UMONS

Théorie des modèles I

Cahier rose

Question 1. Donner une axiomatisation de la théorie des groupes abéliens sans torsion, divisibles dans le langage $\{+,-,0\}$. Cette théorie est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

Question 2. Soient $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{L}$-structures, $\bar{a} \in M^n$ et $\bar{b} \in N^n$.
Montrer que $\mathrm{tp}^{\mathscr{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathscr{N}}(\bar{b})$ est équivalent à $f : M \to N : \bar{a} \mapsto \bar{b}$ est une application partielle élémentaire.

Question 3. Soit $\mathscr{L}$ un langage et $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure.

(a) Définir l'expression « $\mathscr{M}$ est κ-saturée », où κ est un cardinal.

(b) Existe-t-il une $\mathscr{L}$-structure infinie $\mathscr{N}$ $|N|^+$-saturée (où si κ est un cardinal, κ^+ désigne le successeur de κ) ?

Devoir 4. Soit $\mathscr{L} = \{+,-,0,\cdot q, q \in \mathbb{Q}\}$ où $\cdot q$ est un symbole de fonction unaire.
Soit $T_{\mathbb{Q}}$ la $\mathscr{L}$-théorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels non triviaux.

(a) Donner une axiomatisation de $T_{\mathbb{Q}}$.

(b) Montrer que $T_{\mathbb{Q}}$ admet l'élimination des quantificateurs (dans le langage $\mathscr{L}$).

  (1) Montrer que dans $T_{\mathbb{Q}}$, toute formule existentielle est équivalente à une formule sans quantificateur.

  (2) En déduire que $T_{\mathbb{Q}}$ a l'éliminatation des quantificateurs.

(c) Montrer que $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est l'union d'une chaîne élémentaire de $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels propres.

Question 5. Soit $\mathscr{L} = \{+,-,\cdot,0,1\}$. Soit K un corps commutatif vu comme $\mathscr{L}$-structure. Soit $M_2(K)$ l'anneau des matrices 2×2 à coefficients dans K.
Montrer que le groupe des matrices inversibles de $M_2(K)$ est un sous-ensemble définissable de K^4, modulo l'identification suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K) \to (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in K^4$$

Question 6. Énoncer le théorème de Lowenheim-Skolem descendant.

Devoir 7. Soit E un symbole de relation binaire $\mathscr{L} = \{E\}$. Écrire une $\mathscr{L}$-théorie qui exprime que E est une relation d'équivalence avec pour chaque naturel $n \geq 1$ une seule classe d'équivalence contenant exactement n éléments.

(a) T est-elle $\aleph_0$ catégorique ?

(b) Montrer que $|S_1(T)| \geq \aleph_0$.

(c) Comme $\mathscr{L}$ ne contient pas de constante, on dira que T a l'élimination des quantificateurs si pour tout $\mathscr{L}$-formule $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, il existe une formule sans quantificateur $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ telle que

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Est-ce que T a l'élimination des quantificateurs ? Justifiez votre réponse.

Question 8. Énoncer le théorème de Vaught.

Devoir 9. Soit $\mathscr{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ et $\mathscr{L}_< = \mathscr{L} \cup \{<\}$.

(a) Montrer que dans la théorie des anneaux ordonnés, toute formule sans quantificateur $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ peut se mettre sous la forme

$$\bigvee_i \left(\bigwedge_j p_j(\bar{x}) > 0 \wedge \bigwedge_k q_k(\bar{x}) = 0 \right) \tag{1}$$

avec $p_j(x_1, \ldots, x_n)$, $q_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

(b) Montrer que $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathscr{L}$.

Théorème 1 (Tarski)**.** $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ a l'élimination des quantificateurs. dans le langage $\mathscr{L}_<$.

Question 10. Énoncer la définition de modèle atomique.