

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОФИЗИКИ И КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
(Специализация «Компьютерное моделирование
в механике, биомеханике и физиологии»)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ
ИЗДЕЛИЙ ИЗ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Магистерская диссертация

студента 031 группы

Казакова Александра Олеговича

Научный руководитель

Васюков Алексей Викторович, к.ф.-м.н.

г.Долгопрудный

2016

Содержание

Введение	3
1 Обзор существующих работ по данной тематике	5
2 Уравнения механики линейно-упругого тела	6
2.1 Общий вид уравнений	6
2.2 Случай изотропного линейно-упругого тела	6
2.3 Случай произвольно анизотропного линейно-упругого тела	8
2.4 Отдельные виды анизотропии	11
2.4.1 Изотропный случай как подвид анизотропного	11
2.4.2 Орторомбическая анизотропия	11
2.4.3 Трансверсально-изотропное тело	11
2.5 Спектральное разложение матриц из уравнения	12
2.6 Преобразование тензора упругих постоянных при повороте	13
3 Численный метод	15
3.1 Общая идея сеточно-характеристического метода	15
3.1.1 Расщепление по направлениям	15
3.1.2 Сеточно-характеристический метод в одномерном случае	16
3.1.3 Расчёт граничных узлов	18
3.1.4 Расчёт внутренних узлов с внешними характеристиками	19
3.1.5 Расчёт граничных узлов и узлов с внешними характеристиками на структурированной расчётной сетке	20
3.2 Интерполяция в задачах сеточно-характеристического метода	21
3.2.1 Общие замечания	21
3.2.2 Интерполяция на структурированной расчётной сетке	22
3.2.3 Интерполяция на неструктурированной расчётной сетке	23
3.2.4 Численное дифференцирование на неструктурированной расчётной сетке	27
3.3 Задача поиска ячейки сетки, содержащей точку пересечения характеристики с предыдущим временным слоем	28
4 Полученные результаты	32
4.1 Расчёты в	32
4.1.1 Линейная упругость	32

5	Заключение	33
	Литература	34
6	Приложение	36
6.1	Диагонализация матриц из уравнений модели в случае орто- ромбической анизотропии и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии	36

Введение

В последнее время всё более широкое распространение в различных областях науки и техники получает применение композиционных материалов. Из них изготавливается спортивное и медицинское оборудование, детали двигателей, обшивка и силовые конструкции корпусов самолётов и космических аппаратов, бронежилеты и элементы брони военной техники, детали и кузова автомобилей.

Композиционный материал - неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов с чёткой границей раздела между ними. Правильное комбинирование нескольких элементов, каждый из которых обладает неким выдающимся качеством, позволяет получить материал, совмещающий эти свойства или близкий к этому, а также, возможно, имеющий новые интересные свойства.

К примеру, кевларовые нити в несколько раз превосходят сталь по прочности на разрыв и при этом намного легче. Изготовленная из них пластина не только сохраняет прочностные свойства кевлара и его лёгкость, но и обладает повышенной трещиностойкостью вследствие наличия границ раздела между нитями и матрицей [1].

Интенсивное использование материалов приводит к их износу и выходу из строя выполненных из них конструкций. Как правило, серьёзные разрушения происходят не внезапно, им предшествует накопление и рост дефектов внутри материала. Однако очень часто обнаружить такие дефекты невозможно без применения специальных средств.

Неразрушающий контроль - проверка надёжности основных рабочих параметров объекта или отдельных его элементов, не требующий выведения объекта из работы либо его демонтажа. Существует множество методов, среди которых акустические, тепловые, радиационные, радиоволновые, проникающими веществами и другие.

Акустический, он же, в зависимости от частоты, ультразвуковой способ основан на регистрации и анализе параметров упругих волн в объекте контроля. Выделяют пассивный, при котором анализируются существующие в образце шумы, и активный, основанный на измерении интенсивности пропускаемого или отражаемого сигнала.

Большинство существующих методов анализа показаний прибора акустического неразрушающего контроля - ультразвукового дефектоскопа - осно-

ываается на так называемом лучевом приближении, аналогичном геометрической оптике. Во многих случаях это даёт необходимый результат. Однако в сложных случаях, связанных с анизотропными и композиционными материалами и множественными дефектами, результат не всегда удовлетворителен.

В связи с этим предлагается провести более глубокий анализ волновых процессов, происходящих при акустическом неразрушающем контроле, проведя прямое численное моделирование этого процесса в рамках модели механики деформируемого твёрдого тела. Сеточно-характеристический численный метод, напрямую учитывающий волновые свойства уравнений математической модели, подходит для этого как нельзя лучше.

При распространении акустических волн в среде деформации пренебрежимо малы. Из этого следует два факта. Во-первых, для математического описания задачи подходит линейная теория упругости. Во-вторых, расчётная сетка численного метода может быть выбрана неподвижной. Это, однако, не даёт возможности полностью ограничиться структурированными сетками, так как они не позволяют смоделировать дефекты произвольной формы.

Таким образом, данная работа посвящена применению сеточно-характеристического метода к расчёту распространения акустических волн в линейно-упругом теле. Рассматриваются задачи с анизотропией упругих свойств материала, наличием внутренних дефектов, несколькими слоями в образце.

Проведены расчёты постановок с параметрами, близкими к параметрам реальных производственных ситуаций неразрушающего контроля композитных материалов.

1 Обзор существующих работ по данной тематике

Комбинация математической модели линейно-упругого тела и сеточно-характеристического численного метода для расчёта волновых задач используется уже давно и хорошо себя зарекомендовала.

Сеточно-характеристический метод численного решения уравнений в частных производных гиперболического типа был впервые предложен в [4]. Впоследствии его авторами была выпущена подробная монография по различным аспектам его применения и реализации [5].

Одно из первых применений метода к расчёту волновых задач механики деформируемого твёрдого тела было осуществлено в [6] на структурированных расчётных сетках. Возможность применения метода с высоким порядком аппроксимации на неструктурированных расчётных сетках была продемонстрирована в работе [7]. Значительные улучшения метода, связанные со спектральным разложением матриц системы уравнений и расчётом граничных и контактных узлов, были предложены в [8]. В работе [10] был предложен способ диагонализации матриц системы уравнений для произвольного случая анизотропии материала. Реализация метода на структурированных иерархических тетраэдральных сетках с кратным шагом по времени продемонстрирована в работе [9].

В монографии [12] рассмотрены различные математические вопросы сеточно-характеристического метода и других родственных ему методов численного решения динамических волновых задач.

Таким образом, данная область знаний уже является хорошо изученной, однако полная реализация всех методов в трёхмерном пространстве с различной реологией материалов, сложной геометрией областей и другими практическими аспектами, важными в прикладных задачах, всё ещё оставляет много вопросов.

2 Уравнения механики линейно-упругого тела

2.1 Общий вид уравнений

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твёрдом теле используется система динамических уравнений [2, 3] в виде

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i && \text{(уравнения движения)} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij} && \text{(реологические соотношения)}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты векторов скорости частиц среды, σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты симметричных тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – производная по j -й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – силы, обусловленные вязкостью, q_{ijkl} – тензор упругих постоянных.

