Сеточно-характеристический метод на неструктурированных расчётных сетках

1 Система уравнений

В произвольной D-мерной области ($D = 2, 3$) решается система уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + ... + \mathbf{A}_D \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_D} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\{x_1, ..., x_D\}$ – ортонормированный базис, $\vec{u} = \vec{u}(t, x_1, ..., x_D)$ – вектор неизвестных размерности N, матрицы $\mathbf{A}_i$ считаются постоянными по времени и пространству. Кроме того, ставятся начальные условия – значения $\vec{u}$ во всей области интегрирования в нулевой момент времени и граничные условия – некоторое количество скалярных условий на $\vec{u}$ на границе области интегрирования в любой момент времени.

Конкретный вид матриц и физический смысл уравнений можно не уточнять. Единственное условие – матрицы должны быть диагонализуемы с полным набором собственных векторов, и для каждого ненулевого собственного значения должно быть равное по модулю с противоположным знаком. Эти требования означают, фактически, то, что система уравнений описывает некий волновой процесс. Количество независимых скалярных граничных условий на $\vec{u}$ равно количеству положительных (отрицательных) собственных значений матрицы $\mathbf{A}_i$, которое в дальнейшем обозначим за M.

Для более наглядной иллюстрации теоретических вопросов и демонстрации результатов будут использоваться волновые уравнения механики линейно-упругого тела и акустики. В виде (1.1) они выписаны в [3]. Укажем здесь лишь состав переменных и основные свойства.

При описании волновых процессов в упругом теле используются значения компонент скорости $\vec{v}$ и тензора напряжений σ. В трёхмерном пространстве это составляет $N = 9$ независимых переменных:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T. \tag{1.2}$$

Число положительных (отрицательных) собственных значений матрицы $\mathbf{A}_i$

в этом случае составляет $M = 3$, что соответствует одной продольной волне сжатия-разрежения (p-волна) и двум взаимно перпендикулярным поперечным волнам сдвига (s-волны).

В двумерном приближении число независимых переменных сокращается до $N = 5$:

$$\vec{u} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})^T, \tag{1.3}$$

а $M = 2$ – одна p-волна и одна s-волна.

При описании волновых процессов в модели акустики независимо от размерности пространства D число переменных в уравнении $N = D + 1$:

$$\vec{u} = (v_1, ..., v_D, p)^T. \tag{1.4}$$

Здесь p – давление, и $M = 1$ – поперечные волны отсутствуют.

2 Численный метод

В наиболее общей постановке и с иллюстрацией множества приложений сеточно-характеристический метод (СХМ) изложен его создателями в [1]. К волновым уравнениям механики упругого тела СХМ впервые применён в [2]. Основная идея реализации метода на неструктурированных расчётных сетках предложена в [1]. Экономичная реализация граничных и контактных условий, а также компактная запись аналитических формул спектрального разложения матриц $\mathbf{A}_i$ для моделей упругости и акустики предложены в [3].

2.1 Неструктурированная расчётная сетка

Для возможности применения метода к областям произвольной формы используются треугольные и тетраэдральные неструктурированные расчётные сетки. Их построение осуществляется в основном с использованием библиотек CGAL [4] и Ani3D [5]. Значения искомой функции хранятся в узлах сетки.

Подразумевается, что внутри каждой области интегрирования матрицы $\mathbf{A}_i$ постоянны. Для моделирования неоднородностей явно выделяются дополнительные области интегрирования, между которыми рассчитывается контакт – взаимозависимые граничные условия для каждой из контактирующих областей.

Стоит отметить, что предложенный метод реализации граничных и контактных условий не закладывается на топологию ячейки сетки, то есть может быть применён, к примеру, и к октаэдральным расчётным сеткам.

