

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Nichtlineare Stabilität von impliziten Lie-Gruppen-Integratoren

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science

im Studiengang Mathematik mit Anwendungsfach

vorgelegt von:

Alexander Sebastian Johann Klemps

Matrikelnummer: 213203168

vorgelegt am:

07.10.2019

Erstgutachter:	Prof. Dr. Martin Arnold
Zweitgutachterin:	M. Sc. Victoria Wieloch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Lie-Gruppen	3
1.1 Lie-Gruppen und Tangentialräume	3
1.2 Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen	7
2 Erweitertes Kreisel-Modell	10
2.1 Konfigurationsräume	10
2.2 Bewegungsgleichungen	12
2.3 Kreisel-Modell	17
2.4 Erweiterung um Torsionsfeder	20
3 Generalized-α-Verfahren	26
3.1 Newton-Raphson-Iteration	28
3.2 Implementierung in Python	30
4 Stabilität	33
4.1 Lineare Stabilität des G- α -Verfahrens	33
4.2 Nichtlineare Stabilität der Kreisel-Modelle	35
5 Numerische Tests	53
5.1 Bestimmung der Anfangswerte	53
5.2 Testergebnisse	55
5.2.1 Plausibilität des erweiterten Kreisel-Modells	55
5.2.2 Grenzen des erweiterten Kreisel-Modells	61

5.2.3	Stabilitätsgebiete	63
6	Zusammenfassung	66
A	Iterationsmatrizen	i
A.1	Kreisel-Modell	i
A.2	Erweitertes Kreisel-Modell	ii
	Literaturverzeichnis	v

Einleitung

Die Beschreibung natürlich ablaufender Prozesse erfordert in den meisten Fällen die Lösung entsprechender Differentialgleichungen. Diese Gleichungen können dabei selbst nichtlinear oder auf nichtlinearen Räumen definiert sein, was die Untersuchung erschwert. Besitzt ein solcher nichtlinearer Raum jedoch eine Lie-Gruppen-Struktur, kann diese zur numerischen Behandlung solcher Differentialgleichungen ausgenutzt werden. So wurde 2010 in [4] ein Lie-Gruppen-Integrator vorgestellt, welcher auf das 1993 von Chung und Hulbert in [5] vorgestellte Generalized- α -Verfahren zurückgeht. Seitdem wurden dieses und weitere Verfahren dieser Art auf ihre Konvergenzeigenschaften untersucht. Stabilitätsuntersuchungen jedoch erfolgten bisher nur für das Verfahren in linearen Räumen, wie zum Beispiel von Erlicher et. al in [6] und von Chung und Hulbert in [5]. Es ist daher eine offene Frage, welche Stabilitätseigenschaften Lie-Gruppen-Integratoren besitzen. Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Stabilität von auf Lie-Gruppen definierten Modellproblemen und der Stabilitätseigenschaften des Generalized- α -Verfahrens bei der Anwendung auf diese.

In Kapitel 1 werden zunächst die benötigten mathematischen Begriffe eingeführt und benötigte Bezeichnungen sowie Notation festgelegt. Genauer wird dort auf Lie-Gruppen und auf Mannigfaltigkeiten definierte Differentialgleichungen eingegangen.

Im darauffolgenden Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper in zwei ausgewählten Lie-Gruppen-Formulierungen hergeleitet. Darauf aufbauend wird das in der Literatur oft verwendete Modellproblem des „Heavy-Tops“ vorgestellt, welches dann zum Zweck von Stabilitätsuntersuchungen entsprechend erweitert wird.

Im Anschluss wird in Kapitel 3 mit dem Generalized- α -Verfahren ein Lie-Gruppen-Integrator vorgestellt. Neben der Formulierung des Verfahrens wird insbesondere auf das verwendete Newton-Raphson-Verfahren und die Implementierung des Verfahrens in Python eingegangen.

In Kapitel 4 wird zunächst die Stabilität des Generalized- α -Verfahrens in linearen Räumen behandelt. Anschließend werden die Konzepte von Ljapunov-Funktionen und linearisierter Stabilität zur Untersuchung der Stabilität von

Einleitung

Gleichgewichtspunkten auf Lie-Gruppen übertragen und auf die in Kapitel 2 behandelten Modellprobleme angewendet.

Schließlich werden in Kapitel 5 numerische Tests zur Untersuchung der Stabilität des Generalized- α -Verfahrens bei Anwendung auf die Modellprobleme aus Kapitel 2 durchgeführt. Dabei werden die jeweiligen Ergebnisse bei Verwendung unterschiedlicher Formulierungen des Verfahrens miteinander verglichen.

Kapitel 1

Lie-Gruppen

Für die in dieser Arbeit angestellten Betrachtungen werden mathematische Grundlagen zu Lie-Gruppen und auf ihnen definierten Differentialgleichungen benötigt. Zur Klärung dieser Begrifflichkeiten und zur Festlegung von Notation werden in diesem Kapitel entsprechende Definitionen und Resultate vorgestellt. Diese und weitere Ausführungen sind in der Literatur zum Beispiel in [7] oder in [1] zu finden.

1.1 Lie-Gruppen und Tangentialräume

Definition. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. \mathcal{M} heißt C^p -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension m , wenn für jedes $x \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und ein C^p -Diffeomorphismus $\psi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren derart, dass $\psi(U_x \cap \mathcal{M}) = \psi(U_x) \cap \mathbb{R}^n$ gilt und $\psi(U_x) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Definition. Es sei G eine Gruppe mit Verknüpfung \circ . Das Paar (G, \circ) heißt **Lie-Gruppe** genau dann, wenn

1. G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und
2. die Verknüpfung \circ und die Inversion $\bullet : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ differenzierbar sind.

Definition.

1. Es seien G und H Lie-Gruppen. Ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ heißt **Lie-Gruppen-Homomorphismus**.

1. Lie-Gruppen

2. Eine Lie-Gruppe G wird als **Matrix-Lie-Gruppe** oder **lineare Gruppe** bezeichnet, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Lie-Gruppen-Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow GL_n(K)$ von G in die lineare Gruppe vom Grad n über einem Körper K existieren.

Beispiel 1.1.1. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Die orthogonalen Matrizen

$$O(n) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$$

bilden eine Gruppe und sind die Urbilder von $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unter der Abbildung $\psi(A) := A^T A - I_n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diese ist differenzierbar und ihre Ableitung $\psi'(M) = M^T + M$ hat vollen Rang. Folglich ist $O(n)$ eine Matrix-Lie-Gruppe.

2. Die Menge der Rotationsmatrizen

$$SO(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I_3, \det(R) = 1\}$$

ist eine Untergruppe der $O(3)$ und ist eine Matrix-Lie-Gruppe.

3. Der lineare Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine Matrix-Lie-Gruppe, denn

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{R}), \quad v \mapsto \begin{pmatrix} I_n & v \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Lie-Gruppen-Isomorphismus.

Definition. Es seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ heißt **Lie-Klammer** auf V , wenn

1. $[v, v] = 0$ für alle $v \in V$ und

2. die **Jacobi-Identität**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (1.1)$$

für alle $u, v, w \in V$ gelten.

1. Lie-Gruppen

Das Paar $\mathfrak{g} := (V, [\cdot, \cdot])$ heißt dann **Lie-Algebra**.

Bemerkungen.

1. Lie-Algebren sind lineare Vektorräume. Ist \mathfrak{g} eine reelle Lie-Algebra endlicher Dimension $k := \dim(\mathfrak{g})$, so ist \mathfrak{g} als Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^k . In diesem Fall bezeichne im Folgenden

$$\widetilde{(\bullet)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}, \quad v \mapsto \tilde{v} \quad (1.2)$$

stets einen entsprechenden Vektorraumisomorphismus von \mathfrak{g} nach \mathbb{R}^k , welcher bei Bedarf genauer spezifiziert wird.

2. Seien $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Vektorraumisomorphismus, $(e_i)_{i=1}^k$ die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^k und $x, y \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\psi^{-1}([\tilde{x}, \tilde{y}]) = \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^k [\tilde{x}, y_i \cdot \tilde{e}_i]\right) = \sum_{i=1}^k y_i \cdot \psi^{-1}([\tilde{x}, \tilde{e}_i])$$

mit Vektoren $\psi^{-1}([\tilde{x}, \tilde{e}_i]) \in \mathbb{R}^k$. Also induziert jede solche Abbildung ψ und damit auch $\tilde{\bullet}$ eine Abbildung

$$\widehat{(\bullet)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \quad v \mapsto \hat{v} \quad (1.3)$$

mit der Eigenschaft $\widehat{\tilde{x}\tilde{y}} = [\tilde{x}, \tilde{y}]$.

3. Im Folgenden werden stets Lie-Gruppen und Lie-Algebren über $K = \mathbb{R}$ betrachtet.

Definition. Seien G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann ist der **Tangententialraum** von G in g definiert als

$$T_g G := \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = g\}.$$

Satz 1.1.2. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe und es sei $\mathfrak{g} := T_I G$ der Tangentialraum von G in der Identität I . Dann definiert der Matrixkommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

1. Lie-Gruppen

für alle $A, B \in G$ eine bilineare, schiefsymmetrische Operation von $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nach \mathfrak{g} , welche die Jacobi-Identität (1.1) erfüllt.

Beispiel 1.1.3. Sei $G = SO(3)$. Die zugehörige Lie-Algebra ist der Raum der schiefsymmetrischen 3×3 -Matrizen

$$\mathfrak{g} = T_{I_3}G = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{M} + \mathbf{M}^T = \mathbf{0}_{3 \times 3}\}.$$

Es ist $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ und eine geeignete Wahl für die Abbildung $\tilde{\bullet}$ aus (1.2) ist

$$\tilde{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

für alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Eine Besonderheit dieser konkreten Abbildung $\tilde{\bullet}$ ist, dass für alle Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \quad (1.5)$$

gilt. Für die zugehörige Abbildung $\hat{\bullet}$ aus (1.3) ergibt sich in diesem Fall $\hat{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definition. Es sei G eine Lie-Gruppe. Die **Linkstranslation** in G ist für jedes Element $q \in G$ definiert als die Abbildung

$$L_q : G \rightarrow G, \quad y \mapsto L_q(y) := q \circ y.$$

Lemma 1.1.4. Seien G eine Matrix-Lie-Gruppe und $q \in G$. Dann gilt für den Tangentialraum T_qG von G in q

$$T_qG = DL_q(I) \cdot T_I G = \{DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \mid \tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{g}\} = \{DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k\}, \quad (1.6)$$

wobei $DL_q(I)$ die Ableitung der Linkstranslation in $y = I$ und $DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ die Richtungsableitung von L_q in \mathbf{I} in Richtung $\tilde{\mathbf{v}} \in T_I G$ bezeichnen.

1. Lie-Gruppen

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned} T_q G &= \{ \dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = q \} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}(L_q(\gamma(0))) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I \right\} \\ &= \{ DL_q(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I \} \\ &= DL_q(I) \cdot \{ \dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I \} \\ &= DL_q(I) \cdot T_I G. \end{aligned}$$

□

1.2 Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen

Definition. Es sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Differentialgleichung

$$\dot{q} = f(q), \quad q_0 = q(0) \tag{1.7}$$

definiert eine Differentialgleichung auf \mathcal{M} , falls für $q_0 \in G$ die Lösung $q(t)$ für alle $t \geq 0$ in \mathcal{M} verbleibt.

Satz 1.2.1. Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Problem $\dot{q} = f(q)$ ist eine Differentialgleichung auf \mathcal{M} genau dann, wenn

$$f(y) \in T_y \mathcal{M} \tag{1.8}$$

für alle $q \in \mathcal{M}$ gilt.

Bemerkung. Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen.

Der vorausgegangene Satz (1.2.1) liefert zusammen mit Lemma (1.1.4), dass Differentialgleichungen (1.7) auf Matrix-Lie-Gruppen in der Form

$$\dot{q}(t) = DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(t)$$

mit Elementen der Lie-Algebra $\tilde{\mathbf{v}}(t) \in T_I G$ geschrieben werden können.

1. Lie-Gruppen

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Die **Matrixexponentialfunktion** ist definiert als die Abbildung

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \exp(\mathbf{M}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{M}^i. \quad (1.9)$$

Lemma 1.2.2. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann definiert die Matrixexponentialfunktion (1.9) eingeschränkt auf \mathfrak{g} einen lokalen Diffeomorphismus von \mathfrak{g} nach G in einer Umgebung von $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung. Lokale Parametrisierungen von Matrix-Lie-Gruppen.

Das vorausgegangene Lemma (1.2.2) liefert, dass es für jedes $\mathbf{R} \in G$ eine Umgebung $U_0 \subset \mathfrak{g}$ von $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$ gibt, sodass die Abbildung

$$\psi(\mathbf{A}) := L_{\mathbf{R}}(\exp(\mathbf{A})), \quad \mathbf{A} \in U_0,$$

eine lokale Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{R}$ ist.

Unter Verwendung einer geeigneten Abbildung $\tilde{\bullet}$ aus (1.2) erhält man somit also lokale Parametrisierungen

$$\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G, \quad \psi(\mathbf{v}) = L_{\mathbf{R}}(\exp(\tilde{\mathbf{v}})) \quad (1.10)$$

mit $\mathbf{v} \in U_0 \subset \mathbb{R}^k$, $k := \dim(\mathfrak{g})$, in einer geeigneten Umgebung U_0 von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$.

Definition. Tangentenoperator.

Der **Tangentenoperator** \mathbf{T} ist definiert als

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{v}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \hat{\mathbf{v}}^i.$$

Bemerkung. Rodrigues-Formel.

Für $G = SO(3)$ lässt sich für die Exponentialfunktion $\exp_{SO(3)}$ die als **Rodrigues-Formel** bekannte Identität

$$\exp_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(w)}{w} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1 - \cos(w)}{w^2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (1.11)$$

1. Lie-Gruppen

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $w := \|\mathbf{v}\|_2$, beweisen, welche eine effiziente Berechnung der Exponentialfunktion ermöglicht. Eine ähnliche Darstellung existiert ebenso für den Tangentenoperator $\mathbf{T}_{SO(3)}$ mit

$$\mathbf{T}_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\cos(w) - 1}{w^2} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1 - \frac{\sin(w)}{w}}{w^2} \tilde{\mathbf{v}}^2, \quad (1.12)$$

vergleiche ([1]).

Definition. *Ein funktionaler Zusammenhang*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}, \quad (t \in I) \quad (1.13)$$

zwischen einer auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und ihrer Ableitung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ heißt **differential-algebraische Gleichung**, wenn $\mathbf{F} : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar bezüglich $\dot{\mathbf{x}}$ ist, die Jacobi-matrix $\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ konstanten Rang hat und $0 < \text{rg}(\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{x}}}) < n$ gilt.

Definition. *Gegeben sei eine differential-algebraische Gleichung (1.13) mit hinreichend oft stetig differenzierbarer Funktion \mathbf{F} . Zu einem gegebenen $m \in \mathbb{N}$ betrachtet man das Ableitungsfeld*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ &\vdots \\ \mathbf{0} &= \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned}$$

Wenn man aus diesem Ableitungsfeld Gleichungen auswählen kann, die durch algebraische Umformungen auf die Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}(t))$$

gebracht werden können, so heißt die kleinste natürliche Zahl m mit dieser Eigenschaft **Differentiationsindex** von (1.13).

Kapitel 2

Erweitertes Kreisel-Modell

2.1 Konfigurationsräume

Die Bewegung eines starren Körpers in einem Inertialsystem kann mittels eines Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ erfolgen, welcher die Position des Körpers repräsentiert. Zusätzlich besitzt ein solches System drei rotatorische Freiheitsgrade, welche in Form einer Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in SO(3)$ abgebildet werden können. Letztlich kann so die momentane Konfiguration eines starren Körpers durch ein Element $q := (\mathbf{x}, \mathbf{R}) \in G$ beschrieben werden, wobei G der Konfigurationsraum des mechanischen Systems mit Lie-Gruppen-Struktur sei. In [3] werden zwei mögliche Konfigurationsräume G als Kombination von \mathbb{R}^3 und $SO(3)$ vorgestellt, auf welche im Folgenden zunächst eingegangen werden soll.

Bemerkung. *Konfigurationsraum* $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

Als möglicher Konfigurationsraum kommt zunächst $G := \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ infrage. Die Verknüpfung \circ ist für Elemente $(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) \in G$ definiert als

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1) \circ (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2).$$

Die Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}, \quad q = (\mathbf{x}, \mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Lie-Gruppen-Isomorphismus und G ist daher eine Matrix-Lie-Gruppe. Die zugehörige Lie-Algebra ist isomorph zu \mathbb{R}^6 . Ein geeigneter Vektorraumisomorphismus $\tilde{\bullet} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}$ lässt sich unter Verwendung der entsprechenden

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Abbildung (1.4) für $SO(3)$ angeben mit

$$\tilde{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

für alle $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega})^T \in \mathbb{R}^6$. Wie in (1.4) ist dabei

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Abbildung $\hat{\bullet}$ ergibt sich damit zu

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Die Matrixexponentialfunktion und der Tangentenoperator in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ lauten

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}^3 \times SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) &= \begin{pmatrix} \exp_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{T}_{\mathbb{R}^3 \times SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Abbildungen $\exp_{SO(3)}$ und $\mathbf{T}_{SO(3)}$ für $SO(3)$ aus (1.11) und (1.12).

Bemerkung. *Konfigurationsraum $SE(3)$.*

Ein weiterer möglicher Konfigurationsraum ist das semidirekte Produkt $G := SE(3) := \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$, welches auch als **Spezielle Euklidische Gruppe** bezeichnet wird. Die Verknüpfung \circ ist hier für $(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) \in G$ definiert als

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1) \circ (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_2, \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2).$$

Die Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad q = (x, \mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

ist ebenfalls ein Lie-Gruppen-Isomorphismus und somit ist auch $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ eine Matrix-Lie-Gruppe. Für $\mathbf{v} = (\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})^T \in \mathbb{R}^6$ lauten die Abbildungen $\tilde{\bullet}$ und $\hat{\bullet}$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Omega}} & \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Omega}} & \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{\Omega}} \end{pmatrix}.$$

Weiter nehmen die Exponentialfunktion und der Tangentenoperator in $SE(3)$ die Gestalt

$$\exp_{SE(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \exp_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{\Omega}}) & \mathbf{T}_{SO(3)}^T \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{T}_{SE(3)}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{SO(3)}(\mathbf{\Omega}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}_{SE(3)}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{U}) & \mathbf{T}_{SO(3)}(\mathbf{\Omega}) \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{S}_{SE(3)}(\mathbf{0}, \mathbf{U}) = -\tilde{\mathbf{U}}/2$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{SE(3)}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{U}) = & \frac{1}{\Phi^2} \left[(\cos(\Phi) - 1)\tilde{\mathbf{U}} + \left(1 - \frac{\sin(\Phi)}{\Phi}\right) (\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{\Omega}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{U}}) \right. \\ & + \left(2\frac{1 - \cos(\Phi)}{\Phi^2} - \frac{\sin(\Phi)}{\Phi}\right) (\mathbf{\Omega}^T \mathbf{U})\tilde{\mathbf{\Omega}} \\ & \left. + \frac{1}{\Phi^2} \left(1 - \cos(\Phi) - 3\left(1 - \frac{\sin(\phi)}{\Phi}\right)\right) (\mathbf{\Omega}^T \mathbf{U})\tilde{\mathbf{\Omega}}^2 \right] \end{aligned}$$

für $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{0}$ und $\Phi = \|\mathbf{\Omega}\|_2$ an. Vergleiche dazu [1].