В случае малых деформаций тензор скоростей деформаций $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается через компоненты скорости смещения линейным образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \quad (2.2)$$

Компоненты тензора 4-го порядка q_{ijkl} , сил вязкости F_{ij} и плотности ρ определяются реологией среды.

2.2 Случай изотропного линейно-упругого тела

Для невязкого изотропного линейно-упругого материала

$$\begin{aligned}q_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) && \text{(изотропия)} \\ F_{ij} &= 0 && \text{(отсутствует вязкость)}\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\rho = \text{const} \quad \text{(изменения пренебрежимо малы)}. \quad (2.4)$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, связанные с более известными модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν (модулем сдвига G) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

В этом случае уравнения (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Обозначив искомый вектор $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$, уравнения (2.1) можно переписать в матричной форме [6]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0, \tag{2.7}$$

где матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z принимают следующий вид:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

2.3 Случай произвольно анизотропного линейно-упругого тела

Для материала с произвольным типом анизотропии тензор упругих постоянных q_{ijkl} обладает 21 независимым параметром. Это видно из следующих рассуждений [14]. Вообще говоря, число его компонент $3^4 = 81$. Однако симметричные в рассматриваемой модели тензоры напряжений и деформаций имеют не 9, а 6 независимых компонент. Остаётся 36 независимых компонент q_{ijkl} . Теперь рассмотрим выражение для потенциала упругой энергии W :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (2.11)$$

$$q_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \quad (2.12)$$

$$q_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}. \quad (2.13)$$

Из независимости второй производной от порядка дифференцирования следует $q_{ijkl} = q_{klij}$. Таким образом, зависимость σ от ε можно записать в более простом виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Тогда для случая произвольной анизотропии уравнения (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= c_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{14} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{15} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= c_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{24} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{25} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{26} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= c_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{34} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{35} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{36} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= c_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{24} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{44} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{46} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= c_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{45} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{55} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= c_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{46} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + c_{66} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Записывая эти уравнения в матричном виде (2.7), получаем следующие

выражения для матриц:

$$\mathbf{A}_x = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{16} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{26} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{A}_y = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ c_{16} & c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{66} & c_{26} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{25} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A}_z = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ c_{15} & c_{14} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

2.4 Отдельные виды анизотропии

2.4.1 Изотропный случай как подвид анизотропного

Из условия изотропии – неизменности свойств материала при произвольных поворотах – следует, что число независимых компонент тензора q_{ijkl} сокращается до двух:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где $c_{44} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$, причём $c_{12} = \lambda$ и $c_{44} = \mu$ – параметры Ламе.

2.4.2 Орторомбическая анизотропия

Орторомбическая анизотропия – различные свойства материала вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений. Число независимых компонент сокращается до девяти.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.4.3 Трансверсально-изотропное тело

Трансверсальная анизотропия – отличные свойства вдоль одной выделенной оси. Это частный случай орторомбической. Число независимых компо-

НЕНТ – ПЯТЬ.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

где $c_{66} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}$.

2.5 Спектральное разложение матриц из уравнения

Как будет показано ниже, для реализации сеточно-характеристического метода необходимо диагонализировать матрицы из (2.7), то есть представить их в виде $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{\Omega}$, где \mathbf{L} – диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{A} , $\mathbf{\Omega}^{-1}$ – матрица собственных векторов матрицы \mathbf{A} , $\mathbf{\Omega}$ – матрица собственных строк матрицы \mathbf{A} .

В случае орторомбической анизотропии материала и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии разложение выписывается аналитически и представлено в 6.1. Трансверсально-изотропный и изотропный сводятся к орторомбическому как его частные случаи.

Для общего случая, когда имеется 21 независимая компонента или главные оси материала повернуты по отношению к координатным, проведём диагонализацию матриц (2.16), (2.17), (2.18), как было предложено в [10]. Пусть $\lambda^2 = t$, где λ – собственное значение матрицы \mathbf{A} , тогда из векового уравнения после некоторых преобразований имеем (здесь строки и столбцы матрицы пронумерованы с нуля):

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0, \quad (2.22)$$

где

$$a = r(-A_{k2} - A_{j1} - A_{i0}), \quad (2.23)$$

$$b = r^2((A_{j1} + A_{i0})A_{k2} - A_{j2}A_{k1} - A_{i2}A_{k0} + A_{i0}A_{j1} - A_{i1}A_{j0}), \quad (2.24)$$

$$c = r^3((-A_{i0}A_{j1} + A_{i1}A_{j0})A_{k2} + (A_{i0}A_{j2} - A_{i2}A_{j0})A_{k1} + (-A_{i1}A_{j2} + A_{i2}A_{j1})A_{k0}), \quad (2.25)$$

$$r = A_{0i} = -1/\rho, \quad (2.26)$$

где i, j, k – индексы столбцов матрицы, которые содержат компоненты $-1/\rho$. Решение может быть получено, например, с помощью тригонометрической формулы Виета или других методов. После чего собственные значения \mathbf{A} :

$$\{-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_3}, \sqrt{t_3}, 0, 0, 0\}, \quad (2.27)$$

Требования к действительности и положительности корней (2.22) являются фактически требованием гиперболичности системы уравнений.

Нахождение собственных векторов и собственных строк (2.16)-(2.18) благодаря разреженности матриц после элементарных упрощений сводится от вырожденной СЛАУ 9×9 к вырожденной СЛАУ 3×3 для ненулевых собственных значений и к вырожденной СЛАУ 3×6 для собственных строк с нулевыми собственными значениями. После нахождения их фундаментальных систем решений восстанавливаются все компоненты собственных строк и векторов. Стоит отметить, что алгоритм записывается универсально для всех трёх матриц (2.16), (2.17), (2.18) через те же индексы i, j, k . После нахождения собственных строк и векторов их необходимо нормировать для выполнения условия $\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$.

2.6 Преобразование тензора упругих постоянных при повороте

Запишем изменение тензора упругих постоянных при повороте материала относительно системы координат.

Пусть $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – углы поворота материала вокруг соответствующих осей. Имеем матрицы поворотов $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$. Например, \mathbf{G}_x :

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

Итоговая матрица преобразования базиса $\mathbf{G} = \mathbf{G}_x \mathbf{G}_y \mathbf{G}_z$, если поворот производился сначала вокруг z , потом вокруг y , потом вокруг x .

