UMONS

Théorie des modèles

Exercices

Question 1. Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, A un sous-ensemble de M et $a \in M$. On dit que a est *algébrique* sur A s'il existe une formule $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $\mathcal{M} \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ et l'ensemble $\{b \in M | \mathcal{M} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)\}$ est fini. On note $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des éléments de M algébriques sur A.

(a) $A \subset \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$;

(b) si $a \in \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$, alors $a \in \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A_0)$ pour un certain $A_0 \subset A$ fini ;

(c) si $A \subset B$, alors $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) \subset \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(B)$;

(d) $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)) = \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$.

(e) Supposons que $A \neq \emptyset$. L'ensemble $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$ est-il le domaine d'une sous-structure de $\mathcal{M}$?

(f) Si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, alors $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathcal{N}}(A)$.

(g) Soit $\mathcal{K}$ un corps algébriquement clos et $A \subset K$. Que vaut $\mathrm{acl}^{\mathcal{K}}(A)$?

Question 2. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subset M$. Soit $D \subset M^n$ définissable sur A. Alors $\sigma(D) = D$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$.

Question 3. Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, $\mathcal{N} = (\mathbf{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ et $T = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Alors il existe $\mathcal{M} \succ \mathcal{N}$ et $a \in M$ tels que $\mathbf{N} < a$ et a est divisible par n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Question 4. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si et seulement si pour tout $\bar{a} \in M$, $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a})$.

Question 5. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subset M$.

(a) Soit $D \subset M^{n+1}$ définissable sur A. Alors la projection de D sur M^n est définissable sur A.

(b) On dit d'une fonction $f : M^\ell \to M^k$ qu'elle est *définissable* sur A si son graphe est un sous-ensemble de $M^{\ell+k}$ définissable sur A.

(1) Soit $\mathcal{K}$ un corps. Montrez que l'application $\det : K^{2\times 2} \to K$ est définissable.

(2) Donnez d'autres exemples de fonctions définissables.

Question 6. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et posons $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des constantes qui ne sont pas dans $\mathcal{L}$. Soit T' une $\mathcal{L} \cup \{c_1, \cdots, c_n\}$-théorie complète contenant T et notons $p(x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble de $\mathcal{L}$-formules $\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in T'\}$. Alors, il existe $\mathcal{N} \models T$ et $\bar{a} \in N$ tels que $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}) = p(x_1, \ldots, x_n)$.

Question 7. Soit $\mathcal{L} = \{+, -, 0, \cdot q | q \in \mathbf{Q}\}$, où $\cdot q$ est un symbole de fonction unaire. Soit $T_{\mathbf{Q}}$ la $\mathcal{L}$-théorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels.

(a) Donnez une axiomatisation de $T_{\mathbf{Q}}$;

(b) montrez que, dans $T_{\mathbf{Q}}$, toute formule existentielle est équivalente à une formule sans quantificateurs ;

(c) en déduire que $T_{\mathbf{Q}}$ a l'élimination des quantificateurs ;

(d) montrez que $\mathbf{R}$, vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, est l'union d'une chaîne élémentaire de $\mathbf{Q}$-sous-espaces vectoriels propres.

Question 8. En admettant que ACF a l'élimination des quantificateurs, montrez que $(\mathbf{C},+,-,\cdot,0,1)$ est l'union d'une chaîne propre de corps algébriquement clos.

Question 9. Soit $\mathscr{L}=\{E\}$, où E est un symbole de relation binaire.

(a) Soit T_1 la théorie qui exprime la propriété suivante : E est une relation d'équivalence ayant, pour chaque $n \in \mathbf{N}^{>0}$, une unique classe d'équivalence contenant n éléments.
  (1) Axiomatisez T_1 ;
  (2) T_1 est-elle $\aleph_0$-catégorique ?
  (3) montrez que $|S_1(T)| \geqslant \aleph_0$;
  (4) Montrez que T_1 n'a pas l'élimination des quantificateurs ;
  (5) Soit $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_n | n\in\mathbf{N}^{>0}\}$. Soit T_1' la $\mathscr{L}'$-théorie contenant T exprimant le fait que c_n est en relation avec exactement n éléments, pour chaque $n\in\mathbf{N}$. Montrez que T_1' a l'élimination des quantificateurs.

(b) Soit T_2 la théorie qui exprime la propriété suivante : E est une relation d'équivalence ayant une infinite de classes d'équivalence, toutes infinies.
  (1) T_2 est-elle $\aleph_0$-catégorique ?
  (2) T a-t-elle l'élimination des quantificateurs ?

Question 10. Soit $\mathscr{L}=\{<\}$ et notons $T=$ DLO la théorie des ordres totaux denses sans extrémité.

(a) Axiomatisez T ;
(b) Décrire les formules sans quantificateur, à équivalence modulo T ;
(c) Montrez que T a l'élimination des quantificateurs ;
(d) T est-elle complète ?
(e) Soit $\mathscr{M}$ une $\mathscr{L}$-structure et soit $A\subset M$. Soient U,L deux sous-ensembles de A. On dira que (L,U) est une coupure de A si $A=L\cup U$, $L\cap U=\emptyset$ et $L<U$, c'est-à-dire que pour tout $a\in L$ et tout $b\in U$, $a<b$ [1]. Supposons que $\mathscr{M}\models T$. Soit $p\in S_1(A)$ et notons L_p (resp. U_p) l'ensemble $\{a | a<x\in p\}$ (resp. $\{b|\neg(b<x)\in p)\}$).
  (1) Montrez que si $p\in S_1(A)$ est réalisé par un élément de A, alors p est isolé ;
  (2) Montrez que le couple (L_p,U_p) est une coupure ;
  (3) Soient p et q deux types sur A, non réalisés dans A. Montrez que $p\neq q$ implique $(L_p,U_p)\neq(L_q,U_q)$;
  (4) Etant donnée une coupure (L,U) de A, l'ensemble
  $$\{a<x|a\in L\}\cup\{\neg(b<x)|b\in U\}$$
  détermine-t-il un type non réalisé dans A ?
(f) Supposons que $\mathscr{M}=(\mathbf{Q},<)$ et soit $A\subset\mathbf{Q}$.
  (1) Quels sont les types à paramètres dans A qui sont isolés [2] ?
  (2) Donnez des exemples de types omis par $\mathscr{M}$;
  (3) Calculez $|S_1(\mathbf{Q})|$.

1. Remarquez que l'on autorise $L=\emptyset$ ou $U=\emptyset$ dans la définition de coupure.
2. Distinguez en fonction de l'existence d'extrema dans L_p et U_p.