

# **Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik**

Sommersemester 2022

**Alexander Lampe, Markus Süß, Hongwei Xu**

Hochschule Mittweida

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Physikalische Größen, Einheiten, Gleichungen</b>	<b>6</b>
1.1 Physikalische Größen . . . . .	7
1.2 Das internationale Einheitensystem . . . . .	10
1.3 Abgeleitete Einheiten . . . . .	11
<b>2 Das elektrische Feld</b>	<b>16</b>
2.1 Die elektrische Ladung . . . . .	17
2.2 Die elektrische Feldstärke . . . . .	25
2.3 Die elektrische Spannung . . . . .	59
2.4 Das elektrostatische Potential . . . . .	66
2.5 Die elektrische Flussdichte . . . . .	69
2.6 Berechnung elektrostatischer Felder . . . . .	80
2.6.1 Das Feld der geladenen Kugel . . . . .	81
2.6.2 Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen . . . . .	85
2.6.3 Das Feld eines geladenen langen, geraden Leiters . . . . .	88
2.7 Die elektrische Kapazität . . . . .	95
2.7.1 Kapazität des Plattenkondensators . . . . .	98
2.7.2 Kapazität des Kugelkondensators . . . . .	100
2.7.3 Kapazität des Zylinderkondensators . . . . .	102
2.7.4 Zusammenschaltung von Kondensatoren . . . . .	104
2.8 Die Energie des elektrischen Feldes . . . . .	108
2.9 Das elektrische Strömungsfeld . . . . .	121

---

2.9.1 Die elektrische Stromdichte . . . . .	122
2.9.2 Die elektrische Stromstärke . . . . .	129
2.10 Das Ohmsche Gesetz . . . . .	137
2.11 Energie und Leistung im elektrischen Leiter . . . . .	145
<b>3 Das magnetische Feld</b>	<b>148</b>
3.1 Die magnetische Feldstärke . . . . .	151
3.2 Die magnetische Spannung . . . . .	176
3.3 Die magnetische Flussdichte . . . . .	178
3.4 Der magnetische Fluss . . . . .	186
3.5 Die elektromagnetische Spule und Induktivität . . . . .	190
3.6 Kräfte im magnetischen Feld - Lorentzkraft . . . . .	197
3.6.1 Bewegte Ladung im Magnetfeld . . . . .	199
3.6.2 Stromführender ruhender Leiter im Magnetfeld . . . . .	201
3.6.3 Stromführende Leiter . . . . .	203
3.7 Die elektromagnetische Induktion . . . . .	205
3.7.1 Induktion in bewegten Leitern . . . . .	206
3.7.2 Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder . . . . .	211
3.7.3 Das Induktionsgesetz . . . . .	215
3.8 Die Strom-Spannungs-Beziehung einer Spule . . . . .	218
3.9 Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator . . . . .	220
3.10 Zusammenschaltung von Spulen . . . . .	231
3.11 Die Energie des magnetischen Feldes . . . . .	233
3.12 Vergleich magnetischer Kreis und elektrischer Kreis . . . . .	241

---

<b>4 Gleichstromkreise</b>	<b>242</b>
4.1 Grundbegriffe . . . . .	244
4.2 Die Kirchhoff'schen Gesetze . . . . .	248
4.3 Die Berechnung von Gleichstromkreisen . . . . .	254
4.3.1 Reihenschaltung von Widerständen . . . . .	255
4.3.2 Parallelschaltung von Widerständen . . . . .	258
4.3.3 Stern-Dreieck-Transformation . . . . .	263
4.3.4 Beschreibung von Netzwerken als Graphen . . . . .	269
4.3.5 Umlauf- und Knotenverfahren/Maschenstromverfahren . . . . .	274
4.3.6 Knotenspannungs-/Knotenpotentialverfahren . . . . .	284
4.4 Netzwerk-Theoreme . . . . .	292
4.4.1 Der Überlagerungssatz . . . . .	292
4.4.2 Satz von der Ersatzspannungsquelle . . . . .	297
4.4.3 Satz von der Ersatzstromquelle . . . . .	304
4.4.4 Satz von der Leistungsanpassung . . . . .	308
<b>5 Der Wechselstromkreis</b>	<b>318</b>
5.1 Periodische Signale . . . . .	319
5.2 Harmonische Wechselgrößen und ihre Darstellung . . . . .	322
5.3 Parameter zeitlich veränderlicher Größen . . . . .	327
5.4 Die Zeigerdarstellung von Sinusgrößen . . . . .	337
5.5 Die komplexe Wechselstromrechnung . . . . .	339
5.5.1 Die Transformation der Kirchhoff'schen Gesetze . . . . .	340
5.5.2 Die Transformation linearer Netzwerkelemente . . . . .	349

---

5.5.1 Netzwerk mit ohmschem Widerstand . . . . .	352
5.5.2 Netzwerk mit idealer Induktivität . . . . .	356
5.5.3 Netzwerk mit idealer Kapazität . . . . .	360
5.5.4 Übersicht . . . . .	365
5.5.5 Beispiele . . . . .	368
5.5.6 Graphisches Lösungsverfahren . . . . .	383
<b>A Netzwerke als Zweitore</b>	<b>387</b>

# 1 Physikalische Größen, Einheiten, Gleichungen

---

Zur Beschreibung von Naturvorgängen sind zahlreiche **physikalische Größen** definiert worden.

- Länge  $\ell$
- Zeit  $t$
- Geschwindigkeit  $v$
- elektrische Spannung  $U$
- Temperatur  $T$

Zur Messung und Darstellung von physikalischen Größen benötigt man **Einheiten**

- Länge: Meter “m”, Zentimeter “cm” oder Millimeter “mm”
- Zeit: Stunde “h” oder Sekunde “s”.

Jede physikalische Größe kann durch ein Produkt aus Maßzahl (Zahlenwert) und Einheit dargestellt werden:

$$\ell = 5 \text{m}$$

so ist  $\ell$  die **physikalische Größe** (Länge), 5 die **Maßzahl** und **m** die **Einheit** (Meter).

## 1.1 Physikalische Größen

Physikalische Größen kann man klassifizieren als

- Skalare:

Skalare sind durch eine Maßzahl (Zahlenwert) mit Maßeinheit gekennzeichnet.

Beispiele sind Masse, Temperatur, ...

- Vektoren:

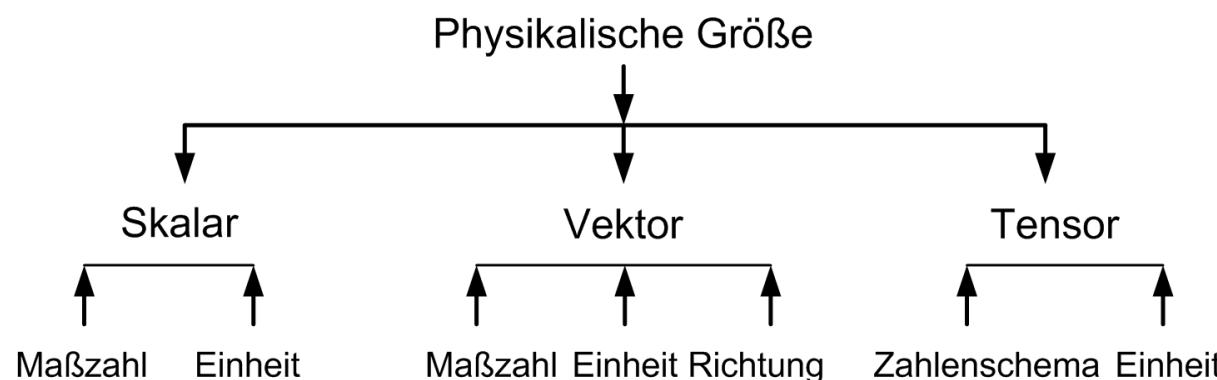
Vektoren besitzen eine Maßzahl (Betrag) mit Maßeinheit und eine Richtung.

Beispiele sind Geschwindigkeit, Kraft, elektrisches Feld, ...

- Tensoren:

Tensoren besitzen Maßzahlen und zwei oder mehrere Richtungen.

Beispiele sind die magnetische und elektrische Suszeptibilität ( $\chi_{ij}$ )



## Physikalische Größen

---

**Beispiel - Vektor:**

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_N)^T, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

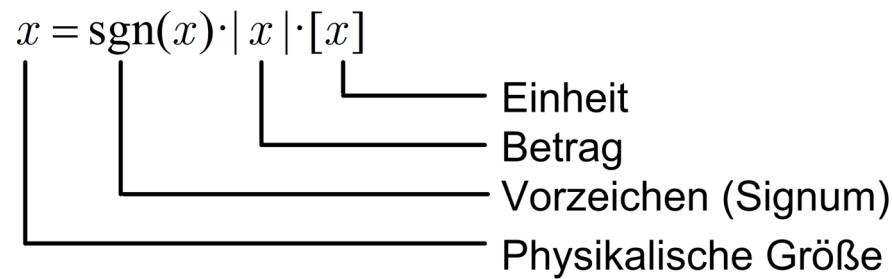
$a_i$  kennzeichnet die Länge (Stärke) des Vektors in der  $i$ -ten Richtung (Dimension). Die Gesamtlänge des Vektors  $\vec{a}$  ist sein Betrag  $|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_N^2}$$

# Physikalische Größen

Aufbau von Größengleichungen:

**Physikalische Größe = Maßzahl mit Maßeinheit**



Beispiel:

**Größengleichungen:**

$$v = \frac{s}{t} = \frac{120\text{m}}{60\text{s}} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Physikalische Größen:**

- $v$  : Geschwindigkeit
- $s$  : Weg
- $t$  : Zeit

## 1.2 Das internationale Einheitensystem

---

In Technik, Forschung und Wissenschaft werden, ebenso wie auch in Wirtschaft, Handel und Gewerbe, überwiegend SI-Einheiten verwendet.

SI ist die Abkürzung für **International System of Units** (internationales Einheitensystem). Dieses international vereinbarte Einheitensystem enthält die in der folgenden Tabelle angegebenen sieben **Basiseinheiten**, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie willkürlich festgelegt sind und nicht aus anderen Einheiten abgeleitet werden.

Basisgröße	Basiseinheit	Kurzzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

## 1.3 Abgeleitete Einheiten

---

Von den SI-Basiseinheiten werden alle übrigen SI-Einheiten abgeleitet. Man bezeichnet sie als **abgeleitete Einheiten**.

Beispiele:

1. Kraft = Masse mal Beschleunigung  $\Rightarrow F = m \cdot a$

$$F = m \cdot a = 1\text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{Newton} = 1\text{N}$$

Die Kraft 1 Newton (= 1N) bewirkt bei der Masse 1 Kilogramm (= 1kg) eine Beschleunigung von 1m/s<sup>2</sup>.

2. Arbeit = Kraft mal Weg  $\Rightarrow W = F \cdot s$

$$W = F \cdot s = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = 1\text{Nm} = 1\text{Joule} = 1\text{J}$$

Es muss eine Arbeit von 1 Joule aufgewandt werden, wenn ein Körper mit der Kraft 1 Newton (= 1N) um 1 Meter (= 1m) verschoben wird.

## Abgeleitete Einheiten

---

$$3. \text{ Leistung} = \text{Arbeit pro Zeit} \Rightarrow P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1\text{Nm}}{1\text{s}} = \frac{1\text{J}}{1\text{s}} = 1\text{Watt} = 1\text{W}$$

**Merke:**

**Abgeleitete Einheiten werden mittels Definitionsgleichungen, die Größengleichungen sind, definiert.**

Kraft  $F$  in Newton N

$$F = m \cdot a \longrightarrow$$

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$a$  : Beschleunigung

$m$  : Masse

Arbeit  $W$  in Joule J

$$W = F \cdot s \longrightarrow$$

$$1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m}$$

$s$  : Weg

Leistung  $P$  in Watt W

$$P = W/t \longrightarrow$$

$$1\text{W} = \frac{1\text{J}}{1\text{s}}$$

$t$  : Zeit

Spannung  $U$  in Volt V

$$U = P/I \longrightarrow$$

$$1\text{V} = \frac{1\text{W}}{1\text{A}}$$

$I$  : Strom

Widerstand  $R$  in Ohm  $\Omega$

$$R = U/I \longrightarrow$$

$$1\Omega = \frac{1\text{V}}{1\text{A}}$$

## Abgeleitete Einheiten

---

Wenn eine Einheit eine ungünstige Größenordnung hat, verwendet man dezimale Vielfache oder dezimale Teile. Beispielsweise kann man für eine Länge von  $s = 10000\text{m}$  besser  $s = 10\text{km}$  schreiben.

Vorsatz	Kurzzeichen	Multiplikator	Vorsatz	Kurzzeichen	Multiplikator
Deka	da	$10^1$	Dezi	d	$10^{-1}$
Hekto	h	$10^2$	Zenti	c	$10^{-2}$
Kilo	k	$10^3$	Milli	m	$10^{-3}$
Mega	M	$10^6$	Mikro	$\mu$	$10^{-6}$
Giga	G	$10^9$	Nano	n	$10^{-9}$
Terra	T	$10^{12}$	Pico	p	$10^{-12}$
Peta	P	$10^{15}$	Femto	f	$10^{-15}$
Exa	E	$10^{18}$	Atto	a	$10^{-18}$
Zetta	Z	$10^{21}$	Zepto	z	$10^{-21}$
Yotta	Y	$10^{24}$	Yokto	y	$10^{-24}$

Vorsatzeichen werden ohne Zwischenraum vor das Einheitszeichen geschrieben

$$1\text{cm}^3 = 1 \cdot (10^{-2}\text{m})^3 = 1 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 \quad 1(\mu\text{s})^{-1} = \frac{1}{1\mu\text{s}} = \frac{1}{10^{-6}\text{s}} = 10^6\text{s}^{-1} = 10^6\text{Hz} = 1\text{MHz}$$

Mehrere Vorsätze dürfen nicht zusammengeschrieben werden:

$$1 \cdot 10^{-9}\text{m} = 1\text{nm} \quad \text{und nicht} \quad = 1\text{m}\mu\text{m} \quad (= \text{Milli-Mikro-Meter})$$

## Abgeleitete Einheiten

---

Vorsätze werden vorzugsweise so gewählt, dass die Zahlenwerte zwischen 0,1 und 1000 liegen:

12kN statt  $1,2 \cdot 10^4 \text{ N}$

31ns statt  $3,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

Produkte und Quotienten von Einheiten können in folgender Weise dargestellt werden:

$\text{N} \cdot \text{m}$  oder  $\text{Nm}$

$\frac{\text{m}}{\text{s}}$  oder  $\text{m/s}$  oder  $\text{ms}^{-1}$

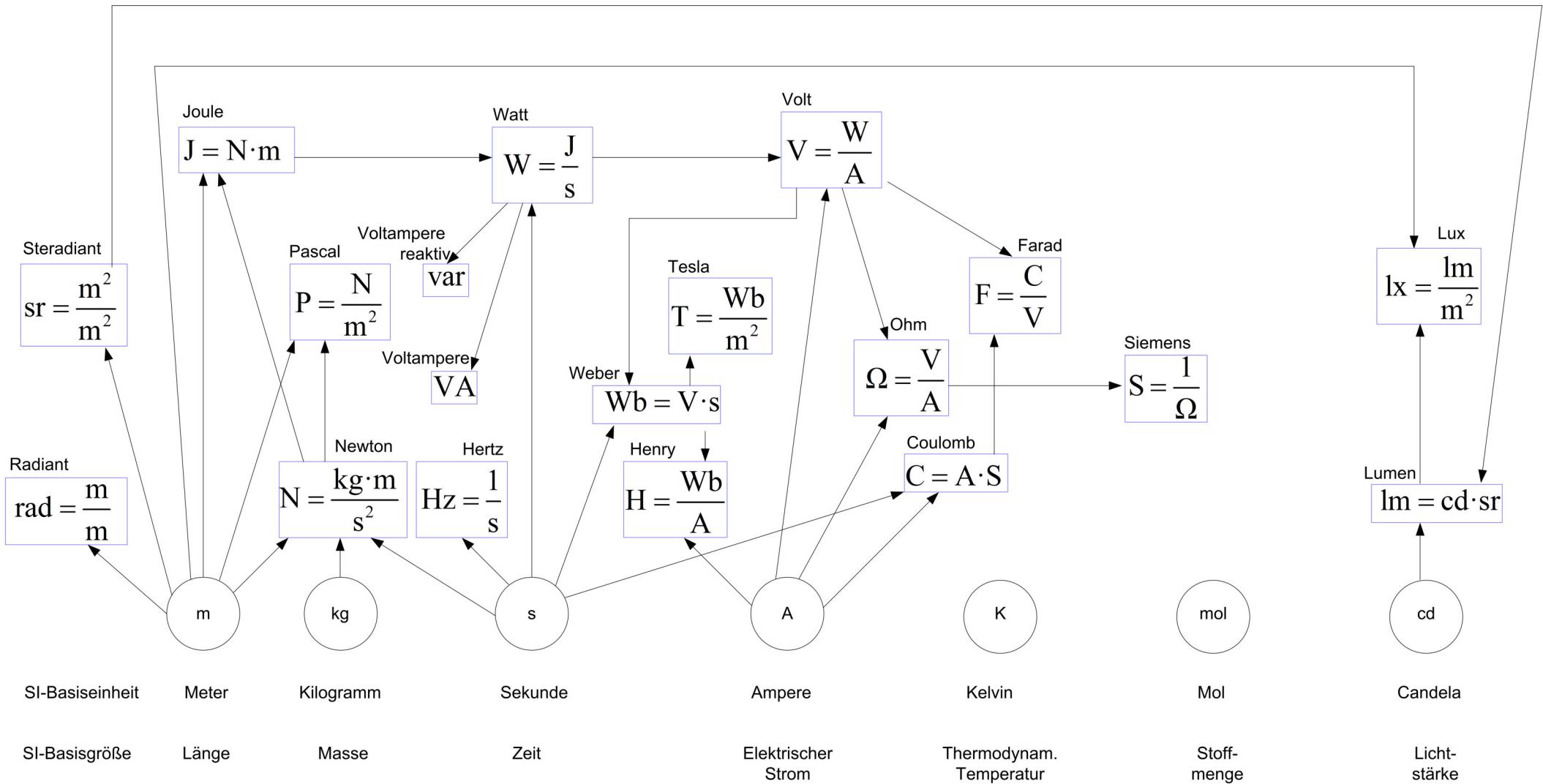
### Hinweise zum Rechnen im SI-System:

- Größen als Produkt aus Zahlenwert und Einheit einsetzen
- Umrechnungsfaktoren mit Einheiten des SI-Systems verwenden
- Zehnerpotenzschreibweise verwenden
- Einheitenkontrolle durch Überprüfung der Dimensionsgleichung durchführen

Beispiel - Berechnung der Leistung für  $U = 220\text{V}$ ,  $R = 100\Omega$ :

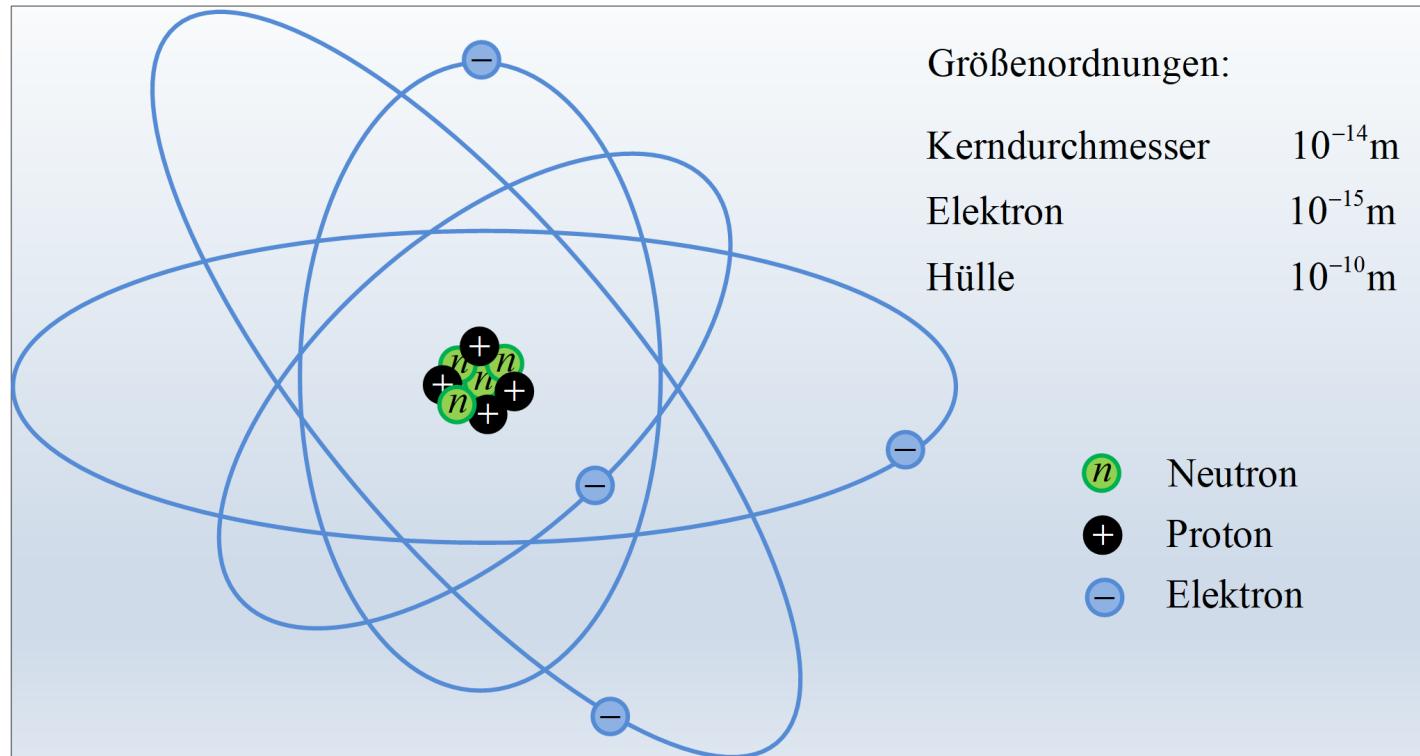
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(220\text{V})^2}{100\Omega} = \frac{2,2^2 \cdot 10^4 \text{V}^2}{10^2 \text{V/A}} = 484 \text{VA} = 484 \text{W}$$

# Abgeleitete Einheiten



## 2 Das elektrische Feld

Nachfolgend ist das Bohr'sche Atommodell für das Element Beryllium dargestellt:



(vgl. Albach, "Elektrotechnik", Bd. 1)

Das Atom besteht gemäß diesem Modell aus

- einem Atomkern mit Neutronen und Protonen
- einer Atomhülle mit Elektronen

## 2.1 Die elektrische Ladung

---

Elektronen und Protonen sind elektrisch geladen. Ihre Ladung entspricht der **Elementarladung**  $e$ .

$$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ As} = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (2.1)$$

As: Amperesekunden, C: Coulomb

- Die Elementarladung  $e$  ist die kleinste Ladungseinheit!
- Die Ladung  $Q$  eines elektrischen Körpers ist in Vielfache der Elementarladung  $e$  gequantelt, es gibt also nur diskrete Ladungszustände

$$Q = n \cdot e \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

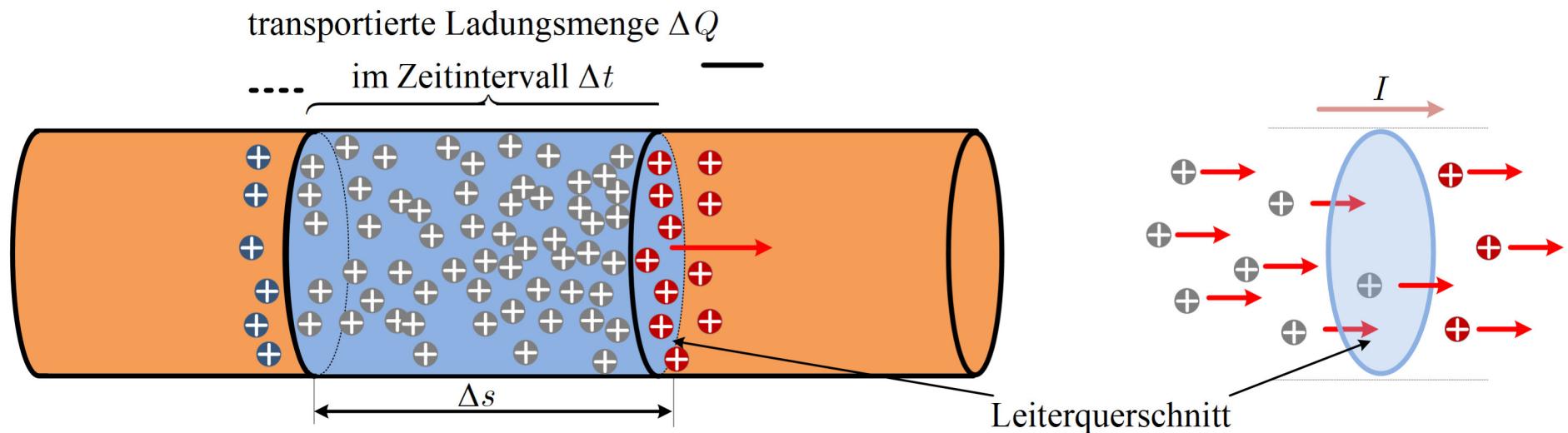
- Eine Ladungsmenge von  $Q = 1 \text{ As}$  enthält

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{1 \text{ As}}{e} = \frac{1 \text{ As}}{1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \approx 6,3 \cdot 10^{19} \text{ Elementarladungen}$$

## Die elektrische Ladung

Die "Kleinheit" der Elementarladung wird durch folgende Vorstellung veranschaulicht: Fließt eine Elementarladung je Sekunde durch den Querschnitt einer Leitung, so beträgt die Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{1 \text{ s}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \quad (2.3)$$



## Die elektrische Ladung

---

Mit empfindlichen Strommessern weist man heute Ströme von bis zu  $I < 10^{-16} \text{ A}$  nach.

