

Analyse Mathématique III

James Campbell Alexander Main

23 décembre 2018

Table des matières

Un petit mot avant de commencer	v
0.1 Remerciements	v
 I Premier quadrimestre	 1
1 Espaces de Banach : exemples	3
1.1 Exemples tirés du cours d'Analyse II	3
1.2 Espaces de suites ℓ^p	3
1.3 Espaces de fonctions continues	8
1.4 Espaces d'applications linéaires	8
 2 Espaces duaux : exemples	 11
2.1 Généralités	11
2.2 Exemples en dimension finie	11
2.3 Exemples en dimension infinie	13
 3 Théorèmes de Hahn-Banach	 15
3.1 Formes analytique	15
3.1.1 Espaces vectoriels sur \mathbb{R}	15
3.1.2 Espaces vectoriels sur \mathbb{C}	16
3.1.3 Espaces vectoriels normés	17
3.1.4 Hahn-Banach et dualité	17
3.1.5 Bidualité	19
3.2 Formes géométriques	21
3.2.1 Hyperplans	21
3.2.2 Introduction aux formes géométriques du théorème de Hahn-Banach	22
 A Solutions des exercices	 23
A.1 Hahn-Banach (Formes analytiques)	23

Un petit mot avant de commencer

Ce document a pour but de créer des notes de cours pour le cours d'Analyse Mathématique III dispensé à l'UMONS afin d'altérer la structure dans un format plus clair que les notes prises au cours.

Parmi les références citées, vous pouvez trouver des exercices à réaliser dans les suivantes : [\[1\]](#).

Remerciements

Merci beaucoup à Damien Galant pour sa relecture du document.

Première partie

Premier quadrimestre

Chapitre 1

Espaces de Banach : exemples

Dans ce chapitre nous présentons plusieurs exemples d'espaces de Banach, notamment les espaces ℓ^p de suites et deux exemples d'espaces de fonctions.

La lettre \mathbb{K} est utilisée pour représenter le corps des nombres réels \mathbb{R} ou celui des nombres complexes \mathbb{C} .

1.1 Exemples tirés du cours d'Analyse II

Nous avons vu l'année passée que tous les espaces vectoriels de dimension finie étaient complets.

Proposition 1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie. Il s'agit d'un espace de Banach.

Démonstration. (Esquisse de preuve)

Remarque : un point intéressant de la dimension finie est qu'on peut travailler, si on le souhaite, avec sa norme préférée étant donné qu'elles sont toutes équivalentes.

Etant donné une suite de Cauchy, il est évident (via l'inégalité triangulaire) que chaque composante (en se fixant au préalable une base) est de Cauchy et donc converge dans \mathbb{K}

Ceci fournit un candidat limite et la vérification se fait facilement en prenant par exemple la norme $\|\cdot\|_1$. \square

Les espaces de Hilbert sont un autre type d'espace de Banach que nous avons étudié en analyse II. Ils sont complets par définition.

1.2 Espaces de suites ℓ^p

Définition 1.2. Soit $1 \leq p < \infty$ un réel. On appelle ℓ^p (noté aussi $\ell^p(\mathbb{N})$) l'ensemble de suites suivant :

$$\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

On définit l'application $\|\cdot\|_p : \ell^p \rightarrow [0, +\infty[$ par

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p, \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Il n'est pas clair à première vue que ℓ^p est un espace vectoriel, lorsque $p > 1$. Efforçons de montrer des résultats permettant une preuve courte de cela, tout en délivrant des résultats simplifiant la démonstration du fait que l'application $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur ℓ^p . Nous aurons besoin d'une première inégalité célèbre afin de prouver ce résultat.

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder). Soient $n \geq 1$ un nombre naturel, $p, q > 1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration. Prouvons préalablement que pour tous réels $a, b > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (1.1)$$

Il est aisé de vérifier, à l'aide de la dérivation, que la fonction $\ln :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est concave, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x, y > 0, \ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y)$$

Puisque $p, q > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) &\geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \\ &= \ln(a) + \ln(b) \\ &= \ln(a \cdot b) \end{aligned}$$

Etant donné que la fonction exponentielle est croissante, on a bien l'inégalité 1.1.

Soient $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$. Supposons les tous les deux non nuls, puisque dans ce cas, l'inégalité du théorème est claire.

On pose, pour $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$A_j = \frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } B_j = \frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

Ces quotients sont bien définis car x et y sont non nuls. Par l'inégalité (1.1), on a que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_j|}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \right) &= \sum_{j=1}^n A_j \cdot B_j \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n A_j^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n B_j^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat. □

Introduisons maintenant une autre inégalité célèbre qui nous permettra de montrer que ℓ^p est un espace vectoriel.

Théorème 1.4 (Inégalité de Minkowski (dimension finie)). Soient $n \geq 1$ un nombre naturel, $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel, $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$.

L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Démonstration. Supposons x, y non nuls, sinon le résultat est clair.

Si $p = 1$, il suffit d'itérer l'inégalité triangulaire pour le module afin de prouver l'assertion. Supposons par conséquent que $p > 1$.