Выражение для тензора упругих постоянных q_{ijkl} при таком повороте

определяется правилом преобразования тензоров:

$$q_{mnpq} = \sum_{i, j, k, l=1}^3 G_{mi} G_{nj} G_{pk} G_{ql} q_{ijkl}. \quad (2.29)$$

3 Численный метод

3.1 Общая идея сеточно-характеристического метода

3.1.1 Расщепление по направлениям

Сведём решение исходной системы в трёхмерном пространстве

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

к решению одномерной системы:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим оператор f_i как переход с одного временного слоя на другой при численном решении уравнения (3.2):

$$\vec{u}_i^n = f_i(\mathbf{A}_i) \vec{u}^n, \quad (3.3)$$

а оператор F – как такой переход для трёхмерного уравнения. Тогда [8] будет верно с первым порядком точности по времени:

$$F = \alpha_0 f_0\left(\frac{\mathbf{A}_0}{\alpha_0}\right) + \alpha_1 f_1\left(\frac{\mathbf{A}_1}{\alpha_1}\right) + \alpha_2 f_2\left(\frac{\mathbf{A}_2}{\alpha_2}\right), \quad (3.4)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (3.5)$$

и со вторым порядком точности по времени:

$$F = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} f_i(\mathbf{A}_i) f_j(\mathbf{A}_j) f_k(\mathbf{A}_k). \quad (3.6)$$

Вычисление по схеме (3.6) слишком затратны по количеству вычислений и памяти. Однако, как показывает практика, с достаточной точностью работает следующее к ней приближение:

$$F = f_0(\mathbf{A}_0) f_1(\mathbf{A}_1) f_2(\mathbf{A}_2), \quad (3.7)$$

которое является первым слагаемым в (3.6). Такое приближение обладает тем достоинством, что оно не только близко ко второму порядку, но и эконо-

мичнее по памяти, чем (3.4).

3.1.2 Сеточно-характеристический метод в одномерном случае

Из гиперболичности рассматриваемой системы уравнений следует диагонализуемость матриц \mathbf{A}_i :

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}. \quad (3.8)$$

Умножим (3.2) справа на $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

В приближении локальной однородности среды можно внести $\mathbf{\Omega}$ под знак дифференциала:

$$\frac{\partial(\mathbf{\Omega} \vec{u})}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial(\mathbf{\Omega} \vec{u})}{\partial x} = 0. \quad (3.10)$$

Обозначая $\vec{r} = \mathbf{\Omega} \vec{u}$, получим уравнение:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 0. \quad (3.11)$$

Переходя к производной вдоль направления, заданного уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k, \quad k = \overline{1, 9}, \quad (3.12)$$

получим

$$\left(\frac{dr_k}{dt} \right)_k = 0, \quad k = \overline{1, 9}. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что вдоль этого направления значение r_k сохраняется. Поэтому r_k называются инвариантами Римана, а линии, заданные (3.12) – характеристиками.

В этом и есть суть сеточно-характеристического метода – перенос значений с предыдущего временного слоя через инварианты Римана.

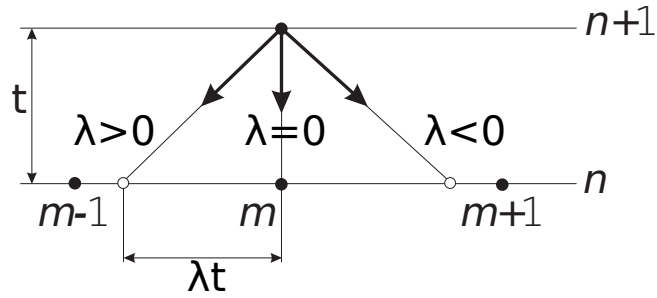


Рис. 1. Основная идея сеточно-характеристического метода

Сформулируем алгоритм одного шага метода по времени (см. 1):

1. Из узлов сетки на новом временном слое выпускаются характеристики на предыдущий слой. Количество характеристик равно количеству переменных в системе.
2. В точках пересечения характеристик с предыдущим слоем вычисляются значения функции и пересчитываются инварианты Римана.
3. Инварианты Римана переносятся на новый слой, производится их пересчёт в значения функции.

Описанный выше метод применим только в тех случаях, если точка пересечения выпущенной из расчётного узла характеристики и предыдущего временного слоя не выходит за пределы области интегрирования. Это условие может быть нарушено в нескольких случаях (см. 2). Во-первых, в случае граничных узлов, когда направление характеристики вне тела – точка номер 2. Во-вторых, в случае внутренних узлов, когда характеристика пересекает границу тела до пересечения с предыдущим временным слоем – точка номер 1. Такая же ситуация возможна и для граничных узлов при наличии острых углов у области интегрирования – точка номер 3. Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

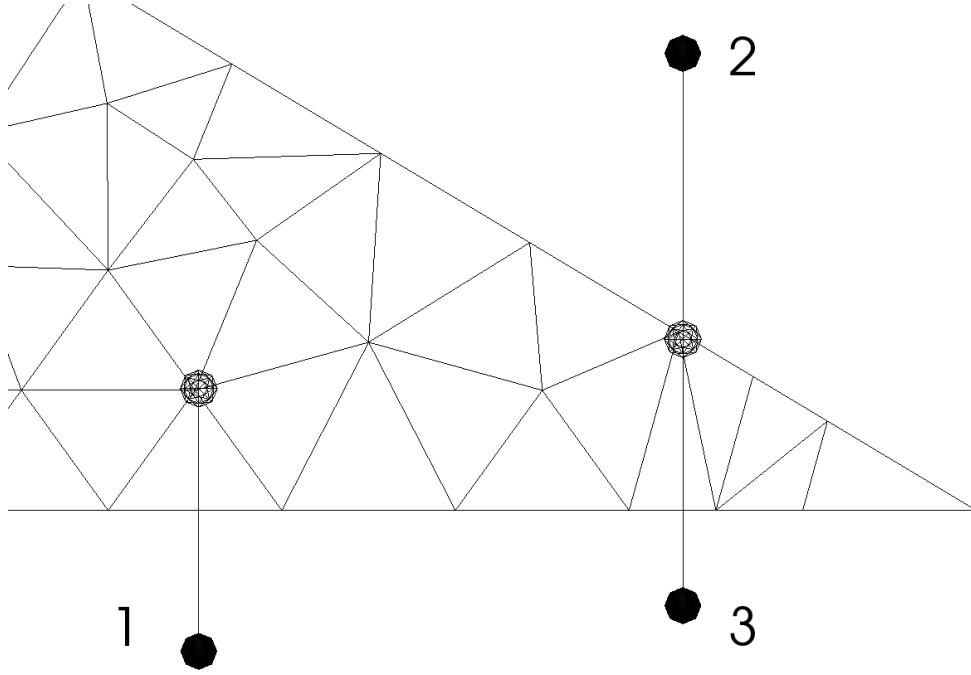


Рис. 2. Тело с острым углом на границе. Различные случаи выпадения характеристик за область интегрирования

3.1.3 Расчёт граничных узлов

В [8] был предложен следующий алгоритм расчёта граничных условий. Сначала вычисления проводятся только для внутренних характеристик – значения инвариантов Римана, соответствующие выпавшим за пределы области характеристикам, зануляются. Затем применяется граничный корректор, цель которого – обеспечить выполнение заданных граничных условий.

Запишем общий вид линейного граничного условия:

$$\mathbf{B}\vec{u} = \vec{b}. \quad (3.14)$$

К примеру, для заданной на границе скорости:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\vec{b} = (v_\xi, v_\eta, v_\zeta)^T, \quad (3.16)$$

где $v_\xi v_\eta v_\zeta$ – компоненты скорости в локальном базисе, связанном с границей тела.