2.2 Расщепление по направлениям

Поскольку классический СХМ рассматривает зависимость только от одной пространственной переменной, для численного решения (1.1) необходимо перейти к решению одномерных систем уравнений – так называемое расщепление по направлениям:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1...D. \tag{2.1}$$

Здесь под $\{\xi_i\}$ подразумевается произвольный ортонормированный базис, не обязательно совпадающий с $\{x_i\}$ (вид матриц $\mathbf{A_i}$, конечно, меняется при смене базиса).

В данной работе используется предложенная в [3] экономичная по памяти и вычислительным ресурсам схема расщепления, обладающая при этом близким ко второму порядком точности по времени. Полный шаг по времени τ решения многомерного уравнения (1.1) состоит из D последовательных ступеней. Каждая последовательная i-я ступень заключается в выполнении численного шага по времени для i-го уравнения (2.1) на то же время τ. В качестве значений старого временного слоя для i-й ступени берётся результат выполнения $(i-1)$-й, а результат выполнения последней ступени является решением многомерного уравнения на новом временном слое.

2.3 Решение одномерного уравнения

По условию матрицы $\mathbf{A}_i$ диагонализуемы с полным набором собственных векторов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{U}^{-1}$ – матрица собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица собственных значений, $\mathbf{U}$ – матрица собственных строк. Умножив (2.1) слева на $\mathbf{U}$, внеся постоянную матрицу $\mathbf{U}$ под знак дифференциала и обозначая

$\vec{r} = \mathbf{U}\vec{u}$ – инварианты Римана, получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 0. \tag{2.3}$$

В новых переменных система распалась на независимые уравнения переноса. Их численное решение заключается в интерполяции значения функции на предыдущем временном слое в точке, где характеристика из узла на новом временном слое пересекает предыдущий. После переноса инвариантов с предыдущего временного слоя на новый производится обратная замена переменных $\vec{u} = \mathbf{U}^{-1}\vec{r}$.

Для полностью одномерного случая сказанное проиллюстрировано на рисунке 1.

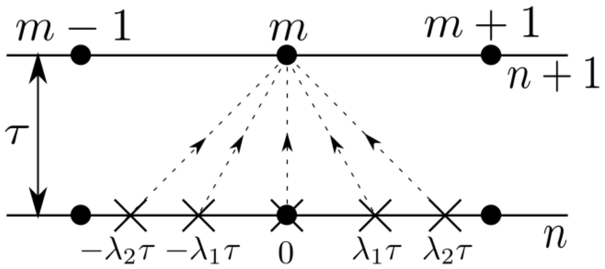

Рис. 1. Основная идея сеточно-характеристического метода

Для многомерной (для наглядности $D = 2$) неструктурированной расчётной сетки идея расщепления по направлениям и переноса значений инвариантов Римана из точек пересечения их характеристик со старым временным слоем проиллюстрирована на рисунке 2.

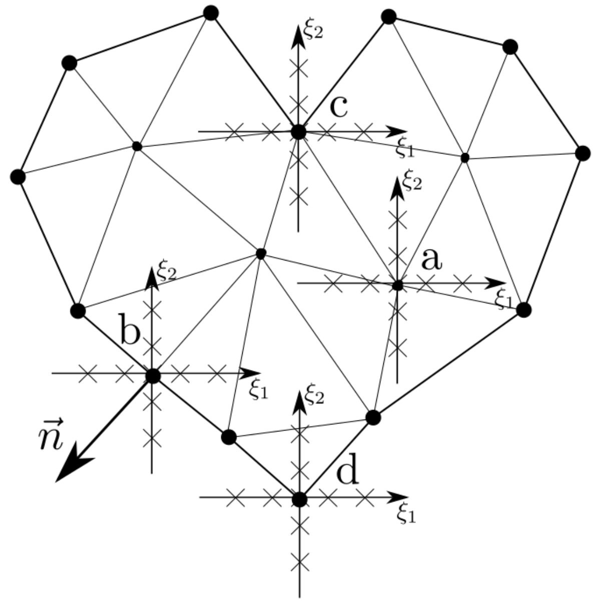

Рис. 2. Иллюстрация сеточно-характеристического метода на треугольной расчётной сетке

2.4 Метод на границе области интегрирования

Описанный выше алгоритм пригоден для внутренних узлов, когда все выброшенные из узла характеристики пересекают предыдущий временной слой внутри области интегрирования, что соответствует случаю a) на рисунке 2.

