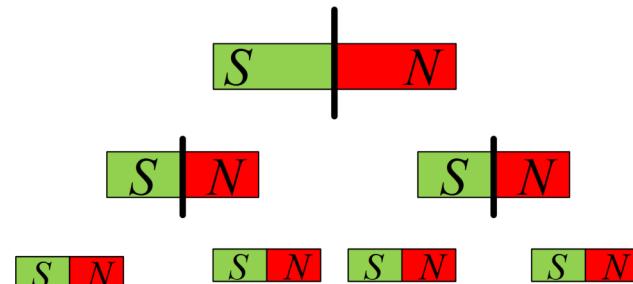


3 Das magnetische Feld

Magnetismus ist eine stoffliche Eigenschaft. Magnetische Stoffe ziehen zum Beispiel eisenhaltige Materialien an und können diese Eigenschaft übertragen.

Es gilt:

- dass jeder Magnet zwei unterschiedlich wirkende Pole - den so genannten **Nordpol** und den so genannten **Südpol** - hat.
- **Halbiert** man einen Magneten, so erhält man **zwei neue Magnete** mit jeweils einem Polpaar. Das impliziert die Existenz kleinster magnetischer Einheiten - der Elementarmagnete oder **magnetischen Dipole**.



- gleichnamige Pole stoßen sich ab.

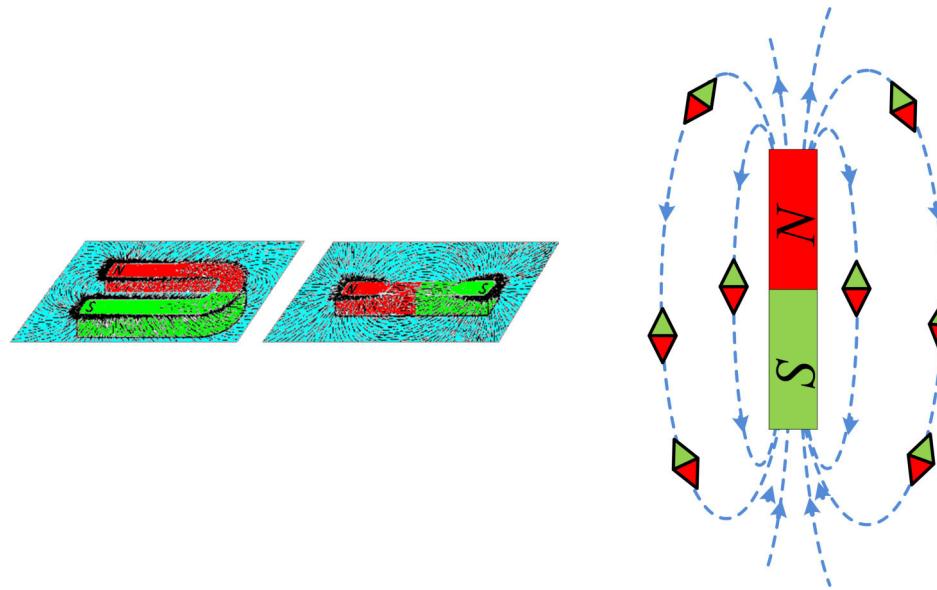


- ungleichnamige Pole ziehen sich an.



Das magnetische Feld

Wie das elektrische Feld, so kann auch das Magnetfeld mit Hilfe von Feldlinien dargestellt werden.



Die Quelle eines magnetischen Feldes ist der magnetische Dipol \vec{m} . Dies bedeutet, es existieren keine magnetischen Monopole oder Quellen.

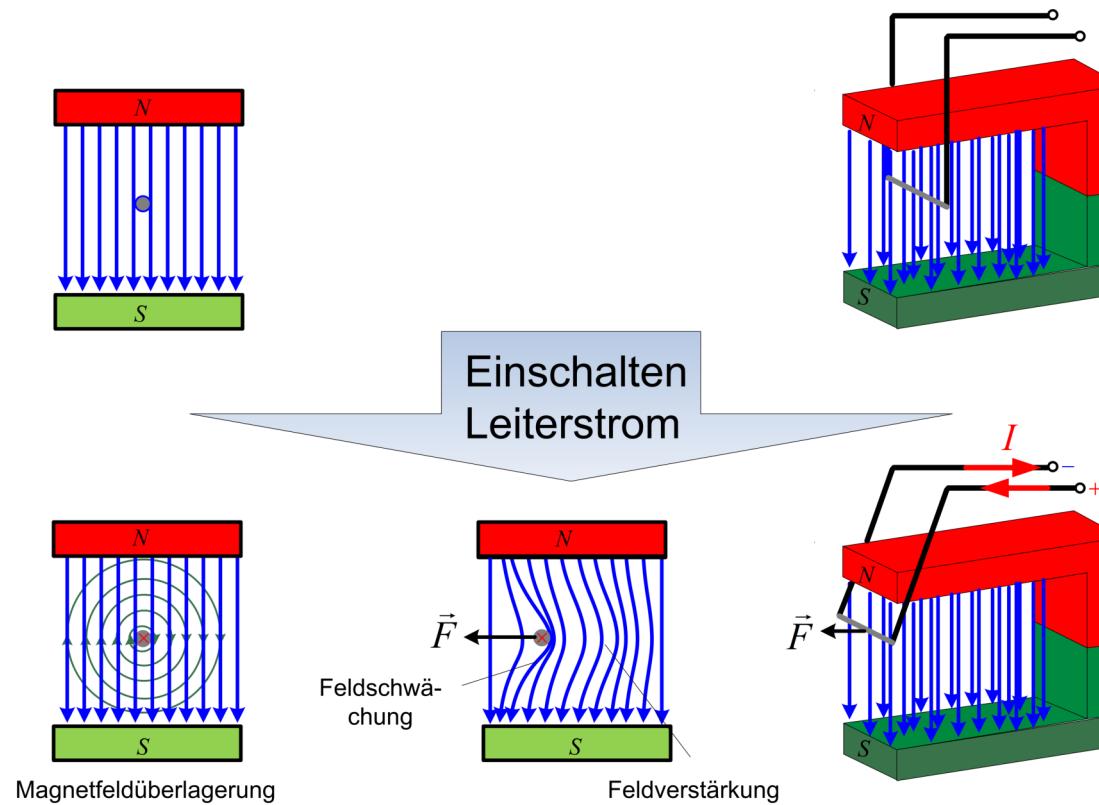
Das Magnetfeld hat deshalb keinen Anfang und kein Ende, sondern die Feldlinien sind in sich geschlossen. Man bezeichnet das Magnetfeld deshalb auch als Wirbelfeld.

Die magnetischen Feldlinien treten nach Definition am Nordpol aus und verlaufen zum Südpol. Dort treten sie wieder ein und verlaufen innerhalb des Magneten zum Nordpol zurück. Die Richtung des Magnetfeldes kann z.B. mit Hilfe einer beweglichen Magnettadelp bestimmt werden.

Das magnetische Feld

Die Dichte der Feldlinien ist analog zum elektrischen Feld ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Diese kann für einen gegebenen Magneten bestimmt werden z.B. mittels

- der Stärke der Auslenkung eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld
- der Stärke der Abbremsung eines in einem Magnetfeld bewegten Leiters

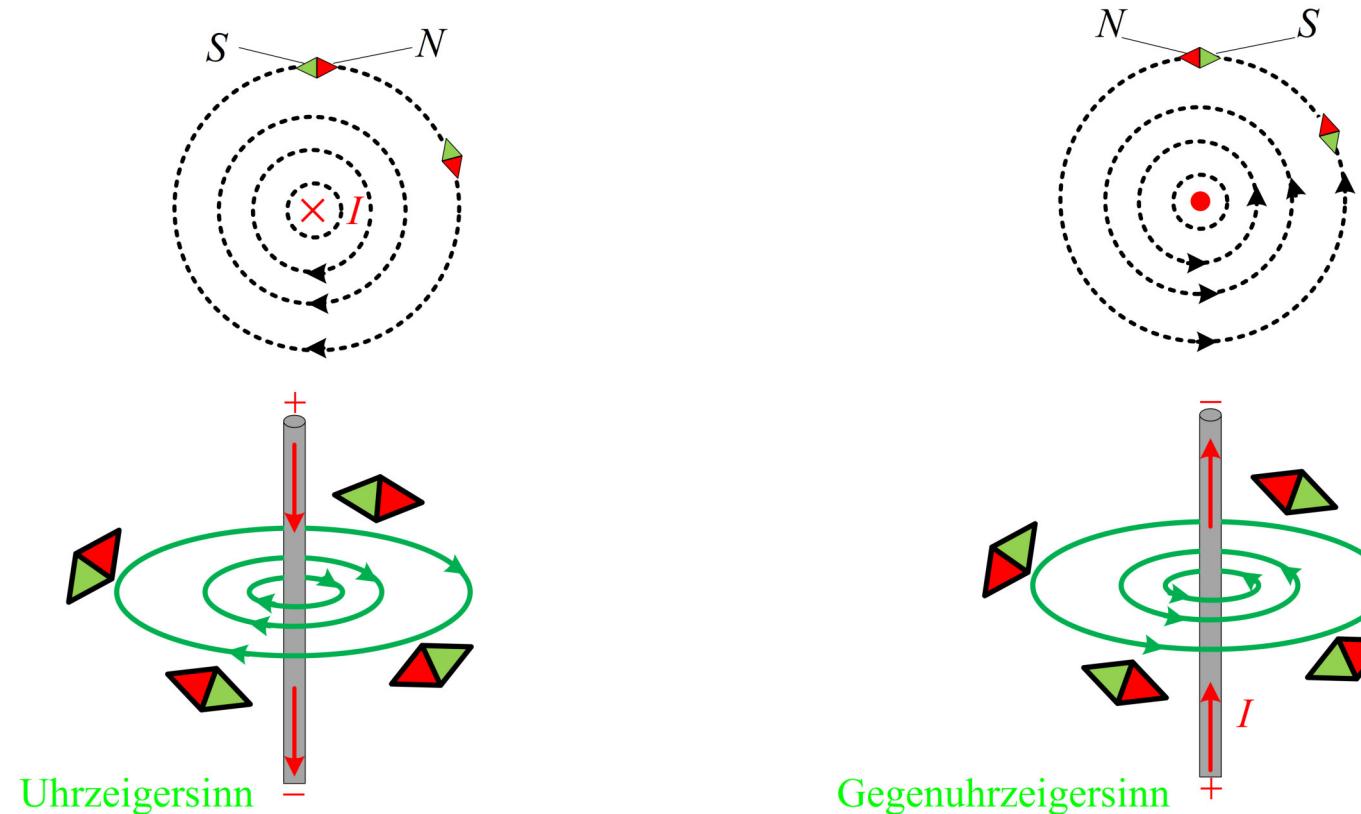


Wie wir die Kraft, welche zur Auslenkung bzw. Ablenkung führt, bestimmen, wird noch diskutiert.

3.1 Die magnetische Feldstärke

Magnetfelder können nicht nur durch Permanentmagneten erzeugt werden, sondern entstehen auch infolge der Bewegung elektrischer Ladung, d.h. infolge von Stromfluß.

Als einführendes Beispiel wird das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen langen geraden Leiter betrachtet, das nachfolgend dargestellt ist.

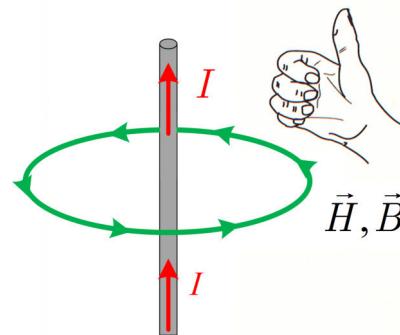


Die magnetische Feldstärke

Die Feldlinien des Magnetfeldes liegen wie Kreise um den Leiter senkrecht zum Stromfluß.

Die Richtung der Feldlinien wird von der Stromrichtung bestimmt und folgt der so genannten Rechtsschraubenregel. Dies bedeutet:

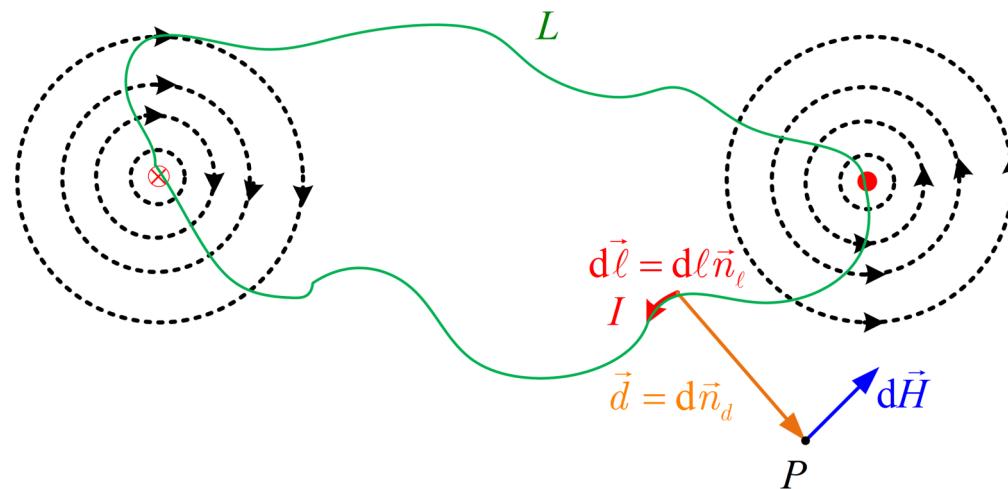
- Blickt man in die technische Stromrichtung von Plus nach Minus, so ist der Drehsinn des Magnetfeldes im Uhrzeigersinn nach rechts gerichtet.



- Wird die Stromrichtung geändert, richtet sich das Magnetfeld neu aus.

Die magnetische Feldstärke

Die Stärke des magnetischen Feldes in einem Raumpunkt P infolge des Stromflusses in einem Leiter L einer beliebigen Form kann mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes bestimmt werden.



Gesetz von Biot-Savart

Die durch einen Strom der Stromstärke I in einem Leiter L erzeugte **magnetische Feldstärke** im Raumpunkt P ist

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{\ell} \times \vec{d}}{d^3} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]. \quad (3.196)$$

Hierbei ist $\vec{d} = d\vec{n}_d$ der von dem betrachteten Leitungsabschnitt $d\vec{\ell}$ zum Aufpunkt P reichende Vektor.

Die magnetische Feldstärke

Die gesamte magnetische Feldstärke ist somit die Summe der infinitesimalen Feldstärken ($d\vec{H} = d\ell \vec{n}_\ell$)

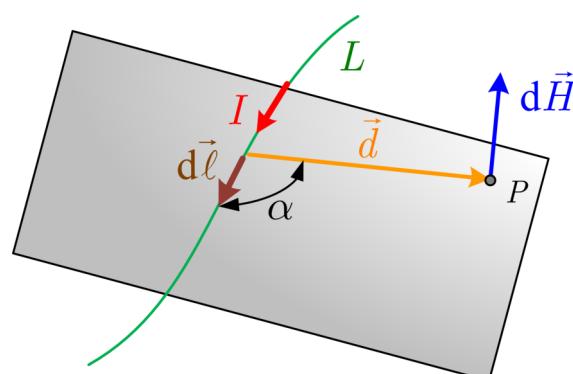
$$\vec{H} = \int_L d\vec{H} \quad \text{mit} \quad d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{d}}{d^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\ell \vec{n}_\ell \times \vec{n}_d}{d^2} = dH (\vec{n}_\ell \times \vec{n}_d). \quad (3.197)$$

mit der Amplitude

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{d\ell}{d^2}. \quad (3.198)$$

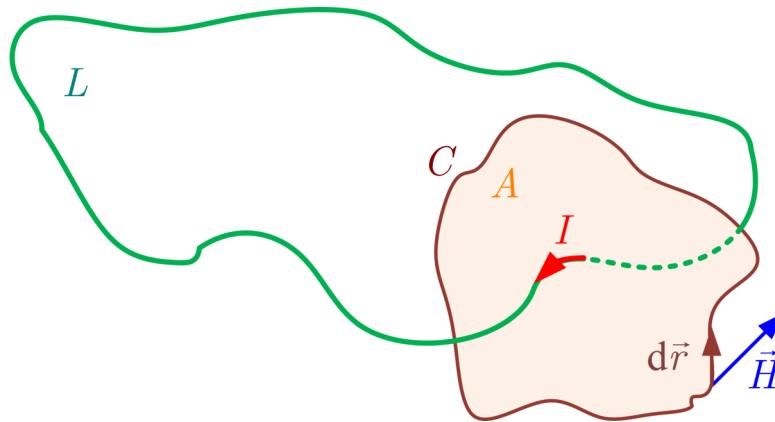
Das bedeutet:

- Jedes stromdurchflossene Leiterelement $d\vec{\ell}$ erzeugt für sich eine magnetische Feldstärke $d\vec{H}$
- Die magnetische Feldstärke zeigt in Richtung des Normalenvektors der von $d\vec{\ell}$ und \vec{d} aufgespannten Ebene
 - $d\vec{\ell}$, \vec{d} und $d\vec{H}$ bilden für $I > 0$ ein Rechtssystem!



Die magnetische Feldstärke

Anstelle des Biot-Savart-Gesetzes kann in der Praxis bei Betrachtung **geschlossener** Leiterschleifen das einfacher auszuwertende äquivalente **Ampèresche Durchflutungsgesetz** verwendet, dass sich bei Integration aller Feldstärken auf einer geschlossenen Kurve C ergibt.



Ampèresches Durchflutungsgesetz

Für geschlossene Leiterschleifen ist das Integral der magnetischen Feldstärke entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C ist gleich dem Integral der Stromdichte durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche A bzw. gleich dem elektrischen Gesamtstrom $I = \sum_i I_i$ durch die Fläche A

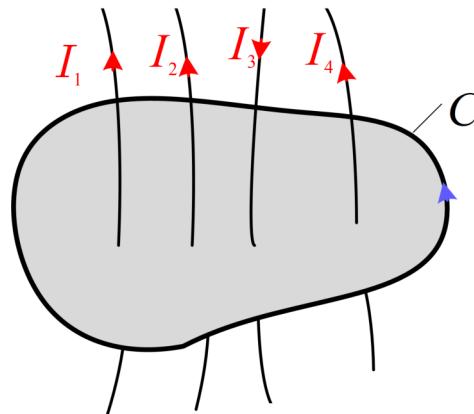
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I. \quad (3.199)$$

Die magnetische Feldstärke

Der Wert Θ des Umlaufintegrals über die magnetische Feldstärke bzw. des eingeschlossenen Gesamtstroms

$$\Theta = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \sum_k I_k \quad (3.200)$$

wird als **Durchflutung** bezeichnet.