Для заданной на границе внешней силы:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности в точке задания условия.

$$\vec{b} = (\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\xi}, \sigma_{\zeta\xi})^T, \quad (3.18)$$

где $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\xi}, \sigma_{\zeta\xi}$ – компоненты тензора напряжений в локальном базисе, связанном с границей тела.

Составим из собственных векторов, соответствующих внешним собственным значениям, матрицу $\mathbf{\Omega}^*$. Будем искать решение на новом слое \vec{u}^{n+1} , удовлетворяющее граничным условиям, в виде

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* + \mathbf{\Omega}^* \vec{\alpha}, \quad (3.19)$$

где α – неизвестный пока вектор, \vec{u}^* – решение, полученное на этапе внутреннего расчёта. Тогда для $\vec{\alpha}$ получаем СЛАУ:

$$(\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^*) \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B}\vec{u}^*. \quad (3.20)$$

Такой подход означает вычисление внешних инвариантов Римана из условия выполнения заданных соотношений на границе. Другими словами, мы подбираем линейную комбинацию "пришедших извне" волн так, чтобы выполнялось граничное условие. Невырожденность системы (3.20) равносильна корректности заданных граничных условий.

3.1.4 Расчёт внутренних узлов с внешними характеристиками

Для возможности расчёта случаев, изображённых под номером 1 на рис. 2, в [5] предложен следующий способ. При выполнении очередного шага по времени сначала производится расчёт всех граничных узлов. После чего для внутренних узлов с выпавшими за пределы тела характеристиками интерполяция внешних инвариантов Римана производится не по предыдущему временному слою, а по границе тела. Точка, в которой проводится интерполяция, находится между двумя слоями во времени. Такой подход корректен, так как

значения на границе на новом временном слое уже посчитаны.

Оставшийся случай под номером 3 мог бы быть выполнен аналогично предыдущему, но при расчёте граничных узлов нельзя проводить интерполяцию во времени, так как нет гарантии, что область интерполяции уже была рассчитана на новом временном слое. Поэтому следует сначала определить значение в точке пересечения характеристики с границей, посчитав в этой точке значение функции как для любого другого граничного узла. Таких "переотражений" может быть несколько.

Вообще стоит отметить, что сложные случаи при расчёте границы области интегрирования – определяющая проблема при реализации сеточно-характеристического метода на неструктурированных расчётных сетках.

3.1.5 Расчёт граничных узлов и узлов с внешними характеристиками на структурированной расчётной сетке

Изложенный выше алгоритм расчёта граничных случаев актуален для неструктурированных расчётных сеток. Для регулярных сеток можно использовать более простой метод фиктивных внешних узлов. Его основная идея – введение вдоль границ тела вспомогательных расчётных узлов, значения в которых выставляются так, чтобы при сквозном счёте границы автоматически выполнялись поставленные условия.

Допустим, вдоль границы, перпендикулярной оси x , поставлено условие фиксированной внешней силы

$$\sigma_{xx} = S_{xx}, \sigma_{xy} = S_{xy}, \sigma_{xz} = S_{xz}. \quad (3.21)$$

Пусть вдоль рассматриваемой оси граничный узел имеет индекс 0, тогда внутренние узлы имеют положительные индексы, а фиктивные узлы – отрицательные. Перед очередной ступенью расчёта вдоль данной оси выставим во вспомогательных узлах следующие значения:

$$\sigma_{xx}(-i) = -\sigma_{xx}(i) + 2S_{xx}, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xy}(-i) = -\sigma_{xy}(i) + 2S_{xy}, \quad (3.23)$$

$$\sigma_{xz}(-i) = -\sigma_{xz}(i) + 2S_{xz}, \quad (3.24)$$

$$v_x(-i) = v_x(i), \quad (3.25)$$

$$v_y(-i) = v_y(i). \quad (3.26)$$

$$v_z(-i) = v_z(i). \quad (3.27)$$

Значения для $\sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ ставить не требуется, так как они не участвуют в данной ступени расчёта. Далее будем считать граничные узлы таким же образом, как и внутренние. Полученное решение будет удовлетворять поставленным граничным условиям с первым порядком точности.

Это можно объяснить из следующих соображений. Если провести прямую, соответствующую линейной интерполяции для компонент тензора напряжения, через (i) -й и $(-i)$ -й узлы, то её значение в нулевом узле совпадёт граничным условием. Аналогично для компонент скорости, которые не должны меняться в граничных узлах при условии фиксированной поверхностной силы.

Вводя достаточное количество фиктивных узлов, добиваемся того, что все характеристики попадают внутрь расчётной области.

Метод фиктивных узлов удобен ещё тем, что он отлично согласуется с реализацией параллельных расчётов с раздельной памятью – через эти узлы принимается информация от соседних процессов, необходимая для продолжения расчётов.

3.2 Интерполяция в задачах сеточно-характеристического метода

3.2.1 Общие замечания

Из вышесказанного следует, что для реализации сеточно-характеристического метода необходимо производить интерполяцию значений функции в пространстве между узлами сетки. Порядок интерполяции определяет порядок метода по пространству.

Как правило, интерполяция проводится в два этапа: сначала полиномом

некоторой степени приближается значение функции в искомой точке, затем полученное значение корректируется для устранения нефизичных осцилляций, возникающих в схемах порядка выше первого. Корректировка сводится к применению ограничителя – "лимитера" на полученное значение. Наиболее простой и распространённый вариант – так называемый "minmax" лимитер, который контролирует минимальное и максимальное значения результата интерполяции исходя из значений функции в соседних точках. Другой пример – когда при возникновении осцилляций в данной точке порядок интерполяции понижается до первого. Это так называемые гибридные схемы.

В данной работе используется "minmax" лимитер, так как с ним волновые фронты меньше подвержены сглаживанию, что является важным в задачах моделирования неразрушающего контроля.

3.2.2 Интерполяция на структурированной расчётной сетке

В случае структурированной сетки и расщепления по направлениям независимо от размерности решаемой задачи интерполяция производится не в пространстве, а на прямой, вдоль которой выполняется ступень расчёта. Это значительно упрощает задачу. Существует множество способов интерполяции функции по исходным данным, распределённым на прямой.

В данной работе было решено воспользоваться интерполяционными полиномами в форме Ньютона [13]. Пусть известны значения функции $f(t)$ в точках t_i . Определим конечные разности порядка k для i -й точки как

$$f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) = \frac{f(t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) - f(t_i, \dots, t_{i+k-1})}{t_{i+k} - t_i}, \quad (3.28)$$

$$f(t_i, t_{i+1}) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (3.29)$$

Тогда аппроксимационный полином степени n

$$N_n(t) = f(t_1) + f(t_1, t_2)(t - t_1) + \dots + f(t_1, \dots, t_{n+1})(t - t_1) \dots (t - t_n). \quad (3.30)$$

Пусть точки с известными значениями функции расположены на одинаковых расстояниях Δt друг от друга, а точка поиска – на расстоянии $q\Delta t$ от первой из них. Пусть известные значения записаны в массив данных (нумерация с нуля). Тогда после некоторых упрощений формул (3.28) и (3.30) получим компактный алгоритм нахождения значения в точке поиска с по-

рядком точности n (значения в массиве в ходе работы алгоритма будут перезаписаны!):

```
result = f[0];
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 0; j < n - i + 1; j++) {
        f[j] = (f[j + 1] - f[j]) * ((q - i + 1) / i);
    }
    result += f[0];
}
```

Теоретически, получен алгоритм интерполяции произвольного порядка на структурированной сетке. На практике такой подход сталкивается с двумя трудностями.