Для граничных и контактных узлов возможна ситуация, когда часть выпущенных из узла характеристик являются внешними, то есть пересекают предыдущий временной слой вне области интегрирования – случаи b), c) и d) на рисунке 2. При контакте двух областей интегрирования характеристика из узла одной области может попадать в другую область. Тогда она также считается внешней для своей области. В таких случаях применяется модификация алгоритма, называемая коррекцией внешними волнами.

Поскольку часть характеристик выпадает за пределы области интегрирования и значения соответствующих им инвариантов Римана не могут быть интерполированы и перенесены с предыдущего временного слоя, происходит, фактически, потеря информации. Однако в большинстве случаев эта информация может и должна быть восполнена из заданных граничных и контактных условий.

Рассмотрим сначала случай b), когда число внешних характеристик равно числу независимых скалярных граничных условий M.

2.4.1 Граница области интегрирования

Общая форма записи граничного условия Произвольное линейное граничное условие для произвольной модели в общем виде записывается:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{u} = \vec{b}. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{B}$ – матрица размерности $M \times N$, $\vec{b}$ – вектор размерности M, определяющие собой конкретный вид граничного условия.

Рассмотрим для примера условие фиксированного напряжения $\vec{f}$, приложенного к полупространству с внешней нормалью $\vec{n}$ в модели упругого тела:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}. \tag{2.5}$$

Примем для упрощения формул, что значение $\vec{f}$ указано в глобальном базисе, тогда (2.5) в форме (2.4) для трёхмерного случая запишется в виде:

$$\vec{b} = \vec{f}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Другой пример – условие фиксированной нормальной скорости v_n в модели акустики:

$$\vec{b} = (v_n), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \vec{n}^T, & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Алгоритм расчёта граничных узлов На первом этапе делается расчёт граничных узлов по алгоритму для внутренних, при этом все инварианты Римана, соответствующие внешним характеристикам, приравниваются к нулю. Получается $\vec{u}^{inner}$. Затем выполняется граничная коррекция – добавление к результату такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение граничного условия (2.4):

$$\mathbf{B} \cdot (\vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha}) = \vec{b}. \tag{2.10}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – матрица размерности $N \times M$, в столбцах которой стоят собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие внешним характеристикам. По физическому смыслу эти столбцы можно назвать внешними волнами, то есть фиктивными волнами, как бы пришедшими извне области интегрирования. Вектор $\vec{\alpha}$ размерности M – это вектор коэффициентов линейной комбинации, которые нужно определить.

К примеру, если направление расчёта вдоль оси x, то для трёхмерной модели упругого тела матрица $\mathbf{\Omega}$ – это три однонаправленных волны вдоль оси x:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\lambda+2\mu}{c_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{c_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{c_s} \\ \frac{\lambda}{c_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{c_p} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Здесь первый столбец – p-волна, далее – две s-волны, λ, μ – параметры Ламе, $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольной и поперечной волн.

Другой пример: для модели акустики матрица $\mathbf{\Omega}$ состоит всего из одного столбца – продольной волны вдоль направления расчёта. Если ввести обозначения $\vec{l}$ – единичный вектор вдоль направления расчёта, c – скорость продольной волны, ρ – плотность, то она запишется:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \vec{l} \\ c\rho \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Для определения $\vec{\alpha}$ необходимо решить СЛАУ с матрицей $\mathbf{B\Omega}$ размерностью $M \times M$:

$$\mathbf{B\Omega} \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} - \mathbf{B} \cdot \vec{u}^{inner}. \tag{2.13}$$

После определения коэффициентов линейной комбинации производится собственно коррекция, обеспечивающая выполнение граничных условий:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{inner} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{\alpha} \tag{2.14}$$

2.4.2 Контакт двух областей интегрирования

Общая форма записи контактного условия Запись произвольного линейного контактного условия для произвольных моделей:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B, \\ \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A &= \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь обозначения те же, что и в (2.4).

