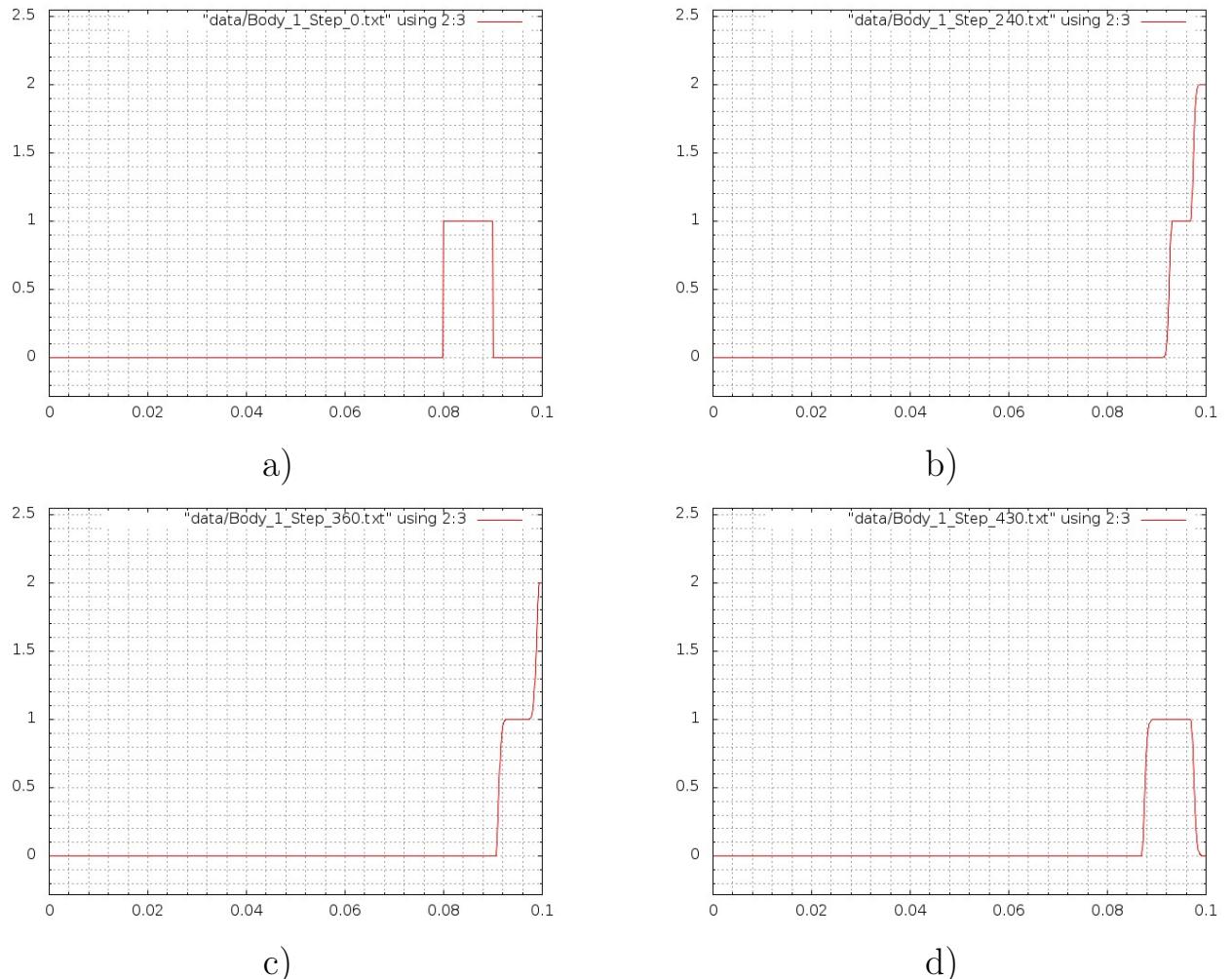


Рис. 4. Распространение прямоугольного импульса, подвижная сетка а) начальное возмущение, б,с) отражение от свободной границы, д) Отражённый импульс.

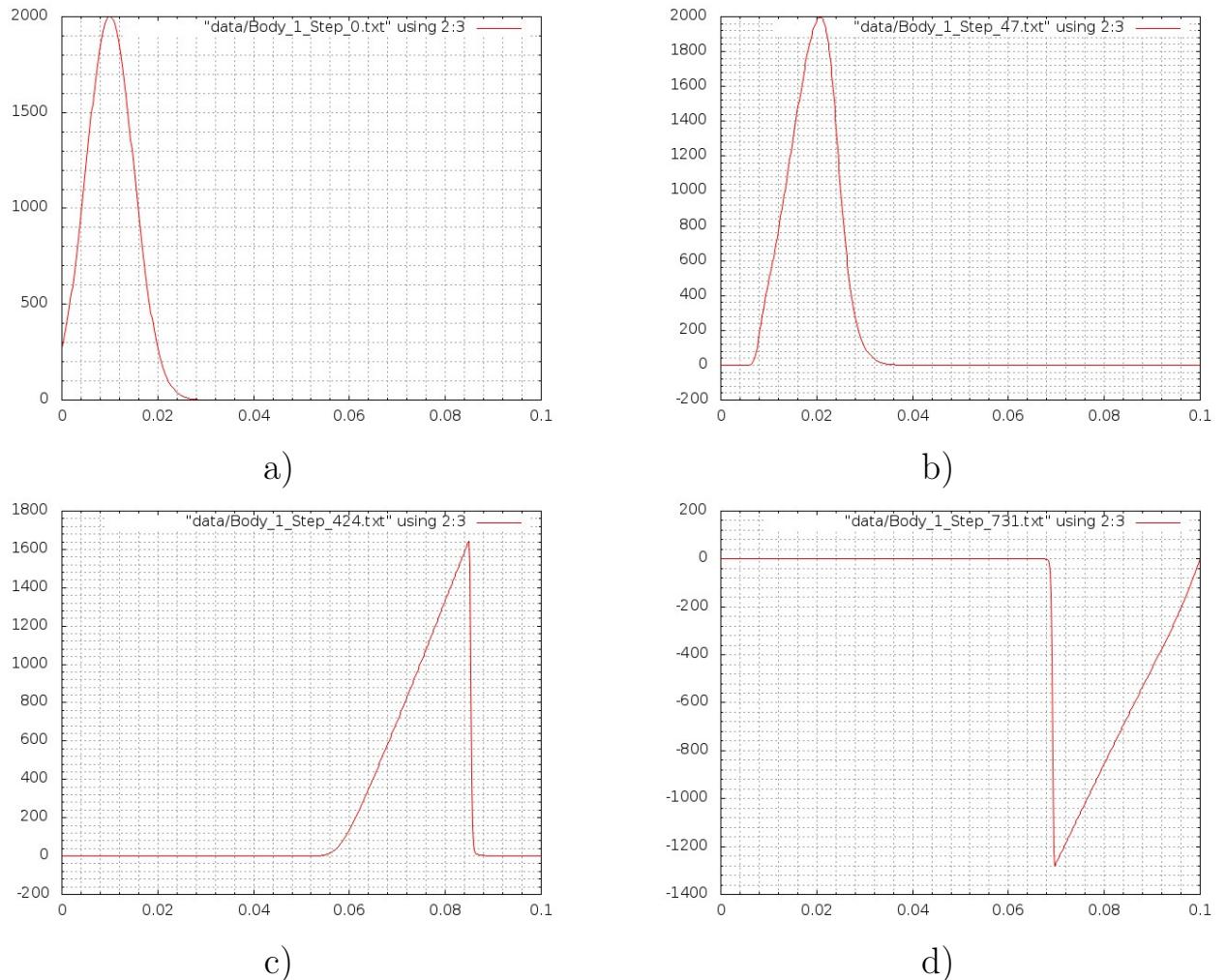


Рис. 5. Формирование ударной волны при гладком начальном условии
а) начальное возмущение - гауссова кривая, б,с) опрокидывание
фронтов, д) отражённый импульс.