Zum Beispiel sind mit einem Spiegelgalvanometer Stromstärken bis zu  $1 \cdot 10^{-12} \text{ A}$  messbar. Das entspräche einer durch den Leitungsquerschnitt fließenden Elementarladungsanzahl je Sekunde von

$$I = 1 \cdot 10^{-12} \text{ A} = \frac{n \cdot e}{1 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{1 \text{ s}} = \frac{I}{e} = \frac{1 \cdot 10^{-12} \text{ A}}{1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = \frac{0,624 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{19}}{1 \text{ s}} = \frac{0,624 \cdot 10^7}{1 \text{ s}} = \frac{6240000}{1 \text{ s}}$$

# Die elektrische Ladung

---

Merkmale elektrischer Ladungen:

- Jede Ladung setzt sich aus einer Vielzahl von Elementarladungen zusammen.
- In einem abgeschlossenen System ist die Ladungsmenge immer konstant.
- Ladungen lassen sich teilen, zusammensetzen, von einem auf einen anderen Körper übertragen, aber nicht erzeugen oder zerstören.
- Zwei Ladungen üben stets Anziehungs- oder Abstoßungskräfte aufeinander aus.

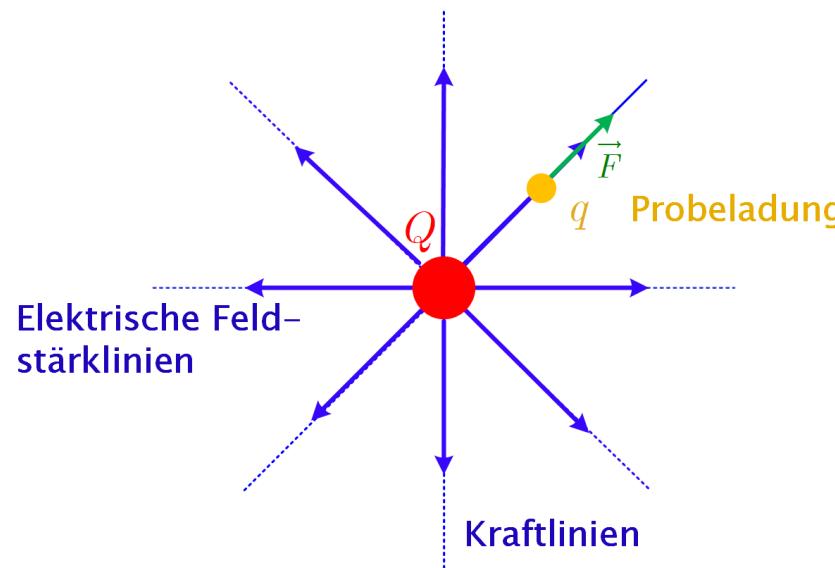
Die Ladungen wirken nicht direkt aufeinander ein, sondern über das elektrische Feld.

## Elektrisches Feld

Jede elektrische Ladung versetzt den sie umgebenden Raum in einen besonderen Zustand, der sich dadurch äußert, dass auf andere Ladungen Kräfte ausgeübt werden.

## Die elektrische Ladung

Wir bringen nun eine kleine Ladung  $q$ , die wir als Probeladung bezeichnen wollen, in ein durch die Ladung  $Q$  erzeugtes elektrisches Feld im Vakuum ein.



Das elektrische Feld übt auf die Probeladung  $q$  die Kraft  $\vec{F}$  aus. Diese Kraft ist im Allgemeinen vom Raumpunkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und der Größe der Probeladung  $q$  abhängig

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}(\vec{r}, q)$$

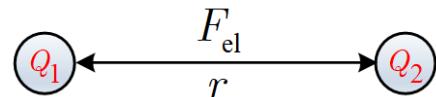
Der Betrag  $|\vec{F}|$  der Kraft ergibt sich mit dem Coulomb'schen Gesetz.

## Coulomb'sches Gesetz (1)

Der Betrag der Coulomb-Kraft oder elektrischen Kraft zwischen zwei Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $r$  beträgt im Vakuum

$$F_{\text{el}} = |\vec{F}| = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.4)$$

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$  ist die elektrische Feldkonstante oder Dielektrizitätskonstante des Vakuums.



- Der Betrag  $|\vec{F}|$  der auf eine Ladung  $Q_i$  ausgeübten Kraft ist proportional zur Größe der Ladung

$$F_{\text{el}} = |\vec{F}| \sim |Q_i|$$

- Der Betrag der auf eine Ladung ausgeübten Kraft  $|\vec{F}|$  ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung der Ladungen

$$F_{\text{el}} = |\vec{F}| \sim \frac{1}{r^2}$$

## Die elektrische Ladung

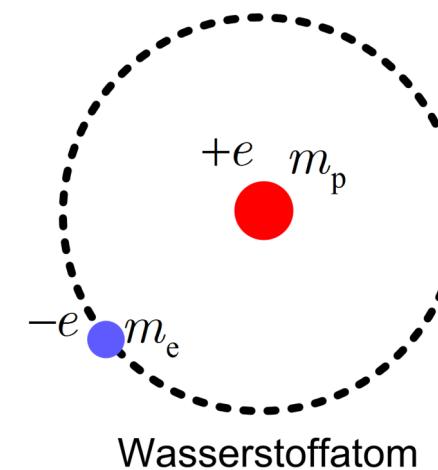
Vergleich der Größe der Coulomb-Kraft  $F_{\text{el}}$  mit der Gravitationskraft  $F_g$  zwischen einem Proton und einem Elektron im Wasserstoffatom

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{Gravitationskonstante: } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Ladung:  $Q_1 = -Q_2 = e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Ruhemasse eines Elektrons:  $m_1 = m_e = 9,1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Ruhemasse eines Protons:  $m_2 = m_p = 1,67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$



$$\frac{\text{elektrische Kraft}}{\text{Gravitationskraft}} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{\gamma \frac{m_p m_e}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \gamma} \frac{e^2}{m_p m_e} \simeq 10^{39} !!!$$

## Die elektrische Ladung

Die allgemeine **vektorielle** Form des Coulomb'schen Gesetzes lautet:

### Coulomb'sches Gesetz (2)

Die elektrische Kraft  $\vec{F}$  auf die Ladung  $Q_1$  hervorgerufen durch die Ladung  $Q_2$ , wobei die Ladungsmittelpunkte durch die Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  gegeben sind, beträgt

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2.5)$$

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$  ist die Permittivität bzw. Dielektrizitätskonstante des Stoffes, in dem sich die Ladungen befinden.

Anmerkungen:

Befinden sich die Ladungen in Ruhe, so wirken sie nur über das elektrische Feld aufeinander ein (Elektrostatik).

Bewegen sich die Ladungen, so wirken sie neben dem elektrischen Feld auch über das magnetische Feld aufeinander ein (Elektrodynamik).

## 2.2 Die elektrische Feldstärke

---

Mit Hilfe der auf eine Probeladung  $q$  ausgeübten Kraft kann die Stärke des elektrischen Feldes definiert werden als:

### Elektrische Feldstärke

Die in einem beliebigen Raumpunkt  $\vec{r}$  vorhandene elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  ist der Quotient aus der Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$ , die auf eine kleine eingebrachte Probeladung  $q$  ausgeübt wird, und der Probeladung  $q$  selber:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{As}} \right], \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]. \quad (2.6)$$

Es ist ersichtlich, dass gilt

- Die Kraft hat eine Richtung und folglich auch das elektrische Feld.
- Ist das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  bekannt, so kann die Kraft auf eine Ladung  $Q$  ermittelt werden

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.7)$$

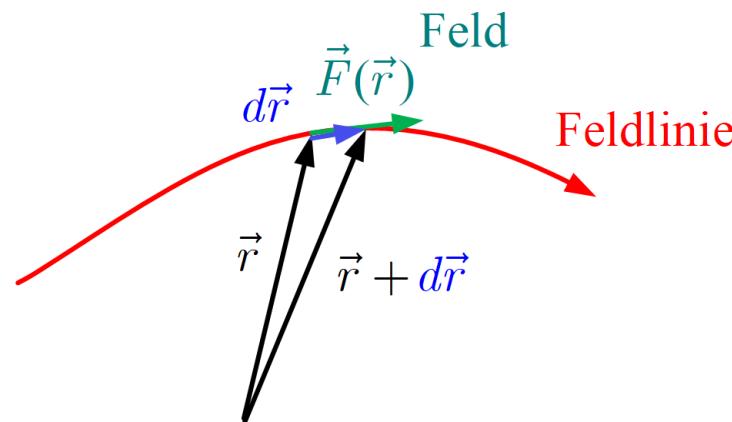
Anmerkung: Diese Beziehung gilt nur, wenn die (Rück)Wirkung der Ladung  $Q$  auf das elektrische Feld vernachlässigt werden kann, d.h. dieses durch die Ladung  $Q$  nicht verändert wird!

## Einschub

(Vektor)felder werden im Allgemeinen durch Feldlinien beschrieben.

Feldlinien sind Kurven, die in jedem Raumpunkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  tangential zum dort vorliegenden Feldvektor  $\vec{F}(\vec{r})$  sind, d.h., es gilt für eine infinitesimale Wegstrecke  $d\vec{r}$  auf der Feldlinie (siehe Bild)

$$\vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r} = \vec{0} \quad (2.8)$$



## Die elektrische Feldstärke

---

Hat eine Feldgröße eine Richtung, dann kann

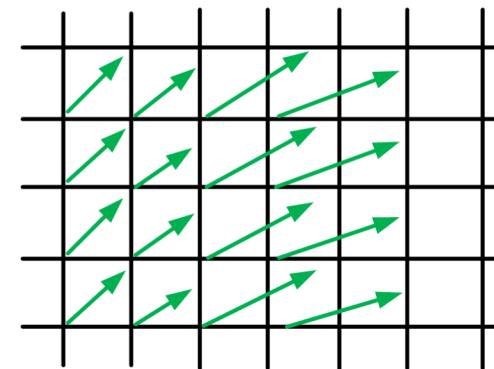
- die Richtung allein durch **Feldlinien** (deren Abstand bzw. Dichte ist das Maß für ihren Betrag) oder
- durch **Vektorpfeile** mit Richtung und Betrag (Länge  $\sim$  Betrag)

dargestellt werden:

Feldlinien



Vektorpfeile



# Die elektrische Feldstärke

---

Man unterscheidet

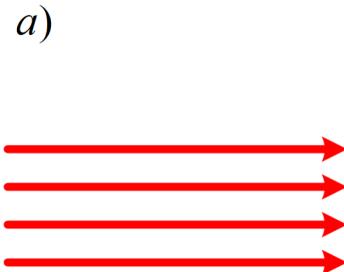
- Homogene und inhomogene Felder
  - Homogene Felder

Die Feldgrößen sind überall gleich, d.h. vom Ort unabhängig bzw. die Dichte der Feldlinien ist konstant (siehe Bild a).

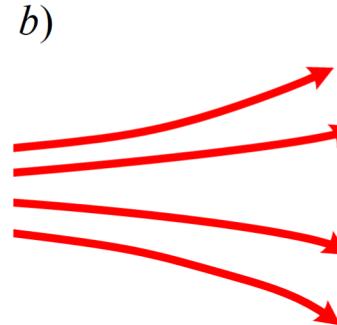
- Inhomogene Felder

Die Feldgrößen sind vom Ort abhängig, d.h. die Dichte der Feldlinien ist nicht konstant (siehe Bilder b, c, d).

**Homogenes Feld**



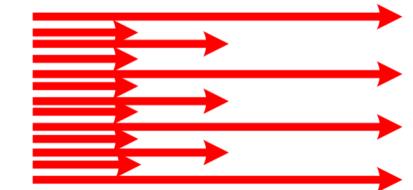
**Inhomogenes Feld**



c)



d)



## Die elektrische Feldstärke

---

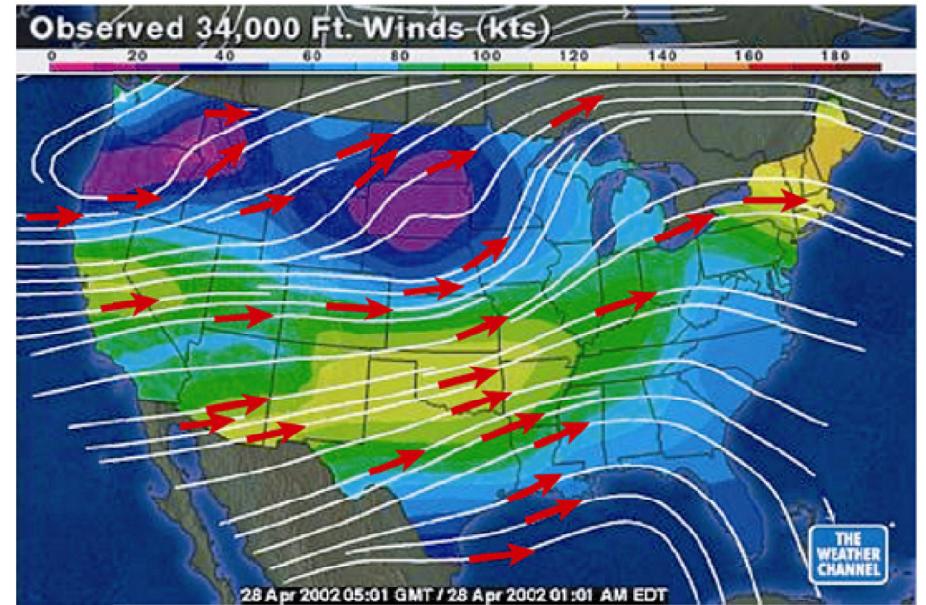
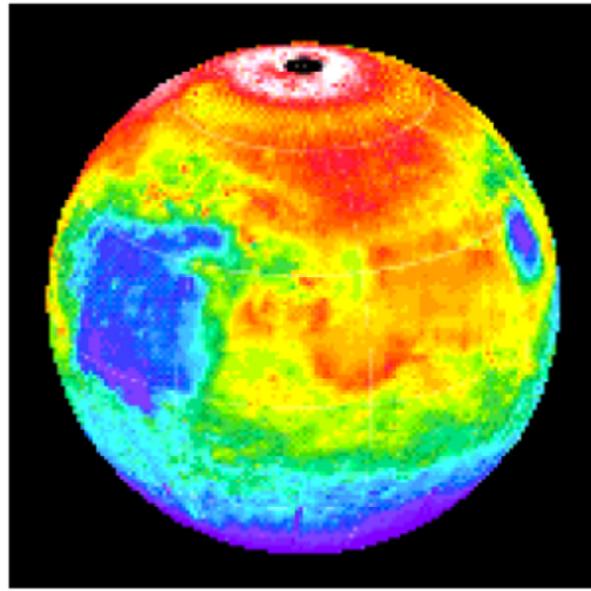
- Stationäre und instationäre Felder
  - Stationäre Felder

Die Feldgrößen sind zeitlich konstant bzw. zeitunabhängig.
  - Instationäre Felder

Die Feldgrößen sind zeitlich veränderlich bzw. zeitabhängig.
- Vektor- und Skalarfelder
  - Vektorfelder: Die Feldgröße ist ein vom Raumpunkt abhängiger Vektor  $\vec{F}(\vec{r})$ .
  - Skalarfelder: Die Feldgröße ist ein vom Raumpunkt abhängiger Skalar  $\varphi(\vec{r})$ .

Skalarfelder und Vektorfelder können unter bestimmten Bedingungen, z.B. wirbelfreie Gradientenfelder mit einem skalaren Potentialfeld, einander zugeordnet werden.

# Die elektrische Feldstärke



Skalare Feldgröße:  
Höhe  
Luftdruck  
Temperatur  
Konzentration  
Wasserhöhe  
Elektrisches Potential

Vektorielle Feldgröße:  
Steigung  
Windgeschwindigkeit  
Wärmefluss  
Diffusion  
Fließgeschwindigkeit  
Elektrische Feldstärke

## Die elektrische Feldstärke

---

Häufig interessierende Eigenschaften von Feldern sind

- die lokale Änderung
- die Quellen und Senken
- die Wirbel

Diese Eigenschaften ermittelt man mit Hilfe mathematischer Operatoren, die vielfach gebraucht werden. Hierbei gehen wir meist vereinfacht von einem kartesischen Raumkoordinatensystem (meist mit  $\dim(n) = 3$ ) aus und kennzeichnen den Ortspunkt  $P$  durch seinen Ortsvektor  $\vec{r}$  als

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

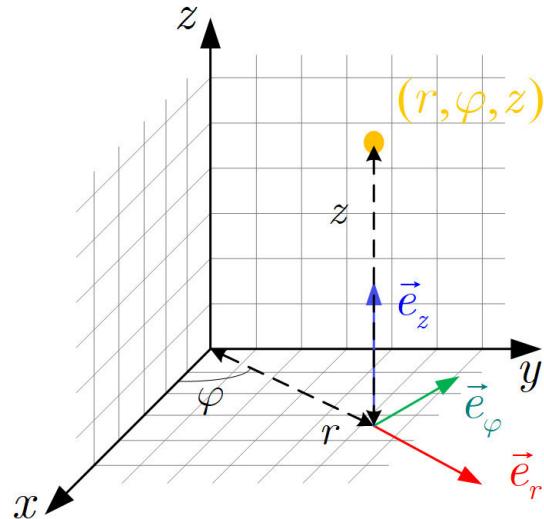
Zur einfacheren Berechnung unter Ausnutzung der Symmetrie der Anwendungsfälle kann es hilfreich sein, das Problem in Polarkoordinaten (2D), Zylinderkoordinaten (3D) oder Kugelkoordinaten (3D) zu beschreiben.

- Skalarfelder  $\varphi(\vec{r})$
- Vektorfelder  $\vec{F}(\vec{r})$

## Zylinderkoordinaten

Im zylindrischen Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^3$  wird jeder Punkt  $P$  dargestellt durch

- den Abstand von der  $z$ -Achse  $\{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$
- seinem Winkel in der  $x-y$ -Ebene  $\varphi \in [0, 2\pi)$
- dem linearen Abstand  $z \in \mathbb{R}$  zur  $x-y$ -Ebene (parallel zur  $z$ -Achse).



$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad (2.9)$$

mit den Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten in kartesischen Koordinaten

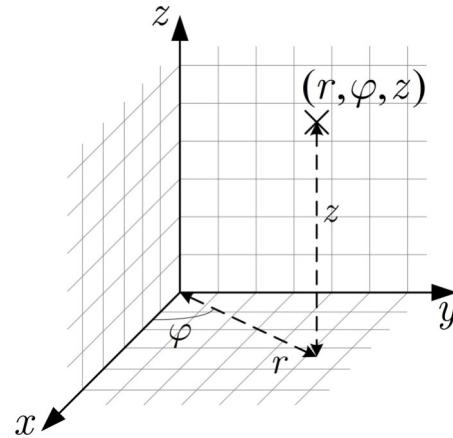
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Die Orientierung der Einheitsvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  hängt immer vom betrachteten Punkt  $P$  ab!

Die Darstellung in **Polarkoordinaten** im  $\mathbb{R}^2$  erfolgt analog, als Spezialfall der Zylinderkoordinatendarstellung im  $\mathbb{R}^3$  mit  $z = 0$ .

## Die elektrische Feldstärke

Für die Transformation eines Vektors aus dem zylindrischen in das kartesische Koordinatensystem gilt:



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Die Rücktransformationsvorschriften von kartesischen in Zylinderkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

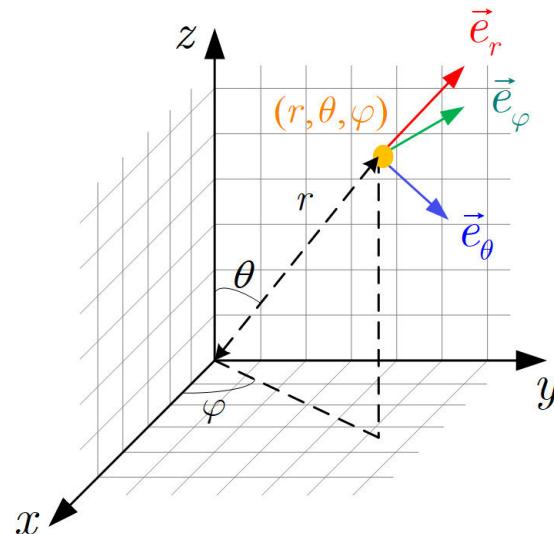
Das Zylinderkoordinatensystem ist die bevorzugte Darstellung für axialsymmetrische Probleme wie:

- das magnetische Feld eines langen dünnen Leiters
- die Kapazität eines Zylinderkondensators

## Kugelkoordinaten

Im sphärischen Koordinatensystem oder Kugelkoordinatensystem im  $\mathbb{R}^3$  wird jeder Punkt dargestellt durch

- den Abstand  $\{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$  vom Koordinatenurprung,
- seinem Winkel  $\theta \in [-\pi, \pi]$  relativ zur  $z$ -Achse,
- seinem Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene.



$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (2.13)$$

mit den Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten in kartesischen Koordinaten

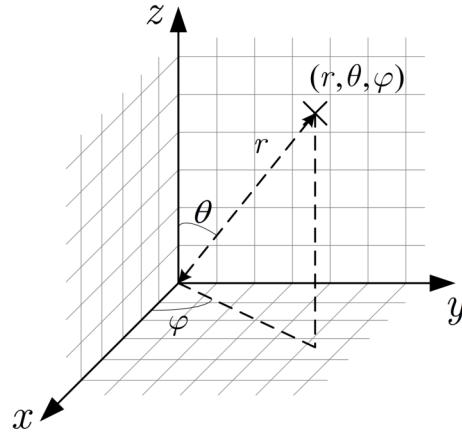
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Die Orientierung der Einheitsvektoren  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\varphi$  hängt immer vom betrachteten Punkt  $P$  ab!

## Die elektrische Feldstärke

---

Für die Transformation von Kugel- in kartesische Koordinaten gelten folgende Abbildungsvorschriften:



$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Die Rücktransformationsvorschriften von kartesischen in Kugelkoordinaten lauten:

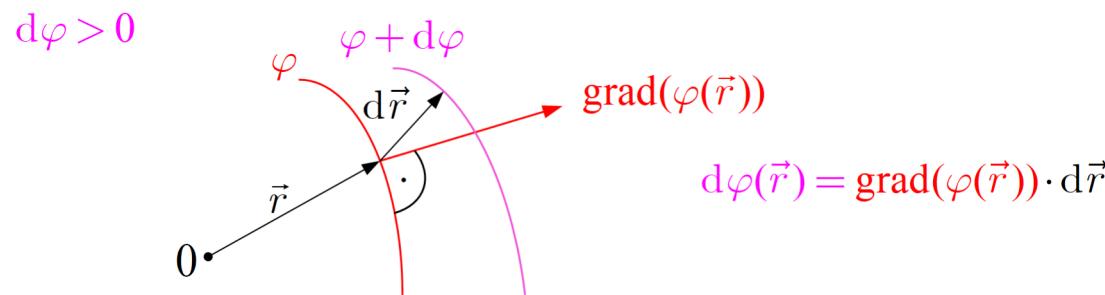
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Das Kugelkoordinatensystem ist die bevorzugte Darstellung für radialsymmetrische Probleme wie:

- das elektrische Feld einer punktförmigen Ladung
- die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im dreidimensionalen Raum

## Der Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes  $\varphi(\vec{r})$  ist ein Vektorfeld und gibt die lokale Änderung des Wertes des Skalarfeldes in jede Raumrichtung des Koordinatensystems an einem Ortspunkt  $P$  mit Ortsvektor  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  an.



Die Richtung des Gradienten an einem Ortspunkt ist orthogonal zur Niveaumenge des Skalarfeldes in Richtung des größten Anstieges in diesem Ortspunkt und sein Betrag ist die Größe des Anstieges. Der Gradient von  $\varphi$  berechnet sich in kartesischen Koordinaten als

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2.17)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

$\nabla$  ist der sogenannte **Nabla-Operator** und ist definiert als der Vektor der partiellen Ableitung in jede Dimension:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Mithilfe des Nabla-Operators können die Operationen der Vektor-Analysis kompakt notiert werden. Der Gradient ergibt sich also als skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit dem Skalarfeld.

Die Korrektheit der Definition des Nabla-Vektors in kartesischen Koordinaten kann anhand des totalen Differentials für das Skalarfeld geprüft werden

$$d\varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} dz \quad (2.19)$$

$$= \nabla \varphi(x, y, z) \cdot d\vec{r} \quad (2.20)$$

mit  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  und  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)^T$ .

## Die elektrische Feldstärke

---

Rechenregeln für das Rechnen mit dem Nabla-Operator:

$$\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2 \quad (2.21)$$

$$\nabla(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2\nabla\varphi_1 + \varphi_1\nabla\varphi_2 \quad (2.22)$$

$$\nabla(f(\varphi)) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi}\nabla\varphi \quad (2.23)$$

Die doppelte Anwendung des Nabla Operators wird häufig abgekürzt als,

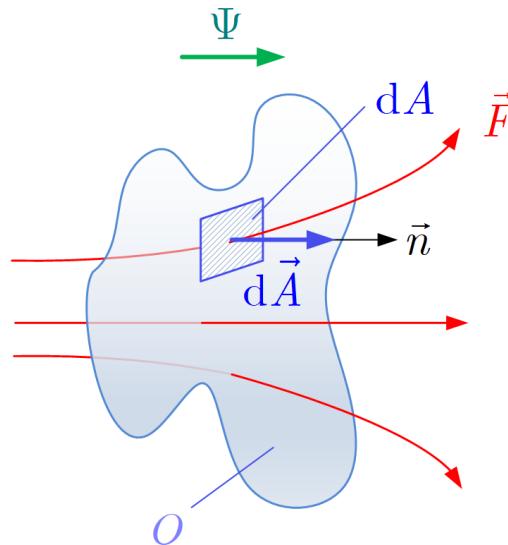
$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \quad (2.24)$$

mit  $\Delta$  als dem sogenannten **Laplace Operator**.