2.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegung eines Starrkörpers lässt sich durch Bewegungsgleichungen in den jeweiligen Konfigurationsräumen beschreiben. Diese können wie in [3] durch Anwendung des Hamiltonschen Variationsprinzips auf eine der Bewegung zugehörige Lagrange-Funktion hergeleitet werden. In diesem Abschnitt wird zunächst auf das Variationsprinzip eingegangen und danach der Ansatz aus [3] vorgestellt.

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Bemerkung. *Hamiltonsches Variationsprinzip.*

In der analytischen Mechanik besagt das Hamiltonsche Prinzip, dass die Bewegung eines Systems im Zeitintervall $t \in [t_i, t_f]$ so erfolgt, dass die Konfigurationsbahn $q(t)$, $t \in [t_i, t_f]$, das Wirkungsfunktional

$$\mathbf{S}(q(t)) := \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.4)$$

extremal bzw. stationär werden lässt, wobei \mathcal{L} die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(q, \mathbf{v}) := \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{V}(q) \quad (2.5)$$

ist mit kinetischer und potenzieller Energie \mathcal{T} und \mathcal{V} . Die Extremalität der Wirkung (2.4) ist äquivalent zu

$$\delta \mathbf{S}(q(t)) = 0 \quad (2.6)$$

wobei δ eine sogenannte virtuelle Verrückung bezeichne. Diese stellt eine mit den wirkenden Zwangsbedingungen verträgliche Variation der entsprechenden Größen dar. Die Variation von (2.4) erfolgt so, dass

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = \delta t = 0 \quad (2.7)$$

gelten. Die Konfiguration des Systems zu den Zeitpunkten t_i und t_f sowie die Zeit werden nicht variiert. Diese und weitere Ausführungen findet man u.a. in [9].

Die kinetische Energie in (2.5) lässt sich als

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ schreiben. Erfolgt die Bewegung des Körpers unter m holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$\Phi(q) = \mathbf{0}_{m \times 1},$$

so ergeben sich die Bewegungsgleichungen als Resultat des Variationsproblems

$$0 = \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} - \Phi(q)^T \boldsymbol{\lambda} dt \quad (2.8)$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

mit Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, vgl. dazu [9] S. 79f.

Bei der Anwendung des Variationsprinzips tauchen Variationen δq und $\boldsymbol{\delta v}$ auf. Definiert man

$$\delta q = q \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} \quad (2.9)$$

mit einer geeigneten virtuellen Verrückung $\boldsymbol{\delta q} \in \mathbb{R}^k$, so ergibt sich $\boldsymbol{\delta v}$ als Resultat des folgenden Lemmas.

Lemma 2.2.1. *Es seien $q \in G$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^k$ und δq wie in (2.9) definiert. Dann gilt*

$$\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{\delta \dot{q}} + \widehat{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\delta q}.$$

BEWEIS. Es gelten

$$\delta \dot{q} = \delta(q\tilde{\boldsymbol{v}}) = (\delta q)\tilde{\boldsymbol{v}} + q(\delta\tilde{\boldsymbol{v}}) = (q\widetilde{\boldsymbol{\delta q}})\tilde{\boldsymbol{v}} + q(\boldsymbol{\delta \tilde{v}}) \quad (2.10)$$

und

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} (q\widetilde{\boldsymbol{\delta q}}) = \dot{q}\widetilde{\boldsymbol{\delta q}} + q \frac{d}{dt} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} = q\tilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{\boldsymbol{\delta q}} + q\widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}}. \quad (2.11)$$

Gleichsetzen von (2.10) und (2.11) ergibt

$$q\boldsymbol{\delta \tilde{v}} = q(\widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + \tilde{\boldsymbol{v}}\widetilde{\boldsymbol{\delta q}} - \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}\tilde{\boldsymbol{v}}) = q(\widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + [\tilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}])$$

mit dem Matrixkommutator $[\cdot, \cdot]$. Unter Verwendung der Abbildung $\hat{\bullet}$ aus (1.3) folgt daraus

$$\boldsymbol{\delta \tilde{v}} = \widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + \widehat{\tilde{\boldsymbol{v}}} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}$$

und mit der Umkehrbarkeit von $\tilde{\bullet}$ letztlich

$$\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{\delta \dot{q}} + \widehat{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\delta q}.$$

□

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, die Bewegungsgleichungen für konservative Systeme unter holonomen Zwangsbedingungen als Lösung eines Variationsproblems der Form (2.8) herzuleiten.

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Satz 2.2.2 (Index-3-Formulierung der Bewegungsgleichungen).

Die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper in einem konservativen Kraftfeld mit $m \leq k$ linear unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen $\Phi(q) = 0$ lauten

$$\dot{q} = q\tilde{v}, \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{M}\dot{v} - \hat{v}^T \mathbf{M}v + \mathbf{g}(q) + \mathbf{B}^T(q)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}_{k \times 1}, \quad (2.12b)$$

$$\Phi(q) = \mathbf{0}_{m \times 1}. \quad (2.12c)$$

BEWEIS. Die Anwendung des Variationsprinzips liefert zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q, v) - \Phi(q)^T \boldsymbol{\lambda} dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{T}(v) - \delta \mathcal{V}(q) - \delta \Phi(q)^T \boldsymbol{\lambda} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T \mathbf{M}v - \delta \mathcal{V}(q) - \delta \Phi(q)^T \boldsymbol{\lambda} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T \mathbf{M}v - \delta \mathcal{V}(q) - (\delta \Phi(q))^T \boldsymbol{\lambda} - \Phi(q)^T \delta \boldsymbol{\lambda} dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definiert man $\mathbf{g}(q)$ als den Vektor der äußeren und inneren Kräfte mit

$$D\mathcal{V}(q) \cdot (q\widetilde{\delta q}) = \delta q^T \mathbf{g}(q) \quad (2.14)$$

und $\mathbf{B}(q) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ als die Ableitungsmatrix der Zwangsbedingungen mit

$$D\Phi(q) \cdot (q\tilde{w}) = \mathbf{B}(q)\mathbf{w} \quad (2.15)$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$, so folgt

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T \mathbf{M}v - \delta q^T \mathbf{g}(q) - \delta q^T \mathbf{B}^T(q)\boldsymbol{\lambda} - \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt. \quad (2.16)$$

Die Variation der Geschwindigkeit v ergibt sich gemäß Lemma (2.2.1) zu

$$\delta v = \delta \dot{q} + \hat{v} \delta q.$$

woraus weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta q^T \mathbf{M}v) &= \delta \dot{q}^T \mathbf{M}v + \delta q^T \mathbf{M}\dot{v} = (\delta v - \hat{v} \delta q)^T \mathbf{M}v + \delta q^T \mathbf{M}\dot{v} \\ &= \delta v^T \mathbf{M}v + \delta q^T (\mathbf{M}\dot{v} - \hat{v}^T \mathbf{M}v) \end{aligned}$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

folgt. Setzt man diesen Ausdruck für $\delta \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ in (2.16) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}) - \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v}) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{g}(q) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda} - \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt \\
 &= [\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{g}(q) + \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt \\
 &= - \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{g}(q) + \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt
 \end{aligned}$$

Dabei gilt $[\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}]_{t_i}^{t_f} = \mathbf{0}$, da die Variation der Größen für $t \in \{t_i, t_f\}$ nach (2.7) verschwindet. \square

Bemerkung. *Versteckte Zwangsbedingungen.*

Die holonomen Zwangsbedingungen (2.12c) implizieren „versteckte“ Zwangsbedingungen, welche man durch Differentiation von (2.12c) nach t erhält. Die erste Ableitung ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \Phi(q(t)) = D\Phi(q(t)) \cdot \dot{q}(t) = D\Phi(q) \cdot (DL_q(e) \tilde{\mathbf{v}}) = D\Phi(q) \cdot (q\tilde{\mathbf{v}}) \\
 &= \mathbf{B}(q) \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für die zweite Ableitung erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{B}(q) \mathbf{v}) = \mathbf{B}(q) \dot{\mathbf{v}} + (D_q \mathbf{B}(q) \cdot (DL_q(e) \tilde{\mathbf{v}})) \cdot \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{B}(q) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

mit einer Bilinearform $\mathbf{Z}(q) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Ausdrücke (2.12), (2.17) und (2.18) sind jeweils linear in $\dot{\mathbf{v}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ und können dazu verwendet werden, diese Größen als Funktionen in Abhängigkeit von t , $q(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ darzustellen, vgl. dazu [8] S. 465. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(q) & \mathbf{B}^T(q) \\ \mathbf{B}(q) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{g}(q, \mathbf{v}, t) \\ -\mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Dabei hat die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ vollen Rang $m \leq k$ und die Massenmatrix \mathbf{M} ist nach Voraussetzung symmetrisch und positiv definit, also invertierbar.

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Daraus folgt, dass das System (2.19) eindeutig nach $\dot{\mathbf{v}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ aufgelöst werden kann, vgl. [1].

Bemerkung. *Dissipative Kräfte.*

Dissipative Kräfte wie zum Beispiel Reibungskräfte lassen sich nicht von einem Potential ableiten und sind auch keine Zwangskräfte. Sie erfüllen nicht das Hamiltonsche Prinzip, vgl. dazu [9]. Stattdessen können die Bewegungsgleichungen (2.12) um dissipative Terme erweitert werden, wie z.B. um Stokes'sche Reibung

$$F_R := \mu_R \cdot \mathbf{v} \quad (2.20)$$

mit einem Reibungskoeffizienten $\mu_R > 0$.

2.3 Kreisel-Modell

Ein in der Literatur häufig verwendetes Modell zum Testen der numerischen Algorithmen ist das Modell eines Kreisels, engl. „Heavy-Top“. Genauer handelt es sich dabei um einen rotierenden sphärischen Kreisel, der an seiner Spitze befestigt ist und um dessen Aufhängepunkt im Gravitationsfeld pendelt. Die Beschreibung des Systems kann durch Elemente $q = (\mathbf{x}, \mathbf{R})$ in den in Abschnitt 2.1 vorgestellten Konfigurationsräumen $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ oder $SE(3)$ erfolgen. Eine ausführliche Behandlung des Systems in diesen Lie-Gruppen-Formulierungen findet man jeweils zum Beispiel in [1], [3] sowie [4].

Die kinetische und potenzielle Energie des Systems sind gegeben mit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{v}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathcal{V}(q) &= -\mathbf{x}^T m \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{v} := (\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\Omega}^T)^T \in \mathbb{R}^6$ die Geschwindigkeit des Systems, genauer sind $\mathbf{u} := \dot{\mathbf{x}}$ die Bewegungsgeschwindigkeit des Schwerpunkts im raumfesten Bezugssystem und $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem. Ferner sind m die Gesamtmasse des Kreisels, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ das Trägheitsmoment im körperfesten Bezugssystem, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ der die Schwerkraft beschreibende Vektor

2. Erweitertes Kreisel-Modell

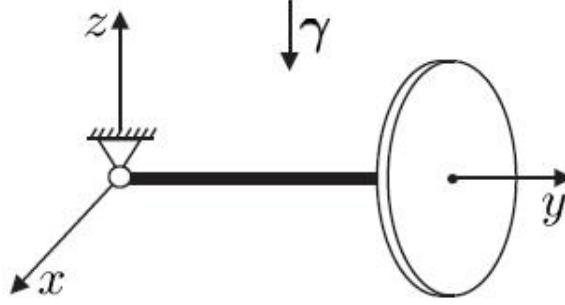


Abbildung 2.1.: Konfiguration des Heavy Tops aus [1]

und $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt in der Referenzkonfiguration, die durch $\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ bestimmt ist. Das Trägheitsmoment \mathbf{J} sei für die folgenden Betrachtungen von Diagonalgestalt.

Mit der Massematrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

lässt sich die kinetische Energie in der Form $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ schreiben. Die Beziehung zwischen den das System beschreibenden Größen \mathbf{x} und \mathbf{R} wird durch die Zwangsbedingung

$$\Phi(q) := \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (2.21)$$

modelliert.

Bemerkung. Mit den in Abschnitt (2.1) definierten Matrixrepräsentationen und Abbildungen für $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ und $SE(3)$ ergeben sich mit (2.12a) die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{R}\tilde{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ und

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{U} \\ \mathbf{R}\tilde{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

in $SE(3)$.

Lemma 2.3.1. *Die Jacobimatrix $\mathbf{B}(q)$ der Zwangsbedingungen (2.21) lautet für den Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$*

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^T & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

und für $SE(3)$

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_3 & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

BEWEIS. Unter Verwendung von (2.22) gilt in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}} = -\tilde{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \mathbf{u} \\ &= -\mathbf{R}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{X}} \Omega. \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen in $SE(3)$ unter Verwendung von (2.23) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}} = -\tilde{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \\ &= -\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{X}} \Omega. \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\mathbf{B}(q)$ in (2.15) folgen hieraus die behaupteten angegebenen Gestalten von \mathbf{B} in den jeweiligen Lie-Gruppen. \square

Lemma (2.3.1) liefert zusammen mit Abschnitt (2.1) und (2.12) die Bewegungsgleichungen für das beschriebene Kreisel-Modell in den entsprechenden Lie-Gruppen-Formulierungen.

Lemma 2.3.2. *Die Bewegungsgleichungen (2.12) für den Konfigurationsraum $G = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ lauten*

$$m\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\Omega} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.26c)$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Lemma 2.3.3. *Die Bewegungsgleichungen (2.12) für den Konfigurationsraum $G = SE(3)$ lauten*

$$m\dot{\mathbf{U}} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T m\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.27c)$$

Bemerkung. *Kreisel ohne Zwangsbedingungen.*

Die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 4 sollen anhand eines Systems ohne Zwangsbedingungen erfolgen. Im Fall des Kreisel-Modells erhält man dieses zum Beispiel durch analoge Anwendung des Hamiltonschen Variationsprinzips auf die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} - m(\mathbf{R}\mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} \quad (2.28)$$

oder durch dreimalige Differentiation der Zwangsbedingung (2.21) und Auflösen des Index-3-Systems (2.12). Die Bewegungsgleichungen für den Kreisel ohne Zwangsbedingungen lauten letztendlich

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.29b)$$

vergleiche dazu auch [4].

2.4 Erweiterung um Torsionsfeder

Das Generalized- α -Verfahren ist ein implizites Verfahren, welches in linearen Konfigurationsräumen besonders gut zur Behandlung sogenannter steifer Differentialgleichungen geeignet ist. In [8], Abschnitt VII.7, wird exemplarisch die Behandlung eines Mehrkörpersystems vorgestellt, wobei die Bewegungsgleichungen als Index-3-System differential-algebraischer Gleichungen ähnlich zu (2.12) formuliert werden. Zur Untersuchung der Eigenschaften impliziter Verfahren bei Anwendung auf steife Differentialgleichungen erweitern die Autoren ihr System um ein Federpotential mit großer Federkonstante, was in einem entsprechenden Kraftterm in den Bewegungsgleichungen resultiert.

2. Erweitertes Kreisel-Modell

Diesem Vorgehen folgend, soll nun das in Abschnitt (2.3) vorgestellte Kreisel-Modell um ein Federpotential und zugehörige Federkraft erweitert werden. Um dabei die Bewegung des Kreiselschwerpunktes auf der Einheitssphäre beizubehalten, soll die Modellierung der entsprechenden Größen einer an der Symmetrieachse des Kreisels befestigten Torsionsfeder entsprechen. Die wirkenden Kräfte sind dabei proportional zum Verdrehwinkel des Kreisels um dessen Achse bezüglich der Referenzkonfiguration $\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$. Die Berechnung dafür benötigter Winkel anhand der Rotationsmatrix \mathbf{R} ist Gegenstand der folgenden

Bemerkung. *Kardan-Winkel und Koordinatentransformation.*

Eine Möglichkeit zur Parametrisierung der Drehgruppe $SO(3)$ mit Elementen des \mathbb{R}^3 stellen die sogenannten Euler-Winkel dar, welche im Folgenden mit α' , β' und γ' bezeichnet werden. Eine Matrix $\mathbf{R} \in SO(3)$ kann mittels der elementaren Drehmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(\alpha') &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha') & -\sin(\alpha') \\ 0 & \sin(\alpha') & \cos(\alpha') \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_y(\beta') &:= \begin{pmatrix} \cos(\beta') & 0 & \sin(\beta') \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta') & 0 & \cos(\beta') \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z(\gamma') &:= \begin{pmatrix} \cos(\gamma') & -\sin(\gamma') & 0 \\ \sin(\gamma') & \cos(\gamma') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

als

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz} = \mathbf{R}_x(\alpha') \cdot \mathbf{R}_y(\beta') \cdot \mathbf{R}_z(\gamma') \tag{2.31}$$

dargestellt werden und diese Darstellung ist nach Festlegung auf eine bestimmte Drehfolge eindeutig. Im Folgenden sollen die sogenannten **Kardan-Winkel** α' , β' und γ' mit $\alpha', \gamma' \in [-\pi, \pi)$ und $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ betrachtet werden, welche standardmäßig zur Beschreibung der Ausrichtung von Fahrzeugen verwendet werden.

Eine solche Matrix \mathbf{R}_{xyz} kann als Transformationsmatrix zwischen einem raumfesten Bezugssystem xyz und einem körperfesten Bezugssystem XYZ aufgefasst werden. Die Rotationsmatrix im Kreisel-Modell entspricht gemäß der Zwangsbedingung $\mathbf{0} = \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}$ einer Transformation $\mathbf{R}_{XYZ} = \mathbf{R}_{xyz}^T$ vom körperfesten

2. Erweitertes Kreisel-Modell

ins raumfeste Bezugssystem. Es gilt daher

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz}^T = \begin{pmatrix} \cos(\beta') \cos(\gamma') & * & * \\ -\cos(\beta') \sin(\gamma') & * & * \\ \sin(\beta') & -\sin(\alpha') \cos(\beta') & \cos(\alpha') \cos(\beta') \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die mit * markierten Einträge für die folgenden Betrachtungen nicht weiter relevant und wurden deshalb zugunsten der Übersichtlichkeit weggelassen. Sofern $\cos(\beta') \neq 0$ gilt, lassen sich aus den Einträgen von $\mathbf{R} = (r_{ij})_{ij}$ die Relationen

$$\begin{aligned} -\tan(\alpha') &= \tan(-\alpha') = \frac{r_{32}}{r_{33}}, \\ \sin(\beta') &= r_{31}, \\ -\tan(\gamma') &= \tan(-\gamma') = \frac{r_{21}}{r_{11}} \end{aligned}$$

für die Rotationswinkel α' , β' und γ' angeben. Im Fall $\cos(\beta') = 0$ ergeben sich singuläre Drehwinkel $\beta' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, für welche zwei der Elementardrehachsen zusammenfallen und lediglich die Summe $\alpha' + \gamma'$ eindeutig bestimmt ist, siehe [12] S. 29.

