

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Nichtlineare Stabilität von impliziten Lie-Gruppen-Integratoren

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science

im Studiengang Mathematik mit Anwendungsfach

vorgelegt von:

Alexander Sebastian Johann Klemps

Matrikelnummer: 213203168

vorgelegt am:

07.10.2019

Erstgutachter:	Prof. Dr. Martin Arnold
Zweitgutachterin:	M. Sc. Victoria Wieloch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Lie-Gruppen	2
2.1	Lie-Gruppen, Lie-Algebren und Tangentialräume	2
2.2	Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen	5
3	Erweitertes Kreisel-Modell	9
3.1	Konfigurationsräume	9
3.2	Variationsprinzip und Bewegungsgleichungen	11
3.3	Kreisel-Modell	16
3.4	Erweiterung um Torsionsfeder	19
4	Generalized-α-Verfahren	24
4.1	Newton-Raphson-Iteration	25
4.2	Implementierung in Python	27
5	Stabilitätsanalyse	30
5.1	Lineare Stabilität	30
5.2	Nichtlineare Stabilität	32
6	Numerische Tests	49
A	Iterationsmatrizen	50

Kapitel 1

Einleitung

Kapitel 2

Lie-Gruppen

2.1 Lie-Gruppen, Lie-Algebren und Tangentialräume

Definition. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. \mathcal{M} heißt C^p -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension m , wenn für jedes $x \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und ein C^p -Diffeomorphismus $\psi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren derart, dass $\psi(U_x \cap \mathcal{M}) = \psi(U_x) \cap \mathbb{R}^n$ gilt und $\psi(U_x) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Definition. Es sei G eine Gruppe mit Verknüpfung \circ . Das Paar (G, \circ) heißt **Lie-Gruppe** genau dann, wenn

1. G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und
2. die Verknüpfung \circ und die Inversion $\bullet : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ differenzierbar sind.

Definition.

1. Es seien G und H Lie-Gruppen. Ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ heißt **Lie-Gruppen-Homomorphismus**.
2. Eine Lie-Gruppe G wird als **Matrix-Lie-Gruppe** oder **lineare Gruppe** bezeichnet, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Lie-Gruppen-Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow GL_n(K)$ von G in die lineare Gruppe vom Grad n über einem Körper K existieren.

2. Lie-Gruppen

Beispiel 2.1.1. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Die orthogonalen Matrizen

$$O(n) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$$

bilden eine Gruppe und sind die Urbilder von $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unter der Abbildung $\psi(A) := A^T A - I_n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diese ist differenzierbar und ihre Ableitung $\psi'(M) = M^T + M$ hat vollen Rang. Folglich ist $O(n)$ eine Matrix-Lie-Gruppe.

2. Die Menge der Rotationsmatrizen

$$SO(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I_3, \det(R) = 1\}$$

ist eine Untergruppe der $O(3)$ und ist eine Matrix-Lie-Gruppe.

3. Der lineare Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine Matrix-Lie-Gruppe, denn

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{R}), \quad v \mapsto \begin{pmatrix} I_n & v \\ 0_{1 \times n} & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Lie-Gruppen-Isomorphismus.

Definition. Es seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ heißt **Lie-Klammer** auf V , wenn

1. $[v, v] = 0$ für alle $v \in V$ und

2. die **Jacobi-Identität**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (2.1)$$

für alle $u, v, w \in V$ gelten.

Das Paar $\mathfrak{g} := (V, [\cdot, \cdot])$ heißt dann **Lie-Algebra**.

Bemerkungen.

1. Lie-Algebren sind lineare Vektorräume. Ist \mathfrak{g} eine reelle Lie-Algebra endlicher Dimension $k := \dim(\mathfrak{g})$, so ist \mathfrak{g} als Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^k . In diesem Fall bezeichne im Folgenden

$$\widetilde{(\bullet)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}, \quad v \mapsto \tilde{v} \quad (2.2)$$

stets einen entsprechenden Vektorraumisomorphismus von \mathfrak{g} nach \mathbb{R}^k , welcher bei Bedarf genauer spezifiziert wird.

2. Lie-Gruppen

2. Seien $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Vektorraumisomorphismus, $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^k$ die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^k und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\psi^{-1}([\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}]) = \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^k [\tilde{\mathbf{x}}, y_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i]\right) = \sum_{i=1}^k y_i \cdot \psi^{-1}([\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{e}}_i])$$

mit Vektoren $\psi^{-1}([\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{e}}_i]) \in \mathbb{R}^k$. Also induziert jede solche Abbildung ψ und damit auch $\widetilde{\bullet}$ eine Abbildung

$$(\widehat{\bullet}) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \quad \mathbf{v} \mapsto \widehat{\mathbf{v}} \quad (2.3)$$

mit der Eigenschaft $\widetilde{\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{y}}} = [\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}]$.

3. Im Folgenden werden stets Lie-Gruppen und Lie-Algebren über $K = \mathbb{R}$ betrachtet.

Definition. Seien G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann ist der **Tangentenraum** von G in g definiert als

$$T_g G := \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = g\}.$$

Satz 2.1.2. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe und es sei $\mathfrak{g} := T_I G$ der Tangentialraum von G in der Identität I . Dann definiert der Matrixkommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

für alle $A, B \in \mathfrak{g}$ eine bilineare, schiefsymmetrische Operation von $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nach \mathfrak{g} , welche die Jacobi-Identität (2.1) erfüllt.

Beispiel 2.1.3. Sei $G = SO(3)$. Die zugehörige Lie-Algebra ist der Raum der schiefsymmetrischen 3×3 -Matrizen

$$\mathfrak{g} = T_{I_3} G = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{M} + \mathbf{M}^T = \mathbf{0}_{3 \times 3}\}.$$

Es ist $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ und eine geeignete Wahl für die Abbildung $\widetilde{\bullet}$ aus (2.2) ist

$$\tilde{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2. Lie-Gruppen

für alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Eine Besonderheit dieser konkreten Abbildung $\tilde{\bullet}$ ist, dass für alle Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}}$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \quad (2.5)$$

gilt. Für die zugehörige Abbildung $\hat{\bullet}$ aus (2.3) ergibt sich in diesem Fall $\hat{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definition. Es sei G eine Lie-Gruppe. Die **Linkstranslation** in G ist für jedes Element $q \in G$ definiert als die Abbildung

$$L_q : G \rightarrow G, \quad y \mapsto L_q(y) := q \circ y.$$

Lemma 2.1.4. Seien G eine Matrix-Lie-Gruppe und $q \in G$. Dann gilt für den Tangentialraum $T_q G$ von G in q

$$T_q G = DL_q(I) \cdot T_I G = \{DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \mid \tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{g}\} = \{DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k\}, \quad (2.6)$$

wobei $DL_q(I)$ die Ableitung der Linkstranslation in $y = I$ ist.

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned} T_q G &= \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = q\} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}(L_q(\gamma(0))) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I \right\} \\ &= \{DL_q(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I\} \\ &= DL_q(I) \cdot \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ ist } C^1\text{-Kurve mit } \gamma(0) = I\} \\ &= DL_q(I) \cdot T_I G. \end{aligned}$$

□

2.2 Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen

Definition. Es sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Differentialgleichung

$$\dot{q} = f(q), \quad q_0 = q(0) \quad (2.7)$$

2. Lie-Gruppen

definiert eine Differentialgleichung auf \mathcal{M} , falls für $q_0 \in G$ die Lösung $q(t)$ für alle $t \geq 0$ in \mathcal{M} verbleibt.

Satz 2.2.1. Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Problem $\dot{q} = f(q)$ ist eine Differentialgleichung auf \mathcal{M} genau dann, wenn

$$f(y) \in T_y \mathcal{M} \quad (2.8)$$

für alle $q \in \mathcal{M}$ gilt.

Bemerkung. Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen.

Der vorausgegangene Satz (2.2.1) liefert zusammen mit Lemma (2.1.4), dass Differentialgleichungen (2.7) auf Matrix-Lie-Gruppen in der Form

$$\dot{q}(t) = DL_q(I) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(t)$$

mit Elementen der Lie-Algebra $\tilde{\mathbf{v}}(t) \in T_I G$ geschrieben werden können.

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Die **Matrixexponentialfunktion** ist definiert als die Abbildung

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \exp(\mathbf{M}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{M}^i. \quad (2.9)$$

Lemma 2.2.2. Es sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann definiert die Matrixexponentialfunktion (2.9) eingeschränkt auf \mathfrak{g} einen lokalen Diffeomorphismus von \mathfrak{g} nach G in einer Umgebung von $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung. Lokale Parametrisierungen von Matrix-Lie-Gruppen.

Das vorausgegangene Lemma (2.2.2) liefert, dass es für jedes $\mathbf{R} \in G$ eine Umgebung $U_0 \subset \mathfrak{g}$ von $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$ gibt, sodass die Abbildung

$$\psi(\mathbf{A}) := L_{\mathbf{R}}(\exp(\mathbf{A})), \quad \mathbf{A} \in U_0,$$

eine lokale Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{R}$ ist.

Unter Verwendung einer geeigneten Abbildung $\tilde{\bullet}$ aus (2.2) erhält man somit also lokale Parametrisierungen

$$\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G, \quad \psi(\mathbf{v}) = L_{\mathbf{R}}(\exp(\tilde{\mathbf{v}})) \quad (2.10)$$

2. Lie-Gruppen

mit $\mathbf{v} \in U_0 \subset \mathbb{R}^k$, $k := \dim(\mathfrak{g})$, in einer geeigneten Umgebung U_0 von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$.

Definition.

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{v}) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \widehat{\mathbf{v}}^i$$

Bemerkung. *Rodrigues-Formel.*

Für $G = SO(3)$ lässt sich für die Exponentialfunktion $\exp_{SO(3)}$ die als **Rodrigues-Formel** bekannte Identität

$$\exp_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(w)}{w} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1 - \cos(w)}{w^2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (2.11)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $w := \|\mathbf{v}\|_2$, beweisen. Siehe dazu [REFERENZ]. Eine ähnliche Darstellung existiert ebenso für den Tangentenoperator $\mathbf{T}_{SO(3)}$ mit

$$\mathbf{T}_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\cos(w) - 1}{w^2} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1 - \frac{\sin(w)}{w}}{w^2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (2.12)$$

Definition. *Ein funktionaler Zusammenhang*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}, \quad (t \in I) \quad (2.13)$$

zwischen einer auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und ihrer Ableitung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$ heißt **Differential-algebraische Gleichung**, wenn $\mathbf{F} : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar bezüglich $\dot{\mathbf{x}}$ ist, die Jacobimatrix $\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ konstanten Rang hat und $0 < \text{rg}(\mathbf{F}_{\dot{\mathbf{x}}}) < n$ gilt.

Definition. *Gegeben sei eine differential-algebraische Gleichung (2.13) mit hinreichend oft stetig differenzierbarer Funktion \mathbf{F} . Zu einem gegebenen $m \in \mathbb{N}$ betrachtet man das Ableitungsfeld*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ &\vdots \\ \mathbf{0} &= \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned}$$

2. Lie-Gruppen

Wenn man aus diesem Ableitungsfeld Gleichungen auswählen kann, die durch algebraische Umformungen auf die Gestalt

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \varphi(t, \boldsymbol{x}(t))$$

*gebracht werden können, so heißt die kleinste natürliche Zahl m mit dieser Eigenschaft **Differentiationsindex** von (2.13).*

Kapitel 3

Erweitertes Kreisel-Modell

3.1 Konfigurationsräume

Die Bewegung eines starren Körpers in einem Inertialsystem kann mittels eines Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ erfolgen, welcher die Position des Körpers repräsentiert. Zusätzlich besitzt ein solches System drei rotatorische Freiheitsgrade, welche in Form einer Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in SO(3)$ abgebildet werden können. Letztlich kann so die momentane Konfiguration eines starren Körpers durch ein Element $q := (\mathbf{x}, \mathbf{R}) \in G$ beschrieben werden, wobei G der Konfigurationsraum des mechanischen Systems mit Lie-Gruppen-Struktur sei. In [3] werden zwei mögliche Konfigurationsräume G als Kombination von \mathbb{R}^3 und $SO(3)$ vorgestellt, auf welche im Folgenden zunächst eingegangen werden soll.

Bemerkung. Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

Als möglicher Konfigurationsraum kommt zunächst $G := \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ infrage. Die Verknüpfung \circ ist für Elemente $(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) \in G$ definiert als

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1) \circ (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2).$$

Die Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}, \quad q = (\mathbf{x}, \mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Lie-Gruppen-Isomorphismus und G ist daher eine Matrix-Lie-Gruppe. Die zugehörige Lie-Algebra ist isomorph zu \mathbb{R}^6 . Ein geeigneter Vektorraumisomorphismus $\tilde{\bullet} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}$ lässt sich unter Verwendung der entsprechenden

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Abbildung (2.4) für $SO(3)$ angeben mit

$$\tilde{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

für alle $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega})^T \in \mathbb{R}^6$. Wie in (2.4) ist dabei

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die Abbildung $\hat{\bullet}$ ergibt sich damit zu

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Matrixexponentialfunktion und der Tangentenoperator in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ lauten

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}^3 \times SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) &= \begin{pmatrix} \exp_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{T}_{\mathbb{R}^3 \times SO(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Abbildungen $\exp_{SO(3)}$ und $\mathbf{T}_{SO(3)}$ für $SO(3)$ aus (2.11) und (2.12).