## Die Divergenz

Der Anteil eines Vektorfeldes  $\vec{F}$ , der eine gerichtete Fläche  $O$  durchstößt, wird als Fluß  $\Psi$  bezeichnet

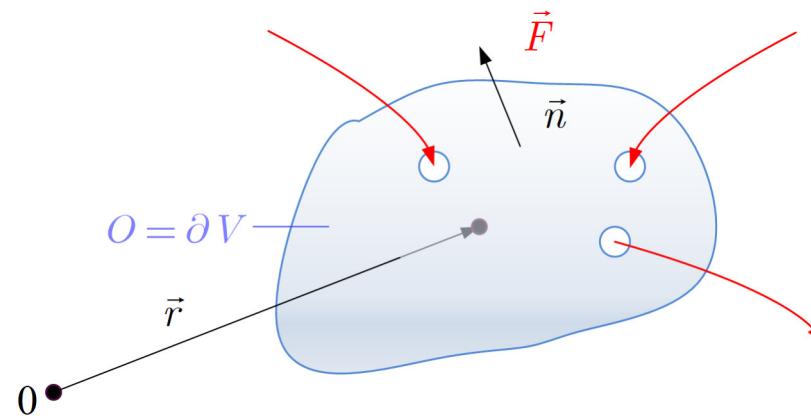
$$\Psi = \iint_O \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_O \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_O F_n dA \quad (2.25)$$



## Die elektrische Feldstärke

Der Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche  $O = \partial V$ , die das Volumen  $V$  berandet, wird als Ergiebigkeit  $\Psi_O$  bezeichnet und berechnet sich als

$$\Psi_O = \iint_{O=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (2.26)$$



Der Grenzwert des Quotienten aus Ergiebigkeit und verschwindendem Volumen an einem Raumpunkt  $P$  mit Ortsvektor  $\vec{r}$  ist die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  an diesem Raumpunkt

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) := \lim_{|V| \rightarrow 0, O \rightarrow \vec{r}} \left( \frac{1}{|V|} \iint_{O=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \right) \quad (2.27)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, das die Änderung des Vektorfeldes in jedem Raumpunkt und somit seine Quellen und Senken beschreibt. Verschwindet die Divergenz in einem Gebiet, so ist das Vektorfeld in diesem Gebiet quellen- und senkenfrei.

Das Volumenintegral über die Divergenz ergibt äquivalent den durch das Vektorfeld  $\vec{F}$  erzeugten Flusses durch eine geschlossene gerichtete Fläche  $O = \partial V$  (**Gauß'scher Integralsatz**):

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

Dabei sind

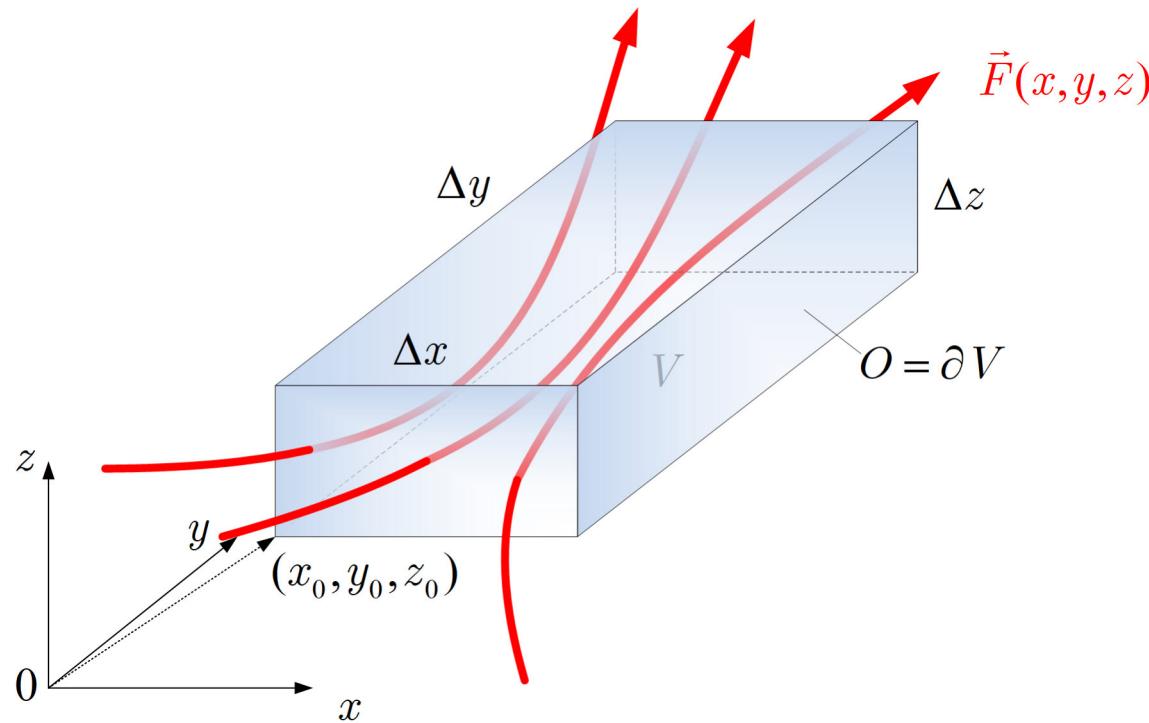
- $V$  ein beliebiges kleines Raumgebiet/Volumenelement, zum Beispiel eine Kugel oder ein Parallelepiped.
- $|V|$  die Größe (Volumen) des Raumgebietes/Volumenelementes.
- $\partial V$  der Rand dieses Raumgebietes/Volumenelementes.
- $\vec{n}$  der nach außen gerichtete Normalenflächenvektor und  $dA$  das zugehörige skalare Flächenelement des Randes  $\partial V$ .
- $\vec{r}$  der Ortsvektor des Punktes in  $V$ , auf den das Raumgebiet bei Grenzwertbildung  $|V| \rightarrow 0$  zusammen gezogen wird.

## Die elektrische Feldstärke

Die Divergenz berechnet sich in kartesischen Koordinaten als die Summe der partiellen Ableitungen der Vektorkomponenten nach der zugehörigen Raumrichtung an jedem Punkt:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.28)$$

Um dies zu verifizieren berechnen wir die Divergenz des Feldes  $\vec{F}(x, y, z)$  im Raumpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$ :



## Die elektrische Feldstärke

---

Es gilt für das Beispiel bei Orientierung der Randflächen des Quaders nach außen

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= F_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \Delta y \Delta z - F_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \Delta y \Delta z + \\
 &\quad F_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \Delta x \Delta z - F_y(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta z + \\
 &\quad F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta x \Delta y - F_z(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta y \\
 &= \Delta x \Delta y \Delta z \left[ \frac{F_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} + \right. \\
 &\quad \frac{F_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} + \\
 &\quad \left. \frac{F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - F_z(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} \right].
 \end{aligned}$$

Mit  $|V| = \Delta x \Delta y \Delta z$  folgt für verschwindende  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$  im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{|V|} = \left[ \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z} \right]_{(x_0, y_0, z_0)}$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Für die Divergenz gelten folgende Rechenregeln:

$$\nabla \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla \cdot \vec{F}_1 + \nabla \cdot \vec{F}_2 \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = \vec{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{F} \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot (\nabla \times \vec{F}_1) - \vec{F}_1 \cdot (\nabla \times \vec{F}_2) \quad (2.31)$$

Besonders wichtig ist die Eigenschaft:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (2.32)$$

- Jedes Rotationsfeld  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  ist quellenfrei mit dem Vektorpotential  $\vec{A}$ !
- Ein quellenfreies Vektorfeld  $\vec{B}$  mit  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  kann aus einem Vektorpotential  $\vec{A}$  abgeleitet werden!

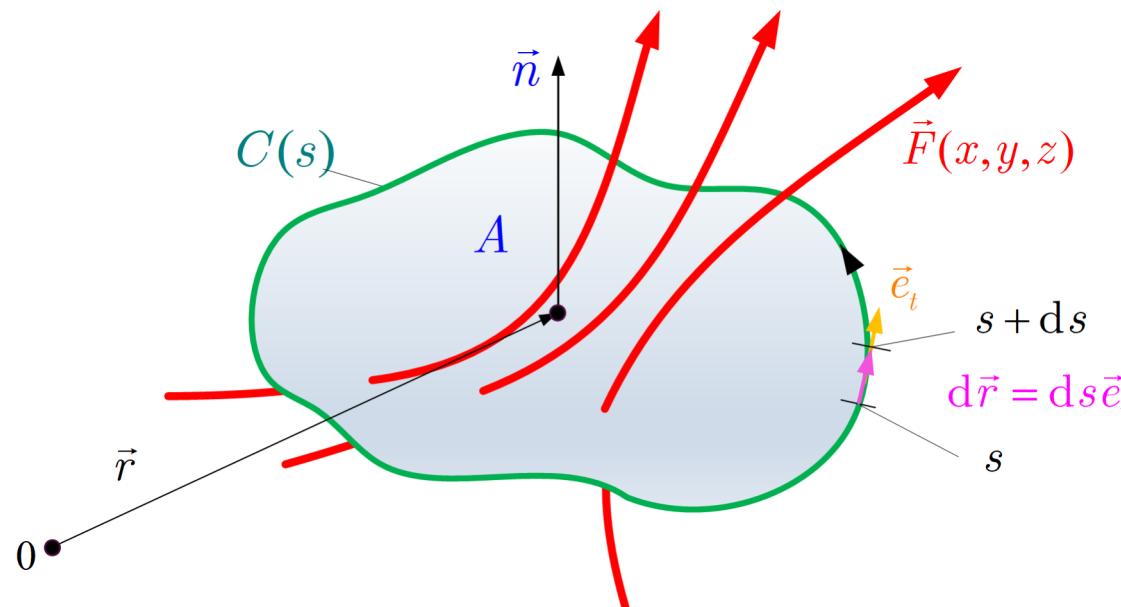
## Die Rotation

Die Summe aller infinitesimalen Beiträge (siehe Bild)

$$dZ = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{e}_t ds = F_t ds \quad (2.33)$$

des elektrischen Feldes in tangentialer Richtung  $F_t$  entlang des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{e}_t$  einer geschlossenen Kurve  $C$ , die ein Feld  $\vec{F}$  umfasst, wird als Zirkulation des Vektorfeldes  $\vec{F}$  entlang der geschlossenen Kurve  $C$  bezeichnet

$$Z = \oint_C dZ = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.34)$$



## Die elektrische Feldstärke

---

Der Grenzwert des Quotienten aus Zirkulation  $Z$  und dem Flächeninhalt  $|A|$  der von der mathematisch positiv orientierten Kurve  $C = \partial A$  begrenzten Fläche  $A$  in Richtung des Normalenvektors  $\vec{n}$  von  $A$  ist definiert als

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) := \lim_{|A| \rightarrow 0, C \rightarrow \vec{r}} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{|A|} \quad (2.35)$$

Die Berechnungsformel für die einzelnen Komponenten der **Rotation**  $\operatorname{rot} \vec{F}$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  in Richtung orthogonaler Einheitsvektoren  $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$  im dreidimensionalen Raum erhält man, wenn man die Fläche  $A$  jeweils in die Ebenen orthogonal zu diesen Einheitsvektoren legt.

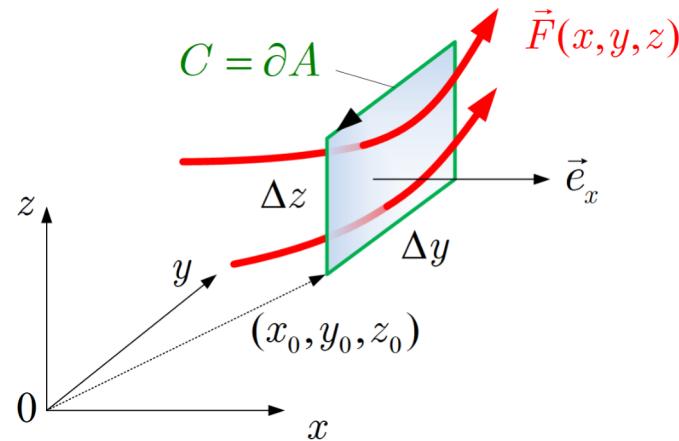
Zum Beispiel gilt im kartesischen Koordinatensystem

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \begin{array}{l} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{array} \right) \quad (2.36)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Um dies zu verifizieren berechnen wir die Zirkulation  $Z_x$  des Feldes  $\vec{F}(x, y, z)$  im Raumpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  entlang der Kurve  $C$  in Richtung  $\vec{e}_x$ :



Die Zirkulation ist gegeben als

$$Z_x = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_y(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0) \Delta y + F_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z/2) \Delta z + \quad (2.37)$$

$$-F_y(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0 + \Delta z) \Delta y - F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z/2) \Delta z \quad (2.38)$$

$$= \Delta y \Delta z \left[ \frac{F_y(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0) - F_y(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0 + \Delta z)}{\Delta z} + \quad (2.39) \right.$$

$$\left. \frac{F_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z/2) - F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z/2)}{\Delta y} \right] \quad (2.40)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Mit  $|A| = \Delta y \Delta z$  folgt für verschwindende  $\Delta y, \Delta z \rightarrow 0$  im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{|A| \rightarrow 0, C \rightarrow \vec{r}} \frac{\oint_{C=\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{|A|} = \left[ -\frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial y} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (2.41)$$

Die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  ist wieder ein Vektorfeld, welches die Zirkulation des Vektorfeldes  $\vec{F}$  beschreibt. Deshalb werden Vektorfelder, für welche die Rotation nicht überall verschwindet, Wirbelfelder genannt.

Folgende Rechenregeln gelten für die Rotation:

$$\nabla \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla \times \vec{F}_1 + \nabla \times \vec{F}_2 \quad (2.42)$$

$$\nabla \times (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = (\vec{F}_2 \cdot \nabla) \vec{F}_1 - \vec{F}_2 (\nabla \cdot \vec{F}_1) + \vec{F}_1 (\nabla \cdot \vec{F}_2) - (\vec{F}_1 \cdot \nabla) \vec{F}_2 \quad (2.43)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \quad (2.44)$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \times \nabla \varphi \quad (2.45)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Besonders wichtig ist die Eigenschaft:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (2.46)$$

- Jedes Gradientenfeld  $\vec{E} = \nabla \varphi$  ist wirbelfrei mit dem skalaren Potential  $\varphi$ !
- Ein wirbelfreies Vektorfeld  $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$  kann aus einem skalaren Potential  $\varphi$  abgeleitet werden!

Die Rotation kann gemäß dem **Integralsatz von Stokes** auch ausgedrückt werden als das geschlossene Linienintegral entlang der Umrandung  $\partial A$  einer Fläche  $A$ :

$$\iint_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{C=\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dabei

- Der Vektor  $d\vec{A}$  ist der skalierte Flächennormalenvektor der Fläche  $A$ .
- $C = \partial A$  ist die Randkurve der Fläche  $A$ .
- $d\vec{s}$  ist das infinitesimale Längenelement der Randkurve in Tangentialrichtung.

## Die elektrische Feldstärke

---

Für die Rotation von  $\vec{F}$  kann mit dem Satz von Gauß gezeigt werden, dass ebenfalls gilt

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV = \iint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}$$

Dies resultiert in der alternativen Definition der Rotation eines Vektorfelds analog zur Divergenz als

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \iint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F} = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \iint_{\partial V} \vec{n} \times \vec{F} dA$$

## Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation können vom kartesischen Koordinatensystem analog auf das Zylinderkoordinatensystem übertragen werden. Die *Jakobische Funktionaldeterminante* stellt hierbei sicher das die Transformation *regulär* ist. Für die genauen Herleitungen sei an dieser Stelle auf die Vektoranalysis verwiesen.

In Zylinderkoordinaten sind für das Skalar- und Vektorfeld  $f$  und  $\vec{F}$  die Operatoren wie folgt definiert:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.48)$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

# Die elektrische Feldstärke

---

## Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Auch für das Rechnen in Kugelkoordinaten gelten, aus den gleichen Gründen wie im Zylinderkoordinatensystem, andere Rechenregeln.

In Kugelkoordinaten sind für das Skalarfeld  $f$  und das Vektorfeld  $\vec{F}$  die Operatoren wie folgt definiert:

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (2.51)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

## Die elektrische Feldstärke

Mit Hilfe dieser Operatoren wurden die Grundgleichungen der Elektrizitätslehre oder Elektrodynamik 1864 von J.C. Maxwell (1831-1879) erstmals publiziert.

### Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

Seien

- $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{P}$  die elektrische Polarisation,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  die elektrische Flussdichte,  $\rho$  die elektrische Ladungsdichte (ohne Polarisationsladungen),  $\vec{J}$  die elektrische Stromdichte (ohne Magnetisierungsströme),  $Q$  die elektrische Ladung
- $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\vec{M}$  die Magnetisierung,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$  die magnetische Flussdichte
- $\epsilon_0$  die Permittivität,  $\mu_0$  die Permeabilität ( $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ )

so gilt

1. Gauß'sches Gesetz für elektrische Felder - die Ladung ist die Quelle des elektrischen Feldes

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV = Q \quad (2.53)$$

## Die elektrische Feldstärke

2. Gauß'sches Gesetz für magnetische Felder - magnetische Felder besitzen keine Quelle oder Senken

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{A=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.54)$$

3. Induktionsgesetz - eine zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte erzeugt (induziert) ein entgegengerichtetes elektrisches Feld

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (2.55)$$

4. Erweitertes Durchflutungsgesetz - eine elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  und/oder eine zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte (Verschiebestroms) bedingen ein magnetisches Feld

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (2.56)$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Anmerkungen:

- Die linke Seite der Gleichungen wird als differentielle Form und die rechte Seite als integrale Form der Maxwell'schen Gleichungen bezeichnet
- Die obigen Maxwell-Gleichungen beschreiben das makroskopische Verhalten der Felder als örtliches Mittel in allen Medien.

Alternativ können die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen genutzt werden, in denen  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  durch  $\epsilon_0 \vec{E}$  und  $\vec{B}/\mu_0$  zu ersetzen sind sowie die Ladungs- und Stromdichte  $\rho$  und  $\vec{J}$  dann alle Ladungen bzw. Ströme beinhalten.

- Es existieren weitere Maxwell'sche Gleichungen, die aus den obigen abgeleitet werden können.
- Die verwendeten Größen hängen allgemein vom Ort und der Zeit ab

$$\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{D}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t), \dots \quad (2.57)$$

Diese Abhängigkeit wird (nachfolgend) nicht explizit geschrieben, wenn es für das Verständnis nicht notwendig ist.

- In isotropen (richtungsunabhängigen) homogenen linearen Materialien gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

## Die elektrische Feldstärke

---

Diese Gleichungen werden wir nachfolgend im Detail studieren und anwenden ....

Hierbei werden wir im Fall von bewegten Ladungsträgern immer annehmen, dass ihre Geschwindigkeit viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist und wir nichtrelativistisch - ohne Anwendung der Lorentz-Transformation - rechnen können.

Zunächst betrachten wir die

- elektro- und magneto**statischen** Effekte im Fall **zeitlich unveränderlicher Felder**
- elektro- und magneto**dynamischen** Effekte mit **zeitlich veränderlichen Feldern**.

Im Fall der zeitlich unveränderlichen Felder (**Elektro- und Magnetostatik**) entkoppeln sich die Maxwell-Gleichung für das elektrische und magnetische Feld gemäß

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (2.58)$$

und

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (2.59)$$

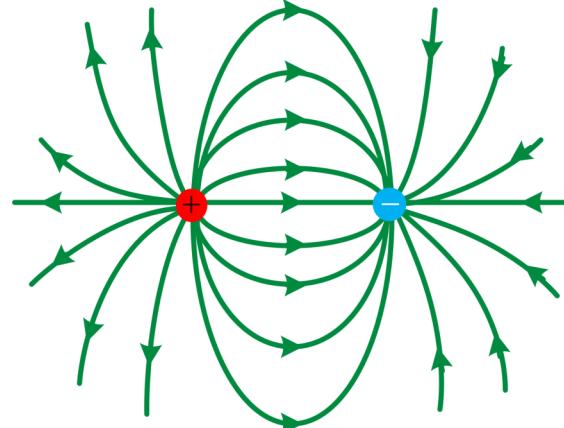
### Einschub Ende

## Die elektrische Feldstärke

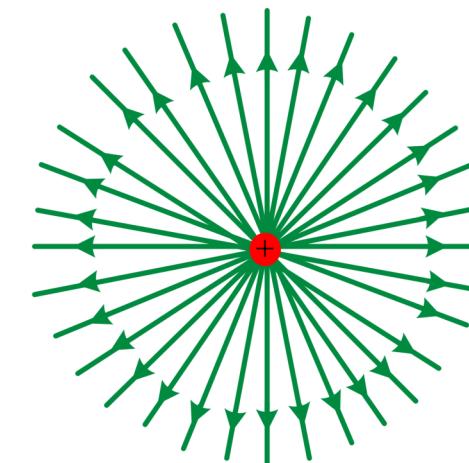
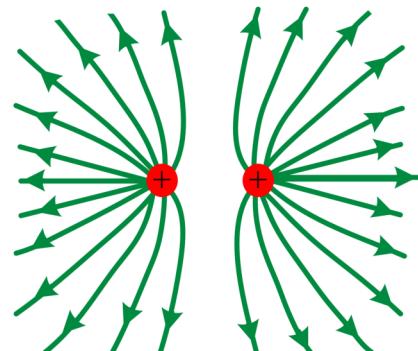
Elektrische Felder werden im Allgemeinen durch Feldlinien beschrieben. Diese entsprechen der “Bahnkurve” einer positiven Probeladung, wenn sie in ein elektrisches Feld gebracht wird. Das bedeutet:

- Durch jeden Punkt verläuft genau eine Feldlinie, d.h. es gibt keine Schnittpunkte.
- Der Verlauf der Feldlinien ist von positiven (+) zu negativen (-) Ladungen gerichtet.
- Die Richtung der elektrischen Feldstärke entspricht der Tangente an die entsprechende Feldlinie (alternative Definition der Feldlinien).
- Je dichter die Feldlinien sind, desto größer ist die Feldstärke.

Im nachfolgenden Bild sind die Feldlinien für drei verschiedene Anordnungen elektrischer Ladungen gezeigt.



Feldverlauf elektrischer Felder zwischen  
ungleichnamigen Ladungen      gleichnamigen Ladungen



Feldverlauf elektrischer Felder  
einer Punktladung im Mittelpunkt

## Die elektrische Feldstärke

---

Die elektrischen Feldlinien haben folgende Eigenschaften:

- Jede elektrische Ladung ist von einem elektrischen Feld umgeben.
- Statische elektrische Felder entspringen definitionsgemäß in positiven Ladungen, den Quellen.
- Statische elektrische Felder enden in negativen Ladungen, den Senken.
- Elektrische Feldlinien treten senkrecht in Ladungsoberflächen aus und ein.
- Elektrische Feldlinien überschneiden oder kreuzen sich nie.

## 2.3 Die elektrische Spannung

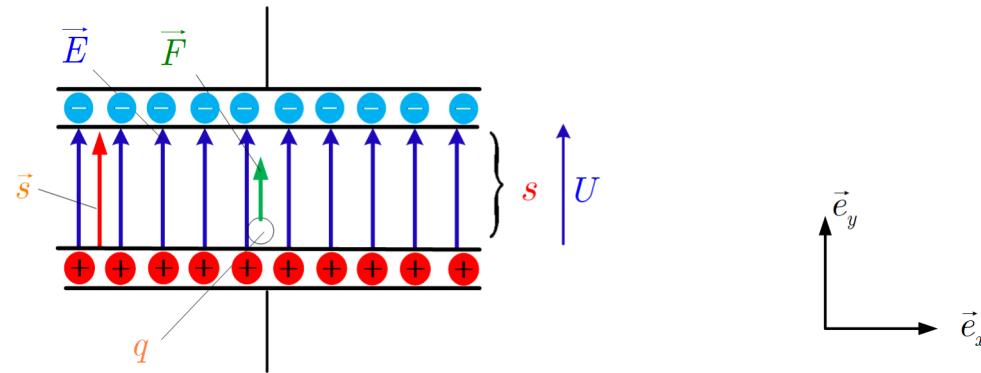
Zwischen zwei parallel angeordneten Metallplatten (Plattenkondensator), wobei die eine positiv und die andere negativ aufgeladen ist, existiert das homogene elektrische Feld mit der Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} = E\vec{e}_y$ . Es wird eine frei bewegliche Punktladung  $q > 0$  bei der positiv geladenen Platte eingebracht, auf welche die Kraft

$$\vec{F} = \vec{E}q$$

wirkt. Die Punktladung wird parallel zum elektrischen Feld zur negativ geladenen Platte bewegt, wobei sie den Weg  $\Delta\vec{r} = \vec{s} = s\vec{e}_y$  zurücklegt und die Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = q(\vec{E}\vec{e}_y) \cdot (s\vec{e}_y) = qEs = qU$$

verrichtet wird.



$U$  bezeichnet die zwischen den beiden Metallplatten im **homogenen** elektrischen Feld vorliegende Spannung

$$U = \vec{E} \cdot \vec{s} = Es \quad (2.60)$$

## Die elektrische Spannung

---

Anmerkung:

- Je nachdem, ob die Ladung  $q$  positiv oder negativ ist, ist die geleistete Arbeit  $W$  positiv, d.h. es wird Energie aus dem elektrischen Feld in mechanische Energie umgewandelt, oder negativ, d.h. es wird mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt. Im ersten Fall wird die Ladung beschleunigt und besitzt dann kinetische Energie.
- Die Beziehung in Gl. (2.60) gilt so nur im **homogenen** elektrischen Feld.

Die allgemeine Definition der elektrischen Spannung für ein **inhomogenes** elektrisches Feld ist nachfolgend angegeben.