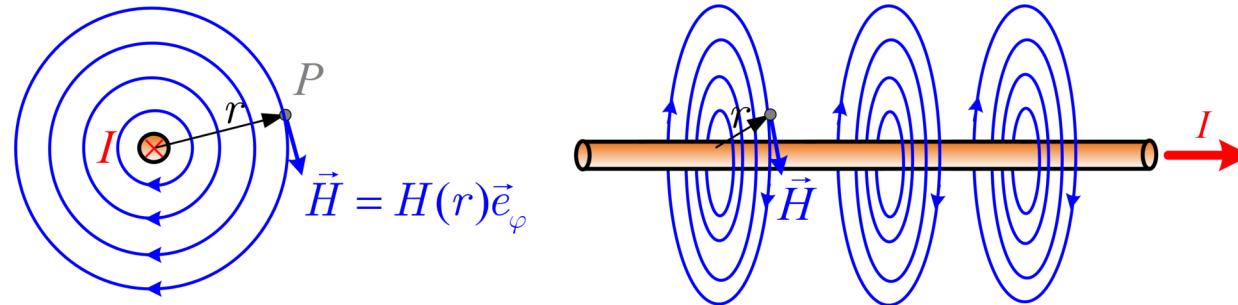
Achtung: Das Ampèresche Durchflutungsgesetz kann nur angewendet werden, wenn gilt

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.201)$$

d.h. wenn die Stromverteilung geschlossen ist bzw. im gesamten Raum nur Leitungsströme vorliegen!

Beispiel 1:

Betrachtet wird ein einzelner langer gerader Leiter im Vakuum, der von einem Strom I durchflossen wird.



Die magnetischen Feldlinien sind konzentrische Ringe um den Leiter

$$\vec{H} = H(r) \vec{e}_\varphi \quad (3.202)$$

Der Betrag der magnetischen Feldstärke $H(r)$ im Abstand r vom Leiter ergibt sich durch Integration entlang einer Feldlinie mit $d\vec{r} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$

$$I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_0^{2\pi} H(r) \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{e}_\varphi = \oint_0^{2\pi} H(r) r d\varphi = H(r) r 2\pi$$

Die magnetische Feldstärke

als

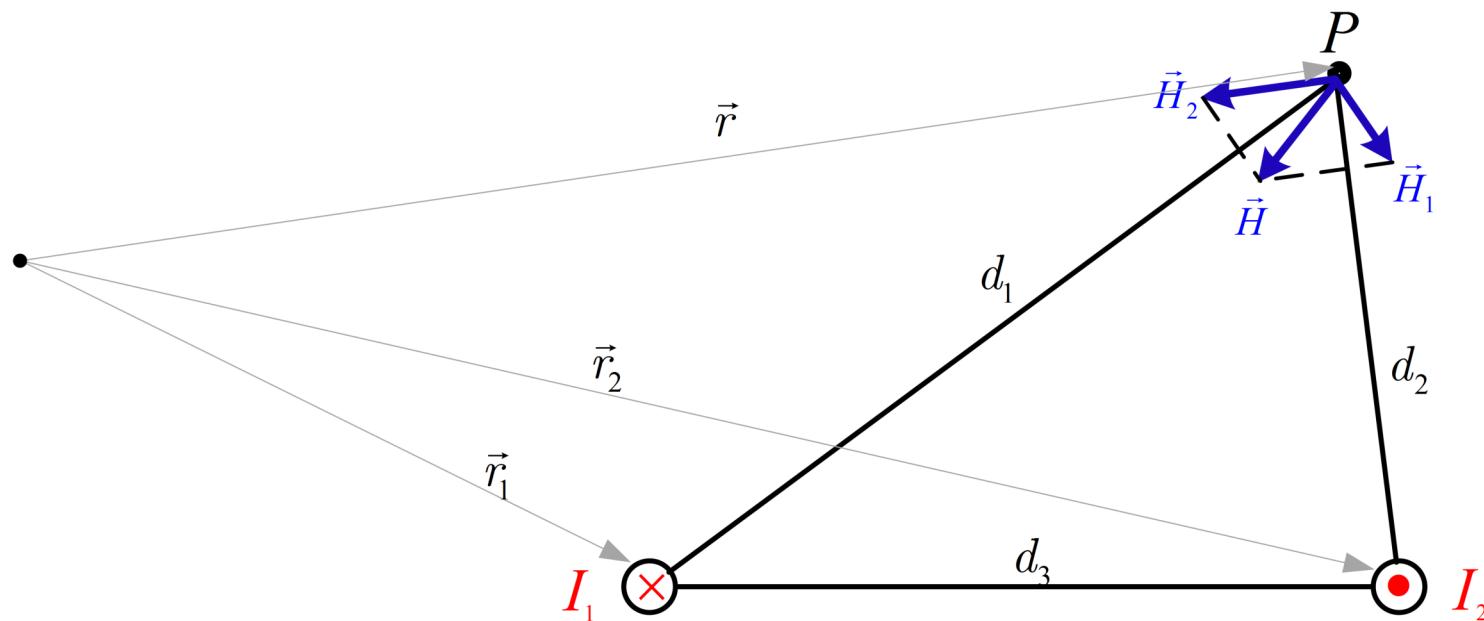
$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}. \quad (3.203)$$

Die magnetische Feldstärke um einen langen geraden Leiter im Abstand r ist somit

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi.$$

Beispiel 2:

Zu bestimmen ist die magnetische Feldstärke an einem beliebigen Raumpunkt P des Vakuums, die von zwei parallel verlaufenden stromdurchflossenen Leitern mit den Stromstärken $I_1, I_2 > 0$ erzeugt wird. Hierbei sei die positive Zählrichtung des Stromes gleich der Orientierung des elektrischen Stromes I_1 .



- Der Strom I_1 erzeugt im Punkt P nach Gl. (3.203) eine Felst rke mit der Amplitude

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi d_1}$$

Die magnetische Feldstärke

- Der Strom I_2 erzeugt im Punkt P eine Feldstärke mit der Amplitude (entgegengesetzte Stromflussrichtung zu I_1)

$$H_2 = -\frac{I_2}{2\pi d_2}$$

Hierbei sind die Abstände $d_i, i = 1, 2$ gegeben als

$$d_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|, \quad i = 1, 2.$$

und die Feldstärkevektoren sind dann

$$\vec{H}_i = H_i \vec{e}_{\varphi,i}, \quad i = 1, 2.$$

$\vec{e}_{\varphi,i}$ zeigt hierbei in die jeweilige Uhrzeigerrichtung. Die vektorielle Addition liefert die gesuchte Gesamtfeldstärke

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{I_1}{2\pi d_1} \vec{e}_{\varphi,1} - \frac{I_2}{2\pi d_2} \vec{e}_{\varphi,2}$$

Falls weitere Ströme existieren, so müssen deren Beiträge zur Feldstärke gemäß dem Superpositionsprinzip addiert werden.

Im obigen Beispiel haben wir nur die elektrische Stromstärke infolge des elektrischen Leitungsstromes betrachtet. Neben dem Leitungsstrom trägt jedoch auch der Verschiebungsstrom zur totalen elektrischen Stromstärke bei, der ebenfalls zum Magnetfeld beiträgt.

Aus diesem Grund erweiterte Maxwell das Ampèresche Durchflutungsgesetz für den Fall

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0, \quad (3.204)$$

um den Verschiebungsstrom.

Erweitertes Durchflutungsgesetz

Das Integral der magnetischen Feldstärke entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C ist gleich dem Integral der totalen elektrischen Stromdichte durch die von der Kurve eingeschlossene Fläche A bzw. gleich dem totalen elektrischen Strom I_{tot} durch A

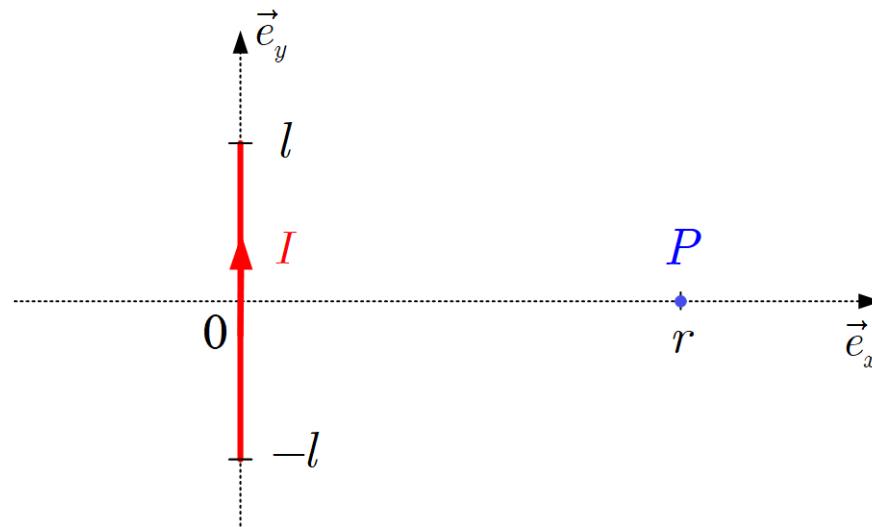
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = I_{\text{tot}}. \quad (3.205)$$

Die magnetische Feldstärke

Beispiel:

Ein gerades Leiterstück L der Länge $2l$ werde von einem konstanten Strom I durchflossen. Das Leiterstück liege symmetrisch zum Koordinatenursprung auf der y -Achse eines kartesischen Koordinatensystems.

Ermitteln Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$, die in einem Punkt P auf der x -Achse mit Abstand r vom Koordinatenursprung auftritt.



Um die gesuchte magnetische Feldstärke zu lösen gibt es mindestens zwei Möglichkeiten!

Die magnetische Feldstärke

- Variante 1: Biot-Savart-Gesetz

Das Biot-Savart-Gesetz lautet allgemein

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_L \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{d}}{d^3}.$$

Gemäß den Angaben gilt

- der Ortsvektor des Punktes P auf der x -Achse mit Abstand r vom Koordinatenursprung ist in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r} = (r, 0, 0)^T = r\vec{e}_x$$

- der Ortsvektor eines Punktes P_L auf dem Leiterstück L hat den Ortsvektor

$$\vec{r}_L = (0, y, 0)^T = y\vec{e}_y, \quad -l \leq y \leq l$$

Die magnetische Feldstärke

Somit gilt hier

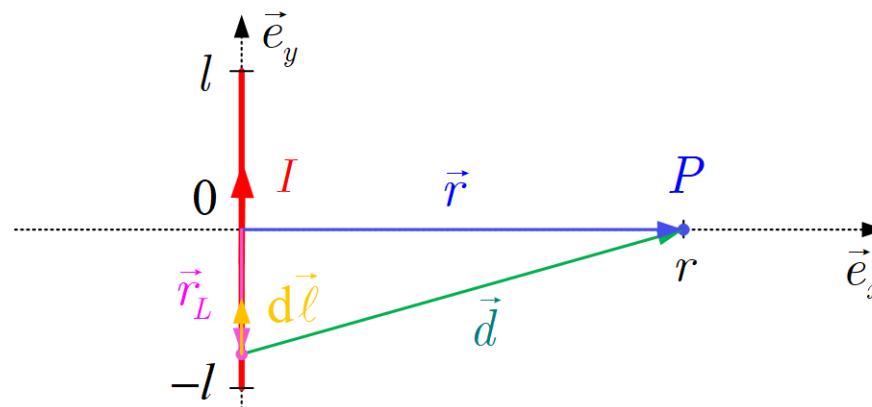
$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_L = (r, -y, 0)^T = r\vec{e}_x - y\vec{e}_y \quad d\vec{\ell} = (0, dy, 0)^T = dy\vec{e}_y$$

und es folgt

$$d\vec{\ell} \times \vec{d} = (0, dy, 0)^T \times (r, -y, 0)^T = (0, 0, -r dy)^T = -r dy \vec{e}_z$$

sowie

$$d^3 = (r^2 + y^2)^{3/2}.$$



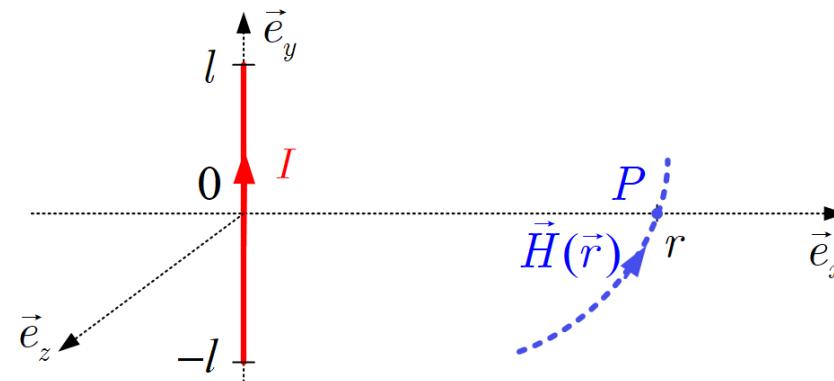
Die magnetische Feldstärke

Einsetzen dieser Ergebnisse liefert

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{-r dy}{(r^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_z = -\frac{Ir}{4\pi} \left[\frac{y}{r^2 \sqrt{r^2 + y^2}} \right]_{-l}^l \vec{e}_z = -\frac{I}{2\pi r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \vec{e}_z$$

Für einen unendlich langen Leiter ergibt sich das bekannte Resultat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{I}{2\pi r} \vec{e}_z$$



Die magnetische Feldstärke

- Variante 2: Erweitertes Durchflutungsgesetz

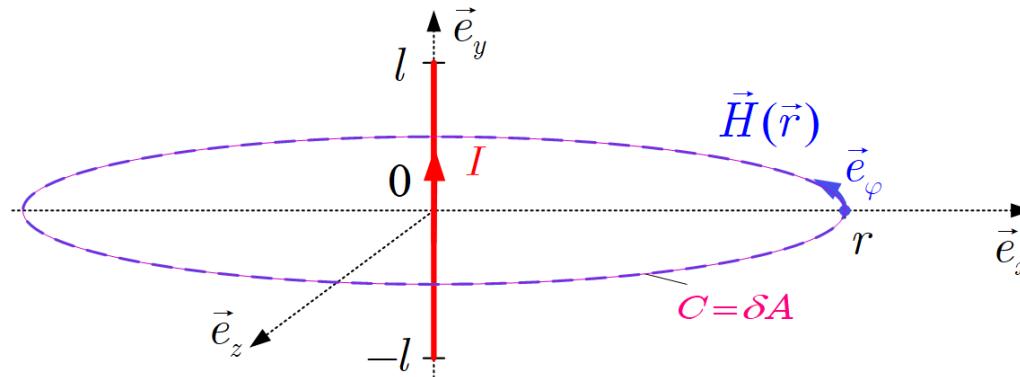
Das erweiterte Durchflutungsgesetz lautet allgemein

$$\oint_{C=\delta A} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad (3.206)$$

Aus Symmetriegründen gilt auf einem Kreis in der $x - z$ -Ebene mit Radius r um die y -Achse

$$\vec{H}(\vec{r}) = H(r) \vec{e}_\varphi$$

wobei \vec{e}_φ der Einheitsvektor in Kreisrichtung in Zylinderkoordinaten ist.

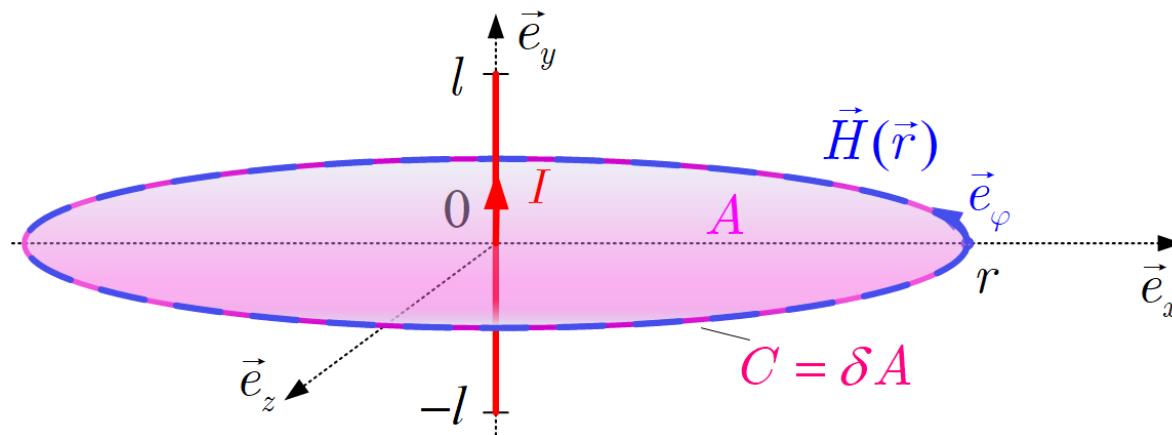


Somit folgt für die linke Seite des erweiterten Durchflutungsgesetzes mit $d\vec{r} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\oint_{C=\delta A} \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = H(r) 2\pi r$$

Die magnetische Feldstärke

Die rechte Seite des erweiterten Durchflutungsgesetzes muss nun für die Fläche A , die eine Kreisscheibe in der $x - z$ -Ebene mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Rand C auf dem Kreis mit Radius r darstellt, berechnet werden.



Bei der gewählten Zählrichtung der Randkurve bzw. des Einheitsvektors \vec{e}_φ ist das infinitesimale Flächen-element $d\vec{A}$ somit gegeben als $dA\vec{e}_y$.

Damit ergibt sich der erste Teil der rechten Seite des erweiterten Durchflutungsgesetzes zu

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I$$

Die magnetische Feldstärke

Für den zweiten Teil ist die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte zu bestimmen.

Mit der ersten Maxwell'schen Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \dot{\vec{D}} = \dot{\rho}$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\dot{\rho}$$

folgt

$$-\operatorname{div} \vec{J} = \dot{\rho} = \operatorname{div} \dot{\vec{D}} \Leftrightarrow -\iint_{A_H=\delta V} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \dot{\rho} dV = \iint_{A_H=\delta V} \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$$

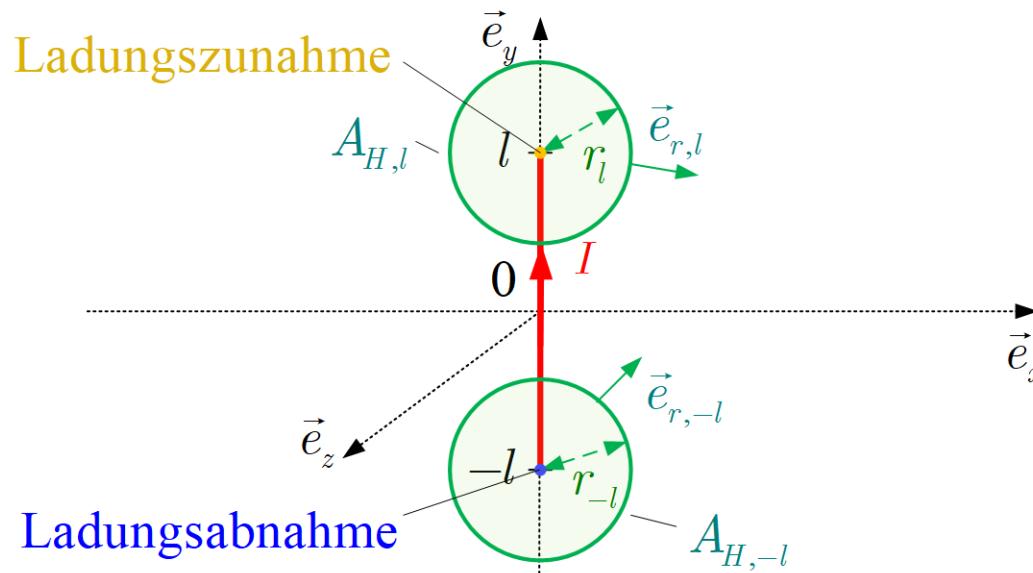
Hierbei bezeichnet $\delta V = A_H$ die geschlossene Hülloberfläche eines Volumens V .