Bemerkung. *Konfigurationsraum $SE(3)$.*

Ein weiterer möglicher Konfigurationsraum ist das semidirekte Produkt $G := SE(3) := \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$, welches auch als **Spezielle Euklidische Gruppe** bezeichnet wird. Die Verknüpfung \circ ist hier für $(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) \in G$ definiert als

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{R}_1) \circ (\mathbf{x}_2, \mathbf{R}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_2, \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2).$$

Die Abbildung

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad q = (x, \mathbf{R}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

ist ebenfalls ein Lie-Gruppen-Isomorphismus und somit ist auch $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ eine Matrix-Lie-Gruppe.

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \tilde{U} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}$$

$$\exp_{SE(3)}(\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \exp_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) & \mathbf{T}_{SO(3)}^T \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{SE(3)}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{SO(3)}(\boldsymbol{\Omega}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}_{SE(3)}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{U}) & \mathbf{T}_{SO(3)}(\boldsymbol{\Omega}) \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{S}_{SE(3)}(\mathbf{0}, \mathbf{U}) = -\tilde{U}/2$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{SE(3)}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{U}) = & \frac{1}{\Phi^2} \left[(\cos(\Phi) - 1) \tilde{U} + \left(1 - \frac{\sin(\Phi)}{\Phi} \right) (\tilde{U} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tilde{U}) \right. \\ & + \left(2 \frac{1 - \cos(\Phi)}{\Phi^2} - \frac{\sin(\Phi)}{\Phi} \right) (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{U}) \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \\ & \left. + \frac{1}{\Phi^2} \left(1 - \cos(\Phi) - 3 \left(1 - \frac{\sin(\phi)}{\Phi} \right) \right) (\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{U}) \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^2 \right] \end{aligned}$$

für $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ und $\Phi = \|\boldsymbol{\Omega}\|_2$.

3.2 Variationsprinzip und Bewegungsgleichungen

Die Bewegung eines Starrkörpers lässt sich durch Bewegungsgleichungen in den jeweiligen Konfigurationsräumen beschreiben. Diese können wie in [3] durch Anwendung des Hamiltonschen Variationsprinzips auf eine der Bewegung zugehörige Lagrange-Funktion hergeleitet werden. In diesem Abschnitt wird zunächst auf das Variationsprinzip eingegangen und danach der Ansatz aus [3] vorgestellt.

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Bemerkung. *Hamiltonsches Variationsprinzip.*

In der analytischen Mechanik besagt das Hamiltonsche Prinzip, dass die Bewegung eines Systems im Zeitintervall $t \in [t_i, t_f]$ so erfolgt, dass die Konfigurationsbahn $q(t)$, $t \in [t_i, t_f]$, das Wirkungsfunktional

$$\mathcal{S}(q(t)) := \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (3.4)$$

extremal bzw. stationär werden lässt, wobei \mathcal{L} die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(q, \mathbf{v}) := \mathcal{T}(\mathbf{v}) - \mathcal{V}(q) \quad (3.5)$$

ist mit kinetischer und potenzieller Energie \mathcal{T} und \mathcal{V} . Die Extremalität der Wirkung (3.4) ist äquivalent zu

$$\delta \mathcal{S}(q(t)) = 0 \quad (3.6)$$

wobei δ eine sogenannte virtuelle Verrückung bezeichne. Diese stellt eine mit den wirkenden Zwangsbedingungen verträgliche Variation der entsprechenden Größen dar. Die Variation von (3.4) erfolgt so, dass

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = \delta t = 0 \quad (3.7)$$

gelten. Die Konfiguration des Systems zu den Zeitpunkten t_i und t_f sowie die Zeit werden nicht variiert. Diese und weitere Ausführungen findet man u.a. in [10].

Die kinetische Energie in (3.5) lässt sich als

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ schreiben. Erfolgt die Bewegung des Körpers unter m holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$\Phi(q) = \mathbf{0}_{m \times 1},$$

so ergeben sich die Bewegungsgleichungen als Resultat des Variationsproblems

$$0 = \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} - \Phi(q)^T \boldsymbol{\lambda} dt \quad (3.8)$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

mit Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, vgl. dazu [10] S. 79f.

Bei der Anwendung des Variationsprinzips tauchen Variationen δq und $\boldsymbol{\delta v}$ auf. Definiert man

$$\delta q = q \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} \quad (3.9)$$

mit einer geeigneten virtuellen Verrückung $\boldsymbol{\delta q} \in \mathbb{R}^k$, so ergibt sich $\boldsymbol{\delta v}$ als Resultat des folgenden Lemmas.

Lemma 3.2.1. *Es seien $q \in G$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ und δq wie in (3.9) definiert. Dann gilt*

$$\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{\delta \dot{q}} + \widehat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\delta q}.$$

BEWEIS. Es gelten

$$\delta \dot{q} = \delta(q \widetilde{\mathbf{v}}) = (\delta q) \widetilde{\mathbf{v}} + q(\delta \widetilde{\mathbf{v}}) = (q \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}) \widetilde{\mathbf{v}} + q(\boldsymbol{\delta \widetilde{v}}) \quad (3.10)$$

und

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} (q \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}) = \dot{q} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} + q \frac{d}{dt} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} = q \widetilde{\mathbf{v}} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} + q \widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}}. \quad (3.11)$$

Gleichsetzen von (3.10) und (3.11) ergibt

$$q \boldsymbol{\delta \widetilde{v}} = q(\widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + \widetilde{\mathbf{v}} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} - \widetilde{\boldsymbol{\delta q}} \widetilde{\mathbf{v}}) = q(\widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + [\widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}])$$

mit dem Matrixkommutator $[\cdot, \cdot]$. Unter Verwendung der Abbildung $\widehat{\bullet}$ aus (2.3) folgt daraus

$$\boldsymbol{\delta \widetilde{v}} = \widetilde{\boldsymbol{\delta \dot{q}}} + \widehat{\mathbf{v}} \widetilde{\boldsymbol{\delta q}}$$

und mit der Umkehrbarkeit von $\widetilde{\bullet}$ letztlich

$$\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{\delta \dot{q}} + \widehat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\delta q}.$$

□

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, die Bewegungsgleichungen für konservative Systeme unter holonomen Zwangsbedingungen als Lösung eines Variationsproblems der Form (3.8) herzuleiten.

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Satz 3.2.2 (Index-3-Formulierung der Bewegungsgleichungen).

Die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper in einem konservativen Kraftfeld mit $m \leq k$ linear unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen $\Phi(q) = 0$ lauten

$$\dot{q} = q\tilde{v}, \quad (3.12a)$$

$$M\dot{v} - \widehat{v}^T Mv + g(q) + B^T(q)\lambda = \mathbf{0}_{k \times 1}, \quad (3.12b)$$

$$\Phi(q) = \mathbf{0}_{m \times 1}. \quad (3.12c)$$

BEWEIS. Die Anwendung des Variationsprinzips liefert zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q, v) - \Phi(q)^T \lambda dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathcal{T}(v) - \delta \mathcal{V}(q) - \delta \Phi(q)^T \lambda dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T Mv - \delta \mathcal{V}(q) - \delta \Phi(q)^T \lambda dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T Mv - \delta \mathcal{V}(q) - (\delta \Phi(q))^T \lambda - \Phi(q)^T \delta \lambda dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definiert man $g(q)$ als den Vektor der äußeren und inneren Kräfte mit

$$D\mathcal{V}(q) \cdot (q\tilde{\delta}q) = \delta q^T g(q) \quad (3.14)$$

und $B(q) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ als die Ableitungsmatrix der Zwangsbedingungen mit

$$D\Phi(q) \cdot (q\tilde{w}) = B(q)w \quad (3.15)$$

für alle $w \in \mathbb{R}^k$, so folgt

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \delta v^T Mv - \delta q^T g(q) - \delta q^T B^T(q)\lambda - \delta \lambda^T \Phi(q) dt. \quad (3.16)$$

Die Variation der Geschwindigkeit v ergibt sich gemäß Lemma (3.2.1) zu

$$\delta v = \delta \dot{q} + \widehat{v} \delta q.$$

woraus weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta q^T Mv) &= \delta \dot{q}^T Mv + \delta q^T M\dot{v} = (\delta v - \widehat{v} \delta q)^T Mv + \delta q^T M\dot{v} \\ &= \delta v^T Mv + \delta q^T (M\dot{v} - \widehat{v}^T Mv) \end{aligned}$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

folgt. Setzt man diesen Ausdruck für $\delta \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ in (3.16) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}) - \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v}) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{g}(q) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda} - \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt \\
&= [\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{g}(q) + \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt \\
&= - \int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{g}(q) + \mathbf{B}^T(q) \boldsymbol{\lambda}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(q) dt
\end{aligned}$$

Dabei gilt $[\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{v}]_{t_i}^{t_f} = \mathbf{0}$, da die Variation der Größen für $t \in \{t_i, t_f\}$ nach (3.7) verschwindet. \square

Bemerkung. *Versteckte Zwangsbedingungen.*

Die holonomen Zwangsbedingungen (3.12c) implizieren „versteckte“ Zwangsbedingungen, welche man durch Differentiation von (3.12c) nach t erhält. Die erste Ableitung ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \Phi(q(t)) = D\Phi(q(t)) \cdot \dot{q}(t) = D\Phi(q) \cdot (DL_q(e) \tilde{\mathbf{v}}) = D\Phi(q) \cdot (q \tilde{\mathbf{v}}) \\
&= \mathbf{B}(q) \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Für die zweite Ableitung erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{B}(q) \mathbf{v}) = \mathbf{B}(q) \dot{\mathbf{v}} + (D_q \mathbf{B}(q) \cdot (DL_q(e) \tilde{\mathbf{v}})) \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{B}(q) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

mit einer Bilinearform $\mathbf{Z}(q) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Ausdrücke (3.12), (3.17) und (3.18) sind jeweils linear in $\dot{\mathbf{v}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ und können dazu verwendet werden, diese Größen als Funktionen in Abhängigkeit von t , $q(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ darzustellen, vgl. dazu [9] S. 465. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(q) & \mathbf{B}^T(q) \\ \mathbf{B}(q) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{g}(q, \mathbf{v}, t) \\ -\mathbf{Z}(q)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Dabei hat die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ vollen Rang $m \leq k$ und die Massenmatrix \mathbf{M} ist nach Voraussetzung symmetrisch und positiv definit, also invertierbar. Daraus folgt, dass das System (3.19) eindeutig nach $\dot{\mathbf{v}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ aufgelöst werden kann, vgl. [1].

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Bemerkung. *Dissipative Kräfte.*

Dissipative Kräfte wie zum Beispiel Reibungskräfte lassen sich nicht von einem Potential ableiten und sind auch keine Zwangskräfte. Sie erfüllen nicht das Hamiltonsche Prinzip, vgl. dazu [10]. Stattdessen können die Bewegungsgleichungen (3.12) um dissipative Terme erweitert werden, wie z.B. um Stokes'sche Reibung

$$F_R := \mu_R \cdot \mathbf{v} \quad (3.20)$$

mit einem Reibungskoeffizienten $\mu_R > 0$.

3.3 Kreisel-Modell

Ein in der Literatur häufig verwendetes Modell zum Testen der numerischen Algorithmen ist das Modell eines Kreisels, engl. „Heavy-Top“. Genauer handelt es sich dabei um einen rotierenden sphärischen Kreisel, der an seiner Spitze befestigt ist und um dessen Aufhängepunkt im Gravitationsfeld pendelt. Die Beschreibung des Systems kann durch Elemente $q = (\mathbf{x}, \mathbf{R})$ in den in Abschnitt 3.1 vorgestellten Konfigurationsräumen $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ oder $SE(3)$ erfolgen.

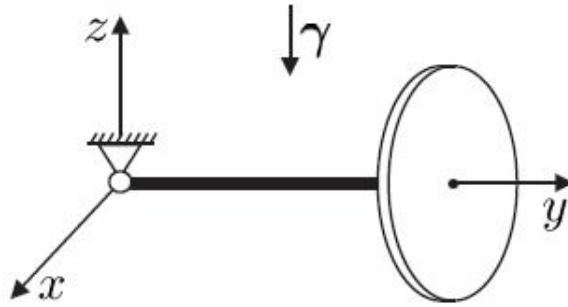


Abbildung 3.1.: Konfiguration des Heavy Tops

Die kinetische und potenzielle Energie des Systems sind gegeben mit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{v}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathcal{V}(q) &= -\mathbf{x}^T m \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Dabei ist $\mathbf{v} := (\mathbf{u}^T, \boldsymbol{\Omega}^T)^T \in \mathbb{R}^6$ die Geschwindigkeit des Systems, genauer sind $\mathbf{u} := \dot{\mathbf{x}}$ die Bewegungsgeschwindigkeit des Schwerpunkts im raumfesten Bezugssystem und $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem. Ferner sind m die Gesamtmasse des Kreisels, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ das Trägheitsmoment im körperfesten Bezugssystem, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ der die Schwerkraft beschreibende Vektor und $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt in der Referenzkonfiguration, die durch $\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ bestimmt ist.