Во-первых, необходимо специально исследовать устойчивость такого рода схем. Как было показано в [11], наглядное правило Куранта (метод устойчив, если значение интерполируется в области зависимости решения) не всегда применимо в этом случае. Например, интерполяции третьего порядка с шаблоном, изображённым на рис. 3, устойчива при числе Куранта от 1 до 2. Из правила Куранта следовала бы устойчивость от 0 до 3.

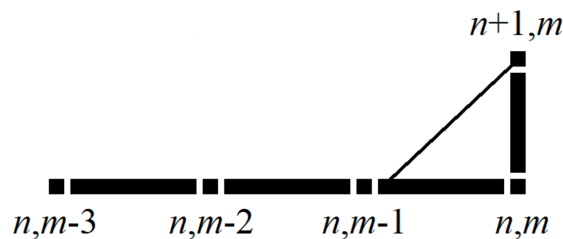


Рис. 3. Четырёхточечный шаблон для расчёта третьего порядка аппроксимации

Во-вторых, при использовании метода фиктивных узлов с увеличением порядка схемы развивается неустойчивость на границе. Это связано с фактической экстраполяцией значений во вспомогательных узлах – нарушение уже названного правила Куранта.

3.2.3 Интерполяция на неструктурированной расчётной сетке

В случае неструктурированной расчётной сетки необходимо производить интерполяцию в пространстве той размерности, в какой решается задача.

Далее рассматриваются только сетки на триангуляциях – треугольная в двумерном случае и тетраэдрическая в трёхмерном.

Большинство известных автору работ используют метод интерполяции, предложенный в [7]. Он заключается во введении на рёбрах треугольника (тетраэдра) дополнительных расчётных узлов, с помощью которых повышается порядок аппроксимации. На рис. 4 показана интерполяция второго порядка в тетраэдре – по одному дополнительному узлу на каждом ребре тетраэдра.

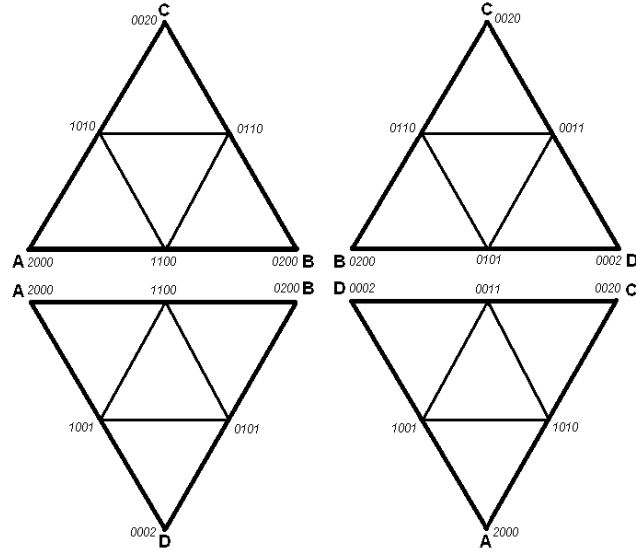


Рис. 4. Интерполяция в тетраэдре методом вспомогательных узлов на рёбрах

К достоинствам этого метода следует в первую очередь отнести возможность реализации интерполяции произвольного порядка. К недостаткам – рост числа расчётных узлов и усложнение геометрии сетки. Последнее может быть критичным в задачах с большими деформациями.

В данной работе предложен альтернативный подход, позволяющий осуществить интерполяцию первого и второго порядка без введения вспомогательных узлов. Далее будем говорить о треугольниках, для тетраэдров всё аналогично.

Пусть известны значения функции f в вершинах треугольника $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и необходимо определить её значение в некоторой точке \vec{q} . Введём барицентрические координаты λ_i из условия

$$\vec{q} = \lambda_0 \vec{a} + \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}, \quad (3.31)$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (3.32)$$

Физический смысл λ таков: если расположить в точках $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ массы $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ соответственно, то центр масс такой системы будет в точке \vec{q} .

Ещё более полезен их геометрический смысл, показанный на рис. 5. К примеру, условие попадания точки внутрь треугольника – положительность всех её барицентрических координат, условие нахождения точки во внутренности угла $\angle abc$ будет $\lambda_1 < 1, \lambda_0 > 0, \lambda_2 > 0$. Эти свойства ещё более полезны в трёхмерном пространстве, когда изобразить задачу на листе бумаги становится сложнее.