Расчёт слоистой структуры Также в работе был произведён расчёт прохождения возмущения через многослойную структуру с возрастающей от слоя к слою плотностью. На рис.6 показаны значения скорости в частицах материала по мере прохождения в новые слои.

Сравнение численных расчётов с аналитическими результатами, изложенными в [?], показало их совпадение с высокой (относительная ошибка 10^{-10} во втором слое и 10^{-3} в пятом) точностью.

4.1.2 Упругопластика

Для случая упругопластики в одномерном случае была использована модель с кусочно-линейным по напряжению модулем Юнга (производной $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$) и однозначной зависимостью $\sigma - \varepsilon$. Распространение пластического возмущения показано на рис.7.

Четыре "ступеньки" в пластической волне обусловлены четырьмя различными значениями модуля Юнга, и, соответственно, скоростями распространения $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Значения напряжений в них совпадают с максимальным верхним пределом, при котором модуль Юнга всё ещё имеет соответствующее значение.

4.1.3 Неявный метод

В рамках одномерного кода был также реализован неявный метод второго порядка на неподвижной сетке, описанный в [?], стр. 183, являющийся абсолютно устойчивым по времени. Однако практика показала, что он менее пригоден для моделирования динамических процессов ввиду ряда недостатков:

- Общая сложность реализации, которая вряд ли позволит применить метод в трёхмерном случае
- Автору неизвестен метод распараллеливания на произвольное число процессов
- Существенно большее размытие фронтов и величина осцилляций, чем у явного метода второго порядка (см. рис.8)
- Несмотря на абсолютную устойчивость, при выборе большого шага по

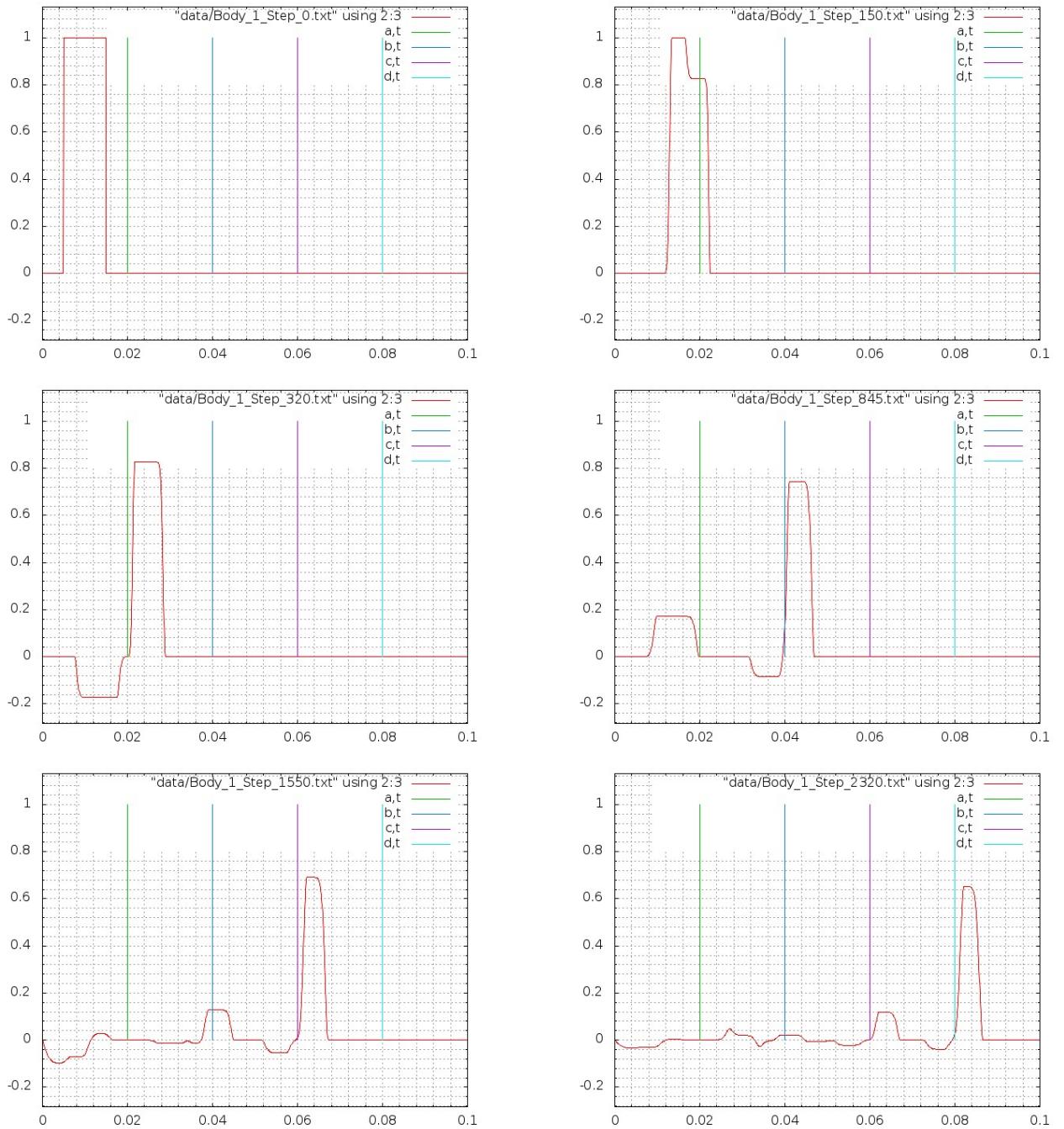


Рис. 6. Прохождение упругой волны через слоистый материал.