Для примера рассмотрим контактное условие полного слипания двух упругих тел. Оно означает в точке контакта равенство скоростей:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \tag{2.16}$$

и равенство сил, действующих на контактную поверхность:

$$\sigma_A \cdot \vec{n} = \sigma_B \cdot \vec{n}, \tag{2.17}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности контакта. Все формулы записываются в глобальном базисе. Это означает, что в качестве $\mathbf{B}_{2A}$ и $\mathbf{B}_{2B}$ нужно взять матрицы для граничного условия фиксированного напряжения в глобальном базисе (2.7), а в качестве $\mathbf{B}_{1A}$ и $\mathbf{B}_{1B}$ – матрицы для граничного условия фиксированной скорости в глобальном базисе, которые здесь для краткости приводить не будем.

Другой пример – скольжение двух тел в модели акустики – означает равенство компонент скорости вдоль направления контакта:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{n} = \vec{v}_B \cdot \vec{n} \tag{2.18}$$

и равенство давлений:

$$p_A = p_B. \tag{2.19}$$

Здесь также в качестве матриц $\mathbf{B}$ из (2.15) используются матрицы для линейных граничных условий, в том числе (2.9).

Алгоритм расчёта контактных узлов Все действия аналогичны расчёту граничных узлов. Сначала делается расчёт контактных узлов в обоих телах по алгоритму для внутренних. Получается $\vec{u}_A^{inner}$ и $\vec{u}_B^{inner}$. Затем выполняется контактная коррекция – добавление в обоих узлах такой линейной комбинации внешних волн, которая обеспечит выполнение контактного условия (2.15).

Распишем сообразно сказанному условие (2.15):

$$\mathbf{B}_{1A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{1B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B), \tag{2.20}$$
$$\mathbf{B}_{2A} \cdot (\vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A \cdot \vec{\alpha}_A) = \mathbf{B}_{2B} \cdot (\vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B \cdot \vec{\alpha}_B). \tag{2.21}$$

Раскроем скобки:

$$(\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{\alpha}_A = \mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B \tag{2.22}$$

Сделаем переобозначения:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{B}_{1A}\mathbf{\Omega}_A)^{-1}, \tag{2.23}$$
$$\vec{p} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B} \cdot \vec{u}_B^{inner} - \mathbf{B}_{1A} \cdot \vec{u}_A^{inner}), \tag{2.24}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{B}_{1B}\mathbf{\Omega}_B). \tag{2.25}$$

Тогда:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{p} + \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B. \tag{2.26}$$

Подставим в (2.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2A} \cdot \vec{u}_A^{inner} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \vec{p} + (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A) \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\alpha}_B = \\ = \mathbf{B}_{2B} \cdot \vec{u}_B^{inner} + (\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) \cdot \vec{\alpha}_B. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Получим СЛАУ на $\vec{\alpha}_B$:

$$\begin{gathered}\left[(\mathbf{B}_{2B}\mathbf{\Omega}_B) - (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A)\cdot\mathbf{Q}\right]\cdot\vec{\alpha}_B = \\ = (\mathbf{B}_{2A}\mathbf{\Omega}_A)\cdot\vec{p} + \mathbf{B}_{2A}\cdot\vec{u}_A^{inner} - \mathbf{B}_{2B}\cdot\vec{u}_B^{inner}.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Решив систему на $\vec{\alpha}_B$, находим $\vec{\alpha}_A$ из (2.26).