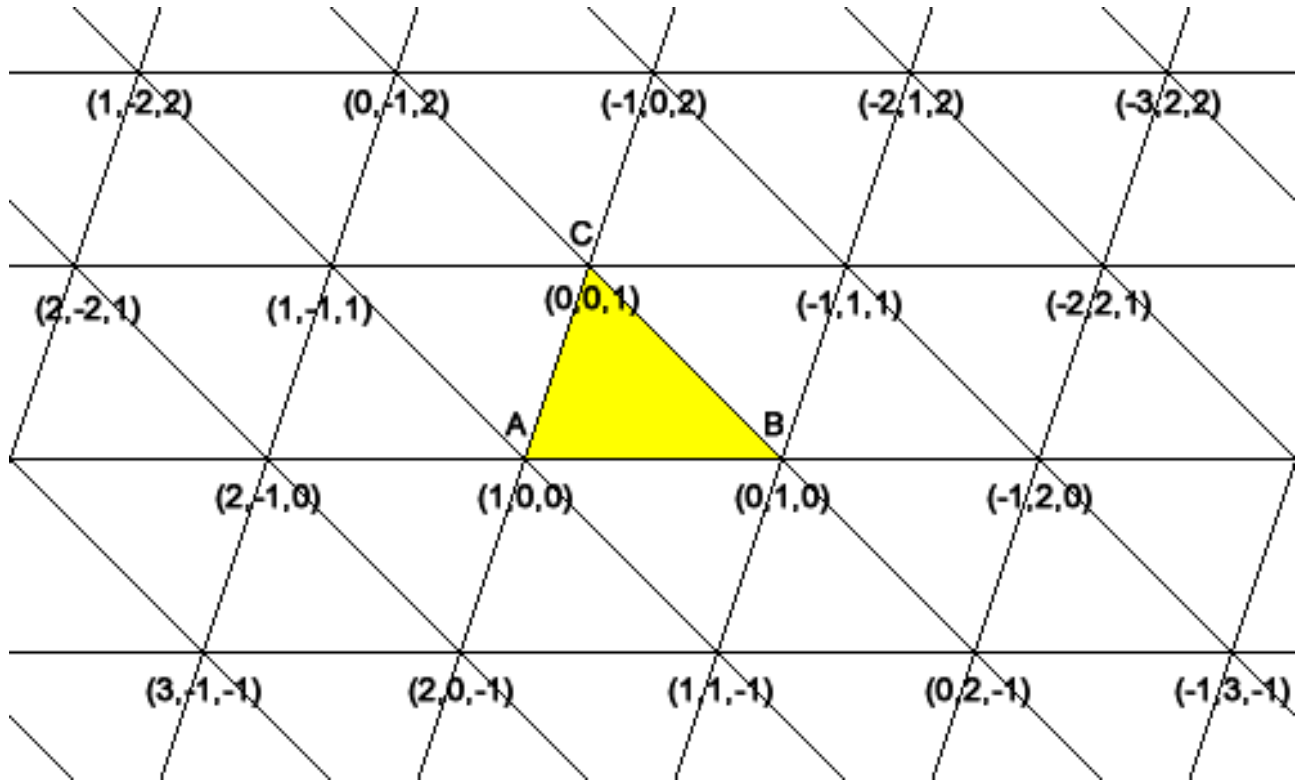


Рис. 5. Геометрический смысл барицентрических координат

Итак, если известны значения функции f в точках треугольника \vec{p}_i , составим следующий интерполяционный многочлен:

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x}) f(\vec{p}_i). \quad (3.33)$$

Здесь $\lambda_i(\vec{x})$ – барицентрические координаты произвольной точки \vec{x} в этом треугольнике. Такой многочлен в точности воспроизводит линейную функцию: пусть

$$z(\vec{x}) = a + \vec{b}\vec{x}, \quad (3.34)$$

тогда

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x})(a + \vec{b}\vec{p}_i) = a \sum_i \lambda_i(x) + \vec{b} \sum_i \lambda_i(x)\vec{p}_i = a + \vec{b}\vec{x} = z(\vec{x}). \quad (3.35)$$

Если в точках треугольника \vec{p}_i известны ещё и значения градиента $\nabla f = \vec{g}$, составим интерполяционный многочлен, в точности воспроизводящий квадратичную функцию:

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x}) \left(f(\vec{p}_i) + \frac{1}{2} \vec{g}_i^T (\vec{x} - \vec{p}_i) \right). \quad (3.36)$$

Доказательство:

$$z(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{b} \vec{x} + c, \quad (3.37)$$

$$g(\vec{x}) = \nabla z(\vec{x}) = 2\mathbf{A} \vec{x} + \vec{b}, \quad (3.38)$$

$$P(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x}) \left(\vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{p}_i + \vec{b} \vec{p}_i + c + \frac{1}{2} (2\mathbf{A} \vec{p}_i + \vec{b})^T (\vec{x} - \vec{p}_i) \right) = \quad (3.39)$$

$$\sum_i \lambda_i(\vec{x}) \left(\vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{p}_i + \vec{b} \vec{p}_i + c + \vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{b} \vec{x} - \vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{p}_i - \frac{1}{2} \vec{b} \vec{p}_i \right) = \quad (3.40)$$

$$\sum_i \lambda_i(\vec{x}) \left(\vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{b} \vec{p}_i + c + \frac{1}{2} \vec{b} \vec{x} \right) = \quad (3.41)$$

$$\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{b} \vec{x} + c = z(\vec{x}). \quad (3.42)$$

Идея построения многочлена взята из [18], где такого же рода интерполяционные многочлены применяются для аппроксимации на разбиениях Вороного (так называемый метод естественных соседей [17, 19]).

Ограничение изложенного метода в том, что он не допускает обобщения уже на случай третьего порядка точности. Это следствие, как минимум, того, что в интерполяционном многочлене используется всего 3 (4 в трёхмерном случае) свободных параметра, и то, что возможна реализация второго порядка – уже большая удача. Попытка использовать больше свободных параметров требует наличия известных производных на один порядок выше, чем в данном случае, что в любом случае должно сильно ухудшить свойства интерполяции.

3.2.4 Численное дифференцирование на неструктурированной расчётной сетке

Как ясно из предыдущего параграфа, для возможности интерполяции второго порядка без вспомогательных узлов необходимо знание градиента интерполируемой функции. В этой связи предлагается перед выполнением очередной ступени расчёта вычислять градиент решения на текущем временном слое. Будучи один раз вычислено для каждого узла сетки, значение градиента потом используется множество раз при интерполяции различных точек.

Реализованный в данной работе метод численного дифференцирования был, по-видимому, впервые предложен в [17]. Для вычисления градиента в некотором узле сетки находятся все ближайшие узлы-соседи, для которых выполнено (см. рис. 6):

$$f_i - f^* = \nabla f(\vec{x}_i - \vec{x}^*) + O(\|\vec{x}_i - \vec{x}^*\|^2) \quad (3.43)$$

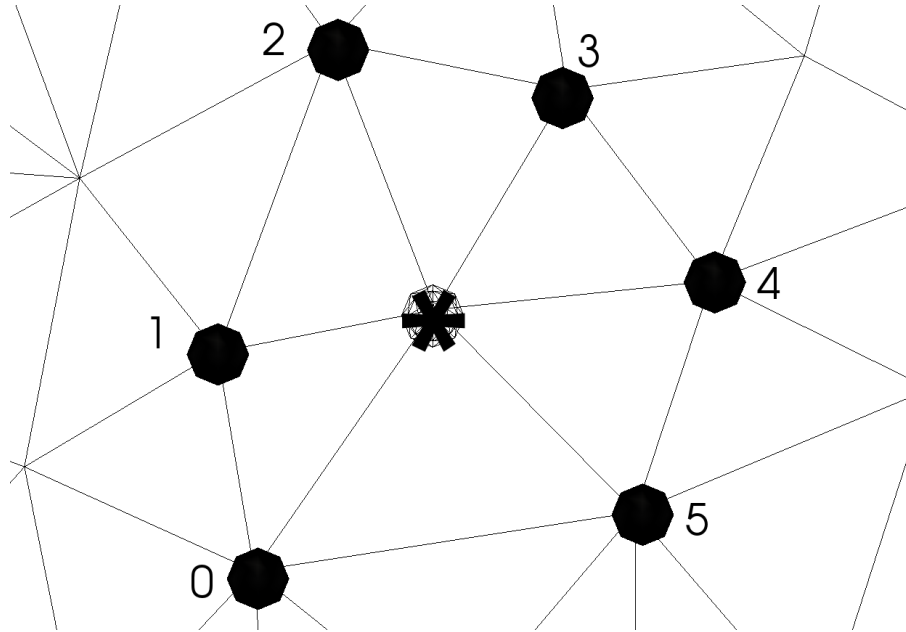


Рис. 6. К пояснению метода численного дифференцирования

Записывая это уравнение для всех узлов-соседей, получаем переобусловленную СЛАУ на значения градиента:

$$\mathbf{A}\vec{g} = \vec{b}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{A}_{ij} = (\vec{x}_i - \vec{x}^*)_j, \quad (3.45)$$

$$b_i = f_i - f^*. \quad (3.46)$$

СЛАУ решается методом наименьших квадратов [13] с весами, равными расстояниям от рассчитываемого узла до соответствующего соседа:

$$\left(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}\right) \vec{g} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{W}\right) \vec{b}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \|x_i - x^*\|, \quad i = j, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{W}_{ij} = 0, \quad i \neq j. \quad (3.49)$$

Характерная размерность матрицы \mathbf{A} в двумерном случае – 6×2 , в трёхмерном случае – 15×3 (рис. 7), то есть система хорошо обусловлена.