Mit der Massematrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

lässt sich die kinetische Energie in der Form $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ schreiben. Die Beziehung zwischen den das System beschreibenden Größen \mathbf{x} und \mathbf{R} wird durch die Zwangsbedingung

$$\boldsymbol{\Phi}(q) := \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (3.21)$$

modelliert.

Bemerkung. Mit den in Abschnitt (3.1) definierten Matrixrepräsentationen und Abbildungen für $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ und $SE(3)$ ergeben sich mit (3.12a) die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ und

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{U} \\ \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

in $SE(3)$.

Lemma 3.3.1. *Die Jacobimatrix $\mathbf{B}(q)$ der Zwangsbedingungen (3.21) lautet für den Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$*

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^T & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

und für $SE(3)$

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_3 & -\tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

BEWEIS. Unter Verwendung von (3.22) gilt in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}} = -\tilde{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \mathbf{u} \\ &= -\mathbf{R}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{X}} \Omega. \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen in $SE(3)$ unter Verwendung von (3.23) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}} = -\tilde{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \\ &= -\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{X}} \Omega. \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\mathbf{B}(q)$ in (3.15) folgen hieraus die behaupteten angegebenen Gestalten von \mathbf{B} in den jeweiligen Lie-Gruppen. \square

Lemma 3.3.2. *Die Bewegungsgleichungen (3.12) für den Konfigurationsraum $G = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ lauten*

$$m\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\Omega} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (3.26b)$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.26c)$$

BEWEIS. \square

Lemma 3.3.3. *Die Bewegungsgleichungen (3.12) für den Konfigurationsraum $G = SE(3)$ lauten*

$$m\dot{\mathbf{U}} + m\Omega \times \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T m\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\Omega} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (3.27b)$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.27c)$$

BEWEIS. \square

Bemerkung. *Kreisel ohne Zwangsbedingungen.*

Die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel (5) sollen anhand eines Systems ohne Zwangsbedingungen erfolgen. Im Fall des Kreisel-Modells erhält man dieses

3. Erweitertes Kreisel-Modell

zum Beispiel durch analoge Anwendung des Hamiltonschen Variationsprinzips auf die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) = \mathcal{T}(\mathbf{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} - m(\mathbf{R} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} \quad (3.28)$$

oder durch dreimalige Differentiation der Zwangsbedingung (3.21) und Auflösen des Index-3-Systems (3.12). Die Bewegungsgleichungen für den Kreisel ohne Zwangsbedingungen lauten letztendlich

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{\Omega}} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J} \mathbf{\Omega} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.29b)$$

3.4 Erweiterung um Torsionsfeder

Das Generalized- α -Verfahren ist ein implizites Verfahren, welches in linearen Konfigurationsräumen besonders gut zur Behandlung sogenannter steifer Differentialgleichungen geeignet ist. In [9], Abschnitt VII.7, wird exemplarisch die Behandlung eines Mehrkörpersystems vorgestellt, wobei die Bewegungsgleichungen als Index-3-System differential-algebraischer Gleichungen ähnlich zu (3.12) formuliert werden. Zur Untersuchung der Eigenschaften impliziter Verfahren bei Anwendung auf steife Differentialgleichungen erweitern die Autoren ihr System um ein Federpotential mit großer Federkonstante, was in einem entsprechenden Kraftterm in den Bewegungsgleichungen resultiert.

Diesem Vorgehen folgend, soll nun das in Abschnitt (3.3) vorgestellte Kreisel-Modell um ein Federpotential und zugehörige Federkraft erweitert werden. Um dabei die Bewegung des Kreiselschwerpunktes auf der Einheitssphäre beizubehalten, soll die Modellierung der entsprechenden Größen einer an der Symmetrieachse des Kreisels befestigten Torsionsfeder entsprechen. Die wirkenden Kräfte sind dabei proportional zum Verdrehwinkel des Kreisels um dessen Achse bezüglich der Referenzkonfiguration $\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$. Die Berechnung dafür benötigter Winkel anhand der Rotationsmatrix \mathbf{R} ist Gegenstand der folgenden

Bemerkung. *Kardan-Winkel und Koordinatentransformation.*

Eine Möglichkeit zur Parametrisierung der Drehgruppe $SO(3)$ mit Elementen des \mathbb{R}^3 stellen die sogenannten Euler-Winkel dar, welche im Folgenden mit α , β und γ bezeichnet werden. Eine Matrix $\mathbf{R} \in SO(3)$ kann mittels der

3. Erweitertes Kreisel-Modell

elementaren Drehmatrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\alpha) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_y(\beta) &:= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z(\gamma) &:= \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

als

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz} = \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_z(\gamma) \quad (3.31)$$

dargestellt werden. Diese Darstellung ist dabei nach Festlegung auf eine bestimmte Drehfolge eindeutig. Erfolgen die Drehungen dabei wie hier um die Hauptachsen des Systems, so werden α , β und γ auch als **Kardan-Winkel** bezeichnet und es gelten $\alpha, \gamma \in [-\pi, \pi)$ und $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Eine solche Matrix \mathbf{R}_{xyz} kann als Transformationsmatrix zwischen einem raumfesten Bezugssystem xyz und einem körperfesten Bezugssystem XYZ aufgefasst werden. Die Rotationsmatrix im Kreisel-Modell entspricht gemäß der Zwangsbedingung $\mathbf{0} = \mathbf{X} - \mathbf{R}^T \mathbf{x}$ einer Transformation $\mathbf{R}_{XYZ} = \mathbf{R}_{xyz}^T$ vom körperfesten ins raumfeste Bezugssystem. Es gilt daher

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz}^T = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & * & * \\ -\cos(\beta) \sin(\gamma) & * & * \\ \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Dabei sind die mit * markierten Einträge für die folgenden Betrachtungen nicht weiter relevant und wurden deshalb zugunsten der Übersichtlichkeit weggelassen. Sofern $\cos(\beta) \neq 0$ gilt, lassen sich aus den Einträgen von $\mathbf{R} = (r_{ij})_{ij}$ die Relationen

$$-\tan(\alpha) = \frac{r_{32}}{r_{33}}, \quad \sin(\beta) = r_{31}, \quad -\tan(\gamma) = \frac{r_{21}}{r_{11}} \quad (3.33)$$

für die Rotationswinkel α , β und γ angeben. Im Fall $\cos(\beta) = 0$ ergeben sich singuläre Drehwinkel $\beta = (2s + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $s \in \mathbb{Z}$, für welche zwei der Elementardrehachsen zusammenfallen und lediglich die Summe $\alpha + \gamma$ eindeutig bestimmt ist, siehe [14] S. 29.

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Bemerkungen. *Anpassung der Modell-Parameter.*

1. Verwendet man den in der Literatur üblicherweise gewählten Bezugspunkt $\mathbf{X} := (0, 1, 0)^T$, so würde nach den vorausgegangenen Ausführungen der Winkel β die Verdrehung des Kreisels um dessen Achse repräsentieren, welche in diesem Fall die y -Achse im körperfesten Bezugssystem ist. Die Einschränkung $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist jedoch nicht praktikabel. Zweckmäßig ist es daher, $\mathbf{X} := (1, 0, 0)^T$ zu wählen, sodass der Winkel α die Verdrehung des Kreisels repräsentiert.
2. Der Winkel α ist nach den obigen Ausführungen für Drehwinkel $\beta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ nicht eindeutig bestimmbar. Gilt für die Gewichtskraft im Kreiselmodell $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \cdot \mathbf{e}_z$, so erhält man Singularitäten in den Punkten $(0, 0, 1)^T$ und $(0, 0, -1)^T$. Diese stellen jedoch die mechanischen Gleichgewichte des Systems dar, deren Stabilitätseigenschaften in Kapitel 5 betrachtet werden sollen. Für numerische Tests ist es daher sinnvoll sicherzustellen, dass zumindest in einer Umgebung dieser Punkte keine solchen Singularitäten in der Winkelberechnung auftreten. Wählt man hingegen $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \cdot \mathbf{e}_y$, so bleiben zwar die Singularitäten in den genannten Punkten erhalten, die mechanischen Gleichgewichte befinden sich dann allerdings in den Punkten $(0, -1, 0)^T$ und $(0, 1, 0)^T$. Analytisch komplexere singularitätenfreie Darstellungen der Drehmatrix \mathbf{R} , wie zum Beispiel mittels komplementärer Kardan-Winkel in [14], sind daher nicht notwendig, da man sich in den Tests auf entsprechende Umgebungen der Gleichgewichte beschränken kann.

Lemma 3.4.1. *Der Kraftvektor \mathbf{g}_F für das Federpotential $\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) = \frac{k}{2}\alpha^2$, $k > 0$, mit $\alpha(\mathbf{R}) := -\arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)$ in der Formulierung (3.12) der Bewegungsgleichungen lautet*

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3}{r_{33}} \right), \quad (3.34)$$

wobei $C(\mathbf{R})$ definiert ist als

$$C(\mathbf{R}) := \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)^2}. \quad (3.35)$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

BEWEIS. Es sei $\delta\Theta \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta}$ gilt. Der Vektor \mathbf{g}_F ist nach (3.14) definiert als

$$D\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta}) = \delta\Theta^T \mathbf{g}_F(\mathbf{R}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V}_F(\mathbf{R}) &= k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \delta\alpha(\mathbf{R}) = k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \left(-\delta \arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \right) \\ &= \frac{-k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2} \cdot \left[\frac{\delta r_{32}}{r_{33}} + r_{32} \cdot \delta r_{33}^{-1} \right] \\ &= -C(\mathbf{R}) \cdot \left[\frac{\delta r_{32}}{r_{33}} + r_{32} \cdot \delta(r_{33}^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mit $r_{32} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_2$ und $r_{33} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_3$ gelten weiter

$$\begin{aligned} \delta r_{32} &= \delta(\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3^T (\delta\mathbf{R}) \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \widetilde{\delta\Theta} \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{e}}_2 \delta\Theta = -\delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \\ &= \delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

sowie

$$\delta(r_{33}^{-1}) = -\frac{1}{r_{33}^2} \cdot \delta\Theta^T \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3.$$

Das Einsetzen der Ausdrücke für δr_{32} und $\delta(r_{33}^{-1})$ in (3.36) liefert die Behauptung. \square

Bemerkung. *Kreisel-Modell mit Torsionsfeder und Reibung.*

Das herkömmliche Kreisel-Modell kann mit Lemma (3.4.1) um die Kraftkomponente \mathbf{g}_F in (3.34) mit einem Torsionskoeffizienten $k > 0$ und einen Reibungsterm $d \cdot \boldsymbol{\Omega}$ mit Reibungskoeffizienten $d > 0$ erweitert werden. Für die Formulierung in $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ erhält man dann die Bewegungsgleichungen

$$m\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = -d \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) \quad (3.38)$$

und in $SE(3)$

$$m\dot{\mathbf{U}} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T m\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\lambda} = -d \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}). \quad (3.40)$$

3. Erweitertes Kreisel-Modell

Die Bewegungsgleichungen für das System in $SO(3)$ ohne Zwangsbedingungen ergeben sich dann als

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) - d \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.41b)$$

Kapitel 4

Generalized- α -Verfahren

Definition. Das Generalized- α -Verfahren für Index-3-Systeme der Form (3.12) lautet

$$q_{n+1} = q_n \circ \exp(h\widetilde{\Delta q_n}), \quad (4.1a)$$

$$\Delta q_n = v_n + h(0.5 - \beta)a_n + h\beta a_{n+1}, \quad (4.1b)$$

$$v_{n+1} = v_n + h(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}, \quad (4.1c)$$

$$(1 - \alpha_m)a_{n+1} + \alpha_m a_n = (1 - \alpha_f)\dot{v}_{n+1} + \alpha_f \dot{v}_n, \quad (4.1d)$$

$$M(q)\dot{v}_{n+1} = -g(q_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}) - B^T(q)\lambda_{n+1}, \quad (4.1e)$$

$$\Phi(q) = 0 \quad (4.1f)$$

mit der numerischen Lösung $(q_n, v_n, a_n, \lambda_n)$ für den Zeitschritt $t_n \rightarrow t_n + h$ mit Schrittweite h und Parametern $\alpha_m, \alpha_f, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Wahl der Parameter und Ordnungsbedingungen

Die Wahl der Parameter $\alpha_m, \alpha_f, \beta$ und γ bestimmen wesentlich die numerischen Eigenschaften des Generalized- α -Verfahrens (4.1). Entsprechende Untersuchungen zur optimalen Wahl der Parameter für das Verfahren in linearen Räumen wurden von Chung und Hulbert in [6] ausgeführt.