После чего производится собственно коррекция, обеспечивающая выполнение контактных условий:

$$\vec{u}_A^{n+1} = \vec{u}_A^{inner} + \mathbf{\Omega}_A\cdot\vec{\alpha}_A, \tag{2.29}$$

$$\vec{u}_B^{n+1} = \vec{u}_B^{inner} + \mathbf{\Omega}_B\cdot\vec{\alpha}_B \tag{2.30}$$

2.5 Вырождение матриц СЛАУ граничного и контактного корректора

2.5.1 Описание проблемы

Итак, расчёт граничных узлов по алгоритму 2.4.1 требует решения СЛАУ 2.13, расчёт контактных узлов по алгоритму 2.4.2 требует решения СЛАУ 2.28 и обращения матрицы 2.23. Размерность матриц во все трёх случаях равна $M\times M$, то есть относительно небольшая: для уравнений упругости в D-мерном пространстве получаем матрицы $D\times D$, решить которые можно с помощью правила Крамера и других аналитических формул, для уравнений акустики СЛАУ вообще вырождается до линейного уравнения.

Однако это не снимает вопрос о возможности вырождения этих матриц. Для иллюстрации рассмотрим расчёт граничного узла в трёхмерной модели упругого тела при условии фиксированного напряжения на границе. Все матрицы, необходимые для расчёта по формуле 2.13, уже выписаны: матрица $\mathbf{B}$ в 2.7 и матрица $\mathbf{\Omega}$ в 2.11. Остаётся их перемножить:

$$\mathbf{B\Omega} = \frac{1}{c_1c_2}\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)n_xc_2 & \mu n_yc_1 & \mu n_zc_1\\ \lambda n_yc_2 & \mu n_xc_1 & 0\\ \lambda n_zc_2 & 0 & \mu n_xc_1\end{pmatrix} \tag{2.31}$$

и взять определитель:

$$\det(\mathbf{B\Omega}) = \frac{\mu^2}{c_1 c_2^2} \cdot n_x \cdot (2(\lambda+\mu)n_x^2 - \lambda). \tag{2.32}$$

Введя обозначение ν – коэффициент Пуассона, из условия $\det(\mathbf{B\Omega}) = 0$ получаем:

$$\left[\begin{aligned} & n_x = 0 \\ & n_x^2 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \equiv \nu < \frac{1}{2}, \end{aligned}\right. \tag{2.33}$$

Здесь направление расчёта выбиралось вдоль оси x, в то время как нормаль к границе была произвольной. Очевидно, что для обобщения условия вырождения для произвольного направления расчёта $\vec{l}$ нужно n_x заменить на $(\vec{n} \cdot \vec{l})$.

Аналогично для модели акустики и граничного условия фиксированной нормальной скорости с учётом 2.9 и 2.12 получаем:

$$\det(\mathbf{B\Omega}) = \mathbf{B\Omega} = (\vec{n} \cdot \vec{l}). \tag{2.34}$$

Условия вырождения матриц СЛАУ граничного корректора для обеих моделей и двух типов граничных условий сведены в таблицу:

Модель	Фиксированная сила	Фиксированная скорость
Упругость 3D	$\left[\begin{aligned} & (\vec{n} \cdot \vec{l}) = 0 \\ & (\vec{n} \cdot \vec{l})^2 = \nu \end{aligned}\right.$	-
Упругость 2D	$(\vec{n} \cdot \vec{l})^2 = \nu$	-
Акустика	-	$(\vec{n} \cdot \vec{l}) = 0$

Можно сделать следующие выводы. Во-первых, вырождение матриц граничного и контактного корректоров возможно. Во-вторых, оно далеко не всегда связано с перпендикулярностью направления расчёта и нормали, как это могло бы показаться. В-третьих, можно отметить, что вырождение возможно только тогда, когда в запись граничного условия так или иначе входит значение нормали.