Diese Integrale sind nun auszuwerten für Gebiete, in denen gilt $-\operatorname{div} \vec{J} = \dot{\rho} \neq 0$, d.h. wo es zu zeitlichen Änderungen der Ladungsdichte kommt!

Die magnetische Feldstärke

Dies ist gegeben am Anfang und am Ende des Leiterstückes L ! Dort kommt es somit zur zeitlichen Änderung von Punktladungen, welche ihrerseits eine zeitlich veränderliche elektrische Flussdichte erzeugen. Auf Grund der Anordnung der punktuell konzentrierten Ladungen müssen die resultierenden elektrischen Flussdichten bzw. Feldstärken radialsymmetrisch sein analog zu Gl. (2.96).

Legt man jeweils nach außen orientierte Kugelhüllen $A_{H,l}$ bzw. $A_{H,-l}$ mit den Flächennormalenvektoren $\vec{e}_{r,l}$ bzw. $\vec{e}_{r,-l}$ sowie Radien r_l bzw. r_{-l} um den Anfang bzw. das Ende des Leiterstückes, so können die radialsymmetrischen elektrischen Flussdichten $\vec{D}_l = D_l(r_l)\vec{e}_{r,l}$ bzw. $\vec{D}_{-l} = D_{-l}(r_{-l})\vec{e}_{r,-l}$ berechnet werden.



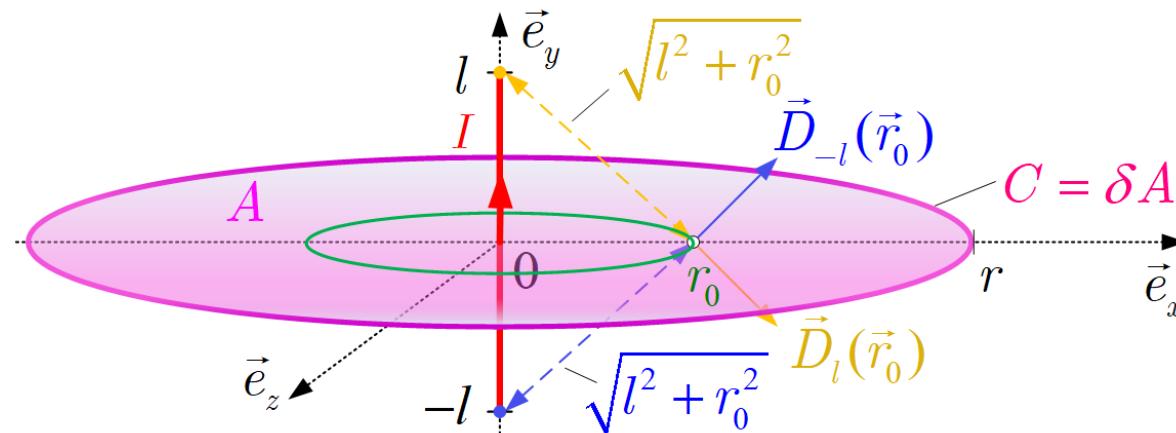
Die magnetische Feldstärke

- Anfang des Leiterstückes (Ladungsabnahme): $\vec{D}_{-l}(\vec{r}_{-l}) = D_{-l}(r_{-l})\vec{e}_{r,-l}$ und $d\vec{A} = dA\vec{e}_{r,-l}$

$$\dot{D}_{-l}(r_{-l})4\pi r_{-l}^2 = \iint_{A_{H,-l}} \vec{D}_{-l} \cdot d\vec{A} = - \iint_{A_{H,-l}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -I \Rightarrow \dot{D}_{-l}(r_{-l}) = \frac{-I}{4\pi r_{-l}^2}$$

- Ende des Leiterstückes (Ladungszunahme): $\vec{D}_l(\vec{r}_l) = D_l(r_l)\vec{e}_{r,l}$ und $d\vec{A} = dA\vec{e}_{r,l}$

$$\dot{D}_l(r_l)4\pi r_l^2 = \iint_{A_{H,l}} \vec{D}_l \cdot d\vec{A} = - \iint_{A_{H,l}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = I \Rightarrow \dot{D}_l(r_l) = \frac{I}{4\pi r_l^2}$$



Die magnetische Feldstärke

Damit kann der zweite Teil des Integrals von Gl. (3.206) - das Integral der Änderung der elektrischen Flussdichte \vec{D} in der Fläche A mit der Randkurve $C = \delta A$ vom Radius r um die y -Achse und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt - berechnet werden.

Auf einem Kreis mit Radius $r_0 \in [0, r]$ gilt mit $r_{-l}^2 = r_l^2 = l^2 + r_0^2$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{D}}(\vec{r}_0) &= \vec{D}_{-l}(\vec{r}_0) + \vec{D}_l(\vec{r}_0) \\ &= \frac{-I}{4\pi(l^2 + r_0^2)} \vec{e}_{r,-l} + \frac{I}{4\pi(l^2 + r_0^2)} \vec{e}_{r,l} \\ &= \frac{I}{4\pi(l^2 + r_0^2)} (-\vec{e}_{r,-l} + \vec{e}_{r,l})\end{aligned}$$

Um die Vektorsumme $-\vec{e}_{r,-l} + \vec{e}_{r,l}$ zu berechnen, ist es aus Symmetriegründen ausreichend, den Punkt P_0 auf der x -Achse mit Abstand r_0 vom Koordinatenursprung zu betrachten. Hier gilt

$$\vec{e}_{r,-l} = \frac{r_0}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \vec{e}_x + \frac{l}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \vec{e}_y \quad \vec{e}_{r,l} = \frac{r_0}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \vec{e}_x - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \vec{e}_y,$$

und damit

$$-\vec{e}_{r,-l} + \vec{e}_{r,l} = -2 \frac{l}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \vec{e}_y.$$

Die magnetische Feldstärke

Somit gilt innerhalb A

$$\dot{\vec{D}}(\vec{r}_0) = \frac{-2Il}{4\pi(l^2 + r_0^2)^{3/2}} \vec{e}_y.$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \iint_A \dot{\vec{D}}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{A} &= \iint_A \frac{-2Il}{4\pi(l^2 + r_0^2)^{3/2}} \vec{e}_y \cdot dA \vec{e}_y = \iint_A \frac{-2Il}{4\pi(l^2 + r_0^2)^{3/2}} dA \\ &= \frac{-2Il}{4\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{(l^2 + r_0^2)^{3/2}} r_0 d\varphi dr_0 = -Il \int_0^r \frac{r_0}{(l^2 + r_0^2)^{3/2}} dr_0 \\ &= -Il \left[\frac{-1}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} \right]_0^r = Il \left(\frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}} - \frac{1}{l} \right) = I \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} - I \end{aligned}$$

Die Kombination aller bisherigen Teilergebnisse ergibt schließlich die gesuchte magnetische Feldstärke als

$$H(r)2\pi r = I + I \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} - I \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

Die magnetische Feldstärke

Anmerkung 1:

Das erweiterte Durchflutungsgesetz entspricht der 4. Maxwell'schen Gleichung und kann auch in differentieller Form dargestellt werden. Es beschreibt die Wirbel der magnetischen Feldstärke:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \Leftrightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.207)$$

Anmerkung 2:

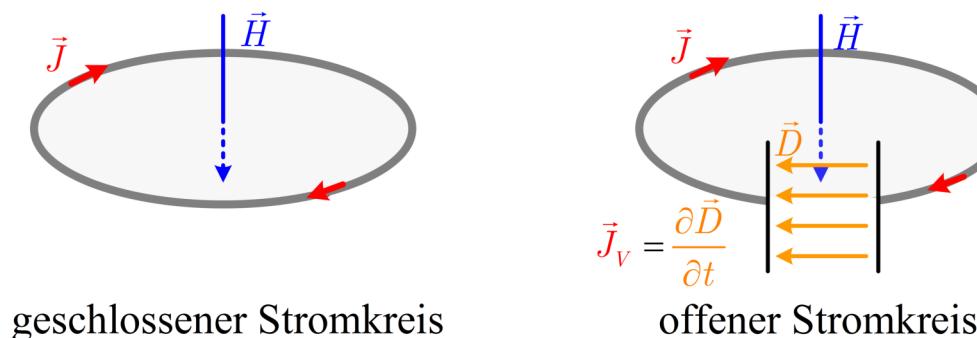
Der Verschiebungsstrom $\partial \vec{D} / \partial t$ ist notwendig, um die Gültigkeit des Biot-Savart-Gesetzes auch für **offene** Stromkreise zu garantieren, da andernfalls die Bedingung

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.208)$$

bzw. die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{J} + \dot{\rho} = 0 \quad (3.209)$$

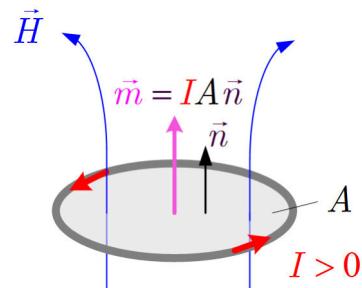
nicht erfüllt werden kann!



Die magnetische Feldstärke

Anmerkung 3:

In Analogie zum elektrischen Dipol kann ein magnetischer Dipol definiert werden als Grenzwert des folgenden Modells



mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m} = IA\vec{n}. \quad (3.210)$$

Für verschwindende Fläche $A \rightarrow 0$ gilt im Übergang zum Punktdipol

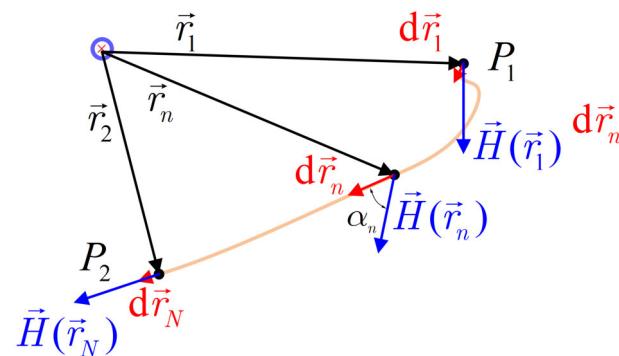
$$A \rightarrow 0 \quad \vec{m} = \text{const.} \quad (3.211)$$

Mit diesem Modell kann jeder magnetische Dipol als Resultat eines Magnetisierungsstromes I interpretiert werden.

3.2 Die magnetische Spannung

In Analogie zur elektrischen Spannung kann eine magnetische Spannung definiert werden, die jedoch praktisch nicht dieselbe Bedeutung hat wie die elektrische Spannung

$$u_{m,12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\vec{H}(\vec{r}_n)| |d\vec{r}_n| \cos(\alpha_n). \quad (3.212)$$

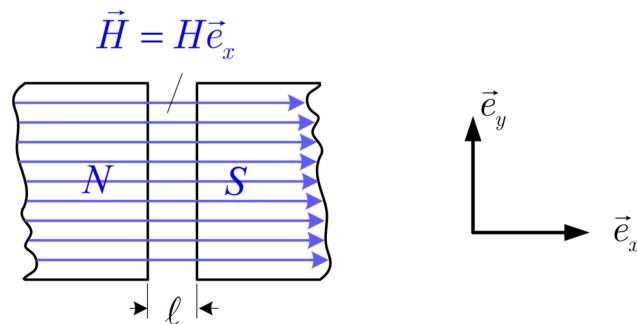


Die Einheit der magnetischen Spannung ist Ampere.

Die magnetische Spannung

Beispiel:

Betrachtet wird ein Luftspalt der Breite ℓ , in dem ein homogenes magnetisches Feld $\vec{H} = H\vec{e}_x$ existiert.



Die magnetische Spannung zwischen den Magnetpolen ist

$$u_{m,12} = \int_0^\ell H \, ds = H\ell.$$

3.3 Die magnetische Flussdichte

Das Verhältnis der Anzahl der Magnetfeldlinien zur Größe der Fläche, die sie durchsetzen, wird als magnetische Flussdichte bezeichnet.

Magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte \vec{B} ist ein Maß für die Anzahl der magnetischen Feldlinien, die durch ein Flächenstück A hindurchdringen. Sie ist für ruhende Medien die Summe der magnetischen Feldstärke \vec{H} gewichtet mit der Permeabilität des Vakuums μ_0 und der Magnetisierung \vec{M}

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad [T]. \quad (3.213)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ ist die Permeabilität des Vakuums.

Die Einheit der magnetischen Flussdichte \vec{B} ergibt sich als:

$$\frac{\text{Vs}}{\text{Am m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \mathbf{\text{Tesla}} = \text{T}.$$

Es gilt außerdem

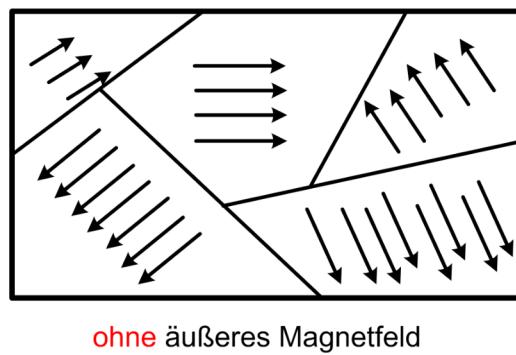
$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{Am}^2}.$$

Die magnetische Flussdichte

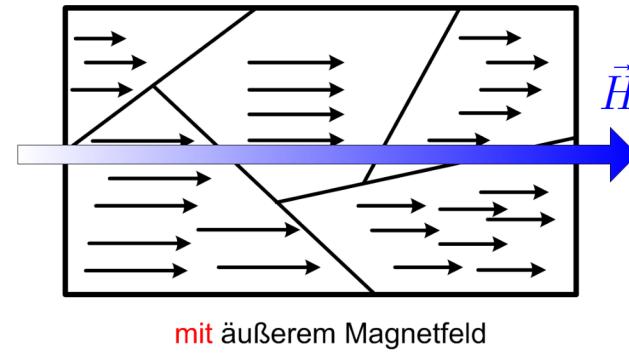
Analog zur elektrischen Polarisation von z.B. Dielektrika können nichtmagnetische Stoffe durch Anlegen eines äußeren Feldes $\vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0$ magnetisiert werden. Hierbei unterscheidet man unter anderem

- Ferromagnetismus

Werden ferromagnetische Stoffe einem externen Magnetfeld ausgesetzt, so werden die im Stoff vorhandenen gebietsweise parallel ausgerichteten Elementarmagnete (Weiss-Bezirke) so durch das externe Magnetfeld ausgerichtet, dass das Magnetfeld im Innern des Stoffes extrem verstärkt wird (Eisen, Kobalt, ...).



ohne äußeres Magnetfeld



mit äußerem Magnetfeld

Bei ferromagnetischen Stoffen unterscheidet man zwischen weich- und hartmagnetischen Stoffen

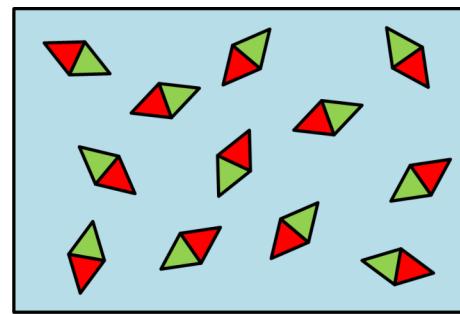
- Schwere der Magnetisierbarkeit/Koerzitivfeldstärke - weichmagnetisch leichter magnetisierbar als hartmagnetisch
- Größe ihrer Permanent-/Remanenzmagnetisierung nach Abschaltung des äußeren Feldes - weichmagnetisch kleiner als hartmagnetisch

Diese Eigenschaften spiegeln sich in den entsprechenden Hystereskurven wieder.

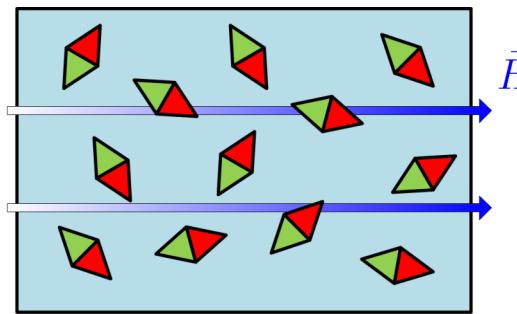
Die magnetische Flussdichte

- Paramagnetismus

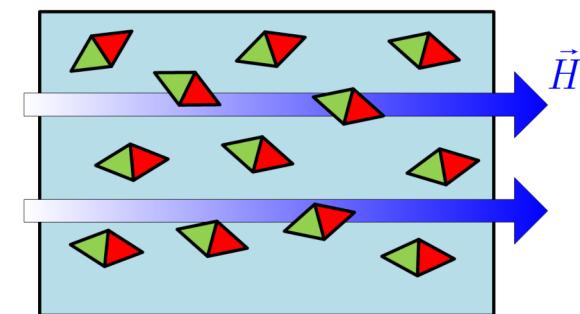
Werden paramagnetische Stoffe einem externen Magnetfeld ausgesetzt, so werden die regellos angeordneten magnetischen Momente \vec{m} der Atome oder Moleküle des Stoffes (teilweise) so durch das externe Magnetfeld ausgerichtet, dass das Magnetfeld im Innern des Stoffes verstärkt wird (Alkalimetalle, seltene Erden, ...).



ohne äußeres Magnetfeld



schwaches äußeres Magnetfeld



starkes äußeres Magnetfeld

- Diamagnetismus

Werden diamagnetische Stoffe einem externen Magnetfeld ausgesetzt, so werden die regellos angeordneten magnetischen Momente der Atome oder Moleküle des Stoffes (teilweise) so ausgerichtet, dass das Magnetfeld im Stoffinneren abgeschwächt wird (Wasser, Kupfer, Gold, Kohlenstoff,...).

