Описание метода расчёта граничных и контактных узлов в СХМ на неструктурированной сетке

1 Общая схема метода на границе

Запись произвольного линейного граничного условия для произвольной модели:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}. \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор решения размерности N, $\mathbf{B}$ – матрица размерности $M \times N$, где M – количество дополнительных скалярных условий, которое даёт граничное условие. В “хороших” в смысле геометрии областей случаях оно совпадает с количеством внешних характеристик.

Сначала делается расчёт граничных узлов, как внутренних – все инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам, приравниваются к нулю. Получаем $\vec{u}^{inner}$. Затем выполняется граничная коррекция – добавление такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение граничного условия (1.1):

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – матрица, в столбцах которой стоят инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам (“волнам, пришедшим снаружи”), $\vec{\alpha}$ – коэффициенты в линейной комбинации, которые нужно определить.

Для определения коэффициентов $\vec{\alpha}$ необходимо решить СЛАУ с матрицей $\mathbf{B\Omega}$ размерностью $M \times M$:

$$\mathbf{B\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}^{inner}. \tag{1.3}$$

После определения коэффициентов линейной комбинации производится собственно коррекция:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} \tag{1.4}$$

Для модели акустики независимо от размерности пространства $M = 1$, для модели упругости в пространстве размерности D выполняется $M = D$. Таким образом максимальная – для упругости в 3D – размерность матрицы СЛАУ равна трём. Поэтому для решения СЛАУ используется просто правило Крамера.

Отметим, что вид конкретного граничного условия нигде выше не использовался, он определяется исключительно $\mathbf{B}$ и $\vec{b}$ в (1.1). Так же и в программе алгоритм расчёта граничных узлов реализован для произвольного граничного условия, а выбор конкретного условия – это просто выбор $\mathbf{B}$ и $\vec{b}$.

2 Виды граничных условий

2.1 Фиксированное напряжение на границе, упругость

Условие фиксированной силы $\vec{f}$, приложенной к полупространству с внешней нормалью $\vec{n}$:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}. \tag{2.1}$$

В программе значения искомой функции хранятся в глобальном базисе. То есть тензор напряжений σ известен в глобальном базисе. Если значение $\vec{f}$ также указано в глобальном базисе, то (1.1) запишется в виде: $\vec{b} = \vec{f}$,

$$\begin{gathered}
\mathbf{B}_{3D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}, \\
\mathbf{B}_{2D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_x & n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь предполагается, что искомый вектор решения:

$$\vec{u}_{3D} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T, \tag{2.3}$$

$$\vec{u}_{2D} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})^T, \tag{2.4}$$

а n_x, n_y, n_z – компоненты нормали в глобальном базисе.

Эти формулы для глобального базиса будут необходимы ниже для реализации контактных условий. Граничные же условия обычно ставятся в локальном базисе, связанном с границей (нормальные и касательные напряжения). В этом случае нужно или компоненты вектора силы перевести из локального базиса в глобальный (вариант 1), или тензор напряжений перевести в локальный базис (вариант 2). И нормаль, естественно, тоже должна быть взята в том базисе, в котором производится запись.

Пусть $\mathbf{S}$ – матрица перехода из локального “l” базиса в глобальный “g”:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \vec{l_1} & \vec{l_2} & \vec{l_3} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $\vec{l_i}$ – вектора базиса “l”, записанные в базисе “g”. Тогда вектор силы преобразуется по правилу преобразования векторов, а тензор напряжения по правилу преобразования тензоров второго ранга:

$$\vec{f_g} = \mathbf{S}\vec{f_l}, \tag{2.6}$$

$$\sigma_l = \mathbf{S}^{-1}\sigma_g\mathbf{S}. \tag{2.7}$$

Вариант 1 – начинаем от глобального базиса:

$$\sigma_g \cdot \vec{n}_g = \vec{f_g} = \mathbf{S}\vec{f_l} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{S}^{-1}\sigma_g \cdot \vec{n}_g = \vec{f_l}. \tag{2.9}$$

Вариант 2 – от локального:

$$\sigma_l \cdot \vec{n}_l = \vec{f_l}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{S}^{-1}\sigma_g\mathbf{S} \cdot \vec{n}_l = \vec{f_l}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{S}^{-1}\sigma_g \cdot \vec{n}_g = \vec{f_l}. \tag{2.12}$$

Что закономерно, в обоих вариантах приходим к одинаковому результату. Поскольку в нашем случае переход между локальным и глобальным базисом делается простым поворотом, матрица $\mathbf{S}$ – ортогональная, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Итак, приходим к выражению:

$$\mathbf{S}^T\sigma_g \cdot \vec{n}_g = \vec{f_l}. \tag{2.13}$$

Если перейти к индексной записи:

$$(S_{ki}n_{g_j})\sigma_{g_{kj}} = f_{l_i}. \tag{2.14}$$

Теперь легко получить её в виде, необходимом для (1.1).

2.2 Фиксированная скорость на границе, упругость

В глобальном базисе $\vec{b} = \vec{v}_g$,

$$\mathbf{B}_{2D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

В локальном базисе с базисными векторами $\{\vec{m}, \vec{n}\}$ имеем $\vec{b} = \vec{v}_l$,

$$\mathbf{B}_{2D} = \begin{pmatrix} m_x & m_y & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

В 3D аналогично.