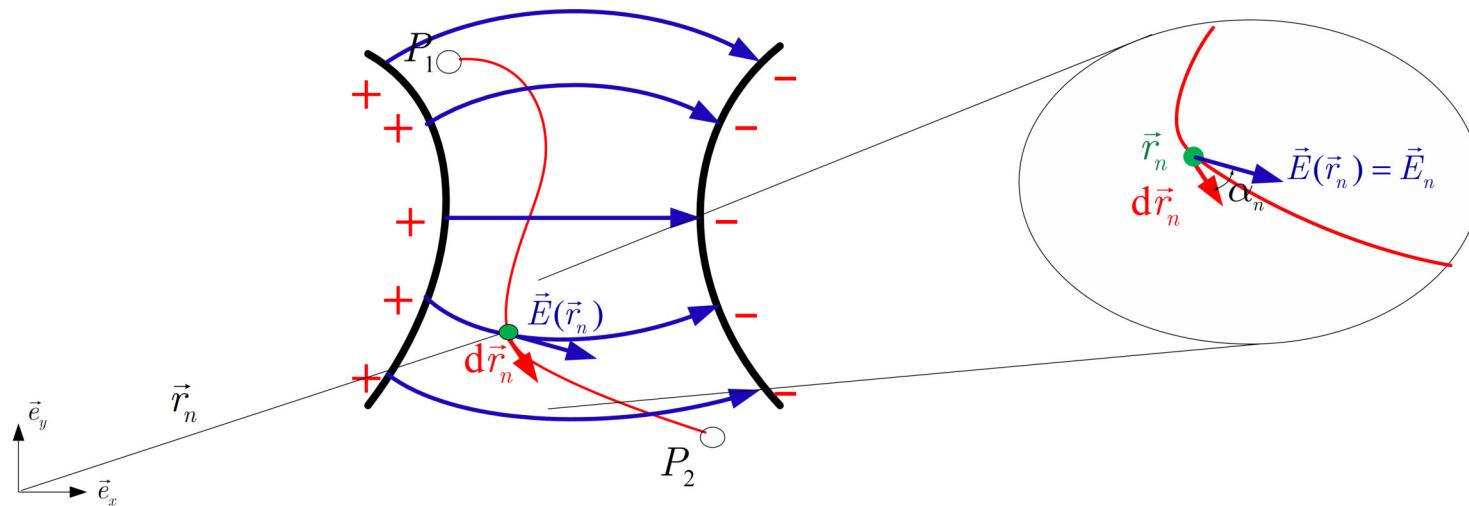
# Die elektrische Spannung

## Elektrische Spannung

Die Spannung zwischen zwei Raumpunkten  $P_1$  und  $P_2$  ist definiert als

$$u_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\vec{E}(\vec{r}_n)| |d\vec{r}_n| \cos(\alpha_n), \quad [\text{V}] \quad (2.61)$$

Hierbei ist  $d\vec{r}$  bzw.  $d\vec{r}_n$  das infinitesimale tangentiale vektorielle Wegelement am Punkt  $\vec{r}$  bzw.  $\vec{r}_n$  der Wegkurve vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$  und  $\alpha_n$  der Winkel zwischen dem Feldstärkevektor und der Wegrichtung.



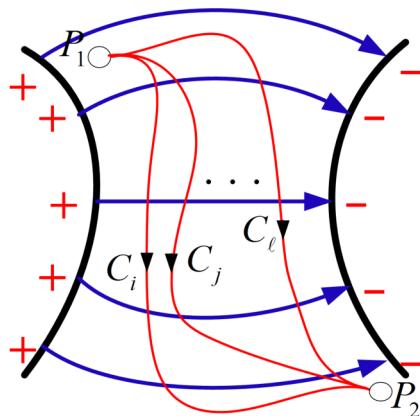
## Die elektrische Spannung

Die elektrische Spannung  $u_{12}$  ist ein Maß für die Arbeit  $W_{12}$ , die von der Feldkraft bei der Verschiebung einer Prüfladung  $q$  vom Punkt  $P_1$  nach  $P_2$  entlang eines gewählten Weges  $C$  geleistet wird

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q u_{12} \quad (2.62)$$

Für die elektrische Spannung (und somit für die geleistete Arbeit) gilt im Fall **ruhender** Ladungen (**Elektrostatik**):

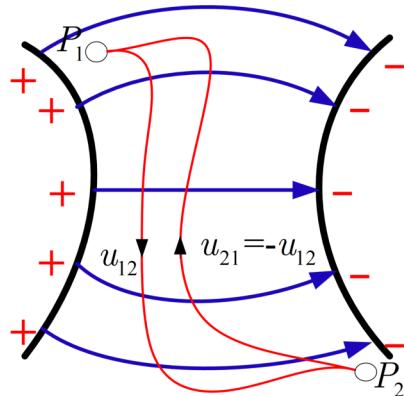
- Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ist unabhängig von der Wegkurve  $C_i$



$$u_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \forall C_i \quad (2.63)$$

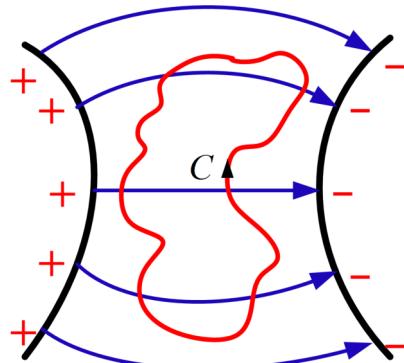
## Die elektrische Spannung

- Die Umkehrung der Wegrichtung führt zur Vorzeichenumkehr der Spannung



$$u_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -u_{21} \quad (2.64)$$

- Die elektrische Spannung über eine geschlossene Wegkurve ist Null

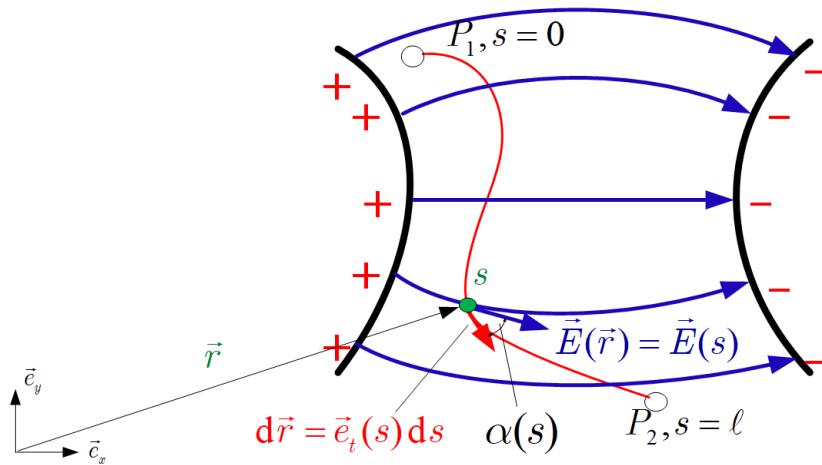


$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.65)$$

## Die elektrische Spannung

---

Zur Berechnung der Spannung wird die Wegkurve häufig auch in ihrer Parameterform als Funktion der durchlaufenen Bogenlänge  $s$  dargestellt:



$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^\ell E_t(s) ds = \int_0^\ell du \quad (2.66)$$

Hierbei ist  $E_t(s)$  die Größe der elektrischen Feldstärke in Richtung des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{e}_t(s)$  an die Wegkurve bei der Bogenlänge  $s$

$$E_t(s) = \vec{E}(s) \cdot \vec{e}_t(s) = |\vec{E}(s)| \cos(\alpha(s)) \quad (2.67)$$

Hierbei gilt außerdem für  $d\vec{r}(s) = \vec{e}_t(s) ds$

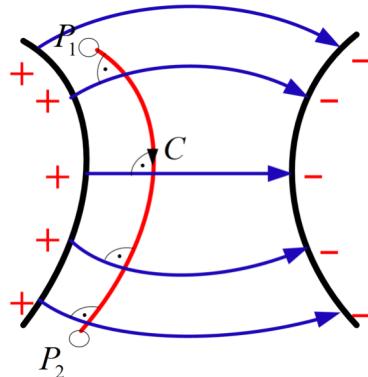
$$|\vec{e}_t(s)| = 1 \Leftrightarrow ds = |d\vec{r}(s)|. \quad (2.68)$$

## Die elektrische Spannung

---

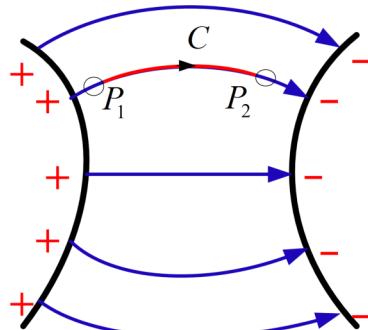
Zur Wahl des Integrationsweges kann genutzt werden, dass gilt:

- Verläuft die Wegkurve orthogonal zu den Vektoren der elektrischen Feldstärke, so ist die Spannung Null



$$u_{12} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^\ell 0 \cdot ds = 0, \text{ da } \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_t(s) = 0 \text{ auf } C \quad (2.69)$$

- Verläuft die Wegkurve parallel zu den Feldlinien in Richtung des elektrischen Feldes, so ist die Spannung gleich dem Integral über den Betrag der elektrischen Feldstärke ( $E_t(s) = |\vec{E}(s)|$ , da  $\cos(\alpha(s)) = 1$ )



$$u_{12} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^\ell |\vec{E}(s)| \cdot ds, \text{ da } \cos(\alpha(s)) = 1 \text{ auf } C \quad (2.70)$$

## 2.4 Das elektrostatische Potential

Eine neben der elektrischen Spannung häufig verwendete Größe ist das **elektrostatische Potential**.

### Elektrostatisches Potential

Das elektrostatische Potential eines elektrischen Feldes im Raumpunkt  $P_1$  bezogen auf den Referenzpunkt  $P_0$  ist definiert als

$$\varphi(P_1) = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.71)$$

Als Symbol für das elektrostatische Potential verwendet man  $\varphi$ , als Einheit **Volt** [V].

Offensichtlich gilt:

$$u_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) \quad (2.72)$$

## Das elektrostatische Potential

---

Der Begriff des elektrostatischen Potentials ist nur sinnvoll für **ruhende Ladungen**, da andernfalls die Spannung  $u_{12}$  vom gewählten Weg zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  abhängt!

Die elektrische Feldstärke ist dann ein Potentialfeld, dass sich aus dem Potential im Punkt  $P$  berechnen lässt als

$$\vec{E}(P) = -\nabla \varphi(P) \quad (2.73)$$

Des Weiteren ergibt sich für die potentielle Energie einer Probeladung  $q$  im Raumpunkt  $P_1$  des elektrischen Feldes bezogen auf den Referenzpunkt  $P_0$

$$W_{\text{pot}}(P_1) = W_{\text{pot}}(P_0) + \int_{P_0}^{P_1} \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W_{\text{pot}}(P_0) - \int_{P_0}^{P_1} q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W_{\text{pot}}(P_0) + q\varphi(P_1) \quad (2.74)$$

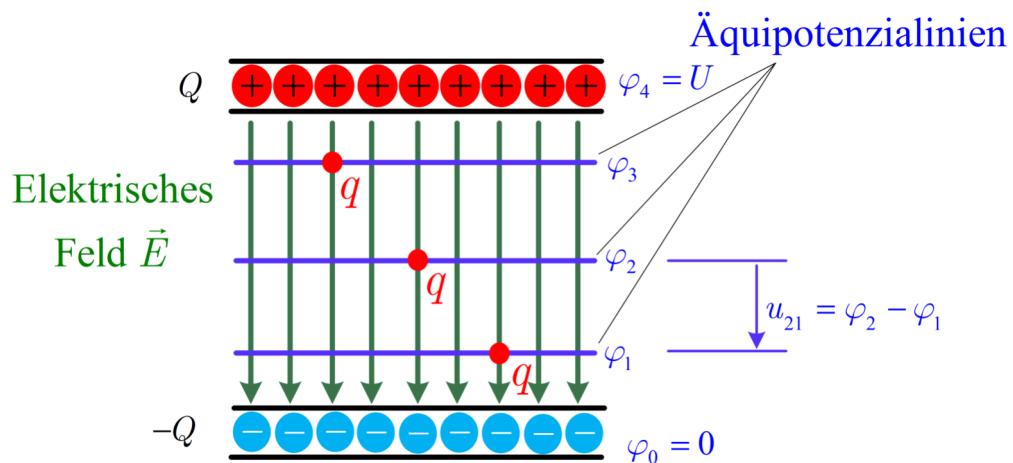
Hierbei gilt für die externe auf die Probeladung anzuwendende Kraft  $\vec{F}_{\text{ext}}(\vec{r}) = -q\vec{E}(\vec{r})$ .

Wird  $W_{\text{pot}}(P_0) = 0$  gewählt, so folgt schließlich

$$W_{\text{pot}}(P_1) = q\varphi(P_1). \quad (2.75)$$

# Das elektrostatische Potential

Die Punkte gleichen Potentials (gleichen Energiegehaltes) bilden so genannte **Äquipotenziallinien** bzw. im Raum so genannte **Äquipotentialflächen**. Hierbei gilt, dass Feldlinien und Äquipotenziallinien/-flächen immer senkrecht aufeinander stehen. Dies ist nachfolgend für das ideale homogene Feld zwischen zwei Metallplatten dargestellt.



Die negative Ladung dient als Bezugsniveau  $\varphi_0 = 0$ . Mit einer positiven Probeladung  $q$  wird das Feld vermessen. Je weiter die Ladung vom Nullniveau entfernt wird, desto mehr Arbeit ist aufzuwenden. Innerhalb eines Niveaus, parallel zu den Platten, bleibt die Energie konstant. Bezogen auf die Ladung ist dort das Potential  $\varphi$ , der Energieinhalt, definiert. Die Potentialdifferenz ist die elektrische Spannung  $U$ . Sie ist positiv, wenn der Spannungspfeil vom höheren zum niedrigeren Potential weist.

Die eingetragenen Potentialflächen haben die elektrostatischen Potentiale

$$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \frac{U}{4} \quad \varphi_2 = \frac{U}{2} \quad \varphi_3 = \frac{3}{4}U \quad \varphi_4 = U$$

## 2.5 Die elektrische Flussdichte

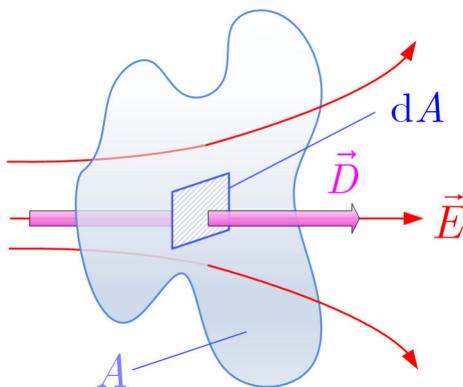
Oft stellt sich die Frage, wieviele elektrische Feldlinien ein Flächenstück normierter Größe durchdringen.

### Elektrische Flußdichte

Die elektrische Flußdichte  $\vec{D}$  ist ein Maß für die Anzahl der elektrischen Feldlinien, die durch ein Flächenstück einer gegebenen Größe  $dA$  hindurchdringen.

Die elektrische Flussdichte ist für ruhende Medien die Summe der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  gewichtet mit der Permitivität des Vakuums  $\epsilon_0$  und der elektrischen Polarisation  $\vec{P}$  des Mediums

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \left[ \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.76)$$

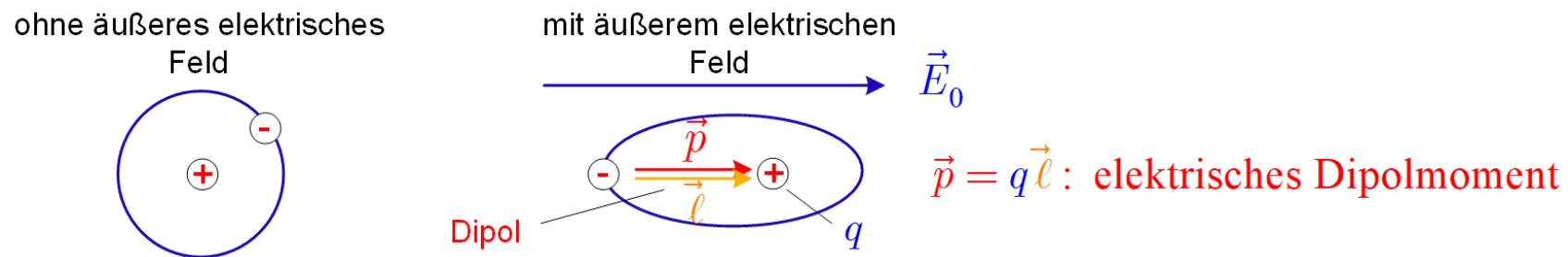


## Die elektrische Flussdichte

Die elektrische Polarisation  $\vec{P}$  kennzeichnet die Größe des Dipolmomentes in einem dielektrischen Material infolge Ladungsverschiebung.

Dielektrika sind im Allgemeinen nichtleitende Stoffe, deren Ladungsträger nicht frei beweglich sind. Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes können viele Dielektrika jedoch polarisiert werden. Man unterscheidet dabei **unpolare** und **polare** Stoffe.

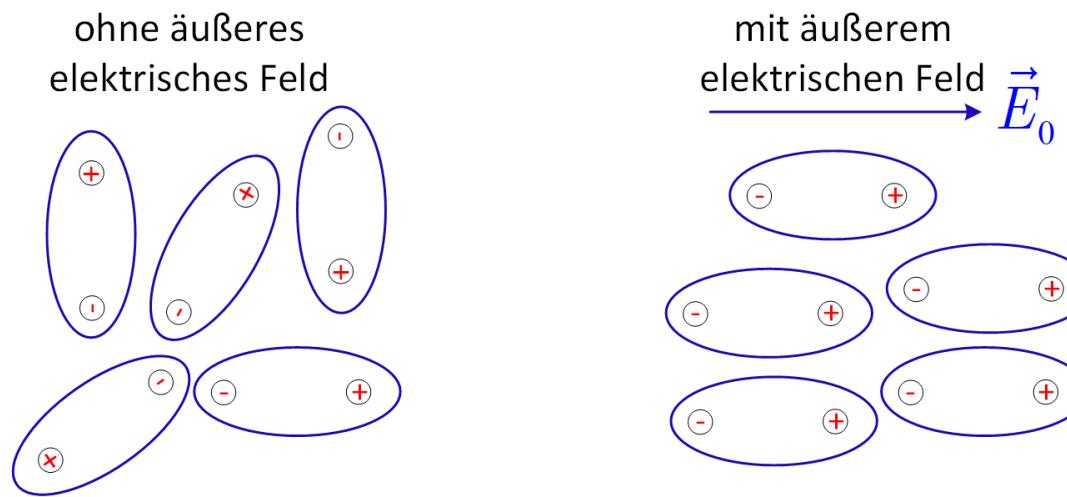
Bei den **unpolaren** Stoffen werden unter der Einwirkung des elektrischen Feldes die (positiven) Atomkerne in Feldrichtung und die (negativen) Elektronen in entgegengesetzter Richtung verschoben - **Verschiebungspolarisation**. Die an zwei gegenüberliegenden Seiten entgegengesetzte geladenen Teilchen bilden einen **Dipole**.



Ein Spezialfall der Verschiebungspolarisation ist die Ionenpolarisation, wo positive und negative Ionen im Ionengitter nach Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes verschoben werden und ein elektrisches Dipolmoment ausbilden.

## Die elektrische Flussdichte

Bei **polaren** Stoffen sind die Atome oder Moleküle von Natur aus Dipole. Wenn sie frei beweglich sind, was bei Flüssigkeiten und Gasen der Fall ist, stellen sie sich unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes in Feldrichtung ein - **Orientierungspolarisation**.



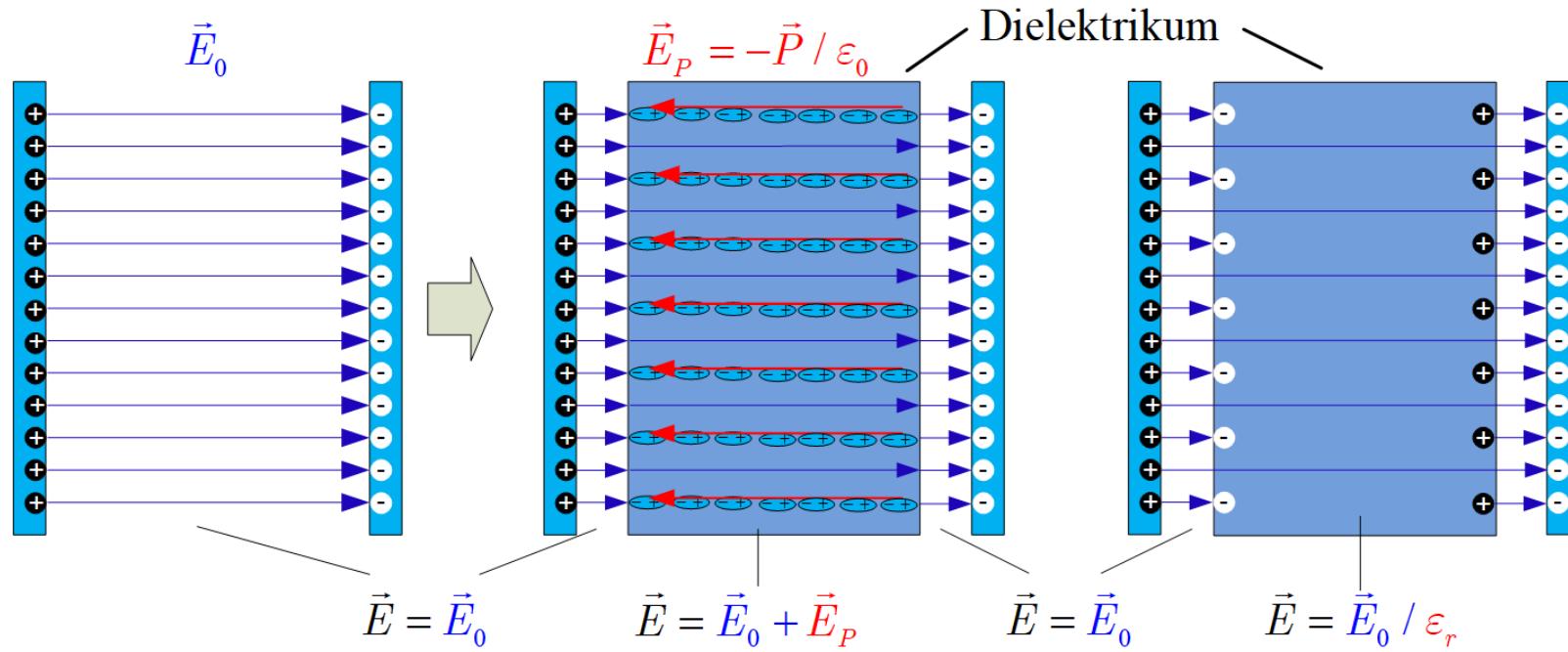
Werden innerhalb der Atome oder Moleküle die Schwerpunkte der positiven Ladungen in Richtung und die der negativen Ladungen entgegen der Richtung des äußeren Feldes  $\vec{E}_0$  verschoben, so kommt es im Volumen  $V$  zur **dielektrischen Polarisation**

$$\vec{P} = \frac{1}{|V|} \sum_k \vec{p}_k \quad (2.77)$$

Das äußere Feld  $\vec{E}_0$  entspricht hierbei dem elektrischen Feld im Vakuum.

## Die elektrische Flussdichte

Infolge des Einbringens eines Dielektrikums in ein elektrisches Feld, wird das Dielektrikum polarisiert, so dass an seiner Oberfläche Ladungsträger erzeugt werden, welche das elektrische Feld im Inneren des Dielektrikums abschwächen.



In **isotropen** (richtungsunabhängig) homogenen linearen Stoffen ist die Polarisation proportional dem äußeren elektrischen Feld  $\vec{E}_0$  bzw. dem resultierenden elektrischen Feld  $\vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (2.78)$$

## Die elektrische Flussdichte

---

Somit sind in **isotropen** homogenen Stoffen die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  zueinander proportional. Es gilt dann

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.79)$$

- $\varepsilon$  : **Permittivität** oder Dielektrizitätskonstante
- $\varepsilon_0$  : **elektrische Feldkonstante** oder **Permittivität des leeren Raumes/Vakuums**

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (2.80)$$

- $\varepsilon_r$  : **relative Permittivität** des Stoffes oder Permittivitätszahl oder Dielektrizitätszahl.

$\varepsilon_r$  beschreibt das Verhältnis der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_0$  im Vakuum zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  im Dielektrikum bei gleicher Flussdichte  $\vec{D}$ .

Speziell im Vakuum gilt  $\varepsilon_r = 1$ , da dort keine Polarisation auftreten kann, und somit

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2.81)$$

- $\chi$  : **dielektrische Suszeptibilität** des Stoffes mit  $\chi = 1 - \varepsilon_r$ .

## Die elektrische Flussdichte

---

Die relative Permittivität verschiedener Stoffe ist nachfolgend aufgelistet:

<b>Stoff</b>	$\epsilon_r$	<b>Stoff</b>	$\epsilon_r$
Trockene Luft	1,000594	Polyäthylen	2,3
Bariumtitanat	>1000	Hartpapier	5,0...6,0
Glas	4...12	Papier	1,2...3,0
Glimmer	4...8	Pertinax	3,5...5,5
Plexiglas	3	Quarz	3,5...4,5
Porzellan	6	Quarzglas	4
Transformatorenöl	2,3	Wasser (destilliert)	81

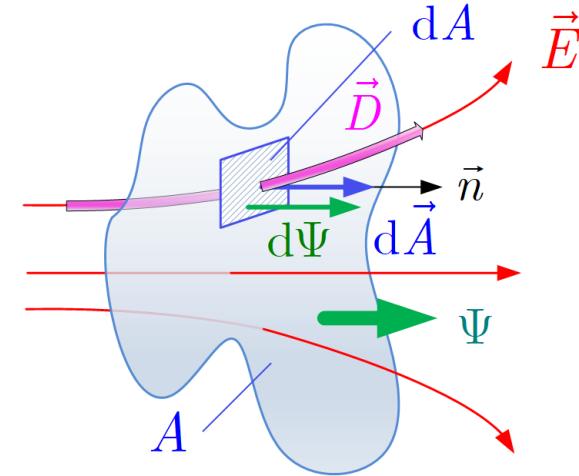
Anmerkungen:

- Neben dem Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes kann bei so genannten Piezoelektrika auch eine äußere mechanische Kraft zu einer Polarisierung führen.
- Bei anisotropen Stoffen wird die Polarisation als Funktion des elektrischen Feldes mittels Tensoren beschrieben.