Remarque : Cette preuve est fort calculatoire. Elle n'a pas vraiment d'intérêt au niveau des idées.

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} (|x_k| + |y_k|) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

Soit q le réel conjugué de p . En appliquant l'inégalité de Hölder au dernier terme de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\ &= (\|x + y\|_p^p)^{\frac{1}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \end{aligned}$$

Ceci implique l'inégalité nous permettant de conclure :

$$\|x\|_p + \|y\|_p \geq (\|x + y\|_p^p)^{1-\frac{1}{q}} = \|x + y\|_p$$

□

Le résultat se généralise facilement aux espaces ℓ^p , et nous avons donc en même temps l'argument le plus important de la preuve que ℓ^p est un espace vectoriel, mais également l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Minkowski (Généralisation à ℓ^p)). Soient $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

On a : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

Démonstration. Etant donné qu'on a le résultat pour toutes les suites de sommes partielles, il suffit de passer à la limite pour conclure. □

Exercice 1.1. Rédiger en détail la preuve des affirmations suivantes :

- L'ensemble ℓ^p est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- L'application $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur ℓ^p .

Il est légitime de se demander pourquoi parler de ces espaces dans un chapitre réservé aux espaces de Banach. C'est parce qu'il s'agit d'exemples classiques :

Proposition 1.6. Soit $p > 1$ un nombre réel. L'espace vectoriel normé $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Exercice 1.2. Effectuer la preuve de la proposition 1.6

Nous n'effectuerons pas la preuve dans cette section, elle est laissée à titre d'exercice. Nous allons toutefois montrer le cas $p = 1$. Les idées mises en oeuvre dans cette preuve sont intéressantes et il est conseillé de les revoir.

Proposition 1.7. L'espace vectoriel normé $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left((x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \right)_n$ une suite de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^{(n)})_n$ est de Cauchy dans \mathbb{K} qui est complet. Soit $x_k \in \mathbb{K}$ la limite de cette suite dans \mathbb{K} .

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite $x = (x_k)_k$. Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de ℓ^1 et qu'il s'agit de la limite de la suite $(x^{(n)})_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon$$

En faisant tendre $q \rightarrow +\infty$, on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n |x_k^{(p)} - x_k| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que $x^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} x$

Pour montrer que $x \in \ell^1$, il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels n, N considérés.

$$\sum_{k=0}^N |x_k| \leq \sum_{k=0}^N |x_k - x_k^{(n)}| + \sum_{k=0}^N |x_k^{(n)}| \leq \|x - x^{(n)}\|_1 + \|x^{(n)}\|_1$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de n car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la série définissant $\|x\|_1$ est bien convergente.

□

1. On note en indice la "composante" dans ℓ^1 et en exposant l'indice de la suite

Il reste encore un espace lié aux espaces ℓ^p que nous n'avons pas introduit : l'espace des suites ℓ^∞ .

Définition 1.8. L'espace des suites bornées, noté ℓ^∞ correspond à l'ensemble suivant :

$$\ell^\infty = \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

Remarque 1.9. Il est utile de remarquer que 1 et ∞ sont conjugués (par exemple pour les espaces duaux, cf. exemples 2.3 et 2.4 de la section 2.2).

Exercice 1.3. Montrer que l'application suivante définit bien une norme sur ℓ^∞ :

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \rightarrow [0, +\infty[: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Tout comme ses confrères, il s'agit d'un espace de Banach. Cela fait l'objet du résultat suivant :

Proposition 1.10. L'espace vectoriel $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

La preuve est fortement similaire à celle pour l'espace de suites ℓ^1 . Elle sera tout de même explicitée afin de permettre la lecture d'une version adaptée de la preuve ci-dessus.

Démonstration. Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left((x_k^{(n)})_k \right)_n$ une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^{(n)})_n$ est de Cauchy dans \mathbb{K} qui est complet. Soit $x_k \in \mathbb{K}$ la limite de cette suite dans \mathbb{K} .

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite $x = (x_k)_k$. Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de ℓ^∞ et qu'il s'agit de la limite de la suite $(x^{(n)})_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon$$

En faisant tendre $q \rightarrow +\infty$, on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que $x^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} x$

Pour montrer que $x \in \ell^\infty$, il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels n, k considérés.

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| \leq \|x - x^{(n)}\|_\infty + \|x^{(n)}\|_\infty$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de n car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la suite des $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc que $x \in \ell^\infty$. \square

1.3 Espaces de fonctions continues

Un autre exemple d'espace de Banach dont nous avons les outils pour montrer la complétude est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Tout ce qui suit dans cette section peut être généralisé aux fonctions définies sur un intervalle fermé borné quelconque.

Définition 1.11. On note

$$\mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

l'espace vectoriel de fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow [0, +\infty[: f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Le maximum apparaissant dans la norme est bien défini, car les fonctions considérées sont continues sur un compact et atteignent donc leurs bornes.

Proposition 1.12. L'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ est complet au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}[0, 1]$. En retraduisant cette hypothèse en remplaçant le maximum définissant $\|\cdot\|_\infty$ par un quantificateur universel, on obtient la phrase quantifiée suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in [0, 1], |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \quad (1.2)$$

On remarque que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{K} qui est complet. Il existe donc f limite ponctuelle de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$ vers f . Cela garantira la continuité de f , car f sera la limite uniforme de la suite.

