

Министерство образования и науки Российской Федерации
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ
КАФЕДРА ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И РАДИОФИЗИКИ

На правах рукописи
УДК 519.63

Казаков Александр Олегович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ
СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ**

Выпускная квалификационная работа бакалавра
Направление подготовки 010900
«Прикладные математика и физика»

Заведующий кафедрой _____ академик Гуляев Ю.В.

Научный руководитель _____ к.ф.-м.н. Васюков А.В.

Студент-дипломник _____ Казаков А.О.

Москва — 2014

Содержание

Введение	2
1 Обзор существующих работ по данной тематике	3
2 Уравнения механики деформируемого твёрдого тела	6
2.1 Уравнения механики сплошной среды в 1D	6
2.2 Уравнения движения и реологические соотношения в 3D	8
2.3 Модель пластического течения	9
2.3.1 Критерий текучести Мизеса	11
3 Численный метод	13
3.1 Численный метод в одномерном случае	13
3.2 Расщепление на упругую и пластическую части	14
3.3 Решение линейно-упругой части задачи	15
3.3.1 Матричная форма уравнений линейной упругости	15
3.3.2 Гиперболические свойства систем уравнений линейной упругости	16
3.3.3 Расщепление по пространственным направлениям	17
3.3.4 Расчёт граничных узлов	18
3.4 Пластический корректор	19
4 Полученные результаты	20
4.1 Расчёты в 1D	20
4.1.1 Линейная упругость	20
4.1.2 Упругопластика	24
4.1.3 Неявный метод	24
4.2 Расчёты в 3D	27
4.2.1 Расчёт бокового удара по телу упругопластической реологии	27
4.2.2 Расчёт прохождения пластической волны через контакт двух материалов	29
5 Заключение	36
Литература	37

Введение

В данной работе рассматриваются существующие подходы к описанию деформируемого твёрдого тела, методы численного решения получаемых уравнений и реализация на их основе компьютерного моделирования волновых деформационных процессов в твёрдых телах с пластической реологией с помощью расщепления по координатам и по физическим процессам и сеточно-характеристического метода.

Расчёты реализованы для одномерной модели – линейная упругость и упругопластика, движение тела и рассчётной сетки со вторым порядком по времени, произвольные граничные условия. Для случая трёх измерений на основе существующего программного комплекса для расчёта линейной упругости реализован метод моделирования среды с идеально-пластической реологией. Движение сетки на этапе написания диплома находится в разработке.

Для описание физических процессов используются уравнения на скорости и напряжения в частицах материала из механики деформируемого твёрдого тела. В качестве модели пластической реологии выбрана модель пластического течения без упрочнения с критерием текучести Мизеса. Она особенно подходит для описания металлов, но также может в нулевом приближении быть применена к пластикам и другим материалам.

Расчёт имеющейся системы уравнений проводится расщеплением на физические процессы упругой деформации и пластического течения. Линейно-упругая часть решается сеточно-характеристическим методом с расщеплением по трём пространственным направлениям. Пластическая часть сводится к нормирующему тензор напряжений корректору.

Интерференция деформационных волн может привести к высоким значениям напряжения, при которых происходит разрушение материала. Такие явления не могут быть замечены в статическом, и должны рассчитываться в динамическом (или волновом) рассмотрении.

Сеточно-характеристический метод построен на основе гиперболических свойств изучаемых уравнений и благодаря этому позволяет воспроизводить точную волновую картину на малых временах, что совершенно необходимо при изучении ударных воздействий на материалы.

1 Обзор существующих работ по данной тематике

Для динамических задач механики деформируемого твердого тела необходимо использование численных методов, позволяющих получить полную волновую картину с высоким временным и пространственным разрешением с учётом влияния контактных границ. Так как определяющая система уравнений в частных производных относится к гиперболическому типу, одними из наиболее используемых вычислительных методов для её решения являются сеточно-характеристические методы, подробное описание и обзор которых можно найти в [9]. Существенное продвижение было получено в работах [13], основанных на сочетании метода характеристик и конечно-разностных подходов.

В работе [14] рассматриваются особенности протекания процессов деформирования в многослойных преградах конечной толщины, вызванных ударом абсолютно твёрдого сферического тела. Для моделирования поведения материала преграды использовались реологические модели линейно-упругой среды (закон Гука), упругопластической (модель Прандтля-Рейса с условиями пластичности Мизеса и Мизеса-Шлейхера, модель Максвелла), упруговязко-пластической сред. Характерной особенностью работы является использование модели разрушения (модель Майнчена-Сака), а также использование различных подходов к перестроению сеток. Для численного решения использовался сеточно-характеристический метод, гибридная и гибридизированная разностные схемы. Минусами является использование структурированной (прямоугольной) сетки и только двух пространственных переменных.

В работе [15] проводилось численное исследование волновых и деформационных процессов в многослойных средах. Как и в предыдущей работе, использовался численно-характеристический метод, а также гибридная и гибридизированная схемы. Особенностью является использование неструктурированных (треугольных) сеток, а также применение сеточно-характеристического шаблона на неструктурированных сетках (этот подход нетипичен для данного метода, так как использование шаблона предполагает наличие структурированной сетки). Моделировался удар деформируемым сферическим ударником по многослойной (5 – 20 слоев) преграде. Данная модель описывала бронежилет и человеческое тело, защищённое им. Целью было найти опти-

мальные параметры среды для максимального поглощения воздействия ударника. К недостаткам работы можно отнести моделирование лишь по двум пространственным координатам.

В [16] рассмотрены одномерные и двумерные нестационарные задачи о действии ударных нагрузок на деформируемые твёрдые среды многослойной структуры, описаны возникающие волновые эффекты, приводящие к появлению откола. Для описания поведения среды использованы модели линейно упругого и упругоидеально-пластического тела. На поверхностях раздела слоев рассмотрены условия трёх типов: полного слипания, свободного скольжения, отслоения. В работе изучалось в основном влияние многослойных структур на амплитуду проходящей волны. На основании одномерных расчётов в слоистых средах был сделан вывод, что слоистые конструкции можно использовать для уменьшения амплитуды волн и для увеличения сжимающих напряжений вблизи лицевой поверхности, например, для увеличения силы сопротивления.

В [17] исследуются задачи распространения упругих волн, возникающих в результате землетрясения, в различных геологических средах: однородной, многослойной, градиентной, с трещиноватым пластом и карстовым образованием. Также проводится анализ воздействия упругих волн на поверхностные промышленные сооружения: здания и плотины. Проводится сравнение воздействия упругих волн на дневную поверхность для различных геологических сред. Качественно рассматривается влияние упругих волн на прочность поверхностных сооружений. В работе используется сеточно-характеристический метод на треугольных сетках, контактные границы выделяются явно.

В [18] сформулирована двумерная математическая модель механической реакции головы человека на ударные воздействия, описывающая пространственное распределение механических нагрузок на мозг (система череп-мозг с точки зрения механики также является многослойной средой). Приведены некоторые результаты ее численного исследования с применением сеточно-характеристических методов на структурированных (прямоугольных) и неструктурных (треугольных) сетках.

Работа [19] посвящена численному исследованию волновых процессов и явления откола, возникающих при импульсном нагружении двух- и четырехслойных упругопластических цилиндрических оболочек конечной толщины, подкрепленных с тыльной стороны ребрами жесткости. Используется динамическая система двумерных уравнений механики деформируемого тела и

упруго идеально пластическая модель Прандтля-Рейсса. В работе показана возможность не только получать разрушенные зоны, но и отдельные трещины, зоны концентраций напряжений вблизи трещины и края откольной зоны, которая переходит в трещину, являющуюся самостоятельным источником нестационарных возмущений.

В работе [4] рассматривается моделирование волновых процессов МДТТ в трёхмерном случае сеточно-характеристическим методом на неструктурированных тетраэдрических сетках. На основе описываемого метода реализован программный комплекс "gcm-3d" (<https://github.com/avasyukov/gcm-3d>), моделирующий линейно-упругие возмущения. Этот комплекс был взят за основу данного дипломного проекта для реализации модели пластического течения.

2 Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

2.1 Уравнения механики сплошной среды в 1D

Рассмотрим уравнения МДТТ в случае одной пространственной переменной. Здесь v – скорость частиц среды, σ – напряжение, E – модуль Юнга, ρ – плотность вещества, ε – относительная деформация.

Запишем для частицы среды массой dm и объёмом Sdx второй закон Ньютона

$$dm \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{particle} = -(\sigma(x) - \sigma(x + dx)) S = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_t S dx, \quad (2.1)$$

где $(\frac{\partial}{\partial t})_{particle}$ означает дифференцирование по времени в фиксированной частице, но не (!) фиксированной координате пространства,

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{particle} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_t \quad (2.2)$$

и закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\Delta_x(x + dx) - \Delta_x(x)}{dx} = \left(\frac{\partial \Delta_x}{\partial x} \right), \quad (2.3)$$

где Δ_x – малое отклонение частицы вещества от положения равновесия,

$$\sigma = E \left(\frac{\partial \Delta_x}{\partial x} \right). \quad (2.4)$$

Производя дифференцирование по времени опять же в фиксированной частице вещества, получаем

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_{particle} = E \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_t. \quad (2.5)$$

Существуют два основных подхода к описанию движения сплошной среды [3]:

- Эйлеров подход – когда система координат (обозначим её x) выбирается жёстко связанный с неподвижным пространством
- Лагранжев подход – система координат (ξ) жёстко связана с самой средой

дой ("вморожена" в неё в начальный момент времени, то есть фиксация ξ есть не что иное, как фиксация частицы)

В этих системах уравнения движения имеют существенно разный вид, так как дифференцирования по времени при фиксированных ξ и x связаны соотношением для полной производной:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x + v_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_t \quad (2.6)$$

Вводя вектор неизвестных $\vec{u} = (v, \sigma)^T$, перепишем 2.2 и 2.5 в виде

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \mathbf{A} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Наиболее простой вид матрица \mathbf{A} имеет, когда производная по времени берётся при фиксированных лагранжевых координатах (при этом $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ – производная именно по неподвижным эйлеровым координатам):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho} \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

В этих переменных уравнения являются линейными и не составляет сложности найти аналитическое решение переходом к инвариантам Римана \vec{w} [4]. Решение представляется в виде двух волн, распространяющихся в разных направлениях с одинаковой постоянной скоростью $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$:

$$\begin{cases} w_1(x, t) = w_1(x - ct, 0) \\ w_2(x, t) = w_2(x + ct, 0), \end{cases} \quad (2.8)$$

после чего осуществляется обратный переход к исковому вектору \vec{u} . Более подробно об этом в 3.3.2.

В эйлеровых переменных в матрице \mathbf{A} появляются диагональные конвективные члены, обусловленные переносом вещества:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & -\frac{1}{\rho} \\ -E & v \end{pmatrix}$$

Они делают систему нелинейной. Аналитическое решение в общем случае не записывается. В каждый момент времени и в каждой точке пространства это

две волны со скоростями $v(x, t) \pm c$. Из-за зависимости скоростей волн от скоростей частиц среды возможно формирование ударных волн, когда гладкое возмущение с течением времени переходит в разрывное.

В случае равенства одного из инвариантов Римана нулю получаем классическое одномерное квазилинейное уравнение. Решение формально можно записать в виде

$$w(x, t) = w(x - (c + v)t, 0), \quad (2.9)$$

где w – не равный нулю инвариант. Так как здесь v выражается через w , данное решение нельзя непосредственно вычислить, но можно сколь угодно точно приблизить итерационным методом.

Квазилинейные уравнения подробно рассмотрены в [5], откуда и были взяты вышеизложенные идеи.

2.2 Уравнения движения и реологические соотношения в 3D

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твёрдом теле используется система динамических уравнений [3] в виде

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i && \text{(уравнения движения)} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij} && \text{(реологические соотношения).} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости смещения, σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – производная по j -й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – силы, обусловленные вязкостью, q_{ijkl} – тензор упругих постоянных.