Bemerkungen. *Anpassung der Modell-Parameter.*

1. Verwendet man den in der Literatur üblicherweise gewählten Bezugspunkt $\mathbf{X} := (0, 1, 0)^T$, so würde nach den vorausgegangenen Ausführungen der Winkel β' die Verdrehung des Kreisels um dessen Achse repräsentieren, welche in diesem Fall die y -Achse im körperfesten Bezugssystem ist. Die Einschränkung $\beta' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist jedoch nicht praktikabel. Zweckmäßig ist es daher, $\mathbf{X} := (1, 0, 0)^T$ zu wählen, sodass der Winkel $\alpha := -\alpha'$ die Verdrehung des Kreisels im körperfesten Bezugssystem repräsentiert.
2. Der Winkel α ist nach den obigen Ausführungen für Drehwinkel $\beta' \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ nicht eindeutig bestimmbar. Gilt für die Gewichtskraft im Kreiselmodell $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \cdot \mathbf{e}_z$, so erhält man Singularitäten in den Punkten $(0, 0, 1)^T$ und $(0, 0, -1)^T$. Diese stellen jedoch die mechanischen Gleichgewichte des Systems dar, deren Stabilitätseigenschaften in Kapitel 4 betrachtet werden sollen. Für numerische Tests ist es daher sinnvoll sicherzustellen, dass zumindest in einer Umgebung dieser Punkte keine solchen Singularitäten in der Winkelberechnung auftreten. Wählt man hingegen

2. Erweitertes Kreisel-Modell

$\gamma = -\|\gamma\|_2 \cdot \mathbf{e}_y$, so bleiben zwar die Singularitäten in den genannten Punkten erhalten, die mechanischen Gleichgewichte befinden sich dann allerdings in den Punkten $(0, -1, 0)^T$ und $(0, 1, 0)^T$.

Analytisch komplexere singularitätenfreie Darstellungen der Drehmatrix \mathbf{R} , wie zum Beispiel mittels komplementärer Kardan-Winkel in [12], sind daher nicht notwendig, da man sich in den Tests auf entsprechende Umgebungen der Gleichgewichte beschränken kann.

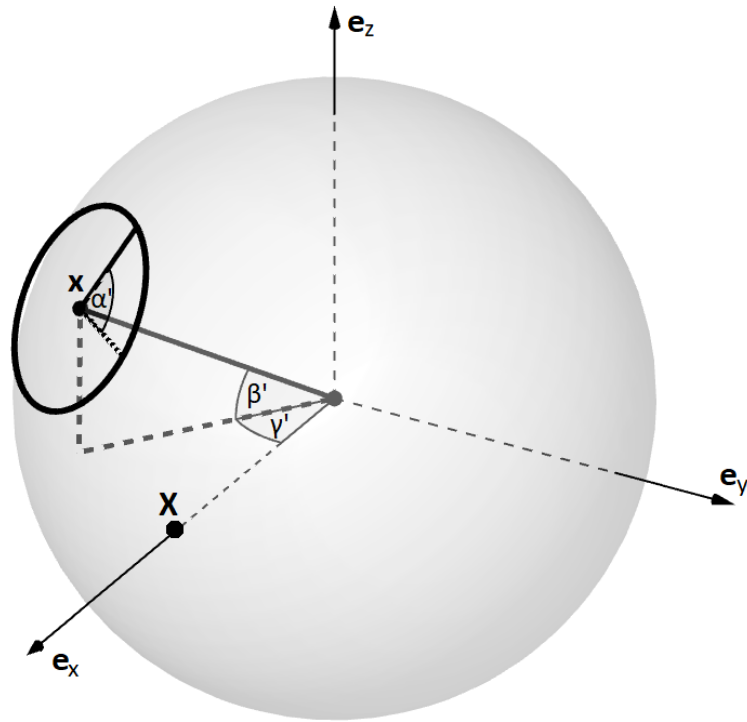


Abbildung 2.2.: Kardan-Winkel α' , β' , γ' anhand des Kreisel-Modells

Lemma 2.4.1. Der Kraftvektor \mathbf{g}_F für das Federpotential $\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) = \frac{k}{2}\alpha^2$, $k > 0$, mit $\alpha(\mathbf{R}) := -\alpha' = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)$ in der Formulierung (2.12) der Bewegungsgleichungen lautet

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3}{r_{33}} - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \right), \quad (2.32)$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

wobei $C(\mathbf{R})$ definiert ist als

$$C(\mathbf{R}) := \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)^2}. \quad (2.33)$$

BEWEIS. Es sei $\delta\Theta \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta}$ gilt. Der Vektor \mathbf{g}_F ist nach (2.14) definiert als

$$D\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta}) = \delta\Theta^T \mathbf{g}_F(\mathbf{R}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) &= k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \delta\alpha(\mathbf{R}) = k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \left(\delta \arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \right) \\ &= \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)^2} \cdot \left[\frac{\delta r_{32}}{r_{33}} + r_{32} \cdot \delta r_{33}^{-1} \right] \\ &= C(\mathbf{R}) \cdot \left[\frac{\delta r_{32}}{r_{33}} + r_{32} \cdot \delta(r_{33}^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Mit $r_{32} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_2$ und $r_{33} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_3$ gelten weiter

$$\begin{aligned} \delta r_{32} &= \delta(\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3^T (\delta \mathbf{R}) \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \widetilde{\delta\Theta} \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{e}}_2 \delta\Theta = -\delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \\ &= \delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

sowie

$$\delta(r_{33}^{-1}) = -\frac{1}{r_{33}^2} \cdot \delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3.$$

Das Einsetzen der Ausdrücke für δr_{32} und $\delta(r_{33}^{-1})$ in (2.34) liefert die Behauptung. \square

Bemerkung. *Kreisel-Modell mit Torsionsfeder und Reibung.*

Das herkömmliche Kreisel-Modell kann mit Lemma (2.4.1) um die Kraftkomponente \mathbf{g}_F in (2.32) mit einem Torsionskoeffizienten $k > 0$ und einen Reibungsterm $d \cdot \boldsymbol{\Omega}$ mit Reibungskoeffizienten $d > 0$ erweitert werden. Für die Formulierung in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ erhält man dann die Bewegungsgleichungen

$$m\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = -d \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) \quad (2.36)$$

2. Erweitertes Kreisel-Modell

und in $SE(3)$

$$m\dot{\mathbf{U}} + m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U} - \mathbf{\lambda} = \mathbf{R}^T m\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega} + \mathbf{X} \times \mathbf{\lambda} = -d \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}). \quad (2.38)$$

Die Bewegungsgleichungen für das System in $SO(3)$ ohne Zwangsbedingungen ergeben sich dann als

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{\Omega}} \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) - d \cdot \mathbf{\Omega}. \quad (2.39b)$$

Kapitel 3

Generalized- α -Verfahren

Das Generalized- α -Verfahren wurde erstmals 1993 von Chung und Hulbert in [5] in linearen Konfigurationsräumen beschrieben. 2010 wurde von Brüls und Cardona in [4] eine für auf Lie-Gruppen definierte Differentialgleichungen angepasste Version des Verfahrens vorgestellt. Die Version des Verfahrens für differential-algebraische Systeme mit Differentiationsindex 3 soll im Folgenden thematisiert werden.

Definition. *Das Generalized- α -Verfahren für Index-3-Systeme der Form (2.12) lautet*

$$q_{n+1} = q_n \circ \exp(h\widetilde{\Delta \mathbf{q}_n}), \quad (3.1a)$$

$$\Delta \mathbf{q}_n = \mathbf{v}_n + h(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h\beta\mathbf{a}_{n+1}, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1}, \quad (3.1c)$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{v}}_n, \quad (3.1d)$$

$$\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = -\mathbf{g}(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{B}^T(q)\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, \quad (3.1e)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(q) = \mathbf{0} \quad (3.1f)$$

mit der numerischen Lösung $(q_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$ für den Zeitschritt $t_n \rightarrow t_n + h$ mit Schrittweite h und Parametern $\alpha_m, \alpha_f, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. *Wahl der Parameter und Ordnungsbedingungen.*

Die Wahl der Parameter $\alpha_m, \alpha_f, \beta$ und γ bestimmen wesentlich die numerischen Eigenschaften des Generalized- α -Verfahrens (3.1). Entsprechende Untersuchungen zur optimalen Wahl der Parameter für das Verfahren in linearen Räumen wurden von Chung und Hulbert in [5] ausgeführt.

1. Das „klassische“ Verfahren aus [5] in linearen Räumen ist unabhängig von

3. Generalized- α -Verfahren

der Schrittweite h stabil für Parameter

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m).$$

2. Die lokalen Abbruchfehler sind von Ordnung zwei für

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

Durch Einführung eines weiteren Parameters $\rho_\infty \in [0, 1)$ zur besseren Handhabung der Parameter und deren optimaler Wahl ergeben sich folgende Relationen

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.2)$$

in Abhängigkeit von ρ_∞ . Die Wahl von ρ_∞ zur Sicherung der Stabilität wird in Abschnitt (4.1) ausführlicher betrachtet.

Bemerkung. *Initialisierung des Verfahrens.*

Die zeitdiskrete numerische Lösung $(q_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$ des Verfahrens (3.1) zum Zeitpunkt t_n stellt eine Approximation der Lösung des Index-3-Systems (2.12) dar, also

$$q_n \approx q(t_n), \quad \mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}(t_n), \quad \dot{\mathbf{v}}_n \approx \dot{\mathbf{v}}(t_n), \quad \boldsymbol{\lambda}_n \approx \boldsymbol{\lambda}(t_n).$$

Die Variable \mathbf{a}_n ist eine Hilfsvariable, deren Bedeutung der einer Beschleunigung gleichkommt. Es gilt

$$\mathbf{a}_n \approx \dot{\mathbf{v}}(t_n + \Delta_\alpha h), \quad \Delta_\alpha := \alpha_m - \alpha_f.$$

Zur Initialisierung des Verfahrens bedarf es der Angabe eines Startzeitpunkts t_0 und konsistenter Anfangswerte

$$q_0 := q(t_0), \quad \mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(t_0), \quad \dot{\mathbf{v}}_0 := \dot{\mathbf{v}}(t_0),$$

wobei $\dot{\mathbf{v}}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}_0$ unter Vorgabe von q_0 und \mathbf{v}_0 als Lösung des Gleichungssystems (2.19) bestimmt werden können.

Die Variable \mathbf{a}_0 kann in den meisten Fällen mit

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0$$

initialisiert werden. Eine weitere Möglichkeit für die Wahl des Startwertes \mathbf{a}_0 findet man in [1], Tabelle 2.

3. Generalized- α -Verfahren

Bemerkung. *Index-2-Variante des Verfahrens.*

In [1] wird festgestellt, dass zu Beginn der Integration in der Index-3-Variante des Verfahrens Oszillationen in den Lagrange-Multiplikatoren auftreten können, welche zu einer Ordnungsreduktion des Verfahrens führen. Ebenfalls in [1] wird daher eine stabilisierte Version des Verfahrens vom Differentiationsindex 2 beschrieben, welche der beschriebenen Ordnungsreduktion entgegenwirken soll. Diese Version des Verfahrens wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

3.1 Newton-Raphson-Iteration

Im Folgenden soll auf Details der Implementierung der verschiedenen Formulierungen des Generalized- α -Verfahrens eingegangen werden. Wesentlicher Bestandteil der Umsetzung der Verfahren ist dabei die Durchführung eines Newton-Raphson-Verfahrens zur Lösung des impliziten nichtlinearen Systems (3.1), welche in der hier vorgestellten Form in [1] und erstmalig in [4] beschrieben wurde. Weitere Ausführungen zur Implementierung von Generalized- α -Verfahren findet man beispielsweise in [2].

Bemerkung. Es ist zunächst zweckmäßig, die Verfahrensvorschrift (3.1) wie in [1] in Abhängigkeit von $\Delta \mathbf{q}_n$ zu formulieren. Dies führt auf

$$q_{n+1} = q(\Delta \mathbf{q}_n) := q_n \circ \exp(h \widetilde{\Delta \mathbf{q}_n}) \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n) := \frac{\gamma}{\beta} \Delta \mathbf{q}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{v}_n + h \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \mathbf{a}_n \quad (3.3b)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}(\Delta \mathbf{q}_n) := \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \left(\frac{\Delta \mathbf{q}_n - \mathbf{v}_n}{h} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_n \right) + \frac{\mathbf{a}_n - \alpha_f \dot{\mathbf{v}}_n}{1 - \alpha_f}. \quad (3.3c)$$

Das mit der Schrittweite h skalierte Residuum beim Einsetzen der Lösung in die Bewegungsgleichungen (2.12b) sei

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{r}_h(q, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, h\boldsymbol{\lambda}, t) := h(\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{g}(q, \mathbf{v}, t)) + \mathbf{B}^T(q) \cdot h\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.4)$$

Durch die Skalierung mit der Schrittweite soll erreicht werden, dass die Kondition der Iterationsmatrix für $h \rightarrow 0$ unabhängig von h beschränkt bleibt, vgl. [1]. Die numerische Lösung $(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1})$ ergibt sich als Lösung des

3. Generalized- α -Verfahren

nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \Psi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) := \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(q(\Delta \mathbf{q}_n), \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n), \dot{\mathbf{v}}_n(\Delta \mathbf{q}_n), h\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, t_{n+1}) \\ \frac{1}{h}\Phi(q(\Delta \mathbf{q}_n)) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

für $\boldsymbol{\xi}_{n+1} := ((\Delta \mathbf{q}_n)^T, h\boldsymbol{\lambda}_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{k+m}$ zusammen mit den Gleichungen (3.3). Dieses kann mittels Newton-Iteration der Form

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s+1)} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}) \Delta \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)} = -\Psi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}) \quad (3.6)$$

gelöst werden. Als möglicher Startwert $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(0)}$ ergibt sich aus (3.1b) durch die initiale Näherung $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n+1}$ in jedem Zeitschritt

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(0)} = \left(\mathbf{v}_n^T + \frac{1}{2}\mathbf{a}_n^T, h\boldsymbol{\lambda}_n^T \right)^T. \quad (3.7)$$

Weiter hat die Iterationsmatrix $\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ die Gestalt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial h\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial h\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \mathbf{B}^T \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Zur Bestimmung von $\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}}$ definiert man die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} mit

$$\mathbf{D} := \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(q(\Delta \mathbf{q}_n), \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n), t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} so, dass für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$

$$\frac{1}{h} D_q \mathbf{r}_h \cdot (DL_q(e) \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{K}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w}$$

gilt. Mit diesen Matrizen und mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} \cdot \mathbf{w} &= D_q \mathbf{r}_h \left(DL_q(e) \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} + \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} \right) \cdot \mathbf{w} \\ &= h^2 \mathbf{K}(\Delta \mathbf{q}_n) \mathbf{T}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w} + h \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{D}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w} + \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}, \end{aligned}$$

wobei sich der erste Term mit Korollar 2.7 aus [1] ergibt. Das gleiche Resultat liefert auch

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \mathbf{B}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{T}(\Delta \mathbf{q}_n)$$

3. Generalized- α -Verfahren

und die Iterationsmatrix lautet daher

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha_m}{\beta(1-\alpha_f)} \mathbf{M} + h \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{D} + h^2 \mathbf{K} \mathbf{T} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Bemerkung. *Abbruchkriterium für die Newton-Iteration.*

Die Newton-Iteration soll bei einer hinreichenden Genauigkeit oder nach einer vordefinierten Anzahl von Durchläufen gestoppt werden. Um die Güte der Approximation einschätzen zu können, wird in [2] ein affin-invarianter Ansatz unter Verwendung absoluter Toleranzen ATOL_i und relativer Toleranzen RTOL_i , $i \in \{1, \dots, n_\xi\}$, $n_\xi := k + m$, vorgeschlagen. Ist i_{\max} die maximale Anzahl an Newton-Iterationen pro Zeitschritt und gilt für ein $l \in \{0, \dots, i_{\max} - 1\}$

$$\text{err}_l := \left(\frac{1}{n_\xi} \sum_{j=1}^{n_\xi} \left[\frac{\Delta \xi_j^{(l)}}{\text{ATOL}_j + \text{RTOL}_j \cdot |\xi_j^{(l)}|} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

so ist die Lösung hinreichend genau und die Iteration kann gestoppt werden.

3.2 Implementierung in Python

Für numerische Tests wurde das Generalized- α -Verfahren (3.1) in Python 3 implementiert. Da differential-algebraischen Gleichungen wie (2.12) in verschiedenen Lie-Gruppen formuliert werden kann, wurde die Implementierung aus Gründen der Übersichtlichkeit und Universalität objektorientiert vorgenommen. Entstanden sind vier Klassen `LIEGROUP`, `LIEGROUPELEMENTS`, `MODEL` und `INTEGRATOR`, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

Bemerkung. *Implementierte Klassen.*

- `LIEGROUP`. Diese Klasse repräsentiert die jeweilige zu verwendende Lie-Gruppe $G \in \{SO(3), SE(3), \mathbb{R}^3 \times SO(3)\}$ derart, dass sie für jede Gruppe Methoden beinhaltet, welche die zugehörigen Abbildungen $\tilde{\bullet}$, $\mathbf{T}(\cdot)$ und

3. Generalized- α -Verfahren

$\exp(\cdot)$ aus Abschnitt (2.1) implementieren. Intern werden Objekte der Klasse `LIEGROUPELEMENTS` erzeugt und verwendet.