En faisant $q \rightarrow \infty$ dans la phrase quantifiée 1.2, on a le résultat.

□

1.4 Espaces d'applications linéaires

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur \mathbb{K} . Rappelons certaines propriétés et définitions vues l'année passée.

Définition 1.13. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Il s'agit d'un espace vectoriel normé, muni de la norme opérateur définie par :

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow [0, +\infty[: T \mapsto \|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|_F$$

On a également vu plusieurs équivalences pour montrer qu'une application linéaire est continue. Rappelons les.

Proposition 1.14. Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- T est continue.
- T est continue en 0.
- T est bornée sur la boule unité de E .
- Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|$ ².

Remarquez également qu'il existe plusieurs formulations équivalentes pour la norme opérateur :

Proposition 1.15. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|T(x)\|_F \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E < 1}} \|T(x)\|_F\end{aligned}$$

Il est utile, si vous avez des difficultés avec ces objets, d'essayer de les manipuler en résolvant les exercices :

Exercice 1.4. Prouver les propositions 1.14 et 1.15.

Exercice 1.5 (« Sous-multiplicativité de la norme »). Soit $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} . Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ des applications linéaires continues. Montrer l'inégalité

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$$

L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ n'est *pas* un espace de Banach en général. Il faut ajouter une hypothèse sur F pour avoir la complétude de cet espace.

Proposition 1.16. Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Remarque : il n'y a pas de condition supplémentaire à imposer à l'espace E . En particulier, le résultat n'exige pas sa complétude.

La réciproque de ce résultat est également vraie, nous l'énoncerons dans un futur chapitre.

Démonstration. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \|T_p - T_q\| \leq \varepsilon$$

Alors, on a l'assertion suivante :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall x \in E, \\ \|T_p(x) - T_q(x)\| \leq \|T_p - T_q\| \cdot \|x\|_E \leq \varepsilon \cdot \|x\|_E\end{aligned}$$

Cela implique que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F qui par hypothèse est complet. Soit $T(x)$ limite de cette suite dans F .

Montrons que T est la limite, au sens de la norme opérateur, de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En reprenant la phrase quantifiée ci-dessus, en considérant $x \in E$ de norme inférieure à 1 et en faisant tendre q vers l'infini, on est assuré de la convergence.

L'application T est bien linéaire car elle est limite simple d'applications linéaires. Elle est bornée sur la boule unité car pour tout naturel n on a l'inégalité :

$$\|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$$

□

2. La constante optimale, s'il en existe une, est $\|T\|$.

Chapitre 2

Espaces duaux : exemples

2.1 Généralités

Soit \mathbb{K} un corps, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Définition 2.1. Le dual de E , noté E^* correspond à $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ ie. l'ensemble des formes linéaires continues.

Par la proposition 1.16, étant donné que \mathbb{K} est complet, on a que $(E^*, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (la norme considérée est la norme opérateur).

Dans ce chapitre plutôt que de s'attarder sur des propriétés générales des espaces duaux, nous étudierons des exemples et nous identifierons les espaces duaux d'espaces connus à d'autres espaces que nous connaissons.

Remarque : les intuitions sur comment trouver à quel espace s'identifie le dual seront omises.

2.2 Exemples en dimension finie

En dimension finie, il est connu que le dual algébrique est de même dimension que l'espace vectoriel considéré. De plus, comme toutes les applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues, il suffit de vérifier qu'on a une isométrie entre les espaces considérés pour avoir l'identification.

Exercice 2.1. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $i : X \rightarrow Y$ une isométrie, c'est-à-dire « i préserve les distances », c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in X, d_X(x, y) = d_Y(i(x), i(y))$$

Montrer que i est injective.

Dans les calculs relatifs à tous les exemples suivants, il n'est jamais montré que l'application considérée est linéaire. Cela est laissé comme exercice.

Exemple 2.2. On a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (x, y) \mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que i est une isométrie étant donné que l'espace considéré est de dimension finie.

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{x^2+y^2 \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{x^2+y^2 \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{x^2+y^2 \leq 1} (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2} \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \sup_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^{1/2} = \|(x_1, x_2)\|_2 \end{aligned}$$

Réciproquement, il suffit de considérer $z = \frac{(x_1, x_2)}{\|(x_1, x_2)\|_2}$; on a $i(x_1, x_2)(z) = \|(x_1, x_2)\|_2$ ce qui fournit l'inégalité nous permettant de conclure.

Exemple 2.3. On a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{|x|+|y| \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{|x|+|y| \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{|x|+|y| \leq 1} \max(|x_1|, |x_2|)(|x| + |y|) \\ &\leq \|(x_1, x_2)\|_\infty \sup_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) = \|(x_1, x_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Si $\max(|x_1|, |x_2|) = |x_1|$, alors $i(x_1, x_2)$ atteint $\|(x_1, x_2)\|_\infty$ en $(\text{sign}(x_1), 0)$ qui est bien un élément de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. L'autre cas est analogue. On peut donc conclure que i est bien une isométrie.