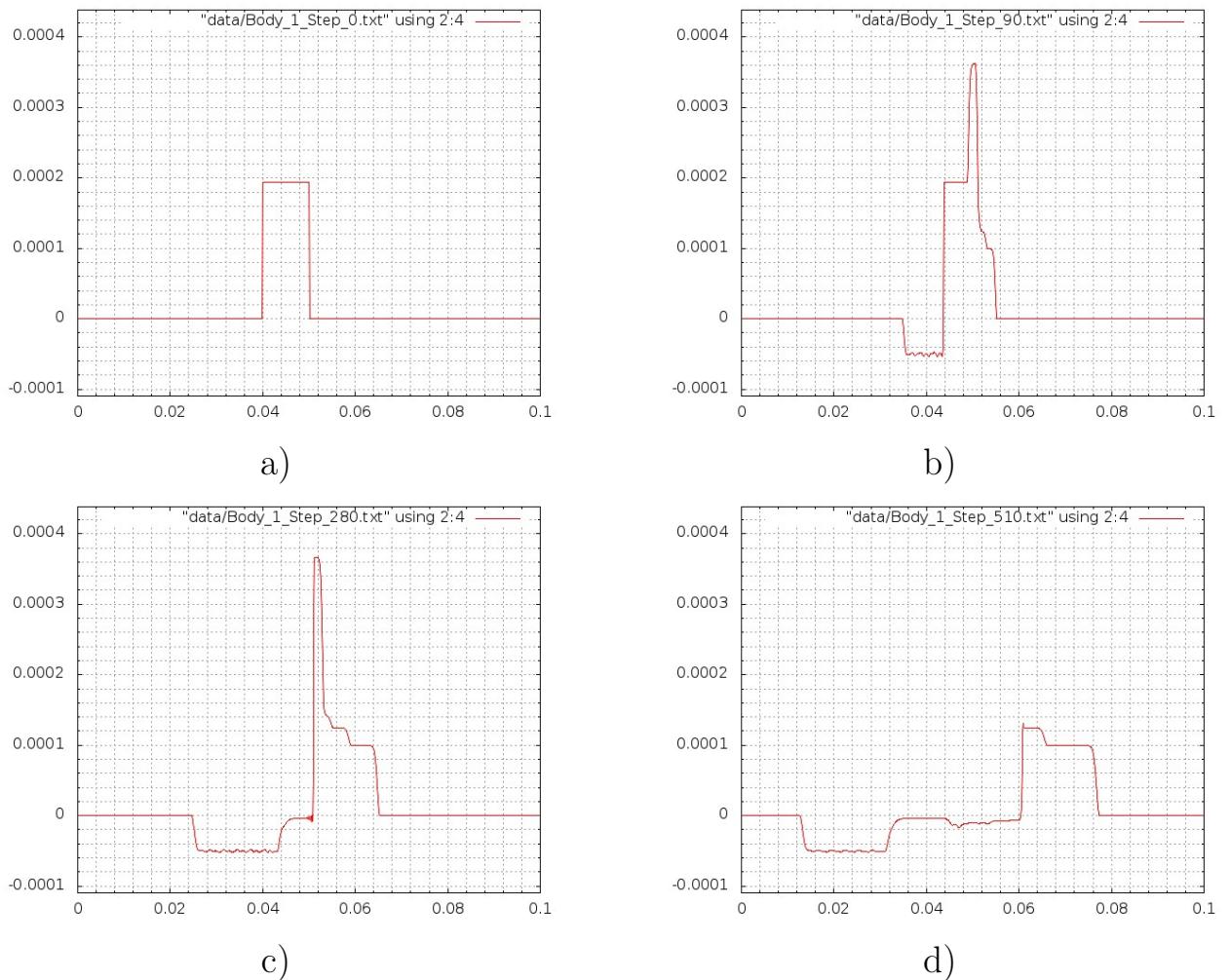


Рис. 7. Пластические возмущения а) начальное возмущение - прямоугольник, б) влево уходит чисто упругая волна, справа образуются "упругие предвестники" с) отчётливые четыре "ступеньки" в пластической волне, д) пластическая волна переходит в упругую.

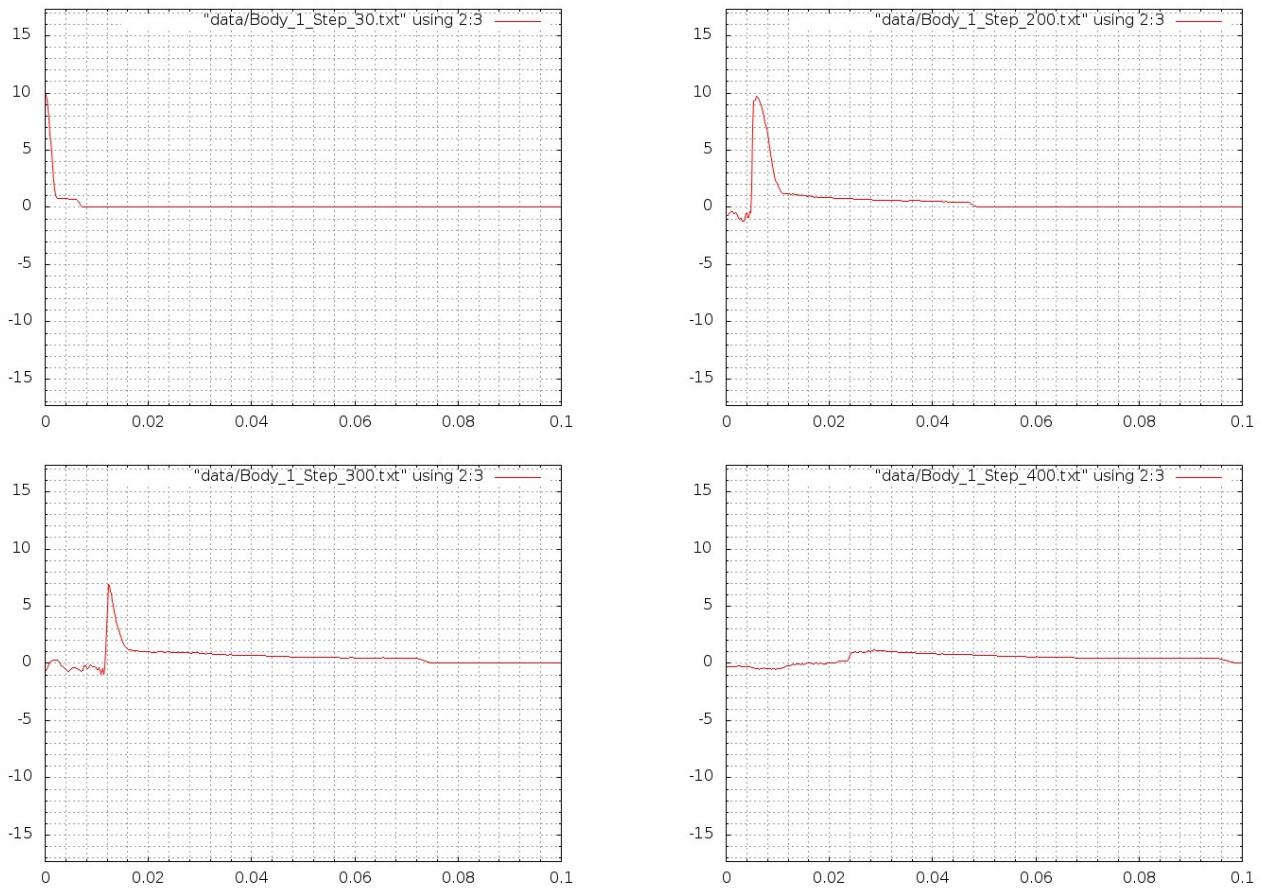


Рис. 8. Боковой удар по телу с пластической реологией. Расчёт неявным методом второго порядка со сглаживанием

времени смоделированная картина перестаёт соответствовать действительности

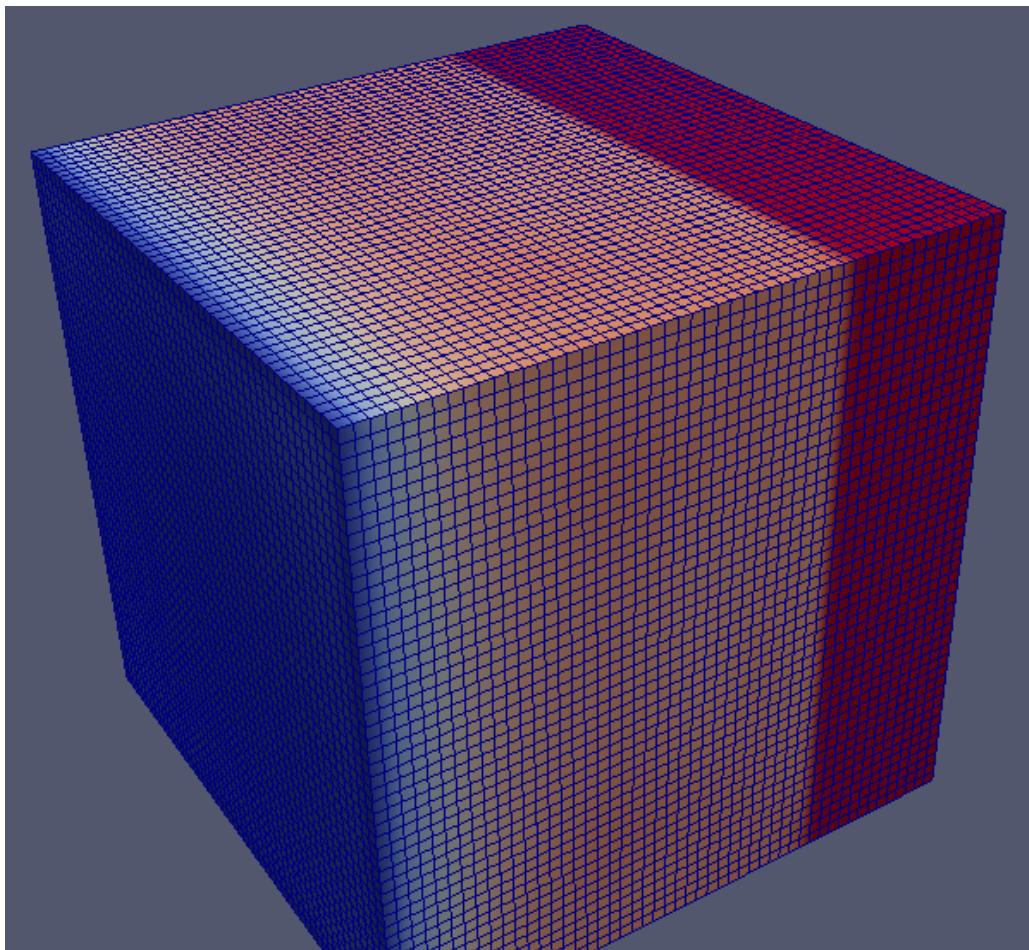
Возможно, данный метод будет полезен для статических расчётов, в которых не важна кратковременная волновая картина и требуется расчёт на существенно больших временах.

