

# Analyse Mathématique III

James Campbell Alexander Main

15 juin 2019



# Table des matières

Un petit mot avant de commencer	v
<b>I Premier quadrimestre</b>	<b>1</b>
<b>1 Espaces de Banach : exemples</b>	<b>3</b>
1.1 Exemples tirés du cours d'Analyse II	3
1.2 Espaces de suites $\ell^p$	3
1.3 Espaces de fonctions continues	8
1.4 Espaces d'applications linéaires	8
1.5 Sous-espaces vectoriels et complétude	10
<b>2 Espaces duaux : exemples</b>	<b>11</b>
2.1 Généralités	11
2.2 Exemples en dimension finie	11
2.3 Exemples en dimension infinie	13
<b>3 Théorèmes de Hahn-Banach</b>	<b>15</b>
3.1 Formes analytiques	15
3.1.1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$	15
3.1.2 Espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$	16
3.1.3 Espaces vectoriels normés	17
3.1.4 Hahn-Banach et dualité	17
3.1.5 Bidualité	19
3.2 Formes géométriques	21
3.2.1 Hyperplans	21
3.2.2 Introduction aux formes géométriques du théorème de Hahn-Banach	22
3.2.3 Théorème de Hahn-Banach : Formes géométriques	24
3.2.4 Généralisation aux espaces vectoriels complexes	25
3.2.5 Applications	27
<b>4 Théorème de Baire</b>	<b>31</b>
4.1 Un petit mot historique	31
4.2 Définitions	31
4.3 Formulations équivalentes	33
4.4 Théorème de Baire	34
4.5 Corollaires et applications	36

<b>5</b>	<b>Théorème de Banach-Steinhaus</b>	<b>39</b>
5.1	Théorème . . . . .	39
5.2	Conséquences du théorème . . . . .	40
<b>II</b>	<b>Second quadrimestre</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé</b>	<b>45</b>
6.1	Théorème de l'application ouverte . . . . .	45
6.2	Théorème du graphe fermé . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Topologie faible</b>	<b>49</b>
7.1	Rappels sur la notion de topologie initiale . . . . .	49
7.2	Topologie faible . . . . .	50
7.3	Topologie préfaible . . . . .	52
7.3.1	Définition et voisinages . . . . .	52
7.3.2	Comparaison de topologies . . . . .	53
7.4	Résultats sur la topologie faible . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Théorie ergodique et propriété de Blum-Hanson</b>	<b>59</b>
8.1	Opérateurs adjoints . . . . .	59
8.1.1	Adjoints dans les espaces de Hilbert . . . . .	59
8.1.2	Adjoints dans les espaces de Banach . . . . .	60
8.2	Théorie ergodique . . . . .	60
8.3	Propriété de Blum-Hanson (1960) . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Séparabilité</b>	<b>61</b>
9.1	Définitions et propriétés . . . . .	61
9.2	Exemples d'espaces séparables . . . . .	62
9.3	Exemples d'espaces non-séparables . . . . .	63
<b>A</b>	<b>Solutions des exercices</b>	<b>65</b>
A.1	Hahn-Banach (Formes analytiques) . . . . .	65
A.2	Hahn-Banach (Formes géométriques) . . . . .	65
A.3	Topologie faible . . . . .	66

# Un petit mot avant de commencer

Ce document a pour but de créer des notes de cours pour le cours d'Analyse Mathématique III dispensé à l'UMONS afin d'altérer la structure dans un format plus clair que les notes prises au cours.

Parmi les références citées, vous pouvez trouver des exercices à réaliser dans les suivantes : [\[1\]](#).

## Remerciements

Merci beaucoup à Damien Galant et Trudel Nguepi pour leur relecture du document.



Première partie

Premier quadrimestre





# Chapitre 1

## Espaces de Banach : exemples

Dans ce chapitre nous présentons plusieurs exemples d'espaces de Banach, notamment les espaces  $\ell^p$  de suites et deux exemples d'espaces de fonctions.

La lettre  $\mathbb{K}$  est utilisée pour représenter le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou celui des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Exemples tirés du cours d'Analyse II

Nous avons vu l'année passée que tous les espaces vectoriels de dimension finie étaient complets.

**Proposition 1.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie. Il s'agit d'un espace de Banach.

*Démonstration.* (Esquisse de preuve)

**Remarque :** un point intéressant de la dimension finie est qu'on peut travailler, si on le souhaite, avec sa norme préférée étant donné qu'elles sont toutes équivalentes.