Exemple 2.4. On a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} (|x_1| + |x_2|) \max(|x|, |y|) \\ &\leq \|(x_1, x_2)\|_1 \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} \max(|x|, |y|) = \|(x_1, x_2)\|_1 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $i(x_1, x_2)$ atteint $\|(x_1, x_2)\|_1$ au point $(\text{sign}(x_1), \text{sign}(x_2))$ de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, ce qui fournit l'autre inégalité désirée.

Exercice 2.2. Soient $p > 1$, $q > 1$ le conjugué de p . Montrer qu'on a que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

Notez que tous ces exemples peuvent se généraliser en dimension supérieure à 2.

2.3 Exemples en dimension infinie

Contrairement aux exemples de la section précédente, il ne suffit plus de vérifier que l'application considérée est une isométrie car la surjectivité n'est plus garantie par l'injectivité. Les exemples requièrent donc plus de travail.

Introduisons le premier espace sur lequel nous allons nous concentrer, qui est un espace de suites.

Définition 2.5. L'espace c_0 est l'espace des suites dans \mathbb{K} convergeant vers 0. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Etant donné que toutes les suites convergentes sont bornées, on a que c_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ .

Exemple 2.6. On a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^1, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto i(x) : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

L'application i est une isométrie :

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. La fonction $i(x)$ est bien définie car pour tout $y \in c_0$, on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$$

Cela implique en particulier que $\|i(x)\| \leq \|x\|_1$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit, pour tout naturel N , la suite $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = \begin{cases} \text{sign}(x_n) & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à la boule unité de c_0 et on a $|i(x)(y^{(N)})| \rightarrow \|x\|_1$ quand N tend vers l'infini. Ceci implique que $\|i(x)\| \geq \|x\|_1$, ce qu'on voulait.

L'application i est surjective :

Vérifions la surjectivité de i . Soit $x^* \in (c_0)^*$. On pose $x = (x^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ où e_n est la suite de terme général $(\mathbb{1}_{\{n\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que $i(x) = x^*$, ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que x est bien élément de ℓ^1 .

Pour tout naturel N , on a :

$$\sum_{k=0}^N |x_k| = x^*(y^{(N)}) \leq \|x^*\|$$

Ce qui implique que la série des termes de x est absolument convergente, ce qu'on voulait montrer.

Exemple 2.7. On a $(\ell^1, \|\cdot\|_1)^* \equiv (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (\ell^1, \|\cdot\|_1)^* \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto i(x) : (\ell^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R} \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

L'application i est une isométrie :

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. La fonction $i(x)$ est bien définie car pour tout $y \in \ell^1$, on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$$

Cela implique en particulier que $\|i(x)\| \leq \|x\|_\infty$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit, pour tout naturel N , la suite $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = \mathbb{1}_{\{N\}}(n) \text{sign}(x_n)$$

Alors $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de la boule unité de ℓ^1 et on a $|i(x)(y^{(N)})| = |x_N|$ quel que soit le naturel N considéré. Ceci implique que $\|i(x)\| \geq \|x\|_\infty$, ce qu'on voulait.

L'application i est surjective :

Vérifions la surjectivité de i . Soit $x^* \in (\ell^1)^*$. On pose $x = (x^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ où e_n est la suite de terme général $(\mathbb{1}_{\{n\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Il reste à montrer que $i(x) = x^*$, ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que x est bien élément de ℓ^∞ .

Pour tout naturel N , on a :

$$|x_k| = x^*(y^{(N)}) \leq \|x^*\|$$

Ce qui implique que x est une suite bornée, ce que l'on voulait montrer.

Chapitre 3

Théorèmes de Hahn-Banach

Dates (pour votre culture générale) : Hahn (1879-1934), Banach (1892-1945).

Les théorèmes de Hahn-Banach sont des résultats d'analyse fonctionnelle très importants. Ces théorèmes sont vus ici en deux formes : les formes analytiques du théorème assurent qu'une forme linéaire peut être étendue à tout l'espace en préservant certaines contraintes initiales ; les formes géométriques quant à elles sont des résultats assurant qu'on peut séparer par des hyperplans deux convexes vérifiant certaines hypothèses dans des espaces vectoriels normés.

3.1 Formes analytique

3.1.1 Espaces vectoriels sur \mathbb{R}

Théorème 3.1 (Hahn-Banach – Forme analytique (cas réel)). Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , G un sous-espace vectoriel de E , $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (p est dite positivement homogène)
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (p est dite sous-additive)
- $\forall x \in G, f(x) \leq p(x)$

Alors il existe $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire étendant f et telle que $\forall x \in E, g(x) \leq p(x)$.

Démonstration. Supposons que $G \neq E$, sinon le résultat est immédiat.

Supposons donc qu'il existe $x_0 \in E \setminus G$. Montrons qu'il est possible d'étendre f à $V = G \oplus \mathbb{R}x_0$ comme annoncé dans le théorème.