1. Das „klassische“ Verfahren aus [6] in linearen Räumen ist unabhängig von der Schrittweite h stabil für Parameter

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m).$$

2. Die lokalen Abbruchfehler sind von Ordnung zwei für

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

Durch Einführung eines weiteren Parameters $\rho_\infty \in [0, 1)$ zur besseren Handhabung der Parameter und deren optimaler Wahl ergeben sich folgende Rela-

4. Generalized- α -Verfahren

tionen

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (4.2)$$

in Abhängigkeit von ρ_∞ . Die Wahl von ρ_∞ zur Sicherung der Stabilität wird in Abschnitt (5.1) ausführlicher betrachtet.

Bemerkung. *Initialisierung des Verfahrens.*

Die zeitdiskrete numerische Lösung $(q_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$ des Verfahrens (4.1) zum Zeitpunkt t_n stellt eine Approximation der Lösung des Index-3-Systems (3.12) dar, also

$$q_n \approx q(t_n), \quad \mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}(t_n), \quad \dot{\mathbf{v}}_n \approx \dot{\mathbf{v}}(t_n), \quad \boldsymbol{\lambda}_n \approx \boldsymbol{\lambda}(t_n).$$

Die Variable \mathbf{a}_n ist eine Hilfsvariable, deren Bedeutung der einer Beschleunigung gleichkommt. Es gilt

$$\mathbf{a}_n \approx \dot{\mathbf{v}}(t_n + \Delta_\alpha h), \quad \Delta_\alpha := \alpha_m - \alpha_f.$$

Zur Initialisierung des Verfahrens bedarf es der Angabe eines Startzeitpunkts t_0 und konsistenter Anfangswerte

$$q_0 := q(t_0), \quad \mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(t_0), \quad \dot{\mathbf{v}}_0 := \dot{\mathbf{v}}(t_0),$$

wobei $\dot{\mathbf{v}}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}_0$ unter Vorgabe von q_0 und \mathbf{v}_0 als Lösung des Gleichungssystems (3.19) bestimmt werden können.

Die Variable \mathbf{a}_0 kann in den meisten Fällen mit

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0$$

initialisiert werden. Eine weitere Möglichkeit für die Wahl des Startwertes \mathbf{a}_0 findet man in [1], Tabelle 2.

4.1 Newton-Raphson-Iteration

Im Folgenden soll auf Details der Implementierung der verschiedenen Formulierungen des Generalized- α -Verfahrens eingegangen werden. Wesentlicher Bestandteil der Umsetzung der Verfahren ist dabei die Durchführung eines Newton-Raphson-Verfahrens zur Lösung des impliziten nichtlinearen Systems

4. Generalized- α -Verfahren

(4.1), welche in der hier vorgestellten Form in [1] und erstmalig in [4] beschrieben wurde.

Weitere Ausführungen zur Implementierung von Generalized- α -Verfahren findet man beispielsweise in [2].

Bemerkung. Es ist zunächst zweckmäßig, die Verfahrensvorschrift in (4.1) in Abhängigkeit von $\Delta \mathbf{q}_n$ zu formulieren. Dies führt auf

$$q_{n+1} = q(\Delta \mathbf{q}_n) := q_n \circ \exp(h \widetilde{\Delta \mathbf{q}_n}) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n) := \frac{\gamma}{\beta} \Delta \mathbf{q}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{v}_n + h \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \mathbf{a}_n \quad (4.3b)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}(\Delta \mathbf{q}_n) := \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \left(\frac{\Delta \mathbf{q}_n - \mathbf{v}_n}{h} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_n \right) + \frac{\mathbf{a}_n - \alpha_f \dot{\mathbf{v}}_n}{1 - \alpha_f}. \quad (4.3c)$$

Das mit der Schrittweite h skalierte Residuum beim Einsetzen der Lösung in die Bewegungsgleichungen (3.12b) sei

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{r}_h(q, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, h\boldsymbol{\lambda}, t) := h(\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{g}(q, \mathbf{v}, t)) + \mathbf{B}^T(q) \cdot h\boldsymbol{\lambda}. \quad (4.4)$$

Die numerische Lösung $(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1})$ ergibt sich somit als Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \Psi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) := \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h(q(\Delta \mathbf{q}_n), \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n), \dot{\mathbf{v}}_n(\Delta \mathbf{q}_n), h\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, t_{n+1}) \\ \frac{1}{h} \Phi(q(\Delta \mathbf{q}_n)) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

für $\boldsymbol{\xi}_{n+1} := ((\Delta \mathbf{q}_n)^T, h\boldsymbol{\lambda}_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{k+m}$ zusammen mit den Gleichungen (4.3). Dieses kann mittels Newton-Iteration der Form

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s+1)} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)} + \Delta \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}) \Delta \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)} = -\Psi(\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(s)}) \quad (4.6)$$

gelöst werden. Als möglicher Startwert $\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(0)}$ ergibt sich aus (4.1b) durch die initiale Näherung $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n+1}$ in jedem Zeitschritt

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(0)} = \left(\mathbf{v}_n^T + \frac{1}{2} \mathbf{a}_n^T, h\boldsymbol{\lambda}_n^T \right)^T. \quad (4.7)$$

Weiter hat die Iterationsmatrix $\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ die Gestalt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial h\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial h\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \mathbf{B}^T \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

4. Generalized- α -Verfahren

Zur Bestimmung von $\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}}$ definiert man die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} mit

$$\mathbf{D} := \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(q(\Delta \mathbf{q}_n), \mathbf{v}(\Delta \mathbf{q}_n), t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad (4.9)$$

und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} so, dass für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$

$$\frac{1}{h} D_q \mathbf{r}_h \cdot (DL_q(e) \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{K}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w}$$

gilt. Mit diesen Matrizen und mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \Delta \mathbf{q}} \cdot \mathbf{w} &= D_q \mathbf{r}_h \left(DL_q(e) \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} + \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{q}_n} \right) \cdot \mathbf{w} \\ &= h^2 \mathbf{K}(\Delta \mathbf{q}_n) \mathbf{T}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w} + h \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{D}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{w} + \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}, \end{aligned}$$

wobei sich der erste Term mit Korollar 2.7 aus [1] ergibt. Das gleiche Resultat liefert auch

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \mathbf{B}(\Delta \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{T}(\Delta \mathbf{q}_n)$$

und die Iterationsmatrix lautet daher

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \mathbf{M} + h \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{D} + h^2 \mathbf{K} \mathbf{T} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

4.2 Implementierung in Python

Für numerische Tests wurde das Generalized- α -Verfahren (4.1) in Python 3 implementiert. Da differential-algebraischen Gleichungen wie (3.12) in verschiedenen Lie-Gruppen formuliert werden kann, wurde die Implementierung aus Gründen der Übersichtlichkeit und Universalität objektorientiert vorgenommen. Entstanden sind vier Klassen `LIEGROUP`, `LIEGROUPELEMENTS`, `MODEL` und `INTEGRATOR`, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

Bemerkung. *Implementierte Klassen.*

- `LIEGROUP`. Diese Klasse repräsentiert die jeweilige zu verwendende Lie-Gruppe $G \in \{SO(3), SE(3), \mathbb{R}^3 \times SO(3)\}$ derart, dass sie für jede Gruppe Methoden beinhaltet, welche die zugehörigen Abbildungen $\tilde{\bullet}$, $\mathbf{T}(\cdot)$ und $\exp(\cdot)$ aus Abschnitt (3.1) implementieren. Intern werden Objekte der Klasse `LIEGROUPELEMENTS` erzeugt und verwendet.

4. Generalized- α -Verfahren

- **LIEGROUPELEMENTS.** Die Gruppenoperationen in den in Abschnitt (3.1) behandelten Gruppen kann durch Identifizierung dieser mit Untergruppen einer entsprechenden linearen Gruppe auf die Multiplikation von Matrizen zurückgeführt werden. Die Klasse **LIEGROUPELEMENTS** implementiert dazu einen entsprechenden Isomorphismus von G in die jeweilige lineare Gruppe. Die entstehenden Objekte können so intern mit dem für die Matrixmultiplikation in Python reservierten Operator "@" miteinander verknüpft werden.
- **MODEL.** Diese Klasse repräsentiert das mechanische System, für welches die Bewegungsgleichungen (3.12) aufgestellt wurden. Konkret implementiert diese Klasse Methoden zur Berechnung des Operators $\hat{\bullet}$, des Residuums r_h aus (4.4) sowie der Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} und \mathbf{D} , welche zur Aufstellung der Iterationsmatrix in (4.10) benötigt werden. Da diese Größen von der verwendeten Lie-Gruppen-Formulierung abhängig sind, wird jedes Objekt der Klasse **MODEL** mit einem entsprechenden Objekt der Klasse **LIEGROUP** initialisiert.
- **INTEGRATOR.** Die Integration der durch **MODEL** repräsentierten Bewegungsgleichungen gemäß der Verfahrensvorschrift (4.1) erfolgt mittels dieser Klasse. Initialisiert wird sie daher mit einem Objekt der Klasse **MODEL** und einem Parameter $\rho_\infty \in [0, 1]$ zur Festlegung der Parameter α_f , α_m , β , γ , vgl. dazu (4.2). Die Integration erfolgt durch den Aufruf einer Methode **SOLVETIMESTEP** in jedem Zeitschritt, welche die Newton-Iteration gemäß Abschnitt (4.1) durchführt. Die dafür benötigte Iterationsmatrix wird mittels des übergebenen Objekts der Klasse **MODEL** berechnet. Weiterhin implementiert diese Klasse eine Funktion zur Berechnung benötigter Startwerte als Lösung des Systems (3.19).

4. Generalized- α -Verfahren

Algorithmus 4.2.1. Methode SOLVETIMESTEP, Klasse INTEGRATOR

Input : Lösung $(q_n, \mathbf{v}_n, \dot{\mathbf{v}}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$ zum Zeitpunkt $t_n = n \cdot h$

Toleranzen tol_r und tol_Φ für die Newton-Iteration

Output : Lösung $(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1})$ zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + h$

```

1   $\Delta \mathbf{q}_n := \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{a}_n$ 
2   $\boldsymbol{\lambda}_{n+1} := \boldsymbol{\lambda}_n$ 
3   $\mathbf{v}_{n+1} := \frac{\gamma}{\beta}\Delta \mathbf{q}_n + (1 - \frac{\gamma}{\beta})\mathbf{v}_n + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\mathbf{a}_n$ 
4   $\dot{\mathbf{v}}_{n+1} := \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)} \left( \frac{\Delta \mathbf{q}_n - \mathbf{v}_n}{h} - \frac{\mathbf{a}_n}{2} \right) + \frac{\mathbf{a}_n - \alpha_f \dot{\mathbf{v}}_n}{1 - \alpha_f}$ 
5
6  for  $i := 0, \dots, i_{\max}$  do:
7       $q_{n+1} := q_n \circ \exp(h\widetilde{\Delta \mathbf{q}_n})$ 
8       $\mathbf{r}_h := h(\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{g}(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t)) + \mathbf{B}^T(q_{n+1}) \cdot h\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ 
9       $\mathbf{r}_{h\lambda} := \frac{1}{h}\Phi(q_{n+1})$ 
10
11     if  $\|\mathbf{r}_h\| < \text{tol}_r$  and  $\|\mathbf{r}_{h\lambda}\| < \text{tol}_\Phi$  do:
12         break
13
14      $\mathbf{B} := \mathbf{B}(q_{n+1}); \quad \mathbf{T} := \mathbf{T}(h\widetilde{\Delta \mathbf{q}_n}); \quad \mathbf{D} := \mathbf{D}(\mathbf{v}_{n+1});$ 
15      $\mathbf{K} := \mathbf{K}(q_{n+1})$ 
16      $\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \frac{1 - \alpha_m}{\beta(1 - \alpha_f)}\mathbf{M} + h\frac{\gamma}{\beta}\mathbf{D} + h^2\mathbf{KT} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{BT} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 
17     Löse  $\mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q}_n^{(i)} \\ \Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{r}_h \\ \mathbf{r}_{h\lambda} \end{pmatrix}$  nach  $\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$  und  $\Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)}$  auf
18
19      $\Delta \mathbf{q}_n := \Delta \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$ 
20      $\mathbf{v}_{n+1} := \mathbf{v}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta}\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$ 
21      $\dot{\mathbf{v}}_{n+1} := \dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \frac{1 - \alpha_m}{h\beta(1 - \alpha_f)}\Delta \mathbf{q}_n^{(i)}$ 
22      $\boldsymbol{\lambda}_{n+1} := \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \frac{1}{h}\Delta h\boldsymbol{\lambda}_n^{(i)}$ 
23
24      $\mathbf{a}_{n+1} := \frac{(1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{v}}_n - \alpha_m\mathbf{a}_n}{1 - \alpha_m}$ 
25
26 return  $q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \dot{\mathbf{v}}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ 

```

Kapitel 5

Stabilitätsanalyse

5.1 Lineare Stabilität

Das Generalized- α -Verfahren (4.1) stimmt für Systeme ohne Zwangsbedingungen und lineare Konfigurationsräume $G = \mathbb{R}^k$ mit dem von Chung und Hulbert in [6] eingeführten Verfahren überein. Die folgenden Betrachtungen zur linearen Stabilität des Verfahrens folgen im Wesentlichen denen in [1] und gehen auf jene in [6] zurück.