В случае малых деформаций тензор скоростей деформаций $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается через компоненты скорости смещения линейным образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \quad (2.11)$$

Вид компонент тензора 4-го порядка q_{ijkl} определяется реологией среды. Для невязкого изотропного линейно-упругого материала

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) && \text{(изотропия)} \\ F_{ij} &= 0 && \text{(отсутствует вязкость).} \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для замыкания системы уравнений 2.10 её необходимо дополнить уравнением состояния, определяющим зависимость плотности от напряжений: например,

$$\rho = \text{const}$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p}{K}},$$

где $p = -\frac{1}{3} \sum \sigma_{kk}$ – давление, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – коэффициент всестороннего сжатия.

2.3 Модель пластического течения

Существует большое количество феноменологических моделей пластической реологии сплошной среды. Многие из них [1, 2] основываются на критерии текучести $f(\sigma_{ij})$, определяющем переход между упругим $f(\sigma_{ij}) < 0$ и пластическим $f(\sigma_{ij}) = 0$ поведением материала. Случай $f(\sigma_{ij}) > 0$ полагается невозможным, то есть в пространстве напряжений компоненты σ_{ij} не могут выйти за пределы поверхности, определяемой этим критерием. Это не означает, что напряжения не могут возрастать выше определённого предела, так как в процессе деформирования поверхность текучести может изменять свою форму и расширяться, как на рис. 1. Это называется упрочнением материала. Выделяют два основных вида упрочнения:

- Изотропное – поверхность текучести расширяется симметрично относительно начала координат
- Кинематическое – поверхность текучести смещается без изменения формы

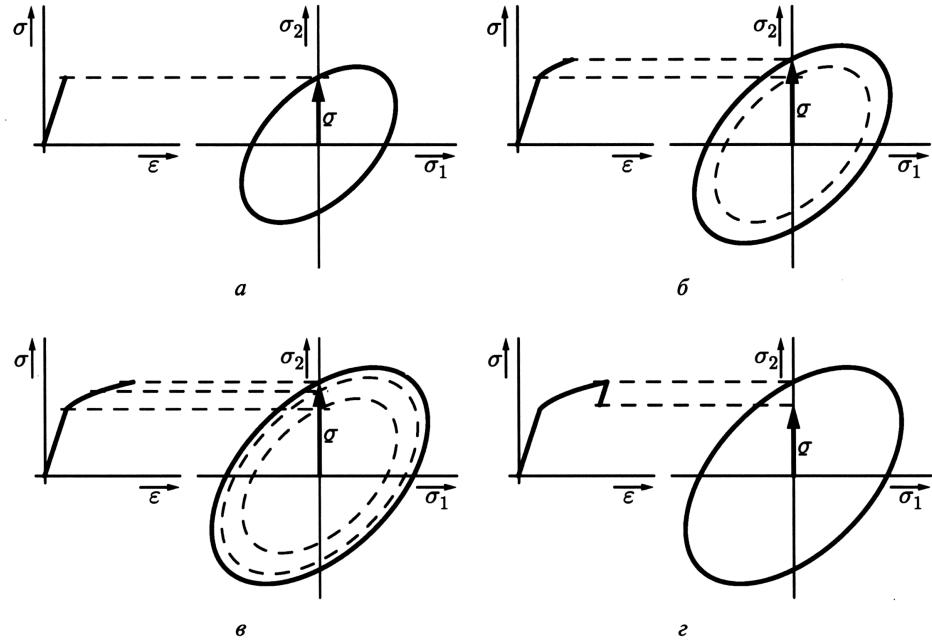


Рис. 1. Поверхность текучести и диаграмма $\varepsilon - \sigma$ для материала с изотропным упрочнением. а) Упругий участок, $f(\sigma_{ij}) < 0$, б,в) Пластика, поверхность текучести расширяется с увеличением деформации, г) Разгрузка, остаточная деформация, поверхность текучести остаётся расширенной, область упругости увеличилась. Рисунок взят из [2]

Идеально-пластическим материалом, или материалом без упрочнения, называют среду с не меняющейся при деформациях функцией $f(\sigma_{ij})$. Диаграмма $\varepsilon - \sigma$ для такого материала представлена на рис. 2, а.

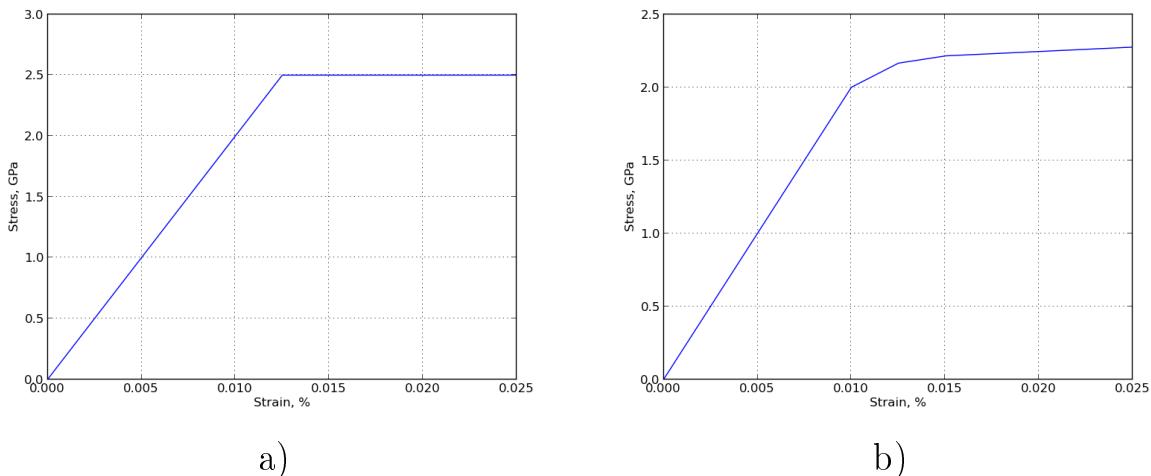


Рис. 2. Диаграмма $\varepsilon - \sigma$ для материалов а) без упрочнения, б) с кусочно-линейным упрочнением.

2.3.1 Критерий текучести Мизеса

Для металлов установлено, что пластическая деформация обусловлена взаимным смещением кристаллических плоскостей и не изменяет объёма материала. Поэтому гидростатическое сжатие

$$\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

не приводит к пластическим деформациям, и переход к пластике определяется только сдвиговыми напряжениями, то есть девиатором тензора напряжений:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}.$$

Поэтому одним из широко используемых критериев является получаемая из инвариантов s_{ij} функция

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} - k_F^2 \quad (2.13)$$

Получаемая поверхность текучести – круговой цилиндр радиуса $k_F\sqrt{2}$ с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ в пространстве главных напряжений. На рис.3 приведён цилиндр и его сечение плоскостью $\sigma_3 = 0$.

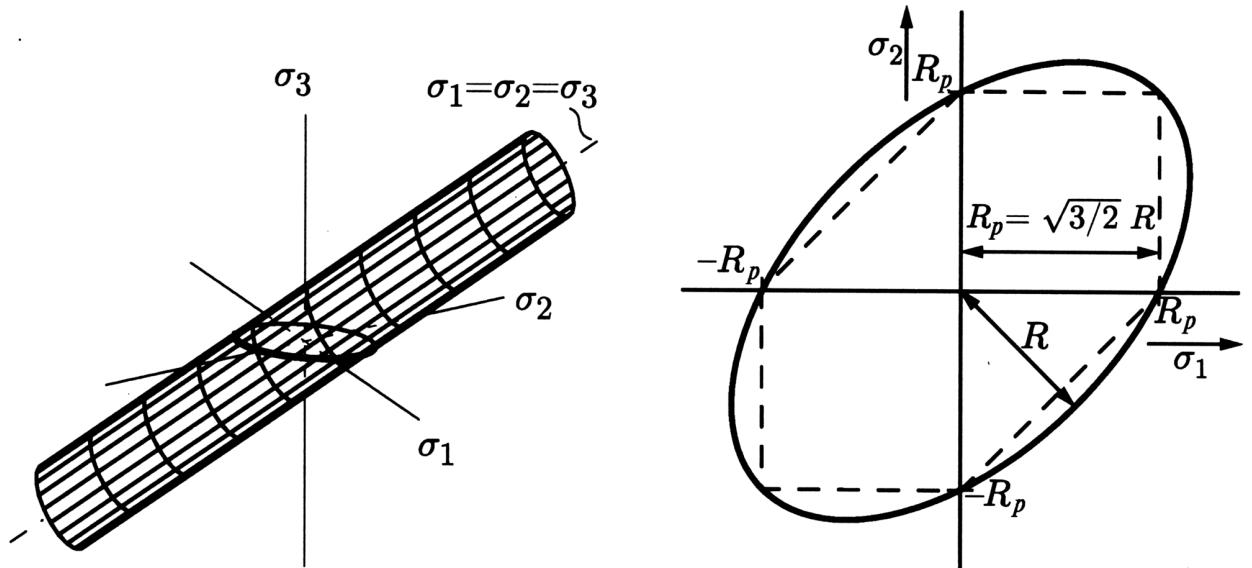


Рис. 3. Поверхность текучести в критерии Мизеса. Рисунок взят из [2]

Для полимеров же величина предела текучести при сжатии и растяжении часто бывает различна. Поэтому в критерий текучести включаются слагаемые, зависящие от гидростатического давления, и соответствующая поверх-

ность из цилиндрической переходит в параболическую (а) или коническую (б), как показано на рис.4.

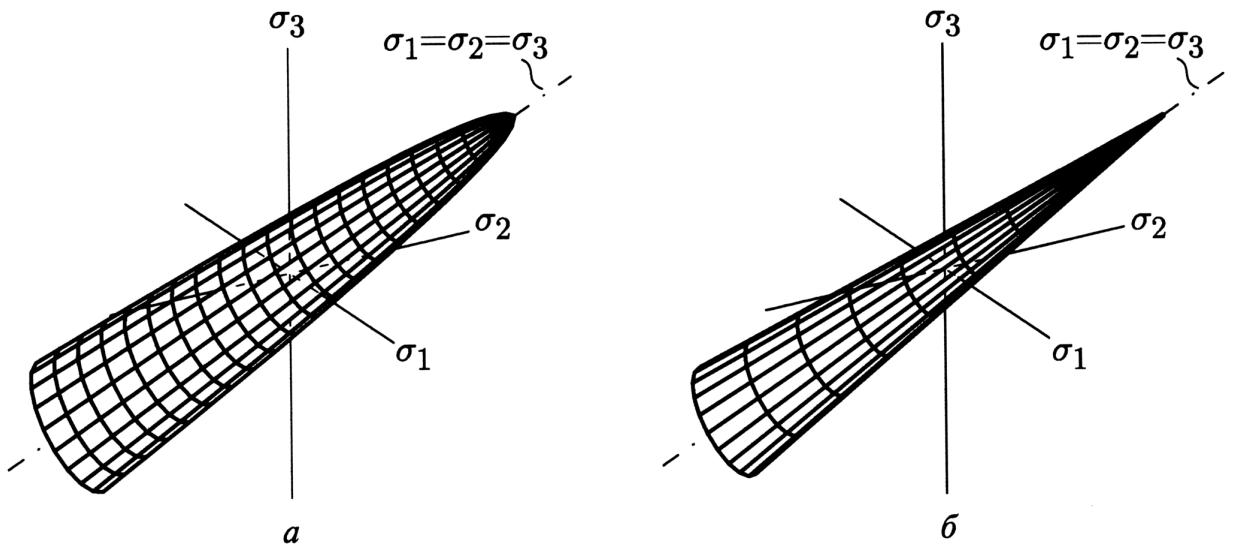


Рис. 4. Характерные поверхности текучести для пластиков. Рисунок взят из [2]

В коде для 1D были испробованы модели с кусочно-линейным упрочнением. При одноосных деформациях такая модель сводится к ступенчатой зависимости модуля Юнга от напряжения (рис. 2, б). В коде для случая трёх измерений была реализована идеальнопластическая модель, то есть модель без упрочнения (рис. 2, а).

3 Численный метод

3.1 Численный метод в одномерном случае

Как следует из 2.1, для моделирования сплошной среды можно использовать уравнения в эйлеровой, лагранжевой или смешанной форме. При этом рассчётная сетка может быть неподвижной или двигаться вместе с частицами тела. Возможны также промежуточные варианты, когда сетка движется вместе с телом, но не "вморожена" в него, для большего постоянства расстояния между рассчётными узлами.