- `LIEGROUPELEMENTS`. Die Gruppenoperationen in den in Abschnitt (2.1) behandelten Gruppen kann durch Identifizierung dieser mit Untergruppen einer entsprechenden linearen Gruppe auf die Multiplikation von Matrizen zurückgeführt werden. Die Klasse `LIEGROUPELEMENTS` implementiert dazu einen entsprechenden Isomorphismus von G in die jeweilige lineare Gruppe. Die entstehenden Objekte können so intern mit dem für die Matrixmultiplikation in Python reservierten Operator "@" miteinander verknüpft werden.
- `MODEL`. Diese Klasse repräsentiert das mechanische System, für welches die Bewegungsgleichungen (2.12) aufgestellt wurden. Konkret implementiert diese Klasse Methoden zur Berechnung des Operators $\hat{\bullet}$, des Residuums r_h aus (3.4) sowie der Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} und \mathbf{D} , welche zur Aufstellung der Iterationsmatrix in (3.9) benötigt werden. Da diese Größen von der verwendeten Lie-Gruppen-Formulierung abhängig sind, wird jedes Objekt der Klasse `MODEL` mit einem entsprechenden Objekt der Klasse `LIEGROUP` initialisiert.
- `INTEGRATOR`. Die Integration der durch `MODEL` repräsentierten Bewegungsgleichungen gemäß der Verfahrensvorschrift (3.1) erfolgt mittels dieser Klasse. Initialisiert wird sie daher mit einem Objekt der Klasse `MODEL` und einem Parameter $\rho_\infty \in [0, 1]$ zur Festlegung der Parameter α_f , α_m , β und γ , vgl. dazu (3.2). Die Integration erfolgt durch den Aufruf einer Methode `SOLVETIMESTEP` in jedem Zeitschritt, welche die Newton-Iteration gemäß Abschnitt (3.1) durchführt. Entsprechender Pseudocode folgt auf der nächsten Seite, welcher sich an jenem in [4] orientiert. Die dafür benötigte Iterationsmatrix wird mittels des übergebenen Objekts der Klasse `MODEL` berechnet. Weiterhin implementiert diese Klasse eine Funktion zur Berechnung benötigter Startwerte als Lösung des Systems (2.19).

Bemerkung. *Berechnung des Winkels α .*

Zur Berechnung des Winkels $\alpha = \alpha(\mathbf{R}) = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)$ wird die in vielen Programmiersprachen implementierte Funktion `arctan2` verwendet, um den Wertebereich der herkömmlichen Arkustangensfunktion von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ auf $[-\pi, \pi)$ zu erweitern.

3. Generalized- α -Verfahren

Algorithmus 3.2.1. Methode SOLVETIMESTEP, Klasse INTEGRATOR

Input: Lösung $(q_n, \mathbf{v}_n, \dot{\mathbf{v}}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$ zum Zeitpunkt $t_n = n \cdot h$

Toleranzen **ATOL** und **RTOL** für die Newton-Iteration

Output: Lösung $(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1})$ zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + h$

```

1   $\Delta \mathbf{q}_n := \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{a}_n; \quad \boldsymbol{\lambda}_{n+1} := \boldsymbol{\lambda}_n$ 
2   $\mathbf{v}_{n+1} := \frac{\gamma}{\beta}\Delta \mathbf{q}_n + (1 - \frac{\gamma}{\beta})\mathbf{v}_n + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\mathbf{a}_n$ 
3   $\dot{\mathbf{v}}_{n+1} := \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \left( \frac{\Delta \mathbf{q}_n - \mathbf{v}_n}{h} - \frac{\mathbf{a}_n}{2} \right) + \frac{\mathbf{a}_n - \alpha_f \dot{\mathbf{v}}_n}{1 - \alpha_f}$ 
4
5  for  $i := 0, \dots, i_{\max} - 1$  do:
6       $q_{n+1} := q_n \circ \exp(h\widetilde{\Delta \mathbf{q}_n})$ 
7       $\mathbf{r}_h := h(\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{g}(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t)) + \mathbf{B}^T(q_{n+1}) \cdot h\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ 
8       $\mathbf{r}_{h\lambda} := \frac{1}{h}\Phi(q_{n+1})$ 
9
10      $\mathbf{B} := \mathbf{B}(q_{n+1}); \quad \mathbf{T} := \mathbf{T}(h\widetilde{\Delta \mathbf{q}_n})$ 
11      $\mathbf{D} := \mathbf{D}(\mathbf{v}_{n+1}); \quad \mathbf{K} := \mathbf{K}(q_{n+1})$ 
12      $\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)}\mathbf{M} + h\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{D} + h^2\mathbf{K}\mathbf{T} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 
13     Löse  $\mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q}_n^{(i)} \\ \Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h \\ \mathbf{r}_{h\lambda} \end{pmatrix}$  nach  $\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$  und  $\Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)}$  auf
14
15      $\boldsymbol{\xi}^{(i)} := (\Delta \mathbf{q}_n, h\boldsymbol{\lambda}_n); \quad \Delta \boldsymbol{\xi}^{(i)} := (\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}, \Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)})$ 
16     if  $\left( \frac{1}{n_{\xi}} \sum_{j=1}^{n_{\xi}} \left[ \frac{\Delta \boldsymbol{\xi}_j^{(i)}}{[\text{ATOL}_j + \text{RTOL}_j \cdot |\boldsymbol{\xi}_j^{(i)}|]} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$  do: break
17
18      $\Delta \mathbf{q}_n := \Delta \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n^{(i)}; \quad \mathbf{v}_{n+1} := \mathbf{v}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta}\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$ 
19      $\dot{\mathbf{v}}_{n+1} := \dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \frac{1 - \alpha_m}{h\beta(1 - \alpha_f)}\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}; \quad \boldsymbol{\lambda}_{n+1} := \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \frac{1}{h}\Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)}$ 
20
21      $\mathbf{a}_{n+1} := \frac{(1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{v}}_n - \alpha_m\mathbf{a}_n}{1 - \alpha_m}$ 
22
23 return  $q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ 

```

Kapitel 4

Stabilität

4.1 Lineare Stabilität des G- α -Verfahrens

Das Generalized- α -Verfahren (3.1) stimmt für Systeme ohne Zwangsbedingungen und lineare Konfigurationsräume $G = \mathbb{R}^k$ mit dem von Chung und Hulbert in [5] eingeführten Verfahren überein. Die folgenden Betrachtungen zur linearen Stabilität des Verfahrens folgen im Wesentlichen denen in [1] und gehen auf jene in [5] zurück.

Im linearen Fall benötigt man statt der Exponentialfunktion lediglich die identische Abbildung zur Parametrisierung von G mit Elementen der Lie-Algebra \mathbb{R}^k , die Verknüpfung \circ ist die Addition ”+”. Die Gleichungen (3.1) nehmen daher die Form

$$q_{n+1} = q_n + h\Delta q_n, \quad (4.1a)$$

$$\Delta q_n = v_n + h(0.5 - \beta)a_n + h\beta a_{n+1}, \quad (4.1b)$$

$$v_{n+1} = v_n + h(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}, \quad (4.1c)$$

$$(1 - \alpha_m)a_{n+1} + \alpha_m a_n = (1 - \alpha_f)\dot{v}_{n+1} + \alpha_f \dot{v}_n,$$

$$M(q)\dot{v}_{n+1} = -g(q_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}) \quad (4.1d)$$

an. Eliminieren von Δq_n und \dot{v}_{n+1} sowie Multiplikation von (4.1d) mit der Matrix M liefern

$$q_{n+1} = q_n + h v_n + (0.5 - \beta) h^2 a_n + \beta h^2 a_{n+1}$$

$$v_{n+1} = v_n + (1 - \gamma) h a_n + \gamma h a_{n+1}$$

$$0 = (1 - \alpha_m) M a_{n+1} + \alpha_m M a_n + (1 - \alpha_f) g_{n+1} + \alpha_f g_n,$$

mit $g_n := g(q_n, v_n, t_n)$.

4. Stabilität

Zur Analyse der Stabilitätseigenschaften wird das Verfahren auf die skalare Testgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega > 0, \quad (4.3)$$

angewendet, deren Lösungen von der Gestalt $q(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ mit gewissen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind. Dies führt mit $g_n = -\omega^2 q_n$ in (4.2) auf

$$\begin{aligned} q_{n+1} - \beta h^2 a_{n+1} &= q_n + h v_n + (0.5 - \beta) h^2 a_n \\ v_{n+1} - \gamma h a_{n+1} &= v_n + (1 - \gamma) h a_n \\ (1 - \alpha_f) \omega^2 q_{n+1} - (1 - \alpha_m) a_{n+1} &= -\alpha_f q_n + \alpha_m a_n. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation der ersten beiden Gleichungen mit $\frac{1}{h^2}$ und $\frac{1}{h}$ erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{(h\omega)^2} & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 1 - \alpha_f & 0 & 1 - \alpha_m \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}_{h\omega}^+} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 q_{n+1} \\ \frac{1}{h} v_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{(h\omega)^2} & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ 0 & 1 & 1 - \gamma \\ -\alpha_f & 0 & -\alpha_m \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}_{h\omega}^0} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 q_n \\ \frac{1}{h} v_n \\ a_n \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_n}.$$

Mit den entsprechenden Bezeichnungen ergibt sich also $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{T}_{h\omega} \mathbf{z}_n = \mathbf{T}_{h\omega}^{n+1} \mathbf{z}_0$ mit $\mathbf{T}_{h\omega} := (\mathbf{T}_{h\omega}^+)^{-1} \mathbf{T}_{h\omega}^0$. Die Stabilität des Verfahrens bei Anwendung auf (4.3) wird also bestimmt durch die Eigenwerte von $\mathbf{T}_{h\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. In [5] wird ein Parameter $\rho_\infty \in [0, 1]$ eingeführt, welcher die übrigen Parameter $\alpha_f, \alpha_m, \beta$ und γ bestimmt. Werden diese wie in (3.2) gewählt, führt dies zu einem monoton fallenden Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}_{h\omega})$ für $h\omega \in (0, +\infty)$ mit $\lim_{h\omega \rightarrow 0} \varrho(\mathbf{T}_{h\omega}) = 1$ und $\lim_{h\omega \rightarrow \infty} \varrho(\mathbf{T}_\infty) = 0$.

Bemerkung. *Untersuchungen für nichtlineare Kräfte.*

Erlicher et. al untersuchten 2002 in [6] die Stabilität des Generalized- α -Verfahrens im linearen Raum anhand nichtlinearer Modelle. Man kam zu dem Ergebnis, dass das Prinzip von Energiestabilität respektive Ljapunov-Stabilität nicht (direkt) auf das Generalized- α -Verfahren anwendbar sind. Konkret untersuchten sie das Verhalten der Energiefunktionen

$$\mathbf{E}_i := \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}_i + \mathcal{V}(\mathbf{q}_i) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{E}}_i := \mathbf{E}_i + h^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{M} \mathbf{a}_i,$$

konnten wenn jedoch nur in wenigen Spezialfällen zeigen, dass diese monoton fallend sind.

4.2 Nichtlineare Stabilität der Kreisel-Modelle

Ein Großteil der Theorie zur Untersuchung von Gleichgewichtspunkten von gewöhnlichen Differentialgleichungen befasst sich mit Problemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (4.4)$$

in linearen Räumen mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Auf Lie-Gruppen definierte Differentialgleichungen wie jene in Kapitel (2) können jedoch nicht direkt mit dieser Theorie behandelt werden, da diese auf einer Untermannigfaltigkeit eines linearen Raumes definiert sind, welcher in der Regel nur isomorph zu \mathbb{R}^p für ein $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist. Gegenstand dieses Abschnitts ist es daher, ob und wie sich Resultate zu Ljapunov-Funktionen und linearisierter Stabilität zur Stabilitätsanalyse vom linearen Fall auf Lie-Gruppen übertragen lassen.

Bemerkung. *Kartesische Produkte von Hilberträumen.*

Bei den linearen Räumen, welche die zu untersuchenden Lie-Gruppen umfassen, handelt es sich meist um kartesische Produkte endlich-dimensionaler reeller Hilberträume. In welcher Weise sich die Hilbertraumstruktur der einzelnen Räume auf ein solches Produkt überträgt, soll im Folgenden kurz festgehalten werden. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m$ reelle Hilberträume mit jeweiligen Skalarprodukten $(\cdot | \cdot)_1, \dots, (\cdot | \cdot)_m$. Dann ist $\mathcal{H}_P := \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_m$ ebenfalls ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(\cdot | \cdot)_P : \mathcal{H}_P \times \mathcal{H}_P \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{y})_P := \sum_{i=1}^m (x_i | y_i)_i \quad (4.5)$$

für Elemente $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{H}_P$, mit $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$ für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Beispiel 4.2.1. *Betrachte $H := \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3$. Der Raum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist zusammen mit dem Frobeniusskalarprodukt*

$$(\cdot | \cdot)_F : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{A} | \mathbf{B})_F = \text{Spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) \quad (4.6)$$

ein Hilbertraum. Mit dem Standardskalarprodukt $(\cdot | \cdot)$ im \mathbb{R}^3 ergibt sich damit

$$((\mathbf{R}_1, \mathbf{x}_1) | (\mathbf{R}_2, \mathbf{x}_2))_H := (\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2)_F + (\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) \quad (4.7)$$

4. Stabilität

für $(\mathbf{R}_1, \mathbf{x}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{x}_2) \in H$ als Skalarprodukt auf H .

Für die sich anschließenden Betrachtungen sei nun H ein reeller, endlich-dimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot | \cdot)_H$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|_H$. Das Problem (4.4) soll nun auf dem Raum H betrachtet werden.

Definition. *Stabilität von Gleichgewichtspunkten.*

Sei $f : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ stetig und $\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)$, $t \geq t_0$ sei die Lösung des AWP (4.4).

1. Die Lösung \mathbf{q}^* heißt **stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\bar{B}_\delta(0) \subset G$ ist, die Lösung $\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)$ zu $\mathbf{q}_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für alle $t \geq t_0$ existiert und

$$\|\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)\|_H \leq \varepsilon$$

für alle $\|\mathbf{q}_0\|_H \leq \delta$ und $t \geq t_0$ erfüllt ist. Entsprechend heißt \mathbf{q}^* **instabil**, falls \mathbf{q}^* nicht stabil ist.

2. Die Lösung \mathbf{q}^* heißt **asymptotisch stabil**, falls \mathbf{q}^* stabil ist und für alle $\mathbf{q}_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)\|_H = 0$$

gilt.

Ein Mittel zur Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichtspunkten autonomer Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \tag{4.8}$$

stellen Ljapunov-Funktionen dar, welche nun thematisiert werden sollen.

4. Stabilität

Definition. *Ljapunov-Funktionen.*

1. Eine Funktion $V \in C(H; \mathbb{R})$ heißt **Ljapunov-Funktion** für (4.8) genau dann, wenn V entlang der Lösungen von (4.8) fällt, also $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$ für jede beliebige Lösung $\mathbf{q}(t)$ von (4.8) fallend in t ist.
2. V heißt **strikte Ljapunov-Funktion** für (4.8) genau dann, wenn V entlang nicht konstanter Lösungen von (4.8) streng fallend ist, also die Funktion $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$ für jede beliebige nichtkonstante Lösung $\mathbf{q}(t)$ von (4.8) streng fallend in t ist.

Bemerkung. *Orbitale Ableitung.*

Es seien $\mathbf{q}(t)$ eine Lösung von (4.8) und $V \in C^1(H; \mathbb{R})$. Mit der Kettenregel folgt für $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$

$$\dot{\varphi} = (\nabla V(\mathbf{q}(t)) | \dot{\mathbf{q}}(t)) = (\nabla V(\mathbf{q}(t)) | \mathbf{f}(\mathbf{q}(t))). \quad (4.9)$$

Die Ableitung $\dot{\varphi}$ wird auch als **orbitale Ableitung** bezeichnet. Somit ist V genau dann eine Ljapunov-Funktion für (4.8), wenn

$$(\nabla V(\mathbf{q}) | \mathbf{f}(\mathbf{q})) \leq 0$$

für alle $\mathbf{q} \in H$ gilt. Weiter ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, falls

$$(\nabla V(\mathbf{q}) | \mathbf{f}(\mathbf{q})) < 0$$

für alle $\mathbf{q} \in H$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$ ist. Man beachte, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Satz 4.2.2. *Es sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für (4.8) und \mathbf{q}^* sei ein Equilibrium für (4.8). Dann gelten*

1. Ist \mathbf{q}^* ein striktes Minimum von V , so ist \mathbf{q}^* stabil für (4.8).
2. Ist \mathbf{q}^* isoliert in $\mathcal{E} = \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{0}]$, ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist \mathbf{q}^* asymptotisch stabil für (4.8).

BEWEIS. Den Beweis dieses Resultats für Systeme (4.8) mit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ findet man in [11], S. 106. Für die oben beschriebenen Räume H behalten die Beweisargumente weiterhin ihre Gültigkeit. \square

4. Stabilität

Die Definition von Ljapunov-Funktionen sowie entsprechende Resultate lassen sich also direkt auf Systeme (4.8) auf entsprechenden Räumen H übertragen. Im Folgenden sollen jedoch Systeme auf einer Lie-Gruppe als Untermannigfaltigkeit von H betrachtet werden. Die hier vorgestellten Ansätze und Methoden zur Behandlung solcher Differentialgleichungen folgen jenen in Kapitel 13 von [11] für Differentialgleichungen auf Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^k .

Lemma 4.2.3. *Es seien G eine Matrix-Lie-Gruppe und \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra mit $k := \dim(\mathfrak{g})$. Seien weiter $(\mathbf{e})_{i=1}^k$ die geordnete Standardbasis von \mathbb{R}^k , $\tilde{\bullet}$ wie in (1.2) und $\boldsymbol{\tau}_i := \tilde{\mathbf{e}}_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann bilden für jedes $\mathbf{R} \in G$ die Vektoren*

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_i := \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

eine Basis von $T_{\mathbf{R}}G$. Mit $\psi(\mathbf{v}) := \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}})$, $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, gilt zudem

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_i = \partial_i \psi(\mathbf{0}) := \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}. \quad (4.10)$$

BEWEIS. Da $\tilde{\bullet} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}$ nach Voraussetzung ein Vektorraumisomorphismus ist und $(\mathbf{e})_{i=1}^k$ eine Basis von \mathbb{R}^k ist, bildet $(\boldsymbol{\tau}_i)_{i=1}^k$ eine geordnete Basis von \mathfrak{g} . Mit Lemma (1.1.4) folgt, dass für jedes $\mathbf{R} \in G$ für den zugehörigen Tangentialraum $T_{\mathbf{R}}G$ gilt

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{R}}G &= \mathbf{R} \cdot \mathfrak{g} = \mathbf{R} \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \boldsymbol{\tau}_k \rangle = \langle \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_k \rangle \\ &= \langle \{\bar{\boldsymbol{\tau}}_i\}_{i=1}^k \rangle \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \partial_i \psi(\mathbf{0}) &= \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial v_i} \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} \exp \left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i \right) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \\ &= \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_i. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Basisvektoren eines Tangentialraumes.*

Sei $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine (lokale) Parametrisierung in $q \in G$, also gelte $\psi(\mathbf{0}) = q$. Die Abbildungen

$$\psi_i(t) := \psi(t \cdot \mathbf{e}_i)$$

4. Stabilität

definieren differenzierbare Kurven auf G , wodurch mit der Definition des Tangentialraums $T_q G$ folgt, dass

$$\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_i(q) := \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \frac{d}{dt} \psi(t \cdot \mathbf{e}_i) \Big|_{t=0} \in T_q G \quad (4.11)$$

für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ einen Tangentenvektor in $T_q G$ definiert. Da ψ eine Parametrisierung von G ist, ist ψ' injektiv und die Vektoren $\bar{\tau}_i$ damit linear unabhängig, folglich bilden sie also eine Basis von $T_q G$. Der Tangentialraum $T_q G$ ist also unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ und der Gestalt der zugehörigen Basisvektoren $\bar{\tau}_i$.