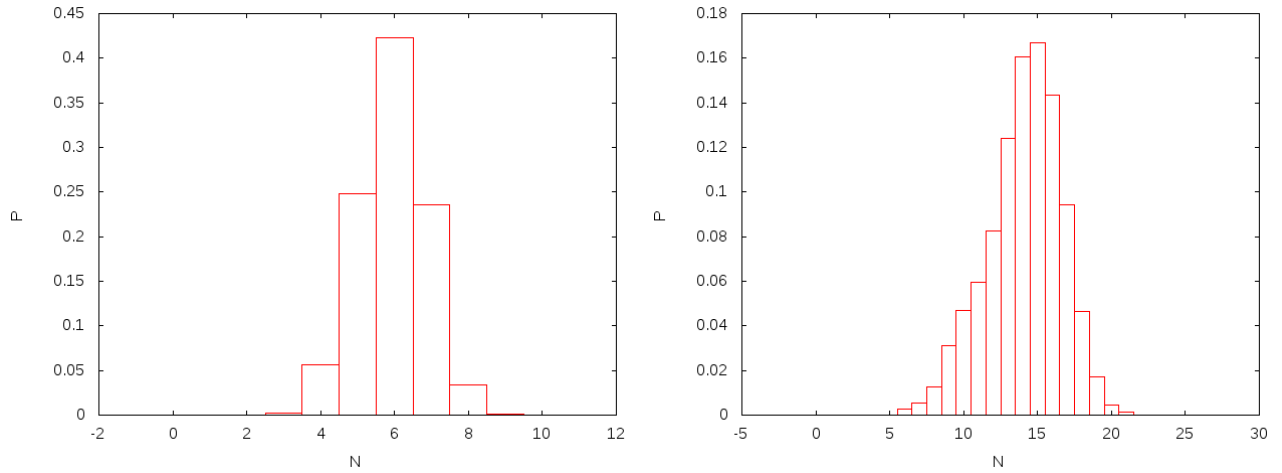


Рис. 7. Гистограммы числа соседних вершин в двумерном и трёхмерном случаях

3.3 Задача поиска ячейки сетки, содержащей точку пересечения характеристики с предыдущим временным слоем

Для того, чтобы произвести интерполяцию на неструктурированной сетке, необходимо найти треугольник (тетраэдр), который содержит точку интерполяции. Задача обычного поиска содержащей точку ячейки в триангуляции имеет множество решений. Их можно разделить на два подхода. Первый – хранить триангуляцию в специальной структуре быстрого поиска, которая позволяет за логарифмическое время находить указанную точку в триангуляции. Второй – хранить триангуляцию в виде, в котором каждая ячейка имеет указатели на своих ячеек-соседей (3 в двумерном и 4 в трёхмерном случае) и осуществлять поиск переходом от ячейки к ячейке, выбирая правильное в некотором смысле направление.

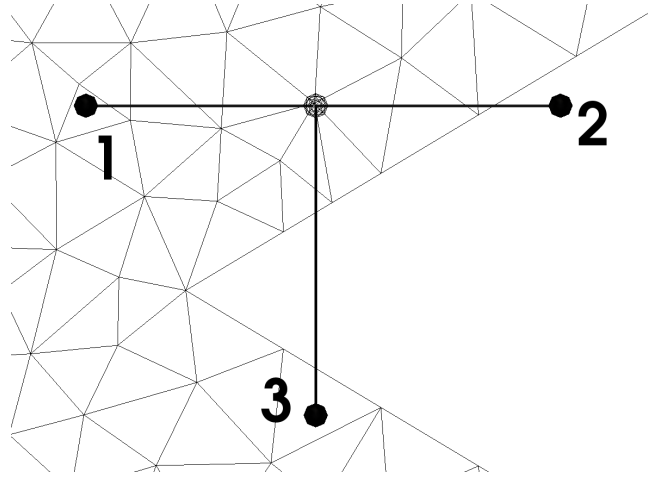


Рис. 8. Случаи поиска

Однако задача нахождения ячейки, содержащей точку пересечения характеристики с предыдущим временным слоем в сеточно-характеристическом методе, имеет нюансы, которые не позволяют полностью свести её к выше описанной. Это иллюстрирует рис. 8. Случай под номером 1 – пример, когда задачи поиска эквивалентны. Случай под номером два – случай внешней характеристики у внутреннего узла – требует нахождения точки пересечения характеристики с границей области интегрирования. Случай номер 3 – ситуация, когда применение обычного алгоритма даёт неверный результат.

Отсюда можно сделать вывод, что алгоритм поиска требует модификации по сравнению с его обычной реализацией. В данной работе решено было использовать стратегию поиска вдоль линии – "line walk" [16]. Она относится ко второй из названных выше групп подходов и наиболее естественно учитывает запросы сеточно-характеристического метода.

Введём

$$orientation(a, b, c) = \det \begin{vmatrix} b_x - a_x & c_x - a_x \\ b_y - a_y & c_y - a_y \end{vmatrix} - \quad (3.50)$$

– ориентированную площадь треугольника a, b, c .

Для простоты в двумерном случае (трёхмерный случай рассматривается аналогично) опишем основные стадии алгоритма поиска точки по линии (рис. 9):

- Имеем исходную вершину q в триангуляции и точку для поиска p
- Рассматриваем все ячейки, имеющие исходную вершину, и выбираем среди них ту, которая содержит внутри себя луч qp . Это делается, например, на основе анализа барицентрических координат точки p в каж-

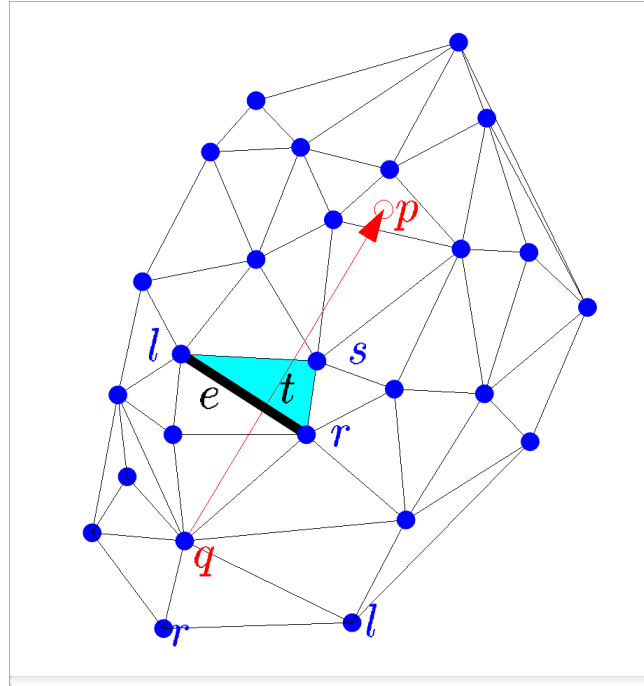


Рис. 9. Поиск вдоль линии в триангуляции [16]