4.2 Расчёты в 3D

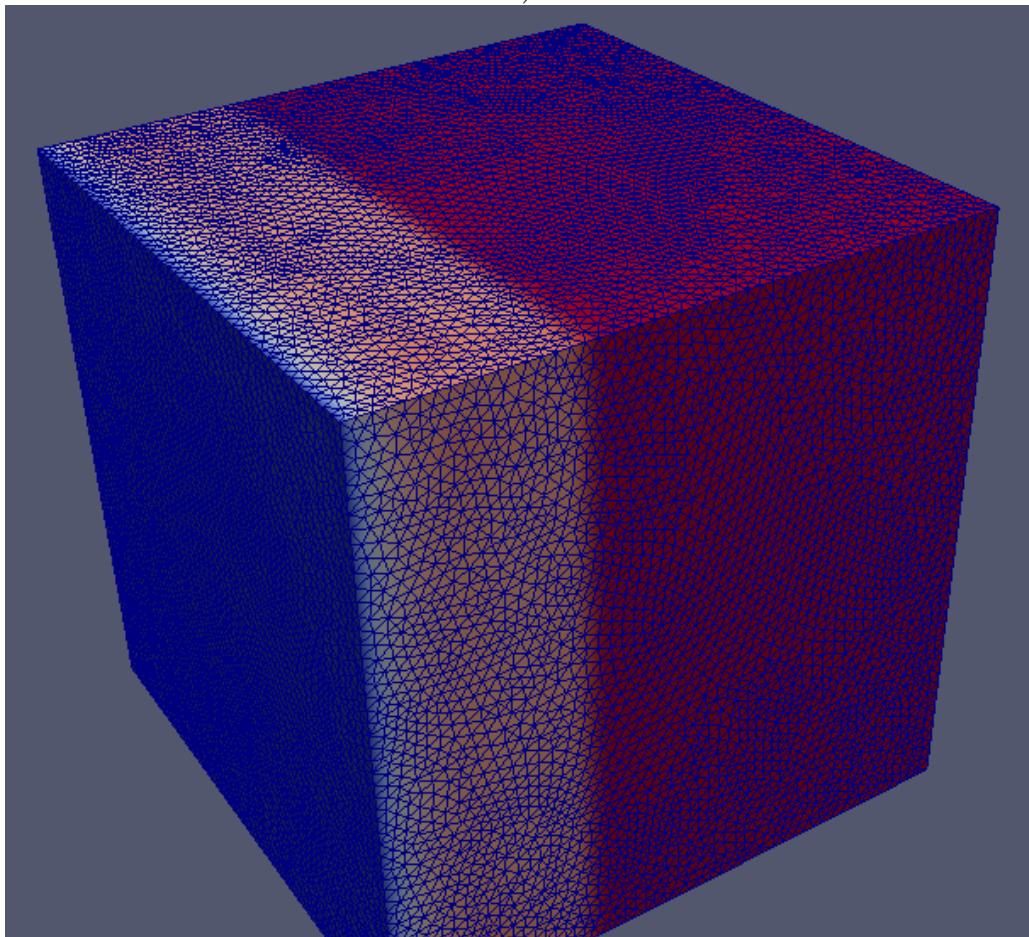
Для трёхмерной модели сплошной среды на основе существующего программного комплекса, поддерживающего расчёт линейно-упругой реологии, был реализован расчёт упругопластической реологии на основе теории пластического течения с критерием текучести Мизеса. Расчёт был проведён на кубической (рис. 9,а) и тетраэдрической сетках (рис. 9,б)

4.2.1 Расчёт бокового удара по телу упругопластической реологии

Смоделирован удар по телу пластической реологии типа металла.



a)



b)

Рис. 9. Вид рассчётной сетки: а) кубическая, б) тетраэдрическая

"Удар" представляет собой граничное условие фиксированного напряжения, превышающего предел текучести материала, конечной или бесконечной длительности по времени. Характерный вид возмущения в 3D можно видеть на рис.9.

На рис.10 показаны волны напряжений (в направлении прямой вдоль удара), возникшие от сильного бокового удара по модельному кубику. Можно видеть быструю волну, распространяющуюся со скоростью звука и по амплитуде равной пределу текучести материала – "упругий предвестник". Затем с меньшей скоростью распространяется пластическая волна.

Из рисунка видны различия решения при расчётах на кубических и тетраэдрических сетках. К преимуществам кубической сетки можно отнести большую быстроту счёта при той же мелкости и меньшее размывание фронтов. Однако для сложных форм тел и начальных возмущений целесообразнее применять тетраэдрическую сетку, которая намного лучше заполняет рассчётную область и не создаёт численной анизотропии решения.

На рис.11 показан двумерный срез куба, по которому нанесён боковой удар конечной длительности. Заметно отрицательное влияние отражённых от границы волн, размывающих интересующее плоское решение.

Более детально результаты удара конечной длительности позволяет рассмотреть одномерный рис.12, на котором видна волна разгрузки (волна Рахматулина), следующая за пластическим возмущением. Амплитуда волны упругой разгрузки, отсчитанная от амплитуды пластической волны, в два раза превышает амплитуду упругого предвестника, что соответствует аналитическому рассмотрению одномерной волны Рахматулина [?].

4.2.2 Расчёт прохождения пластической волны через контакт двух материалов

В рамках расчёта слоистых структур при динамических нагрузках было смоделировано прохождение упругопластической волны через контакт двух тестовых материалов с отличающейся в четыре раза плотностью.

На рис.13 показано в косом срезе испытуемое двухслойное тело.