Umgekehrt liefert Lemma (4.2.3) zu jeder Basis von $T_q G$ eine Parametrisierung der Form (1.10) in Abhängigkeit von der konkreten Abbildung $\tilde{\bullet}$. Im Fall von Lie-Gruppen befindet man sich also in der günstigen Situation, zu jeder Basis eines Tangentialraumes eine relativ einfache Parametrisierung zu kennen. Wegen Lemma (1.1.4) genügt bereits die Kenntnis einer Basis der Lie-Algebra $T_I G$, welche im Folgenden zur Unterscheidung mit $(\tau_i)_{i=1}^k$ bezeichnet werde.

Definition. *Kovariante und kontravariante Komponenten.*

Es sei Σ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathbf{a} \in T_q \Sigma$ für ein $q \in \Sigma$. Sei weiter ψ eine Parametrisierung um q und $(\bar{\tau}_i)_{i=1}^k$ wie in (4.11) eine Basis des k -dimensionalen Tangentialraums $T_q \Sigma$. Die Koeffizienten $a^i \in \mathbb{R}$ in der Darstellung

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k a^i \cdot \bar{\tau}_i$$

heißen **kontravariante Komponenten** von \mathbf{a} . Der Vektor \mathbf{a} ist jedoch ebenso durch seine **kovarianten Komponenten** $a_i \in \mathbb{R}$ mit

$$a_i := (\mathbf{a} | \bar{\tau}_i), \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

eindeutig bestimmt, welche die Koeffizienten in der Darstellung von \mathbf{a} in der **dualen Basis** $(\bar{\tau}^j)_{j=1}^k$ sind, definiert durch $(\bar{\tau}^j | \bar{\tau}_i) = \delta_{ij}$.

Definition. *Erste Fundamentalmatrix.*

Es seien die Bezeichnungen so wie in der vorangegangenen Definition. Die **erste Fundamentalmatrix** $\mathbf{C} = (c_{ij})$ in $q \in \Sigma$ ist definiert durch

$$c_{ij} = c_{ij}(q) := (\bar{\tau}_i | \bar{\tau}_j), \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

4. Stabilität

Bemerkungen. *Eigenschaften der ersten Fundamentalmatrix.*

1. Die erste Fundamentalmatrix \mathbf{C} ist symmetrisch, positiv definit und damit invertierbar, denn es gilt für alle $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j=1}^k c_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^k (\xi_i \bar{\tau}_i | \xi_j \bar{\tau}_j) = \left(\sum_{i=1}^k \xi_i \bar{\tau}_i \middle| \sum_{j=1}^k \xi_j \bar{\tau}_j \right) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i \bar{\tau}_i \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

2. Es sei $\mathbf{C}^{-1} = (c^{ij})$, womit sich Relationen $\delta_{ij} = \sum_{s=1}^k c_{is} c^{sj} = \sum_{s=1}^k c^{is} c_{sj}$ ergeben. Ist weiter $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k a^i \cdot \bar{\tau}_i$, so folgt

$$a_j = (\mathbf{a} | \bar{\tau}_j) = \sum_{i=1}^k a^i (\bar{\tau}_i | \bar{\tau}_j) = \sum_{i=1}^k a^i \cdot c_{ij}$$

und damit für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\sum_{j=1}^k a_j \cdot c^{ji} = \sum_{s,j=1}^k a^s \cdot c_{sj} \cdot c^{ji} = \sum_{s=1}^k a^s \cdot \left(\sum_{j=1}^k c_{sj} \cdot c^{ji} \right) = a^i. \quad (4.12)$$

Die duale Basis ergibt sich mit $\left(\sum_{s=1}^k c^{is} \cdot \bar{\tau}_s \middle| \bar{\tau}_j \right) = \delta_{ij}$ zu

$$\bar{\tau}^i = \sum_{s=1}^k c^{is} \cdot \bar{\tau}_s. \quad (4.13)$$

Beispiel 4.2.4. Sei $\Sigma := SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g} := T_{\mathbf{I}}\Sigma$ hat die Dimension $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ und wird erzeugt von den Matrizen

$$\boldsymbol{\tau}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

4. Stabilität

welche eine geordnete Basis von \mathfrak{g} bilden. Mit dieser Notation gilt für die Bilder von $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)^T \in \mathbb{R}^3$ unter der in (1.4) angegebenen Abbildung $\tilde{\bullet}$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i. \quad (4.15)$$

Sei nun $\mathbf{R} \in \Sigma$ beliebig. Dann ist $(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i)_{i=1}^3 = (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)_{i=1}^3$ nach Lemma (4.2.3) eine geordnete Basis von $T_{\mathbf{R}}\Sigma$. Es ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_i | \bar{\boldsymbol{\tau}}_j)_F &= \text{Spur}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_j^T) = \text{Spur}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j^T \cdot \mathbf{R}^T) \\ &= \text{Spur}(\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j^T) = (\boldsymbol{\tau}_i | \boldsymbol{\tau}_j)_F \\ &= 2 \cdot \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.16)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, 3\}$, denn es gilt $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und die Spurabbildung ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen. Die erste Fundamentalmatrix lautet für alle $\mathbf{R} \in \Sigma$ damit $\mathbf{C}(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{I}_3$.

Definition. *Flächengradient einer skalaren Funktion.*

Es seien $V : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und $q \in \Sigma$. Seien weiter ψ eine (lokale) Parametrisierung von Σ mit $\psi(\mathbf{0}) = q$ und $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \in T_q\Sigma$ zugehörige Tangentenvektoren gemäß (4.11). Der **Flächengradient** $\nabla_{\Sigma}V$ von V in q ist dann mittels der Kettenregel definiert durch die Gültigkeit von

$$\partial_i V(\phi(\mathbf{0})) = (\nabla_{\Sigma}V(q) | \bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \quad (4.17)$$

für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Bemerkung. *Komponenten und Flächengradient.*

Da der Flächengradient $\nabla_{\Sigma}V$ ein Element des Tangentialraumes $T_q\Sigma$ ist, lässt er sich mittels kovarianter Komponenten a_i charakterisieren. Es gilt also

$$\nabla_{\Sigma}V = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^i. \quad (4.18)$$

Die Definition des Flächengradienten (4.17) impliziert mit der Darstellung bezüglich kovarianter Komponenten (4.18)

$$a_i = \partial_i V(\phi(\mathbf{0})).$$

4. Stabilität

Dies ergibt mit (4.13)

$$\nabla_{\Sigma} V(q) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \bar{\tau}^i = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j=1}^k c^{ij} \cdot \bar{\tau}_j = \sum_{i,j=1}^k c^{ij} \cdot \partial_i V(\phi(\mathbf{0})) \cdot \bar{\tau}_j. \quad (4.19)$$

Bemerkung. *Unabhängigkeit von Parametrisierung.*

Die Darstellung des Flächengradienten (4.19) ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ , vgl. [11]. Ergänzende Ausführungen zum Flächengradienten findet man auch in [10], S. 49.

Bemerkung. *Ljapunov-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten.*

Nach [11] ist es mit Hilfe des Flächengradienten nun möglich, Ljapunov-Funktionen anhand ihrer orbitalen Ableitung (4.9) auf Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren. Eine Funktion $V \in C^1(\Sigma, \mathbb{R})$ ist genau dann eine Ljapunov-Funktion für das auf Σ definierte Problem (4.8), falls

$$(\nabla_{\Sigma} V(q) \mid \mathbf{f}(q)) \leq 0 \quad (4.20)$$

für alle $g \in \Sigma$ gilt. Ebenso überträgt sich die Charakterisierung strikter Ljapunov-Funktionen in analoger Weise.

Wie die Untersuchung der Stabilität des Verfahrens im linearen Fall soll auch die Untersuchung im nichtlinearen Fall anhand eines mechanischen Systems ohne Zwangsbedingungen erfolgen. Im Fall der Kreisel-Modelle aus Kapitel 2 werden daher die entsprechenden Formulierungen (2.29) und (2.39) der Bewegungsgleichungen betrachtet.

Bemerkung. *Gleichgewichtspunkte des Kreisel-Modells (2.29).*

Im Folgenden sollen die Gleichgewichtspunkte des Systems (2.29) untersucht werden. Das System (2.29) kann zunächst mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^* \widetilde{\mathbf{\Omega}}^* \\ \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{\Omega}^* \times \mathbf{J} \mathbf{\Omega}^* + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma}) \end{pmatrix}$$

und $q := (\mathbf{R}, \mathbf{\Omega})$ auf die Form (4.8) gebracht werden. Sei nun $(\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*)^T$ ein Gleichgewicht des Systems. Aus $\mathbf{R}^* \mathbf{\Omega}^* = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ folgt mit der Invertierbarkeit von

4. Stabilität

\mathbf{R} , dass $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^* = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ und damit $\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{0}_{1 \times 3}$ gilt.

Weiter ergibt sich $\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{X} \times \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}_{1 \times 3}$, was genau dann gilt, wenn $\mathbf{R}^* \mathbf{X}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ linear abhängig sind. Im Fall $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$ und $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \cdot \mathbf{e}_y$ sind $\mathbf{x}_1 := (0, -1, 0)^T$ und $\mathbf{x}_2 := (0, 1, 0)^T$ die mechanischen Gleichgewichte des Systems, für welche $\tilde{\mathbf{x}}_i \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$ gilt. Seien $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ wie in (2.30) definiert. Dann ist wegen

$$\mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1$$

der Punkt $(\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})$ ein Gleichgewicht des Systems (2.29). Insbesondere sieht man hier, dass für jedes $\alpha \in [-\pi, \pi)$ ein Gleichgewicht von (2.29) der Form

$$q^*(\alpha) = \left(\mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha), \mathbf{0} \right)^T \quad (4.21)$$

existiert. Selbiges lässt sich auch für \mathbf{x}_2 feststellen. Die isolierten mechanischen Gleichgewichte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 spiegeln sich also in nichtisolierten Gleichgewichtspunkten (4.21) des Systems (2.29) wider.

Bemerkung. Gleichgewichtspunkte des erweiterten Kreisel-Modells (2.39).

Die Untersuchung der Gleichgewichte des Systems (2.39) verläuft analog zu der für das System (2.29). Im Fall von (2.39) ergibt sich die rechte Seite \mathbf{f} als

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^* \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^* \\ \mathbf{J}^{-1}(-\boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}^* + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} - d \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R})) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

mit einem zusätzlichen Reibungsterm $d \cdot \boldsymbol{\Omega}$ und dem die Torsionskraft repräsentierenden Vektor $\mathbf{g}_F(\mathbf{R})$ aus (2.32). Ist wieder $(\mathbf{R}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)^T$ ein Gleichgewicht des Systems, so folgt wieder $\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{0}$ und damit

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*).$$

Mit $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$ und $\tilde{\bullet}$ aus 1.4 ist

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

4. Stabilität

und es ergibt sich

$$0 = \mathbf{e}_1^T \cdot \left(m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^* \right)^T \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*). \quad (4.23)$$

Der Vektor $\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*)$ ist nach Lemma (2.4.1) gegeben als

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*)}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2} \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3}{r_{33}} - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 \right),$$

wobei $\mathbf{R}^* = (r_{ij})_{ij}$ und $k > 0$ seien. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (-r_{32}, r_{31}, 0)^T \text{ und} \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (r_{33}, 0, -r_{31})^T, \end{aligned}$$

sodass man mit (4.23)

$$0 = \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*)}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2} \cdot \left(1 + \frac{r_{32}^2}{r_{33}^2} \right) = k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*) \quad (4.24)$$

erhält. Da $k > 0$ ist, muss also $\alpha(\mathbf{R}^*) = 0$ und somit $\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \mathbf{0}$ sein. Insgesamt folgt also wie im Fall des Systems (2.29)

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma}.$$

Diese Bedingung liefert wieder das Gleichgewicht $(\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})^T$, welches im Gegensatz zum System (2.29) auf Grund der Bedingung $\alpha(\mathbf{R}^*) = 0$ ein isoliertes Gleichgewicht ist. Dies gilt ebenso für das andere Gleichgewicht $(\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})^T$.

Satz 4.2.5. *Die Funktion*

$$\varphi(t) = V(\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}) := \mathcal{T}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} - m \cdot (\mathbf{R} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} \quad (4.25)$$

ist eine Ljapunov-Funktion für das System (2.29).

BEWEIS. Es sei

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \\ \mathbf{J}^{-1}(-\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (4.26)$$

womit (2.29) auf die Form $\dot{q} = \mathbf{f}(q)$ mit $q := (\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}) \in G := SO(3) \times \mathbb{R}^3$ gebracht werden kann.

4. Stabilität

G ist eine Untermannigfaltigkeit des Hilbertraumes $H = \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt (4.7). Für die orbitale Ableitung der Ljapunov-Funktion (4.25) ergibt sich also mit der Bezeichnung $\Sigma := SO(3)$

$$\dot{\varphi} = \left((\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}, \nabla \mathcal{T}) \mid (\dot{\mathbf{R}}, \dot{\boldsymbol{\Omega}})^T \right)_H = \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right). \quad (4.27)$$

Es sei nun $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, mit der Abbildung $\tilde{\bullet}$ aus (1.4). Dann gilt mit der Darstellung des Flächengradienten (4.19), den Einträgen der Inversen \mathbf{C}^{-1} der ersten Fundamentalmatrix in (4.16) und der Linearität der Funktion \mathcal{V}

$$\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c^{ij} \partial_i (\mathcal{V}(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i, \quad (4.28)$$

wobei die Tangentenvektoren $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \in T_{\mathbf{R}} \Sigma$ wie in Beispiel (4.2.4) sind. Es folgt

$$\left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \right)_F = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{R} \sum_{j=1}^3 \Omega^j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right)_F.$$

Die $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i$ bilden nach (4.16) ein Orthogonalsystem bezüglich $(\cdot \mid \cdot)_F$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \Omega^j \cdot \mathbf{R} \boldsymbol{\tau}_j \right)_F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Omega^j \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\tau}}_j \right)_F \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \right)_F = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \\ &= \mathcal{V} \left(\sum_{i=1}^3 \Omega^i \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \right) = \mathcal{V}(\mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \\ &= -m \cdot \mathbf{X}^T \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

unter Verwendung der Linearität der Funktion \mathcal{V} . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right) &= \left(\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \mid \mathbf{J}^{-1}(-\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}) \right) \\ &= \left(\boldsymbol{\Omega}^T \mid -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \right), \end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichung verwendet wird, dass \mathbf{J} eine Diagonalmatrix ist. Zudem stehen die Vektoren $\boldsymbol{\Omega}$ und $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}$ senkrecht aufeinander, es gilt also $(\boldsymbol{\Omega}^T \mid \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) = 0$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right) &= m \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} = m \cdot (-\tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Omega})^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \\ &= m \cdot \mathbf{X}^T \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

4. Stabilität

und insgesamt erhält man somit

$$\dot{\varphi} = \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Also ist die Gesamtenergie V des Systems eine Ljapunov-Funktion für das System (2.29). \square

Satz 4.2.6. *Es seien $\alpha(\mathbf{R}) = \arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)$ und $k, d > 0$. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= V(\mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega}) := \mathcal{T}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} - m \cdot (\mathbf{R} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} + \frac{k}{2} \cdot \alpha(\mathbf{R})^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für das System (2.39).

BEWEIS. Die Systeme (2.29) und (2.39) unterscheiden sich lediglich durch den Reibungsterm $d \cdot \boldsymbol{\Omega}$ und die Kraft \mathbf{g}_F in (2.32) voneinander. Auch die Funktionen V in (4.25) und (4.30) unterscheiden sich nur durch das Potential $\mathcal{V}_F := \frac{k}{2} \cdot \alpha(\mathbf{R})^2$. Um nun zu zeigen, dass V aus (4.30) eine Ljapunov Funktion für das erweiterte System (2.39) ist, genügt der Nachweis von

$$\left((\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F, \nabla \mathcal{T}) \mid (\mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}, -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}_F))^T \right)_H \leq 0. \quad (4.31)$$

unter Einbeziehung von Satz (4.2.5). Die rechte Seite \mathbf{f} für das System (2.39) findet man in (4.22).