On doit montrer qu'il existe un réel $g(x_0)$ tel que pour tout $x = y + tx_0 \in V$, $g(x) \leq p(x)$, c'est-à-dire :

$$f(y) + tg(x_0) \leq p(y + tx_0)$$

Analysons les différents cas, selon le signe de t :

Cas 1, $t > 0$: la condition devient, par positive homogénéité de p et linéarité de f

$$\forall y \in G, g(x_0) \leq p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Puisque G est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall z \in G, g(x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

Cas 2, $t > 0$: la condition devient, par positive homogénéité de p et linéarité de f

$$\forall y \in G, g(x_0) \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x_0\right)$$

Puisque G est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall w \in G, g(x_0) \leq f(w) - p(w - x_0)$$

La question qu'on se posait revient donc à se demander s'il existe un réel satisfaisant les inégalités :

$$\forall w, z \in G, f(w) - p(w - x_0) \leq g(x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

Il suffit de montrer l'assertion :

$$\forall w, z \in G, f(w) - p(w - x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

Soient $z, w \in G$. On a $f(w + z) \leq p(w + z)$ par hypothèse sur p . Or puisque

$$p(w + z) = p(w - x_0 + z + x_0) \leq p(w - x_0) + p(z + x_0)$$

par sous-additivité de p , et que f est linéaire, on a l'inégalité.

On peut donc poser, par exemple, $g(x_0) = \inf_{z \in G} p(z + x_0) - f(z)$.

Pour finir la preuve, on utilise le lemme de Zorn, en considérant l'ensemble suivant, avec comme ordre l'inclusion (en considérant qu'une fonction h_1 prolonge une fonction h_2 si et seulement si le graphe de h_1 est inclus à celui de h_2) :

$$\mathcal{M} = \{(V, h) \mid G \subseteq V \text{ sev. de } E, h : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire, } h \text{ prolongement de } f\}$$

□

3.1.2 Espaces vectoriels sur \mathbb{C}

Théorème 3.2 (Hahn-Banach – Forme analytique (cas complexe)). Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{C} , G un sous-espace vectoriel de E , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire et $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (p est dite sous-additive)
- $\forall x \in G, |f(x)| \leq p(x)$

Alors il existe $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ forme linéaire étendant f et telle que $\forall x \in E, |g(x)| \leq p(x)$.

Démonstration. Remarquez que quel que soit l'élément $x \in G$ considéré, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} if(x) &= -\operatorname{Im}(f)(x) + i\operatorname{Re}(f)(x) \\ f(ix) &= \operatorname{Re}(f)(ix) + i\operatorname{Im}(f)(ix) \end{aligned}$$

Par définition de l'égalité de deux nombres complexes (leurs parties réelles et imaginaires doivent être égales), on en déduit que $\operatorname{Re}(f)(ix) = -\operatorname{Im}(f)(x)$ et que $\operatorname{Im}(f)(ix) = \operatorname{Re}(f)(x)$. On peut donc exprimer f uniquement à l'aide de $\operatorname{Re}(f)$ de la manière suivante :

$$f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) - i\operatorname{Re}(f)(ix)$$

L'application $\operatorname{Re}(f) : G \rightarrow \mathbb{R}$ est une application \mathbb{R} -linéaire. Par le théorème de Hahn-Banach, cas réel, elle s'étend en une fonction \mathbb{R} -linéaire $h : E \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose g l'application définie par $g(x) = h(x) - ih(ix)$ pour tout x dans E . Donc h correspond à la partie réelle de g . Il est aisé de vérifier qu'elle est \mathbb{C} -linéaire par calcul.

Il reste à montrer que g vérifie bien $|g| \leq p$. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= e^{-i \arg(g(x))} g(x) \\ &= g(e^{-i \arg(g(x))} x) && (g \text{ linéaire}) \\ &= \operatorname{Re}(g)(e^{-i \arg(g(x))} x) \\ &= h(e^{-i \arg(g(x))} x) \\ &\leq p(e^{-i \arg(g(x))} x) = p(x) \quad (\text{Thm. 3.1}) \end{aligned}$$

□

3.1.3 Espaces vectoriels normés

Théorème 3.3 (Théorème de Hahn-Banach – Forme analytique). Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , G un sous-espace vectoriel de E et $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire continue.

Alors il existe une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire continue prolongeant f telle que $\|f\| = \|g\|$.

Démonstration. On prend pour fonction $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$. Elle vérifie toutes les hypothèses des théorèmes 3.1 et 3.2.

On peut donc prolonger f en une forme linéaire g telle que $|g(x)| \leq p(x)$ quel que soit $x \in E$. En particulier, cela implique que g est continue car bornée sur la boule unité par la norme de f .

Pour conclure il nous reste à montrer l'inégalité réciproque. Or pour tout $x \in G$ dans la boule unité, on a $|f(x)| = |g(x)| \leq \|g\|$, ce qui fournit l'inégalité désirée. □

3.1.4 Hahn-Banach et dualité

Prouvons plusieurs corollaires des formes analytiques du théorème de Hahn-Banach liés à la dualité. Ils constituent de petits exercices d'application des théorèmes.

On considère un corps \mathbb{K} qui est soit celui des réels ou des complexes.