## Die elektrische Flussdichte

Aus der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  folgt der das Flächenelement  $dA$  durchdringende elektrische Fluss  $d\Psi$ :

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A} = |\vec{D}| |d\vec{A}| \cos \alpha \quad (2.82)$$



Durch Integration findet man den eine beliebige Fläche  $A$  durchdringenden gesamten Fluss.

### Elektrischer Fluss

Der elektrische Fluß  $\Psi$  durch ein Flächenstück  $A$ , dass von der elektrischen Flußdichte  $\vec{D}$  durchfütet wird, ist gegeben als

$$\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad [\text{As}], [\text{C}] \quad (2.83)$$

## Die elektrische Flussdichte

Der elektrische Fluss hat die gleiche Einheit wie die elektrische Ladung. Dies ist kein Zufall, denn nach der 1. Maxwell'schen Gleichung gilt:

### 1. Maxwell'sche Gleichung/Gauß'sches Gesetz für elektrische Felder

Die Divergenz der elektrischen Flussdichte ist gleich der Ladungsdichte  $\rho$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.84)$$

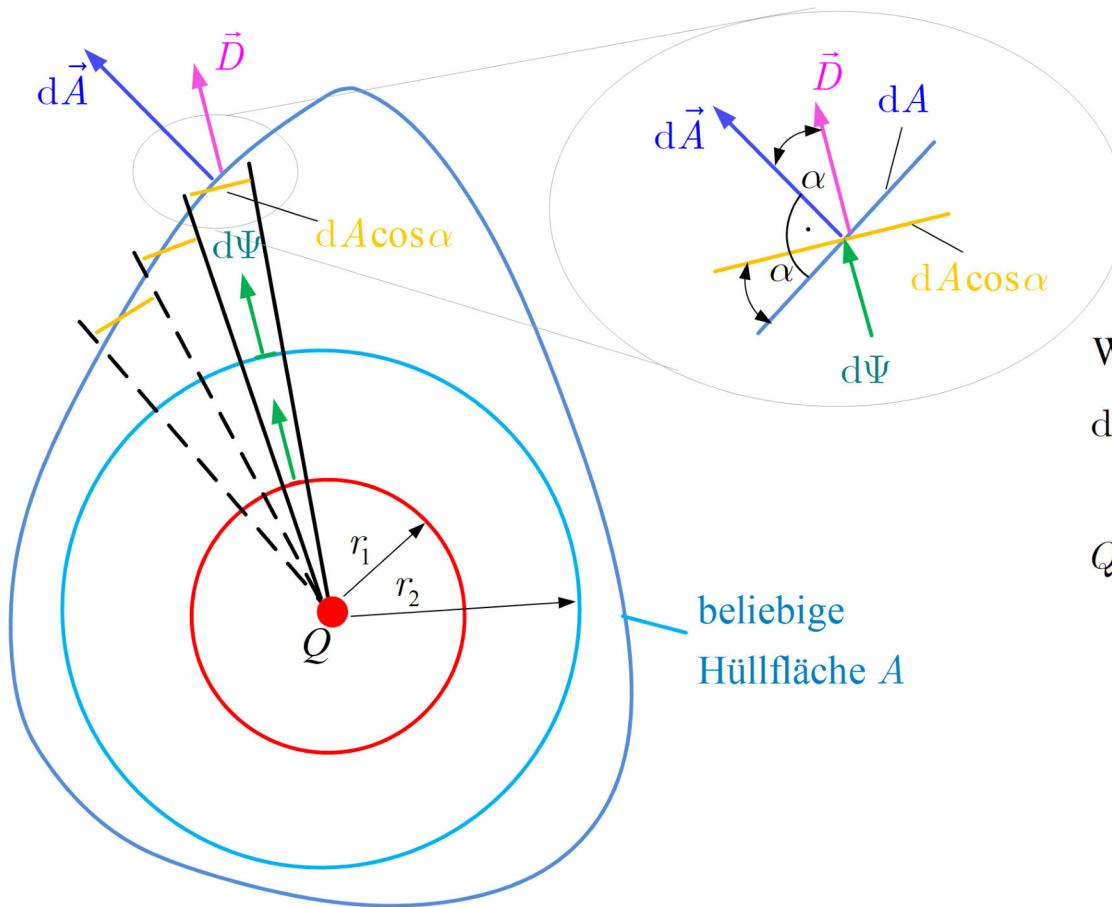
bzw. das Integral der elektrischen Flussdichte durch eine beliebig geschlossene Hüllfläche  $A$  ist gleich dem Integral über die Ladungsdichte innerhalb des von der Hüllfläche begrenzten Volumens und somit der von der Hüllfläche eingeschlossenen Ladung  $Q$  (Gauß'scher Integralsatz)

$$\iint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV = Q \quad (2.85)$$

Eine Konsequenz ist, dass der gesamte elektrische Fluß durch eine geschlossene Hüllfläche gleich der von der Hüllfläche eingeschlossenen Ladungsmenge ist

$$\Psi_A = \iint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad (2.86)$$

## Die elektrische Flussdichte



Wenn  $d\vec{A}$  nicht senkrecht auf  $\vec{D}$  steht, dann gilt:

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A} = |\vec{D}| |d\vec{A}| \cos(\vec{D}, d\vec{A}) = D dA \cos \alpha$$

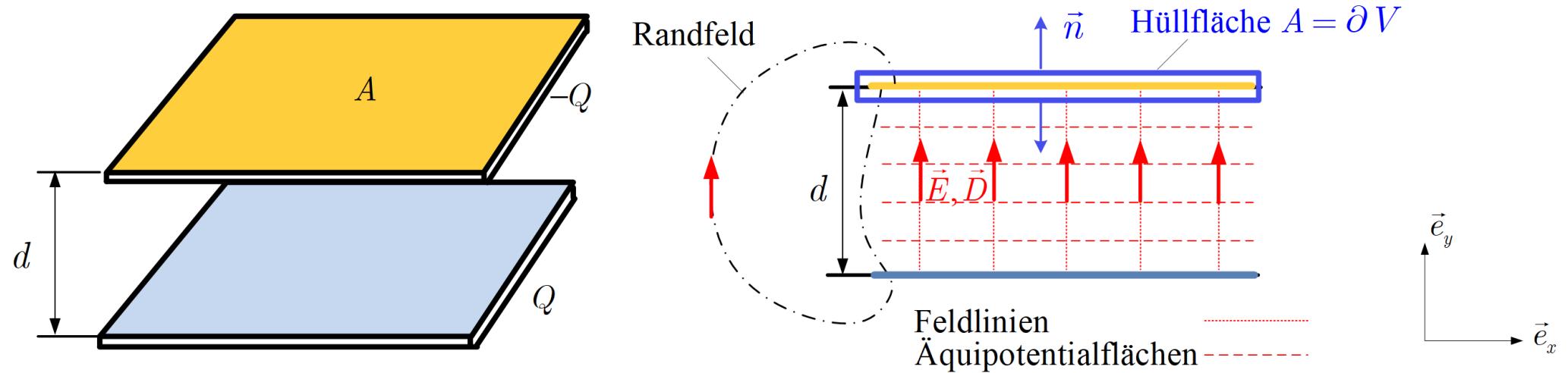
$$Q = \Psi = \vec{D}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \dots = \sum_k \vec{D}_k \cdot d\vec{A}_k$$

Speziell im Vakuum gilt mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\epsilon_0 \iint_{A=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \quad (2.87)$$

## Die elektrische Flussdichte

Wir betrachten als Spezialfall einen so genannten idealen Plattenkondensator im Vakuum, der aus zwei parallelen Metallplatten  $a$  und  $b$  mit der Fläche  $A$  besteht, wobei die obere die Ladung  $-Q$  und die untere die Ladung  $Q$  trägt.



Auf Grund der Symmetrie verläuft das idealisierte homogene elektrische Feld  $\vec{E}$  und damit auch die homogene elektrische Flußdichte  $\vec{D}$  senkrecht zu den Metallplatten und es gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \begin{cases} D \vec{e}_y, & \text{zwischen den Platten} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.88)$$

## Die elektrische Flussdichte

---

Für die elektrische Flußdichte durch eine um die obere Metallplatte gelegte Hüllfläche gilt somit

$$-Q = \iint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_A D \vec{e}_y \cdot (-\vec{e}_y) dA = -D \cdot A \quad (2.89)$$

Somit gilt für die Stärke der elektrischen Flußdichte zwischen den Platten bzw. für die elektrische Feldstärke

$$D = \frac{Q}{A}, \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad (2.90)$$

und es folgt für die elektrische Feldstärke im Plattenkondensator

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \vec{e}_y. \quad (2.91)$$

## 2.6 Berechnung elektrostatischer Felder

---

Es wurden verschiedene Größen zur Beschreibung elektrischer Felder eingeführt

- die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$
- die elektrische Flußdichte  $\vec{D}$
- das elektrostatische Potential  $\varphi$
- die elektrische Spannung  $u$

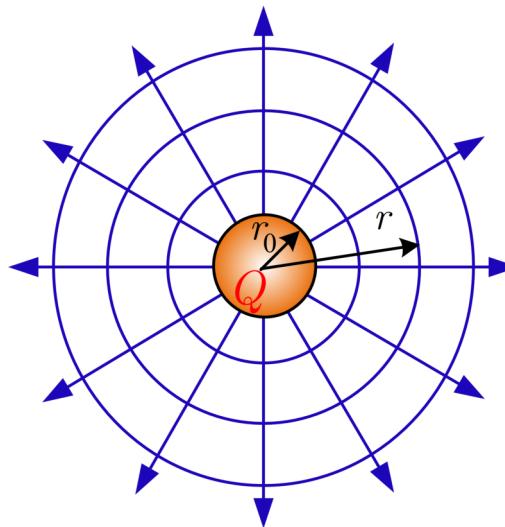
Diese Größen werden bestimmt durch

- die elektrische Ladung  $Q$  und ihre räumliche Verteilung
- bzw. die räumliche elektrische Ladungsdichte  $\rho$ .

Für häufig auftretende Anwendungsfälle bzw. Formen elektrischer Felder sollen diese Größen nun bestimmt werden.

## 2.6.1 Das Feld der geladenen Kugel

Zuerst betrachten wir den Fall einer elektrisch geladenen Metallkugel. Diese Kugel trage die positive Ladung  $Q > 0$  und besitze den Radius  $r_0$ . Die zugehörige negative Ladung  $-Q$  befindet sich auf einer äußeren Hohlkugel mit unendlich großem Radius mit dem selben Mittelpunkt wie die innere Kugel. Die Permittivität außerhalb der Kugel sei  $\varepsilon$ .



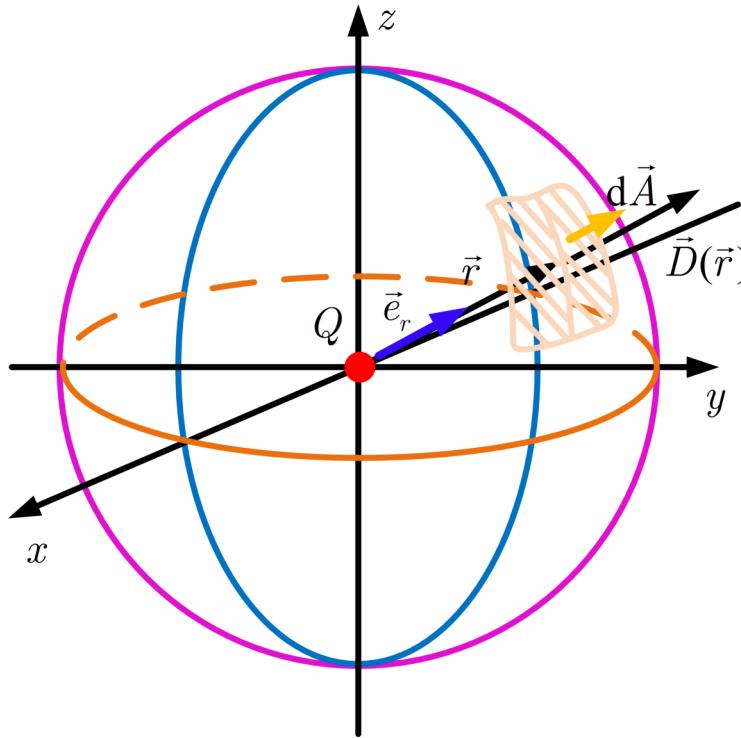
Auf Grund der Geometrie der Anordnung verlaufen die elektrischen Feldlinien radial von innen nach außen und sind gleichmäßig verteilt.

Die elektrische Flussdichte folgt somit allgemein der Gleichung

$$\vec{D} = D(r) \vec{e}_r = \varepsilon E(r) \vec{e}_r \quad (2.92)$$

## Das Feld der geladenen Kugel

$\vec{e}_r$  bezeichnet hier den radialen Einheitsvektor in Kugelkoordinaten.



Die Oberflächen konzentrischer Kugeln mit Radien  $r \geq r_0$  bilden die Äquipotenzialflächen der gegebenen Punktladung. Ihre Oberflächengröße ist

$$A(r) = 4\pi r^2 \quad (2.93)$$

## Das Feld der geladenen Kugel

---

Aus Gl. (2.85) folgt bei Integration auf der Oberfläche einer konzentrischen Kugel mit Radius  $r \geq r_0$ , Normalevektor  $\vec{e}_r$  und gerichtetem Flächenelement  $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$

$$Q = \iint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint D(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dA = \iint D(r) dA = D(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (2.94)$$

Die elektrische Flussdichte hat somit im Abstand  $r \geq r_0$  vom Mittelpunkt der geladenen Metallkugel den Betrag

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (2.95)$$

Mit der Gl.  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  folgt für die elektrische Feldstärke im Abstand  $r \geq r_0$  vom Zentrum

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \quad (2.96)$$

## Das Feld der geladenen Kugel

---

Zur Bestimmung des auf einer kugelförmigen Äquipotentialfläche mit  $r > r_0$  vorhandenen elektrostatischen Potentials  $\varphi(r)$  ist zuerst ein Bezugspunkt festzulegen. Auf Grund des Verschwindens des elektrischen Feldes für wachsende Radien

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{E}(r)| = 0 \quad (2.97)$$

bietet sich als Bezugspunkt ein Punkt mit Radius  $r_\infty = \infty$  an. Das Potential auf der Kugeloberfläche mit Radius  $r > r_0$  ist dann

$$\varphi(r) = - \int_{r_\infty}^r \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} \quad (2.98)$$

Zweckmäßigerweise wählt man einen Integrationsweg in radialer Richtung, d.h. man integriert entlang einer Feldlinie/des radialen Einheitsvektors mit  $d\vec{s} = \vec{e}_r ds$ . Dies führt auf

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon s^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon s^2} ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{1}{s} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (2.99)$$

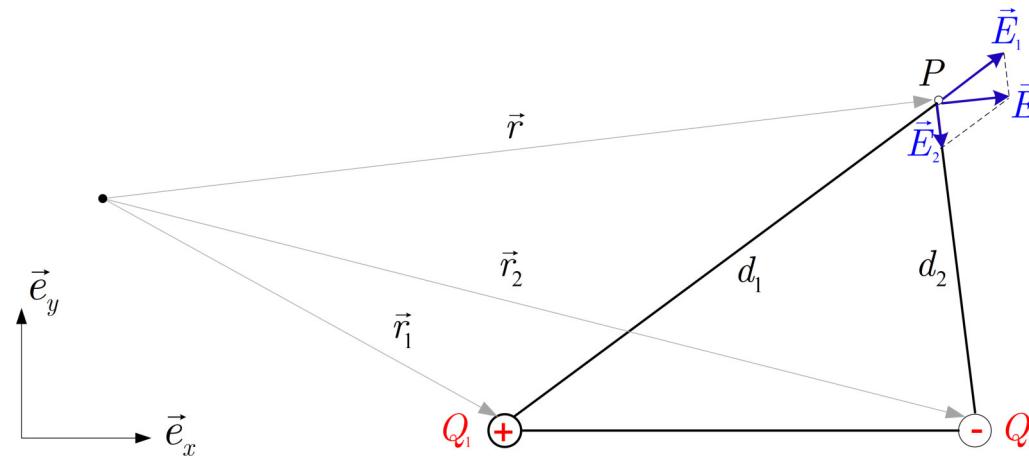
Damit ergibt sich für das elektrostatische Potential im Abstand  $r \geq r_0$  vom Mittelpunkt der Punktladung  $Q$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \quad r \geq r_0. \quad (2.100)$$

## 2.6.2 Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen

Eine positive Punktladung  $Q_1$  und eine negative Punktladung  $Q_2$  seien entsprechend folgendem Bild in einem Medium mit Permittivität  $\varepsilon$  angeordnet.

Welche elektrische Feldstärke herrscht im Punkt P und welches elektrisches Potential besitzt dieser Punkt?



Zur Lösung bestimmt man zuerst die elektrischen Felder, die jede einzelnen Punktladung erzeugt und überlagert dann die Ergebnisse.

- Die Ladung  $Q_1$  erzeugt gemäß Gl. (2.96) im Punkt P eine Feldstärke mit der Amplitude

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d_1^2}$$

## Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen

---

- Die Ladung  $Q_2$  erzeugt gemäß Gl. (2.96) im Punkt P eine elektrische Feldstärke mit der Amplitude

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon d_2^2}$$

Hierbei sind die Abstände  $d_1$  und  $d_2$  gegeben als

$$d_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|, \quad i = 1, 2$$

und die Feldstärkevektoren sind dann

$$\vec{E}_i = E_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{d_i} = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon d_i^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \quad i = 1, 2$$

Die vektorielle Addition von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  liefert die im Punkt P vorhandene Gesamtfeldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( Q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + Q_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right)$$

Zur Bestimmung des im Punkt P vorhandenen elektrostatischen Potentials addieren wir diejenigen Potentiale, die von den Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  erzeugt werden.

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon d_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon d_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2} \right) \quad (2.101)$$

## Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen

---

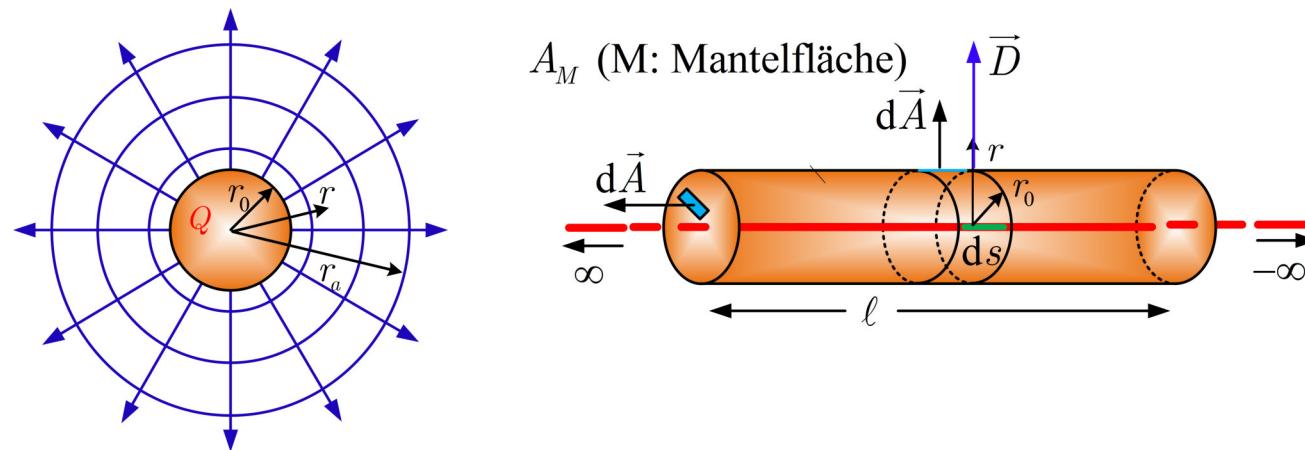
Mit Hilfe des elektrischen Feldes und des Potentials können nun z.B. die

- die Kraft auf eine Probeladung  $q$  im Punkt  $P$
- die zu leistende mechanische Arbeit zur Verschiebung der Probeladung  $q$  zwischen den Punkten  $P$  und  $P'$
- die Spannung zwischen zwei Punkten  $P$  und  $P'$
- ...

berechnet werden. Dies ist Teil der Übung.

### 2.6.3 Das Feld eines geladenen langen, geraden Leiters

Betrachtet wird abschließend das Modell eines geraden Leiters der Länge  $\ell$  mit dem Radius  $r_0$  und der (positiven) Ladung  $Q$ . Die korrespondierende Ladung  $-Q$  sei wieder sehr weit entfernt auf einem koaxialen Hohlzylinder mit dem Leiter als Mittelachse.



Auf Grund der Symmetrie der Anordnung verlaufen die elektrischen Feldlinien radial vom Leiter nach außen. Es gilt also

$$\vec{D}(r) = D(r)\vec{e}_r \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

wobei  $\vec{e}_r$  der Einheitsvektor der Zylinderkoordinaten in radialer Richtung ist.

Die Äquipotentialflächen sind nun die Oberflächen koaxialer Hohlzylinder (Randeffekte am Anfang und Ende der Anordnung werden vernachlässigt).

## Das Feld eines geladenen langen, geraden Leiters

---

Die Oberfläche einer Äquipotentialfläche mit dem Radius  $r$  ist

$$A(r) = 2\pi r \ell \quad (2.102)$$

Für die durch eine Äquipotentialfläche mit Radius  $r$  hindurchtretende elektrische Flussdichte mit dem gerichteten Flächenelement  $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$  gilt

$$Q = \iint \vec{D}(r) \cdot d\vec{A} = \iint D(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dA = \iint D(r) dA = D(r) \cdot A(r) = D(r) \cdot 2\pi r \ell \quad (2.103)$$

Somit gilt in einem Dielektrikum mit Permittivität  $\varepsilon$

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r \ell} \vec{e}_r \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r \ell} \vec{e}_r, \quad r \geq r_0 \quad (2.104)$$

Das Potential im Abstand  $r$  vom Leitermittelpunkt bezogen auf einen Punkt bei  $r_0$  kann wieder durch Integration entlang einer radialen Feldlinie bestimmt werden (Wegelement- und Feldstärkevektor sind parallel)

$$\varphi(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^{r_0} \frac{Q}{2\pi \varepsilon s \ell} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds = \frac{Q}{2\pi \varepsilon \ell} \ln(s) \Big|_r^{r_0} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon \ell} \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad (2.105)$$

## Das Feld eines geladenen langen, geraden Leiters

---

Infolge der Wahl des Bezugspunktes bei  $r_0$  gilt

$$\varphi(r_0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \leq 0. \quad (2.106)$$

Alternativ kann der Bezugspunkt auch bei  $r = \rho_0 > r_0$  gewählt werden. Dies ergibt dann

$$\varphi(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln\left(\frac{\rho_0}{r}\right) \quad (2.107)$$

Dividert man die Ladung  $Q$  durch die Länge des Leiters  $\ell$ , so erhält man mit der Linienladungsdichte  $\tau = Q/\ell$  das Potential des unendlich langen Leiters bei konstanter Linienladungsdichte  $\tau$

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\rho_0}{r}\right) \quad (2.108)$$

Die Spannung  $u_{12}$  zwischen zwei Punkten  $P_1$  bei Radius  $r_1$  und  $P_2$  beim Radius  $r_2$  ist somit

$$u_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad r_1, r_2 \geq r_0. \quad (2.109)$$

bzw. für  $\ell \rightarrow \infty$  mit konstanter Linienladungsdichte  $\tau = \text{konstant}$  als

$$u_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad r_1, r_2 \geq r_0. \quad (2.110)$$

Anmerkungen:

- Im Fall der Elektrostatik lässt sich das elektrische Feld mit Hilfe eines Potentials beschreiben als

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (2.111)$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (2.85) liefert in isotropen homogenen Medien

$$\iint_{A=\partial V} -\varepsilon \nabla \varphi \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV \quad (2.112)$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz gilt

$$\iint_{A=\partial V} -\varepsilon \nabla \varphi \cdot d\vec{A} = \iiint_V -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \varphi dV = \iiint_V -\varepsilon \Delta \varphi dV, \quad (2.113)$$

woraus die skalare **Poisson-Gleichung** folgt

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \quad (2.114)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte der "freien" Ladungsträger exklusive der durch Polarisation mikroskopisch vorhandenen Ladungsträger.

- Das elektrostatische Potential und das elektrische Feld lassen sich für eine allgemeine im Endlichen liegende Ladungsverteilung mit Raumladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  durch Superposition/Überlagerung infinitesimaler/differentieller Punktladungsbeiträge berechnen als

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\bar{V} \quad (2.115)$$

und

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\bar{V}. \quad (2.116)$$

Dies ist die Erweiterung der Berechnung des elektrischen Feldes einer Punktladung auf ein Kontinuum von Punktladungen, die mit der Ladungsdichte  $\rho$  im Volumen  $V$  verteilt sind.

