UMONS

Théorie des modèles

Exercices

Question 1. Soient $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure, A un sous-ensemble de M et $a \in M$. On dit que a est *algébrique* sur A s'il existe une formule $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $\mathscr{M} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$ et l'ensemble $\{b \in M | \mathscr{M} \models \varphi(b, a_1, \dots, a_n)\}$ est fini. On note $\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)$ l'ensemble des éléments de M algébriques sur A.

(a) $A \subset \mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)$;

(b) si $a \in \mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)$, alors $a \in \mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A_0)$ pour un certain $A_0 \subset A$ fini ;

(c) si $A \subset B$, alors $\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A) \subset \mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(B)$;

(d) $\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)) = \mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)$.

(e) Supposons que $A \neq \emptyset$. L'ensemble $\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A)$ est-il le domaine d'une sous-structure de $\mathscr{M}$?

(f) Si $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$, alors $\mathrm{acl}^{\mathscr{M}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathscr{N}}(A)$.

(g) Soit $\mathscr{K}$ un corps algébriquement clos et $A \subset K$. Que vaut $\mathrm{acl}^{\mathscr{K}}(A)$?

Question 2. Soit $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et $A \subset M$. Soit $D \subset M^n$ définissable sur A. Alors $\sigma(D) = D$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_A(\mathscr{M})$.

Question 3. Soit $\mathscr{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, $\mathscr{N} = (\mathbf{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ et $T = \mathrm{Th}(\mathscr{N})$. Alors il existe $\mathscr{M} \succ \mathscr{N}$ et $a \in M$ tels que $\mathbf{N} < a$ et a est divisible par n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Question 4. $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$ si et seulement si pour tout $\bar{a} \in M$, $\mathrm{tp}^{\mathscr{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathscr{N}}(\bar{a})$.

Question 5. Soit $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et $A \subset M$.

(a) Soit $D \subset M^{n+1}$ définissable sur A. Alors la projection de D sur M^n est définissable sur A.

(b) On dit d'une fonction $f : M^\ell \to M^k$ qu'elle est *définissable* sur A si son graphe est un sous-ensemble de $M^{\ell+k}$ définissable sur A.

  (1) Soit $\mathscr{K}$ un corps. Montrez que l'application $\det : K^{2\times 2} \to K$ est définissable.

  (2) Donnez d'autres exemples de fonctions définissables.

Question 6. Soit $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et posons $T = \mathrm{Th}(\mathscr{M})$. Soient $c_1, \dots, c_n$ des constantes qui ne sont pas dans $\mathscr{L}$. Soit T' une $\mathscr{L} \cup \{c_1, \cdots, c_n\}$-théorie complète contenant T et notons $p(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble de $\mathscr{L}$-formules $\{\varphi(x_1, \dots, x_n) | \varphi(c_1, \dots, c_n) \in T'\}$. Alors, il existe $\mathscr{N} \models T$ et $\bar{a} \in N$ tels que $\mathrm{tp}^{\mathscr{N}}(\bar{a}) = p(x_1, \dots, x_n)$.

Question 7. Soit $\mathscr{L} = \{+, -, 0, \cdot q | q \in \mathbf{Q}\}$, où $\cdot q$ est un symbole de fonction unaire. Soit $T_{\mathbf{Q}}$ la $\mathscr{L}$-théorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels.

(a) Donnez une axiomatisation de $T_{\mathbf{Q}}$;

(b) montrez que, dans $T_{\mathbf{Q}}$, toute formule existentielle est équivalente à une formule sans quantificateurs ;

(c) en déduire que $T_{\mathbf{Q}}$ a l'élimination des quantificateurs ;

(d) montrez que $\mathbf{R}$, vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, est l'union d'une chaîne élémentaire de $\mathbf{Q}$-sous-espaces vectoriels propres.

Question 8. En admettant que ACF a l'élimination des quantificateurs, montrez que $(\mathbf{C},+,-,\cdot,0,1)$ est l'union d'une chaîne propre de corps algébriquement clos.

Question 9. Soit $\mathscr{L}=\{E\}$, où E est un symbole de relation binaire.

(a) Soit T_1 la théorie qui exprime la propriété suivante : E est une relation d'équivalence ayant, pour chaque $n\in\mathbf{N}^{>0}$, une unique classe d'équivalence contenant n éléments.

  (1) Axiomatisez T_1 ;

  (2) T_1 est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

  (3) montrez que $|S_1(T)|\geqslant\aleph_0$;

  (4) Montrez que T_1 n'a pas l'élimination des quantificateurs ;

  (5) Soit $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_n|n\in\mathbf{N}^{>0}\}$. Soit T_1' la $\mathscr{L}'$-théorie contenant T exprimant le fait que c_n est en relation avec exactement n éléments, pour chaque $n\in\mathbf{N}$. Montrez que T_1' a l'élimination des quantificateurs.

(b) Soit T_2 la théorie qui exprime la propriété suivante : E est une relation d'équivalence ayant une infinite de classes d'équivalence, toutes infinies.

  (1) T_2 est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

  (2) T a-t-elle l'élimination des quantificateurs ?