Für den Oberflächengradienten $\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F$ ergibt sich

$$\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c^{ij} \partial_i (\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_i (\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i, \quad (4.32)$$

wobei ψ und $(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i)_{i=1}^k$ wie im Beweis von Satz (4.2.5) seien. Die partiellen Ablei-

4. Stabilität

tungen $\partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0})))$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) &= \frac{k}{2} \cdot \partial_i \alpha(\psi(\mathbf{0}))^2 \\
&= k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \partial_i(\alpha(\psi(\mathbf{0}))) \\
&= \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)^2} \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \mathbf{e}_2 - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \mathbf{e}_3 \right) \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \mathbf{e}_2 - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \mathbf{e}_3 \right) \\
&= -C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2) \mathbf{e}_i - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3) \mathbf{e}_i \right) \\
&= -C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_2^T \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_3^T \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right) \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right),
\end{aligned}$$

wobei $C(\mathbf{R})$ wie in Lemma (2.4.1) definiert ist. Damit erhält man nun

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \right)_F \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \right)_F \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{1}{r_{33}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T(\tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T(\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right), \\
&= \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

mit der Definition von \mathbf{g}_F . Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathcal{T} \mid -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) &= -(\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \mid \mathbf{J}^{-1}(d \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) \\
&= -d \cdot \|\boldsymbol{\Omega}\|_2^2 - \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

und somit letztlich

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + (\nabla \mathcal{T} \mid -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) \\
&= \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) - d \cdot \|\boldsymbol{\Omega}\|_2^2 - \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = -d \cdot \|\boldsymbol{\Omega}\|_2^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Somit ist V eine Ljapunov-Funktion und für $d > 0$ und $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ist V sogar streng fallend, da $\dot{\varphi} < 0$ gilt. Angenommen, φ ist in einem nichttrivialen Intervall (a, b)

4. Stabilität

nicht streng fallend. Dann gilt $\dot{\varphi}(t) = 0$ für jedes $t \in (a, b)$ und somit nach (4.33) $\boldsymbol{\Omega}(t) \equiv \mathbf{0}$. Damit gilt dann auch $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R} \equiv \text{const.}$ in (a, b) . Da dann auch $\dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) \equiv \mathbf{0}$ in (a, b) gilt, folgt

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}). \quad (4.34)$$

Nach (4.24) ist dann aber schon $\alpha(\mathbf{R}) = 0$ und $(\mathbf{R}, \mathbf{0})^T$ muss bereits ein Gleichgewichtspunkt des Systems sein. Somit ist also V eine strikte Ljapunov-Funktion für (2.39). \square

Korollar 4.2.7. *Das Element $q^* := (\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0}_{3 \times 1})^T \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ ist ein stabiles Gleichgewicht des Systems (2.29) und ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht des Systems (2.39).*

BEWEIS. Um Satz (4.2.2) anwenden zu können, muss für beide Behauptungen zunächst gezeigt werden, dass V in einer Umgebung von q^* positiv definit ist. Die kinetische Energie $\mathcal{T}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \geq 0$ wird für $\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ minimal. Die potenzielle Energie $-m(\mathbf{R}\mathbf{X})^T \cdot \boldsymbol{\gamma}$ nimmt ihr Minimum genau dann an, wenn $\mathbf{R}\mathbf{X} = a \cdot \boldsymbol{\gamma}$ für ein $a > 0$ gilt. Für $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \mathbf{e}_y \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{X} = \mathbf{e}_x$ ergibt sich

$$\mathbf{R}_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y = \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^{-1} \boldsymbol{\gamma}.$$

Somit ist $V(q^*)$ ein striktes Minimum von V und V damit positiv definit in einer Umgebung von q^* . Da zudem die Funktion (4.2.5) eine Ljapunov-Funktion für das System (2.29) ist, ist nach Satz (4.2.2) q^* ein stabiles Gleichgewicht.

Im Fall des Systems (2.39) werden die obigen Energien ebenfalls unter entsprechenden Bedingungen minimal. Das zusätzliche Federpotential $\frac{k}{2} \alpha(\mathbf{R})^2$ nimmt sein Minimum für $k > 0$ für $\alpha(\mathbf{R}) = 0$ an. Also ist (4.30) ebenfalls positiv definit in einer Umgebung von q^* . Da (4.30) eine strikte Ljapunov-Funktion ist und q^* ein isoliertes Gleichgewicht ist, ist q^* nach Satz (4.2.2) asymptotisch stabil. \square

Bemerkung. *Darstellung in lokalen Koordinaten.*

Die Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichtspunkten autonomer Systeme der Form (4.8) mit Ljapunov-Funktionen gestaltet sich dahingehend schwierig, dass man zunächst eine Ljapunov-Funktion finden muss. Zudem macht Satz (4.2.2) keine Aussagen zur Instabilität von Gleichgewichten. Aufschlussreicher

4. Stabilität

kann es daher sein, das System in lokalen Koordinaten zu schreiben. Ein Ansatz dazu wird ebenfalls in Kapitel 13 von [11] vorgestellt und soll nun auf Untermannigfaltigkeiten von H angewendet werden.

Im Folgenden bezeichne $*$ die Hintereinanderausführung von Abbildungen. Seien $q_0 \in G$ und $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{y}_0) = q_0$ und einer Umgebung U_0 von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$. Sei weiter $\mathbf{y}(t) := \psi^{-1}(q(t))$ für $t \in (a, b)$, wobei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein hinreichend kleines Intervall sei, sodass $0 \in I$ ist und $\mathbf{y}(t) \in U_0$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. Damit gilt

$$q(t) = \psi(\mathbf{y}(t))$$

und durch Differentiation nach t ergibt sich

$$D\psi(\mathbf{y}(t))(\dot{\mathbf{y}}(t)) = \dot{q} = \mathbf{f}(q) = \mathbf{f}(\psi(\mathbf{y}(t))). \quad (4.35)$$

Die Abbildung $D\psi(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\psi(\mathbf{y})}G$ ist ein Isomorphismus von \mathbb{R}^k auf den Tangentialraum $T_{\psi(\mathbf{y})}G$ in $\psi(\mathbf{y}(t))$ an G . Genauer gilt mit zugehörigen Tangentenvektoren definiert wie in (4.11)

$$D\psi(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^k v^i \cdot \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t))) \quad (4.36)$$

mit kontravarianten Komponenten $\mathbf{v} := (v^1, \dots, v^k) \in \mathbb{R}^k$. Ist nun f ein Tangentenvektorfeld an G , also $\mathbf{f}(q) \in T_q G$ für alle $q \in G$, so erhält man ebenso eine Darstellung

$$\mathbf{f}(q(t)) = (\mathbf{f} * \psi)(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^k (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t))) \quad (4.37)$$

in kontravarianten Komponenten $(f^i * \psi)(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Die Darstellungen (4.36) und (4.37) liefern zusammen mit (4.35)

$$\sum_{i=1}^k \dot{y}^i(t) \cdot \bar{\tau}_i = D\psi(\mathbf{y}(t))(\dot{\mathbf{y}}(t)) = (\mathbf{f} * \psi)(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^k (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i \quad (4.38)$$

mit $\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t)))$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Da die $\bar{\tau}_i$ eine Basis von $T_{\psi(\mathbf{y})}G$ bilden, sind die Komponenten $\dot{\mathbf{y}}^i$ und f^i eindeutig bestimmt. Daher folgt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Gleichheit

$$\dot{y}^i(t) = (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)). \quad (4.39)$$

4. Stabilität

Seien nun q^* ein Gleichgewichtspunkt von (4.8) und ψ so, dass $\psi(\mathbf{0}) = q^*$ ist. Dann ist das System (4.8) in einer Umgebung von $q^* \in G$ äquivalent zum System (4.39) in lokalen Koordinaten und das Gleichgewicht q^* entspricht $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$. Die Untersuchung der Stabilität von q^* kann daher stattdessen für den Punkt \mathbf{y}^* bezüglich des Systems (4.39) durchgeführt werden.

Das zu (4.39) gehörige linearisierte System lautet

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{A} := (a_{ij})_{ij} = (\partial_j (f^i * \psi)(\mathbf{0}))_{ij}. \quad (4.40)$$

Um die Stabilität von $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ wie im linearen Fall anhand der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} untersuchen zu können, müssen diese Eigenwerte natürlich unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ sein. Dies wird im Folgenden gezeigt.

Lemma 4.2.8. *Es seien $q^* \in G$ ein Gleichgewicht von (4.8) und $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{0}) = q^*$. Dann sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{ij} = (\partial_j (f^i * \psi)(\mathbf{0}))_{ij}$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ .*

BEWEIS. Es seien $U_0^{(1)}, U_0^{(2)} \subset \mathbb{R}^k$ offene Umgebungen von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$, auf denen Parametrisierungen $\psi_i : U_0^{(i)} \rightarrow G$, $i \in \{1, 2\}$ von G mit $\psi_i(\mathbf{0}) = q^*$ definiert seien. Dann gilt $U_0^{(1)} \cap U_0^{(2)} \neq \emptyset$ und es existiert eine Umgebung $U \subset U_0^{(1)} \cap U_0^{(2)}$ so, dass die Abbildung $\Psi := \psi_1^{-1} * \psi_2|_U$ wohldefiniert ist. Zudem ist $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus. Für alle $\mathbf{y} \in U$ gilt dann

$$\psi_2(\mathbf{y}) = (\psi_1 * \Psi)(\mathbf{y}). \quad (4.41)$$

Ferner existiert ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{y}(t) := \psi_2^{-1}(q(t)) \in U$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. Dies führt wie zuvor in (4.39) auf eine lokale Darstellung des Systems (4.8)

$$\dot{y}^i(t) = (f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t)), \quad i \in \{1, \dots, k\}. \quad (4.42)$$

Dabei bezeichnen f_2^i die kontravarianten Komponenten von \mathbf{f} bezüglich der Basis $\bar{\tau}_i^{(2)} := \partial_i \psi_2(\mathbf{y}(t))$. Ebenso erhält man mit $\mathbf{x}(t) := \psi_1^{-1}(q(t))$ eine Darstellung

$$\dot{x}^i(t) = (f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)), \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad (4.43)$$

wobei die f_1^i hier bezüglich der Basis $\bar{\tau}_i^{(1)} := \partial_i \psi_1(\mathbf{x}(t))$ definiert seien. Es soll nun eine Beziehung zwischen den Komponenten f_1^i und f_2^i hergeleitet werden. Mit der Definition von Ψ erhält man

$$\Psi(\mathbf{y}(t)) = (\psi_1^{-1} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) = (\psi_1^{-1} * \psi_2 * \psi_2^{-1})(q(t)) = \psi_1^{-1}(q(t)) = \mathbf{x}(t).$$

4. Stabilität

Weiter gilt mit (4.41) und der Bezeichnung $D\Psi(\mathbf{y}(t)) = (p_{ij})_{ij}$

$$\bar{\tau}_i^{(2)} = \partial_i \psi_2(\mathbf{y}(t)) = \partial_i \psi_1(\Psi(\mathbf{y}(t))) = D\psi_1(\mathbf{x}(t))(\partial_i \Psi(\mathbf{y}(t))) = \sum_{j=1}^k p_{ji} \bar{\tau}_j^{(1)}$$

und mit (4.41) folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) &= \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i^{(2)} = \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \bar{\tau}_i^{(2)} \\ &= \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \sum_{j=1}^k p_{ji} \bar{\tau}_j^{(1)} \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k p_{ji} (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \bar{\tau}_j^{(1)}. \end{aligned}$$

Da aber auch

$$(\mathbf{f} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) = (\mathbf{f} * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^k (f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) \cdot \bar{\tau}_i^{(1)}$$

gilt, folgt somit die Gleichheit

$$(f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^k p_{ji} (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) = \sum_{i=1}^k p_{ji} (f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t))$$

oder in Matrixschreibweise

$$(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = D\Psi(\mathbf{y}(t)) \cdot (\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y}(t))$$

mit $\mathbf{f}_1 := (f_1^1, \dots, f_1^k)$ und $\mathbf{f}_2 := (f_2^1, \dots, f_2^k)$. Die Matrix $D\Psi(\mathbf{y}(t))$ ist invertierbar, da Ψ ein Diffeomorphismus ist. Durch Differentiation von $(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y})$ nach \mathbf{y} ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} &= D_{\mathbf{y}} [D\Psi(\mathbf{y})^{-1} \cdot (\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}))] \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \\ &= D\Psi(\mathbf{0})^{-1} \cdot D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y})) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \\ &= D\Psi(\mathbf{0})^{-1} \cdot D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \cdot D\Psi(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich unter Verwendung von $(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$. Die Linearisierung $D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{0})$ bezüglich ψ_2 geht also durch Ähnlichkeitstransformation mit $D\Psi(\mathbf{0})$ aus $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{0})$ hervor und besitzt damit die gleichen Eigenwerte. \square

4. Stabilität

Der folgende Satz über die linearisierte Stabilität ist in dieser Formulierung in [11] zu finden und stellt eine Anwendung des gleichnamigen Satzes für Systeme (4.8) mit rechter Seite $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf das System (4.40) dar.

Satz 4.2.9 (Linearisierte Stabilität). *Es seien $f : G \rightarrow TG$ stetig differenzierbar, $q^* \in G$ mit $f(q^*) = 0$ und ψ eine Parametrisierung mit $\psi(\mathbf{0}) = q^*$. Sei die Matrix $\mathbf{A} := \mathbf{A}(q^*, \psi)$ wie in (4.40). Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} , so ist q^* asymptotisch stabil für (4.8) in G .*
2. *Gilt $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für einen Eigenwert λ von \mathbf{A} , so ist q^* instabil für (4.8) in G .*

Bemerkung. Satz (4.2.9) trifft in bestimmten Fällen keine Aussage für Gleichgewichte $q^* \in G$, für welche mindestens ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(q^*)$ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ existiert. Dies führt auf die folgende Definition für jene Art Gleichgewichte, welche mittels (4.2.9) vollständig behandelt werden können.

Definition. *Es seien q^* ein Gleichgewichtspunkt des autonomen Systems (4.8), ψ eine Parametrisierung mit $\psi(\mathbf{0}) = q^*$ und $\mathbf{A} := \mathbf{A}(q^*, \psi)$ die Jacobimatrix des Systems in lokalen Koordinaten (4.39) bezüglich ψ . Der Punkt q^* heißt **hyperbolischer Gleichgewichtspunkt** des Systems (4.8) genau dann, wenn $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} gilt.*

Kapitel 5

Numerische Tests

5.1 Bestimmung der Anfangswerte

Auf die Verwendung physikalischer Einheiten wird im Folgenden verzichtet.

Bemerkung. *Modell-Parameter und Anfangskonfiguration.*

Die Modellparameter der Kreisel-Modelle weichen gemäß den Ausführungen in Abschnitt (2.4) von den in der Literatur üblicherweise verwendeten Werten ab. Konkret bedeutet dies, dass der Massenschwerpunkt sich in der Referenzkonfiguration im Punkt $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$ anstatt in $(0, 1, 0)^T$ befinde und die Fallbeschleunigung mit $\boldsymbol{\gamma} = (0, -9.81, 0)^T$ in negative y-Richtung wirke. Die Masse des Kreisels betrage weiterhin $m = 15$. Das Trägheitsmoment \mathbf{J} für die Kreisel-Modelle unter Zwangsbedingungen sei wie in [4] bezüglich des Schwerpunktes des Kreisels mit

$$\mathbf{J} = \text{diag}(0.46875, 15.234375, 15.234375) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

definiert. Für die Systeme ohne Zwangsbedingungen erhält man

$$\mathbf{J} = \text{diag}(0.46875, 0.234375, 0.234375) \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

definiert bezüglich des Aufhängepunkts des Kreisels.

Für alle Tests sollen sich die Anfangsdaten $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(0)$ und $\boldsymbol{\Omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}(0)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung um den Gleichgewichtspunkt

$$q^* = \left(\mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right), \mathbf{0} \right) \quad (5.1)$$

befinden. Um dies zu gewährleisten, werden $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}$ und

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_z(\gamma_0) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_0) \quad (5.2)$$

5. Numerische Tests

gesetzt mit Parametern $\gamma_0 \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ und $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

Betrachtet man die Kreisel-Modelle aus Kapitel 2 in $SO(3)$ ohne Zwangsbedingungen, so benötigt man zusätzlich zu \mathbf{R}_0 und $\mathbf{\Omega}_0$ einen Startwert für $\dot{\mathbf{\Omega}}_0$. Dieser kann aber aus der Bewegungsgleichung (2.12b) für $\dot{\mathbf{\Omega}}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt werden. Man erhält

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_0 = -\mathbf{J}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{R}_0, \mathbf{\Omega}_0) \right) \quad (5.3)$$

Zur Durchführung der numerischen Tests werden für die DAE-Formulierungen des (erweiterten) Kreisel-Modells konsistente Startwerte für \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{\Omega}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ benötigt. Diese können mit Hilfe der jeweiligen versteckten Zwangsbedingungen (2.17) und (2.18) sowie dem Gleichungssystem (2.19) berechnet werden.

Bemerkung. *Konsistente Startwerte in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.*

In $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ erhält man durch die Zwangsbedingung $\mathbf{0} = \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{R}_0 \mathbf{X}.$$

Weiter liefert die erste versteckte Zwangsbedingung in Lemma (2.3.1)

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{u}(0) = \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega}_0.$$

Die Startwerte $\ddot{\mathbf{x}}_0$, $\dot{\mathbf{\Omega}}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}_0$ erhält man letztlich als Lösung des Gleichungssystems (2.19)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(q_0) & \mathbf{B}^T(q_0) \\ \mathbf{B}(q_0) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{g}(q_0, \mathbf{v}_0, 0) \\ -\mathbf{Z}(q_0)(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

mit $\mathbf{v}_0 = (\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{\Omega}_0)^T$ und $\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^T & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix}$. Die Bilinearform \mathbf{Z} ergibt sich wegen

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} (\mathbf{B}(q) \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left(-\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} - \mathbf{R}^T \mathbf{u} \right) = -\tilde{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{u}$$

als $\mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R}^T \mathbf{u}$.

Bemerkung. *Konsistente Startwerte in $SE(3)$.*

In $SE(3)$ erhält man ebenso durch die Zwangsbedingung $\mathbf{0} = \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{X}.$$

5. Numerische Tests

Die erste versteckte Zwangsbedingung in Lemma (2.3.1) für $SE(3)$ liefert

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{U}(0) = -\tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Omega}_0 = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0\mathbf{X}.$$

Die Bilinearform \mathbf{Z} ergibt sich in $SE(3)$ wegen

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{B}(q)\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(-\tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{U}) = -\tilde{\mathbf{X}}\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\mathbf{U}}$$

als $\mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{0}$. Die Startwerte $\ddot{\mathbf{x}}_0$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}_0$ erhält man damit und mit $\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_3 & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix}$ wieder als Lösung des Gleichungssystems (5.4).

Bemerkung. *Iterationsmatrizen K und D .*

Zur Durchführung des Newton-Verfahrens müssen die Iterationsmatrizen \mathbf{K} und \mathbf{D} wie in Abschnitt 3.1 beschrieben bestimmt werden. Diese findet man für die jeweilige Lie-Gruppen-Formulierung im Anhang (A).

5.2 Testergebnisse

5.2.1 Plausibilität des erweiterten Kreisel-Modells

Bemerkung. *Verwendete Parameter.*

Für die Tests müssen neben der Schrittweite h noch die Startauslenkungen α_0 und γ_0 aus der Gleichgewichtslage, die Parameter des Generalized- α -Verfahrens wie in (3.2) in Abhängigkeit von $\rho_\infty \in [0, 1)$, die absoluten und relativen Toleranzen **ATOL** und **RTOL** sowie k und d im erweiterten Kreisel-Modell gesetzt werden. Die im Folgenden präsentierten Resultate wurden für eine Schrittweite $h = 10^{-2}$, $\rho_\infty = \frac{9}{10}$ und Toleranzen $\text{ATOL}_i = 10^{-8}$ und $\text{RTOL}_i = 10^{-6}$ berechnet. Die Startauslenkung γ_0 betrug für alle Tests $\gamma_0 = -\frac{19}{20} \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Werte für k , d und α_0 sind in den jeweiligen Grafiken enthalten.