Из наиболее простых и распространённых вариантов следует отметить следующие два:

- Неподвижная сетка и эйлеровы уравнения. К его недостаткам можно отнести сложность реализации при макроскопических деформациях тел.
- "Вмороженная" в тело сетка и уравнения в смешанной форме, где дифференцирование по времени подразумевается в фиксированной частице тела, а пространственная производная рассчитывается именно из координат рассчётных узлов в неподвижном пространстве.

В любом случае все указанные методы моделируют одну и ту же физическую систему и должны давать одинаковые результаты в пределах их точности и применимости.

В данной работе был реализован второй метод. Он подразумевает расщепление шага по времени на два физических процесса: распространение возмущения в веществе и перенос самого вещества.

Расчёт распространения возмущения осуществляется методом, являющимся упрощением его трёхмерного аналога, описанного в 3.3.2. Сама по себе реализация движения узлов сетки со вторым порядком точности по времени также не вызывает затруднений.

В методе первого порядка достаточно в конце (или в начале, что несущественно) каждого расчёта распространения возмущения в веществе перемещать узел сетки на расстояние $x_{n+1} - x_n = v_{n+1}\tau$ или $v_n\tau$. Схема данного простейшего расщепления показана на рис.5, а.

Однако для того, чтобы расчёт целиком проходил со вторым порядком точности по времени, необходимо осуществить более симметричное расщеп-

ление, чем вышеописанное. Его схема показана на рис.5, б. На очередном шаге сначала за половинное время $\tau/2$ со вторым порядком точности перемещаются рассчётные узлы. Для этого приходится рассчитать скорости в узлах в момент $t_n + \tau/2$. После этого производится расчёт скоростей и напряжений на новом слое t_{n+1} . При этом для аппроксимации берутся значения скоростей и напряжений в t_n , а координаты узлов – только что пересчитанные. После этого окончательно сдвигается сетка.

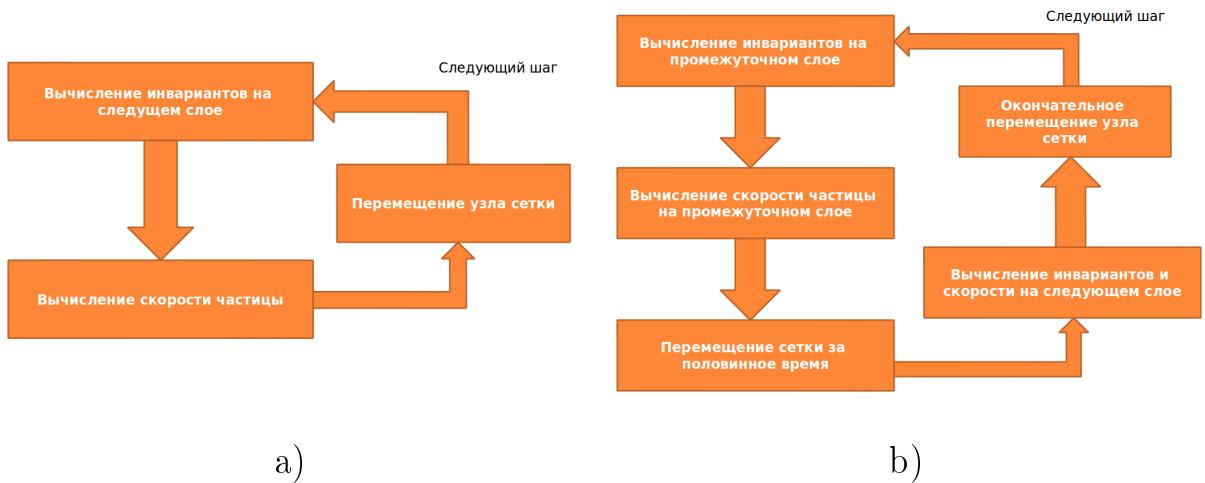


Рис. 5. Схема расщепления на процессы распространения возмущения в веществе и переноса частиц вещества а) первого, б) второго порядка точности.

Далее рассмотрим идеи численного метода в трёхмерной постановке.

3.2 Расщепление на упругую и пластическую части

Пластическая задача решается расщеплением на два физических процесса: упругая деформация и пластическое течение. Расщепление проводилось на каждом из трёх подшагов по пространственным координатам, которые будут описаны ниже. На этапе предиктора расчёт значений на новом временному слое делается как для линейно-упругого тела. Затем, в случае выхода напряжений за пределы поверхности текучести, пластический корректор возвращает их обратно на $f(\sigma_{ij}) = 0$.

3.3 Решение линейно-упругой части задачи

3.3.1 Матричная форма уравнений линейной упругости

Уравнения 2.10 и 2.12 можно переписать в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = \vec{f}. \quad (3.1)$$

Здесь $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$ – вектор искомых функций, \vec{f} – вектор правых частей той же размерности, x, y, z – независимые пространственные переменные, t – время,

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Гиперболические свойства систем уравнений линейной упругости

Рассмотрим сначала одномерное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = \vec{f}. \quad (3.2)$$

Если матрица \mathbf{A} имеет полный набор вещественных собственных значений, то такое уравнение называется гиперболическим, и его решения соответствуют процессам, которые носят волновой характер. В этом случае справедливо разложение:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – матрица, составленная из векторов $\vec{\omega}_i$, где $\vec{\omega}_i$ есть собственные векторы матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющие соотношениям

$$\vec{\omega}_i \mathbf{A} = \lambda_i \vec{\omega}_i,$$

а $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}$ – диагональная матрица собственных значений. В предположении независимости компонент матрицы \mathbf{A} от времени и координаты, домножив уравнение 3.2 слева на $\boldsymbol{\Omega}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Omega} \vec{u} + \boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\Omega} \vec{u} = \boldsymbol{\Omega} \vec{f},$$

которое после перехода к Римановым инвариантам $\vec{v} = \boldsymbol{\Omega} \vec{u}$ распадается на n одномерных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} v_i = \tilde{f}_i, \quad (3.3)$$

где $\tilde{f}_i = (\Omega \vec{f})_i$. Таким образом, решение уравнения 3.2 представляется в виде суммы плоских волн, движущихся со скоростями λ_i . Вдоль прямой с наклоном $\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i$, называемой характеристикой, 3.3 переходит обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_i}{dt} = \tilde{f}_i. \quad (3.4)$$

Благодаря этому для численного решения 3.2 предлагается использовать сеточно-характеристический метод, суть которого состоит в следующем. Из того узла m временного слоя $n+1$, в котором требуется получить решение, опускаются характеристики. Из точки пересечения характеристики со слоем n значение

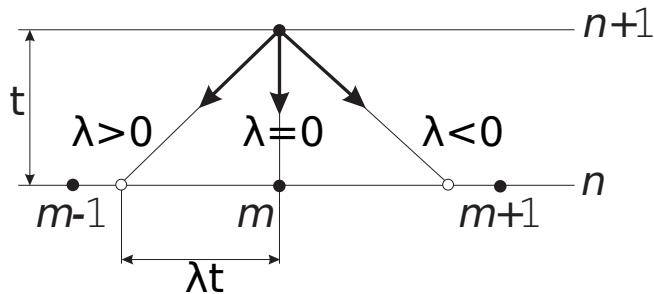


Рис. 6. Принципиальная схема сеточно-характеристического метода.

v_i переносится в точку ξ_m^{n+1} путём решения 3.4:

$$v_i^{n+1}(\xi_m) = v_i^n(\xi_m - \lambda_i \tau) + \tilde{f}_i \tau.$$

Если характеристика не попадает точно в рассчётный узел, то применяются различные методы реконструкции значения в данной точке (в данной работе используется интерполяция соответствующего порядка).

3.3.3 Расщепление по пространственным направлениям

Идея метода [12] решения исходной задачи состоит в расщеплении по трём пространственным координатам, то есть в разделении на этапе численного решения трёхмерной системы уравнений 3.1 на три одномерных. На уровне дифференциальных операторов это может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.7)$$

Эти уравнения решаются последовательно описанным в предыдущем параграфе методом с использованием на очередном подшаге результатов, полученных на предыдущем подшаге.

3.3.4 Расчёт граничных узлов

Описанный выше чистый метод характеристик применяется только для расчёта внутренних узлов сетки, то есть в том случае, если выпущенная из точки характеристика не выходит за пределы области интегрирования. В противном случае для нахождения значений на новом временном слое составляется система уравнений, в которой данные выводящих характеристик заменяются граничными и контактными условиями. Рассматриваемая система уравнений в граничных узлах имеет не более трёх [11] выводящих характеристик.

Границные условия могут быть нескольких видов, например (символы без волны – для первого тела, с волной – для второго):

- жёстко закреплённая граница

$$v_\tau = v_n = 0;$$

- свободная граница

$$\sigma_\tau = \sigma_n = 0;$$

- скольжение тел друг относительно друга

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ \sigma_n &= \tilde{\sigma}_n, \\ \sigma_\tau &= \tilde{\sigma}_\tau = 0; \end{aligned}$$

- слипание тел

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ v_\tau &= \tilde{v}_\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти условия доопределяют СЛАУ на значения инвариантов Римана на новом временном слое.

3.4 Пластический корректор

В данной работе был реализован простейший корректор, реализующий нормировку вектора напряжений. Этот способ известен как правило корректировки Уилкинса [6], и верен только для идеальнопластической среды без упрочнения.

Рассчитанные в ходе эластичного предиктора напряжения в случае выхода за поверхность текучести $f(\sigma_{ij}) \geq 0$ (см. 2.13), возвращаются на неё путём умножения на нормировочный коэффициент:

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^e \frac{k_F}{J_2^e} \quad (3.9)$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (3.10)$$

4 Полученные результаты

4.1 Расчёты в 1D

Для одномерной модели сплошной среды были реализованы расчёты линейно-упругой и пластической реологии, движение сетки со вторым порядком точности по времени, получена ударная волна, а также исследован неявный метод второго порядка точности.

4.1.1 Линейная упругость

Неподвижная сетка На неподвижной сетке был реализован метод второго порядка по координате, основанный на аппроксимации инвариантов Римана по трём точкам. Расчёт по данному методу не учитывает движение тела в направлении вдоль колебаний, и может быть применён только в случае малости скоростей или моделировании поперечных колебаний. На рис.7 показана скорость частиц тела в разные моменты времени, в том числе после отражения от жёстко закреплённой границы (граничное условие $v = 0$, скорость изменяет знак).

В отличие от метода первого порядка, данный в сочетании с лимитером "minmax" даёт значительно меньшее размытие волнового фронта, при этом осцилляций практически не возникает.

Подвижная сетка В силу равенства нулю правой части и неподвижности сетки вышеизложенный метод абсолютно точен по времени. В случае движения сетки возникают проблемы с порядком точности по времени, которые решаются более симметричным расщеплением процессов распространения возмущения и переноса вещества, описанным в .

На рис.8 показано отражение упругой волны от свободной границы (граничное условие $\sigma = 0$, скорость сохраняет знак). Благодаря расщеплению размытие фронта остаётся таким же, как и в методе на неподвижной сетке.

Ударная волна Подвижность сетки позволяет получать гораздо более реальные результаты – к примеру, в случае достаточно больших скоростей начальных возмущений, независимо от их гладкости, в материале образуется ударная волна (рис.9).