Die resultierende Magnetisierung des Stoffes mit Volumen V ergibt sich als

$$\vec{M} = \frac{1}{|V|} \sum_k \vec{m}_k \quad (3.214)$$

Die magnetische Flussdichte

In magnetisch **isotropen**, homogenen und linearen Stoffen sind die Magnetisierung \vec{M} und die magnetische Feldstärke proportional zueinander

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (\mu_r - 1) \vec{H} \quad (3.215)$$

Dieses Modell gilt für dia- und paramagnetische Stoffe und näherungsweise für weichmagnetische ferromagnetische Stoffe. Somit sind in diesen Stoffen magnetische Flussdichte \vec{B} und Feldstärke \vec{H} einander proportional:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (3.216)$$

χ_m , μ und μ_r sind die **magnetische Suszeptibilität**, **Permeabilität** und **relative Permeabilität** oder **Permeabilitätszahl**. Sie kennzeichnen die magnetischen Eigenschaften des Raumes, in dem sich das Magnetfeld ausbreitet.

Charakteristische Größenordnungen der relativen Permeabilität μ_r sind:

- Weichmagnetische ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \gg 1$
- Paramagnetische Stoffe: $\mu_r > 1$
- Vakuum: $\mu_r = 1$
- Diamagnetische Stoffe: $\mu_r < 1$

Die magnetische Flussdichte

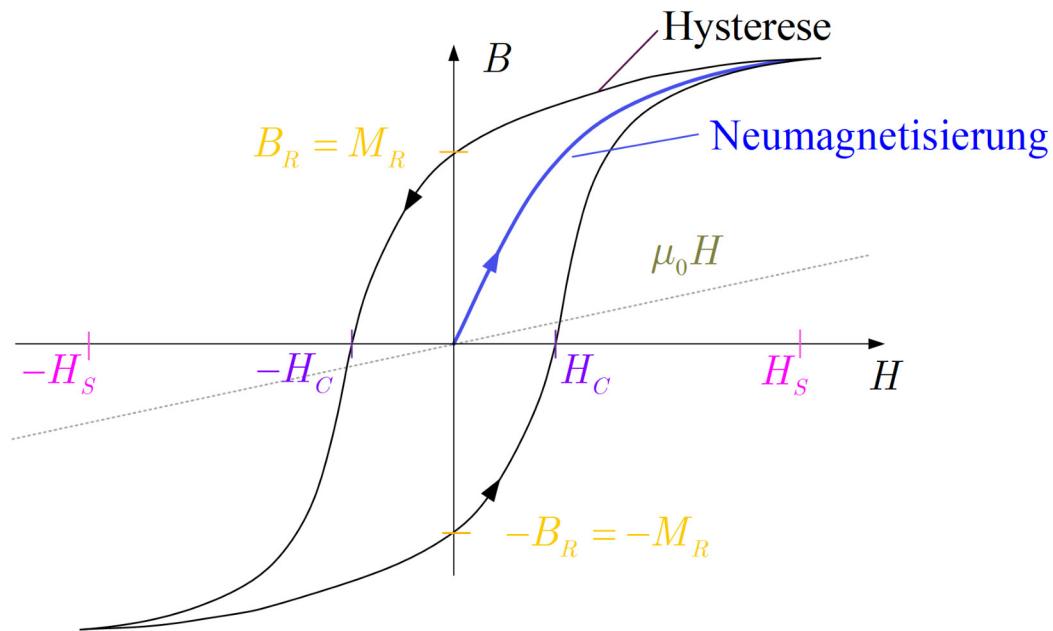
Bei hartmagnetischen Materialien ist der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flußdichte nichtlinear und mehrdeutig. Dies wird durch die Hysteresekurve beschrieben.

B_R : Remanenzflussdichte

M_R : Remanenzmagnetisierung

H_C : Koerzitivfeldstärke

H_S : Sättigungsfeldstärke



Hysteresekurven existieren auch bei weichmagnetischen Stoffen. Sie sind dort aber im Allgemeinen sehr schlank, so dass speziell für kleine magnetische Feldstärken eine konstante Permeabilität angenommen werden kann bzw. für große Feldstärken gilt

$$B = \mu(H)H. \quad (3.217)$$

Die magnetische Flussdichte

Anmerkungen:

- Wie bereits erwähnt, lässt sich das magnetische Feld mit Hilfe eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ beschreiben als

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (3.218)$$

Bei Gültigkeit der Beziehung $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ergibt sich durch Einsetzen in die 4. Maxwell-Gleichung im Fall der Magnetostatik

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \text{rot} (\text{rot} \vec{A}) = \mu \vec{J} \quad (3.219)$$

Mit der Nebenbedingung $\text{div} \vec{A} = 0$ folgt die **vektorielle Poisson-Gleichung**

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (3.220)$$

Die magnetische Flussdichte

- Das Vektorpotential lässt sich aus der Poisson-Gleichung durch Superposition infinitesimaler Stromdichtebeiträge berechnen als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\bar{V} \quad (3.221)$$

und

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\bar{V}. \quad (3.222)$$

bzw.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\bar{V}. \quad (3.223)$$

Dies ist das Biot-Savart Gesetz für eine räumliche Stromdichteverteilung.

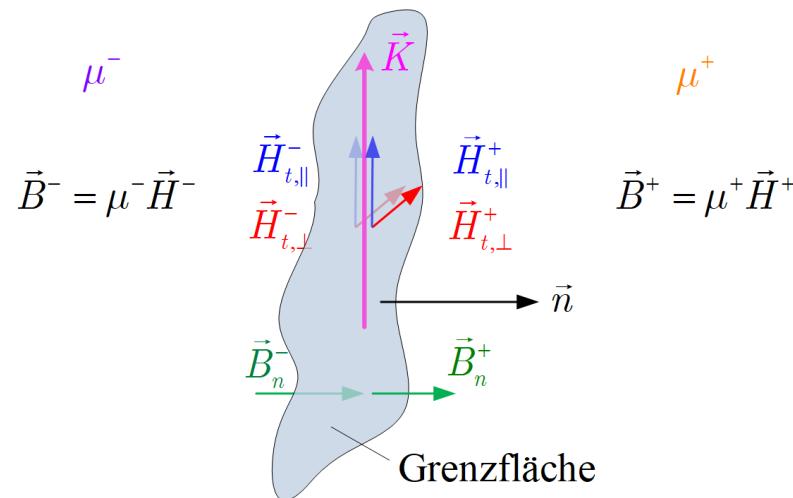
Die magnetische Flussdichte

- An einer Grenzfläche zwischen zwei Stoffen mit den Permeabilitäten μ^- und μ^+ und der Flächenstromdichte $\vec{K} = |\vec{K}| \vec{t}_\parallel$ folgen aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ die Kontinuitätsbedingungen welche wiederum ein Brechungsgesetz ergeben
 - Links- und rechtsseitige magnetische Feldstärke tangential zur Grenzfläche und parallel zu \vec{K} sind identisch, aber diejenigen orthogonal zu \vec{K} unterscheiden sich durch den Betrag $|\vec{K}|$ von \vec{K}

$$\vec{H}_{t,\parallel}^- = \vec{H}_{t,\parallel}^+ \quad \text{und} \quad \vec{H}_{t,\perp}^- + |\vec{K}| = \vec{H}_{t,\perp}^+. \quad (3.224)$$

- Links- und rechtsseitige magnetische Flussdichte in Normalenrichtung \vec{n} der Grenzfläche sind identisch

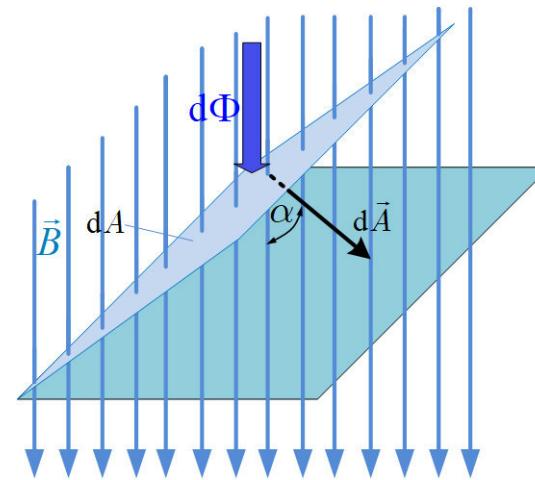
$$\vec{B}_n^- = \vec{B}_n^+ \quad \Leftrightarrow \quad \mu^- \vec{H}_n^- = \mu^+ \vec{H}_n^+ \quad (3.225)$$



3.4 Der magnetische Fluss

Analog zur Flußdichte elektrischer Felder kann auch für magnetische Felder ein das Flächenelement dA durchdringende magnetische Fluss $d\Phi$ berechnet werden als:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \alpha \quad (3.226)$$



Hierbei stellt $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ das skalare Produkt der Vektoren \vec{B} und $d\vec{A}$ dar.

3.4 Der magnetische Fluss

Durch Integrieren über alle Flächenelemente dA erhält man den durch eine beliebige Fläche A verlaufenden magnetischen Fluss.

Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss Φ durch ein Flächenstück A , dass von der magnetischen Flussdichte \vec{B} durchflutet wird, ist gegeben als

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [\text{Wb}]. \quad (3.227)$$

Die Einheit des magnetischen Fluxes Φ ist **Weber** (Wb) und es gilt $1\text{Wb}=1\text{Vs}$.

Der magnetische Fluss

Da es keine magnetischen Monopole gibt, muss der magnetische Fluss durch eine geschlossene Hülle gleich Null sein

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.228)$$

Dies ist äquivalent zur 2. Maxwell'schen Gleichung:

2. Maxwell'sche Gleichung/Gauß'sches Gesetz für magnetische Felder

Die Divergenz der magnetischen Flussdichte ist Null

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.229)$$

bzw. das Integral der magnetischen Flussdichte durch eine beliebig geschlossene Hüllfläche A ist stets Null

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (3.230)$$

Der magnetische Fluss

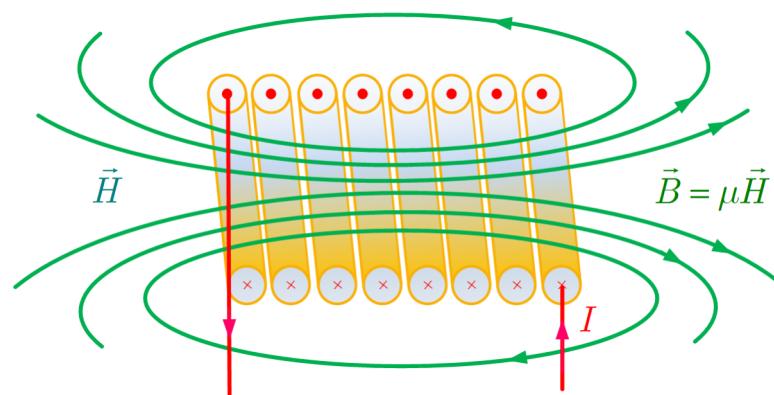
Die folgende Gegenüberstellung zeigt die wichtigsten Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem elektrischen Feld und dem magnetischen Feld im **statischen** Zustand.

Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Das elektrostatische Feld ist ein Quellenfeld. Die Feldlinien beginnen auf positiven Ladungen und enden auf negativen Ladungen.	Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld. Die Feldlinien sind in sich geschlossen. Sie haben keinen Anfang und kein Ende.
Feldlinien sind die möglichen Flugbahnen einer frei beweglichen positiven Probeladung.	Feldlinien sind die möglichen Flugbahnen eines frei beweglichen gedanklich geforderten magnetischen Nord-(Mono)-Pols.
Auf einen Probekörper mit der Ladung q wirkt die elektrische Kraft $F_{\text{el}} = E \cdot q$	Wird ein Leiter der Länge ℓ von einem Strom der Stärke I durchflossen, so wirkt auf ihn in einem magnetischen Feld die Kraft $F_{\text{mag}} = B \cdot I \cdot \ell$
Es gibt Potenziallinien bzw. -flächen und jedem Feldpunkt lässt sich eindeutig ein Potenzial zuordnen.	Aufgrund der Wirbeleigenschaft gibt es den Begriff des (skalaren) Potenzials hier nicht.
Ein Nichtleiter (Dielektrikum) im elektrischen Feld verändert die Stärke des Feldes in Abhängigkeit von den Dipoleigenschaften des Dielektrikums. In Formeln wird das durch die relative Permittivität ϵ_r berücksichtigt.	Materie im Magnetfeld beeinflusst die magnetische Feldstärke. Man unterscheidet zwischen para-, dia- und ferromagnetischen Stoffen. In Formeln wird das durch die relative Permeabilitätszahl μ_r berücksichtigt.

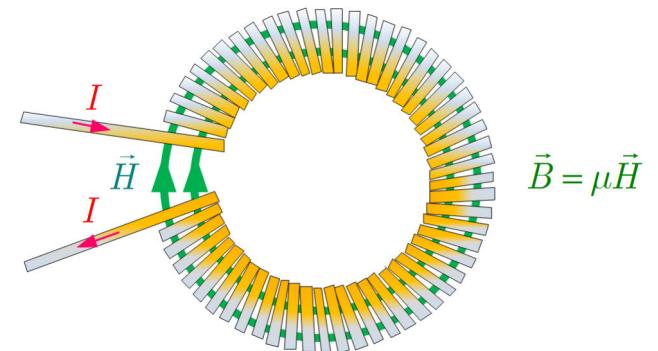
3.5 Die elektromagnetische Spule und Induktivität

Eine **Spule** besteht aus einer oder mehreren Windungen eines Leiters, die ggf. auf einem magnetisch leitenden Kern aufgebracht werden. Sie wird auch als Induktivität bezeichnet.

Zylinderspule:



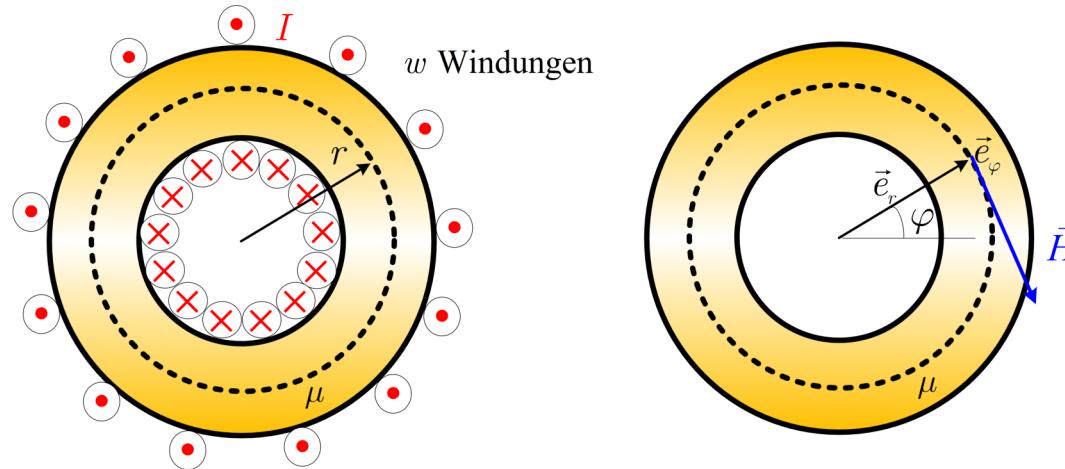
Ringspule:



- Beim Einschalten des Stromflusses durch die Spule baut die Spule ein Magnetfeld auf.
- Beim Ausschalten des Stromflusses durch die Spule baut die Spule das Magnetfeld ab.
- Im statischen Zustand des Stromflusses ist das Magnetfeld der Spule konstant.

Die elektromagnetische Spule und Induktivität

Wir betrachten nun die ideale dünne Ringspule mit Radius r , deren Kern die Permeabilität μ habe.



Die magnetischen Feldlinien verlaufen vollständig im Inneren der Spule und die magnetische Feldstärke sowie die magnetische Flussdichte seien homogen über dem Querschnitt der Spule

$$\vec{H} = H \vec{e}_\varphi \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = B \vec{e}_\varphi = \mu \vec{H}.$$

Wir suchen den Betrag der magnetischen Feldstärke H und der Flussdichte B , wenn die Ringspule von w Leiterwindungen umschlungen ist und durch sie der Strom I fließt.

Zur Lösung wird der geschlossene Weg C entlang der Mitte des Ringkerns mit der mittleren Weglänge $\ell_m = 2\pi r$ betrachtet.