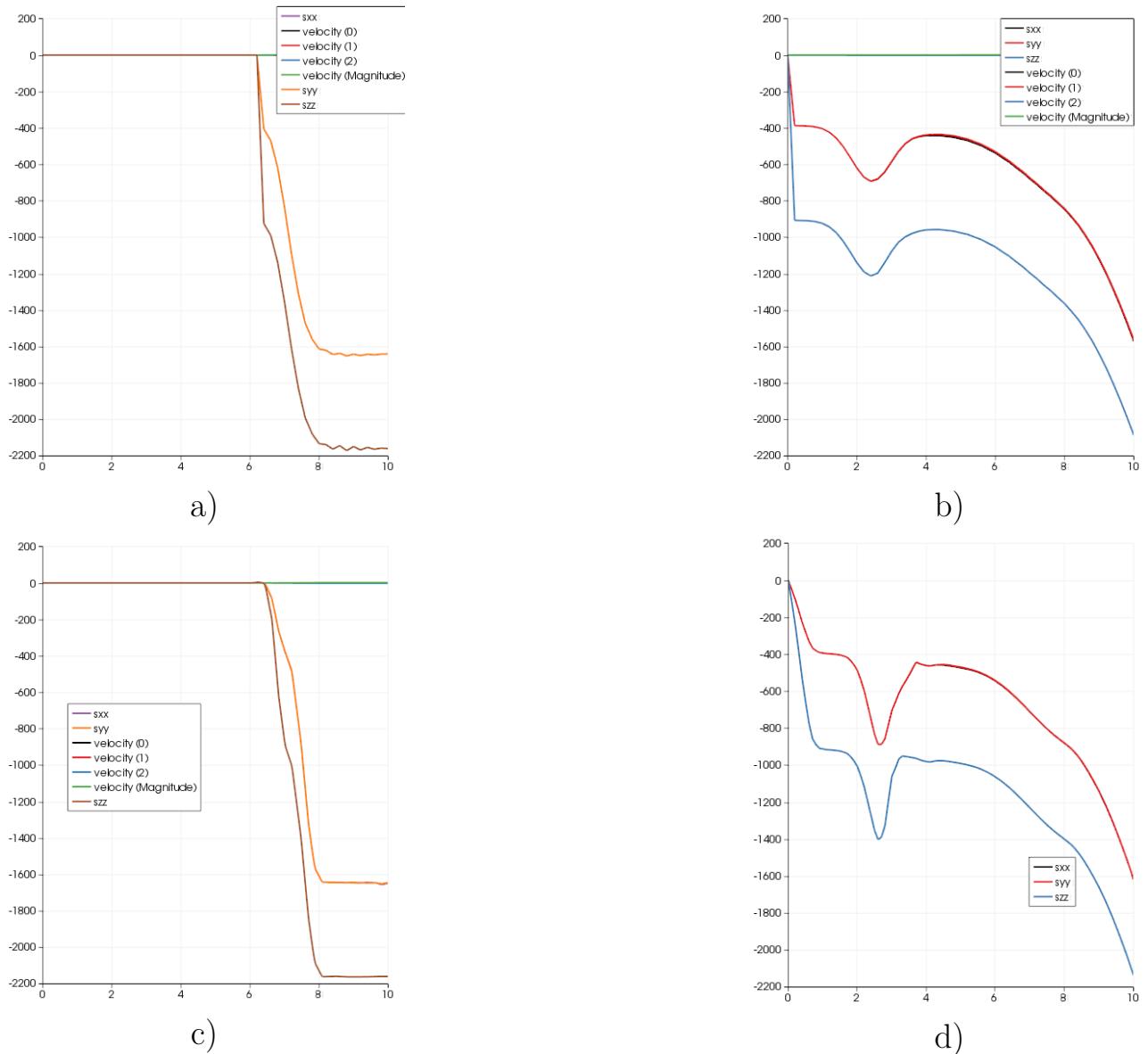


Рис. 10. Профиль волны от бокового удара по стальному кубику. а,б - кубическая сетка, с,д - тетраэдрическая сетки

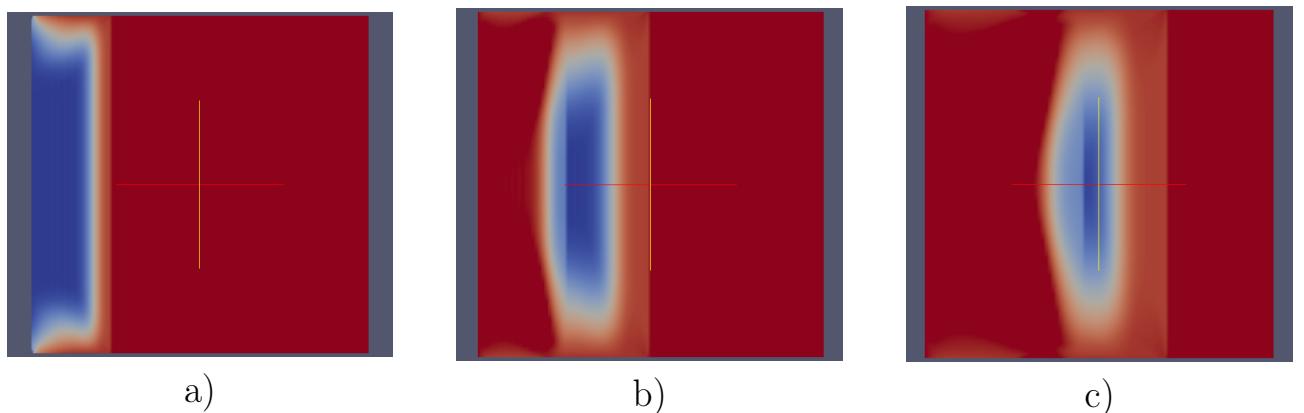


Рис. 11. Профиль волны от бокового удара конечной длительности. а,б,с - последовательные моменты времени

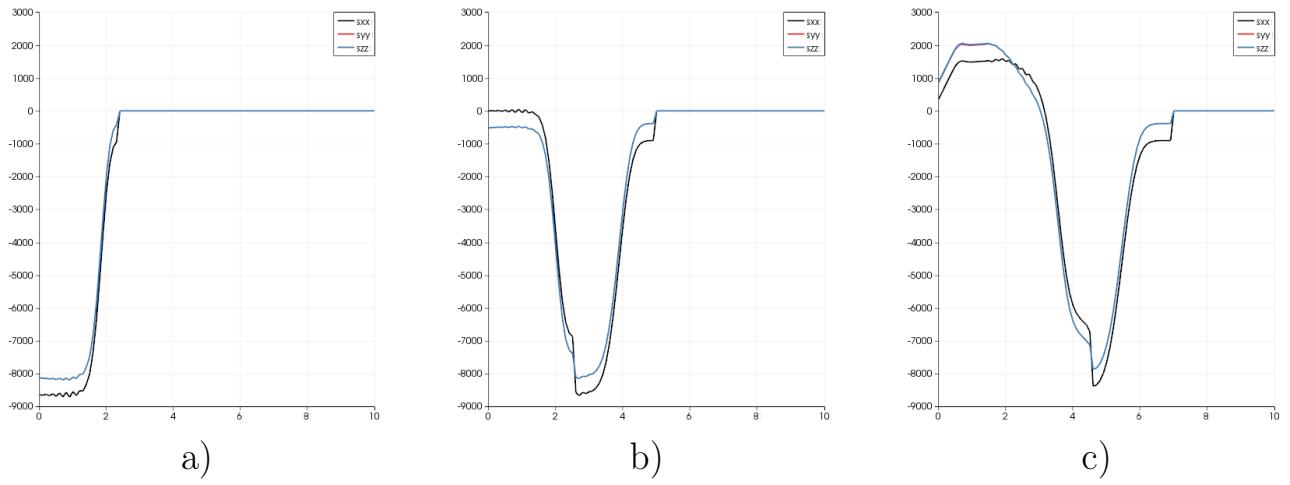


Рис. 12. Профиль волны от бокового удара конечной длительности. Значения напряжений в направлении прямой вдоль удара. а,б,с - последовательные моменты времени