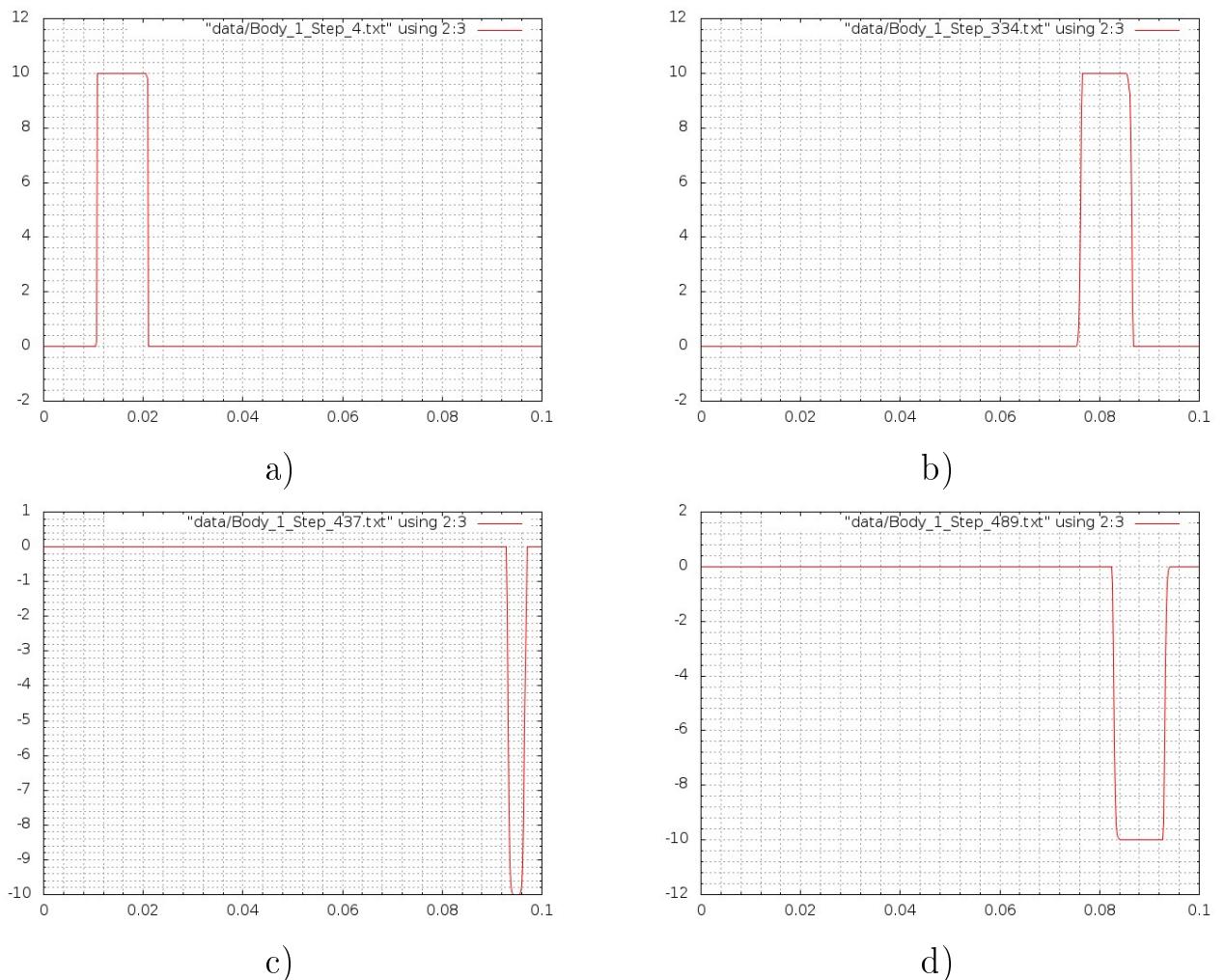


Рис. 7. Распространение прямоугольного импульса, неподвижная сетка а) начальное возмущение, б) импульс прошёл через всё тело, в) отражение от закреплённой границы, г) Отражённый импульс.

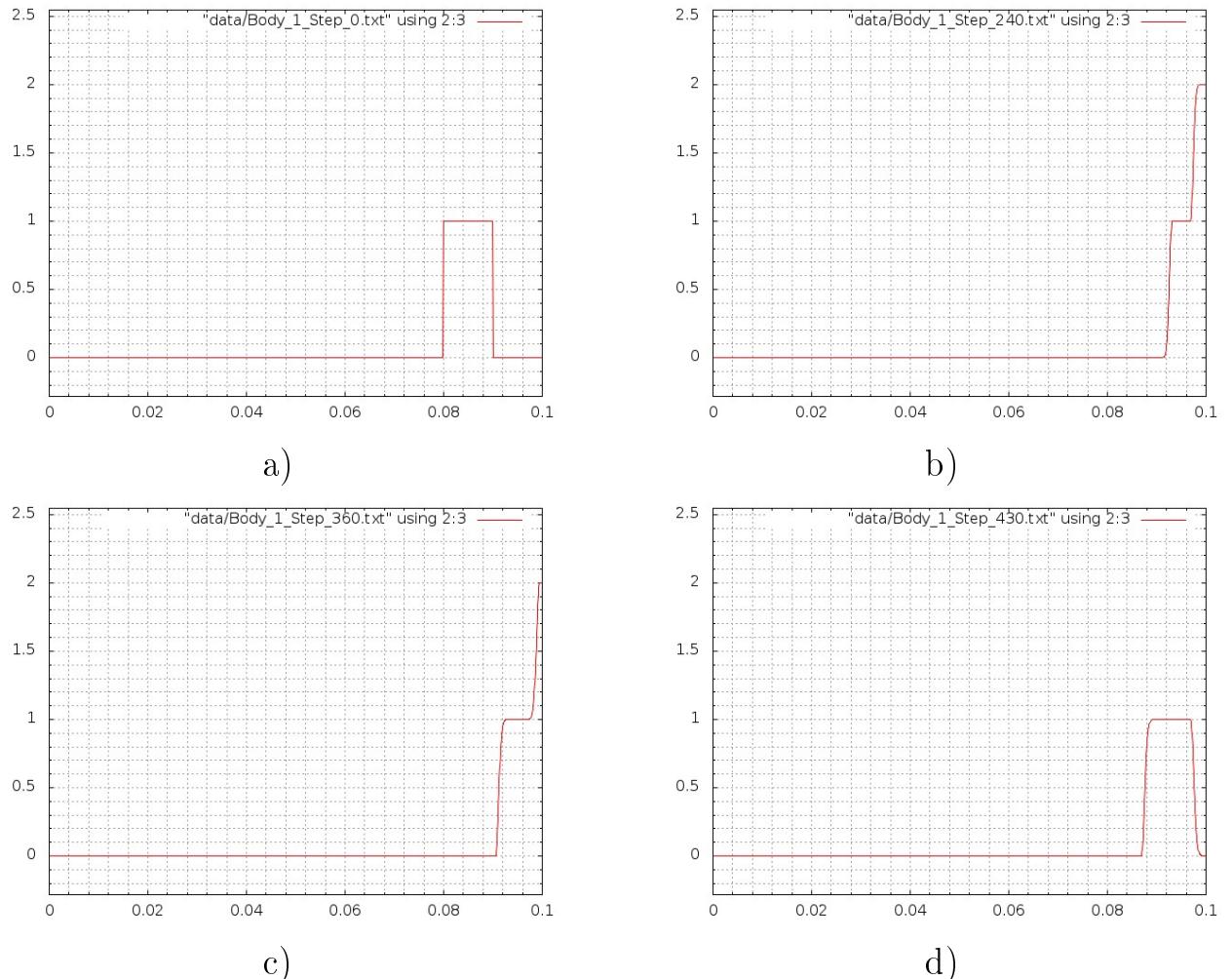


Рис. 8. Распространение прямоугольного импульса, подвижная сетка а) начальное возмущение, б,с) отражение от свободной границы, д) Отражённый импульс.

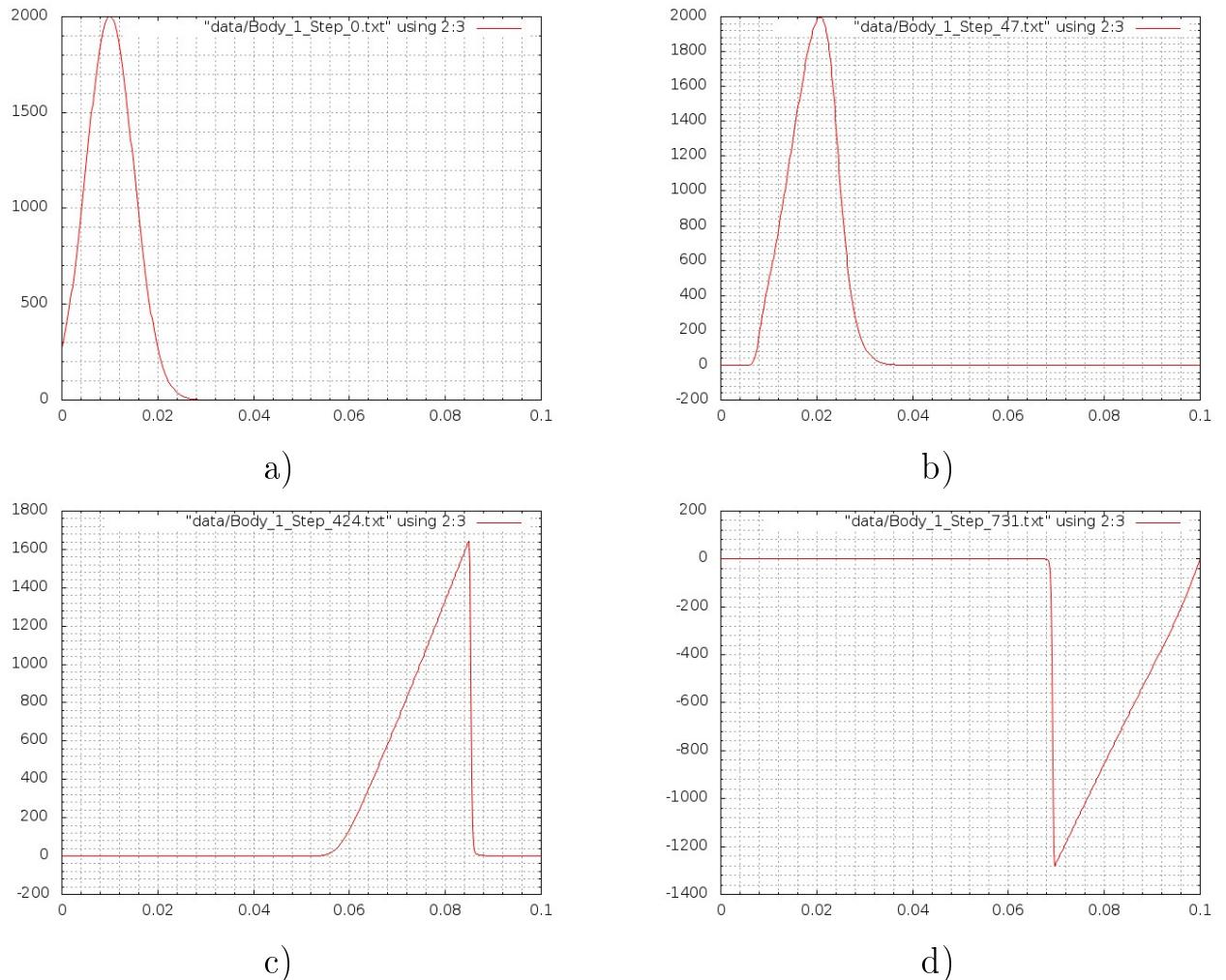


Рис. 9. Формирование ударной волны при гладком начальном условии
а) начальное возмущение - гауссова кривая, б,с) опрокидывание
фронтов, д) отражённый импульс.

Расчёт слоистой структуры Также в работе был произведён расчёт прохождения возмущения через многослойную структуру с возрастающей от слоя к слою плотностью. На рис.10 показаны значения скорости в частицах материала по мере прохождения в новые слои.

Сравнение численных расчётов с аналитическими результатами, изложенными в [16], показало их совпадение с высокой (относительная ошибка 10^{-10} во втором слое и 10^{-3} в пятом) точностью.

4.1.2 Упругопластика

Для случая упругопластики в одномерном случае была использована модель с кусочно-линейным по напряжению модулем Юнга (производной $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$) и однозначной зависимостью $\sigma - \varepsilon$. Распространение пластического возмущения показано на рис.11.

Четыре "ступеньки" в пластической волне обусловлены четырьмя различными значениями модуля Юнга, и, соответственно, скоростями распространения $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Значения напряжений в них совпадают с максимальным верхним пределом, при котором модуль Юнга всё ещё имеет соответствующее значение.