График на рисунке 3 показывает рассчитанные значения определителя и нормы обратной матрицы в случаях фиксированного напряжения для трёхмерных уравнений упругости и фиксированной нормальной скорости для уравнений акустики.

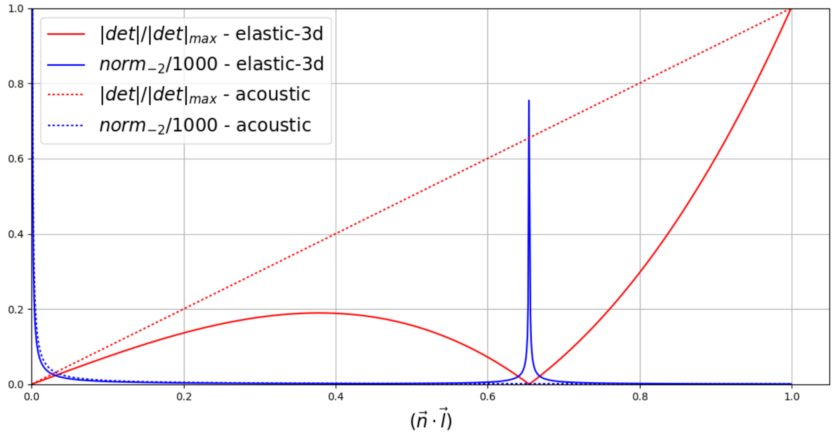

Рис. 3. К вопросу вырождения матриц граничного корректора

Игнорирование возможности вырождения матриц граничного и контактного корректоров приводит к неустойчивости метода: значения искомой функции $\vec{u}$ вблизи границы области интегрирования неограниченно возрастают. Для стабилизации необходимы дополнительные усилия.

2.5.2 Контроль определителя и согласованности начальных и граничных условий

Первое очевидное действие – проверка определителя матрицы на близость к нулю. Для двумерной и трёхмерной моделей упругости приближение к нулю определителя сопровождается резким ростом числа обусловленности, и с определённого момента точность решения СЛАУ становится неприемлемой. Для модели акустики, где размерность "матрицы" 1×1, понятие числа обусловленности теряет смысл, но, тем не менее, необходимо отсечь возможность деления на ноль.

Итак, в случае достаточной близости детерминанта к нулю нельзя производить коррекцию по изложенной схеме. Означает ли это, что, если вообще не производить коррекцию, граничные или контактные условия по итогам ступени расчёта не будут выполнены?

Когда в 2.5.1 изучается вырожденность матрицы граничного корректора, фактически ищется ответ на вопрос, насколько линейная комбинация внешних волн может повлиять на выполнение граничного условия. Заметим, что "внешние" волны – это однонаправленные волны вдоль направления расчёта, характеристики которых приходят в расчётный узел извне области интегрирования. В противовес им можно выделить "внутренние" – те, что приходят изнутри области. Также заметим, что при выкладках в 2.5.1 тот факт, что комбинация волн является именно "внешней", а не "внутренней", не имеет значения. Отсюда ясно, что обусловленность матрицы граничного корректора показывает не только возможность влияния комбинации внешних волн на выполнение граничного условия, но и вообще возможность любых волн вдоль этого направления изменять граничные условия данного типа.

Другими словами, если вдоль данного направления с помощью внешних волн невозможно повлиять на выполнение или невыполнение граничных условий, то и внутренние волны тоже не могут их нарушить. А значит, если граничные условия в узле уже были выполнены до внутреннего этапа расчёта, то они останутся выполненными и после него, и граничная коррекция не нужна.

Отсюда очевидна необходимая модификация метода. Перед внутренним этапом расчёта граничного узла значения $\vec{u}$ в нём сразу "подправляются" так, чтобы выполнялись граничные условия. Причём если граничные условия зависят от времени, то выставляются значения, соответствующие новому, а не текущему, временному слою. Это обеспечивает условие устойчивости метода на границе: на каждой ступени расчёта граничная коррекция производится лишь в том объёме, в котором внутренний этап этой ступени мог нарушить выполнение граничных условий.