Die elektromagnetische Spule und Induktivität

Auf ihm gilt

$$\Theta = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_i I_i.$$

Mit

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\ell_m} H \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi ds = \int_0^{\ell_m} H ds = H \ell_m$$

und

$$\sum_i I_i = wI$$

folgt

$$H = \frac{wI}{\ell_m} = \frac{\Theta}{\ell_m} \quad \text{bzw.} \quad B = \mu H = \mu \frac{wI}{\ell_m}$$

Ist zusätzlich die Querschnittsfläche $A = A_R$ des Ringkerns bekannt, so ergibt sich für den magnetischen Fluss im Ringkern

$$\Phi = A \cdot B = A \mu \frac{wI}{\ell_m}.$$

Induktivität einer Spule

Das Verhältnis aus dem verketteten magnetischen Fluss Ψ - dem Integral über die gesamte Leiterfläche durchdringende magnetische Flussdichte - und dem Strom I durch den Leiter ist die Induktivität L der Spule

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad [\text{H}] \quad (3.231)$$

mit

$$\Psi = \iint_{A_v} \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (3.232)$$

Die Maßeinheit der Induktivität ist **Henry** und es gilt

$$1\text{H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}. \quad (3.233)$$

Die elektromagnetische Spule und Induktivität

Für die oben betrachtete idealisierte Ringspule mit w Leiterwindungen ist der verkettete magnetische Fluss

$$\Psi = w\Phi$$

Ihre Induktivität ist dann

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w\Phi}{I} = A\mu \frac{w^2}{\ell_m} = A\mu \frac{w^2}{2\pi r}.$$

Die elektromagnetische Spule und Induktivität

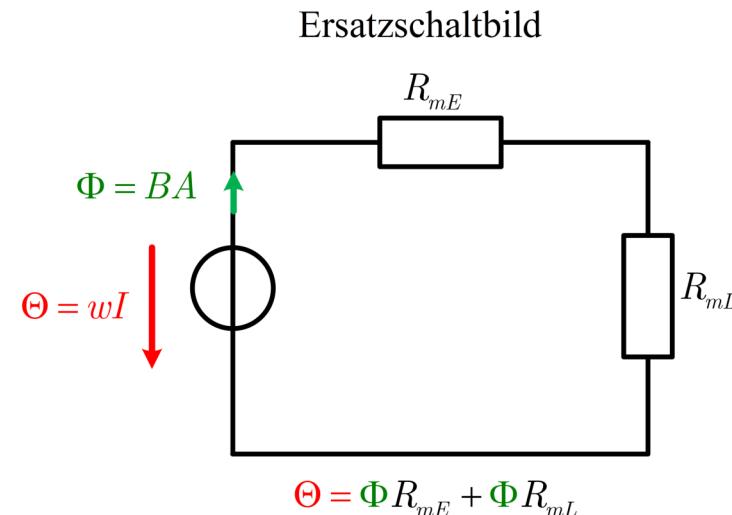
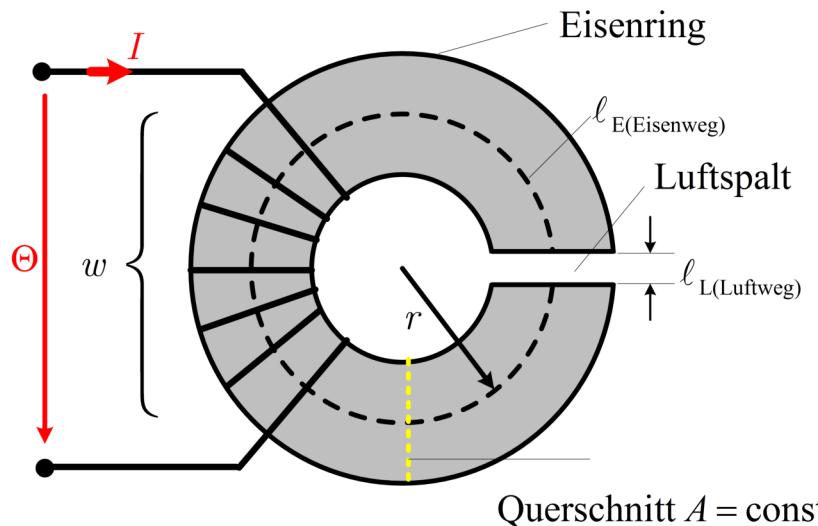
Definiert man den magnetischen Leitwert und den magnetischen Widerstand einer Spule als

$$\Lambda = \frac{\mu A}{\ell} \quad \text{bzw.} \quad R_m = \frac{\ell}{\mu A} \quad (3.234)$$

so kann die Induktivität auch dargestellt werden in der Form

$$L = w^2 \Lambda = w^2 \frac{1}{R_m} \quad (3.235)$$

Beispiel: Spule mit Luftspalt - Der magnetische Kreis ohne Verzweigung



Die elektromagnetische Spule und Induktivität

Aus dem Durchflutungssatz folgt $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \Theta$

$$H_E \ell_E + H_L \ell_L = wI = \Theta \quad (3.236)$$

Aus $\vec{B} = \mu \vec{H}$ folgt

$$\frac{B}{\mu_E} \ell_E + \frac{B}{\mu_L} \ell_L = \Theta.$$

Mit $\Phi = BA$ folgt

$$\Phi \left(\frac{\ell_E}{\mu_E A} + \frac{\ell_L}{\mu_L A} \right) = \Theta.$$

Mit $R_m = \frac{\ell}{\mu A}$ folgt

$$\Phi \left(\frac{\ell_E}{\mu_E A} + \frac{\ell_L}{\mu_L A} \right) = \Phi(R_{mE} + R_{mL}) = \Theta,$$

sowie

$$\Phi R_{mE} + \Phi R_{mL} = H_E \ell_E + H_L \ell_L = \Theta.$$

3.6 Kräfte im magnetischen Feld - Lorentzkraft

Wir hatten in der Einführung gesehen, dass auf einen stromdurchflossenen elektrischen Leiter im Magnetfeld Kräfte wirken können.

Präzisie formuliert: es tritt eine Kraftwirkung auf eine relativ zum einem Magnetfeld bewegte elektrische Punktladung auf.

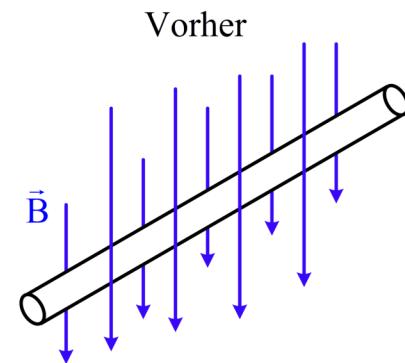
Dies passiert z.B. bei

- Bewegung der Ladung in einem im Magnetfeld bewegten Leiter,
- Bewegung der Ladung in einem im Magnetfeld ruhenden Leiter infolge Stromfluß,
- Bewegung von Ladungen in zwei ruhenden Leitern infolge Stromfluß.

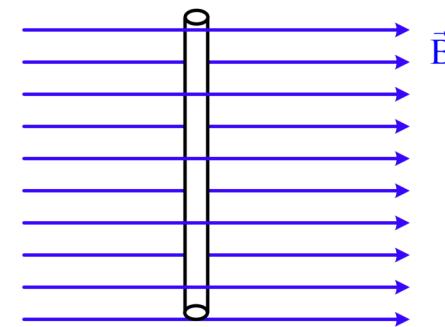
In allen Fällen wird die Kraft als **Lorentzkraft** bezeichnet, da ihre Ursache identisch ist.

3.6 Kräfte im magnetischen Feld - Lorentzkraft

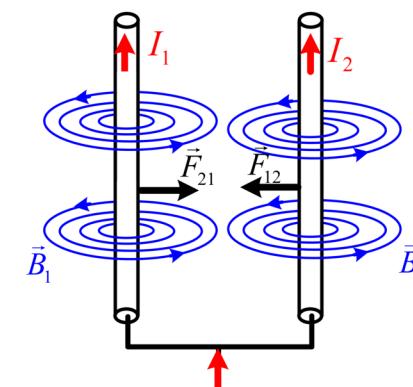
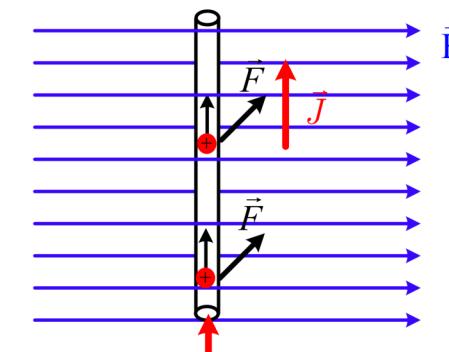
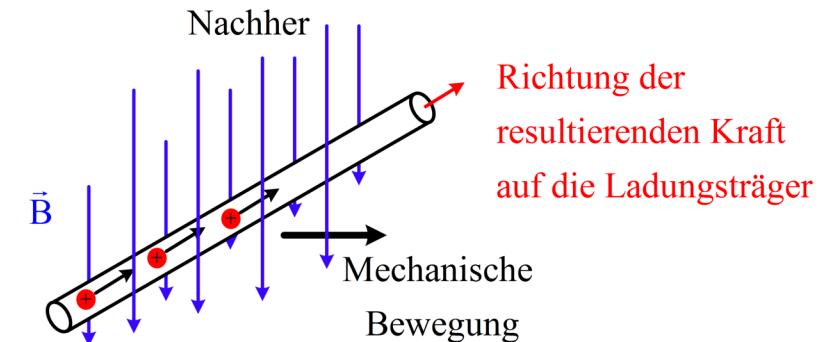
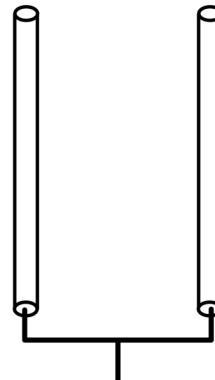
Bewegung der Ladung in einem im Magnetfeld bewegten Leiter



Bewegung der Ladung in einem im Magnetfeld ruhenden Leiter infolge Stromfluß

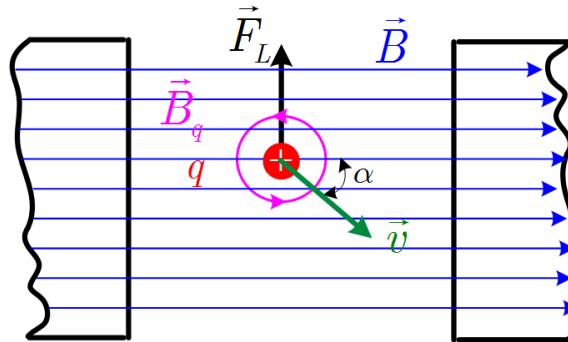


Bewegung von Ladungen in zwei ruhenden Leitern infolge Stromfluß



3.6.1 Bewegte Ladung im Magnetfeld

Es bewege sich eine positive elektrische Punktladung q mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} .



Die bewegte Ladung entspricht einem lokalen Strom dq/dt , der ein lokales Magnetfeld erzeugt. Dieses Magnetfeld interagiert mit dem Magnetfeld \vec{B}

- es kommt zur Abstoßung der Magnetfelder, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen/sich verstärken
- es kommt zur Anziehung der Magnetfelder, wenn sie in unterschiedliche Richtung zeigen/sich auslöschen.

Als Resultat der Anziehung bzw. Abstoßung auf den entgegengesetzten Seiten der Ladung resultiert die Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.237)$$

Bewegte Ladung im Magnetfeld

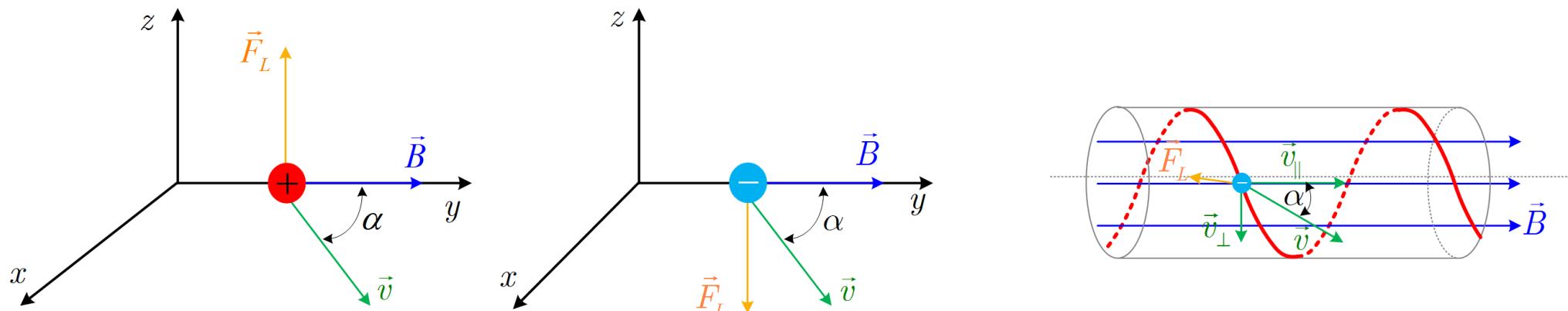
Die Amplitude F_L der Lorentzkraft $\vec{F}_L = F_L \vec{n}_L$ ist

$$F_L = q v B \sin(\alpha) \quad (3.238)$$

wobei α der Winkel zwischen \vec{v} und \vec{B} ist. Die Amplitude der Lorentzkraft ist proportional zur Größe der bewegten Ladung, zu ihrer Geschwindigkeit und der magnetischen Flussdichte. Des weiteren ist sie abhängig vom Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der magnetischen Flussdichte und ist

- maximal, wenn sich die Ladung senkrecht zum Magnetfeld bewegt
- Null, wenn sich die Ladung parallel zum Magnetfeld bewegt.

Letzteres ist die Ursache des Hall-Effektes. Die Richtung der Lorentzkraft ist stets senkrecht zu \vec{v} und \vec{B} , wobei $q\vec{v}, \vec{B}$ und \vec{F}_L ein Rechtssystem bilden.



3.6.2 Stromführender ruhender Leiter im Magnetfeld

Es fließe ein Strom durch einen in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} befindlichen dünnen Leiter. Auf jede Punktladung q , die sich mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v} durch den Leiter bewegt, wirkt dann die Lorentzkraft

$$\vec{F}_{L,q} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.239)$$

Die Gesamtkraft auf den Leiter ist die Summe aller Lorentzkräfte auf die bewegte Gesamtladung

$$Q = \ell A q n_q = \ell A \rho. \quad (3.240)$$

ℓ , A , n_q und ρ sind die Länge und die Querschnittsfläche des Leiters, die Volumendichte der Ladungsträger und die Ladungsdichte. Die Gesamtkraft auf den Leiter ist somit

$$\vec{F}_L = Q (\vec{v} \times \vec{B}) = \ell A \rho (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.241)$$

Mit der Definition der Stromdichte $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ folgt

$$\vec{F}_L = \ell A (\vec{J} \times \vec{B}) \quad (3.242)$$

Ist die Stromdichte im Leiter isotrop, so gilt mit dem Richtungsvektor $\vec{n} = \vec{\ell}/\ell$ des Leiters und der Stromstärke I im Leiter

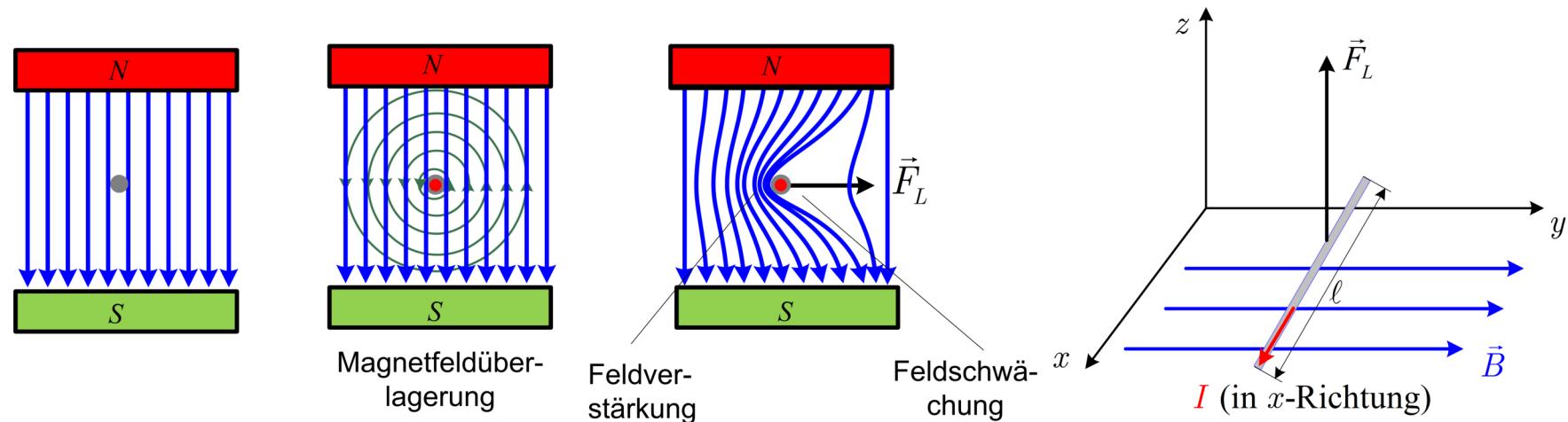
$$I = A \vec{J} \cdot \vec{n} = A \vec{J} \cdot \vec{\ell}/\ell \quad (3.243)$$

3.6.2 Stromführender ruhender Leiter im Magnetfeld

Die Kraft auf den Leiter ist also gegeben als

$$\vec{F}_L = I(\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (3.244)$$

Dies ist die Kraft, die ein vom Strom I durchflossener Leiter der Länge ℓ in einem Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} erfährt. Sie ist die Grundlage jedes Elektromotors.

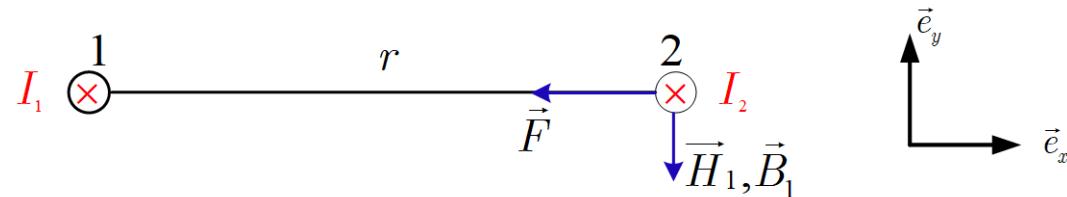


Man beobachtet, dass die Kraft \vec{F}_L senkrecht auf $I\vec{\ell}$ und \vec{B} steht und proportional zur Stromstärke, magnetischen Flussdichte und Leiterlänge ist. Besteht zwischen dem Leiter und der Feldrichtung kein rechter Winkel, sondern ein beliebiger Winkel α , so gilt für die Amplitude der Lorentzkraft

$$F_L = I\ell B \sin(\alpha)$$

3.6.3 Stromführende Leiter

Zwei stromführende Leiter üben ebenfalls gegenseitig Kräfte aufeinander aus, die mit Hilfe der Lorentzkraft erklärt werden können. Wir betrachten hier den Spezialfall, dass die beiden geraden dünnen Leiter im Abstand r parallel verlaufen, unendlich lang sind und von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen werden. Hierbei sei wieder die positive Zählrichtung gleich der Stromrichtung von I_1 .



Zur Bestimmung der Kraft zwischen den Leitern gehen wir zunächst davon aus, dass der Strom I_2 Null ist. Der Strom I_1 erzeugt in der Mittellinie des Leiters 2 (senkrecht zur Leiterachse) die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1 = H_1 \vec{e}_y$ mit

$$H_1 = -\frac{I_1}{2\pi r}. \quad (3.245)$$

Ist die Permeabilität des Stoffes μ , so ist der Betrag der korrespondierenden magnetischen Flussdichte $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_y$ des Leiters 1 an der Stelle des Leiters 2

$$B_1 = \mu H_1 = -\frac{\mu I_1}{2\pi r}. \quad (3.246)$$

Stromführende Leiter

Fließt jetzt im Leiter 2 ein Strom I_2 , so bedeutet dies, dass sich ein vom Strom I_2 durchflossener Leiter in einem Magnetfeld der Flussdichte B_1 befindet. Folglich wirkt auf den Leiter 2 je Leitungslänge ℓ die Kraft ($\alpha = \pi/2$)

$$\frac{\vec{F}}{\ell} = B_1 I_2 \vec{e}_x = -\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} \vec{e}_x. \quad (3.247)$$

Der Betrag der Kraft $F = |\vec{F}|$ zwischen zwei Leiterstücken der Länge ℓ ist bei Vernachlässigung von Randeffekten somit gegeben als

$$F = \frac{\mu |I_1 I_2| \ell}{2\pi r}. \quad (3.248)$$

Anmerkung:

Im Vakuum gilt

$$\frac{F}{\ell} = \mu_0 \frac{|I_1 I_2|}{2\pi r}. \quad (3.249)$$

Diese Beziehung wird zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Feldkonstanten μ_0 verwendet.

