

Вырождение матрицы граничного корректора СХМ в зависимости от угла между нормалью к границе и направлением расчёта

1 Упругость 3D – фиксированная внешняя сила

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T \quad (1.1)$$

Запись произвольного линейного граничного условия:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}. \quad (1.2)$$

Допустим, расчёт производится вдоль оси x . Это не уменьшает общности, так как направление нормали к границе \vec{n} выбирается произвольно:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \quad (1.3)$$

Возьмём три внешних инварианта – три однонаправленных волны вдоль оси x :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{c_2} \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

здесь первый столбец – р-волна, далее – две s-волны, λ, μ – параметры Ламе, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн.

Рассматриваем граничное условие фиксированной силы, приложенной к

границе:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}. \quad (1.5)$$

Запись $\sigma \cdot \vec{n}$ даёт выражение для силы, приложенной к полупространству с внешней нормалью \vec{n} , в глобальном базисе. Обычно в программе расчёт делается в локальном базисе, связанном с границей, однако это не меняет сути дела (проверено численно в том числе), поэтому далее для упрощения формул будем писать в глобальном базисе.

Для (1.5) уравнение граничного условия (1.2) сводится к $\vec{b} = \vec{f}$ и

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

После внутреннего расчёта – учёта волн, пришедших изнутри – выполняется граничная коррекция. Идея: добавление такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение граничного условия.

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}_{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}. \quad (1.7)$$

Как видно, для определения коэффициентов в линейной комбинации необходимо решить систему:

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}_{inner}. \quad (1.8)$$

Таким образом, нас интересует обусловленность именно матрицы $\mathbf{B}\mathbf{\Omega}$ размером $D \times D$, где D – размерность пространства.

После перемножения получаем:

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c_1 c_2} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)n_x c_2 & \mu n_y c_1 & \mu n_z c_1 \\ \lambda n_y c_2 & \mu n_x c_1 & 0 \\ \lambda n_z c_2 & 0 & \mu n_x c_1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}) = \frac{\mu^2}{c_1 c_2^2} \cdot n_x \cdot (2(\lambda + \mu)n_x^2 - \lambda) \quad (1.10)$$

Из условия $\det(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}) = 0$ получаем:

$$\begin{cases} n_x = 0 \\ n_x^2 = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \equiv \nu < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1.11)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

2 Упругость 2D – фиксированная внешняя сила

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})^T \quad (2.1)$$

Два внешних инварианта – р- и s-волны вдоль оси x :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_1} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_2} \\ \frac{\lambda}{c_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_x & n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c_1 c_2} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)n_x c_2 & \mu n_y c_1 \\ \lambda n_y c_2 & \mu n_x c_1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}) = \frac{\mu}{c_1 c_2} \cdot (2(\lambda + \mu)n_x^2 - \lambda) \quad (2.5)$$

Из условия $\det(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}) = 0$ получаем:

$$n_x^2 = \nu. \quad (2.6)$$

3 Упругость – фиксированная скорость на границе

В глобальном базисе:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

В локальном базисе $\{\vec{m}, \vec{n}\}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_x & m_y & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Как видно из (2.2), в случае фиксированной скорости первые D столбцов матрицы \mathbf{B} , которые сами являются векторами локального или глобального базиса, умножаются на плюс-минус единичную матрицу, поэтому в данном случае всегда

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}) = \pm 1. \quad (3.3)$$

4 Акустика

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Независимо от размерности только один внешний инвариант – р-волна вдоль направления \vec{l} :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \vec{l} \\ c\rho \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

Матрица для фиксированного давления:

$$\mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_p \mathbf{\Omega} = c\rho > 0. \quad (4.3)$$

Матрица для фиксированной нормальной скорости:

$$\mathbf{B}_v = \begin{pmatrix} \vec{n}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_v \boldsymbol{\Omega} = (\vec{n} \cdot \vec{l}), \quad (4.4)$$

что в терминах выше означает $n_x = 0$.

5 Заключение

Как видно, наивное представление о том, что матрица граничного корректора вырождается только при перпендикулярности нормали и направления расчёта, не соответствует действительности. Более того, она может быть и не вырожденной при таком условии:

Модель	Фикс. сила	Фикс. скорость
Упругость 3D	$\begin{cases} n_x = 0 \\ n_x^2 = \nu \end{cases}$	-
Упругость 2D	$n_x^2 = \nu$	-
Акустика	-	$n_x = 0$