4.1.3 Неявный метод

В рамках одномерного кода был также реализован неявный метод второго порядка на неподвижной сетке, описанный в [1], стр. 183, являющийся абсолютно устойчивым по времени. Однако практика показала, что он менее пригоден для моделирования динамических процессов ввиду ряда недостатков:

- Общая сложность реализации, которая вряд ли позволит применить метод в трёхмерном случае
- Автору неизвестен метод распараллеливания на произвольное число процессов
- Существенно большее размытие фронтов и величина осцилляций, чем у явного метода второго порядка (см. рис.12)
- Несмотря на абсолютную устойчивость, при выборе большого шага по

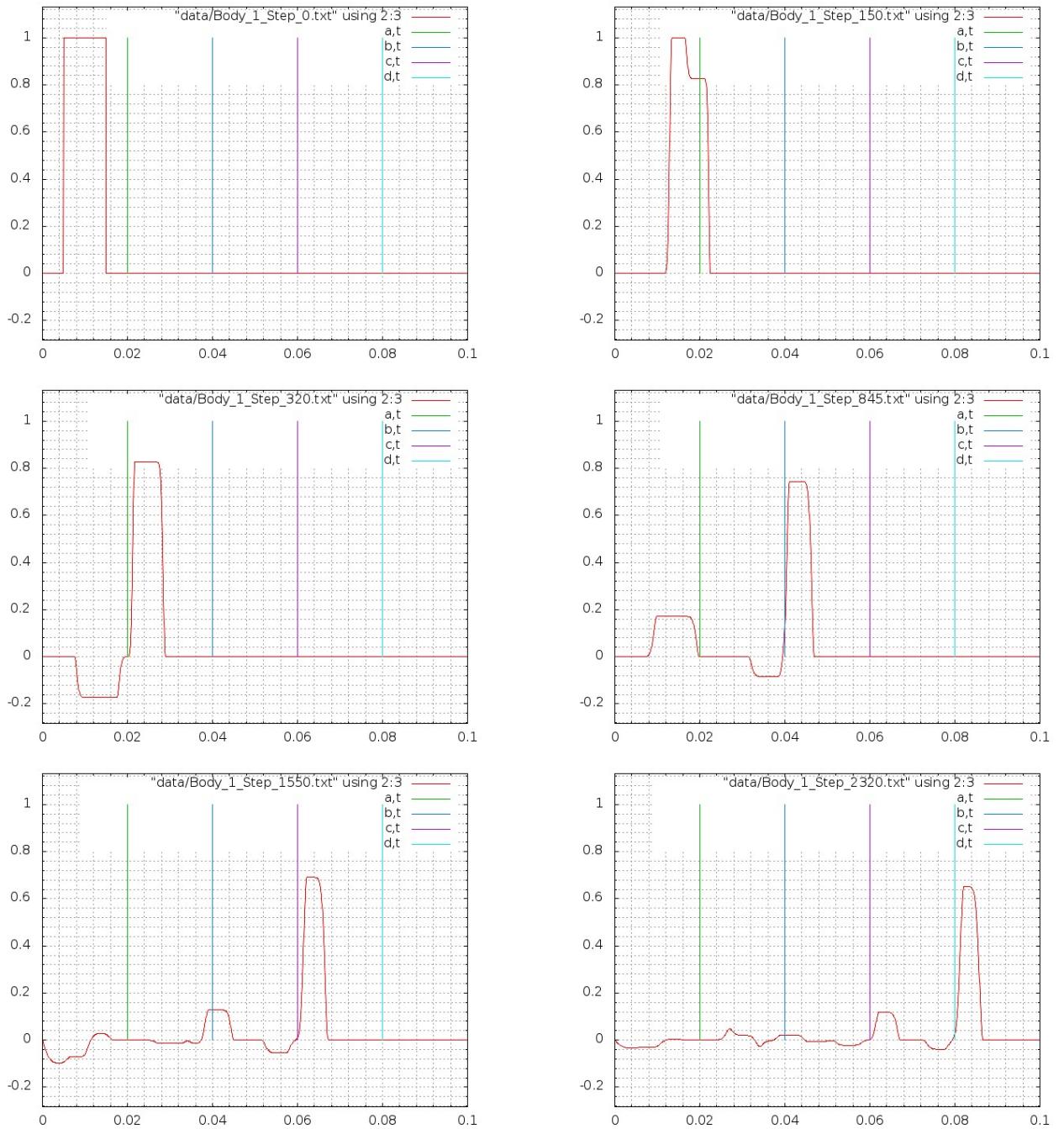


Рис. 10. Прохождение упругой волны через слоистый материал.

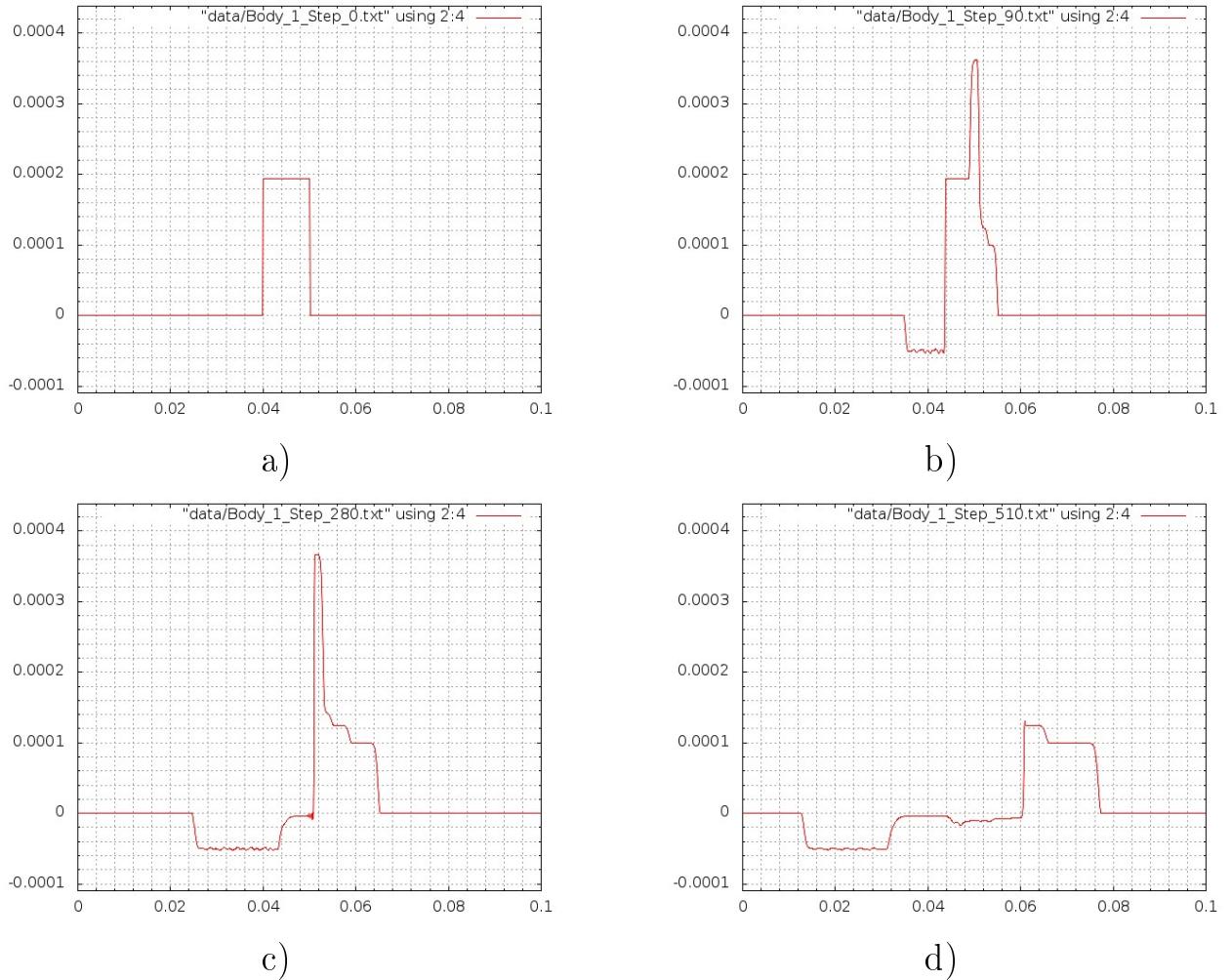


Рис. 11. Пластические возмущения а) начальное возмущение - прямоугольник, б) влево уходит чисто упругая волна, справа образуются "упругие предвестники" с) отчётливые четыре "ступеньки" в пластической волне, д) пластическая волна переходит в упругую.

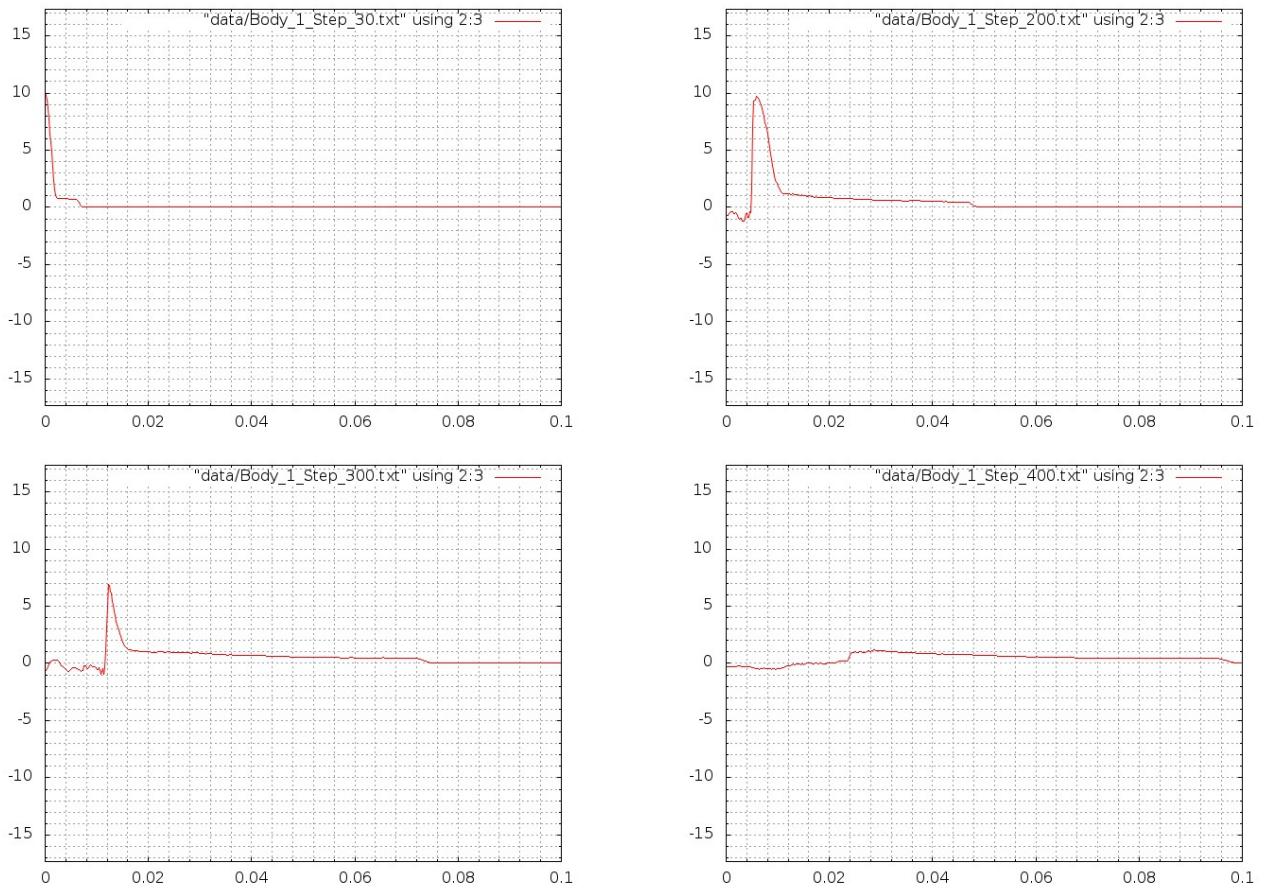


Рис. 12. Боковой удар по телу с пластической реологией. Расчёт неявным методом второго порядка со сглаживанием