3.7 Die elektromagnetische Induktion

Wir haben gesehen, dass ein Magnetfeld \vec{B} auf bewegte Ladungsträger eine Kraft - die Lorentz-Kraft F_L - ausübt.

Andererseits wissen wir, dass ein elektrisches Feld \vec{E} ebenfalls eine Kraft - die Coulomb-Kraft F_C - auf Ladungsträger ausübt.

Die auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Punktladung q in einem elektromagnetischen Feld wirkende elektromagnetische Gesamtkraft ist

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.250)$$

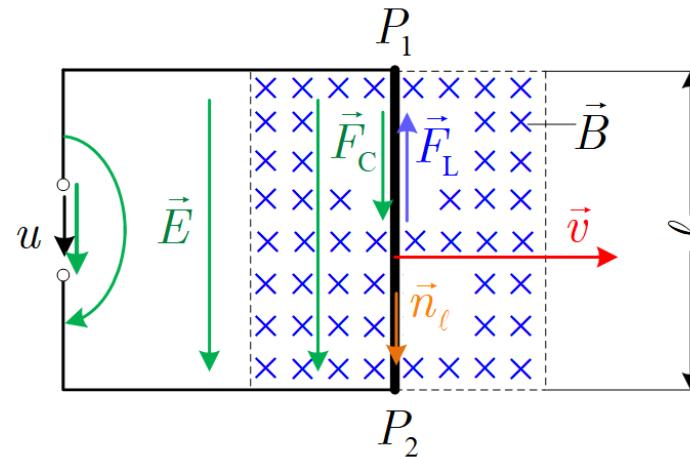
Die elektromagnetische Gesamtkraft \vec{F} wird häufig auch als verallgemeinerte Lorentzkraft bezeichnet.

Hinweis: Ob die elektromagnetischen Gesamtkraft infolge einer Bewegung der Ladungsträger in einem Magnetfeld oder infolge eines durch Ladungen erzeugten elektrischen Feldes entsteht, **hängt vom verwendeten Bezugssystem (ruhendes Laborsystem oder mitbewegtes Leitersystem) ab**. Dies wird nachfolgend unter Verwendung notwendiger Vereinfachungen analysiert.

Insbesondere gilt, dass alle Geschwindigkeiten bewegter Körper sehr klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, so dass relativistische Effekte vernachlässigt werden können!

3.7.1 Induktion in bewegten Leitern

Wir betrachten zunächst einen offenen Stromkreis mit einem realen Leiter, dass mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}| \ll c$ in einem Magnetfeld mit der magnetischen Flußdichte \vec{B} relativ zum ruhenden Laborsystem bewegt wird.



Auf die frei beweglichen Ladungensträger q im im Magnetfeld bewegten Leiterstück der Länge ℓ wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.251)$$

Durch die Lorentz-Kraft kommt es zu einer Ladungsverschiebung entlang des Leiters. Die resultierende Akkumulation dieser Ladungen an den aufgetrennten Enden des Leiters erzeugt ein **wirbelfreies elektrisches Feld** \vec{E} , dass so lange anwächst, bis die Gesamtkraft auf die Ladungsträger im bewegten Leiterstück gleich Null ist

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}. \quad (3.252)$$

Induktion in bewegten Leitern

Für die Stärke des wirbelfreien elektrischen Feldes gilt im stationären Zustand somit

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}. \quad (3.253)$$

Auf Grund der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes ergibt sich die wegeunabhängige, eindeutige Klemmenspannung zwischen den offenen Leiterenden als

$$u = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} = \int_0^\ell (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}_\ell dl = \ell ((\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}_\ell) \quad (3.254)$$

Bezeichnet α den Winkel zwischen \vec{B} und \vec{v} , dann gilt für die gegebene Anordnung mit den Beträgen $v = |\vec{v}|$ und $B = |\vec{B}|$

$$u = \ell v B \sin(\alpha). \quad (3.255)$$

Die resultierende Spannung u kann auch als Funktion der zeitlichen Änderung des von der Leiterschleife umschlossenen magnetischen Flusses Φ ausgedrückt werden. Für die gegebene Anordnung gilt

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dA}{dt} B \sin(\alpha) = \ell v B \sin(\alpha) = u. \quad (3.256)$$

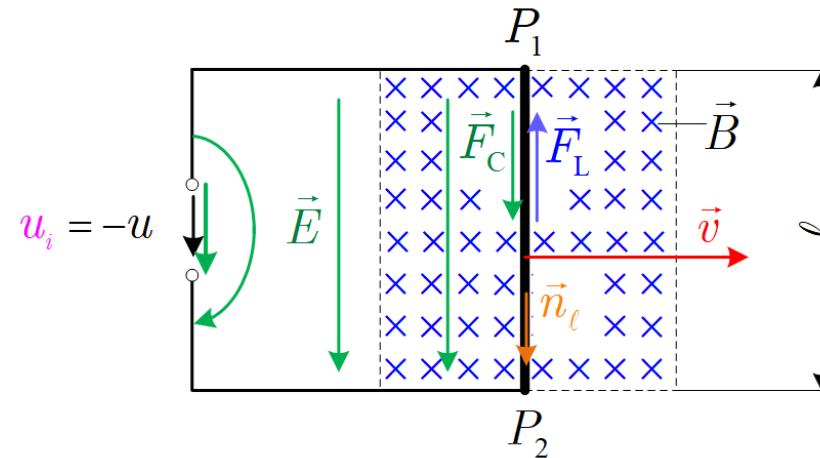
Damit folgt für den betrachteten Fall der als Induktionsgesetz bekannte Zusammenhang:

$$u = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.257)$$

Induktion in bewegten Leitern

Alternativ könnten wir die Situation auch von einem Punkt im bewegten Leiter aus beobachten. Im mitbewegten Leitersystem erscheint uns der Leiter in Ruhe, d.h. die Relativgeschwindigkeit ist 0, und die angenommene Ursache der Kraft, welche auf die Ladungsträger wirkt, ist die im mitbewegten Leitersystem gemessene elektrische Feldstärke \vec{E}'

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{F} \quad (3.258)$$



Für einen geschlossenen Umlauf um den Leiter

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.259)$$

Induktion in bewegten Leitern

Die **induzierte** Umlaufspannung u_i ist damit gegeben als

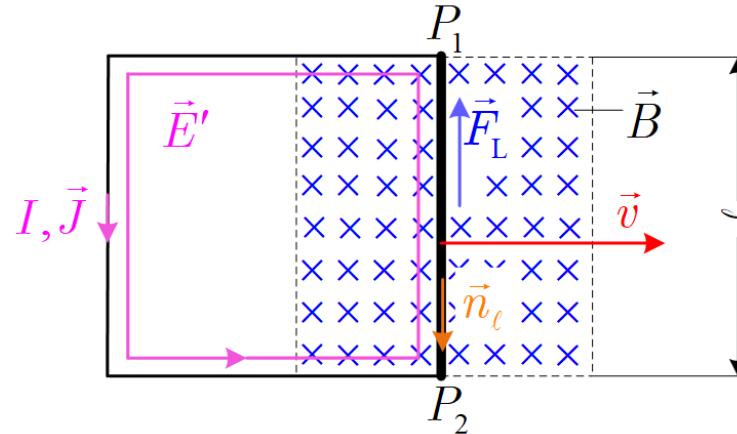
$$u_i = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -u. \quad (3.260)$$

Anmerkung: Das Umlaufintegral über die im Laborsystem gemessene Feldstärke \vec{E} ist auf Grund der Wirbelfreiheit gleich Null

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3.261)$$

Induktion in bewegten Leitern

Alternativ können wir auch den Fall der geschlossenen Leiterschleife betrachten.



In diesem Fall entsteht ein sogenannter Induktionsstrom I (dessen Magnetfeld vernachlässigbar sei) im Leiter und es folgt mit dem Widerstand R der Leiterschleife

$$RI = u_i = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.262)$$

Wie zuvor gilt lokal für \vec{E}' , \vec{E} , \vec{v} und \vec{B} sowie für die Stromdichte \vec{J} mit der Leitfähigkeit κ des Leiters

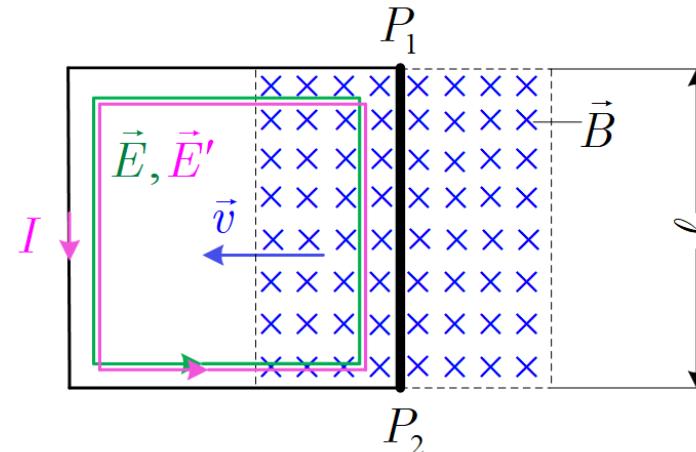
$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{J} = \kappa \vec{E}' = \kappa(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.263)$$

wobei das durch Ladungen erzeugte Feld \vec{E} weiterhin wirbelfrei ist

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3.264)$$

3.7.2 Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder

Alternativ zur Bewegung des Leiters im vorigen Beispiel kann auch das Magnetfeld relativ zum Leiter mit $|\vec{v}| \ll c$ in die entgegengesetzte Richtung bewegt werden:



Offensichtlich tritt die identische zeitliche Flussänderung auf, so dass für die im mitbewegten Leitersystem auftretende elektrische Feldstärke \vec{E}' weiterhin gilt

$$u_i = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\ell v B \sin(\alpha). \quad (3.265)$$

In beiden Fällen - sowohl des gedachten bewegten Leiters als auch des bewegten Magnetfeldes - ergibt sich die Flussänderung aus Sicht des mitbewegten Leitersystems jeweils infolge der Änderung der magnetischen Flussdichte

$$\dot{\Phi} = \iint_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \quad (3.266)$$

Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder

Wenn sich jedoch der Leiter selbst in Ruhe befindet, kann \vec{E}' nicht mehr der normierten Lorentzkraft $\vec{F}_L/q = \vec{v} \times \vec{B}$ entsprechen, sondern muss zu einer im Laborsystem auftretenden **wirbelbehafteten** elektrischen Feldstärke \vec{E} korrespondieren

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q\vec{E} = \vec{F} \quad (3.267)$$

Dies bedeutet, es gilt hier

$$u_i = \oint_{C=\partial A} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \quad (3.268)$$

Dies entspricht der 3. Maxwell'schen Gleichung

$$\oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_A \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.269)$$

Sie besagt, die elektrische Feldstärke besitzt dort Wirbel, wo sich die magnetische Flussdichte zeitlich ändert.

Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder

Die elektrische Feldstärke \vec{E} setzt sich im Fall **zeitveränderlicher** Magnetfelder nun zusammen aus

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_C \quad (3.270)$$

- einem wirbelbehafteten elektrischen Feld \vec{E}_i , dass durch die zeitliche Änderung der Flussdichte induziert wird und primär auf die Ladungsträger wirkt,
- einem wirbelfreien Feld \vec{E}_C , dass durch Ladungen erzeugt wird und sekundär auf die Ladungsträger wirkt.

Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder

Liegen sowohl zeitlich veränderlich Magnetfelder als auch bewegte Leiterschleifen vor, so folgt für den allgemeinen Fall

$$u_i(t) = \oint_{C(t)=\partial A(t)} \left(\vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{v}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} \quad (3.271)$$

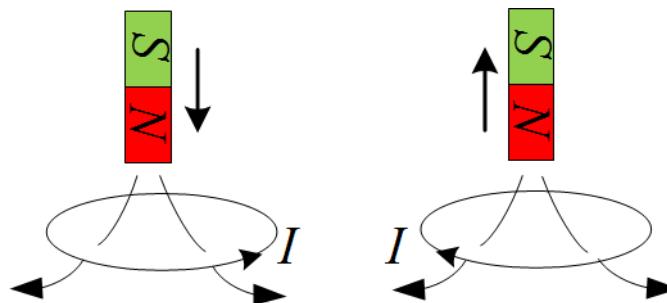
$$= - \iint_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} \cdot d\vec{A} - \oint_{C=\partial A(t)} (\vec{B}(t, \vec{r}) \times \vec{v}(t, \vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad (3.272)$$

$$= - \frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad (3.273)$$

$$= - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (3.274)$$

Induktion infolge zeitveränderlicher Magnetfelder

Die zeitliche Änderung der magnetischen Flußdichte kann z.B. durch die Änderung der Stromstärke in einer Spule oder durch die Bewegung von Permanentmagneten erzeugt werden.



Zeichnet man in der Abbildung die durch den Induktionsstrom erzeugten Magnetfelder ein, so erkennt man, dass sie der Bewegung der magnetischen Dipole genau entgegenwirken.

Lenz'sche Regel

Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung ist stets so gerichtet, dass der durch sie hervorgerufene Induktionsstrom der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirkt.

3.7.3 Das Induktionsgesetz

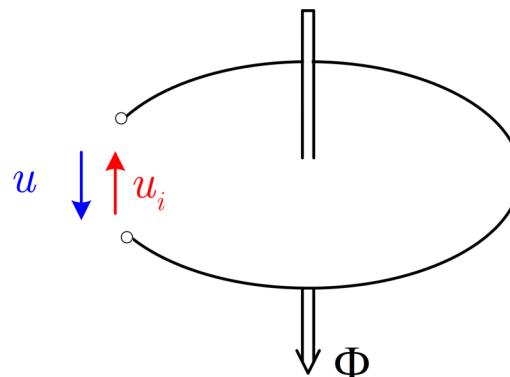
Zusammenfassend sei die Form des Induktionsgesetzes, die mit den Maxwell'schen Gleichungen kompatibel ist, angegeben.

Induktionsgesetz

Die in einer elektrischen Leiterschleife induzierte Umlaufspannung entspricht der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Leiterschleife umschlossene Fläche

$$u_i(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (3.275)$$

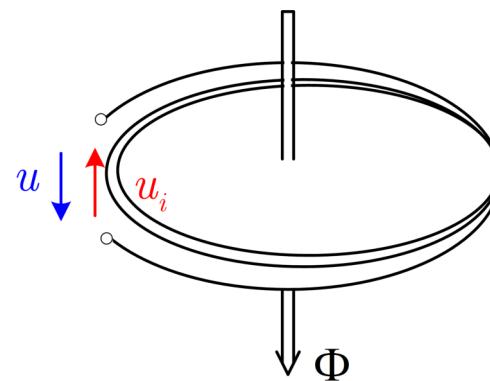
Die induzierte Umlaufspannung entspricht gemäß unserer Vereinbarung nachfolgend der negativen messbaren wegunabhängigen Klemmenspannung $u(t) = -u_i(t)$.



Das Induktionsgesetz

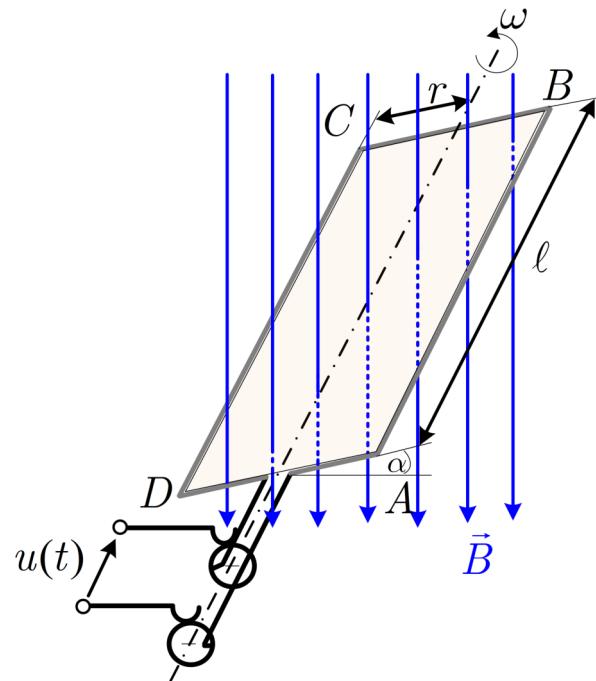
- Wenn die Leiterschleife durch eine Spule mit der Windungszahl w ersetzt wird, so wird der magnetische Fluss w -mal umfasst. In diesem Fall gilt:

$$u(t) = -u_i(t) = w \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (3.276)$$



Das Induktionsgesetz

- Das Induktionsgesetz gilt auch für eine in einem Magnetfeld rotierende Leiterschleife oder Spulenwicklung.



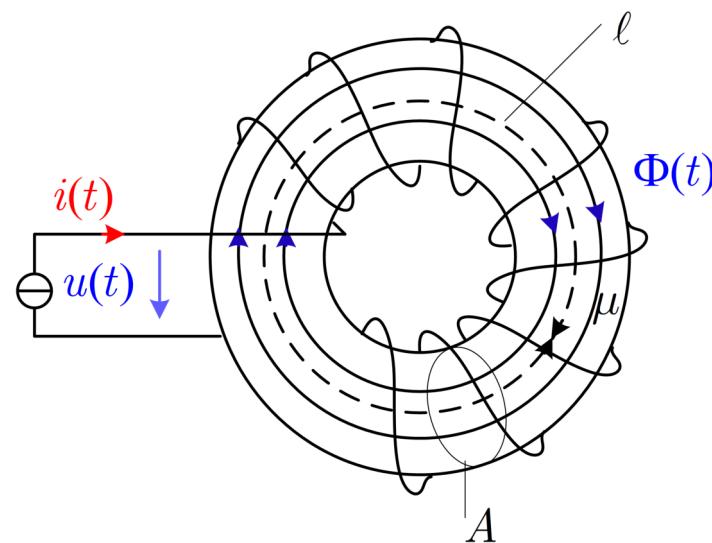
Der magnetische Fluß variiert mit dem Drehwinkel der Leiterschleife und induziert in ihr eine Spannung.
Bei einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/T$ beträgt die resultierende Klemmenspannung

$$u(t) = 2r\omega B\ell \sin(\omega t). \quad (3.277)$$

3.8 Die Strom-Spannungs-Beziehung einer Spule

Beim Ein- bzw. Ausschalten des Stromes $i(t)$ durch eine Spule baut sich ein Magnetfeld auf bzw. ab. Dabei ändert sich der magnetische Fluss $\Phi(t)$ durch die Spule. Z.B. gilt für die ideale Ringspule im Ringkern

$$\Phi(t) = \frac{\mu A}{\ell} w i(t). \quad (3.278)$$



Die Flussänderung wiederum induziert in der Spule selbst eine Spannung. Diesen Prozess nennt man **Selbstinduktion** und die **Selbstinduktionsspannung** ist:

$$u(t) = -u_i(t) = w \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu A}{\ell} w^2 \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (3.279)$$

Die Strom-Spannungs-Beziehung einer Spule

Die letzte Gleichung gibt die infolge des Stromflusses $i(t)$ an der Spule abfallende Spannung $u(t)$ an bzw. diejenige Spannung, die nötig ist, um den Strom entgegen der Selbstinduktionsspannung durch die Spule fließen zu lassen.