Im linearen Fall benötigt man statt der Exponentialfunktion lediglich die identische Abbildung zur Parametrisierung von G mit Elementen der Lie-Algebra \mathbb{R}^k , die Verknüpfung \circ ist die Addition „+“. Die Gleichungen (4.1) nehmen daher die Form

$$q_{n+1} = q_n + h\Delta\mathbf{q}_n, \quad (5.1a)$$

$$\Delta\mathbf{q}_n = \mathbf{v}_n + h(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h\beta\mathbf{a}_{n+1}, \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}, \quad (5.1c)$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{v}}_n, \quad (5.1d)$$

$$\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = -\mathbf{g}(q_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1})$$

an. Eliminieren von $\Delta\mathbf{q}_n$ und $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}$ sowie Multiplikation von (5.1d) mit der Matrix \mathbf{M} liefern

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + (0.5 - \beta)h^2\mathbf{a}_n + \beta h^2\mathbf{a}_{n+1}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma)h\mathbf{a}_n + \gamma h\mathbf{a}_{n+1}$$

$$\mathbf{0} = (1 - \alpha_m)\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{M}\mathbf{a}_n + (1 - \alpha_f)\mathbf{g}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{g}_n,$$

mit $\mathbf{g}_n := \mathbf{g}(q_n, \mathbf{v}_n, t_n)$.

5. Stabilitätsanalyse

Zur Analyse der Stabilitätseigenschaften wird das Verfahren auf die skalare Testgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega > 0, \quad (5.3)$$

angewendet, deren Lösungen von der Gestalt $q(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ mit gewissen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind. Dies führt mit $g_n = -\omega^2 q_n$ in (5.2) auf

$$\begin{aligned} q_{n+1} - \beta h^2 a_{n+1} &= q_n + h v_n + (0.5 - \beta) h^2 a_n \\ v_{n+1} - \gamma h a_{n+1} &= v_n + (1 - \gamma) h a_n \\ (1 - \alpha_f) \omega^2 q_{n+1} - (1 - \alpha_m) a_{n+1} &= -\alpha_f q_n + \alpha_m a_n. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation der ersten beiden Gleichungen mit $\frac{1}{h^2}$ und $\frac{1}{h}$ erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{(h\omega)^2} & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 1 - \alpha_f & 0 & 1 - \alpha_m \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}_{h\omega}^+} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 q_{n+1} \\ \frac{1}{h} a_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{(h\omega)^2} & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ 0 & 1 & 1 - \gamma \\ -\alpha_f & 0 & -\alpha_m \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}_{h\omega}^0} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 q_n \\ \frac{1}{h} a_n \\ a_n \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_n}.$$

Mit den entsprechenden Bezeichnungen ergibt sich also $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{T}_{h\omega} \mathbf{z}_n = \mathbf{T}_{h\omega}^{n+1} \mathbf{z}_0$ mit $\mathbf{T}_{h\omega} := (\mathbf{T}_{h\omega}^+)^{-1} \mathbf{T}_{h\omega}^0$. Die Stabilität des Verfahrens bei Anwendung auf (5.3) wird also bestimmt durch die Eigenwerte von $\mathbf{T}_{h\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. In [6] wird ein Parameter $\rho_\infty \in [0, 1]$ eingeführt, welcher die übrigen Parameter $\alpha_f, \alpha_m, \beta$ und γ bestimmt. Werden diese wie in (4.2) gewählt, führt dies zu einem monoton fallenden Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}_{h\omega})$ für $h\omega \in (0, +\infty)$ mit $\lim_{h\omega \rightarrow 0} \varrho(\mathbf{T}_{h\omega}) = 1$ und $\lim_{h\omega \rightarrow \infty} \varrho(\mathbf{T}_\infty) = 0$.

5.2 Nichtlineare Stabilität

Ein Großteil der Theorie zur Untersuchung von Gleichgewichtspunkten von gewöhnlichen Differentialgleichungen befasst sich mit Anfangswertproblemen der Form

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

in linearen Räumen mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Differentialgleichungen auf Lie-Gruppen wie das Heavy-Top-Problem aus Kapitel (3) können jedoch nicht direkt mit dieser Theorie behandelt werden, da diese auf einer Untermannigfaltigkeit eines linearen Raumes definiert sind, welcher in der Regel nur isomorph zu \mathbb{R}^p für ein $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist. Gegenstand dieses Abschnitts ist es daher, ob und wie sich Resultate zu Ljapunov-Funktionen und linearisierter Stabilität zur Stabilitätsanalyse vom linearen Fall auf Lie-Gruppen übertragen lassen.

Bemerkung. *Kartesische Produkte von Hilberträumen.*

Bei den linearen Räumen, welche die zu untersuchenden Lie-Gruppen umfassen, handelt es sich meist um kartesische Produkte endlich-dimensionaler reeller Hilberträume. In welcher Weise sich die Hilbertraumstruktur der einzelnen Räume auf ein solches Produkt überträgt, soll im Folgenden kurz festgehalten werden.

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m$ reelle Hilberträume mit jeweiligen Skalarprodukten $(\cdot | \cdot)_1, \dots, (\cdot | \cdot)_m$. Dann ist $\mathcal{H}_P := \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_m$ ebenfalls ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(\cdot | \cdot)_P : \mathcal{H}_P \times \mathcal{H}_P \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{y})_P := \sum_{i=1}^m (x_i | y_i)_i \quad (5.5)$$

für Elemente $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{H}_P$, mit $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$ für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Beispiel 5.2.1. *Betrachte $H := \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3$. Der Raum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist zusammen mit dem Frobeniusskalarprodukt*

$$(\cdot | \cdot)_F : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{A} | \mathbf{B})_F = \text{Spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) \quad (5.6)$$

5. Stabilitätsanalyse

ein Hilbertraum. Mit dem Standardskalarprodukt $(\cdot | \cdot)$ im \mathbb{R}^3 ergibt sich damit

$$((\mathbf{R}_1, \mathbf{x}_1) | (\mathbf{R}_2, \mathbf{x}_2))_H := (\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2)_F + (\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2)$$

für $(\mathbf{R}_1, \mathbf{x}_1), (\mathbf{R}_2, \mathbf{x}_2) \in H$ als Skalarprodukt auf H .

Für die sich anschließenden Betrachtungen sei nun H ein reeller, endlich-dimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot | \cdot)_H$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|_H$. Das Problem (5.4) soll nun auf dem Raum H betrachtet werden.

Definition. *Stabilität von Gleichgewichtspunkten.*

Sei $f : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ stetig und lokal Lipschitz in \mathbf{q} , es gelte $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{q}(t_0, \mathbf{q}_0)$, $t \geq t_0$, sei die Lösung des AWP (5.4).

1. Die triviale Lösung $\mathbf{q}^* = 0$ heißt **stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\bar{B}_\delta(0) \subset G$ ist, die Lösung $\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)$ zu $\mathbf{q}_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für alle $t \geq t_0$ existiert und

$$\|\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)\|_H \leq \varepsilon \tag{5.7}$$

für alle $\|\mathbf{q}_0\|_H \leq \delta$ und $t \geq t_0$ erfüllt ist. Entsprechend heißt \mathbf{q}^* **instabil**, falls \mathbf{q}^* nicht stabil ist.

2. Die Lösung \mathbf{q}^* heißt **asymptotisch stabil**, falls \mathbf{q}^* stabil ist und für alle $\mathbf{q}_0 \in \bar{B}_\delta(0)$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)\|_H = 0 \tag{5.8}$$

gilt.

Ein Mittel zur Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichtspunkten autonomer Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \tag{5.9}$$

stellen Ljapunov-Funktionen dar, welche nun thematisiert werden sollen.

Definition. *Ljapunov-Funktionen.*

5. Stabilitätsanalyse

1. Eine Funktion $V \in C(H; \mathbb{R})$ heißt **Ljapunov-Funktion** für (5.9) genau dann, wenn V entlang der Lösungen von (5.9) fällt, also $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$ für jede beliebige Lösung $\mathbf{q}(t)$ von (5.9) fallend in t ist.
2. V heißt **strikte Ljapunov-Funktion** für (5.9) genau dann, wenn V entlang nicht konstanter Lösungen von (5.9) streng fallend ist, also die Funktion $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$ für jede beliebige nichtkonstante Lösung $\mathbf{q}(t)$ von (5.9) streng fallend in t ist.

Bemerkung. *Orbitale Ableitung.*

Es seien $\mathbf{q}(t)$ eine Lösung von (5.9) und $V \in C^1(H; \mathbb{R})$. Mit der Kettenregel folgt für $\varphi(t) := V(\mathbf{q}(t))$

$$\dot{\varphi} = (\nabla V(\mathbf{q}(t)) \mid \dot{\mathbf{q}}(t)) = (\nabla V(\mathbf{q}(t)) \mid \mathbf{f}(\mathbf{q}(t))). \quad (5.10)$$

Die Ableitung $\dot{\varphi}$ wird auch als **orbitale Ableitung** bezeichnet. Somit ist V genau dann eine Ljapunov-Funktion für (5.9), wenn

$$(\nabla V(\mathbf{q}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{q})) \leq 0$$

für alle $\mathbf{q} \in H$ gilt. Weiter ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, falls

$$(\nabla V(\mathbf{q}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{q})) < 0$$

für alle $\mathbf{q} \in H$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$ ist. Man beachte, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Satz 5.2.2. *Es sei $V \in C(G; \mathbb{R})$ eine Ljapunov-Funktion für (5.9) und \mathbf{q}^* sei ein Equilibrium für (5.9). Dann gelten*

1. *Ist \mathbf{q}^* ein striktes Minimum von V , so ist \mathbf{q}^* stabil für (5.9).*
2. *Ist \mathbf{q}^* isoliert in $\mathcal{E} = \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{0}]$, ein striktes Minimum von V und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist \mathbf{q}^* asymptotisch stabil für (5.9).*

Lemma 5.2.3. *Es seien G eine Matrix-Lie-Gruppe und \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra mit $k := \dim(\mathfrak{g})$. Seien weiter $(\mathbf{e})_{i=1}^k$ die geordnete Standardbasis von \mathbb{R}^k , $\tilde{\bullet}$ wie in (2.2) und $\boldsymbol{\tau}_i := \tilde{\mathbf{e}}_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann bilden für jedes $\mathbf{R} \in G$ die Vektoren*

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_i := \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

5. Stabilitätsanalyse

eine Basis von $T_{\mathbf{R}}G$. Mit $\psi(\mathbf{v}) := \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}})$, $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, gilt zudem

$$\bar{\tau}_i = \partial_i \psi(\mathbf{0}) := \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}. \quad (5.11)$$

BEWEIS. Da $\tilde{\bullet} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{g}$ nach Voraussetzung ein Vektorraumisomorphismus ist und $(\mathbf{e})_{i=1}^k$ eine Basis von \mathbb{R}^k ist, bildet $(\tau_i)_{i=1}^k$ eine geordnete Basis von \mathfrak{g} . Mit Lemma (2.1.4) folgt, dass für jedes $\mathbf{R} \in G$ für den zugehörigen Tangentialraum $T_{\mathbf{R}}G$ gilt

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{R}}G &= \mathbf{R} \cdot \mathfrak{g} = \mathbf{R} \cdot \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \rangle = \langle \mathbf{R} \cdot \tau_1, \mathbf{R} \cdot \tau_2, \dots, \mathbf{R} \cdot \tau_k \rangle \\ &= \langle \{\bar{\tau}_i\}_{i=1}^k \rangle \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \partial_i \psi(\mathbf{0}) &= \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial v_i} \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} \exp \left(\sum_{i=1}^k v_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i \right) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \\ &= \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \bar{\tau}_i. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Basisvektoren eines Tangentialraumes.*

Sei $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine (lokale) Parametrisierung in $q \in G$, also gelte $\psi(\mathbf{0}) = q$. Die Abbildungen

$$\psi_i(t) := \psi(t \cdot \mathbf{e}_i)$$

definieren differenzierbare Kurven auf G , wodurch mit der Definition des Tangentialraums T_qG folgt, dass

$$\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_i(q) := \frac{\partial}{\partial v_i} \psi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \frac{d}{dt} \psi(t \cdot \mathbf{e}_i) \Big|_{t=0} \in T_qG \quad (5.12)$$

für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ einen Tangentenvektor in T_qG definiert. Da ψ eine Parametrisierung von G ist, ist ψ' injektiv und die Vektoren $\bar{\tau}_i$ damit linear unabhängig, folglich bilden sie also eine Basis von T_qG . Der Tangentialraum T_qG ist also unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ und der Gestalt der zugehörigen Basisvektoren $\bar{\tau}_i$.