Bemerkung. *Zusammenhang mit eindimensionalem harmonischen Oszillator.*

In einer hinreichend kleinen Umgebung des Gleichgewichtspunktes q^* sollte das Verhalten des nichtlinearen erweiterten Kreisel-Modells (2.39) für $k, d > 0$ dem eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$j \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0, \quad x_0 = x(0) = \alpha_0, \quad (5.5)$$

5. Numerische Tests

mit $j = \mathbf{J}_{11}$ im linearen Raum entsprechen. Mit $\mathbf{z} := (x, \dot{x})^T$ ist (5.5) äquivalent zum System erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{j} & -\frac{d}{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind für $k \gg d$ konjugiert komplex und lauten

$$\lambda := -\frac{d}{2j} + \frac{1}{2j}\sqrt{4jk - d^2} \cdot i \text{ und } \bar{\lambda}.$$

Für $d > 0$ gilt also $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \bar{\lambda} < 0$. Da das lineare Generalized- α -Verfahren nach Abschnitt 4.1 A-stabil ist, liefert dieses also stets beschränkte Lösungen unabhängig von der Schrittweite h . In den folgenden Tests soll untersucht werden, inwieweit das nichtlineare Generalized- α -Verfahren bei Anwendung auf das erweiterte Kreisel-Modell die Stabilitätseigenschaften des linearen Verfahrens bei Anwendung auf (5.5) reproduzieren kann.

In den folgenden Abbildungen (5.1) und (5.2) sind die zeitlichen Verläufe der Größen α , $\boldsymbol{\Omega}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ und \mathbf{a} für eine Startauslenkung $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ bei relativ kleiner Torsionskonstante $k = 100$ im Zeitraum $[0, 2]$ dargestellt. Verwendet wurde das Verfahren in $SO(3)$ ohne Zwangsbedingungen. In den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dominiert die Komponente für die Rotation um die Kreiselachse. Das System verhält sich wie erwartet. Zum Vergleich ist in Abbildung (5.3) der zeitliche Verlauf des Winkels α als Lösung mit dem linearen Verfahren für den harmonischen Oszillator dargestellt.

In den Abbildungen (5.5) bis (5.7) ist die in den jeweiligen Lie-Gruppen-Formulierungen berechnete numerische Lösung für eine relativ große Torsionskonstante $k = 10^5$ bei Anfangsauslenkung $\alpha_0 = -\frac{19\pi}{20}$ dargestellt. Die Ergebnisse für $SO(3)$ und $SE(3)$ sind nahezu identisch, lediglich bei $\mathbb{R} \times SO(3)$ lassen sich Oszillationen in den weiteren Beschleunigungskomponenten feststellen.

Die Gesamtenergien der Systeme, dargestellt in (5.4) und (5.8), sind in beiden Fällen monoton fallend und erreichen letztlich ihr Minimum im Gleichgewichtszustand.

5. Numerische Tests

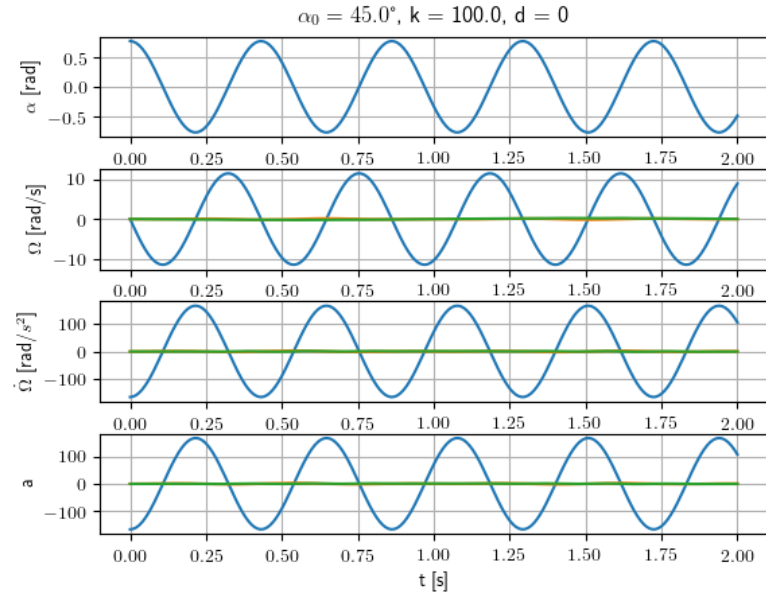


Abbildung 5.1.: Erweitertes Kreisel-Modell ohne Reibung in $SO(3)$

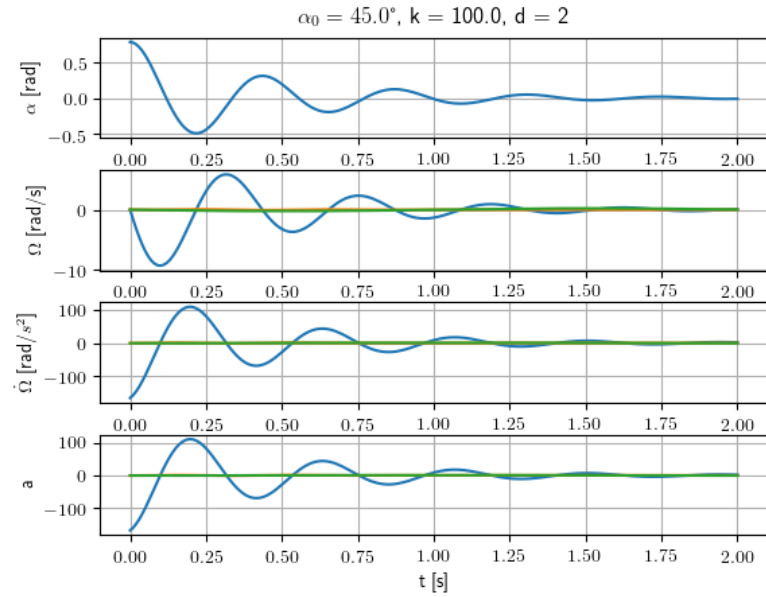


Abbildung 5.2.: Erweitertes Kreisel-Modell mit Reibung in $SO(3)$

5. Numerische Tests

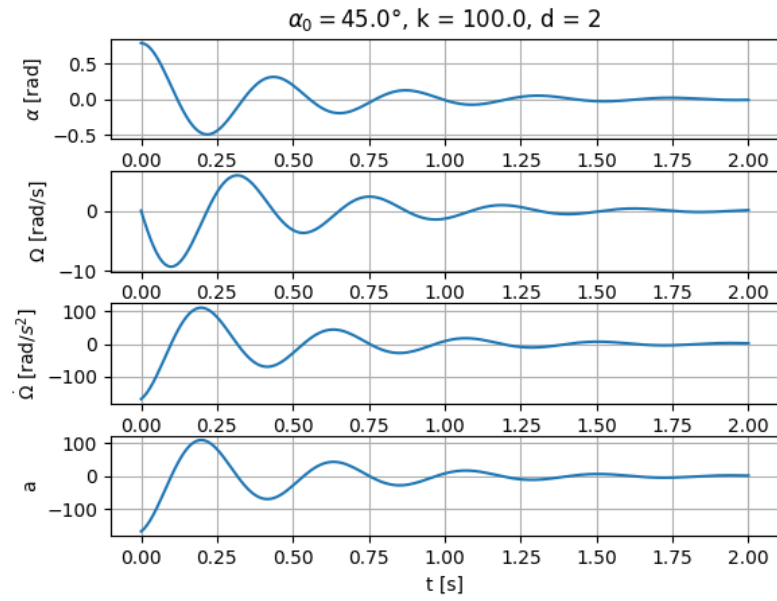


Abbildung 5.3.: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit linearem Generalized- α -Verfahren

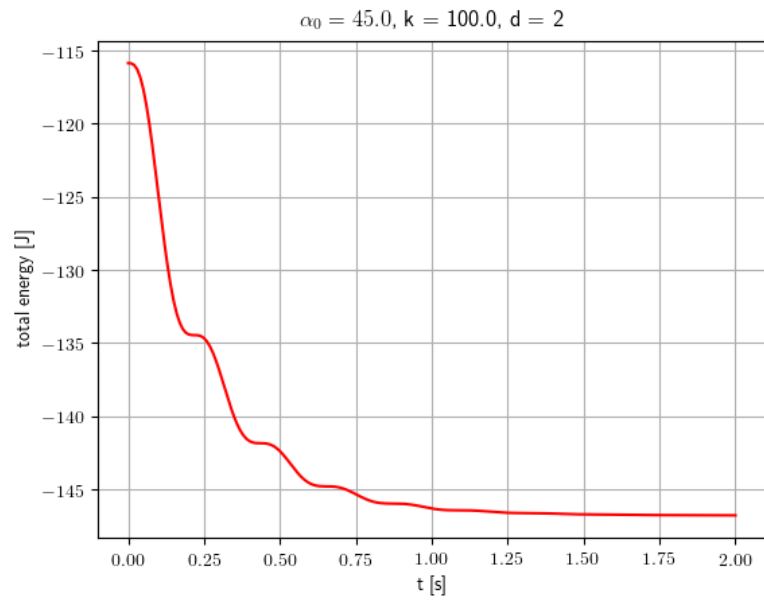


Abbildung 5.4.: Gesamtenergie des Systems in $SO(3)$

5. Numerische Tests

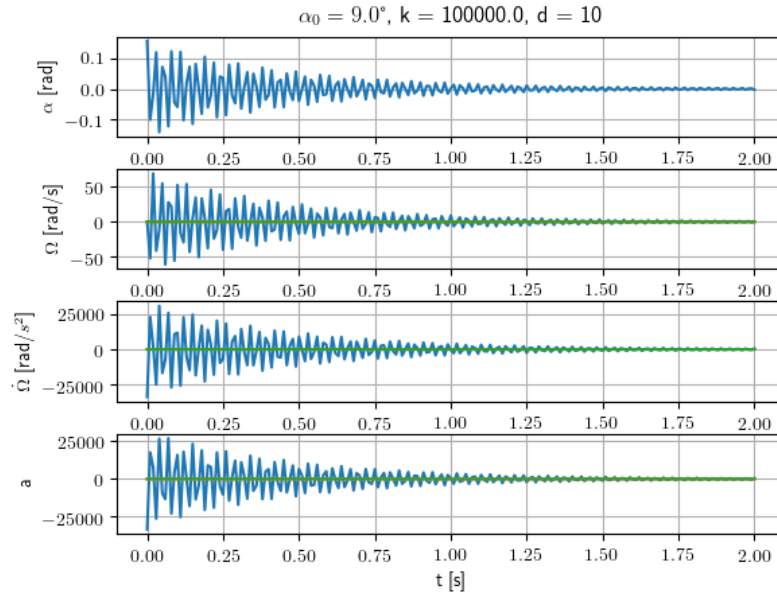


Abbildung 5.5.: Erweitertes Kreisel-Modell mit Reibung in $SO(3)$

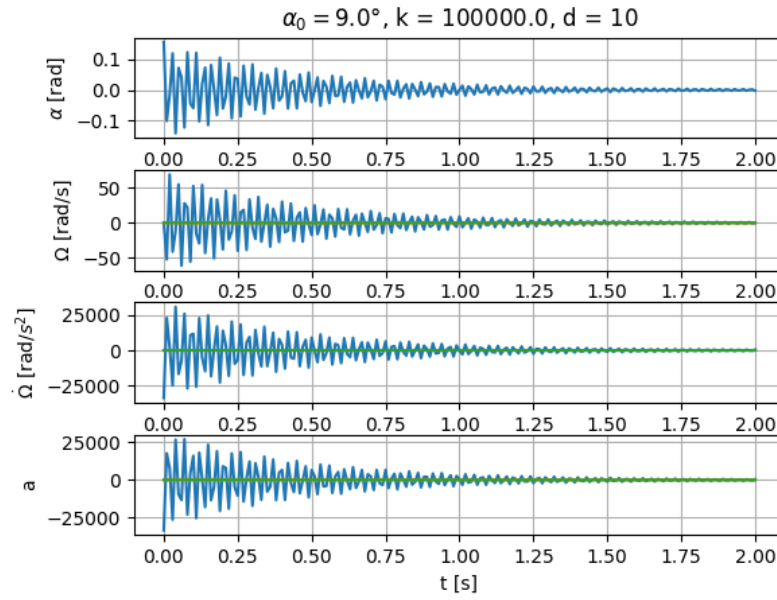


Abbildung 5.6.: Erweitertes Kreisel-Modell mit Reibung in $SE(3)$

5. Numerische Tests

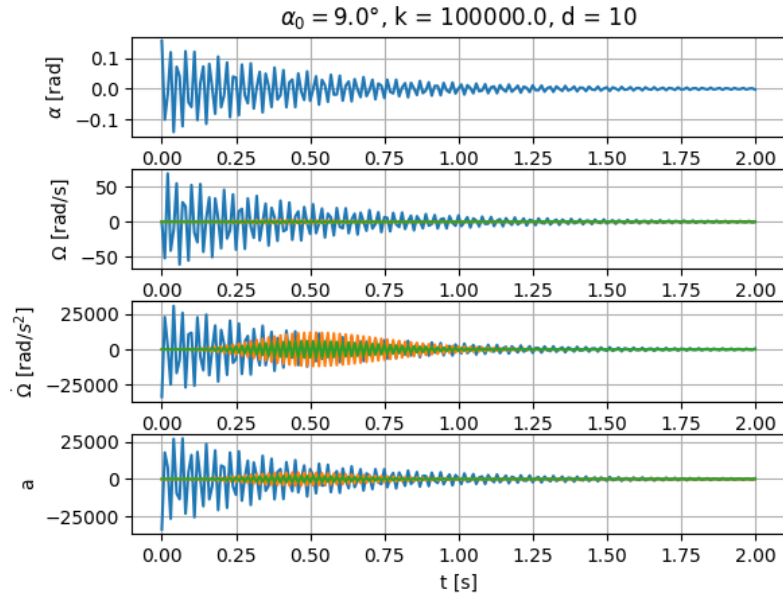


Abbildung 5.7.: Erweitertes Kreisel-Modell mit Reibung in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

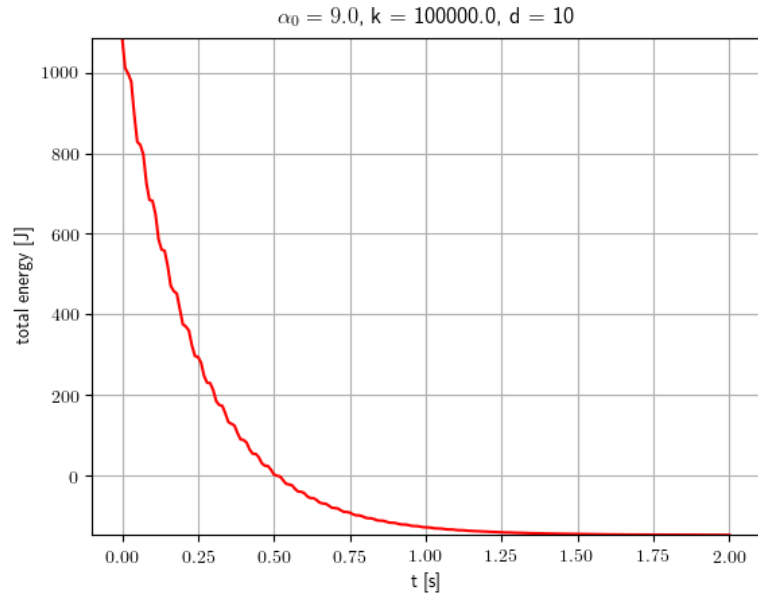


Abbildung 5.8.: Gesamtenergie des Systems in $SO(3)$

5.2.2 Grenzen des erweiterten Kreisel-Modells

Bemerkung. *Definitionsbereich des Winkels α .*

Der stetig differenzierbare Zusammenhang

$$\alpha(\mathbf{R}) = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right) \quad (5.6)$$

zwischen dem Verdrehwinkel α des Kreisels um seine Achse und der Matrix \mathbf{R} ist nur für Winkel $\alpha \in [-\pi, \pi)$ gültig. Verdrehungen des Kreisels um mehr als 2π können auf Grund der Periodizität von (5.6) nicht abgebildet werden, was zu Problemen bei der Durchführung der Stabilitätstest mit dem erweiterten Kreisel-Modell führt. Für große Torsionskonstanten k und dementsprechend große Werte $\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{v}}_0$ und \mathbf{a}_0 kann es in der Newton-Iteration in Abschnitt (3.1) vorkommen, dass die initiale Näherungslösung $q_1^{(0)}$ mit

$$\Delta \mathbf{q}_0^{(0)} := \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}h\mathbf{a}_0, \quad q_1^{(0)} := q_0 \circ \exp\left(\widetilde{h\Delta \mathbf{q}_0^{(0)}}\right) \quad (5.7)$$

bereits einen zu großen Fehler aufweist, was dazu führt, dass das Newton-Verfahren gar nicht oder gegen die falsche Lösung konvergiert. In den Abbildungen (5.9) und (5.10) ist ein solches Verhalten dargestellt. Dagegen wird im linearen Fall der Winkel korrekt berechnet, wie Abbildung (5.11) zeigt.