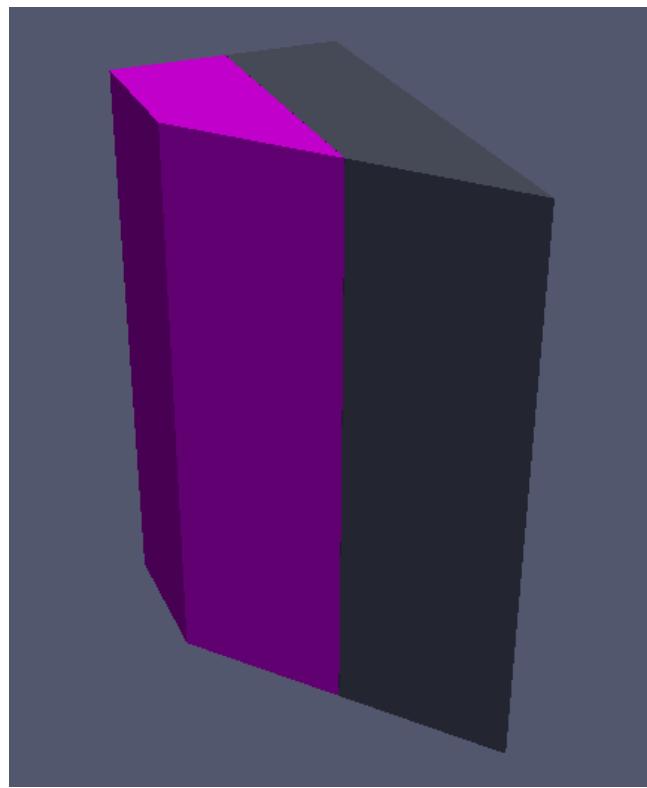
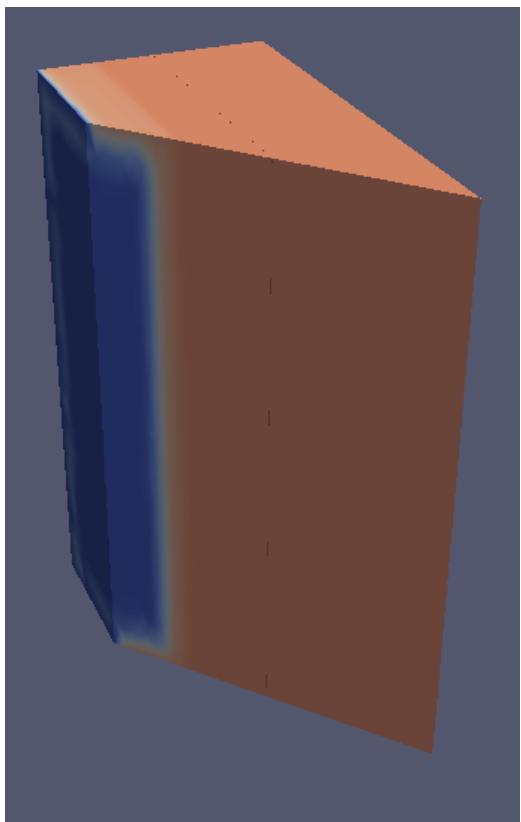


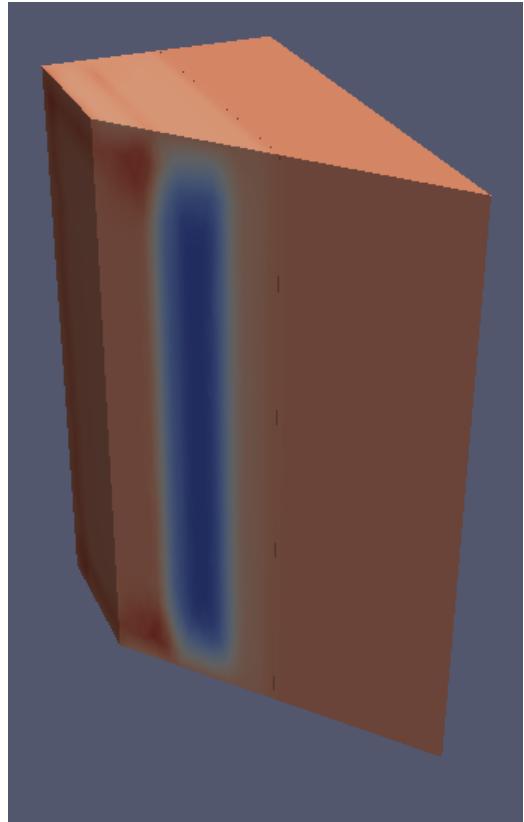
Рис. 13. Косой срез тела, по которому наносится боковой удар. Разными цветами показаны разные материалы

Ниже (рис.14) показан вид возмущения (компонента тензора напряжений в направлении удара σ_{xx}) в трёхмерном пространстве. Синему цвету соответствуют высокие отрицательные напряжения, красному – положительные.

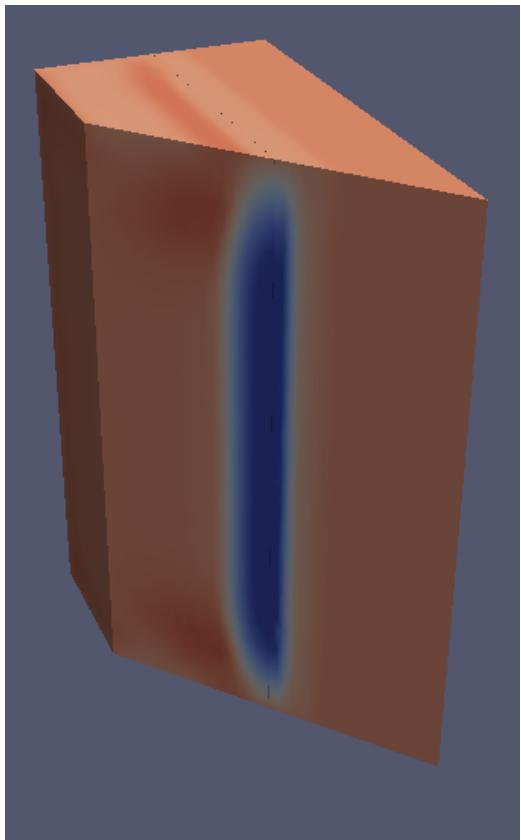
Сравнение решения с учётом пластической реологии с решением в чисто упругой постановке проведено на двумерном срезе вдоль направления удара на рис.15 и на одномерных графиках (рис.16 и 17) напряжений вдоль направления удара.



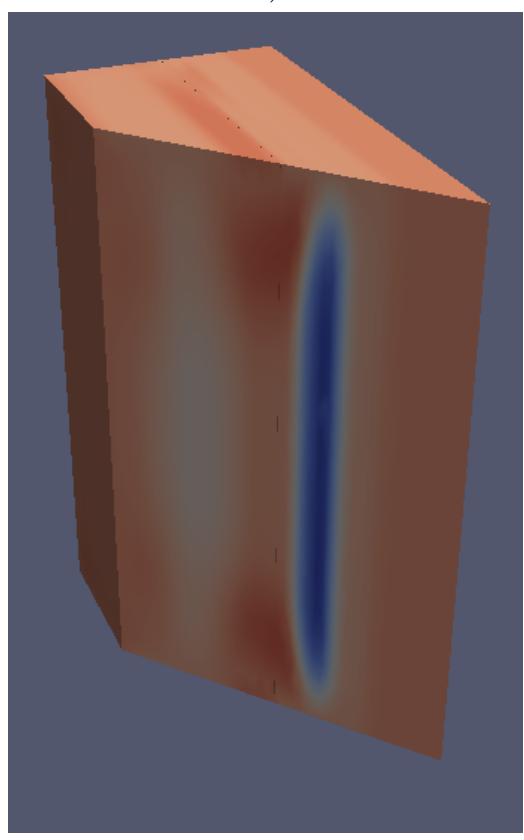
a)



b)



c)



d)

Рис. 14. Прохождение упругопластической волны через контакт (полное слипание) в 3D (цветом показаны значения σ_{xx})

