

# Реализация граничных и контактных условий при использовании сеточно-характеристического метода (СХМ) на неструктурированных расчётных сетках

## 1 Система уравнений

В произвольной  $D$ -мерной области ( $D = 2, 3$ ) решается система уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{A}_D \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_D} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\{x_1, \dots, x_D\}$  – ортонормированный базис,  $\vec{u}$  – вектор неизвестных размерности  $N$ , матрицы  $\mathbf{A}_i$  считаются постоянными. Кроме того, ставятся начальные условия – значения  $\vec{u}$  во всей области решения в нулевой момент времени и граничные условия – некоторое количество условий на  $\vec{u}$  на границе области решения в любой момент времени.

Конкретный вид матриц и физический смысл уравнений можно не уточнять. Единственное условие – матрицы должны быть диагонализуемы с полным набором собственных векторов, и для каждого ненулевого собственного значения должно быть равное по модулю с противоположным знаком. Эти требования означают, фактически, то, что система уравнений описывает некоторый волновой процесс. Количество независимых скалярных граничных условий на  $\vec{u}$  равно количеству положительных (отрицательных) собственных значений матрицы  $\mathbf{A}_i$ , которое в дальнейшем обозначим за  $M$ .

## 2 Численный метод

В наиболее общей постановке и с иллюстрацией множества приложений СХМ изложен его создателями в [1]. К двумерным волновым уравнениям механики упругого тела СХМ впервые применён в [2]. Основная идея реализации метода на неструктурированных расчётных сетках, в том числе граничных и контактных условий предложена в [1] и в [3].

## 2.1 Неструктурированная расчётная сетка

Для возможности применения метода к областям произвольной формы используются треугольные и тетраэдральные неструктурированные расчётные сетки, для построения которых использовались в основном библиотеки CGAL [4] и Ani3D [5]. Значения искомой функции хранятся в узлах сетки.

Подразумевается, что внутри каждой области интегрирования матрицы  $\mathbf{A}_i$  постоянны. Для моделирования неоднородностей явно выделяются дополнительные области, между которыми рассчитывается контакт.

Стоит отметить, что метод реализации граничных и контактных условий не закладывается на топологию ячейки сетки, то есть может быть применён, к примеру, и к октаэдрическим сеткам.

## 2.2 Расщепление по направлениям

Поскольку СХМ в чистом виде рассматривает только одномерные уравнения, для численного решения (1.1) необходимо перейти к решению одномерных систем уравнений – так называемое расщепление по направлениям:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1 \dots D. \quad (2.1)$$

Здесь под  $\{\xi_i\}$  подразумевается произвольный ортонормированный базис, не обязательно совпадающий с  $\{x_i\}$  (вид матриц  $\mathbf{A}_i$ , конечно, зависит от базиса).

В данной работе используется предложенная в [3] экономичная по памяти и вычислительным ресурсам схема расщепления, обладающая при этом близким ко второму порядку точности по времени. Полный шаг по времени  $\tau$  решения многомерного уравнения (1.1) состоит из  $D$  последовательных ступеней,  $i$ -я ступень заключается в выполнении шага по времени для  $i$ -го уравнения (2.1) на то же время  $\tau$ . В качестве значений старого временного слоя для каждой последующей ступени берётся результат выполнения предыдущей, а результат выполнения последней ступени является решением многомерного уравнения на новом временном слое.

## 2.3 Решение одномерного уравнения

По условию матрицы  $\mathbf{A}_i$  диагонализуемы с полным набором собственных векторов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{U}^{-1}$  – матрица собственных векторов,  $\mathbf{\Lambda}$  – диагональная матрица собственных значений,  $\mathbf{U}$  – матрица собственных строк. Умножив (2.1) слева на  $\mathbf{U}$ , внося постоянную матрицу  $\mathbf{U}$  под знак дифференциала и обозначая  $\vec{r} = \mathbf{U} \vec{u}$  – инварианты Римана, получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

В новых переменных система распалась на независимые уравнения переноса. Их численное решение заключается в интерполяции значения функции на предыдущем временном слое в точке, где характеристика из узла на новом временном слое пересекает предыдущий. После переноса инвариантов с предыдущего временного слоя на новый производится обратная замена переменных  $\vec{u} = \mathbf{U}^{-1} \vec{r}$ . Сказанное проиллюстрировано на рисунке 1.

