```
In [1]: import numpy as np

        %matplotlib inline
```

## Системы линейных уравнений. Часть 1

### 1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

**Решение:**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 2 \\ - \\ \phantom{0} \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) = \quad 3-1$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{array}$$

Для получения частного решения примем $x_4 = 0$

$x_3 = -2$

$-x_2 - 2 = -2 \qquad x_2 = 0$

$x_1 + 0 + 2 = 0 \qquad x_1 = -2$

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$ при $x_4 = 0$

In [2]:
```
# Проверка
a = np.array([[1., 1., -1.], [2., 1., -1.], [1., 1., -3.]])
b = np.array([0., -2., 4.])

c = np.linalg.solve(a, b)
print(c)
```

```
[-2.  0. -2.]
```

### 2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

**Решение:**

$$\text{а)}\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & | & 4\\ 2 & -5 & -3 & | & -17\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\overset{2\cdot(1),\ (2)\cdot 3}{=}\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & | & 8\\ 6 & -15 & -9 & | & -51\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\overset{(1)-(2)}{=}\begin{pmatrix}0 & 13 & 11 & | & 59\\ 2 & -5 & -3 & | & -17\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\overset{(2)-(3)\cdot 2}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 13 & 11 & | & 59\\ 0 & -7 & -1 & | & -17\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\overset{(1)\cdot 7,\ (2)\cdot 13}{=}\begin{pmatrix}0 & 91 & 77 & | & 413\\ 0 & -91 & -13 & | & 221\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}\overset{(1)+(2)}{=}\begin{pmatrix}0 & 0 & 64 & | & 634\\ 0 & -7 & -1 & | & -17\\ 1 & 1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}$$

Система совместна и имеет единственное решение.

$$\text{б)}\begin{pmatrix}2 & -4 & 6 & | & 1\\ 1 & -2 & 3 & | & -2\\ 3 & -6 & 9 & | & 5\end{pmatrix}$$

Система несовместна, т.к. векторы коэффициентов линейно зависимы, а вектора свободных членов не принадлежит одномерному подпростр.

$$\text{в)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & | & 4\\ 3 & 1 & -8 & | & -2\end{pmatrix}$$

Система совместна и имеет бесконечное количество решений, т.к. кол-во уравнений меньше числа неизвестных и векторы свободных членов линейно независимы.

### 3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right).$$

**Решение:**

$rank\tilde{A} = 4$, $rankA = 4$ => система совместна.

Система имеет единственное решение, т. к. количество неизвестных совпадает с количеством уравнений

### 4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами $a$, $b$ и $c$, при которых система является несовместной.

**Решение:**

$(3) - (1) \times 7 \qquad (2) - (1) \times 4$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) =$$

$(3) \times 2 + (2) \times 4$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & (c-7a)\cdot 2-(b-4a)\cdot 4 \end{array}\right)$$

Система будет несовместно в случае, если $\operatorname{rank} \tilde{A} > \operatorname{rank} A$.

Тогда $(c-7a)\cdot 2-(b-4a)\cdot 4 = 0$

$c - 7a - 2b + 8a = 0$

$a - 2b + c = 0$

$a = 2b - c$

$b = \dfrac{a-c}{2}$

$c = 2b - a$

## Системы линейных уравнений. Часть 2

### 1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

**Решение:**

CreateSomething ( , )

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10 \qquad x_1 = \frac{10}{2} = 5$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \qquad x_2 = \frac{4}{2} = 2$

б) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 2(1+12) + 1 + 20 + 2(3-5) = 26 + 21 - 4 = 43$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10(1+12) + 2(-1-20) + (3-5) = 130 - 42 - 2 = 86$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2+3) - (10-5) + 2(-30+10) = 2 - 5 - 40 = -43$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+8) - (-1-40) + 2(2-10) = 18 + 41 - 16 = 43$

$x_1 = \frac{86}{43} = 2; \quad x_2 = \frac{-43}{43} = -1; \quad x_3 = \frac{43}{43} = 1$

**2*. Найти $L$-матрицу $LU$-разложения для матрицы коэффициентов:**

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$

**Решение:**

CreateSomething ( ______ , ______ )

{

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \overset{(2)-(1)\times 2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\times 3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \overset{(3)-(2)\times 4}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$б)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \overset{(2)-(1)\times 2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \overset{(3)-(1)\times 3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \overset{(4)-(1)\times 4}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)-(2)\times 5}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \overset{(4)-(2)\times 6}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \overset{\cancel{(2)-(1)\times 3}}{=} \begin{pmatrix} \cancel{1 \quad 1 \quad 2 \quad 4} \\ \cancel{0 \quad 0 \quad 2 \quad 11} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \overset{(4)-(3)\times 7}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

}

NAUMEN