5. Numerische Tests

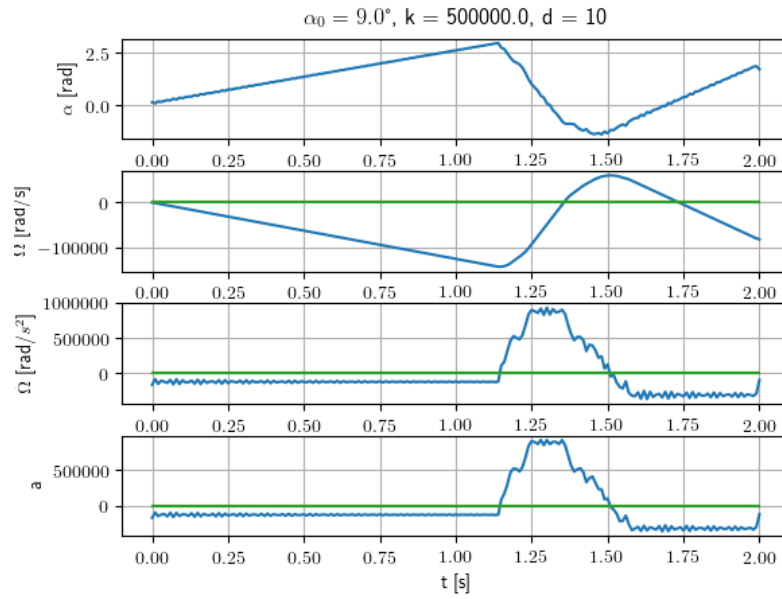


Abbildung 5.9.: Auftretende Verfahrensfehler in $SO(3)$ durch Berechnung des Winkels α

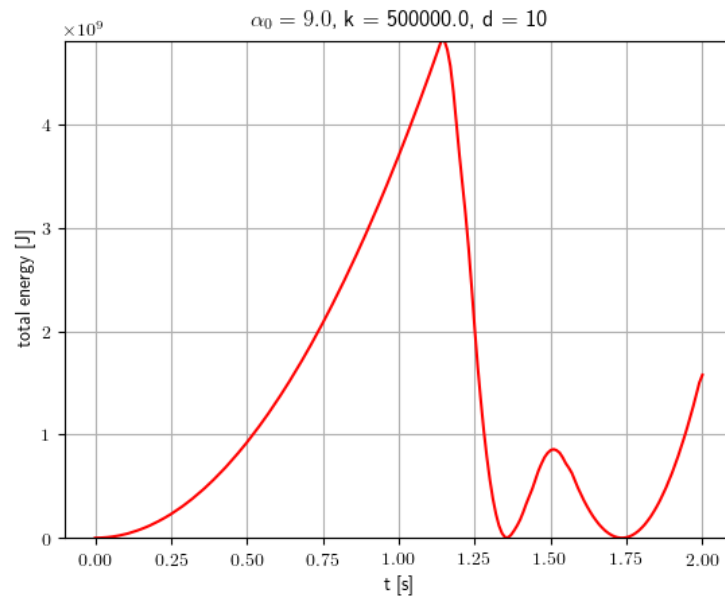


Abbildung 5.10.: Gesamtenergie bei Auftreten des Verfahrensfehlers in $SO(3)$

5. Numerische Tests

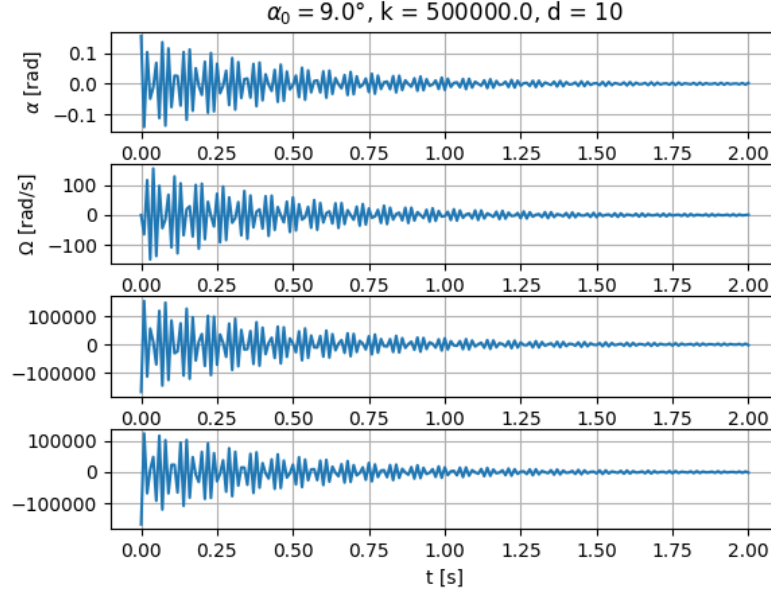


Abbildung 5.11.: Mit dem linearen Generalized- α -Verfahren (4.2) berechnete Näherungslösung des harmonischen Oszillators

5.2.3 Stabilitätsgebiete

Der zeitliche Verlauf der Gesamtenergie in Abbildung (5.10) bei Auftreten des Verfahrensfehlers legt nahe, diese Fälle durch Betrachtung der Gesamtenergie zu erkennen und herauszufiltern. Geht man so vor, lassen sich Stabilitätsgebiete des Verfahrens in Abhängigkeit von den Größen k und d und der Schrittweite h berechnen.

Bei der Berechnung der Stabilitätsgebiete wie in den Abbildung (5.12), (5.13) und (5.14) wird wie folgt vorgegangen:

1. Für Wertepaare (d, k) wird für verschiedene Schrittweiten h eine Lösung des erweiterten Kreisel-Modells mit $\alpha_0 = \frac{\pi}{20}$ auf dem Zeitintervall $[0, 5]$ berechnet.
2. Wurde nach der maximalen Anzahl an Newton-Iterationen nicht die vordefinierte Genauigkeit erreicht, gilt für die Gesamtenergie $E(t)$ am Ende eines Durchlaufs $|E(5)| > 500$ oder wird die Iterationsmatrix im Newton-Verfahren singulär, so ist anzunehmen, dass für die Parameter d, k und h Instabilität vorliegt.
3. Die Schrittweiten, für welche zuerst eine Instabilität je Wertepaar (d, k)

5. Numerische Tests

festgestellt wurde, werden gespeichert.

4. Die gespeicherten Schrittweiten und die zugehörigen Wertepaare werden multipliziert und wie in Abbildung (5.12) visualisiert.

Zur Erstellung der Abbildung (5.12) wurden 100 Wertepaare (d, k) erzeugt, wobei $k \in [0, 10^5]$ und $d \in [0, 500]$ gewählt wurden. Die Schrittweiten h wurden aus dem Intervall $[10^{-2}, 10^{-1}]$ gewählt.

Ein Vergleich der Stabilitätsgebiete in den Abbildungen (5.12), (5.13) und (5.14) lässt den Schluss zu, dass die Formulierung des Verfahrens in $SO(3)$ ohne Zwangsbedingungen bei Anwendung auf das Modellproblem stabiler ist als in $SE(3)$ und $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Die Stabilitätsgebiete von $SE(3)$ und $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ unterscheiden sich hingegen nicht wesentlich voneinander.

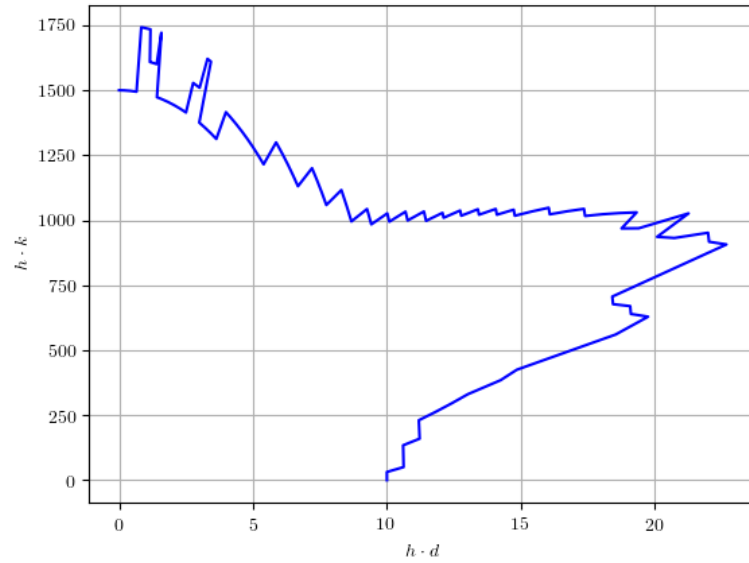


Abbildung 5.12.: Stabilitätsgebiet in $SO(3)$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{20}$

5. Numerische Tests

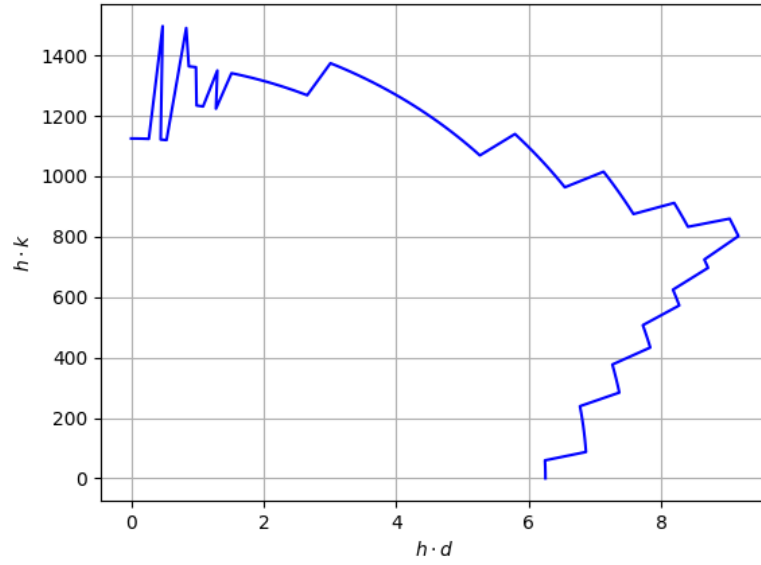


Abbildung 5.13.: Stabilitätsgebiet in $SE(3)$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{20}$

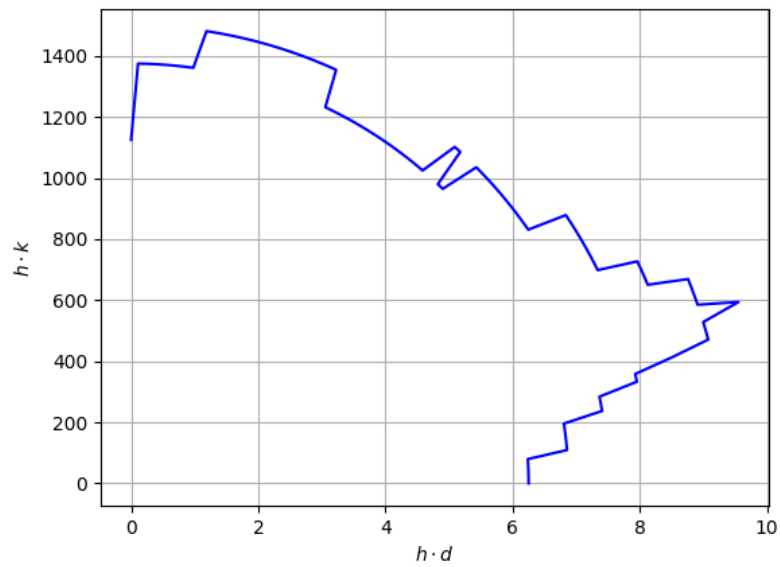


Abbildung 5.14.: Stabilitätsgebiet in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{20}$

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Stabilitätsuntersuchungen für das auf Lie-Gruppen definierte Generalized- α -Verfahren anhand eines nichtlinearen Testmodells mit einem asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt vorgenommen.

Basierend auf dem Modell des „Heavy-Tops“ wurde in Kapitel 2 ein um eine Torsionsfeder erweitertes Modell vorgestellt. Anschließend konnten Stabilitätsresultate über Ljapunov-Funktionen auf den Fall von Lie-Gruppen übertragen werden. Mit diesen gelang der Nachweis der asymptotischen Stabilität eines Gleichgewichts des erweiterten Modells. Zudem wurde das Prinzip der linearisierten Stabilität auf Lie-Gruppen übertragen. Eine Ljapunov-Funktion für das Verfahren konnte nicht gefunden werden. Die Tests zeigen jedoch einen monotonen Energieabfall bei Betrachtung des erweiterten Modells für Parameter innerhalb des Stabilitätsgebietes, sodass auch hier die Gesamtenergie eine Ljapunov-Funktion des Systems sein könnte.

Bei der Durchführung der numerischen Tests mit dem erweiterten Kreisel-Modell traten Probleme auf Grund der Konstruktion des Modells mittels Euler-Winkeln auf. Es konnten dennoch Stabilitätsgebiete bestimmt und die Stabilitätseigenschaften der verschiedenen Lie-Gruppen-Formulierungen des Verfahrens verglichen werden. Für zukünftige Untersuchungen sollte das Testmodell jedoch überarbeitet oder durch ein anderes ersetzt werden, da sich die auftretenden Probleme in den numerischen Tests sehr restriktiv auswirken. Durch eine Formulierung des Verfahrens als Zweischritt-Verfahren könnten sich zudem weitere Möglichkeiten für Stabilitätsuntersuchungen ergeben.

Kapitel A

Iterationsmatrizen

A.1 Kreisel-Modell

Die Gestalten der hier gelisteten Iterationsmatrizen in den jeweiligen Formulierungen finden sich in der Literatur in [3] und [4].

Lemma A.1.1. *Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ für das System (2.26) in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ lauten*

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \widetilde{\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Lemma A.1.2. *Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ für das System (2.27) in $SE(3)$ lauten*

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -m\widetilde{\mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} m\tilde{\boldsymbol{\Omega}} & -m\tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \widetilde{\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Lemma A.1.3. *Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für das System (2.27) in $SO(3)$ lauten*

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\lambda}) = -m\tilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \widetilde{\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Erweitertes Kreisel-Modell

Lemma A.2.1. Es seien $\mathbf{R} = (r_{ij})_{ij}$ und

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3}{r_{33}} - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \right),$$

mit

$$C(\mathbf{R}) := \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2}, \quad \alpha(\mathbf{R}) := \arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right).$$

Dann ist die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$D\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) \cdot (DL_{\mathbf{R}}(\mathbf{I}) \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{K}_F \cdot \mathbf{w}$$

gegeben durch dessen Zeilenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= k \cdot \left[\mathbf{e}_1 - \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_2 - \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_3 \right], \\ \mathbf{v}_2 &= -\frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1 - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \begin{pmatrix} r_{31} \cdot r_{33} \\ -r_{32} \cdot r_{33} \\ r_{32}^2 - r_{31}^2 \end{pmatrix} + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{32} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ r_{31} \cdot r_{33} \\ -r_{31} \cdot r_{32} \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= -\frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1 - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \begin{pmatrix} -r_{31} \cdot r_{32} \\ r_{31}^2 - r_{33}^2 \\ r_{32} \cdot r_{32} \end{pmatrix} + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{33} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ r_{31} \cdot r_{33} \\ -r_{31} \cdot r_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Es gelten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 &= (-r_{32}, r_{31}, 0)^T \text{ und} \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 &= (r_{33}, 0, -r_{31})^T, \end{aligned}$$

und damit kann man $\mathbf{g}_F(\mathbf{R})$ komponentenweise schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) &= C(\mathbf{R}) \cdot \left[\frac{1}{r_{33}} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31})^T - \frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)^T \right] \\ &= C(\mathbf{R}) \cdot \left[\left(1 + \frac{r_{32}^2}{r_{33}^2} \right) \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_2 - \frac{r_{31}}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \\ &= k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{e}_1 - \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_2 - \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_3 \right] \\ &=: c_1(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_1 + c_2(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_2 + c_3(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

A. Iterationsmatrizen

Sei nun $\mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass

$$D\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) \cdot (DL_{\mathbf{R}}(\mathbf{I}) \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{K}_F \cdot \mathbf{w}$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Sei wieder $\delta\Theta \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \widetilde{\delta\Theta}$ ist. Dann sind die Zeilen von \mathbf{K}_F Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$Dc_i(\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta}) = \mathbf{v}_i^T \cdot \delta\Theta, \quad i \in \{1, \dots, 3\}, \quad (\text{A.4})$$

gilt. Diese Vektoren \mathbf{v}_i sollen im Folgenden bestimmt werden. Die Berechnung von \mathbf{v}_1 verläuft analog zur Berechnung von \mathbf{g}_F , vergleiche dazu Lemma (2.4.1).

$$\begin{aligned} \delta c_1(\mathbf{R}) &= k \cdot \delta\alpha(\mathbf{R}) = k \cdot \delta \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right) \\ &= k \cdot \left[\mathbf{e}_1 - \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_2 - \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_3 \right]^T \cdot \delta\Theta \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot \delta\Theta \end{aligned}$$

Eine ähnliche Rechnung liefert \mathbf{v}_2 unter Verwendung von \mathbf{v}_1 .

$$\begin{aligned} \delta c_2(\mathbf{R}) &= \delta \left(-c_1(\mathbf{R}) \cdot \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \right) = -(\delta c_1(\mathbf{R})) \cdot \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} - c_1(\mathbf{R}) \cdot \delta \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \\ &= -\frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta\Theta \\ &\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (\delta r_{32} \cdot r_{31} + r_{32} \cdot \delta r_{31}) \\ &\quad - c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{32} \cdot r_{31} \cdot \delta \left((r_{32}^2 + r_{33}^2)^{-1} \right) \\ &= -\frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta\Theta \\ &\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (r_{31} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{32} \cdot (0, -r_{33}, r_{32})) \delta\Theta \\ &\quad + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{32} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} (r_{32} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{33} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)) \delta\Theta \\ &= \mathbf{v}_2^T \cdot \delta\Theta \end{aligned}$$

A. Iterationsmatrizen

Die Berechnung von \mathbf{v}_3 verläuft analog zu der von \mathbf{v}_2 .

$$\begin{aligned}
 \delta c_3(\mathbf{R}) &= \delta \left(-c_1(\mathbf{R}) \cdot \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \right) = -(\delta c_1(\mathbf{R})) \cdot \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} - c_1(\mathbf{R}) \cdot \delta \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \\
 &= -\frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta \Theta \\
 &\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (r_{31} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0) + r_{33} \cdot (0, -r_{33}, r_{32})) \delta \Theta \\
 &\quad + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{33} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} (r_{32} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{33} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)) \delta \Theta \\
 &= \mathbf{v}_3^T \cdot \delta \Theta
 \end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

- [1] M. Arnold, A. Cardona und O. Brüls. *A Lie algebra approach to Lie group time integration of constrained systems*. Techn. Ber. 01. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik, 2015.
- [2] M. Arnold und S. Hante. „Implementation details of a generalized- α DAE Lie group method“. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* (2016). DOI: 10.1115/1.4033441.
- [3] O. Brüls, M. Arnold und A. Cardona. „Two Lie group formulations for dynamic multibody systems with large rotations“. In: *Proceedings of IDET-C/MSNDC 2011, ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences*. Washington, USA, 2011.
- [4] O. Brüls und A. Cardona. „On the Use of Lie Group Time Integrators in Multibody Dynamics“. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* Vol. 5 (Juli 2010).
- [5] J. Chung und G. Hulbert. „A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method“. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), S. 371–375. DOI: 10.1115/1.2900803.
- [6] S. Erlicher, L. Bonaventura und O. Bursi. „The analysis of the Generalized- α method for non-linear dynamic problems“. In: *Computational Mechanics* 28 (2002), S. 83–104. DOI: 10.1007/s00466-001-0273-z.
- [7] E. Hairer, C. Lubich und G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2004.
- [8] E. Hairer und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 2nd edition. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1996.
- [9] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2. Analytische Mechanik*. 9. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.

Literaturverzeichnis

- [10] J. W. Pruess und G. Simonett. *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*. Bd. 105. Monographs in Mathematics. Birkhäuser-Verlag, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-27698-4.
- [11] J. W. Prüß und M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme*. Birkhäuser-Verlag, 2010.
- [12] W. Schiehlen und P. Eberhard. *Technische Dynamik. Modelle für Regelung und Simulation*. 2. Auflage. Stuttgart Leipzig Wiesbaden: Teubner-Verlag, 2004.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Diese Arbeit wurde noch nicht in gleicher oder ähnlicher Fassung in einem anderen Studiengang als Prüfungsleistung vorgelegt.

Halle (Saale), den 07.10.2019
Alexander S. J. Klemps