Corollaire 3.4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Alors il existe $x^* \in E^*$, tel que $x^*(x_0) = 1$ et $\|x^*\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Démonstration. Soit $G = \mathbb{K}x_0$. On considère l'application linéaire continue $f : G \rightarrow \mathbb{K} : tx_0 \mapsto t$ (la continuité est assurée car l'application est définie sur un espace de dimension 1).

Calculons la norme de f :

$$\|f\| = \sup_{\substack{t \in \mathbb{K} \\ \|tx_0\| \leq 1}} |f(tx_0)| = \sup_{\substack{t \in \mathbb{K} \\ |t| \leq \frac{1}{\|x_0\|}}} |t| = \frac{1}{\|x_0\|}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème 3.3. □

Corollaire 3.5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Alors il existe $x^* \in E^*$, tel que $x^*(x_0) = \|x_0\|$ et $\|x^*\| = 1$.

Démonstration. Soit y^* fournie par le corollaire 3.4. Il suffit de prendre $x^* = \|x_0\|y^*$. \square

Remarque 3.6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$.

Quelle que soit la forme considérée $x^* \in E^*$, on a toujours que $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$.

Par le corollaire 3.5, on obtient l'égalité

$$\|x\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(x)|$$

Corollaire 3.7. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas dense dans E et $x_0 \in (E \setminus \text{adh}(F))$.

Il existe $x^* \in E^*$ tel que $F \subseteq \text{Ker}(x^*)$, $x^*(x_0) = 1$ et $\|x^*\| = \frac{1}{d}$ où $d = d(x_0, F)$.

Démonstration. Soit $f : F \oplus \mathbb{K}x_0 \rightarrow \mathbb{K} : y + tx_0 \mapsto t$. Cette application est linéaire et on a $F \subseteq \text{Ker}(f)$ et $f(x_0) = 1$.

Rappelons que $d \neq 0$ car $x_0 \notin \text{adh}(F)$.

Montrons que f est continue. Soit $y + tx_0 \in F \oplus \mathbb{K}x_0$ tel que $\|y + tx_0\| \leq 1$. On a, pour $t \neq 0$:

$$\|y + tx_0\| = |t| \cdot \left\| x_0 - \left(-\frac{y}{t}\right) \right\| \geq d \cdot |t|$$

D'où $|f(y + tx_0)| = |t| \leq \frac{1}{d}$. Ceci montre que f est continue.

En utilisant le théorème 3.3, on peut étendre f en une forme linéaire continue x^* sur E de même norme. Pour achever la preuve de l'assertion, il faut montrer l'inégalité $\|f\| \geq \frac{1}{d}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in F$ tel que $|d - \|y - x_0\|| < \varepsilon$ (définition d'infimum). Cela implique $\|y - x_0\| \leq d + \varepsilon$. On a également l'inégalité

$$\|f\| \geq \left| f\left(\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) \right| = \frac{1}{\|y - x_0\|} \geq \frac{1}{d + \varepsilon}$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0. \square

Pour conclure cette section, les deux exercices suivants sont laissés :

Exercice 3.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} . Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer les équivalences suivantes :

1. $(x_0 \in \text{adh}(F))$ si et seulement si $(\forall x^* \in E^*, F \subseteq \text{Ker}(x^*) \implies x^*(x_0) = 0)$
2. $(\text{adh}(F) = E)$ si et seulement si $(\forall x^* \in E^*, F \subseteq \text{Ker}(x^*) \implies x^* = 0)$

Il existe une notation pour l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur un sous-espace vectoriel donné. Il est donc possible de réécrire la question ci-dessus de manière plus concise à l'aide de cette notation.

Définition 3.8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle annulateur de F le sous-espace vectoriel suivant de E^* :

$$F^\perp = \{x^* \in E^* \mid F \subseteq \text{Ker}(x^*)\}$$

3.1.5 Bidualité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} . Il est possible de considérer les formes linéaires définies sur le dual de E , étant donné qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé. On appelle cet espace le bidual de E , et on le note E^{**} .

Définition 3.9 (Injection canonique). On appelle injection canonique l'application

$$\begin{aligned} i : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto i(x) \end{aligned}$$

où pour tout $x \in E$, $i(x)$ est l'application définie par

$$\begin{aligned} i(x) : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x^* &\mapsto i(x)(x^*) = x^*(x) \end{aligned}$$

Il est simple de vérifier que l'injection canonique est bien définie (c'est-à-dire qu'elle est bien à image dans E^{**}). De plus, l'injection canonique a les propriétés suivantes :

Proposition 3.10. L'injection canonique est linéaire, continue et préserve la norme.

Démonstration. La linéarité est claire, car le dual est un espace d'applications linéaires, ce qui fournit le résultat.

Quant à la préservation des normes, il suffit de constater les égalités suivantes (par le corollaire 3.5) :

$$\|i(x)\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(x)| = \|x\|$$

Par cet argument, on a $\|i\| = 1$, ce qui implique que i est continue. □

Les espaces qui s'identifient à leur bidual via l'injection canonique sont dits réflexifs. Il existe des espaces qui sont isomorphes à leur bidual, mais pas via l'injection canonique ; ces espaces sont appelés espaces de James.