## Elektrisches Feld

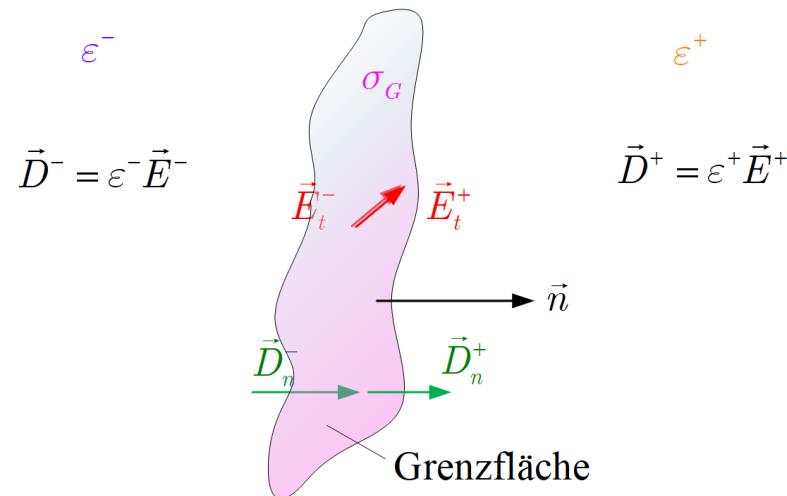
---

- An einer Grenzfläche mit der Flächenladungsdichte  $\sigma_G$  zwischen zwei Stoffen mit den Permittivitäten  $\varepsilon^-$  und  $\varepsilon^+$  folgen aus  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$  und  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  im elektrostatischen Fall die Kontinuitätsbedingungen
  - Links- und rechtsseitige elektrische Feldstärke tangential zur Grenzfläche sind identisch

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0}: \quad \vec{E}_t^- = \vec{E}_t^+ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{D}_t^-}{\varepsilon^-} = \frac{\vec{D}_t^+}{\varepsilon^+} \quad (2.117)$$

- Links- und rechtsseitige elektrische Flussdichte in Normalenrichtung der Grenzfläche unterscheiden sich durch die Flächenladungsdichte  $\sigma_G$  der Grenzfläche

$$\operatorname{Div} \vec{D} = \vec{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \sigma_G: \quad \vec{D}_n^- + \sigma_G = \vec{D}_n^+ \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^- \vec{E}_n^- + \sigma_G = \varepsilon^+ \vec{E}_n^+ \quad (2.118)$$

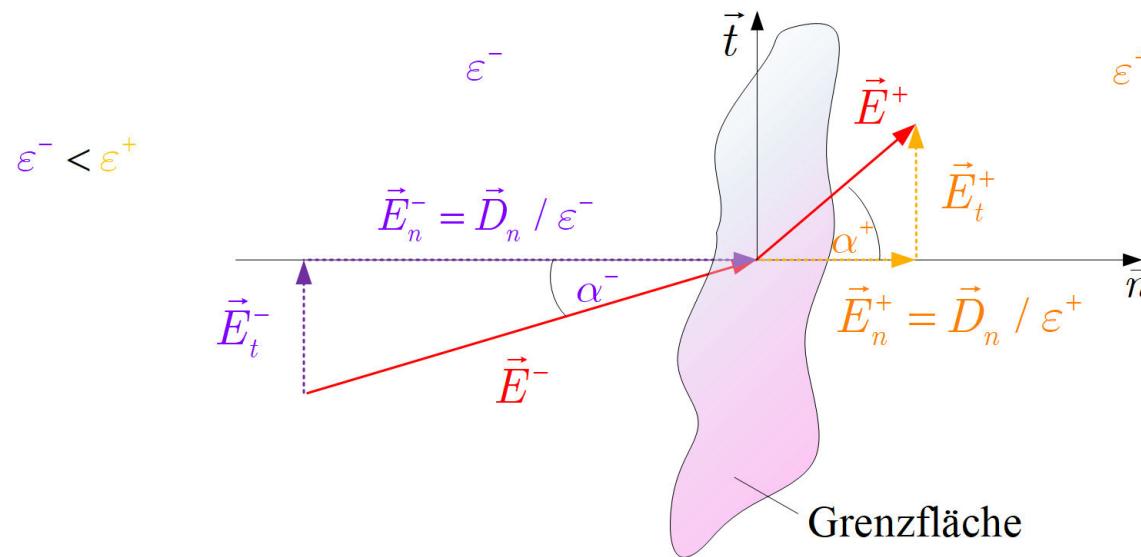


## Elektrisches Feld

---

Als Konsequenz der unterschiedlichen Permittivitäten tritt eine **Brechung** des elektrischen Feldes an der Grenzfläche auf. So gilt für  $\sigma_G = 0$

$$\vec{E}_t^- = \vec{E}_t^+ \quad \text{und} \quad \varepsilon^- \vec{E}_n^- = \varepsilon^+ \vec{E}_n^+ \quad (2.119)$$



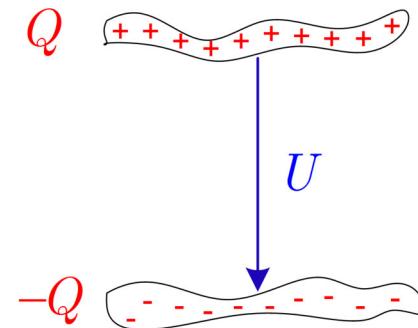
Aus dem Bild folgt

$$\tan(\alpha^-) = \frac{E_t^-}{E_n^-} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha^+) = \frac{E_t^+}{E_n^+} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan(\alpha^+)}{\tan(\alpha^-)} = \frac{E_t^+}{E_n^+} \cdot \frac{E_n^-}{E_t^-} = \frac{E_n^-}{E_t^-} = \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} \quad (2.120)$$

## 2.7 Die elektrische Kapazität

---

Wir betrachten zwei beliebig geformte voneinander isolierte elektrische leitende Körper (Elektroden), die die Ladungen  $Q$  und  $-Q$  tragen.



Wir wissen, dass die Spannung  $U$  proportional zur Ladung  $Q$  ist

$$Q \sim U$$

Die Proportionalitätskonstante ist die Kapazität der Anordnung.

## Elektrische Kapazität

Die elektrische Kapazität  $C$  zweier beliebig geformter voneinander isolierter leitender Körper, welche die Ladungen  $Q$  und  $-Q$  tragen und eine Spannung  $U$  aufweisen, ist gegeben als

$$C = \frac{Q}{U}, \quad [\text{As/V}], [\text{F}]. \quad (2.121)$$

Die Kapazität hängt im Allgemeinen ab von

- der Geometrie der Elektroden
- den Materialeigenschaften des Raumes zwischen den Elektroden

## Die elektrische Kapazität

---

Anmerkung: Obiger Zusammenhang gilt auch für zeitveränderliche Spannungen und Ladungen

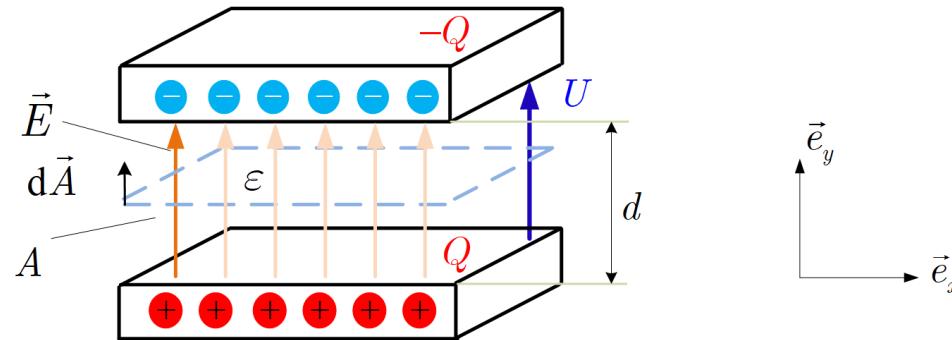
$$u(t) = \frac{1}{C}q(t) \quad (2.122)$$

und ergibt die nach Definition der Stromstärke folgende Strom-Spannungs-Beziehung der Kapazität

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \quad (2.123)$$

## 2.7.1 Kapazität des Plattenkondensators

**Plattenkondensator:** Eine Anordnung aus zwei ebenen, sich parallel gegenüberstehenden Metallplatten, deren Zwischenraum mit einem Dielektrikum gefüllt ist.



Für diese Anordnung haben wird die elektrische Feldstärke im Vakuum berechnet als (siehe Gl. (2.90))

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \vec{e}_y. \quad (2.124)$$

Die zugehörige Spannung  $U$  bei Verwendung eines isotropen Dielektrikums mit der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  anstelle von Vakuum ist dann

$$U = \frac{d}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \cdot Q = \frac{d}{\epsilon A} \cdot Q \quad (2.125)$$

## Kapazität des Plattenkondensators

---

Die Kapazität des Plattenkondensators ist somit

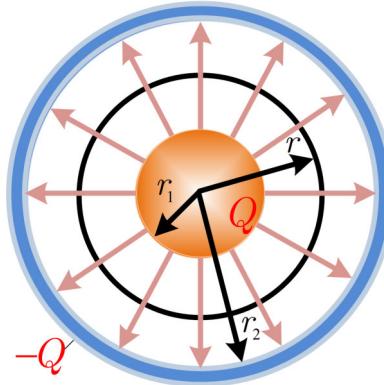
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \quad (2.126)$$

Es gilt somit, dass die Kapazität  $C$  eines Plattenkondensators

- direkt proportional zur Plattengröße  $A$  ist.
- umgekehrt proportional zum Plattenabstand  $d$  ist.
- direkt proportional zur Permittivität des Dielektrikums  $\varepsilon$  ist.

## 2.7.2 Kapazität des Kugelkondensators

**Kugelkondensator:** Eine radialsymmetrische Anordnung aus zwei konzentrischen dünnwandigen Metall-Hohlkugeln mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , deren Zwischenraum mit einem Dielektrikum mit der Permittivität  $\varepsilon$  gefüllt ist.



Tragen die Hohlkugeln die Ladungen  $Q$  und  $-Q$ , so gilt für das elektrische Feld auf der Äquipotentialfläche mit Radius  $r$  (siehe Gl. (2.96))

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{e}_r \quad (2.127)$$

Die zugehörige Spannung  $U$  zwischen den beiden Hohlkugeln ergibt sich dann als

$$U = \int_{P(r_1)}^{P(r_2)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.128)$$

## Kapazität des Kugelkondensators

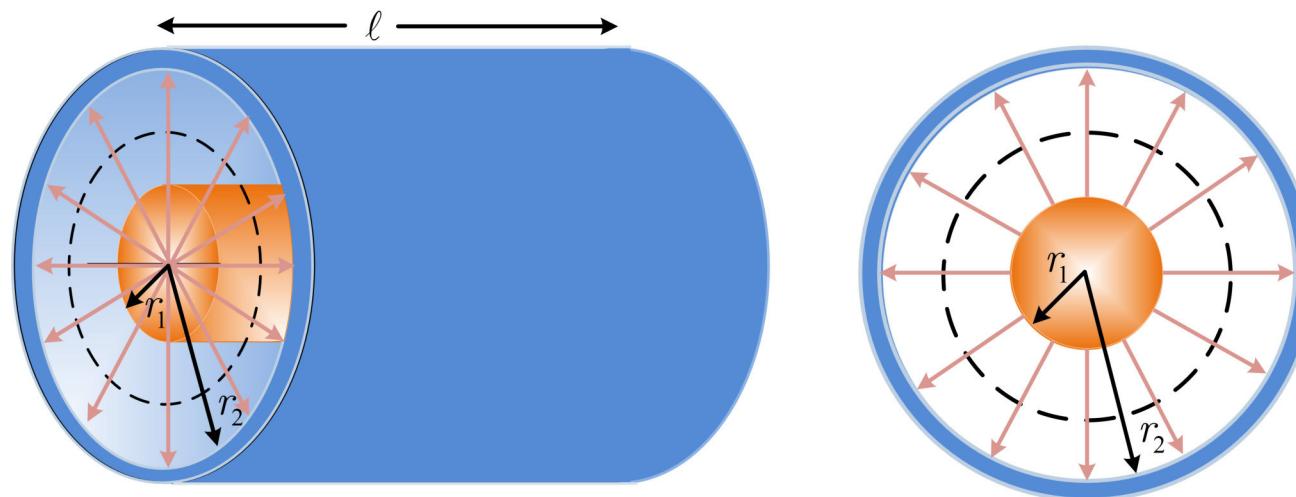
---

So erhält man die gesuchte Kapazität des Kugelkondensator als

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (2.129)$$

## 2.7.3 Kapazität des Zylinderkondensators

**Zylinderkondensator:** Eine Anordnung aus zwei gleich langen, koaxialen elektrisch leitenden Hohlzylindern mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , deren Zwischenraum mit einem Dielektrikum mit der Permittivität  $\varepsilon$  gefüllt ist.



Die Länge  $\ell$  jedes Zylinders sei vergleichsweise groß gegenüber den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , d.h.  $\ell \gg r_2 > r_1$ , so dass die Felder an den Enden der Hohlzylinder vernachlässigt werden können.

## Kapazität des Zylinderkondensators

---

Tragen die Hohlzylinder die Ladungen  $Q$  und  $-Q$ , so gilt in Analogie zum elektrisch geladenen Leiter für die Spannung zwischen den beiden Hohlzylindern (siehe Gl. (2.109))

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (2.130)$$

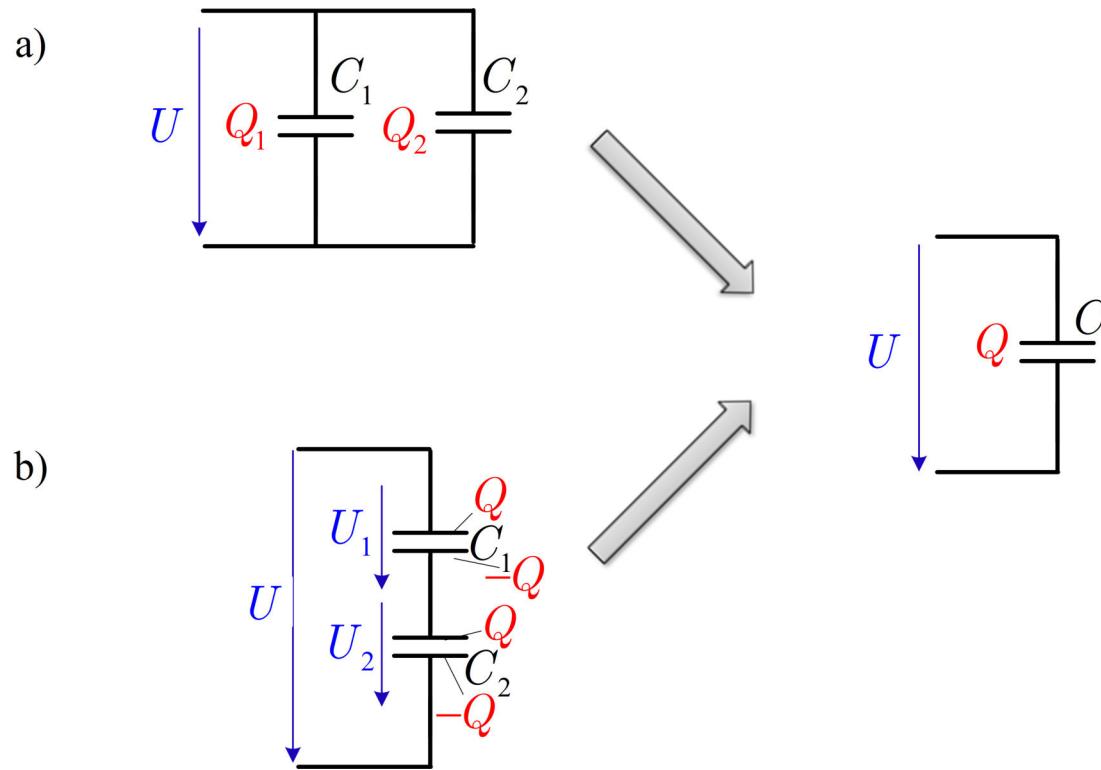
Daraus erhält man die gesuchte Kapazität des Zylinderkondensators als

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.131)$$

## 2.7.4 Zusammenschaltung von Kondensatoren

---

Kondensatoren mit den Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  können in Parallel- oder Reihenschaltung miteinander verbunden werden:



## Zusammenschaltung von Kondensatoren

---

- **Parallelschaltung** (Bild a))

Werden zwei Kondensatoren parallel verbunden, so gilt

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad U = U_1 = U_2 \quad C_i = \frac{Q_i}{U_i} = \frac{Q_i}{U}, \quad i = 1, 2$$

Die Gesamtkapazität  $C$  der Anordnung ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = C_1 + C_2 \tag{2.132}$$

Bei der **Parallelschaltung von Kondensatoren** ist die Gesamtkapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten  $C_i$

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \tag{2.133}$$

## Zusammenschaltung von Kondensatoren

---

- **Reihenschaltung** (Bild b))

Werden zwei Kondensatoren mit identischer elektrischer Ladung in Reihe (seriell) verbunden, so gilt

$$Q = Q_1 = Q_2 \quad U = U_1 + U_2 \quad C_i = \frac{Q_i}{U_i} = \frac{Q}{U_i}, \quad i = 1, 2$$

Die Gesamtkapazität  $C$  der Anordnung ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.134)$$

bzw.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2.135)$$

Allgemein gilt also für die **Reihenschaltung von Kondensatoren**, dass der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten ist

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.136)$$

## Zusammenschaltung von Kondensatoren

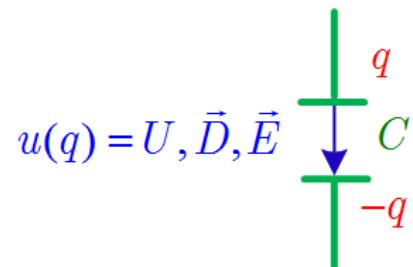
---

- Anmerkungen:
  - Die identischen Ladungen auf beiden Kondensatoren sind im Fall der Reihenschaltung in der Praxis dadurch bedingt, dass die von der obersten Kondensatorelektrode abgezogenen Elektronen der untersten Kondensatorelektrode zugeführt werden und sukzessive auf den dazwischen liegenden Elektroden die entsprechenden negativen Ladungen influenzieren.
  - Kondensatoren mit unterschiedlichen übereinander bzw. parallel zueinander angeordneten Dielektrika können als Reihen- bzw. Parallelschaltung einzelner Kondensatoren mit nur einem Dielektrikum betrachtet und ihre Kapazität daraus berechnet werden.

## 2.8 Die Energie des elektrischen Feldes

---

Ein geladener Kondensator/Anordnung zweier elektrisch leitender Körper mit der Kapazität  $C$  speichert im elektrischen Feld Energie.



Frage:

Wieviel Energie ist auf der Ladungsanordnung/Kondensator gespeichert, wenn sich auf den Elektroden die Ladungsmenge  $Q$  bzw.  $-Q$  befindet und die Anordnung die Kapazität  $C$  besitzt?

Annahme:

Es befindet sich zunächst die Ladungsmenge  $q$  auf dem Kondensator. Zwischen den beiden Elektroden liegt somit die Spannung

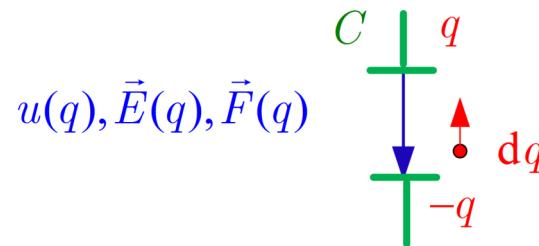
$$u(q) = \frac{q}{C}. \quad (2.137)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

Um eine weitere kleine Ladungsmenge  $dq$  von der unteren zur oberen Elektrode zu verschieben muss die Arbeit

$$dW(q) = \int_C d\vec{F}_{ext}(q) \cdot d\vec{r} = \int_C -d\vec{F}(q) \cdot d\vec{r} = -dq \int_C \vec{E}(q) \cdot d\vec{r} = dq \cdot u(q) = dq \cdot \frac{q}{C} \quad (2.138)$$

verrichtet werden, wobei der Weg  $C$  entgegengesetzt zum elektrischen Feld verläuft.



Die insgesamt zu verrichtende Arbeit, um die Ladungsmenge  $Q$  auf dem Kondensator zu speichern ist also

$$W = \int_0^Q dW(q) = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 \quad (2.139)$$

Der Energieinhalt des elektrostatischen Feldes ist somit

$$W = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (2.140)$$

## Energie des elektrischen Feldes

Die Elektroden einer Ladungsanordnung/Kondensators mit der Kapazität  $C$  seien geladen mit den Ladungen  $Q$  und  $-Q$  und die Spannung zwischen ihnen sei  $U$ . Die Energie des resultierenden elektrischen Feldes ist

$$W = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U \quad (2.141)$$

Anmerkung:

Verglichen mit chemischen Elementen und Akkumulatoren eignet sich ein Kondensator als Energiespeicher weniger gut. Er ist vielmehr ein schneller Energiespeicher, der in sehr kurzen Zeiten geladen und entladen werden kann.

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Eine Ladungsänderung  $dq$  ist somit mit einer Energieänderung und mit einer Änderung der elektrischen Flussdichte verbunden.

Dies kann verallgemeinert werden unter Ausnutzung der ersten Maxwell'schen Gleichung, mit der wir die Ladungsänderung  $dq$  auch ausdrücken können als infinitesimale Änderung der elektrischen Flußdichte  $d\vec{D}$  durch eine geschlossene Hülle  $A$  bei gegebener augenblicklicher Ladung  $q$

$$dq = \iint_A d\vec{D}(q) \cdot d\vec{A} \quad (2.142)$$

Einsetzen in Gl. (2.138) liefert ( $d\vec{r}$  ist jetzt in Richtung des elektrischen Feldes und damit  $d\vec{A}$  orientiert)

$$dW(q) = \int_C dq \vec{E}(q) \cdot d\vec{r} \quad (2.143)$$

$$= \int_C \iint_A d\vec{D}(q) \cdot d\vec{A} \vec{E}(q) \cdot d\vec{r} \quad (2.144)$$

$$= \int_C \iint_A \vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q) d\vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (2.145)$$

$$= \iiint_V \vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q) dV \quad (2.146)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

Hierbei beschreibt  $V$  das gesamte vom elektrischen Feld durchdrungene Volumen. Im vorigen Fall also das Volumen des Kondensators.

Der Term  $\vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q)$  hat die Einheit Energie pro Volumen und beschreibt somit die Änderung der Energiedichte des elektrischen Feldes

$$dw_{\text{el}}(q) = \vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q) \quad (2.147)$$

### Energiedichte des elektrischen Feldes

Die Energiedichte, d.h., der Energieinhalt je Volumenelement, eines elektrischen Feldes welches durch die Ladung  $Q$  erzeugt wird, ist gegeben als

$$w_{\text{el}} = \int_0^Q dw_{\text{el}}(q) = \int_0^Q \vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q) = \int_{\vec{D}_0}^{\vec{D}_Q} \vec{E} \cdot d\vec{D} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (2.148)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Anmerkung:

- Die Energiedichte ist im Allgemeinen ortsabhängig

$$w_{\text{el}} = f(\vec{r})$$

- Die Definition in Gl. (2.148) gilt auch für den elektrischen Anteil der Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes.

Die Gesamtenergie der Ladungsanordnung ist somit

$$W = \int_{W(0)}^{W(Q)} dW(q) = \iiint_V \int_0^Q \vec{E}(q) \cdot d\vec{D}(q) \, dV = \iiint_V \int_{\vec{D}_0}^{\vec{D}_Q} \vec{E} \cdot d\vec{D} \, dV = \iiint_V w_{\text{el}} \, dV \quad (2.149)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Die obigen Gleichungen können wesentlich vereinfacht werden für den Spezialfall **isotroper** Materialien, d.h., ein Dielektrikum mit richtungsunabhängiger Permittivität, für die gilt  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ .

Die Energiedichte des elektrischen Feldes in Gl. (2.148) ist dann gegeben als ( $D = |\vec{D}_Q|, D_0 = |\vec{D}_0| = 0, E = D/\epsilon$ )

$$w_{\text{el}} = \int_{\vec{D}_0}^{\vec{D}_Q} \vec{E} \cdot d\vec{D} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^D \vec{D} \cdot d\vec{D} = \frac{1}{2\epsilon} D^2 = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{1}{2} E D \quad (2.150)$$

und die Gesamtenergie des elektrischen Feldes in Gl. (2.149) ist

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} E D \, dV. \quad (2.151)$$

Die ermittelten Gleichungen für die Energiedichte  $w_{\text{el}}$  des elektrischen Feldes gelten nicht nur im homogenen Feld, sondern geben allgemein die **Energiedichte** an, die in einem beliebigen Punkt innerhalb eines elektrischen Feldes besteht.

Die in einem bestimmten Feldraum enthaltene Energie erhalten wir dann (allgemein) dadurch, dass wir die Energiedichte ( $w_{\text{el}}$ ) über das betreffende Raumvolumen ( $V$ ) integrieren.

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Beispiel 1:

Gegeben sei ein idealer Plattenkondensator mit Grundfläche  $A$ , Plattenabstand  $d$ , Permittivität  $\varepsilon$  und Ladung  $Q$ .

Zwischen den Platten bildet sich ein ideales homogenes elektrisches Feld aus, für dessen Betrag gilt

$$E = \frac{1}{\varepsilon A} Q \quad (2.152)$$

Die elektrische Energiedichte ist somit gegeben als

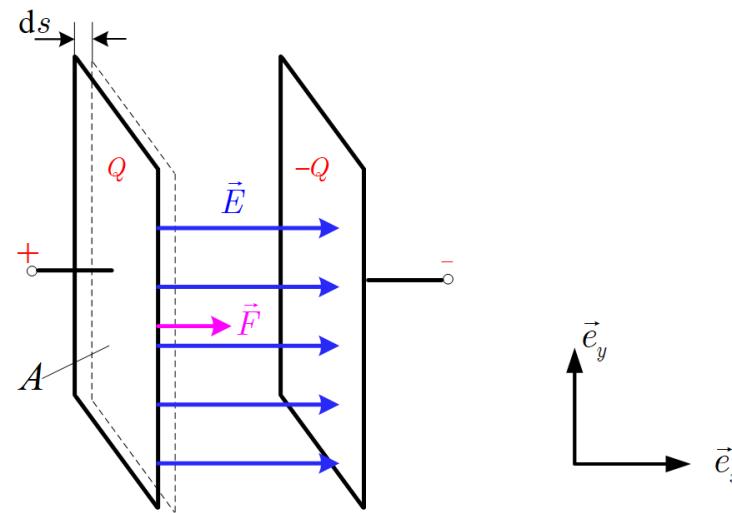
$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2\varepsilon A^2} Q^2 \quad (2.153)$$

Die im Feld des Kondensators mit dem Volumen des Feldgebietes  $V = Ad$  gespeicherte Energie ist

$$W = w_{\text{el}} V = \frac{1}{2} DE \cdot V = \frac{d}{2\varepsilon A} Q^2 = \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.154)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

Für den gegebenen idealen Plattenkondensator kann anhand der Energie bzw. Energiedichte des durch eine Ladung  $Q$  erzeugten elektrischen Feldes die Kraft auf die Kondensatorplatten elegant berechnet werden.  
(Alternativ wäre die Berechnung mit Hilfe des Coulomb'schen Gesetzes möglich, aber aufwendiger.)