времени смоделированная картина перестаёт соответствовать действительности

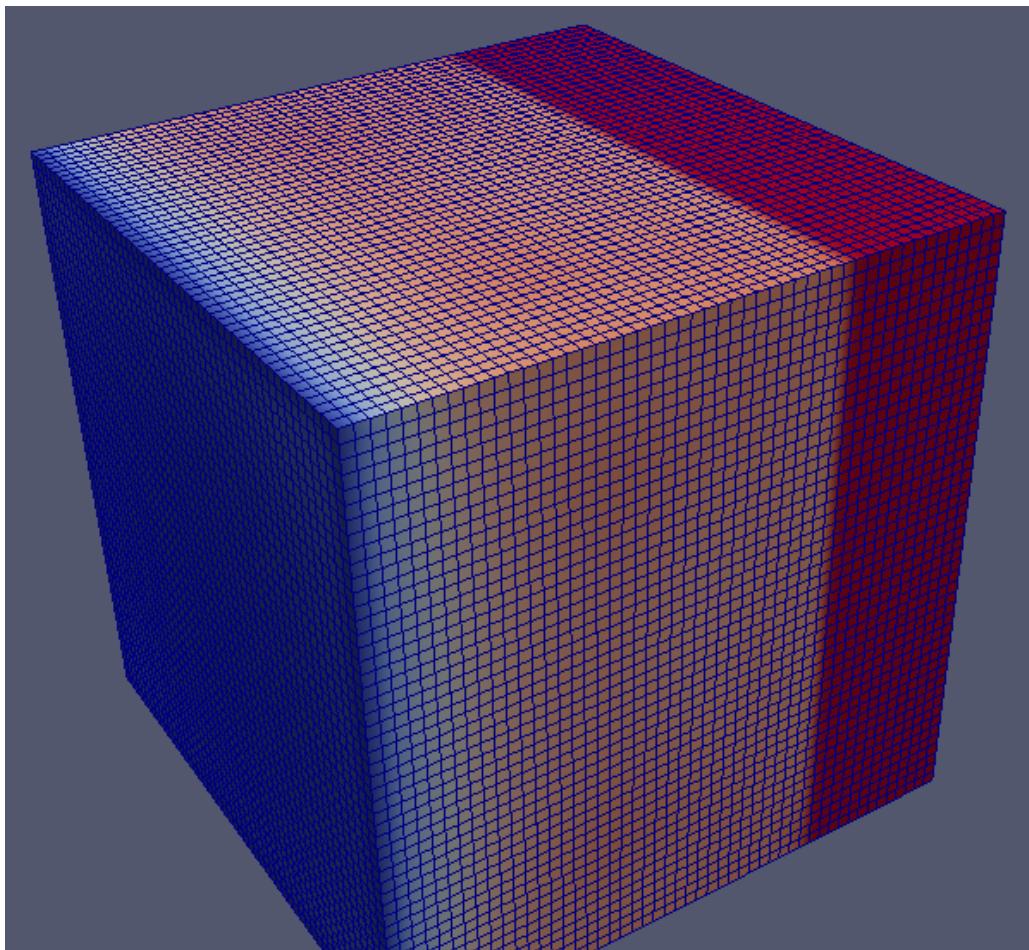
Возможно, данный метод будет полезен для статических расчётов, в которых не важна кратковременная волновая картина и требуется расчёт на существенно больших временах.

4.2 Расчёты в 3D

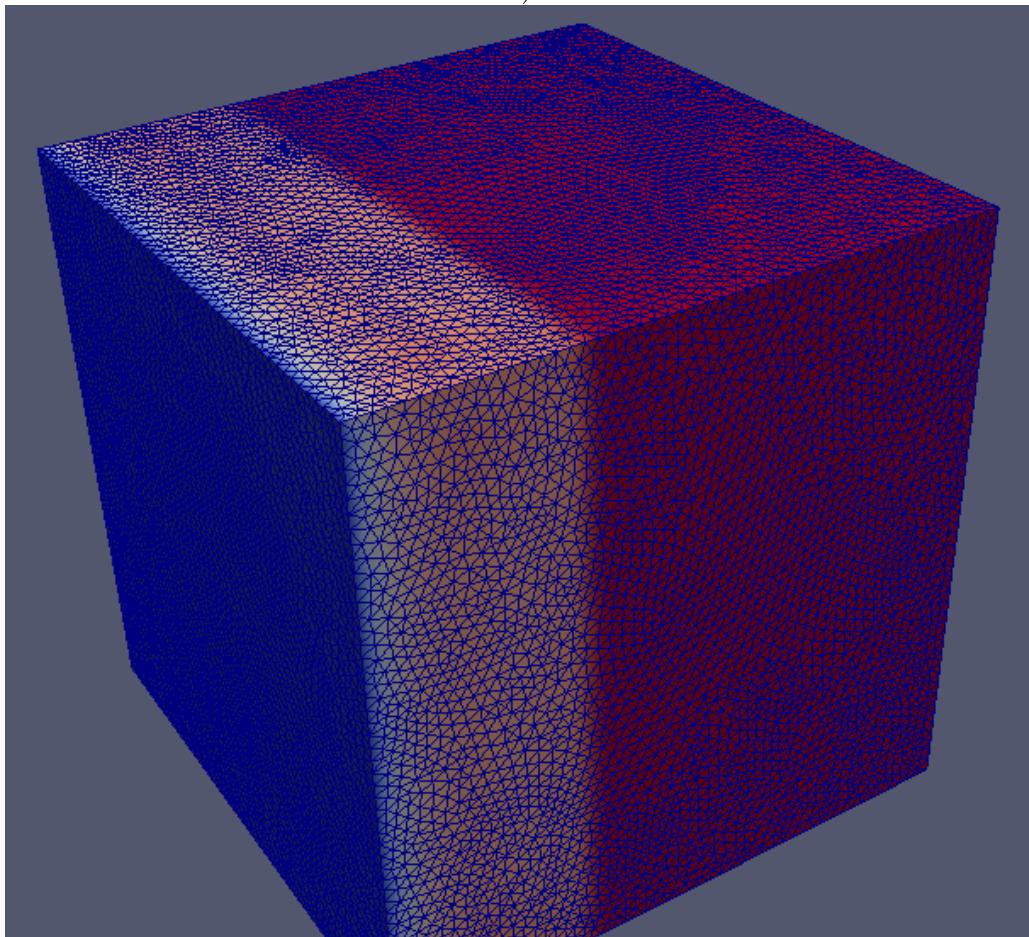
Для трёхмерной модели сплошной среды на основе существующего программного комплекса, поддерживающего расчёт линейно-упругой реологии, был реализован расчёт упругопластической реологии на основе теории пластического течения с критерием текучести Мизеса. Расчёт был проведён на кубической (рис. 13,а) и тетраэдрической сетках (рис. 13,б)

4.2.1 Расчёт бокового удара по телу упругопластической реологии

Смоделирован удар по телу пластической реологии типа металла.



a)



b)

Рис. 13. Вид рассчётной сетки: а) кубическая, б) тетраэдрическая

"Удар" представляет собой граничное условие фиксированного напряжения, превышающего предел текучести материала, конечной или бесконечной длительности по времени. Характерный вид возмущения в 3D можно видеть на рис.13.

На рис.14 показаны волны напряжений (в направлении прямой вдоль удара), возникшие от сильного бокового удара по модельному кубику. Можно видеть быструю волну, распространяющуюся со скоростью звука и по амплитуде равной пределу текучести материала – "упругий предвестник". Затем с меньшей скоростью распространяется пластическая волна.

Из рисунка видны различия решения при расчётах на кубических и тетраэдрических сетках. К преимуществам кубической сетки можно отнести большую быстроту счёта при той же мелкости и меньшее размывание фронтов. Однако для сложных форм тел и начальных возмущений целесообразнее применять тетраэдрическую сетку, которая намного лучше заполняет рассчётную область и не создаёт численной анизотропии решения.

На рис.15 показан двумерный срез куба, по которому нанесён боковой удар конечной длительности. Заметно отрицательное влияние отражённых от границы волн, размывающих интересующее плоское решение.

Более детально результаты удара конечной длительности позволяет рассмотреть одномерный рис.16, на котором видна волна разгрузки (волна Рахматулина), следующая за пластическим возмущением. Амплитуда волны упругой разгрузки, отсчитанная от амплитуды пластичекой волны, в два раза превышает амплитуду упругого предвестника, что соответствует аналитическому рассмотрению одномерной волны Рахматулина [6].

4.2.2 Расчёт прохождения пластической волны через контакт двух материалов

В рамках расчёта слоистых структур при динамических нагрузках было смоделировано прохождение упругопластической волны через контакт двух тестовых материалов с отличающейся в четыре раза плотностью.

На рис.17 показано в косом срезе испытуемое двухслойное тело.

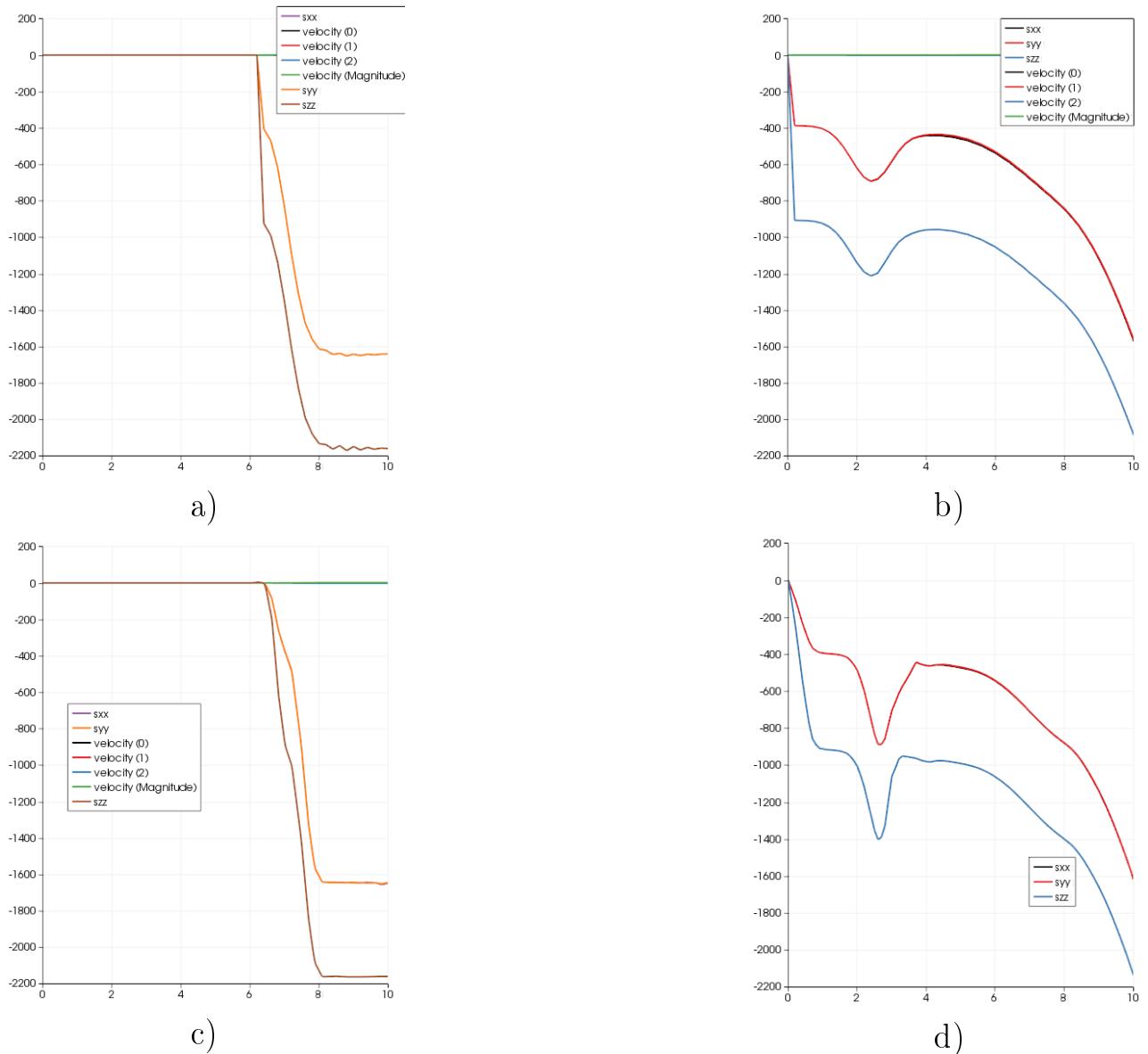


Рис. 14. Профиль волны от бокового удара по стальному кубику. а,б - кубическая сетка, с,д - тетраэдрическая сетки