Umgekehrt liefert Lemma (5.2.3) zu jeder Basis von T_qG eine Parametrisierung der Form (2.10) in Abhängigkeit von der konkreten Abbildung $\tilde{\bullet}$.

5. Stabilitätsanalyse

Definition. *Kovariante und kontravariante Komponenten.*

Es sei Σ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathbf{a} \in T_q \Sigma$ für ein $q \in \Sigma$. Sei weiter ψ eine Parametrisierung um q und $(\bar{\tau}_i)_{i=1}^k$ wie in (5.12) eine Basis des k -dimensionalen Tangentialraums $T_q \Sigma$. Die Koeffizienten $a^i \in \mathbb{R}$ in der Darstellung

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k a^i \cdot \bar{\tau}_i$$

heißen **kontravariante Komponenten** von \mathbf{a} . Der Vektor \mathbf{a} ist jedoch ebenso durch seine **kovarianten Komponenten** $a_i \in \mathbb{R}$ mit

$$a_i := (\mathbf{a} | \bar{\tau}_i), \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

eindeutig bestimmt, welche die Koeffizienten in der Darstellung von \mathbf{a} in der **dualen Basis** $(\bar{\tau}^j)_{j=1}^k$ sind, definiert durch $(\bar{\tau}^j | \bar{\tau}_i) = \delta_{ij}$.

Definition. *Erste Fundamentalmatrix.*

Es seien die Bezeichnungen so wie in der vorangegangenen Definition. Die **erste Fundamentalmatrix** $\mathbf{C} = (c_{ij})$ in $q \in \Sigma$ ist definiert durch

$$c_{ij} = c_{ij}(q) := (\bar{\tau}_i | \bar{\tau}_j), \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Bemerkungen. *Eigenschaften der ersten Fundamentalmatrix.*

1. Die erste Fundamentalmatrix \mathbf{C} ist symmetrisch, positiv definit und damit invertierbar, denn es gilt für alle $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i,j=1}^k c_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^k (\xi_i \bar{\tau}_i | \xi_j \bar{\tau}_j) = \left(\sum_{i=1}^k \xi_i \bar{\tau}_i \middle| \sum_{j=1}^k \xi_j \bar{\tau}_j \right) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i \bar{\tau}_i \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

2. Es sei $\mathbf{C}^{-1} = (c^{ij})$, womit sich Relationen $\delta_{ij} = \sum_{s=1}^k c_{is} c^{sj} = \sum_{s=1}^k c^{is} c_{sj}$

ergeben. Ist weiter $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k a^i \cdot \bar{\tau}_i$, so folgt

$$a_j = (\mathbf{a} | \bar{\tau}_j) = \sum_{i=1}^k a^i (\bar{\tau}_i | \bar{\tau}_j) = \sum_{i=1}^k a^i \cdot c_{ij}$$

5. Stabilitätsanalyse

und damit für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\sum_{j=1}^k a_j \cdot c^{ji} = \sum_{s,j=1}^k a^s \cdot c_{sj} \cdot c^{ji} = \sum_{s=1}^k a^s \cdot \left(\sum_{j=1}^k c_{sj} \cdot c^{ji} \right) = a^i. \quad (5.13)$$

Die duale Basis ergibt sich mit $\left(\sum_{s=1}^k c^{is} \cdot \bar{\tau}_s \mid \bar{\tau}_j \right) = \delta_{ij}$ zu

$$\bar{\tau}^i = \sum_{s=1}^k c^{is} \cdot \bar{\tau}_s. \quad (5.14)$$

Beispiel 5.2.4. Sei $\Sigma := SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g} := T_I \Sigma$ hat die Dimension $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ und wird erzeugt von den Matrizen

$$\tau_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

welche eine geordnete Basis von \mathfrak{g} bilden. Mit dieser Notation gilt für die Bilder von $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T \in \mathbb{R}^3$ unter der in (2.4) angegebenen Abbildung $\tilde{\bullet}$

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \tau_i = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \cdot \tilde{e}_i. \quad (5.16)$$

Sei nun $\mathbf{R} \in \Sigma$ beliebig. Dann ist $(\bar{\tau}_i)_{i=1}^3 = (\mathbf{R} \cdot \tau_i)_{i=1}^3$ nach Lemma (5.2.3) eine geordnete Basis von $T_{\mathbf{R}} \Sigma$. Es ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} (\bar{\tau}_i \mid \bar{\tau}_j)_F &= \text{Spur}(\bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j^T) = \text{Spur}(\mathbf{R} \cdot \tau_i \cdot \tau_j^T \cdot \mathbf{R}^T) \\ &= \text{Spur}(\tau_i \cdot \tau_j^T) = (\tau_i \mid \tau_j)_F \\ &= 2 \cdot \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.17)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, 3\}$, denn es gilt $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und die Spurabbildung ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen. Die erste Fundamentalmatrix lautet für alle $\mathbf{R} \in \Sigma$ damit $\mathbf{C}(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{I}_3$.

Definition. *Flächengradient einer skalaren Funktion.*

Es seien $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und $q \in \Sigma$. Seien weiter ψ eine (lokale) Parametrisierung von Σ mit $\psi(\mathbf{0}) = q$ und $\bar{\tau}_i \in T_q \Sigma$ zugehörige Tangentenvektoren gemäß

5. Stabilitätsanalyse

(5.12).

Der **Flächengradient** $\nabla_{\Sigma}\rho$ von ρ in q ist dann mittels der Kettenregel definiert durch die Gültigkeit von

$$\partial_i \rho(\phi(\mathbf{0})) = (\nabla_{\Sigma}\rho(q) \mid \bar{\tau}_i) \quad (5.18)$$

für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Bemerkung. *Komponenten und Flächengradient.*

Da der Flächengradient $\nabla_{\Sigma}\rho$ ein Element des Tangentialraumes $T_q\Sigma$ ist, lässt er sich mittels kovarianter Komponenten a_i charakterisieren. Es gilt also

$$\nabla_{\Sigma}\rho = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \bar{\tau}^i. \quad (5.19)$$

Die Definition des Flächengradienten (5.18) impliziert mit der Darstellung bezüglich kovarianter Komponenten (5.19)

$$a_i = \partial_i \rho(\phi(\mathbf{0})).$$

Dies ergibt mit (5.14)

$$\nabla_{\Sigma}\rho(q) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \bar{\tau}^i = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j=1}^k c^{ij} \cdot \bar{\tau}_j = \sum_{i,j=1}^k c^{ij} \cdot \partial_i \rho(\phi(\mathbf{0})) \cdot \bar{\tau}_j. \quad (5.20)$$

Bemerkung. *Ljapunov-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten.*

Mit Hilfe des Flächengradienten ist es nun möglich, Ljapunov-Funktionen anhand ihrer orbitalen Ableitung (5.10) auf Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren. Eine Funktion $V \in C^1(\Sigma, \mathbb{R})$ ist genau dann eine Ljapunov-Funktion für das auf Σ definierte Problem (5.9), falls

$$(\nabla_{\Sigma}V(q) \mid \mathbf{f}(q)) \leq 0 \quad (5.21)$$

für alle $g \in \Sigma$ gilt. Ebenso überträgt sich die Charakterisierung strikter Ljapunov-Funktionen in analoger Weise.

Wie die Untersuchung der Stabilität des Verfahrens im linearen Fall soll auch die Untersuchung im nichtlinearen Fall anhand eines mechanischen Systems

5. Stabilitätsanalyse

ohne Zwangsbedingungen erfolgen. Im Fall der Kreisel-Modelle aus Kapitel (3) werden daher die entsprechenden Formulierungen (3.29) und (3.41) der Bewegungsgleichungen betrachtet.

Bemerkung. *Gleichgewichtspunkte des Kreisel-Modells (3.29).*

Im Folgenden sollen die Gleichgewichtspunkte des Systems (3.29) untersucht werden. Das System (3.29) kann zunächst mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^* \widetilde{\mathbf{\Omega}}^* \\ \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{\Omega}^* \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega}^* + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma}) \end{pmatrix}$$

und $q := (\mathbf{R}, \mathbf{\Omega})$ auf die Form (5.9) gebracht werden. Sei nun $(\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*)^T$ ein Gleichgewicht des Systems. Aus $\mathbf{R}^* \widetilde{\mathbf{\Omega}}^* = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ folgt mit der Invertierbarkeit von \mathbf{R} , dass $\widetilde{\mathbf{\Omega}}^* = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ und damit $\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{0}_{1 \times 3}$ gilt.

Weiter ergibt sich $\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{X} \times \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}_{1 \times 3}$, was genau dann gilt, wenn $\mathbf{R}^* \mathbf{X}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ linear abhängig sind. Im Fall $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$ und $\boldsymbol{\gamma} = -\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 \cdot \mathbf{e}_y$ sind $\mathbf{x}_1 := (0, -1, 0)^T$ und $\mathbf{x}_2 := (0, 1, 0)^T$ die mechanischen Gleichgewichte des Systems, für welche $\tilde{\mathbf{x}}_i \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$ gilt. Seien $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ wie in (3.30) definiert. Dann ist wegen

$$\mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1$$

der Punkt $(\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})$ ein Gleichgewicht des Systems (3.29). Insbesondere sieht man hier, dass für jedes $\alpha \in [-\pi, \pi)$ ein Gleichgewicht von (3.29) der Form

$$q^*(\alpha) = \left(\mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha), \mathbf{0} \right)^T \quad (5.22)$$

existiert. Selbiges lässt sich auch für \mathbf{x}_2 feststellen. Die isolierten mechanischen Gleichgewichte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 spiegeln sich also in nichtisolierten Gleichgewichtspunkten (5.22) des Systems (3.29) wider.

Bemerkung. *Gleichgewichtspunkte des erweiterten Kreisel-Modells (3.41).*

Die Untersuchung der Gleichgewichte des Systems (3.41) verläuft analog zu der für das System (3.29). Im Fall von (3.41) ergibt sich die rechte Seite \mathbf{f} als

$$\mathbf{f}(\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^* \widetilde{\mathbf{\Omega}}^* \\ \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{\Omega}^* \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega}^* + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} - d \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R})) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

5. Stabilitätsanalyse

mit einem zusätzlichen Reibungsterm $d \cdot \boldsymbol{\Omega}$ und dem die Torsionskraft repräsentierenden Vektor $\mathbf{g}_F(\mathbf{R})$ aus (3.34). Ist wieder $(\mathbf{R}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)^T$ ein Gleichgewicht des Systems, so folgt wieder $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ und damit

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*).$$

Mit $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$ und $\tilde{\bullet}$ aus 2.4 ist

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und es ergibt sich

$$0 = \mathbf{e}_1^T \cdot \left(m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^* \right)^T \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*). \quad (5.24)$$

Der Vektor $\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*)$ ist nach Lemma (3.4.1) gegeben als

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*)}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2} \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 - \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3}{r_{33}} \right),$$

wobei $R^* = (r_{ij})_{ij}$ und $k > 0$ seien. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (-r_{32}, r_{31}, 0)^T \text{ und} \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (r_{33}, 0, -r_{31})^T, \end{aligned}$$

sodass man mit (5.24)

$$0 = \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*)}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2} \cdot \left(\frac{-r_{32}^2}{r_{33}^2} - 1 \right) = -k \cdot \alpha(\mathbf{R}^*) \quad (5.25)$$

erhält. Da $k > 0$ ist, muss also $\alpha(\mathbf{R}^*) = 0$ und somit $\mathbf{g}_F(\mathbf{R}^*) = \mathbf{0}$ sein. Insgesamt folgt also wie im Fall des Systems (3.29)

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^{*T} \boldsymbol{\gamma}.$$

Diese Bedingung liefert wieder das Gleichgewicht $(\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})^T$, welches im Gegensatz zum System (3.29) auf Grund der Bedingung $\alpha(\mathbf{R}^*) = 0$ ein isoliertes Gleichgewicht ist. Dies gilt ebenso für das andere Gleichgewicht $(\mathbf{R}_z(\frac{\pi}{2}), \mathbf{0})^T$.

5. Stabilitätsanalyse

Satz 5.2.5. *Die Funktion*

$$\varphi(t) = V(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) := \mathcal{T}(\mathbf{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} - m \cdot (\mathbf{R} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} \quad (5.26)$$

ist eine Ljapunov-Funktion für das System (3.29).

BEWEIS. Es sei

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{\Omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{\Omega}} \\ \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{\Omega} \times \mathbf{J} \mathbf{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}), \quad (5.27)$$

womit (3.29) auf die Form $\dot{q} = f(q)$ mit $q := (\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) \in G := SO(3) \times \mathbb{R}^3$ gebracht werden kann.