2.3 Акустика

Искомый вектор решения:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

Для фиксированного давления p_{fix} имеем $\vec{b} = p_{fix}$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Для фиксированной нормальной скорости v_{fix} имеем $\vec{b} = v_{fix}$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \vec{n}^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

3 Общая схема метода на контакте

Сразу оговоримся, что речь идёт о контакте двух тел. При этом для сложной неоднородной геометрии контакт в одной точке трёх и более тел – вполне нормальное явление. В данный момент в программе такие случаи не обрабатываются, расчёт мультиконтактных узлов не производится вообще, все значения в них выставляются в ноль. TODO – а ведь это тоже может быть источником ряби и неустойчивости, ведь для интерполяции соседних точек они всё равно используются.

Запись произвольного линейного контактного условия для произвольных моделей (у каждого тела может быть своя модель):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B, \\ \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь обозначения те же, что и в (1.1). Поскольку контактируют два тела, уравнений тоже два, и они связаны между собой.

Все действия аналогичны расчёту граничных узлов. Сначала делается расчёт контактных узлов, как внутренних – все инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам, приравниваются к нулю. Получаем $\vec{u}_A^{inner}$ и $\vec{u}_B^{inner}$. Затем выполняется контактная коррекция – добавление в обоих узлах такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение контактного условия (3.1). Распишем сообразно сказанному условие (3.1):

$$\mathbf{B}_{1A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{1B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{B}_{2A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{2B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B). \tag{3.3}$$

Раскроем скобки:

$$(\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{\alpha}_A = \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B \tag{3.4}$$

Сделаем переобозначения:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A)^{-1}, \tag{3.5}$$

$$\vec{p} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner}), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B). \tag{3.7}$$

Тогда:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{p} + \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B. \tag{3.8}$$

Подставляем в (3.3):

$$\mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{p} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B = \\ = \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B^{inner} + (\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B. \tag{3.9}$$

Получаем СЛАУ на $\vec{\alpha}_B$:

$$\left[(\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) - (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \mathbf{Q}\right] \cdot \vec{\alpha}_B = \\ = (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{p} + \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A^{inner} - \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B^{inner}. \tag{3.10}$$

Решив систему на $\vec{\alpha}_B$, находим $\vec{\alpha}_A$ из (3.8).

После чего производим собственно коррекцию:

$$\vec{u}_A^{n+1} = \vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A, \tag{3.11}$$

$$\vec{u}_B^{n+1} = \vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B \tag{3.12}$$

Для проведения изложенных вычислений необходимо сначала один раз обратить матрицу размерностью $M \times M$ в (3.5), а затем решить СЛАУ (3.10) с матрицей той же размерности. Здесь M – количество дополнительных скалярных условий, которое даёт каждая из строк в (3.1). Для модели акустики независимо от размерности пространства $M = 1$, для модели упругости в пространстве размерности D выполняется $M = D$. Таким образом максимальная – для упругости в 3D – размерность матрицы СЛАУ равна трём. Это даёт возможность, как и в методе расчёта граничных узлов, использовать для обращения матрицы и решения системы явные аналитические формулы.

Отметим, что вид конкретного контактного условия нигде выше не использовался, он определяется исключительно $\mathbf{B}_{1A}$, $\mathbf{B}_{1B}$, $\mathbf{B}_{2A}$ и $\mathbf{B}_{2B}$ в (3.1). Так же и в программе алгоритм расчёта контактных узлов реализован для произвольного контактного условия, а выбор конкретного условия – это просто выбор $\mathbf{B}_{1A}$, $\mathbf{B}_{1B}$, $\mathbf{B}_{2A}$ и $\mathbf{B}_{2B}$.

4 Виды контактных условий

Рассмотрим для примера только два вида контактных условий: контакт двух упругих тел с полным слипанием и скольжение двух тел, подчиняющихся модели акустики.

4.1 Полное слипание на контакте, упругость-упругость

Полное слипание двух упругих тел означает равенство скоростей в точке контакта:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \tag{4.1}$$

и равенство сил, действующих на контактную поверхность:

$$\sigma_A \cdot \vec{n} = \sigma_B \cdot \vec{n}, \tag{4.2}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности контакта.

Здесь все формулы записываются в глобальном базисе. Это означает, что в качестве $\mathbf{B}_{1A}$ и $\mathbf{B}_{1B}$ нужно взять матрицы (2.15), а в качестве $\mathbf{B}_{2A}$ и $\mathbf{B}_{2B}$ – матрицы (2.2)

4.2 Скольжение на контакте, акустика-акустика

Скольжение двух тел в модели акустики означает равенство компонент скорости вдоль направления контакта:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{n} = \vec{v}_B \cdot \vec{n} \tag{4.3}$$

и равенство давлений:

$$p_A = p_B. \tag{4.4}$$

Это означает, что в качестве $\mathbf{B}_{1A}$ и $\mathbf{B}_{1B}$ нужно взять матрицы (2.19), а в качестве $\mathbf{B}_{2A}$ и $\mathbf{B}_{2B}$ – матрицы (2.18).