Proposition 3.11. Si E est réflexif, toute forme $x^* \in E^*$ atteint sa norme.

Démonstration. Soit $x^* \in E^*$. Il existe $x^{**} \in E^{**}$ de norme 1 telle que $x^{**}(x^*) = \|x^*\|$, par le corollaire 3.5. Par surjectivité de l'injection canonique, il existe $x \in E$ tel que $i(x) = x^{**}$. Il s'ensuit que x^* atteint sa norme en x . □

Remarque : la réciproque est également vraie, mais nous n'allons pas nous en préoccuper.

Dans le cas où l'espace n'est pas réflexif, il existe donc des formes linéaires continues n'atteignant pas leur norme. Donnons-en un :

Exemple 3.12. On considère $E = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Alors son dual E^* s'identifie à ℓ^1 . Soit la suite $x = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est bien élément de ℓ^1 . Alors l'application suivante est bien élément de $(c_0)^*$:

$$x^* : c_0 \rightarrow \mathbb{K} : (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

Montrons que x^* n'atteint pas sa norme. Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de la boule unité de c_0 . Par définition, il existe N un naturel tel que pour tout $n > N$, $|y_n| \leq \frac{1}{2}$. On a :

$$|x^*(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} = \sum_{n=0}^N \frac{|y_n|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{2^{N+1}} < 2$$

Montrons que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs. Pour ce faire, rappelons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet :

Théorème 3.13 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). Soit H un espace de Hilbert. Soit x^* élément du dual de H . Il existe un unique élément $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $x^*(y) = \langle y, x \rangle$.

Exercice 3.2. Soit H un espace de Hilbert. Prouvez que le représentant donné par le théorème pour une forme linéaire continue $x^* \in H^*$ est de même norme que celle-ci.

Remarque : en particulier, tout espace de Hilbert est isométrique à son dual.

Nous sommes maintenant armés pour montrer que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs.

Théorème 3.14. Tout espace de Hilbert H est réflexif.

Démonstration. Munissons le bidual d'une structure d'espace de Hilbert. Pour ce faire, faisons d'abord de même pour le dual.

Etant donné deux formes linéaires continues u^*, v^* sur H , il existe u, v deux éléments de H leur correspondant (via le théorème de représentation de Riesz-Fréchet). On pose alors :

$$\langle u^*, v^* \rangle = \langle v, u \rangle$$

Il s'agit bien d'un produit scalaire ; il hérite des propriétés du produit scalaire défini sur H , en plus d'engendrer la même distance que la norme opérateur (puisque les représentants sont de même norme que les formes considérées). La complétude de H^* est assurée par la proposition 1.16.

De la même manière, on munit le bidual de H d'un produit scalaire, pour tous u^{**}, v^{**} du bidual, soient u^*, v^* leur représentants du dual, on pose :

$$\langle u^{**}, v^{**} \rangle = \langle u^*, v^* \rangle$$

Soit $y^{**} \in H^{**}$. Montrons qu'il existe un élément y de H tel que y^{**} est l'image de y par l'injection canonique.

On considère y le représentant de la forme linéaire continue y^* , elle-même représentante de y^{**} . Soient x^* une forme linéaire continue et x son représentant dans H . Alors :

$$i(y)(x^*) = x^*(y) = \langle y, x \rangle$$

et

$$y^{**}(x^*) = \langle x^*, y^* \rangle = \langle y, x \rangle$$

Les deux correspondent ce qui conclut la preuve. □

Vous pouvez consulter une autre preuve dans le document [2, p. 49].

3.2 Formes géométriques

3.2.1 Hyperplans

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} (le corps des réels ou des complexes).

Définition 3.15. Un sous-espace vectoriel H de E est dit hyperplan vectoriel s'il existe $e \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathbb{K}e$.

Il existe une formulation équivalente en termes de formes linéaires :

Proposition 3.16. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel si et seulement si il existe une forme linéaire f non identiquement nulle dont H est le noyau.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan vectoriel. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $x + te$ avec $t \in \mathbb{K}$ et $x \in H$. Il suffit de poser $f(x + te) = t$ pour avoir l'affirmation.

Réciproquement supposons que H est le noyau d'une application linéaire f non nulle. Soit $e \in E$ un vecteur n'appartenant pas au noyau de f . Montrons que pour tout x dans E , il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = (x - \lambda e) + \lambda e$; ceci impliquera $E = H + \mathbb{K}e$. Il suffit de prendre $\lambda = \frac{f(x)}{f(e)}$. On a bien $x - \lambda e \in H$.

Il faut maintenant montrer l'unicité de cette écriture. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in H$ tels que $x = u + ae = v + be$. En appliquant f , on obtient $af(e) = bf(e)$, d'où $a = b$ et $u = v$. \square

En plus des hyperplans vectoriels, on définit également les hyperplans dits affins. Il s'agit de translatés d'hyperplans vectoriels.

Définition 3.17. Un sous-ensemble H de E est dit hyperplan affine s'il existe f une forme linéaire sur E , un scalaire α tels que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Supposons désormais que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. On a le résultat suivant, qui lie continuité d'une forme linéaire et si le noyau est fermé ou non.