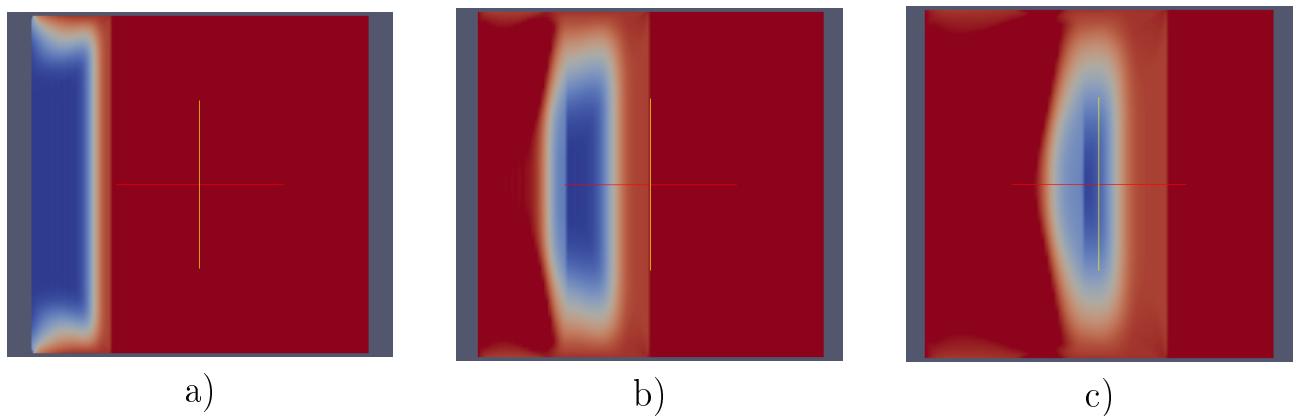


Рис. 15. Профиль волны от бокового удара конечной длительности. а,б,с - последовательные моменты времени

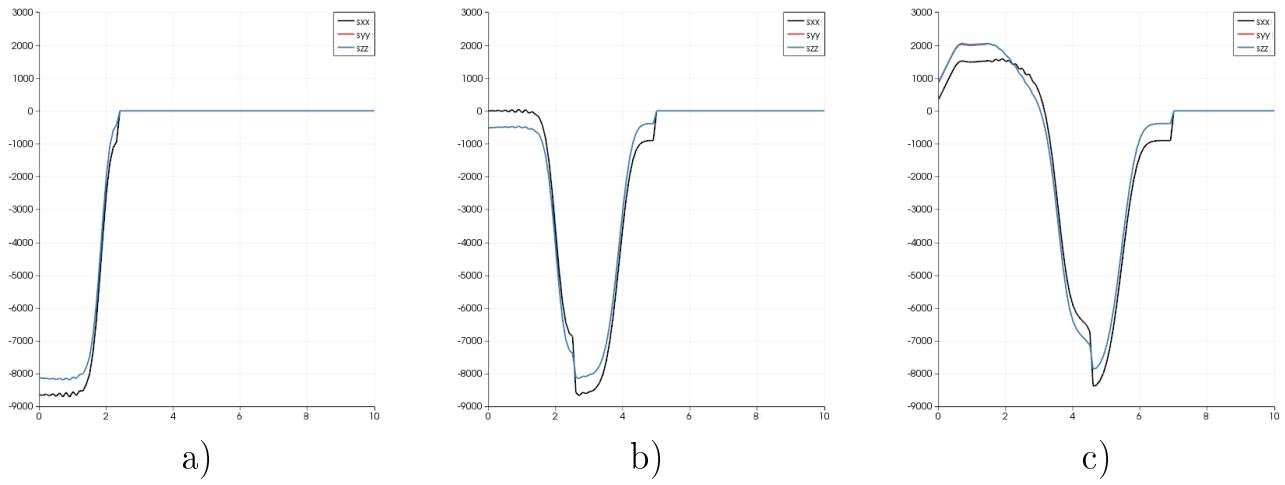


Рис. 16. Профиль волны от бокового удара конечной длительности. Значения напряжений в направлении прямой вдоль удара. а,б,с - последовательные моменты времени

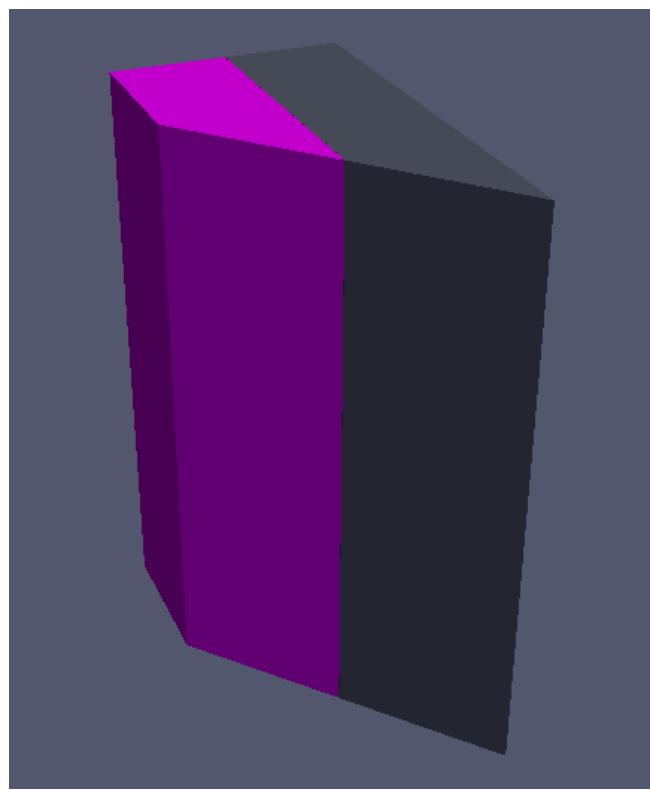
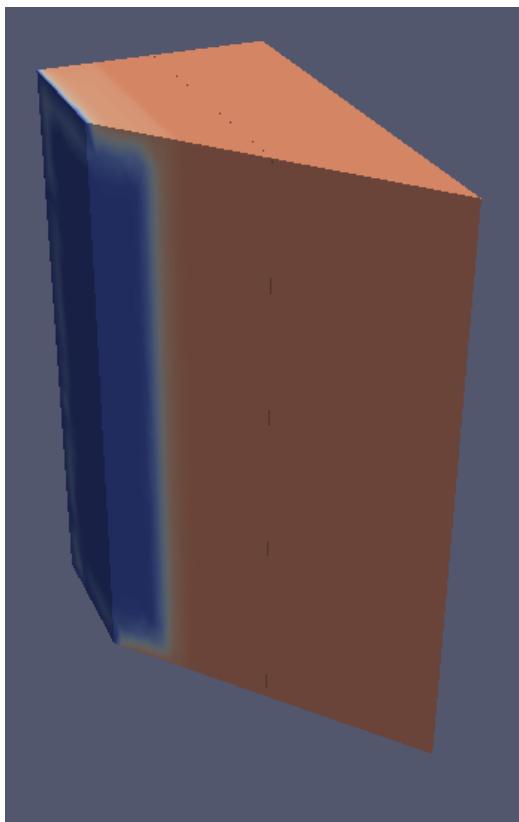


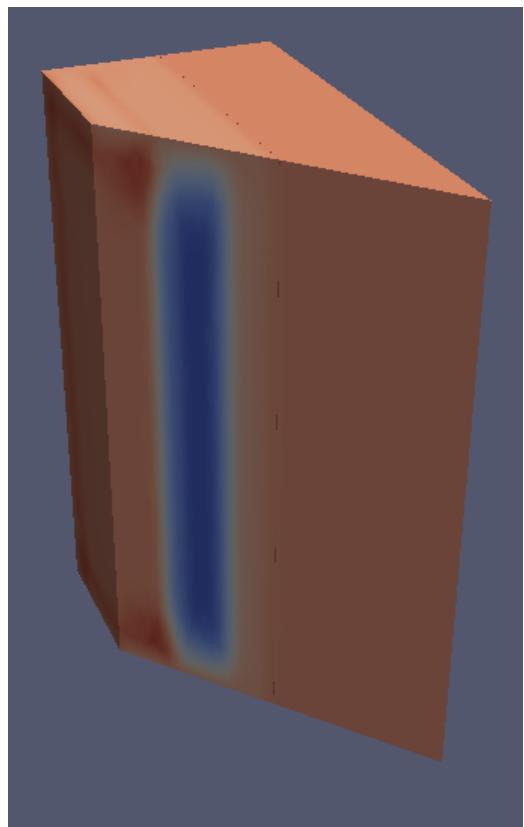
Рис. 17. Косой срез тела, по которому наносится боковой удар. Разными цветами показаны разные материалы

Ниже (рис.18) показан вид возмущения (компонента тензора напряжений в направлении удара σ_{xx}) в трёхмерном пространстве. Синему цвету соответствуют высокие отрицательные напряжения, красному – положительные.

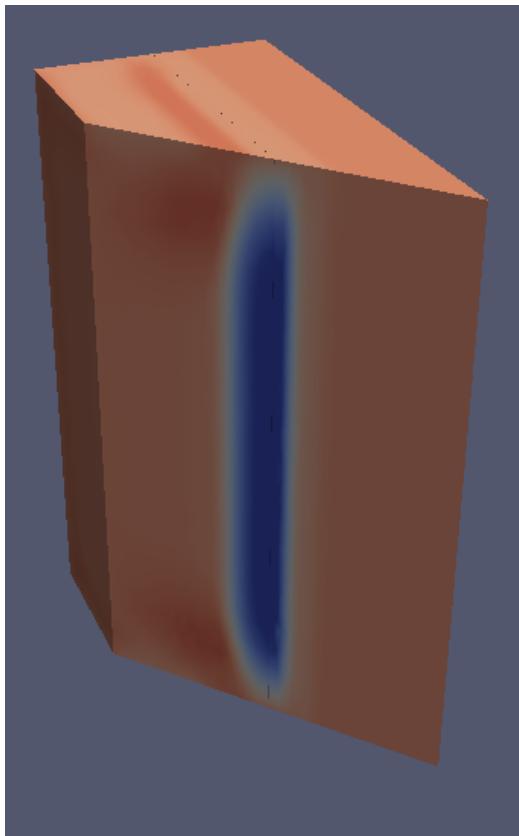
Сравнение решения с учётом пластической реологии с решением в чисто упругой постановке проведено на двумерном срезе вдоль направления удара на рис.19 и на одномерных графиках (рис.20 и 21) напряжений вдоль направления удара.