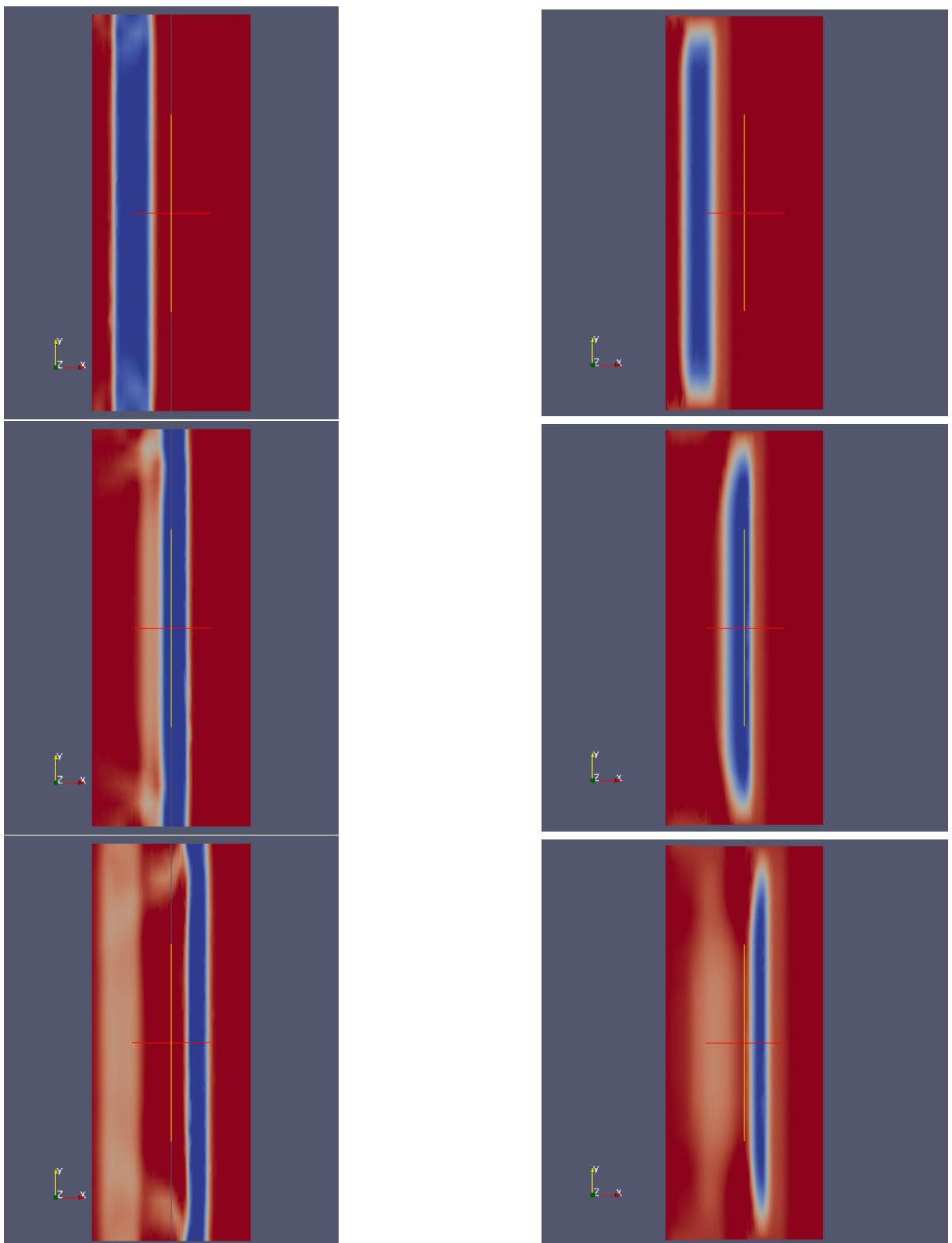


Рис. 15. Сравнение отклика тел с линейно-упругой (слева) и упругопластической (справа) реологией на одинаковое начальное возмущение

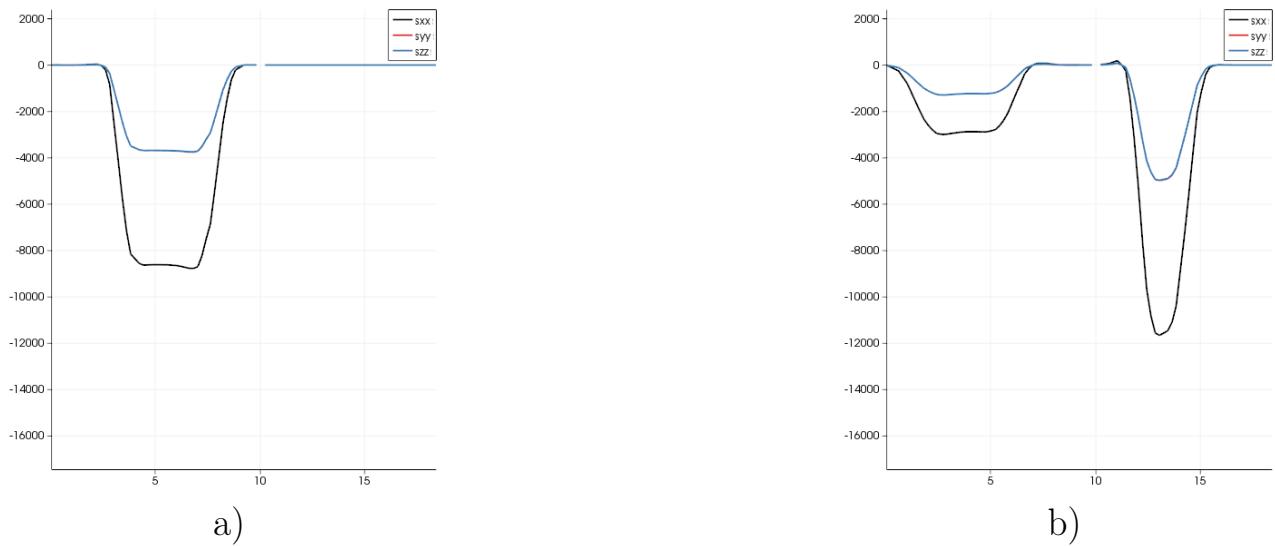


Рис. 16. Прохождение упругой волны через контакт двух материалов: а) до прохождения контакта, б) после