Осталось уточнить слово "подправляются", специально использованное, чтобы отличить эту процедуру от граничной коррекции. Поскольку число независимых скалярных граничных условий на вектор решения M всегда меньше его размерности N, поменять его значения так, чтобы эти условия удовлетворялись, можно бесконечным числом способов, в том числе той же граничной коррекцией. В данном случае делается следующее. Граничные и контактные условия, как правило, определяют некоторые значения вектора решения $\vec{u}$ в локальном базисе, связанном с граничной или контактной поверхностью. Это может быть, к примеру, нормальная к границе области компонента скорости или вектор напряжения, действующий на граничную поверхность. Поэтому наиболее логичным представляется перевести значения $\vec{u}$ в локальный базис, после чего выставить необходимые значения согласно граничным условиям, а затем перейти обратно в глобальный базис. Эта процедура оказывает минимальное влияние на значения вектора решения $\vec{u}$.

Таким образом, возможность вырождения матриц граничного и контактного корректоров требует особого рассмотрения, но не представляет неразрешимую для метода проблему.

2.5.3 Сложные случаи на границе областей интегрирования

В случае b) на рисунке 2 количество внешних характеристик для граничного узла равняется количеству независимых скалярных граничных условий. Это означает, с одной стороны, что вся потерянная в результате выпада характеристик из области интегрирования информация компенсируется за счёт граничных условий, а с другой стороны, что имеется достаточное количество внешних волн для выполнения граничной коррекции. Варианты c) и d) отличаются от b) тем, что при ступени расчёта вдоль направления ξ_1 в случае c) отсутствуют внешние волны, с помощью которых была бы возможна граничная коррекция, а в случае d), напротив, число внешних волн превышает число граничных условий, что приводит к неизбежной потери информации. Поэтому имеет смысл говорить не о “внешних” и “внутренних” волнах, а о “правых” и “левых”.

Численные эксперименты показали, что в обоих случаях b) и c) устойчивой является следующая довольно искусственная модификация метода. Сначала по общему для всех узлов алгоритму “подправляются” под граничные условия значения вектора решения и делается внутренний этап расчёта. Затем рассчитываются два варианта граничной коррекции: с помощью “правых” и с помощью “левых” групп волн. После чего берётся их полусумма.

Аналогичные сложности и способы их решения возникают и при расчёте контактов двух областей. Отдельную же проблему представляют случаи контакта в одном узле трёх и более областей интегрирования. Разумным компромиссом между сложностью и обоснованностью алгоритма тогда является расчёт узла как граничного для каждой области, то есть игнорирование контактов с другими областями.

Предложенные решения для случаев c) и d) являются на самом деле довольно искуственными, и не решают изложенной проблемы потери информации. На практике это оборачивается тем, что на существенно неструктурированных расчётных сетках в местах, где реализуются описанные сложности, возникают нефизичные осцилляции, не возрастающие, но и не убывающие по времени. И это, в отличии от проблемы вырожденности матриц корректоров, является принципиальным ограничением метода.

====== Усложнение при некурантовском шаге (и его необходимость в 3D)

3 Дополнения

3.1 Интерполяция второго порядка на неструктурированной сетке

3.2 Стабильный алгоритм поиска ячейки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем

======Заключение: принципиальное ограничение метода Рассуждения в пользу методов с ячейками и потоками для нестр. сеток

4 Результаты

Список литературы

[1] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.

[2] Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 24:5 (1984), 722–739.

[3] Челноков Ф.Б., Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах, Матем. моделирование, 18:6 (2006), 96–108.

[4] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, http://www.cgal.org

[5] 3D generator of anisotropic meshes http://sourceforge.net/projects/ani3d