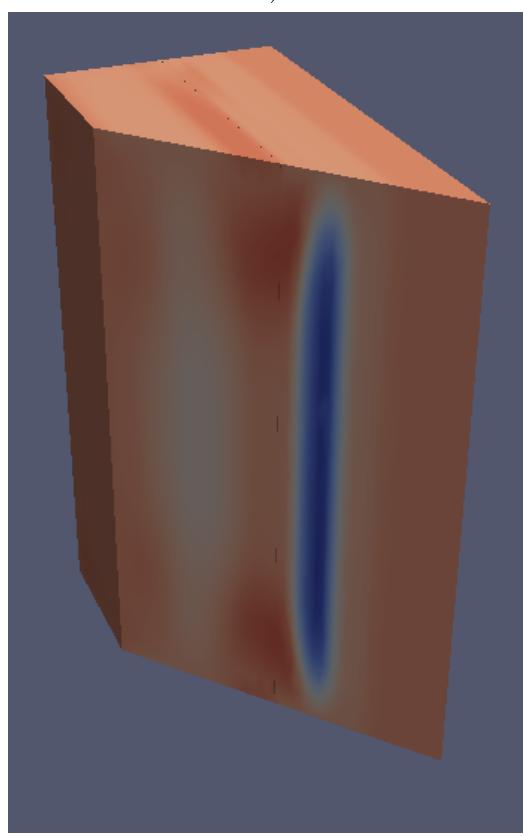
a)



b)



c)



d)

Рис. 18. Прохождение упругопластической волны через контакт (полное слипание) в 3D (цветом показаны значения σ_{xx})

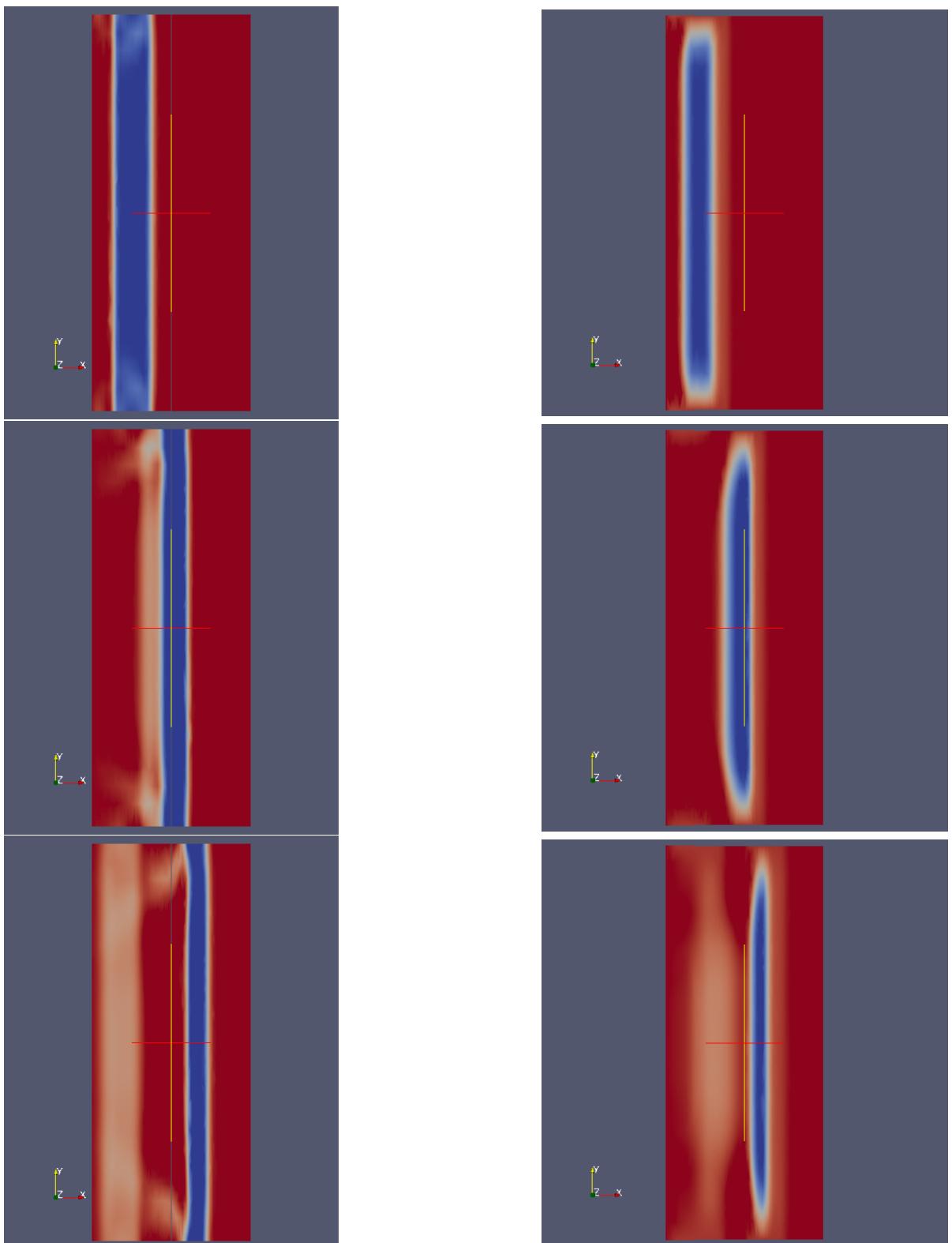


Рис. 19. Сравнение отклика тел с линейно-упругой (слева) и упругопластической (справа) реологией на одинаковое начальное возмущение



Рис. 20. Прохождение упругой волны через контакт двух материалов: а) до прохождения контакта, б) после

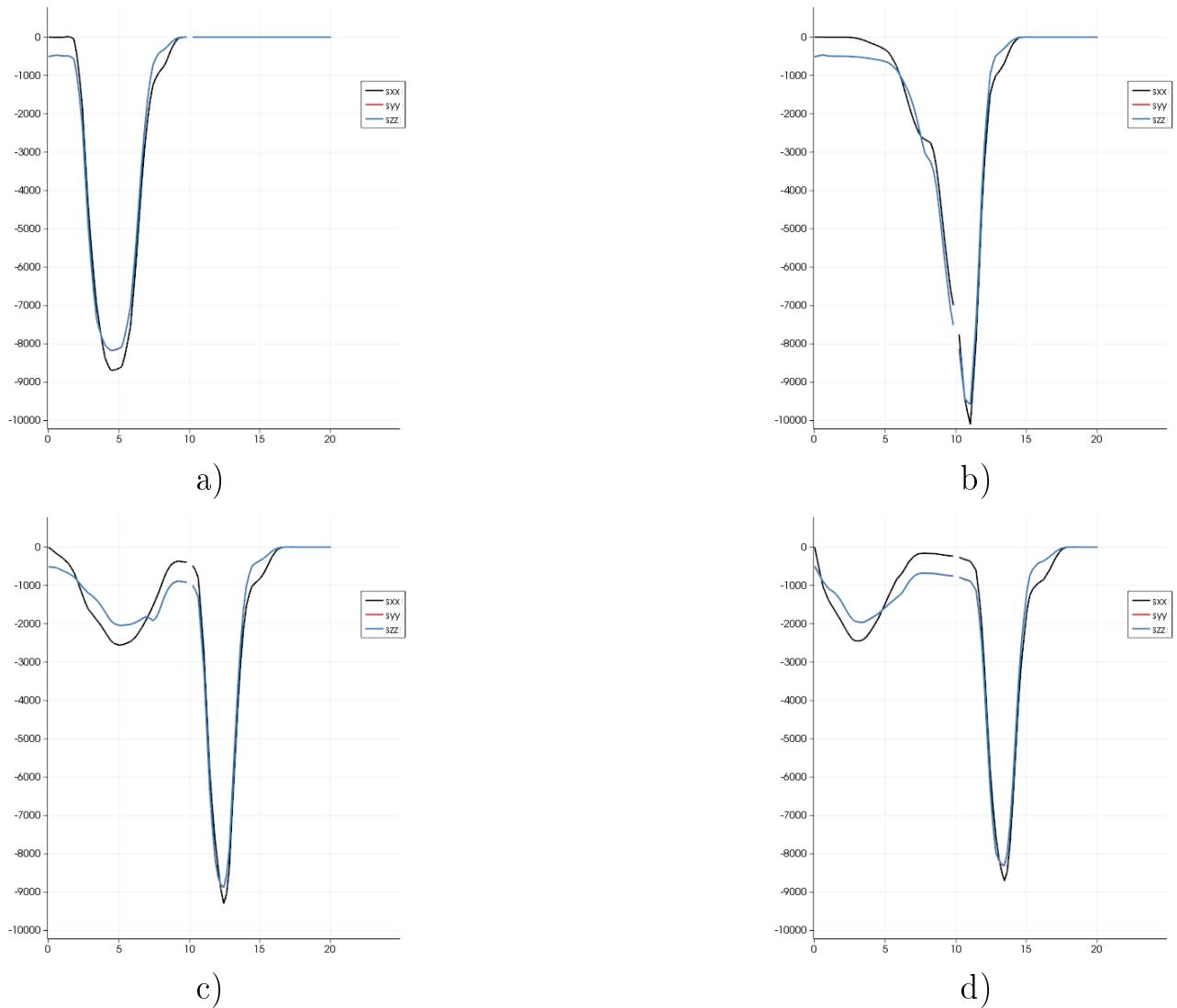


Рис. 21. Прохождение упругопластической волны через контакт двух материалов, последовательные моменты времени

Помимо отличий чисто упругой волны от упругопластической, проявляющихся в наличии у первой упругого предвестника, волны упругой разгрузки и, собственно, пластической волны, имеются отличия, связанные с прохождением контакта.

Амплитуда напряжений прошёлшей в более плотный слой волны не возрастает, что обусловлено наличием предела текучести, одинакового в обоих материалах. В профиле отражённой волны появляются области, где компоненты напряжений, перпендикулярные направлению распространения, пре-восходят нормальную компоненту.

Несмотря на простоту используемой модели, в расчётах удалось получить многие известные эффекты для упругопластических материалов.

5 Заключение

Результаты, полученные в результате выполнения дипломного проекта:

- Рассмотрены различные подходы к описанию движения сплошной среды в сочетании с применяемыми к ним численными методами
- Предложен метод моделирования сплошной среды в 1D с учётом движения и деформации тела, в том числе схема второго порядка точности по координате с учётом изменения характеристик среды в пространстве, точная со вторым порядком по времени схема расщепления рассчётного шага на движение рассчётной сетки и перенос возмущения
- На основе данного метода реализован программный комплекс, моделирующий деформируемое твёрдое тело в случае одного пространственного измерения с поддержкой упругой и упругопластической реологии
- Проведено сравнение результатов работы данного программного комплекса с результатами полуаналитического рассчёта на основе принципиально другого подхода к описанию сплошной среды и итерационного метода. Получена сходимость результатов со вторым порядком точности по времени и координате
- Предложен способ моделирования идеально-пластической реологии в 3D на основе правила корректировки Уилкинса
- Данный способ реализован на основе существующего программного комплекса, поддерживающего линейную упругость в 3D
- Полученные результаты на качественном и количественном (в пределах погрешностей методов) совпадают с известными из работ других авторов

Список литературы

- [1] Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошное сред. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2008, с. 32, с. 242, с. 271.
- [2] И.Реслер, Х.Хардерс, М.Бекер Механическое поведение конструкционных материалов. Перевод с немецкого. - Долгопрудный, Издательский дом «Интеллект», 2011, с. 91-115
- [3] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — М. : Наука, 1970, с. 143.
- [4] Васюков А.В. Численное моделирование деформаций и повреждений в сложных конструкциях при действии динамической нагрузки (кандидатская диссертация). Москва, 2012
- [5] Рождественский Б.Л. Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике – М.: Наука, 1978
- [6] Уилкинс М.Л. Расчёт упругопластических течений, статья в сборнике Вычислительные методы в гидродинамике – М: Издательство Мир, 1967, с. 212-263
- [7] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
- [8] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Физико-математическая литература. 1994, 442 с.
- [9] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.
- [10] Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа.
- [11] Челноков Ф.Б. Численное моделирование деформационных процессов в средах со сложной структурой.
- [12] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994, 528 с.

- [13] Чушкин П.И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – Труды ВЦ АН СССР, 1968, с. 121.
- [14] Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2003, том 43, N 10, с. 1562-1579.
- [15] Matyushev N.G., Petrov I.B. Mathematical Simulation of Deformation and Wave Processes in Multilayered Structures // Computational Mathematics and Mathematical Physics – 2009, Vol. 49, N 9, P. 1615-1621.
- [16] Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С. О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // Механика твердого тела – 1989, N 4, с. 89-95.
- [17] Голубев В.И., Квасов И.Е., Петров И.Б. Воздействие природных катастроф на наземные сооружения // Математическое моделирование – 2011, том 23, N 8, с. 46-54.
- [18] Агапов П.И., Белоцерковский О.М., Петров И.Б. Численное моделирование последствий механического воздействия на мозг человека при черепно-мозговой травме // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2006, том 46, N 9, с. 1711-1720.
- [19] Петров И.Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // Механика твердого тела – 1986, N 4, с. 118-124.