Proposition 3.18. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

Son noyau est fermé si et seulement si f est continue.

Remarque : l'application nulle est continue et son noyau est fermé. Le cas est écarté de la proposition car il est trivial.

Démonstration. Si l'application est supposée continue, alors son noyau est fermé car il s'agit de l'image réciproque par f du singleton $\{0\}$ qui est fermé.

Réciproquement, supposons son noyau fermé. Étant donné que f est non nulle, il existe x_0 dans le complémentaire du noyau, qui est ouvert (par hypothèse). On peut supposer $f(x_0) = 1$ (en normalisant le vecteur).

Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq E \setminus \text{Ker}(f)$. On a donc $\forall z \in B(0, 1)$, $f(x_0 + rz) \neq 0$. Par linéarité de f , on obtient $\forall z \in B(0, 1)$, $f(z) \neq r^{-1}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que $|f(z)| < r^{-1}$ pour tout élément z de la boule unité de E . Montrons que le complémentaire cas est impossible par l'absurde.

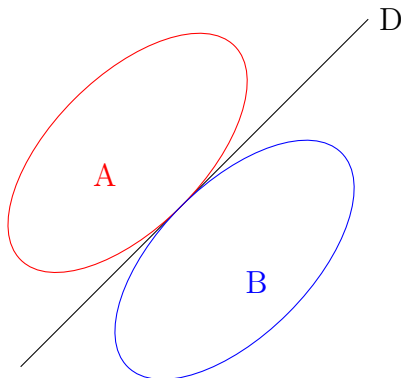
S'il existe un élément z de la boule unité de E tel que $|f(z)| \geq r^{-1}$, alors il existe y dans la boule unité tel que son image par f est réelle positive et $f(y) \geq r^{-1}$ (prendre $y = e^{-i \arg(f(z))} z$). En multipliant y par une constante appropriée, on obtient un élément de la boule unité d'image r^{-1} ce qui constitue une contradiction. \square

3.2.2 Introduction aux formes géométriques du théorème de Hahn-Banach

Tout au long de cette section on considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{R} .

Le but de cette section est d'introduire les bases nécessaires pour prouver les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach. Le théorème affirme qu'étant donnés deux convexes de E vérifiant certaines hypothèses, il est possible de les séparer par un hyperplan, comme illustré à la figure 3.1. Plus formellement :

FIGURE 3.1 – Séparation de deux convexes par des hyperplans dans \mathbb{R}^2



Définition 3.19. Soient A, B deux sous-ensembles disjoints de E , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, α un réel et $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ un hyperplan affine.

H sépare A et B au sens large si $\forall x \in A, f(x) \leq \alpha$ et $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha$.

H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in A, f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ et $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha + \varepsilon$.

Pour parvenir à nos fins, on introduit une fonction appelée jauge d'un convexe C :

Définition 3.20. Soit $C \subseteq E$ un convexe contenant 0 et ouvert. Pour tout x dans E , on définit la jauge de C en x comme suit :

$$j_C(x) = \inf \{ \alpha > 0 \mid x \in \alpha C \}$$

Pour se familiariser avec cette fonction, vous êtes invité à effectuer les calculs suivants :

Exercice 3.3. On considère le convexe $C =]\frac{-1}{2}, 2[$. Effectuez les calculs suivants :

$$\begin{aligned} j_C\left(\frac{1}{2}\right) &= \boxed{} & j_C(-1) &= \boxed{} \\ j_C\left(\frac{-1}{2}\right) &= \boxed{} & j_C(2) &= \boxed{} \end{aligned}$$

Annexe A

Solutions des exercices

Tous les exercices ne seront pas corrigés.

A.1 Hahn-Banach (Formes analytiques)

Solution de l'exercice 3.1

1. Supposons que $x_0 \in \text{adh}(F)$. Etant donné que le noyau de toute forme linéaire continue est fermé (le noyau est l'image réciproque du singleton 0 qui est fermé, donc est fermé par continuité), et que le passage à l'adhérence conserve les inclusions, il est aisé de conclure.

Réciproquement, supposons que $x_0 \notin \text{adh}(F)$. Par le corollaire 3.7 des formes analytiques de Hahn-Banach, il existe une forme s'annulant sur F et pas en x_0 , ce que l'on voulait montrer.

2. Supposons F dense dans E . Soit $x^* \in E^*$ tel que $F \subseteq \text{Ker}(x^*)$. Etant donné que ce noyau est fermé, il contient la fermeture de F qui est E . Ceci implique que x^* est l'application constante nulle.

Réciproquement, supposons F non dense dans E . Il suffit de considérer un élément du complémentaire de l'adhérence de F et d'appliquer le résultat 3.7 pour obtenir une forme linéaire dont le noyau contient F mais non identiquement nulle.

Bibliographie

- [1] “Théorèmes de hahn-banach.” <http://math.univ-lille1.fr/~fricain/EXOS-M1-ANALYSE-FONCTIONNELLE/feuille5.pdf>. Accessed : 2018-12-23.
- [2] B. Maurey, “Analyse fonctionnelle et théorie spectrale.” <https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/ts012/poly/mths.pdf>. Accessed : 2018-12-23.