G ist eine Untermannigfaltigkeit des Hilbertraumes $H = \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt (5.7). Für die orbitale Ableitung der Ljapunov-Funktion (5.26) ergibt sich also mit der Bezeichnung $\Sigma := SO(3)$

$$\dot{\varphi} = \left((\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}, \nabla \mathcal{T}) \mid (\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{\Omega}})^T \right)_H = \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\mathbf{\Omega}} \right). \quad (5.28)$$

Es sei nun $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{R} \cdot \exp(\tilde{\mathbf{v}})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, mit der Abbildung $\tilde{\bullet}$ aus (2.4). Dann gilt mit der Darstellung des Flächengradienten (5.20), den Einträgen der Inversen \mathbf{C}^{-1} der ersten Fundamentalmatrix in (5.17) und der Linearität der Funktion \mathcal{V}

$$\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c^{ij} \partial_i (\mathcal{V}(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i, \quad (5.29)$$

wobei die Tangentenvektoren $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \in T_{\mathbf{R}} \Sigma$ wie in Beispiel (5.2.4) sind. Es folgt

$$\left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{R} \tilde{\mathbf{\Omega}} \right)_F = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{R} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right)_F.$$

Die $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i$ bilden nach (5.17) ein Orthogonalsystem bezüglich $(\cdot \mid \cdot)_F$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \Omega_j \cdot \mathbf{R} \boldsymbol{\tau}_j \right)_F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Omega_j \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\tau}}_j \right)_F \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Omega_i \cdot \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \right)_F = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \cdot \mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_i) \\ &= \mathcal{V} \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \right) = \mathcal{V}(\mathbf{R} \tilde{\mathbf{\Omega}}) \\ &= -m \cdot \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

5. Stabilitätsanalyse

unter Verwendung der Linearität der Funktion \mathcal{V} . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\mathbf{\Omega}} \right) &= \left(\mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mid \mathbf{J}^{-1}(-\mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma}) \right) \\ &= \left(\mathbf{\Omega}^T \mid -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega} + m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \right), \end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichung verwendet wird, dass \mathbf{J} eine Diagonalmatrix ist. Zudem stehen die Vektoren $\mathbf{\Omega}$ und $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega}$ senkrecht aufeinander, es gilt also $(\mathbf{\Omega}^T \mid \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\Omega}) = 0$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\mathbf{\Omega}} \right) &= m \cdot \mathbf{\Omega}^T \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} = m \cdot (-\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega})^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \\ &= m \cdot \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{\Omega}}^T \mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} \end{aligned}$$

und insgesamt erhält man somit

$$\dot{\varphi} = \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + \left(\nabla \mathcal{T} \mid \dot{\mathbf{\Omega}} \right) = 0. \quad (5.30)$$

Also ist die Gesamtenergie V des Systems eine Ljapunov-Funktion für das System (3.29). \square

Satz 5.2.6. *Es seien $\alpha(\mathbf{R}) = -\arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)$ und $k, d > 0$. Dann ist die Funktion*

$$\varphi(t) = V(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) := \mathcal{T}(\mathbf{\Omega}) + \mathcal{V}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} - m \cdot (\mathbf{R} \mathbf{X})^T \boldsymbol{\gamma} + \frac{k}{2} \cdot \alpha(\mathbf{R})^2 \quad (5.31)$$

eine strikte Ljapunov-Funktion für das System (3.41).

BEWEIS. Die Systeme (3.29) und (3.41) unterscheiden sich lediglich durch den Reibungsterm $d \cdot \mathbf{\Omega}$ und die Kraft \mathbf{g}_F in (3.34) voneinander. Auch die Funktionen V in (5.26) und (5.31) unterscheiden sich nur durch das Potential $\mathcal{V}_F := \frac{k}{2} \cdot \alpha(\mathbf{R})^2$. Um nun zu zeigen, dass V aus (5.31) eine Ljapunov Funktion für das erweiterte System (3.41) ist, genügt der Nachweis von

$$\left((\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F, \nabla \mathcal{T}) \mid (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{\Omega}}, -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{g}_F))^T \right)_H \leq 0. \quad (5.32)$$

unter Einbeziehung von Satz (5.2.5). Die rechte Seite \mathbf{f} für das System (3.41) findet man in (5.23).

Für den Oberflächengradienten $\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F$ ergibt sich

$$\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c^{ij} \partial_i (\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_i (\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\boldsymbol{\tau}}_i, \quad (5.33)$$

5. Stabilitätsanalyse

wobei ψ und $(\bar{\tau}_i)_{i=1}^k$ wie im Beweis von Satz (5.2.5) seien. Die partiellen Ableitungen $\partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0})))$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) &= \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)^2} \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \bar{\tau}_i) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \bar{\tau}_i) \mathbf{e}_2 \right) \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \mathbf{e}_2 \right) \\
&= -C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3) \mathbf{e}_i - \frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3^T(\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2) \mathbf{e}_i \right) \\
&= -C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_3^T \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_2^T \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right) \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_i^T(\tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right),
\end{aligned}$$

wobei $C(\mathbf{R})$ wie in Lemma (3.4.1) definiert ist. Damit erhält man nun

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \bar{\tau}_i \mid \mathbf{R} \tilde{\Omega} \right)_F \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Omega_i \cdot \partial_i(\mathcal{V}_F(\psi(\mathbf{0}))) \left(\bar{\tau}_i \mid \bar{\tau}_i \right)_F \\
&= C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot \Omega^T(\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{r_{33}} \cdot \Omega^T(\tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{e}_3 \right), \\
&= \Omega^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

mit der Definition von \mathbf{g}_F . Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathcal{T} \mid -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \Omega + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) &= -(\Omega^T \mathbf{J} \mid \mathbf{J}^{-1}(d \cdot \Omega + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) \\
&= -d \cdot \|\Omega\|_2^2 - \Omega^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R})
\end{aligned}$$

und somit letztlich

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \left(\nabla_{\Sigma} \mathcal{V}_F \mid \dot{\mathbf{R}} \right)_F + (\nabla \mathcal{T} \mid -\mathbf{J}^{-1}(d \cdot \Omega + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}))) \\
&= \Omega^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) - d \cdot \|\Omega\|_2^2 - \Omega^T \cdot \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = -d \cdot \|\Omega\|_2^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Somit ist V eine Ljapunov-Funktion und für $d > 0$ und $\Omega \neq \mathbf{0}$ ist V sogar streng fallend, da $\dot{\varphi} < 0$ gilt. Angenommen, φ ist in einem nichttrivialen Intervall (a, b) nicht streng fallend. Dann gilt $\dot{\varphi}(t) = 0$ für jedes $t \in (a, b)$ und somit nach (5.34) $\Omega(t) \equiv \mathbf{0}$. Damit gilt dann auch $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R} \equiv \text{const.}$ in (a, b) . Da dann auch $\dot{\Omega}(t) \equiv \mathbf{0}$ in (a, b) gilt, folgt

$$\mathbf{0} = m \cdot \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}^T \gamma + \mathbf{g}_F(\mathbf{R}). \tag{5.35}$$

5. Stabilitätsanalyse

Nach (5.25) ist dann aber schon $\alpha(\mathbf{R}) = 0$ und $(\mathbf{R}, \mathbf{0})^T$ muss bereits ein Gleichgewichtspunkt des Systems sein. Somit ist also V eine strikte Ljapunov-Funktion für (3.41). \square

Korollar 5.2.7. *Das Element $q^* := (\mathbf{R}^*, \mathbf{\Omega}^*)^T := (\mathbf{R}_z(-\frac{\pi}{2}), \mathbf{0}_{3 \times 1})^T \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ ist ein stabiles Gleichgewicht des Systems (3.29).*

BEWEIS. Nach Satz (5.2.5) ist die in (5.26) angegebene Funktion V eine Ljapunov-Funktion für (3.29). Um Satz (5.2.2) anwenden zu können, muss also nur noch gezeigt werden, dass V in einer Umgebung von q^* positiv definit ist.

Die kinetische Energie $\mathcal{T}(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} \geq 0$ wird für $\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ minimal. Die potenzielle Energie nimmt ihr Minimum an, wenn $\mathbf{R}\mathbf{X} = a * \boldsymbol{\gamma}$ für ein $a \geq 0$ gilt. Für $\boldsymbol{\gamma} = \gamma \cdot \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{X} = \mathbf{e}_x^T$ ergibt sich

$$\mathbf{R}^* \mathbf{X} = \mathbf{R}_z \left(-\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{e}_y = -\gamma^{-1} \boldsymbol{\gamma}.$$

Somit ist $V(q^*)$ ein striktes Minimum von V und V somit positiv definit in einer Umgebung von q^* . Nach Satz (5.2.2) ist q^* stabil. \square

Bemerkung. *Darstellung in lokalen Koordinaten.*

Die Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichtspunkten autonomer Systeme der Form (5.9) mit Ljapunov-Funktionen gestaltet sich dahingehend schwierig, dass man zunächst eine Ljapunov-Funktion finden muss. Zudem macht Satz (5.2.2) keine Aussagen zur Instabilität von Gleichgewichten. Aufschlussreicher kann es daher sein, das System in lokalen Koordinaten zu schreiben.

Im Folgenden bezeichne $*$ die Hintereinanderausführung von Abbildungen. Seien $q_0 \in G$ und $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{y}_0) = q_0$ und einer Umgebung U_0 von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$. Sei weiter $\mathbf{y}(t) := \psi^{-1}(q(t))$ für $t \in (a, b)$, wobei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein hinreichend kleines Intervall sei, sodass $0 \in I$ ist und $\mathbf{y}(t) \in U_0$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. Damit gilt

$$q(t) = \psi(\mathbf{y}(t))$$

und durch Differentiation nach t ergibt sich

$$D\psi(\mathbf{y}(t))(\dot{\mathbf{y}}(t)) = \dot{q} = \mathbf{f}(q) = \mathbf{f}(\psi(\mathbf{y}(t))). \quad (5.36)$$

5. Stabilitätsanalyse

Die Abbildung $D\psi(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\psi(\mathbf{y})}G$ ist ein Isomorphismus von \mathbb{R}^k auf den Tangentialraum $T_{\psi(\mathbf{y})}G$ in $\psi(\mathbf{y}(t))$ an G . Genauer gilt mit zugehörigen Tangentenvektoren definiert wie in (5.12)

$$D\psi(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^k v^i \cdot \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t))) \quad (5.37)$$

mit kontravarianten Komponenten $\mathbf{v} := (v^1, \dots, v^k) \in \mathbb{R}^k$. Ist nun f ein Tangentenvektorfeld an G , also $\mathbf{f}(q) \in T_q G$ für alle $q \in G$, so erhält man ebenso eine Darstellung

$$\mathbf{f}(q(t)) = (\mathbf{f} * \psi)(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^k (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t))) \quad (5.38)$$

in kontravarianten Komponenten $(f^i * \psi)(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Die Darstellungen (5.37) und (5.38) liefern zusammen mit (5.36)

$$\sum_{i=1}^k \dot{y}^i(t) \cdot \bar{\tau}_i = D\psi(\mathbf{y}(t))(\dot{\mathbf{y}}(t)) = (\mathbf{f} * \psi)(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^k (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i \quad (5.39)$$

mit $\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_i(\psi(\mathbf{y}(t)))$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Da die $\bar{\tau}_i$ eine Basis von $T_{\psi(\mathbf{y})}G$ bilden, sind die Komponenten $\dot{\mathbf{y}}^i$ und f^i eindeutig bestimmt. Daher folgt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Gleichheit

$$\dot{y}^i(t) = (f^i * \psi)(\mathbf{y}(t)). \quad (5.40)$$

Seien nun q^* ein Gleichgewichtspunkt von (5.9) und ψ so, dass $\psi(\mathbf{0}) = q^*$ ist. Dann ist das System (5.9) in einer Umgebung von $q^* \in G$ äquivalent zum System (5.40) in lokalen Koordinaten und das Gleichgewicht q^* entspricht $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$. Die Untersuchung der Stabilität von q^* kann daher stattdessen für den Punkt \mathbf{y}^* bezüglich des Systems (5.40) durchgeführt werden.

Das zu (5.40) gehörige linearisierte System lautet

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{A} := (a_{ij})_{ij} = (\partial_j (f^i * \psi)(\mathbf{0}))_{ij}. \quad (5.41)$$

Um die Stabilität von $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ wie im linearen Fall anhand der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} untersuchen zu können, müssen diese Eigenwerte natürlich unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ sein. Dies wird im Folgenden gezeigt.