Wir nehmen an, dass eine der Kondensatorplatten unter dem Einfluss der Kraft  $\vec{F} = F\vec{e}_x$ , die durch die Ladung  $Q$  erzeugt wird, um eine infinitesimal kleine Strecke  $d\vec{s} = ds\vec{e}_x$  verschoben und dabei die mechanische Arbeit  $dW_{\text{mech}}$  geleistet wird:

$$dW_{\text{mech}} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds. \quad (2.155)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Da keine Ladung zu- oder abfließen kann, bleiben die Feldgrößen  $E = \frac{Q}{\varepsilon A}$  und  $D = \varepsilon E = \frac{Q}{A}$  und mit Ihnen die elektrische Energiedichte konstant

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}.$$

Die im elektrischen Feld gespeicherte Energie verändert sich bei Annäherung der Platten um  $ds$ , d.h., infolge der Volumenabnahme des elektrischen Feldraumes um  $dV = -A ds$ , um

$$dW_{\text{el}} = w_{\text{el}} dV = -w_{\text{el}} A ds = -\frac{1}{2} \varepsilon E^2 A ds. \quad (2.156)$$

Nach dem Energieerhaltungssatz bleibt die Gesamtenergie des Systems konstant. Für die Summe der Teilenergien gilt:

$$dW_{\text{mech}} + dW_{\text{el}} = 0 \quad \Rightarrow \quad dW_{\text{mech}} = -dW_{\text{el}}. \quad (2.157)$$

Einsetzen von Gl. (2.155) und Gl. (2.156) liefert für den Betrag der wirkenden Kraft auf die Kondensatorplatte

$$F ds = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 A ds \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\varepsilon A}{2} E^2 = \frac{1}{2\varepsilon A} Q^2. \quad (2.158)$$

Mit  $E = U/d$  und  $C = \varepsilon A/d$  folgt für den idealen Plattenkondensator

$$F = \frac{C}{2d} U^2. \quad (2.159)$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Beispiel 2:

Gegeben sei eine Ladung  $Q = 10^{-7}\text{C}$ , die sich auf einer Kugel mit Radius  $r_0 = 5\text{cm}$  befindet und das elektrostatische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  erzeugt. Die Kugel wird von einem isotropen Dielektrikum mit der Permittivität  $\epsilon = 5\epsilon_0$  umschlossen. Es ist die Energie  $W$  zu bestimmen, die in dem erzeugten elektrischen Feld gespeichert ist!

Zur Ermittlung von  $W$  gibt es (mindestens) zwei Lösungsmöglichkeiten.

- Variante 1:

Zunächst wird das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  bestimmt. Auf Grund der Symmetrie der Anordnung (Kugel) muss mit Gl. (2.96) gelten

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{e}_r$$

und zugehörige elektrische Flussdichte ist

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

Die Gesamtenergie des elektrischen Feldes folgt dann mit Gl. (2.151) als

$$\begin{aligned} W &= \iiint_V \frac{1}{2} ED \, dV \\ &= \int_{r_0}^{\infty} \iint_{A(r)} \frac{1}{2} ED \, dA \, dr \\ &= \int_{r_0}^{\infty} \iint_{A(r)} \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{Q}{4\pi r^2} \, dA \, dr \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon} \int_{r_0}^{\infty} \iint_{A(r)} \frac{1}{r^4} \, dA \, dr \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon} \int_{r_0}^{\infty} \frac{4\pi r^2}{r^4} \, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \left[ \frac{-1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r_0}. \end{aligned}$$

## Die Energie des elektrischen Feldes

---

- Variante 2:

Die Energie kann auch mit Hilfe der Kapazität eines Kugelkondensators berechnet werden. Die Kapazität ist allgemein gegeben als (siehe Gl. 2.129)

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

und geht mit der Wahl  $r_1 = 0$  und  $r_2 \rightarrow \infty$  über in die Kapazität einer Kugelladung

$$C_\infty = 4\pi\varepsilon r_0.$$

Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie ist für die Ladung  $Q$  gegeben als (siehe Gl. 2.141)

$$W = \frac{1}{2C_\infty} Q^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r_0}$$

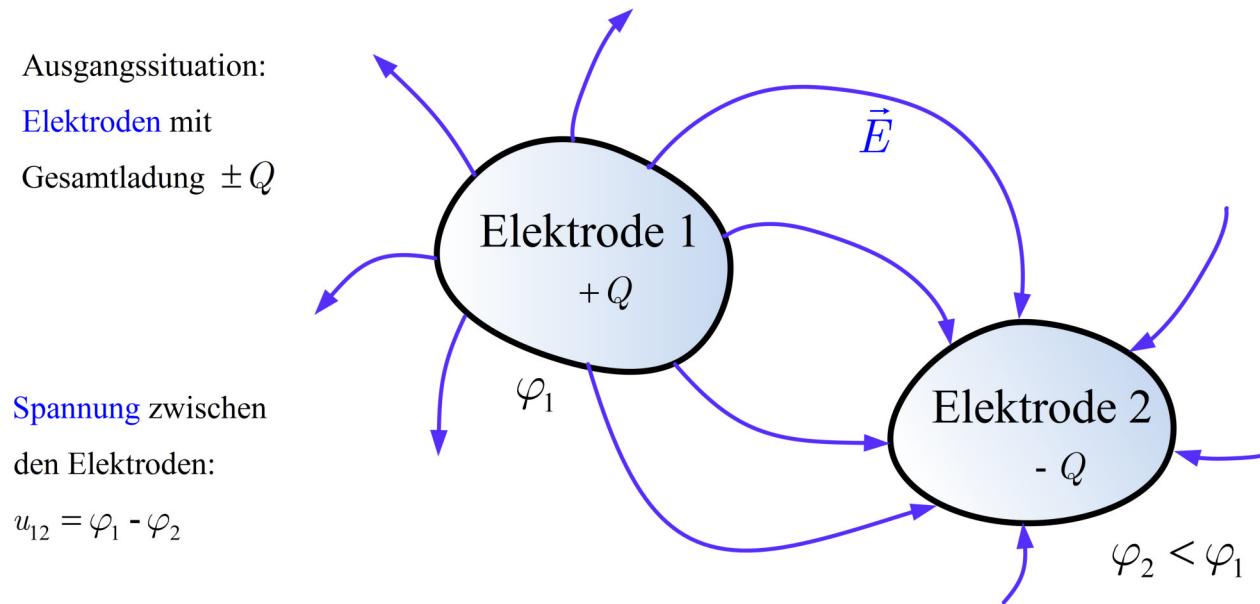
Einsetzen der gegebenen Werte ergibt

$$W = 1.798 \cdot 10^{-4} \text{ VAs}$$

## 2.9 Das elektrische Strömungsfeld

Wir betrachten nun zwei entgegengesetzt mit den Ladungen  $Q$  und  $-Q$  elektrisch geladene Körper (Elektroden), zwischen denen das elektrische Feld  $\vec{E}$  existiert sowie die Spannung

$$u_{12} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 > 0. \quad (2.160)$$



Auf eine frei bewegliche Ladung  $q$  im elektrischen Feld am Punkt  $P$  wirkt die Kraft

$$\vec{F}_{\text{el}} = q\vec{E} \quad (2.161)$$

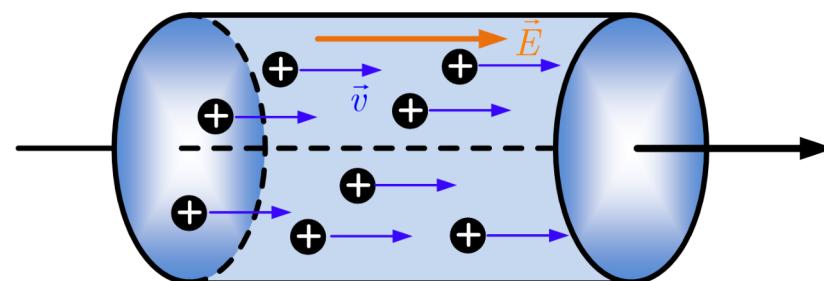
## 2.9.1 Die elektrische Stromdichte

Wird nun zwischen den Körpern eine leitfähige Verbindung - **ein Leiter** - eingebracht, so werden frei bewegliche Ladungsträger mit der Ladung  $q$  in diesem Medium infolge der Kraft des elektrischen Feldes beschleunigt und bewegen sich, es heißt sie "strömen". Die gerichtete Bewegung von Ladungsträgern bezeichnet man als **elektrischen Leitungsstrom**. Zu seiner Charakterisierung werden verschiedene Größen verwendet.

Eine Größe ist die Geschwindigkeit des elektrischen Stromfluß. Betrachtet man die Ladungsträger im elektrischen Feld, so werden diese durch  $\vec{F}_{\text{el}}$  beschleunigt und steigern ihre Geschwindigkeit  $\vec{v}$  dabei so lange, bis die entgegenwirkende Reibungskraft  $\vec{F}_{\text{reib}} = c\vec{v}$  so groß ist, dass gilt

$$\vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{reib}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{sign}(q)b\vec{E} = \begin{cases} b\vec{E}, & q > 0 \\ -b\vec{E}, & q < 0 \end{cases} \quad (2.162)$$

$b$  bezeichnet die stoffspezifische *Beweglichkeit* der Ladungsträger.



## Die elektrische Stromdichte

Neben der Geschwindigkeit der bewegten Ladungsträger interessiert auch die Menge der insgesamt bewegten Ladung bzw. ihre Dichte, d.h. die bewegte Ladungsmenge  $dQ$  je Volumeneinheit  $dV$ ,

$$\rho = \frac{dQ}{dV}. \quad (2.163)$$

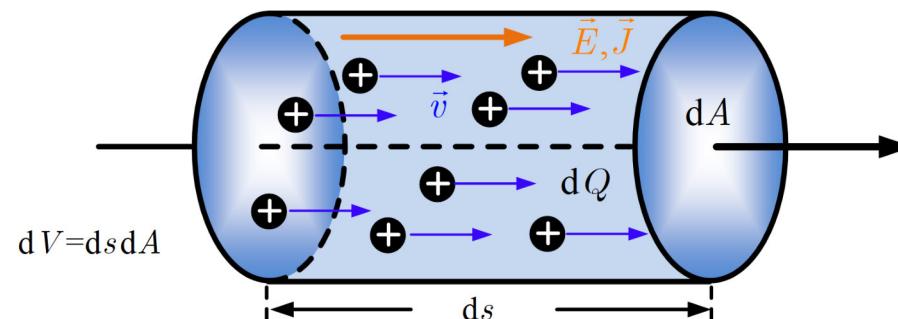
Hieraus kann die Größe der je Volumeneinheit mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegten Ladung berechnet werden.

### Stromdichte des elektrischen Leitungsstroms

Die **Stromdichte** des elektrischen Leitungsstroms ist definiert als die Menge der je Volumeneinheit mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegten Ladung

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \text{sign}(q) \rho b \vec{E} = \kappa \vec{E} \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.164)$$

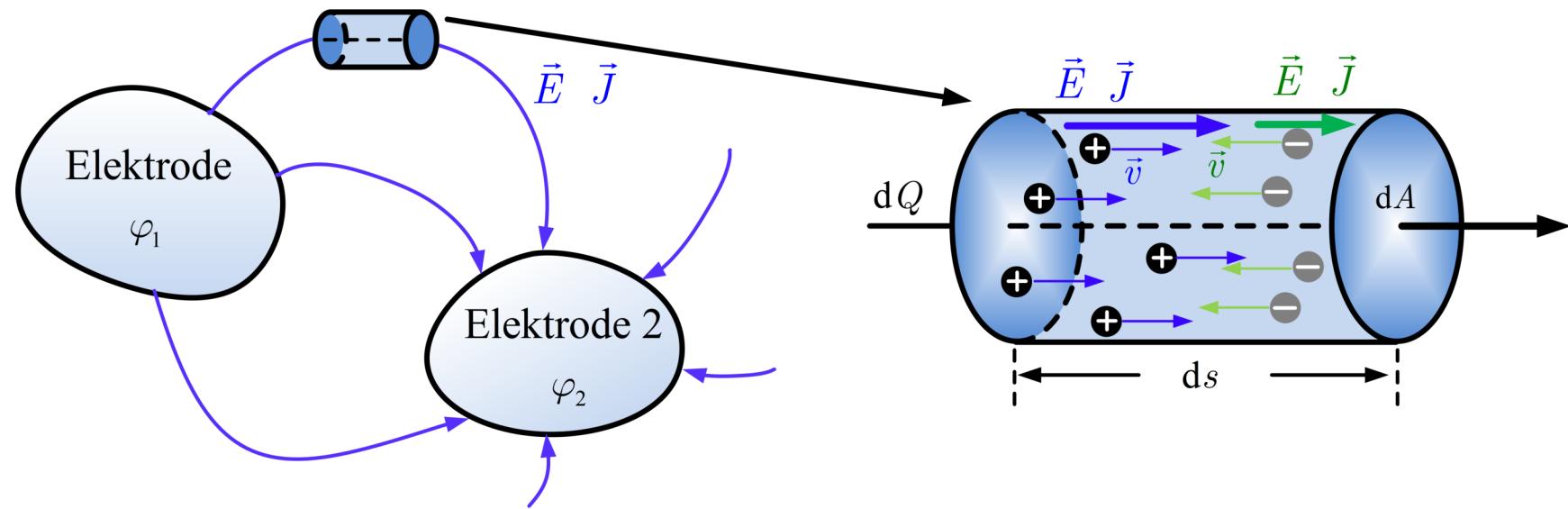
$\kappa$  bezeichnet die stoffspezifische **Leitfähigkeit** des Körpers.



## Die elektrische Stromdichte

Anmerkungen:

- Die Stromdichte des elektrischen Leitungsstroms ist eine gerichtete (vektorielle) Größe!
- Die Stärke und Richtung der Stromdichte kann analog zur elektrischen Flußdichte durch Feldlinien veranschaulicht werden.



- Die Richtung der Stromdichte stimmt mit der Richtung der elektrischen Feldstärke im Leiter überein - sie ist von der positiven zur negativen Elektrode als positiv definiert.

## Die elektrische Stromdichte

---

- Die Dichte der bewegten Ladung ergibt sich als Summe der Dichten der elektrisch negativen und/oder positiven Ladungsträger
  - Die Dichte der elektrisch negativen Ladungsträger wie z.B. Elektronen in metallischen Leitern oder Halbleitern ist

$$\rho_n = -en_n. \quad (2.165)$$

$n_n$  ist die Dichte der negativen Ladungsträger, d.h. Anzahl der Ladungsträger  $dN_n$  je Volumeneinheit  $dV$

$$n_n = \frac{dN_n}{dV}. \quad (2.166)$$

- Die Dichte der elektrisch positiven Ladungsträger wie z.B. Löchern in Halbleitern ist

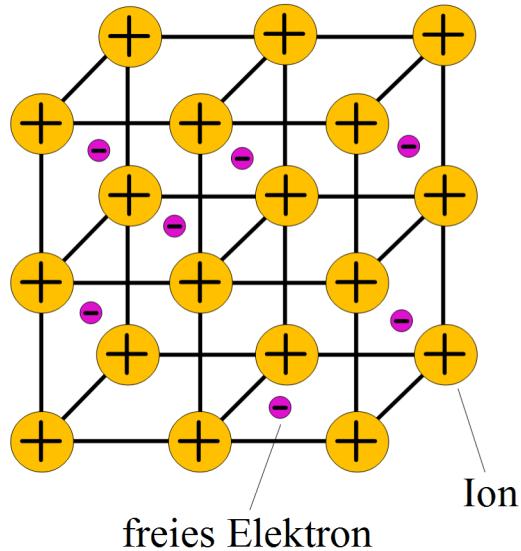
$$\rho_p = en_p \quad (2.167)$$

$n_p$  ist die Dichte der positiven Ladungsträger, d.h. Anzahl der Ladungsträger  $dN_p$  je Volumeneinheit  $dV$

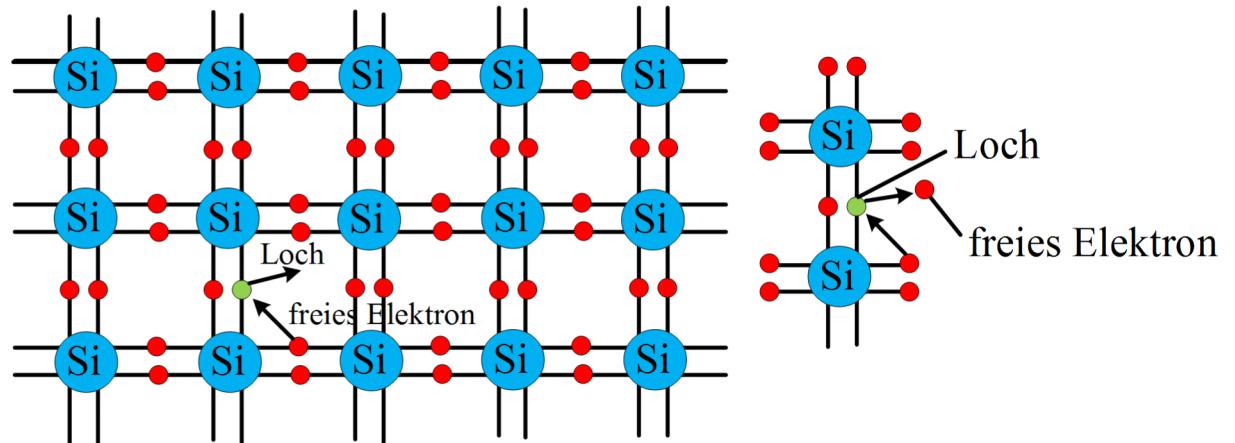
$$n_p = \frac{dN_p}{dV}. \quad (2.168)$$

## Die elektrische Stromdichte

Kristallgitter von Metallen



Atomstruktur im Silizium



- Die Leitfähigkeit eines Mediums ist allgemein gegeben als

$$\kappa = -\rho_n b_n + \rho_p b_p = e(n_n b_n + n_p b_p). \quad (2.169)$$

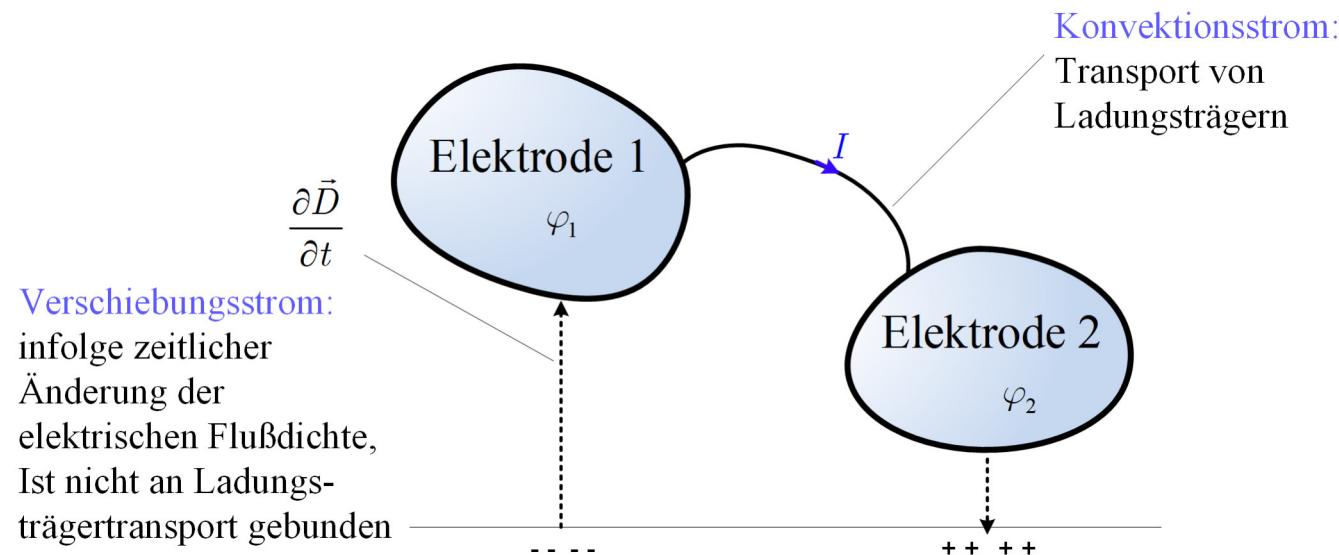
$b_n$  ist die Beweglichkeit der negativen Ladungsträger und  $b_p$  ist die Beweglichkeit der positiven Ladungsträger.

## Die elektrische Stromdichte

Bisher wurde die Stromdichte des Leitungsstromes betrachtet. Allgemein besteht der (totale) elektrische Strom aber aus zwei Komponenten:

**Leitungs-/Konvektionsstrom:** Der durch ein elektrisches Feld in einem Leiter verursachte Transport von frei beweglichen Ladungsträgern.

**Verschiebungsstrom:** Der durch eine zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte  $\partial \vec{D} / \partial t$  verursachte Strom, der nicht an die Existenz eines Leiters und den Transport von Ladungen durch diesen gebunden ist. Dieser tritt z.B. zwischen den Platten eines Kondensators im Vakuum auf, wenn sich die elektrische Flussdichte/das elektrische Feld zwischen diesen ändert in Folge Auf- oder Entladung des Kondensators.



### Die Stromdichte des totalen elektrischen Stroms

Die Stromdichte  $\vec{J}_{\text{tot}}$  des totalen elektrischen Stroms ist

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.170)$$

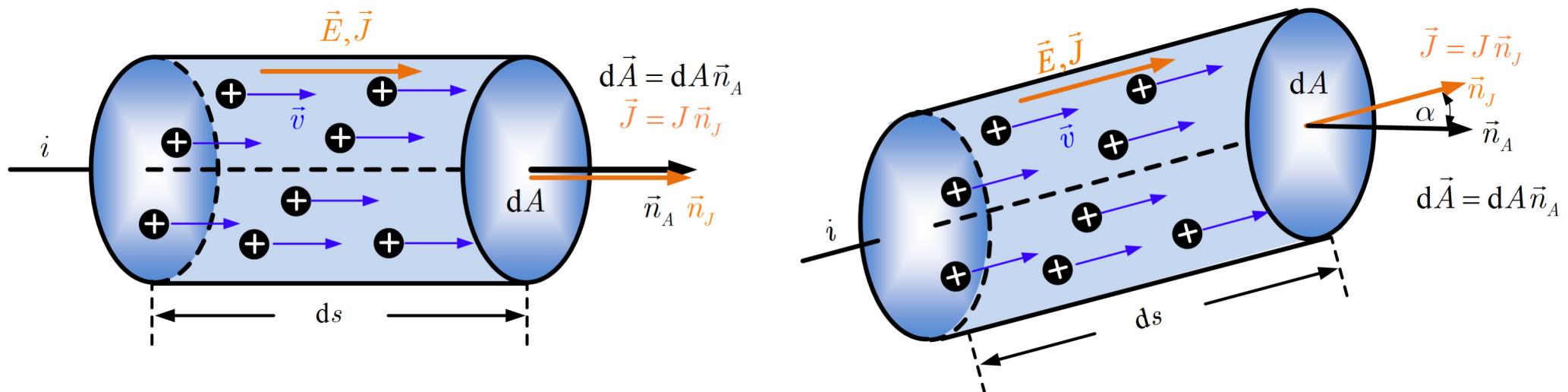
Im Rahmen dieses Teils der Vorlesung werden wir uns meist mit der Stromdichte des Leitungsstroms beschäftigen. Der Verschiebungsstrom wird später zur Behandlung magnetischer Felder benötigt.

## 2.9.2 Die elektrische Stromstärke

Neben der Stromdichte interessiert auch die von einer Elektrode zur anderen Elektrode durch einen Leiter transportierte Ladungsmenge je Zeiteinheit - die **elektrische Stromstärke**  $i$ .

Hierzu wird zunächst ein dünnes Leitungsstück mit der gerichteten Querschnittsfläche  $d\vec{A} = dA \vec{n}_A$  betrachtet, dass von der homogenen gerichteten Stromdichte  $\vec{J} = J \vec{n}_J$  durchflossen wird.

$\vec{n}_A$  und  $\vec{n}_J$  sind die jeweiligen Normaleneinheitsvektoren, die den Winkel  $\alpha$  einschließen mit  $\cos(\alpha) = \vec{n}_J \cdot \vec{n}_A$ .