дой ячейке – см. 5

- Обозначим вершину найденной ячейки, лежащую слева от qp , как l , вершину, лежащую справа, как r и вершину $s = q$
- Выполнено $orientation(s, r, l) > 0$
- Далее до тех пор, пока $orientation(p, r, l) < 0$, повторяем:
 - Переходим в ячейку, разделяющую с текущей точки r, l
 - Переносим вершину s в новую ячейку на свободное от r, l место
 - Если $orientation(s, q, p) < 0$, $r = s$, иначе $l = s$
- Ячейка, содержащая p , найдена

Простота написанного алгоритма обманлива. В нём не было рассмотрено случаев наподобие $orientation(s, q, p) = 0$. Реализация стабильного поиска, учитывающего все предельные ситуации в двумерном пространстве сложна, а в трёхмерном – не факт, что возможна. Между тем, предельные случаи имеют место быть, например, вдоль координатных осей при расчёте фигур правильной формы, когда направления расчёта также совпадают с этими осями. По-видимому, наиболее простой выход из этой ситуации – отказаться от проведения ступеней расчёта вдоль координатных осей.

Между тем, данный метод имеет большое преимущество в решении всех проблем, изображённых на рис. 8, а также позволит корректировать наклон характеристики в зависимости от реологии ячеек при расчёте неоднородных материалов.

4 Полученные результаты

4.1 Расчёты в

4.1.1 Линейная упругость

5 Заключение

Результаты, полученные в результате выполнения дипломного проекта:

- Рассмотрены различные подходы к описанию движения сплошной среды в сочетании с применяемыми к ним численными методами
- Предложен метод моделирования сплошной среды в 1D с учётом движения и деформации тела, в том числе схема второго порядка точности по координате с учётом изменения характеристик среды в пространстве, точная со вторым порядком по времени схема расщепления расчётного шага на движение расчётной сетки и перенос возмущения
- На основе данного метода реализован программный комплекс, моделирующий деформируемое твёрдое тело в случае одного пространственного измерения с поддержкой упругой и упругопластической реологии
- Проведено сравнение результатов работы данного программного комплекса с результатами полуаналитического расчёта на основе принципиально другого подхода к описанию сплошной среды и итерационного метода. Получена сходимость результатов со вторым порядком точности по времени и координате
- Предложен способ моделирования идеально-пластической реологии в 3D на основе правила корректировки Уилкинса
- Данный способ реализован на основе существующего программного комплекса, поддерживающего линейную упругость в 3D
- Полученные результаты на качественном и количественном (в пределах погрешностей методов) совпадают с известными из работ других авторов

Список литературы

- [1] Реслер И., Хардерс Х., Бекер М. Механическое поведение конструкционных материалов. Перевод с немецкого. - Долгопрудный, Издательский дом «Интеллект», 2011, с. 91-115.
- [2] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — М. : Наука, 1970, с. 143.
- [3] Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошное сред. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2008, с. 32, с. 242, с. 271.
- [4] Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9:2 (1969), 373–386.
- [5] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.
- [6] Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 24:5 (1984), 722–739.
- [7] Агапов П.И., Челноков Ф.Б. Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела: Моделирование и обработка информации: М., МФТИ, 2003, 19 - 27.
- [8] Челноков Ф.Б., Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах, Матем. моделирование, 18:6 (2006), 96–108.
- [9] Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Квасов И.Е. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени, Матем. моделирование, 25:2 (2013), 42–52.
- [10] Фаворская А.В. Постановка задачи численного моделирования динамических процессов в сплошной линейно-упругой среде с анизотропией

- сеточно-характеристическим методом. // Труды 54-й научной конференции МФТИ: Проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе. — 2011. — Т. 2. — с. 55 – 56.
- [11] Фаворская А.В. Разработка численных методов для моделирования распространения упругих волн в неоднородных средах. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. — М. 2015.
 - [12] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.
 - [13] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. — М.: Интернет-Ун-т информ. технологий, 2006.
 - [14] Александров К.С., Продайвода Г.Т. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 354 с.
 - [15] Ахмадеев Н.Х., Болотнова Р.Х. Распространение волн напряжений в слоистых средах при ударном нагружении (акустическое приближение) // ПМТФ. 1985. № 1. С. 125-133.
 - [16] Olivier Devillers, Sylvain Pion, Monique Teillaud. Walking in a triangulation. RR-4120, INRIA, 2001.
 - [17] R. Sibson. A brief description of natural neighbour interpolation. In Vic Barnet, editor, *Interpreting Multivariate Data*, pages 21–36. John Wiley and Sons, Chichester, 1981.
 - [18] Julia Flötotto. 2D and Surface Function Interpolation. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.8 edition, 2016.
 - [19] Tom Bobach, Georg Umlauf. Natural neighbor interpolation and order of continuity. In *GI Lecture Notes in Informatics, Visualization of Large and Unstructured Data Sets*. Springer: Heidelberg, 2006; 68–86.
 - [20] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, <http://www.cgal.org>

6 Приложение

6.1 Диагонализация матриц из уравнений модели в случае орторомбической анизотропии и совпадения координатных осей с главными направлениями анизотропии

В указанном случае матрицы из уравнения (2.7) и их спектральное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{\Omega}$ приведены ниже. Порядок собственных значений в \mathbf{L} и, соответственно, собственных векторов в $\mathbf{\Omega}^{-1}$ следующий: поперечная волна против оси, поперечная волна вдоль оси, другая поперечная волна против оси, другая поперечная волна вдоль оси, продольная волна против оси, продольная волна вдоль оси, три неподвижных инварианта.

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_x = \text{diag}\left(-\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, 0, 0, 0\right)$$

$$\mathbf{\Omega}_x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{11}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{11}\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{55}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{12}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{12}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{13}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{11}}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{55}\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{11}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{11}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_y = (-\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{\Omega}_y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{12}}{\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{12}}{\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{66}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{22}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{22}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & -\frac{1}{2}\sqrt{c_{44}\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{22}}} & -\frac{\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{22}}} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{66}\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{44}\rho}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{22}\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{22}\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{23}}{c_{22}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_z = (-\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, -\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, 0, 0, 0)$$

$$\Omega_z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2} c_{13} \sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & -\frac{\frac{1}{2} c_{13} \sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{c_{55} \rho} & -\frac{1}{2} \sqrt{c_{55} \rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2} c_{23} \sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & -\frac{\frac{1}{2} c_{23} \sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{33}}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{c_{44} \rho} & -\frac{1}{2} \sqrt{c_{44} \rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{c_{33} \rho} & -\frac{1}{2} \sqrt{c_{33} \rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{55} \rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{55} \rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{44} \rho}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{44} \rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_{33} \rho}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{c_{33} \rho}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{c_{23}}{c_{33}} \end{pmatrix}$$