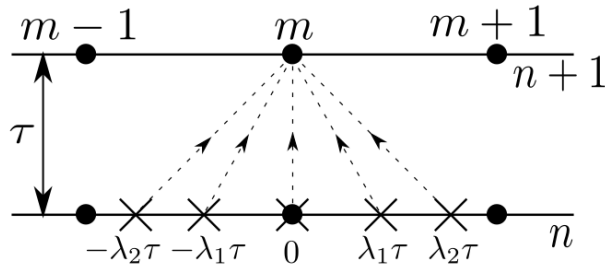


Рис. 1. Основная идея сеточно-характеристического метода

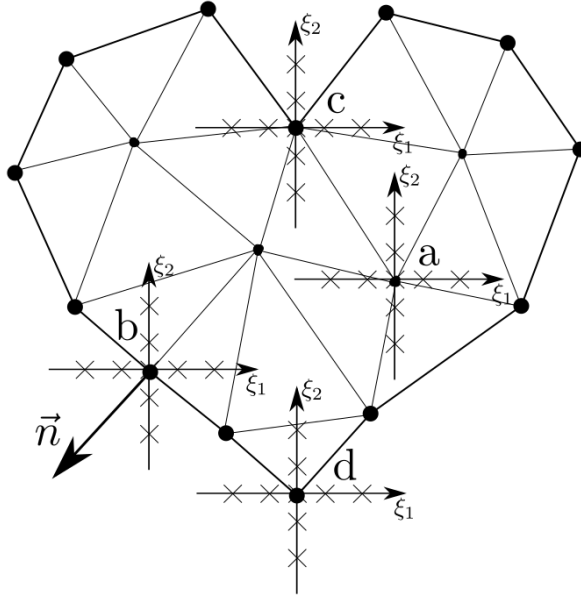


Рис. 2. Иллюстрация сеточно-характеристического метода на треугольной расчётной сетке

## 2.4 Общая схема метода на границе области интегрирования

Описанный выше алгоритм пригоден для внутренних узлов, когда все выброшенные из узла характеристики пересекают предыдущий временной слой внутри области интегрирования. Для граничных и контактных узлов, когда часть характеристик “выпадает” за границу (назовём их внешними характеристиками), применяется его модификация, называемая коррекцией внешними волнами (то есть волнами, соответствующими инвариантам Римана, характеристики которых оказались внешними).

Запись произвольного линейного граничного условия для произвольной модели:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}. \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – матрица размерности  $M \times N$ ,  $\vec{b}$  – вектор размерности  $M$ , определяющие собой конкретный вид граничного условия.

На первом этапе делается расчёт граничных узлов по алгоритму для внутренних, при этом все инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам, приравниваются к нулю. Получается  $\vec{u}^{inner}$ . Затем выполняется граничная коррекция – добавление такой линейной комбинации внешних

волн, которая обеспечит выполнение граничного условия (2.4):

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{\Omega}$  – матрица, в столбцах которой стоят собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующие внешним характеристикам,  $\vec{\alpha}$  – коэффициенты в линейной комбинации, которые нужно определить.

Для определения коэффициентов  $\vec{\alpha}$  необходимо решить СЛАУ с матрицей  $\mathbf{B}\mathbf{\Omega}$  размерностью  $M \times M$ :

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}^{inner}. \quad (2.6)$$

После определения коэффициентов линейной комбинации производится собственно коррекция:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} \quad (2.7)$$

## 2.5 Общая схема метода на контакте двух областей интегрирования

Запись произвольного линейного контактного условия для произвольных моделей:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B, \\ \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь обозначения те же, что и в (2.4).

Все действия аналогичны расчёту граничных узлов. Сначала делается расчёт контактных узлов в обоих телах по алгоритму для внутренних. Получается  $\vec{u}_A^{inner}$  и  $\vec{u}_B^{inner}$ . Затем выполняется контактная коррекция – добавление в обоих узлах такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение контактного условия (2.8).

Распишем сообразно сказанному условие (2.8):

$$\mathbf{B}_{1A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{1B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}_{2A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{2B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B). \quad (2.10)$$

Раскроем скобки:

$$(\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{\alpha}_A = \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B \quad (2.11)$$

Сделаем переобозначения:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A)^{-1}, \quad (2.12)$$

$$\vec{p} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner}), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B). \quad (2.14)$$

Тогда:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{p} + \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B. \quad (2.15)$$

Подставляем в (2.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{p} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B = \\ = \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B^{inner} + (\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Получаем СЛАУ на  $\vec{\alpha}_B$ :

$$\begin{aligned} \left[ (\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) - (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \mathbf{Q} \right] \cdot \vec{\alpha}_B = \\ = (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{p} + \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A^{inner} - \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B^{inner}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решив систему на  $\vec{\alpha}_B$ , находим  $\vec{\alpha}_A$  из (2.15).

После чего производим собственно коррекцию:

$$\vec{u}_A^{n+1} = \vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A, \quad (2.18)$$

$$\vec{u}_B^{n+1} = \vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B \quad (2.19)$$

Для проведения изложенных вычислений необходимо сначала один раз обратить матрицу размерностью  $M \times M$  в (2.12), а затем решить СЛАУ (2.17) с матрицей той же размерности.

## 2.6 Выврождение матрицы СЛАУ граничного и контактного корректора

### 2.6.1 необходимость согласованности ну и гу

===== Плохие граничные , контактные и мультиконтактные случаи, принципиальное ограничение метода

## 3 Результаты

### Список литературы

- [1] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.
- [2] Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 24:5 (1984), 722–739.
- [3] Челноков Ф.Б., Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах, Матем. моделирование, 18:6 (2006), 96–108.
- [4] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, <http://www.cgal.org>
- [5] 3D generator of anisotropic meshes <http://sourceforge.net/projects/ani3d>