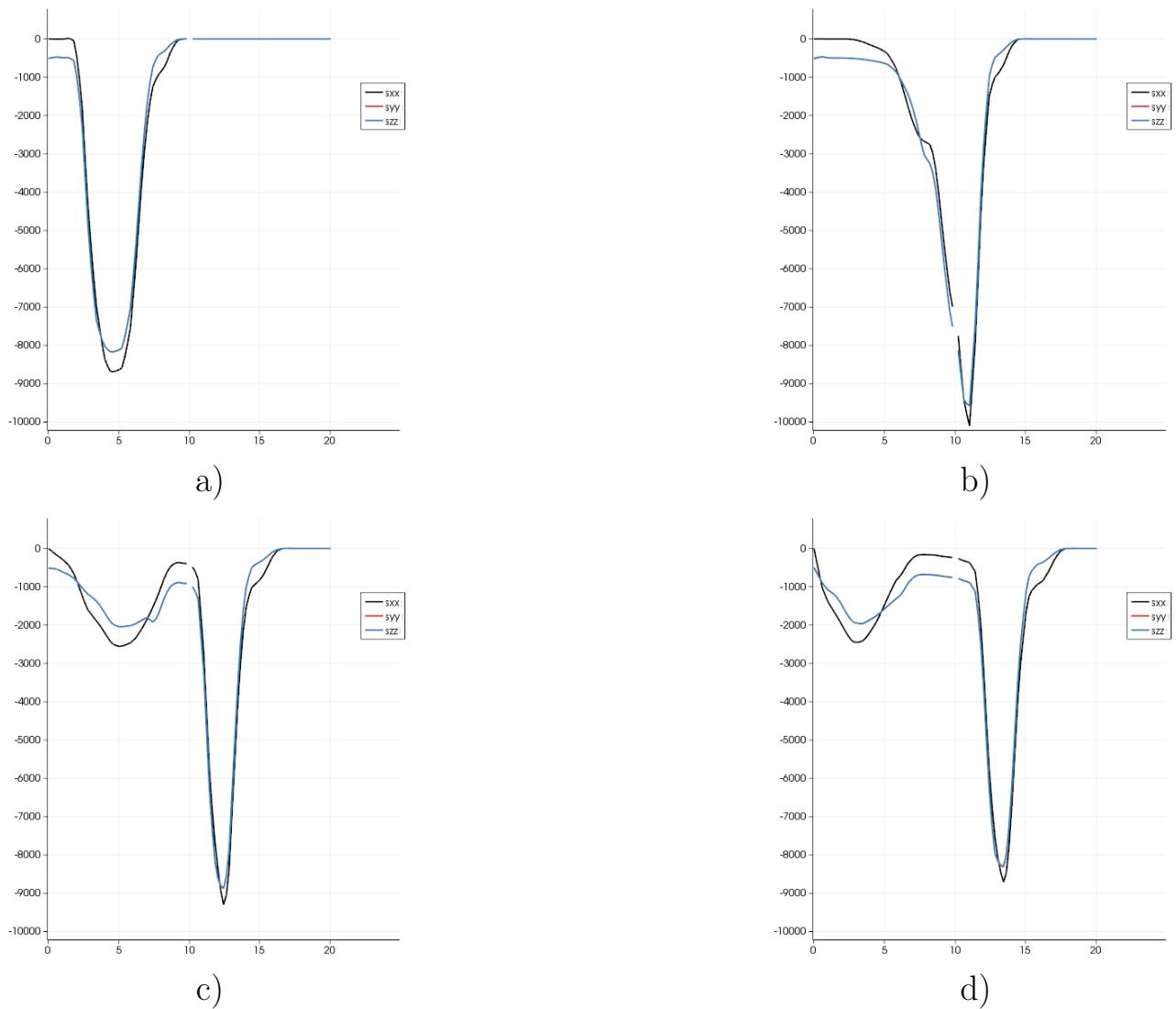


Рис. 17. Прохождение упругопластической волны через контакт двух материалов, последовательные моменты времени

Помимо отличий чисто упругой волны от упругопластической, проявляющихся в наличии у первой упругого предвестника, волны упругой разгрузки и, собственно, пластической волны, имеются отличия, связанные с прохождением контакта.

Амплитуда напряжений прошедшего в более плотный слой упругого предвестника не возрастает, что обусловлено наличием предела текучести, одинакового в обоих материалах. В профиле отражённой волны появляются области, где компоненты напряжений, перпендикулярные направлению распространения, превосходят нормальную компоненту.

Несмотря на простоту используемой модели, в расчётах удалось получить многие известные эффекты для упругопластических материалов.

5 Заключение

Результаты, полученные в результате выполнения дипломного проекта:

- Рассмотрены различные подходы к описанию движения сплошной среды в сочетании с применяемыми к ним численными методами
- Предложен метод моделирования сплошной среды в 1D с учётом движения и деформации тела, в том числе схема второго порядка точности по координате с учётом изменения характеристик среды в пространстве, точная со вторым порядком по времени схема расщепления рассчётного шага на движение рассчётной сетки и перенос возмущения
- На основе данного метода реализован программный комплекс, моделирующий деформируемое твёрдое тело в случае одного пространственного измерения с поддержкой упругой и упругопластической реологии
- Проведено сравнение результатов работы данного программного комплекса с результатами полуаналитического рассчёта на основе принципиально другого подхода к описанию сплошной среды и итерационного метода. Получена сходимость результатов со вторым порядком точности по времени и координате
- Предложен способ моделирования идеально-пластической реологии в 3D на основе правила корректировки Уилкинса
- Данный способ реализован на основе существующего программного комплекса, поддерживающего линейную упругость в 3D
- Полученные результаты на качественном и количественном (в пределах погрешностей методов) совпадают с известными из работ других авторов

Список литературы

- [1] Реслер И., Хардерс Х., Бекер М. Механическое поведение конструкционных материалов. Перевод с немецкого. - Долгопрудный, Издательский дом «Интеллект», 2011, с. 91-115.
- [2] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — М. : Наука, 1970, с. 143.
- [3] Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошное сред. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2008, с. 32, с. 242, с. 271.
- [4] Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9:2 (1969), 373–386.
- [5] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.
- [6] Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 24:5 (1984), 722–739.
- [7] Агапов П.И., Челноков Ф.Б. Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела: Моделирование и обработка информации: М., МФТИ, 2003, 19 - 27.
- [8] Челноков Ф.Б., Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах, Матем. моделирование, 18:6 (2006), 96–108.
- [9] Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Квасов И.Е. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени, Матем. моделирование, 25:2 (2013), 42–52.
- [10] Фаворская А.В. Постановка задачи численного моделирования динамических процессов в сплошной линейно-упругой среде с анизотропией

сеточно-характеристическим методом. // Труды 54-й научной конференции МФТИ: Проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе. — 2011. — Т. 2. — с. 55 – 56.

- [11] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.
- [12] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М. : Интернет-Ун-т информ. технологий, 2006.
- [13] Александров К.С., Продайвода Г.Т. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 354 с.
- [14] Ахмадеев Н.Х., Болотнова Р.Х. Распространение волн напряжений в слоистых средах при ударном нагружении (акустическое приближение) // ПМТФ. 1985. № 1. С. 125-133.
- [15] Olivier Devillers, Sylvain Pion, Monique Teillaud. Walking in a triangulation. RR-4120, INRIA, 2001.
- [16] R. Sibson. A brief description of natural neighbour interpolation. In Vic Barnett, editor, Interpreting Multivariate Data, pages 21–36. John Wiley and Sons, Chichester, 1981.
- [17] Julia Flötotto. 2D and Surface Function Interpolation. In CGAL User and Reference Manual. CGAL Editorial Board, 4.8 edition, 2016.
- [18] Tom Bobach, Georg Umlauf. Natural neighbor interpolation and order of continuity. In GI Lecture Notes in Informatics, Visualization of Large and Unstructured Data Sets. Springer: Heidelberg, 2006; 68–86.
- [19] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, <http://www.cgal.org>

6 Приложение

6.1 Диагонализация матриц из уравнений модели в случае орторомбической анизотропии и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии

В указанном случае матрицы из уравнения (2.7) и их спектральное разложение $\mathbf{A} = \Omega^{-1}\mathbf{L}\Omega$ приведены ниже. Порядок собственных значений в \mathbf{L} и, соответственно, собственных векторов в Ω^{-1} следующий: поперечная волна против оси, поперечная волна вдоль оси, другая поперечная волна против оси, другая поперечная волна вдоль оси, продольная волна против оси, продольная волна вдоль оси, три неподвижных инварианта.

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_x = diag(-\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, 0, 0, 0)$$

$$\Omega_x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{11}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{11}\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{12}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{12}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{11}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{11}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_y = (-\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}, 0, 0, 0)$$

$$\Omega_y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{12}}{\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{12}}{\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{22}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{22}\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{22}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{22}}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{22}\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{22}\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{23}}{c_{22}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_z = (-\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, 0, 0, 0)$$

$$\Omega_z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{33}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{33}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{33}\rho}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{33}\rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{33}}c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{c_{23}}{c_{33}} \end{pmatrix}$$