5. Stabilitätsanalyse

Lemma 5.2.8. *Es seien $q^* \in G$ ein Gleichgewicht von (5.9) und $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow G$ eine Parametrisierung von G mit $\psi(\mathbf{0}) = q^*$. Dann sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{ij} = (\partial_j(f^i * \psi)(\mathbf{0}))_{ij}$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung ψ .*

BEWEIS. Es seien $U_0^{(1)}, U_0^{(2)} \subset \mathbb{R}^k$ offene Umgebungen von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$, auf denen Parametrisierungen $\psi_i : U_0^{(i)} \rightarrow G$, $i \in \{1, 2\}$ von G mit $\psi_i(\mathbf{0}) = q^*$ definiert seien. Dann gilt $U_0^{(1)} \cap U_0^{(2)} \neq \emptyset$ und es existiert eine Umgebung $U \subset U_0^{(1)} \cap U_0^{(2)}$ so, dass die Abbildung $\Psi := \psi_1^{-1} * \psi_2|_U$ wohldefiniert ist. Zudem ist $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus. Für alle $\mathbf{y} \in U$ gilt dann

$$\psi_2(\mathbf{y}) = (\psi_1 * \Psi)(\mathbf{y}). \quad (5.42)$$

Ferner existiert ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{y}(t) := \psi_2^{-1}(q(t)) \in U$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. Dies führt wie zuvor in (5.40) auf eine lokale Darstellung des Systems (5.9)

$$\dot{\mathbf{y}}^i(t) = (f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t)), \quad i \in \{1, \dots, k\}. \quad (5.43)$$

Dabei bezeichnen f_2^i die kontravarianten Komponenten von \mathbf{f} bezüglich der Basis $\bar{\tau}_i^{(2)} := \partial_i \psi_2(\mathbf{y}(t))$. Ebenso erhält man mit $\mathbf{x}(t) := \psi_1^{-1}(q(t))$ eine Darstellung

$$\dot{\mathbf{x}}^i(t) = (f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)), \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad (5.44)$$

wobei die f_1^i hier bezüglich der Basis $\bar{\tau}_i^{(1)} := \partial_i \psi_1(\mathbf{x}(t))$ definiert seien. Es soll nun eine Beziehung zwischen den Komponenten f_1^i und f_2^i hergeleitet werden. Mit der Definition von Ψ erhält man

$$\Psi(\mathbf{y}(t)) = (\psi_1^{-1} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) = (\psi_1^{-1} * \psi_2 * \psi_2^{-1})(q(t)) = \psi_1^{-1}(q(t)) = \mathbf{x}(t).$$

Weiter gilt mit (5.42) und der Bezeichnung $D\Psi(\mathbf{y}(t)) = (p_{ji})_{ij}$

$$\bar{\tau}_i^{(2)} = \partial_i \psi_2(\mathbf{y}(t)) = \partial_i \psi_1(\Psi(\mathbf{y}(t))) = D\psi_1(\mathbf{x}(t))(\partial_i \Psi(\mathbf{y}(t))) = \sum_{j=1}^k p_{ji} \bar{\tau}_j^{(1)}$$

und mit (5.42) folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) &= \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) \cdot \bar{\tau}_i^{(2)} = \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \bar{\tau}_i^{(2)} \\ &= \sum_{i=1}^k (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \sum_{j=1}^k p_{ji} \bar{\tau}_j^{(1)} \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k p_{ji} (f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) \cdot \bar{\tau}_j^{(1)}. \end{aligned}$$

5. Stabilitätsanalyse

Da aber auch

$$(\mathbf{f} * \psi_2)(\mathbf{y}(t)) = (\mathbf{f} * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^k (f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) \cdot \bar{\tau}_i^{(1)}$$

gilt, folgt somit die Gleichheit

$$(f_1^i * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^k p_{ji}(f_2^i * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}(t))) = \sum_{i=1}^k p_{ji}(f_2^i * \psi_2)(\mathbf{y}(t))$$

oder in Matrixschreibweise

$$(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{x}(t)) = D\Psi(\mathbf{y}(t)) \cdot (\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y}(t))$$

mit $\mathbf{f}_1 := (f_1^1, \dots, f_1^k)$ und $\mathbf{f}_2 := (f_2^1, \dots, f_2^k)$. Die Matrix $D\Psi(\mathbf{y}(t))$ ist invertierbar, da Ψ ein Diffeomorphismus ist. Durch Differentiation von $(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y})$ nach \mathbf{y} ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} &= D_{\mathbf{y}} [D\Psi(\mathbf{y})^{-1} \cdot (\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y}))] \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \\ &= D\Psi(\mathbf{0})^{-1} \cdot D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{y})) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \\ &= D\Psi(\mathbf{0})^{-1} \cdot D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \cdot D\Psi(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich dabei unter Verwendung von $(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\Psi(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$. Die Linearisierung $D_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}_2 * \psi_2)(\mathbf{0})$ bezüglich ψ_2 geht also durch Ähnlichkeitstransformation mit $D\Psi(\mathbf{0})$ aus $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}_1 * \psi_1)(\mathbf{0})$ hervor und besitzt damit die gleichen Eigenwerte. \square

Satz 5.2.9 (Linearisierte Stabilität). *Es seien $f : G \rightarrow TG$ stetig differenzierbar und $q^* \in G$ mit $f(q^*) = 0$. Sei die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q^*)$ wie in (5.41). Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} , so ist q^* asymptotisch stabil für (5.9) in G .*
2. *Gilt $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für einen Eigenwert λ von \mathbf{A} , so ist q^* instabil für (5.9) in G .*

Bemerkung. Satz (5.2.9) trifft in bestimmten Fällen keine Aussage für Gleichgewichte $q^* \in G$, für welche mindestens ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(q^*)$ mit

5. Stabilitätsanalyse

$\operatorname{Re} \lambda = 0$ existiert. Dies führt auf die folgende Definition für jene Art Gleichgewichte, welche mittels (5.2.9) vollständig behandelt werden können.

Definition. *Es seien q^* ein Gleichgewichtspunkt des autonomen Systems (5.9) und $\mathbf{A} := \mathbf{A}(q^*)$ die Jacobimatrix des Systems in lokalen Koordinaten (5.40). Der Punkt q^* heißt **hyperbolischer Gleichgewichtspunkt** des Systems (5.9) genau dann, wenn $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} gilt.*

Kapitel 6

Numerische Tests

Kapitel A

Iterationsmatrizen

$$\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) = C(\mathbf{R}) \cdot \left(\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3}{r_{33}} \right), \quad (\text{A.1})$$

mit

$$C(\mathbf{R}) := \frac{k \cdot \alpha(\mathbf{R})}{1 + \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right)^2}, \quad \alpha(\mathbf{R}) := -\arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right). \quad (\text{A.2})$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (-r_{32}, r_{31}, 0)^T \text{ und} \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \mathbf{R}^{*T} \mathbf{e}_3 &= (r_{33}, 0, -r_{31})^T, \end{aligned}$$

und damit kann man $\mathbf{g}_F(\mathbf{R})$ komponentenweise schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_F(\mathbf{R}) &= C(\mathbf{R}) \cdot \left[\frac{r_{32}}{r_{33}^2} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)^T - \frac{1}{r_{33}} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31})^T \right] \\ &= C(\mathbf{R}) \cdot \left[-\left(\frac{r_{32}^2}{r_{33}^2} + 1 \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{33}^2} \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{r_{31}}{r_{33}} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \\ &= k \cdot \alpha(\mathbf{R}) \cdot \left[-\mathbf{e}_1 + \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_2 + \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_3 \right] \\ &=: c_1(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_1 + c_2(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_2 + c_3(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass

$$D\mathbf{g}_F(\mathbf{R}) \cdot (D\mathbf{L}_R(\mathbf{I}) \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{K}_F \cdot \mathbf{w}$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Sei wieder $\delta\Theta \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\delta\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \widetilde{\delta\Theta}$ ist. Dann sind die Zeilen von \mathbf{K}_F Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$Dc_i((\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\widetilde{\delta\Theta})) = \mathbf{v}_i^T \cdot \delta\Theta, \quad i \in \{1, \dots, 3\}, \quad (\text{A.3})$$

A. Iterationsmatrizen

gilt. Diese Vektoren \mathbf{v}_i sollen im Folgenden bestimmt werden. Die Berechnung von \mathbf{v}_1 verläuft analog zur Berechnung von \mathbf{g}_F , vergleiche dazu Lemma (3.4.1).

$$\begin{aligned}
\delta c_1(\mathbf{R}) &= -k \cdot \delta \alpha(\mathbf{R}) = -k \cdot \delta \left(-\arctan \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \right) \\
&= -k \cdot \left[-\mathbf{e}_1 + \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_2 + \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{e}_3 \right]^T \cdot \delta \Theta \\
&= \mathbf{v}_1^T \cdot \delta \Theta
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Eine ähnliche Rechnung liefert \mathbf{v}_2 unter Verwendung von \mathbf{v}_1 .

$$\begin{aligned}
\delta c_2(\mathbf{R}) &= \delta \left(-c_1(\mathbf{R}) \cdot \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \right) = -(\delta c_1(\mathbf{R})) \cdot \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} - c_1(\mathbf{R}) \cdot \delta \frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \\
&= -\frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta \Theta \\
&\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (\delta r_{32} \cdot r_{31} + r_{32} \cdot \delta r_{31}) \\
&\quad - c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{32} \cdot r_{31} \cdot \delta ((r_{32}^2 + r_{33}^2)^{-1}) \\
&= -\frac{r_{32} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta \Theta \\
&\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (r_{31} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{32} \cdot (0, -r_{33}, r_{32})) \delta \Theta \\
&\quad + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{32} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} (r_{32} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{33} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)) \delta \Theta \\
&= \mathbf{v}_2^T \cdot \delta \Theta
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Die Berechnung von \mathbf{v}_3 verläuft analog zu der von \mathbf{v}_2 .

$$\begin{aligned}
\delta c_3(\mathbf{R}) &= \delta \left(-c_1(\mathbf{R}) \cdot \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \right) = -(\delta c_1(\mathbf{R})) \cdot \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} - c_1(\mathbf{R}) \cdot \delta \frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \\
&= -\frac{r_{33} \cdot r_{31}}{r_{32}^2 + r_{33}^2} \mathbf{v}_1^T \cdot \delta \Theta \\
&\quad - \frac{c_1(\mathbf{R})}{r_{32}^2 + r_{33}^2} (r_{31} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0) + r_{33} \cdot (0, -r_{33}, r_{32})) \delta \Theta \\
&\quad + \frac{2c_1(\mathbf{R}) \cdot r_{33} \cdot r_{31}}{(r_{32}^2 + r_{33}^2)^2} (r_{32} \cdot (r_{33}, 0, -r_{31}) + r_{33} \cdot (-r_{32}, r_{31}, 0)) \delta \Theta \\
&= \mathbf{v}_3^T \cdot \delta \Theta
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Arnold, A. Cardona und O. Brüls. *A Lie algebra approach to Lie group time integration of constrained systems*. Techn. Ber. 01. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik, 2015.
- [2] M. Arnold und S. Hante. „Implementation details of a generalized- α DAE Lie group method“. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* (2016). DOI: 10.1115/1.4033441.
- [3] O. Brüls, M. Arnold und A. Cardona. „Two Lie group formulations for dynamic multibody systems with large rotations“. In: *Proceedings of IDETC/MSNDC 2011, ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences*. Washington, USA, 2011.
- [4] O. Brüls und A. Cardona. „On the Use of Lie Group Time Integrators in Multibody Dynamics“. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* Vol. 5 (Juli 2010).
- [5] O. Brüls, A. Cardona und M. Arnold. „Lie group generalized- α time integration of constrained flexible multibody systems“. In: *Mechanism and Machine Theory* 48 (2012), S. 121–137.
- [6] J. Chung und G. Hulbert. „A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method“. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), S. 371–375. DOI: 10.1115/1.2900803.
- [7] S. Erlicher, L. Bonaventura und O. Bursi. „The analysis of the Generalized- α method for non-linear dynamic problems“. In: *Computational Mechanics* 28 (2002), S. 83–104. DOI: 10.1007/s00466-001-0273-z.
- [8] E. Hairer, C. Lubich und G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2004.
- [9] E. Hairer und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 2nd edition. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1996.

- [10] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2. Analytische Mechanik*. 9. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
- [11] J. W. Pruess und G. Simonett. *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*. Bd. 105. Monographs in Mathematics. Birkhäuser-Verlag, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-27698-4.
- [12] J. W. Prüß und M. Wilke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme*. Birkhäuser-Verlag, 2010.
- [13] I. Romero und M. Arnold. „Computing with Rotations: Algorithms and Applications“. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. Hrsg. von E. Stein, R. de Borst und T.J.R. Hughes. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2018, S. 1–27. DOI: 10.1002/9781119176817.ecm2119.
- [14] W. Schiehlen und P. Eberhard. *Technische Dynamik. Modelle für Regelung und Simulation*. 2. Auflage. Stuttgart Leipzig Wiesbaden: Teubner-Verlag, 2004.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Diese Arbeit wurde noch nicht in gleicher oder ähnlicher Fassung in einem anderen Studiengang als Prüfungsleistung vorgelegt.

Halle (Saale), den 07.10.2019
Alexander S. J. Klemps