Die elektrische Stromstärke  $i$  durch das betrachtete Flächenstück berechnet sich als

$$i = \vec{J} \cdot d\vec{A} = J dA \cos(\alpha) \quad (2.171)$$

## Die elektrische Stromstärke

---

Eine alternative Formulierung der elektrischen Stromstärke findet man unter Berücksichtigung von  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ , so dass folgt

$$i = \vec{J} \cdot d\vec{A} = \rho(\vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (2.172)$$

Im durch die Fläche  $dA$  begrenzten infinitesimalen Volumenelement der Länge  $ds$  gilt

$$\rho = \frac{dQ}{dV}, \quad dV = dA ds \cos(\alpha), \quad \vec{v} = v \vec{n}_J = \frac{ds}{dt} \vec{n}_J \quad (2.173)$$

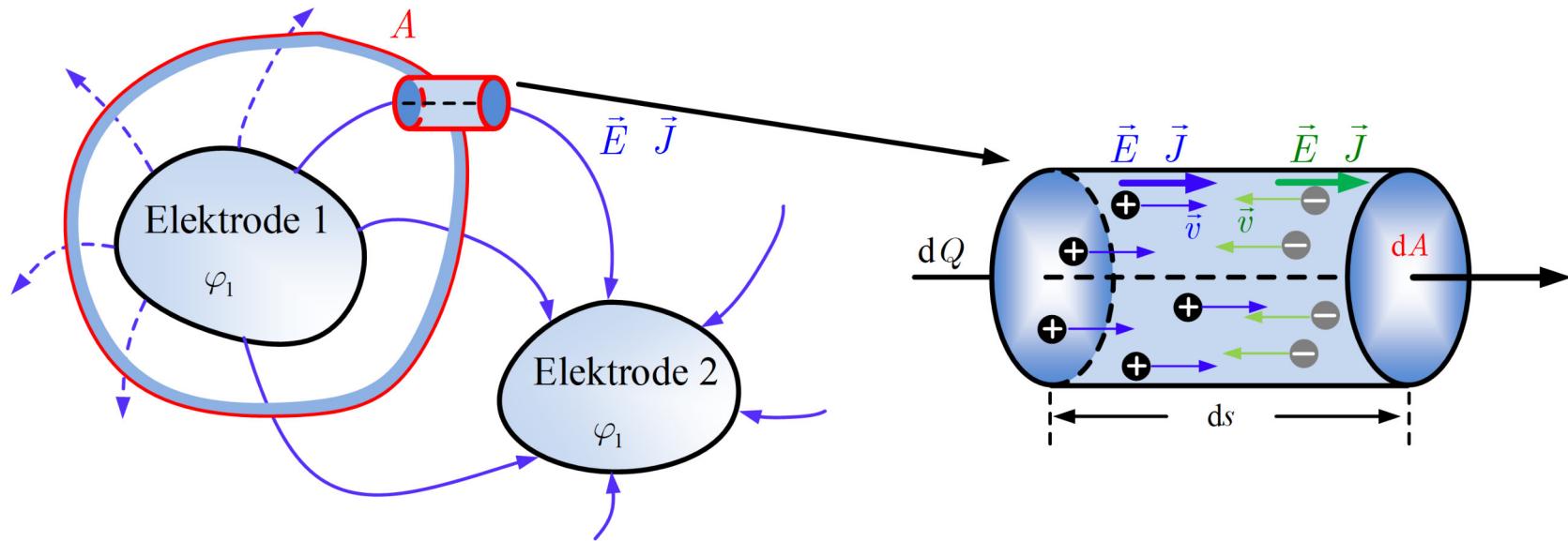
so dass die elektrische Stromstärke durch die Fläche  $dA$  auch berechnet werden kann als

$$i = \rho v dA \cos(\alpha) = \frac{dQ}{dA ds \cos(\alpha)} \frac{ds}{dt} dA \cos(\alpha) = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.174)$$

Bei gegebener Stromstärke, Ladungsdichte und Geometrie des Leiters lässt sich aus obigen Gleichungen wiederum die mittlere (Drift)Geschwindigkeit der Ladungsträger ermitteln (siehe Übung).

## Die elektrische Stromstärke

Verteilt sich der Stromfluß über eine Gesamtfläche  $A$  (siehe Abbildung), so ist die Stromstärke als Summe über die Beiträge aller Flächenelemente  $dA$  zu berechnen.



### Elektrische Stromstärke des Leitungsstroms

Die bei gegebener Stromdichte  $\vec{J}$  des Leitungsstroms durch eine (Hüll)Fläche  $A$  fließende Ladungsmenge  $dQ$  je Zeiteinheit  $dt$ , die **elektrische Stromstärke**  $i$  des Leitungsstroms, ist gegeben als

$$i = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt} \quad [\text{A}]. \quad (2.175)$$

Die Änderung der Ladung  $-dQ$  **innerhalb** der Hüllfläche  $A = \partial V$ , welche das Volumen  $V$  berandet, ist identisch zu einer Änderung der Ladungsdichte  $d\rho$

$$-dQ = \iiint_V d\rho dV \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.176)$$

Andererseits gilt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\iint_{A=\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} dV \quad (2.177)$$

Hieraus folgt:

### Kontinuitätsgleichung

Die Divergenz der Stromdichte und die Änderung der elektrischen Ladungsdichte sind konstant, d.h. Ladungen bleiben erhalten

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.178)$$

## Die elektrische Stromstärke

---

Anmerkungen:

- Das Vorzeichen der elektrischen Stromstärke hängt neben der Richtung der elektrischen Stromdichte auch von der Wahl der Richtung des Flächenelementes ab.
- Negative Ladungsträger bewegen sich vom negativen Pol zum positiven Pol.
- Positive Ladungsträger bewegen sich vom positiven Pol zum negativen Pol.
- Die physikalische Stromrichtung ist definiert als Elektronenstrom vom negativen Pol (Kathode) zum positiven Pol (Anode).
- Die konventionelle oder technische Stromrichtung ist von Plus nach Minus festgelegt.
- Die Stromstärke wird bestimmt durch das sie verursachende elektrische Feld und ist im Allgemeinen zeitabhängig

$$i = i(t) \quad (2.179)$$

- Die bei gegebener Stromstärke  $i(t)$  in einem Zeitintervall  $[0, T]$  transportierte Ladungsmenge ist

$$Q = \int_0^T i(t) dt \quad [\text{As}], [\text{C}] \quad (2.180)$$

- An einer Grenzfläche zwischen zwei Stoffen mit den Leitfähigkeiten  $\kappa^-$  und  $\kappa^+$  folgen im elektrostatischen Fall aus der Kontinuitätsgleichung  $\operatorname{div} \vec{J} + \dot{\rho} = 0$  und  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  bei Annahme eines verschwindenden tangentialen Flächenstromes in der Grenzfläche die Kontinuitätsbedingungen
  - Links- und rechtsseitige elektrische Feldstärke tangential zur Grenzfläche sind identisch

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0} : \quad \vec{E}_t^- = \vec{E}_t^+ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{J}_t^-}{\kappa^-} = \frac{\vec{J}_t^+}{\kappa^+} \quad (2.181)$$

- Links- und rechtsseitige elektrische Stromdichte in Normalenrichtung der Grenzfläche sind identisch

$$\operatorname{Div} \vec{J} = \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = 0 : \quad \vec{J}_n^- = \vec{J}_n^+ \quad \Leftrightarrow \quad \kappa^- \vec{E}_n^- = \kappa^+ \vec{E}_n^+ \quad (2.182)$$

Diese Bedingungen ergeben nun ein Brechungsgesetz für das elektrische Feld an der Grenzfläche zweier Leiter analog zur Grenzfläche zweier Dielektrika

$$\frac{\frac{\vec{E}_t^+}{\vec{E}_n^+}}{\frac{\tan(\alpha^+)}{\tan(\alpha^-)}} = \frac{\vec{E}_n^+}{\vec{E}_t^-} = \frac{\vec{E}_n^-}{\vec{E}_n^+} = \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \quad (2.183)$$

## Die elektrische Stromstärke

---

- Speziell für die Grenzfläche zu einem idealen Leiter mit  $\kappa^+ \rightarrow \infty$  ergibt sich aus dem Brechungsgesetz, dass elektrische Feldlinien auf idealen Leitern senkrecht stehen, da gilt  $\alpha^+ \rightarrow 0$  bzw.  $\vec{E}_n^+ = 0$  sowie  $\vec{E}_t^- = \vec{E}_t^+ = 0$ .
- Analog gilt, dass wenn stromlose ruhende Leiter in elektrische Felder gebracht werden, so kommt es infolge Influenz zu einer Ladungsverschiebung an der Oberfläche mit Ausbildung einer Oberflächenladungsdichte derart, dass im Inneren des Metallkörpers das elektrische Feld verschwindet.

## Die elektrische Stromstärke

---

Neben dem Leitungsstrom trägt im Allgemeinen auch der elektrische Verschiebungsstrom zur “Stromstärke” bei, die zwar keinen zusätzlichen Ladungstransport bedeutet aber bei der später betrachteten Erzeugung von magnetischen Feldern beachtet werden muss, so dass prinzipiell gilt:

### **Totale elektrische Stromstärke des Leitungs- und Verschiebungsstroms**

Die **totale elektrische Stromstärke** ist gegeben als

$$i = \iint_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.184)$$

## 2.10 Das Ohmsche Gesetz

---

In Gl. (2.164) hatten wir für die Stromdichte des Leitungsstroms gefunden

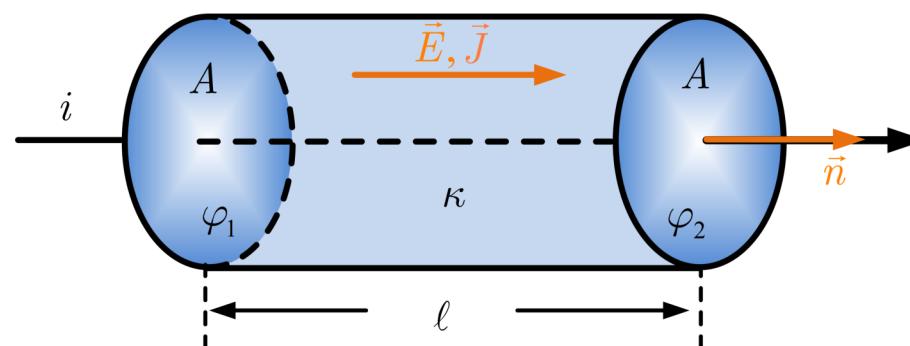
$$\vec{J} = \kappa \vec{E}. \quad (2.185)$$

Betrachten wir ein isotropes Leiterstück mit einer homogenen Leitfähigkeit  $\kappa$  und homogenem elektrischen Feld  $\vec{E} = E\vec{n}$  und Stromdichte  $\vec{J} = J\vec{n} = i/A\vec{n}$  parallel zur Leiterachse, so gilt für die Spannung über dem Leiterabschnitt mit der Länge  $\ell$

$$u = \int_0^\ell E \mathrm{d}s = \frac{1}{\kappa} \int_0^\ell J \mathrm{d}s = \frac{J\ell}{\kappa} \quad (2.186)$$

Gemäß Gl. (2.171) gilt in dem homogenen Leiterstück  $J = i/A$ , so dass folgt

$$u = \frac{\ell}{A\kappa} i. \quad (2.187)$$



## Ohmsches Gesetz

Seien  $u$  und  $i$  die Spannung und die Stromstärke in einem isotropen Leiterstück, so gilt

$$u = Ri = \frac{1}{G}i \quad (2.188)$$

mit dem ohmschen Widerstand  $R$  bzw. ohmschen Leitwert  $G$  des Leiterstückes mit der Länge  $\ell$ , der Querschnittsfläche  $A$  und dem spezifischen Widerstand  $\rho = 1/\kappa$  bzw. der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa = 1/\rho$

$$R = \frac{1}{G} := \frac{\ell}{A\kappa} = \frac{\rho\ell}{A}. \quad (2.189)$$

Die Einheiten der Größen sind

$R : [\Omega]$  (Ohm)

$G : [S]$  (Siemens)

$\rho : [\Omega\text{m}]$

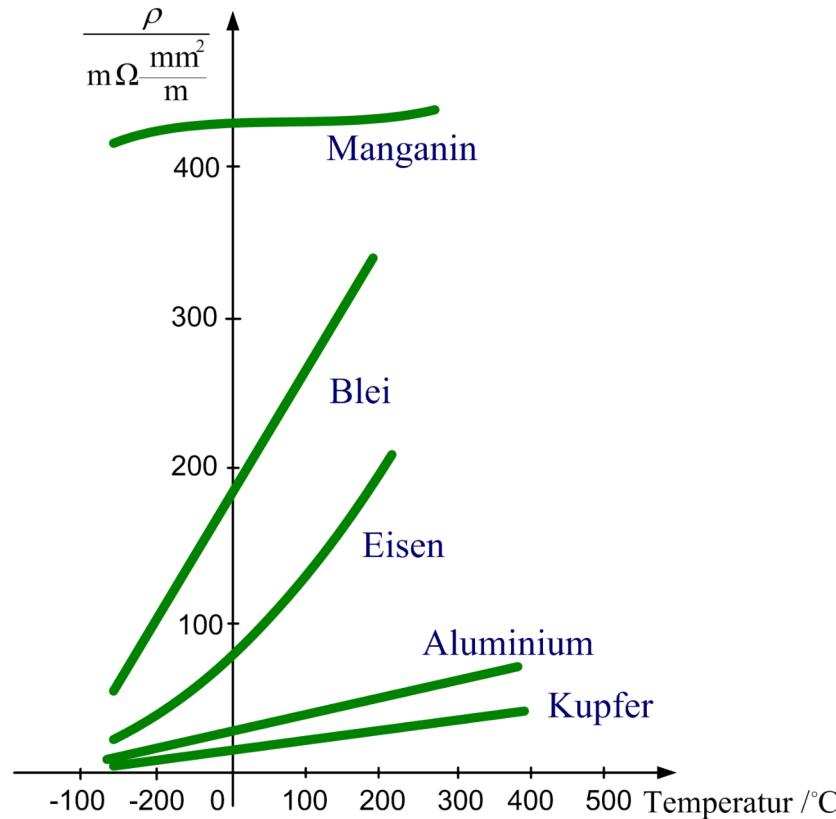
$\kappa : [S/m]$

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} = 1\frac{k\text{gm}^2}{A^2\text{s}^3}, \quad 1S = \frac{1}{1\Omega}$$

## Das Ohmsche Gesetz

Anmerkungen:

- Der spezifische Widerstand eines Stoffes ist im Allgemeinen temperaturabhängig  $\rho = f(T)$



Die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes  $\rho$  unterscheidet sich dabei je nach dem zugrundeliegenden physikalischen Effekten zur Ladungserzeugung und Bewegung.

# Das Ohmsche Gesetz

---

## Metalle:

- Bei höherer Temperatur stärkere Schwingung der Gitteratome
- Steigende Wahrscheinlichkeit für Kollisionen mit Elektronen
- Abnehmende freie Weglänge und Beweglichkeit
- Steigender spezifischer Widerstand

## Halbleiter :

- Abnehmende Beweglichkeit der freien Ladungsträger
- Zunahme der Ladungsträgerzahl mit der Temperatur
- Sinkender spezifischer Widerstand (negativer Temperaturkoeffizient)

Näherung der Temperaturabhängigkeit durch linearen Term

$$R \approx R_{\vartheta_0} [1 + \alpha_{\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0)] \quad (2.190)$$

$R$  : el. Widerstand

$R_{\vartheta_0}$  : el. Widerstand bei einer Temperatur von  $\vartheta_0$  in  $^{\circ}\text{C}$

$\alpha_{\vartheta_0}$  : linearer Temperaturbeiwert (Widerstands-Temperaturkoeffizient)

$\vartheta_0$  : Ausgangstemperatur in  $^{\circ}\text{C}$

$\vartheta$  : aktuelle Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$

## Das Ohmsche Gesetz

---

Oft wird  $\alpha_{\vartheta_0}$  für die Ausgangstemperatur  $\vartheta_0 = 20^\circ C = 293K$  angegeben und als  $\alpha_{20}$  bezeichnet. Die Einheit des Temperaturkoeffizienten  $\alpha_{20}$  ist K.

Bei  $\vartheta_0 = 20^\circ C$  gilt:

für die Näherung erster Ordnung

$$R \approx R_{20} (1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^\circ C))$$

$R$ : el. Widerstand

$R_{20}$ : el. Widerstand bei einer Temperatur von  $\vartheta_0 = 20^\circ C$

$\alpha_{20}$ : linearer Temperaturbeiwert  
(Widerstands-Temperaturkoeffizient)

$\vartheta$ : aktuelle Temperatur in  $^\circ C$

für eine Näherung zweiter Ordnung

$$R \approx R_{20} (1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^\circ C) + \beta_{20}(\vartheta - 20^\circ C)^2)$$

$R$ : el. Widerstand

$R_{20}$ : el. Widerstand bei einer Temperatur von  $\vartheta_0 = 20^\circ C$

$\alpha_{20}$ : linearer Temperaturbeiwert  
(Widerstands-Temperaturkoeffizient)

$\beta_{20}$ : quadratischer Temperaturbeiwert  
(Widerstands-Temperaturkoeffizient)

$\vartheta$ : aktuelle Temperatur in  $^\circ C$

## Das Ohmsche Gesetz

---

- Falls der elektrische Widerstand eine Funktion der Stromstärke und somit nichtlinear ist  $R = f(i)$ , so betrachtet man häufig den differentiellen Widerstand  $R_{AP}$  im Arbeitspunkt (AP)

$$R_{AP} = \left. \frac{du}{di} \right|_{i_{AP}} \quad \Rightarrow \quad u = u_{AP} + R_{AP} \cdot di \quad (2.191)$$

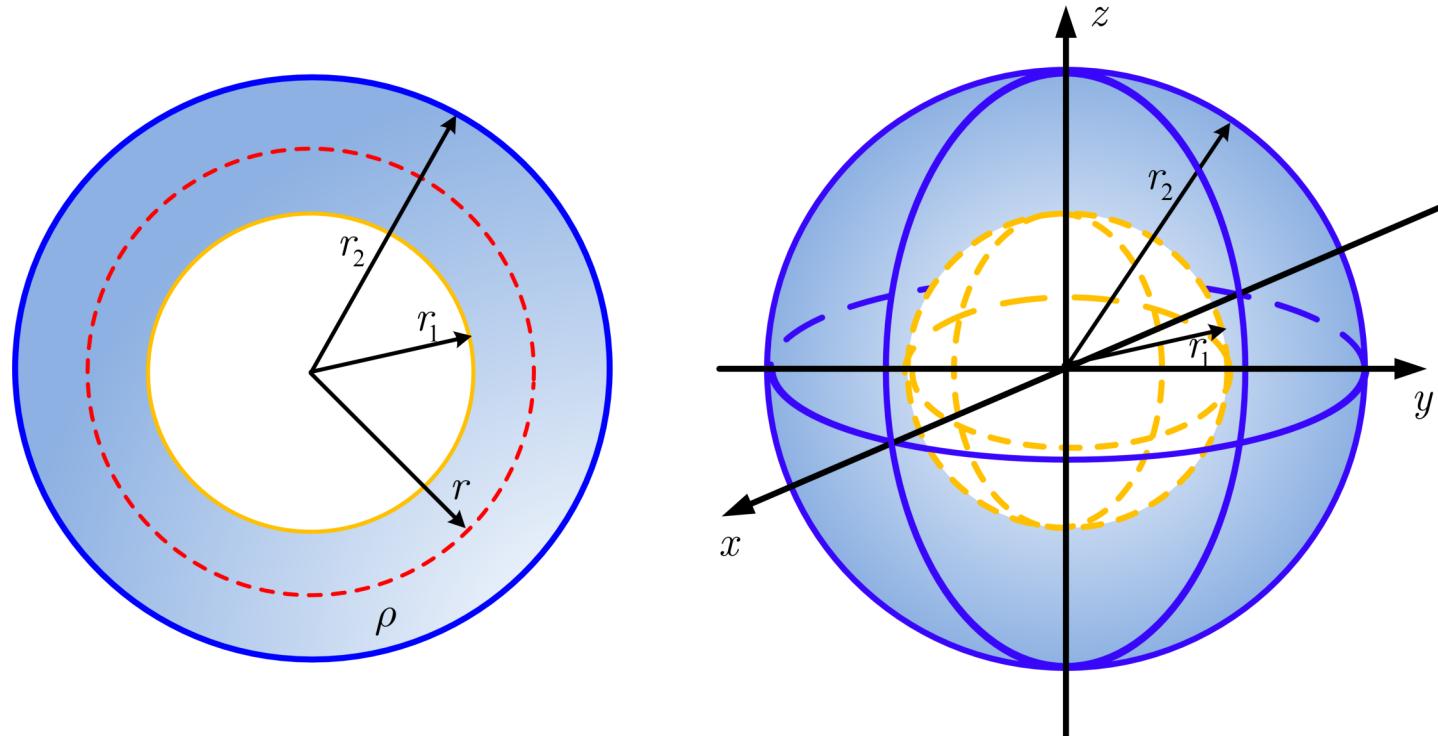
Beispiele für Elemente mit nichtlinearen u-i-Kennlinien bzw. nichtlinearen Widerständen sind:

- Diode (Germaniumdiode, Siliziumdiode)
- Z-Diode (Zener-Diode)
- Tunneldiode
- Glimmlampe
- Heißleiter
- Kaltleiter
- Glühlampe

## Beispiele

- Ohmscher Widerstand einer Hohlkugel

Gegeben sind zwei konzentrisch angeordnete, dünnwandige Metallhohlkugeln mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , zwischen denen ein leitfähiges Medium mit dem spezifischen Widerstand  $\rho$  vorhanden ist.

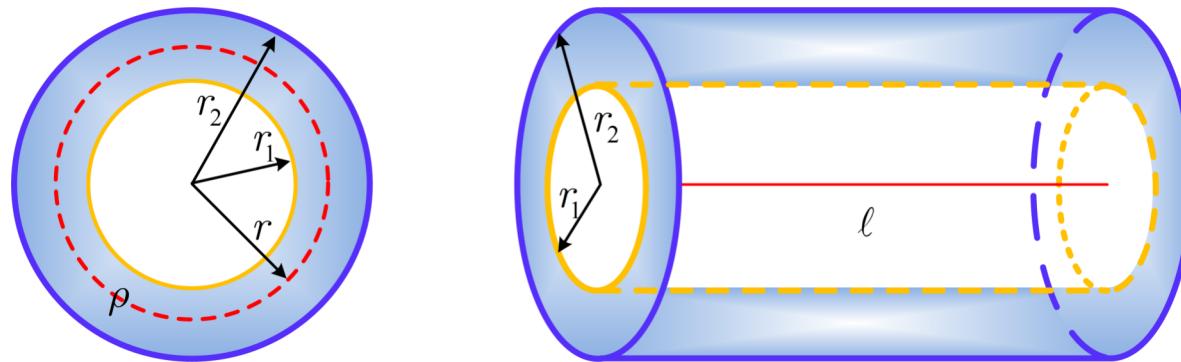


Gesucht ist der zwischen beiden Metallhohlkugeln bestehende elektrische Widerstand.

## Das Ohmsche Gesetz

- Ohmscher Widerstand eines Metallrohrs

Gegeben sind zwei paraxial angeordnete, dünnwandige Metallzylinder der Länge  $\ell$  und mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ . Zwischen denen beiden Zylindern ist ein leitfähiges Medium mit dem spezifischen Widerstand  $\rho$  vorhanden.



Gesucht ist der zwischen beiden Metallzylindern bestehende elektrische Widerstand.

... Lösung in Übung.

## 2.11 Energie und Leistung im elektrischen Leiter

---

Für einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter gilt:

- Elektronen werden durch das Feld beschleunigt
- Feldenergie  $\Rightarrow$  Kinetische Energie
- Kollisionen im Leiter  $\Rightarrow$  Umwandlung in Wärmeenergie

Energiezunahme/-abnahme einer Ladung  $dq$  bei Durchlaufen einer Potentialdifferenz  $u$ :

$$dW = (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) dq = u(t) dq = u(t)i(t) dt$$

Momentanwert der elektrischen Leistung (Verhältnis aus differentieller Energieänderung und benötigter Zeit)

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = u(t)i(t) \quad [W] \quad (\text{Watt}) \quad (2.192)$$

Die Gesamtenergie berechnet sich allgemein als Zeitintegral der Leistung:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt \quad [\text{Ws}] \quad (2.193)$$

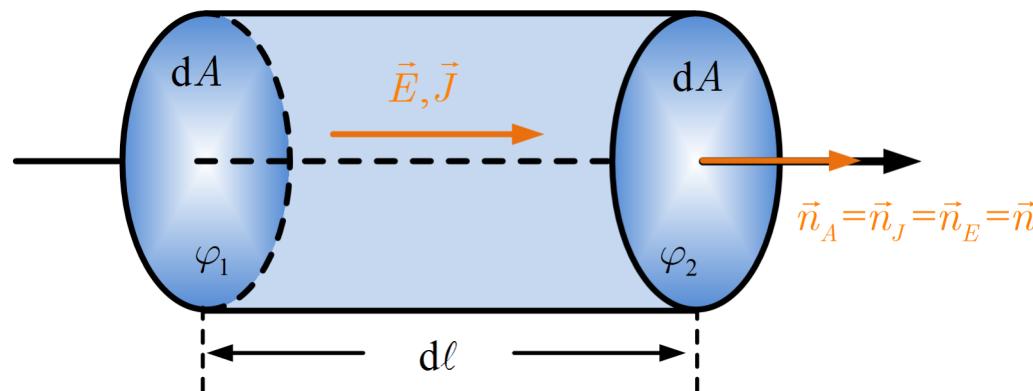
## Energie und Leistung im elektrischen Leiter

In einem elektrischen Leiter mit ohmschen Widerstand  $R$  und im Spezialfall zeitlich konstanter Spannung und Stromstärke  $u(t) = U$  und  $i(t) = I$  gilt für die resultierende Verlustleistung:

$$p(t) = P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R} \quad \text{mit} \quad U = IR$$

Für ein kleines Volumenelement  $dV$  mit konstanter Feldstärke  $\vec{E} = E\vec{n}_E = E\vec{n}$  und konstanter Stromdichte  $\vec{J} = J\vec{n}_J = J\vec{n}$  folgt:

$$dV = dA d\ell$$



- Verlustleistung  $dP$  im Volumen  $dV$ :

$$dP = dU \cdot dI = E d\ell \cdot J dA = (E \vec{n}_E) d\ell \cdot (J \vec{n}_J) dA = \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

## Energie und Leistung im elektrischen Leiter

---

- Verlustleistungsdichte in  $dV$ :

$$p_V = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.194)$$

- Gesamtverluste aus den Feldgrößen im Volumen  $V$ :

$$P = \iiint_V p_V dV = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (2.195)$$