Mit der Definition der **Induktivität** oder des **Selbstinduktionskoeffizienten** der Spule als

$$L = \frac{\mu A}{\ell} w^2 \quad (3.280)$$

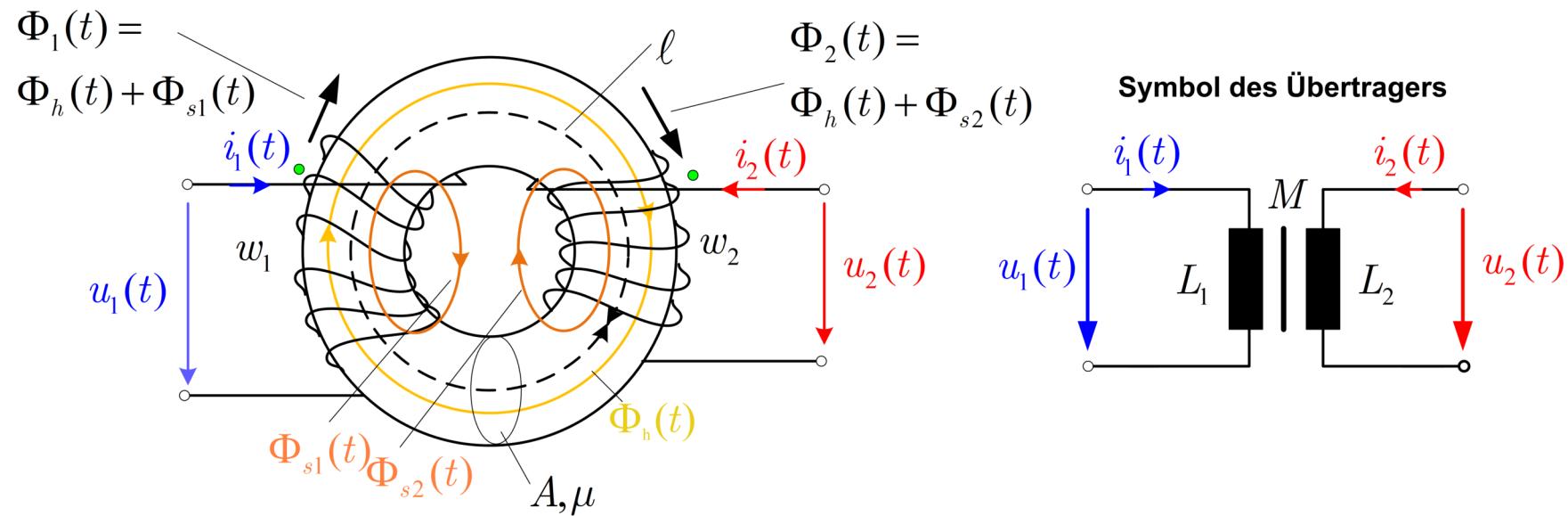
folgt der allgemeine Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einer idealen Spule

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}. \quad (3.281)$$



3.9 Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Befindet sich in der Nähe einer stromführenden Spule eine zweite Spule, so verläuft ein Teil des von der ersten Spule erzeugten magnetischen Flusses auch durch die zweite Spule. Man bezeichnet die Spulen dann als **magnetisch gekoppelt**.



Unter der Annahme isotroper Stoffe gilt für den Übertrager allgemein

$$u_1(t) = w_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (3.282)$$

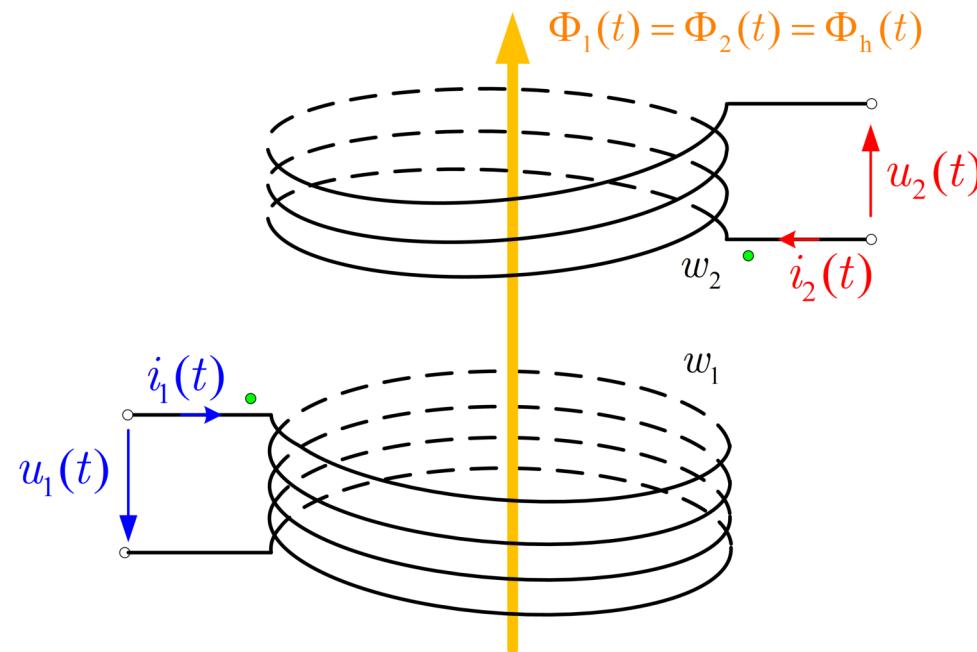
$$u_2(t) = w_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (3.283)$$

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Zunächst betrachten wir den Fall des **festgekoppelten Übertragers**, für den die Streuflüsse verschwinden

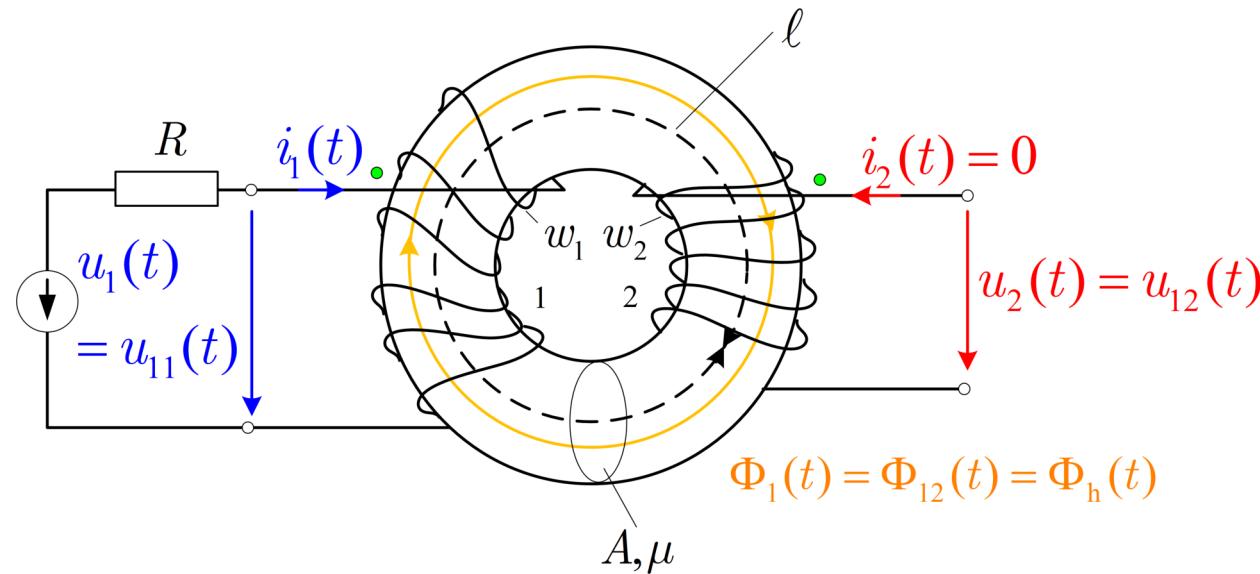
$$\Phi_{s1}(t) = \Phi_{s2}(t) = 0. \quad (3.284)$$

Zur Bestimmung der Induktivitäten L_1 (primäre Gesamtinduktivität), L_2 (sekundäre Gesamtinduktivität) und $M = L_{12} = L_{21}$ (Gegeninduktivität) wird der Übertrager umgezeichnet. Wir erhalten dann folgendes System zweier gegkoppelter Spulen.



Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Zuerst betrachten wir den Fall, dass ein eingeprägter Strom $i_1(t)$ durch die primäre Wicklung fließt während $i_2(t) = 0$ (Leerlauf) gilt.



Für einen eingeprägten Strom $i_1(t)$ ist die Spannung $u_1(t)$ gegeben als (**Selbstinduktion**)

$$u_1(t) = u_{11}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}, \quad (3.285)$$

mit

$$L_1 = w_1^2 \frac{\mu A}{\ell}. \quad (3.286)$$

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Ändert sich der Strom $i_1(t)$ so ist damit auch eine entsprechende Änderung des magnetischen Flusses $\Phi_h(t)$ verbunden. Dieser durchdringt auch die Spule 2, so dass in ihr infolge des Stroms $i_1(t)$ eine Spannung induziert wird (**Gegeninduktion**)

$$u_{12}(t) = w_2 \frac{d\Phi_h(t)}{dt}. \quad (3.287)$$

Auf Grund des Durchflutungsgesetzes gilt $\Phi_h(t) = w_1 \mu A / \ell \cdot i_1(t)$ und wir erhalten

$$u_{12}(t) = w_2 \frac{d\Phi_h(t)}{dt} = w_1 w_2 \frac{\mu A}{\ell} \frac{di_1(t)}{dt}. \quad (3.288)$$

Die in der sekundären Wicklung gemessene Spannung für $i_2(t) = 0$ ist somit

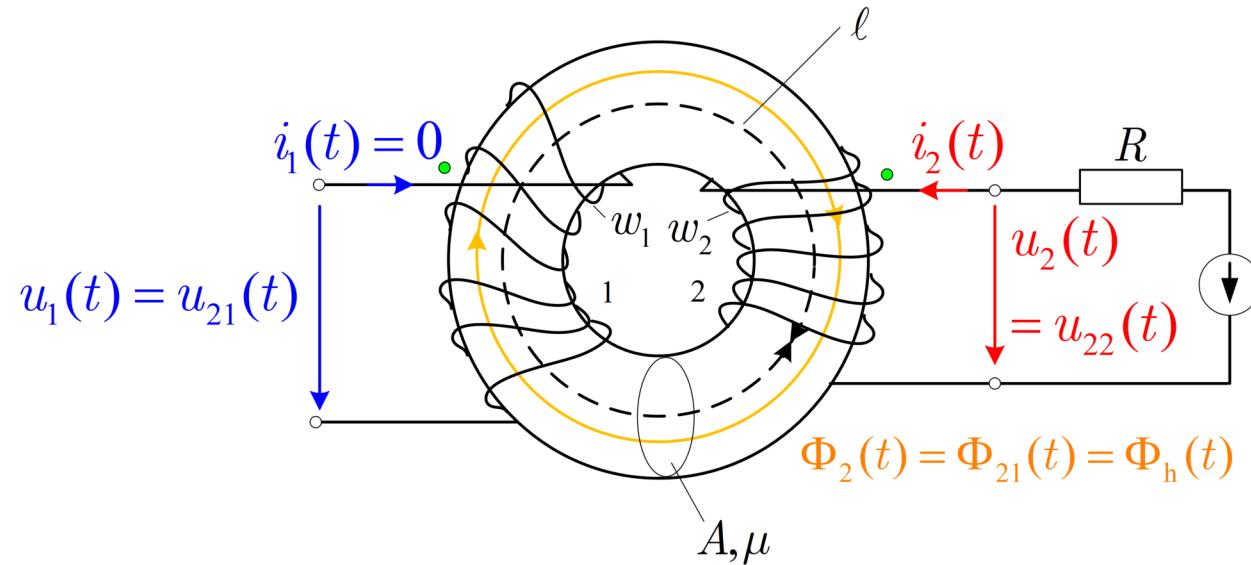
$$u_2(t) = u_{12}(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}, \quad (3.289)$$

mit der Gegeninduktivität

$$M = w_1 w_2 \frac{\mu A}{\ell}. \quad (3.290)$$

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Analog erhalten wir die Ergebnisse für den Fall, dass ein eingeprägter Strom $i_1(t)$ durch die sekundäre Wicklung fließt während $i_1(t) = 0$ (Leerlauf) gilt.



$$u_1(t) = u_{21}(t) = M \frac{di_2(t)}{dt}, \quad u_2(t) = u_{22}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, \quad (3.291)$$

mit

$$L_2 = w_2^2 \frac{\mu A}{\ell}, \quad M = w_1 w_2 \frac{\mu A}{\ell}. \quad (3.292)$$

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Fließen beide Ströme, so überlagern sich die entsprechenden Spannungen und es folgt für den **festgekoppelten Übertrager** mit der gewählten Richtung der Windungen

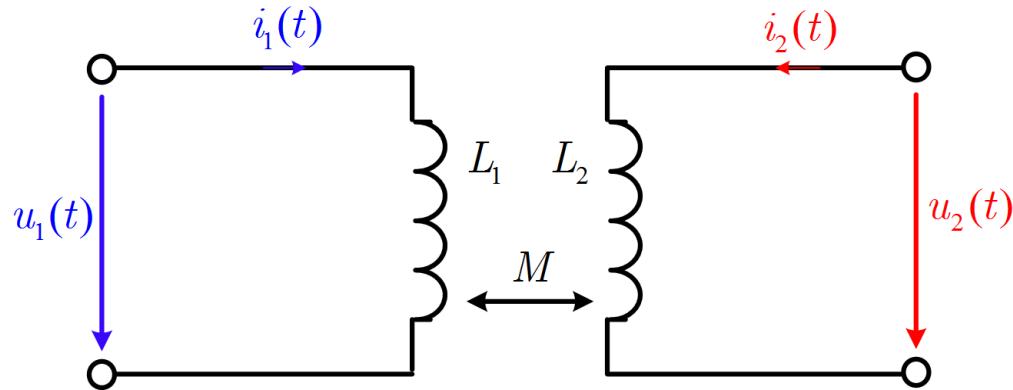
$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{21}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (3.293)$$

$$u_2(t) = u_{12}(t) + u_{22}(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (3.294)$$

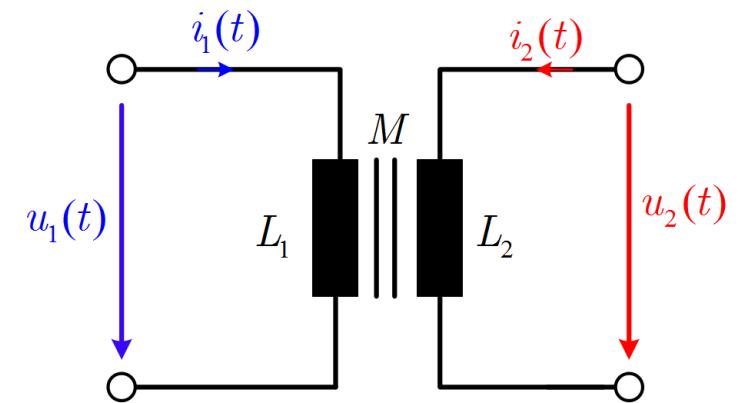
mit

$$L_1 = w_1^2 \frac{\mu A}{\ell}, \quad L_2 = w_2^2 \frac{\mu A}{\ell}, \quad M^2 = L_1 L_2. \quad (3.295)$$

Ersatzschaltbild



Symbol des festgekoppelten Übertragers



Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Aus obigen Gleichungen ergibt sich

$$M = \pm \sqrt{L_1 L_2}. \quad (3.296)$$

Das positive Vorzeichen “+” gilt, wenn beide Wicklungen so angeordnet sind wie gezeichnet bzw. beide andersherum gewickelt sind. Ist nur eine der beiden Wicklungen andersherum gewickelt, so gilt das negative Vorzeichen “-”.

Setzen wir diese Beziehung in die Übertragergleichungen ein, dann erhalten wir

$$u_1(t) = \sqrt{L_1} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1(t)}{dt} \pm \sqrt{L_2} \frac{di_2(t)}{dt} \right) \quad (3.297)$$

$$u_2(t) = \sqrt{L_2} \left(\pm \sqrt{L_1} \frac{di_1(t)}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2(t)}{dt} \right) \quad (3.298)$$

Hieraus folgt für das Spannungsverhältnis

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \pm \frac{w_1}{w_2}. \quad (3.299)$$

Das positive Vorzeichen “+” gilt für die oben dargestellte Anordnung der Wicklungen.

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Für den Fluss durch die Spule gilt im Fall des festgekoppelten Übertragers

$$\Phi_h(t) = w_1 \cdot \frac{\mu A}{\ell} \cdot i_1(t) + w_2 \cdot \frac{\mu A}{\ell} \cdot i_2(t) = \frac{\mu A}{\ell} (w_1 i_1(t) + w_2 i_2(t)). \quad (3.300)$$

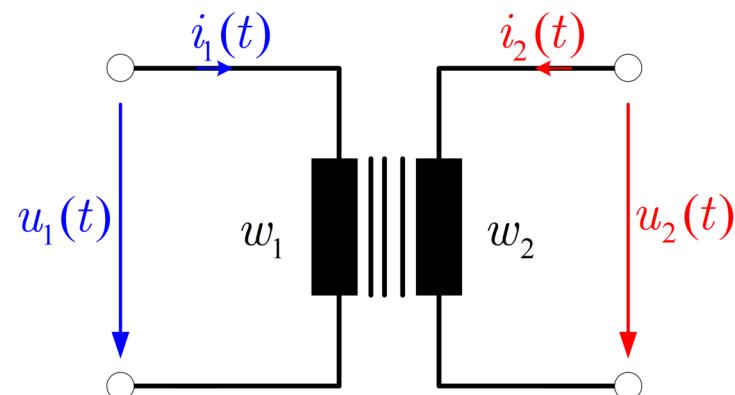
Geht die Permeabilität des Spulenkerne gegen unendlich für $\mu \rightarrow \infty$, so gilt für einen endlichen Fluss $\Phi_h(t) \neq 0$

$$\mu \rightarrow \infty \text{ und } \Phi_h(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 i_1(t) + w_2 i_2(t) \rightarrow 0. \quad (3.301)$$

Einen festgekoppelten Übertrager, dessen Permeabilität über alle Grenzen wächst, d.h. dessen magnetischer Widerstand verschwindet, bezeichnet man als **idealen Übertrager**. Für ihn gilt

$$i_1(t) = -\frac{w_2}{w_1} i_2(t). \quad (3.302)$$

Symbol des idealen Übertragers



$$u_1(t) = \frac{w_1}{w_2} u_2(t)$$

$$i_1(t) = -\frac{w_2}{w_1} i_2(t)$$

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Im Fall des allgemeinen Übertragers mit nichtverschwindenden Streuflüssen $\Phi_{s1}(t) \neq 0$ und/oder $\Phi_{s2}(t) \neq 0$ gilt

$$L_1 = w_1^2 \cdot \frac{R_{m2} + R_{ms}}{R_{m1}R_{m2} + R_{m1}R_{ms} + R_{m2}R_{ms}} \quad (3.303)$$

$$L_2 = w_2^2 \cdot \frac{R_{m1} + R_{ms}}{R_{m1}R_{m2} + R_{m1}R_{ms} + R_{m2}R_{ms}} \quad (3.304)$$

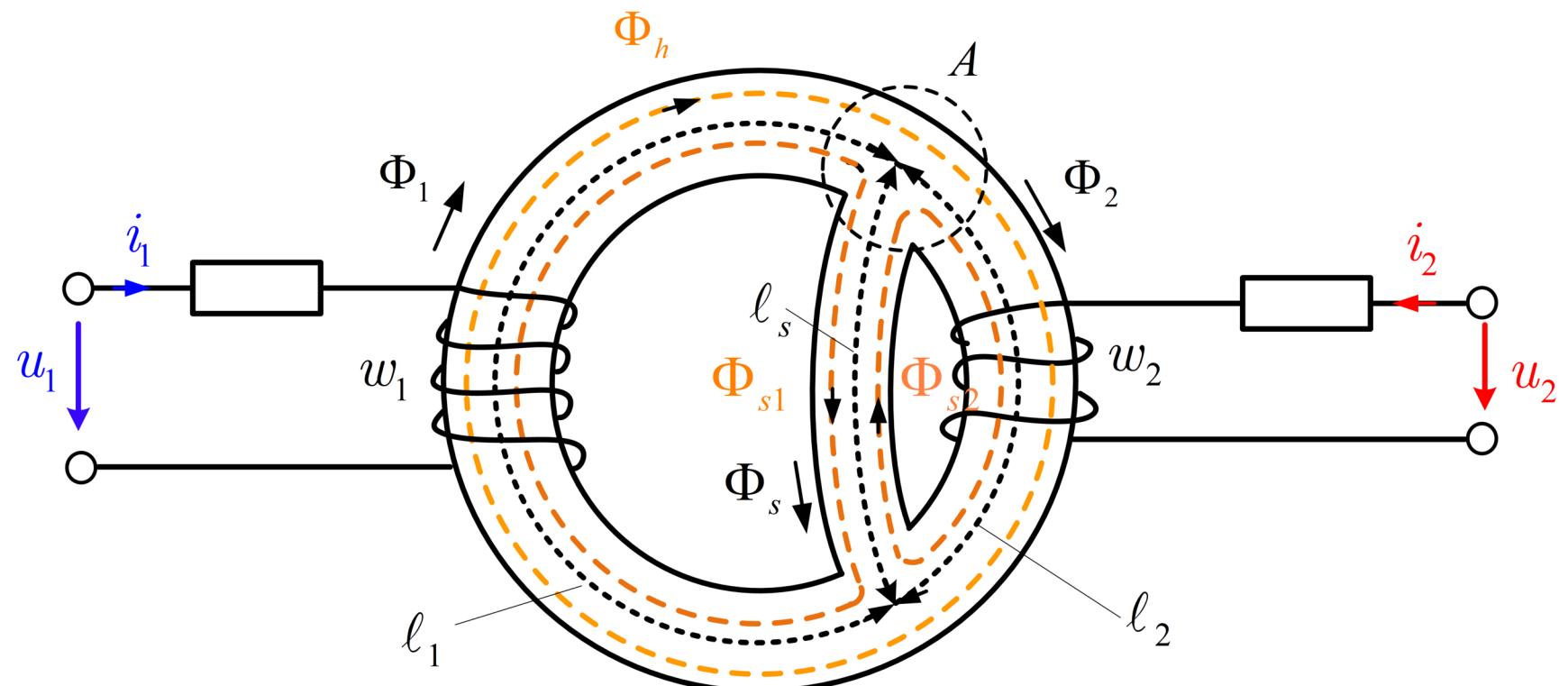
$$M = w_1w_2 \frac{R_{ms}}{R_{m1}R_{m2} + R_{m1}R_{ms} + R_{m2}R_{ms}}, \quad (3.305)$$

mit den magnetischen Widerständen

$$R_{m1} = \frac{\ell_1}{\mu A}, \quad R_{m2} = \frac{\ell_2}{\mu A}, \quad R_{ms} = \frac{\ell_s}{\mu_0 A}, \quad (3.306)$$

wobei ℓ_1 , ℓ_2 und ℓ_s die mittleren Längen der Feldlinien des Primärflusses $\Phi_1(t) = \Phi_h(t) + \Phi_{s1}(t)$, des Sekundärflusses $\Phi_2(t) = \Phi_h(t) + \Phi_{s2}(t)$ und des Streuflusses $\Phi_s(t) = \Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ sind (siehe Bild nächste Seite).

Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator



Magnetisch gekoppelte Spulen - der Übertrager/Transformator

Gl. (3.303-3.305) ergeben sich aus

- Durchflutungsgesetz:

$$\begin{aligned}\frac{\ell_1}{\mu A} \cdot \Phi_1(t) + \frac{\ell_s}{\mu_0 A} \cdot \Phi_s(t) &= w_1 \cdot i_1(t) \quad \iff \quad R_{m1} \cdot \Phi_1(t) + R_{ms} \cdot \Phi_s(t) = w_1 \cdot i_1(t) \\ \frac{\ell_2}{\mu A} \cdot \Phi_2(t) - \frac{\ell_s}{\mu_0 A} \cdot \Phi_s(t) &= w_2 \cdot i_2(t) \quad \iff \quad R_{m2} \cdot \Phi_2(t) - R_{ms} \cdot \Phi_s(t) = w_2 \cdot i_2(t)\end{aligned}$$

- 2. Maxwell'sche Gleichung/Quellenfreiheit magnetischer Felder:

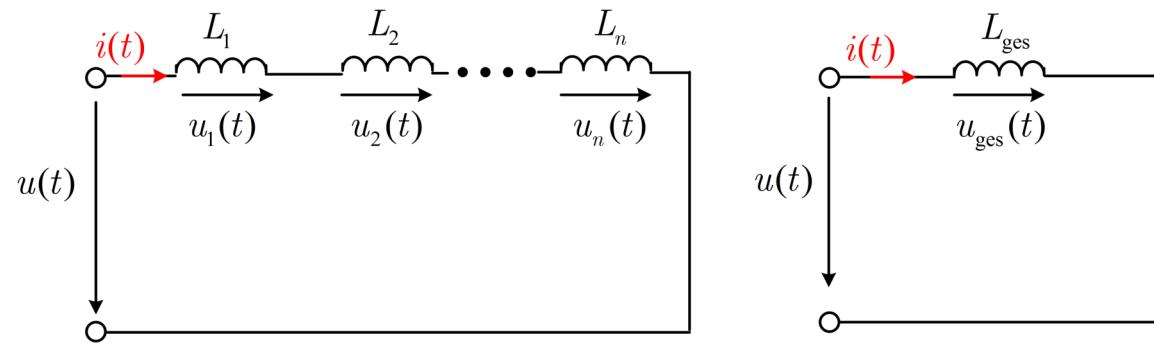
$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi_1(t) - \Phi_2(t) - \Phi_s(t) = 0$$

- Induktionsgesetz:

$$u_1(t) = w_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \quad u_2(t) = w_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt}$$

3.10 Zusammenschaltung von Spulen

- Reihenschaltung



$$u_{\text{ges}}(t) = u_1(t) + \dots + u_n(t), \quad u_i(t) = L_i \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ges}} \frac{di(t)}{dt} = L_1 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_n \frac{di(t)}{dt}$$

Gesamtinduktivität der seriellen Induktivitäten:

$$L_{\text{ges}} = \sum_{\ell=1}^n L_{\ell} \quad (3.307)$$

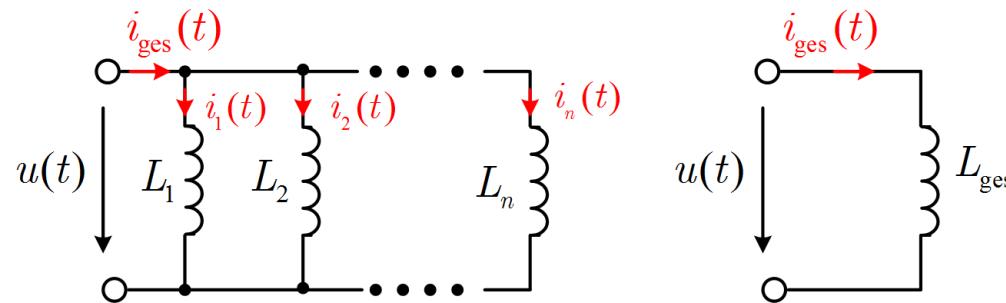
Spannungsteilerregel von Induktivitäten:

$$\frac{u_{\ell}(t)}{u_{\text{ges}}(t)} = \frac{L_{\ell}}{L_{\text{ges}}} \quad (3.308)$$

Die Gesamtinduktivität L_{ges} einer Reihenschaltung von Induktivitäten ist gleich der Summe der Einzelinduktivitäten.

Zusammenschaltung von Spulen

- Parallelschaltung



$$\frac{di_{\text{ges}}(t)}{dt} = \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \dots + \frac{di_n(t)}{dt}, \quad \frac{u(t)}{L_\ell} = \frac{di_\ell(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(t)}{L_{\text{ges}}} = \frac{u(t)}{L_1} + \dots + \frac{u(t)}{L_n}$$

Gesamtinduktivität der parallelen Induktivitäten:

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{L_\ell} \quad (3.309)$$

Stromteilerregel von Induktivitäten:

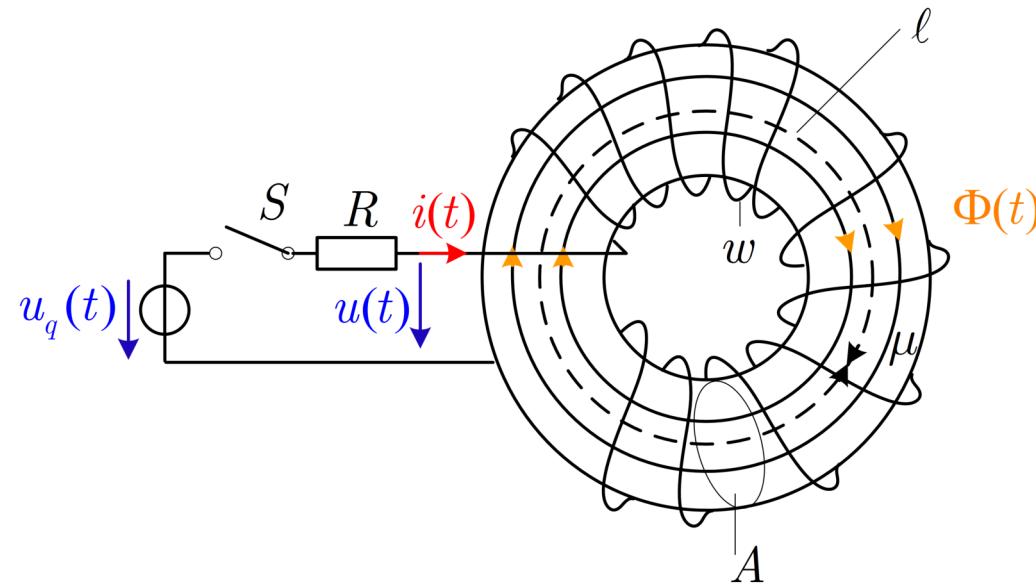
$$\frac{i_\ell(t)}{i_{\text{ges}}(t)} = \frac{L_{\text{ges}}}{L_\ell} \quad (3.310)$$

Der Kehrwert der Gesamtinduktivität L_{ges} einer Parallelschaltung von Induktivitäten ist gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelinduktivitäten L_1, \dots, L_n .

3.11 Die Energie des magnetischen Feldes

In jeder stromführenden Spule ist Energie gespeichert. Diese befindet sich jedoch nicht in der Spule selbst, sondern im magnetischen Feld, das von der stromführenden Spule erzeugt wird.

Als Beispiel betrachten wir wieder die Ringspule.



Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass die von außen einem Netzwerk momentan zugeführte elektrische Energie berechnet werden kann als

$$dW(t) = u(t) \cdot dq = u(t)i(t)dt \quad (3.311)$$

Die Energie des magnetischen Feldes

Die nach dem Schließen des Schalters S zum Zeitnullpunkt $t = 0$ der Spule innerhalb des Zeitintervalls $[0, T]$ insgesamte zugeführte Energie ist dann

$$W(T) = \int_0^T dW(t) = \int_0^T u(t)i(t) dt. \quad (3.312)$$

Mit der Spannung

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

folgt

$$W(T) = \int_0^T L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = \int_0^T L i(t) di(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{2} L [i^2(T) - i^2(0)]. \quad (3.313)$$

Setzen wir $i(0) = 0$ und $i(T) = I$, so erhalten wir für die gesamte in der Spule gespeicherte magnetische Energie W zum Zeitpunkt $t = T$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I \quad (3.314)$$

Die Energie des magnetischen Feldes

Alternativ kann mit Gl. (3.205,3.227,3.275) das Produkt aus momentanen Strom und Spannung - die momentane Änderung der Energie im magnetischen Feld - bestimmt werden als

$$dW = dt \cdot \frac{1}{dt} \int_C \oint_A d\vec{B} \cdot d\vec{A} \vec{H} \cdot d\vec{r} \quad (3.315)$$

$$= \int_C \oint_A \vec{H} \cdot d\vec{B} d\vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (3.316)$$

$$= \iiint_V \vec{H} \cdot d\vec{B} dV. \quad (3.317)$$

Hierbei beschreibt V das gesamte vom magnetischen Feld durchdrungene Volumen. Im vorigen Fall also das Volumen der Spule.

Der Term $\vec{H} \cdot d\vec{B}$ hat die Einheit Energie pro Volumen und beschreibt somit die Änderung der Energiedichte des magnetischen Feldes

$$dw_{\text{mag}} = \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (3.318)$$

Energiedichte des magnetischen Feldes

Die Energiedichte, d.h., der Energieinhalt je Volumenelement eines magnetischen Feldes welches durch den Strom I erzeugt wird, ist gegeben als

$$w_{\text{mag}} = \int_0^I dw_{\text{mag}} = \int_{\vec{B}_0}^{\vec{B}_I} \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (3.319)$$

Die Energie des magnetischen Feldes

Die obigen Gleichungen können wesentlich vereinfacht werden für den Spezialfall **isotroper** Materialien, d.h., für einen Medium mit konstanter Permeabilität, für die gilt $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Die Energiedichte des magnetischen Feldes je Volumeneinheit ist mit $B = |\vec{B}_I|, 0 = |\vec{B}_0|, H = B/\mu$

$$w_{\text{mag}} = \int_{\vec{B}_0}^{\vec{B}_I} \vec{H} \cdot d\vec{B} = \frac{1}{\mu} \int_{\vec{B}_0}^{\vec{B}_I} \vec{B} \cdot d\vec{B} = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{1}{2} HB \quad (3.320)$$

und die gesamte im magnetischen Feld des Volumens V gespeicherte Energie ist somit

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} HB \, dV. \quad (3.321)$$

Die ermittelten Gleichungen für die Energiedichte w_{mag} des magnetischen Feldes gelten nicht nur im homogenen Feld, sondern geben allgemein die **Energiedichte** an, die in einem beliebigen Punkt innerhalb eines magnetischen Feldes besteht.

Die in einem bestimmten Feldraum enthaltene Energie erhalten wir dann (allgemein) dadurch, dass wir die Energiedichte (w_{mag}) über das betreffende Raumvolumen (V) integrieren.

Die Energie des elektromagnetischen Feldes

Abschließend betrachten wir die Änderung der Energie bzw. Energiedichte eines **elektromagnetischen** Feldes in einem Volumen V unter der Annahme, dass **kein**] Ladungsfluß in das Volumen stattfindet $\vec{J} = \vec{0}$:

Änderung der elektromagnetischen Energie (1)

Die Änderung der Energie eines elektromagnetischen Feldes mit dem Volumen V als Folge der Änderung der elektrischen und/oder magnetischen Flussdichte ist

$$dW = \iiint_V \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \iiint_V \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (3.322)$$

Die korrespondierende Änderung der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in V ist somit

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (3.323)$$

Anmerkung:

- Die Abgabe bzw. Aufnahme von Energie in einem elektromagnetischen Feld kann nicht nur durch Ladungs(Strom)fluss sondern auch über elektromagnetische Strahlung geschehen.
- Die Energie des elektromagnetischen Feldes kann durch Integration der Energieänderung dW bzw. Energiedichteänderung bei Kenntnis der Integrationsgrenzen ermittelt werden.

Findet zusätzlich ein Ladungsfluß in das Volumen statt, so dass $\vec{J} \neq \vec{0}$, dann gilt:

Änderung der elektromagnetischen Energie (2)

Die Änderung der elektromagnetischen Energie im Volumen V im Zeitraum dt als Folge der Änderung der elektrischen und/oder magnetischen Flussdichte sowie eines Ladungsflusses ist

$$dW = \iiint_V \vec{E} \cdot d\vec{J} dt dV + \iiint_V \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \iiint_V \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (3.324)$$

Die korrespondierende Änderung der Energiedichte in V ist somit

$$dw = \vec{E} \cdot \vec{J} dt + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (3.325)$$

Die Energie des elektromagnetischen Feldes

Bis jetzt hatten wir die Änderung der Energie bzw. Energiedichte im Volumen V betrachtet. Ist man an der dem Volumen V zugeführten Leistung interessiert, so kann man zunächst die Änderung der Leistungsdichte in V berechnen als:

$$p = \frac{dw}{dt} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}). \quad (3.326)$$

Die gesamte dem Volumen V zugeführte Leistung ist somit bei Beachtung der nach außen orientierten Zähldichtung seiner Hülle $A = \partial V$

$$\iiint_V p dV = - \iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV = \iint_{A=\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A} = \iint_{A=\partial V} \vec{S} d\vec{A}. \quad (3.327)$$

Elektromagnetische Energiestromdichte - Poynting-Vektor

Die elektromagnetische Energiestromdichte an einem Raumpunkt \vec{r} zum Zeitpunkt t ist

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (3.328)$$

$\vec{S}(\vec{r}, t)$ wird als **Poynting-Vektor** bezeichnet.