Etant donné une suite de Cauchy, il est évident (via l'inégalité triangulaire) que chaque composante (en se fixant au préalable une base) est de Cauchy et donc converge dans  $\mathbb{K}$

Ceci fournit un candidat limite et la vérification se fait facilement en prenant par exemple la norme  $\|\cdot\|_1$ .  $\square$

Les espaces de Hilbert sont un autre type d'espace de Banach que nous avons étudié en analyse II. Ils sont complets par définition.

### 1.2 Espaces de suites $\ell^p$

**Définition 1.2.** Soit  $1 \leq p < \infty$  un réel. On appelle  $\ell^p$  (noté aussi  $\ell^p(\mathbb{N})$ ) l'ensemble de suites suivant :

$$\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

On définit l'application  $\|\cdot\|_p : \ell^p \rightarrow [0, +\infty[$  par

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p, \|x\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Il n'est pas clair à première vue que  $\ell^p$  est un espace vectoriel, lorsque  $p > 1$ . Efforçons de montrer des résultats permettant une preuve courte de cela, tout en délivrant des résultats simplifiant la démonstration du fait que l'application  $\|\cdot\|_p$  définit une norme sur  $\ell^p$ . Nous aurons besoin d'une première inégalité célèbre afin de prouver ce résultat.

**Théorème 1.3** (Inégalité de Hölder). Soient  $n \geq 1$  un nombre naturel,  $p, q > 1$  deux réels conjugués, c'est-à-dire vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pour tous  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Démonstration.* Prouvons préalablement que pour tous réels  $a, b > 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (1.1)$$

Il est aisé de vérifier, à l'aide de la dérivation, que la fonction  $\ln : ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  est concave, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x, y > 0, \ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y)$$

Puisque  $p, q > 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) &\geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \\ &= \ln(a) + \ln(b) \\ &= \ln(a \cdot b) \end{aligned}$$

Etant donné que la fonction exponentielle est croissante, on a bien l'inégalité 1.1.

Soient  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ . Supposons les tous les deux non nuls, puisque dans ce cas, l'inégalité du théorème est claire.

On pose, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$A_j = \frac{|x_j|}{\left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } B_j = \frac{|y_j|}{\left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

Ces quotients sont bien définis car  $x$  et  $y$  sont non nuls. Par l'inégalité (1.1), on a que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_j|}{\left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \right) &= \sum_{j=1}^n A_j \cdot B_j \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n A_j^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n B_j^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat. □

Introduisons maintenant une autre inégalité célèbre qui nous permettra de montrer que  $\ell^p$  est un espace vectoriel.

**Théorème 1.4** (Inégalité de Minkowski (dimension finie)). Soient  $n \geq 1$  un nombre naturel,  $p \in [1, +\infty[$  un nombre réel,  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ .

L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

*Démonstration.* Supposons  $x, y$  non nuls, sinon le résultat est clair.

Si  $p = 1$ , il suffit d'itérer l'inégalité triangulaire pour le module afin de prouver l'assertion. Supposons par conséquent que  $p > 1$ .

**Remarque :** Cette preuve est fort calculatoire. Elle n'a pas vraiment d'intérêt au niveau des idées.

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} (|x_k| + |y_k|) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

Soit  $q$  le réel conjugué de  $p$ . En appliquant l'inégalité de Hölder au dernier terme de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &\leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\ &= (\|x + y\|_p^p)^{\frac{1}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \end{aligned}$$

Ceci implique l'inégalité nous permettant de conclure :

$$\|x\|_p + \|y\|_p \geq (\|x + y\|_p^p)^{1-\frac{1}{q}} = \|x + y\|_p$$

□

Le résultat se généralise facilement aux espaces  $\ell^p$ , et nous avons donc en même temps l'argument le plus important de la preuve que  $\ell^p$  est un espace vectoriel, mais également l'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

**Théorème 1.5** (Inégalité de Minkowski (Généralisation à  $\ell^p$ )). Soient  $p \in [1, +\infty[$  un nombre réel,  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ .

On a :  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

*Démonstration.* Etant donné qu'on a le résultat pour toutes les suites de sommes partielles, il suffit de passer à la limite pour conclure. □

**Exercice 1.1.** Rédiger en détail la preuve des affirmations suivantes :

- L'ensemble  $\ell^p$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- L'application  $\|\cdot\|_p$  définit bien une norme sur  $\ell^p$ .

Il est légitime de se demander pourquoi parler de ces espaces dans un chapitre réservé aux espaces de Banach. C'est parce qu'il s'agit d'exemples classiques :

**Proposition 1.6.** Soit  $p > 1$  un nombre réel. L'espace vectoriel normé  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach.

**Exercice 1.2.** Effectuer la preuve de la proposition 1.6

Nous n'effectuerons pas la preuve dans cette section, elle est laissée à titre d'exercice. Nous allons toutefois montrer le cas  $p = 1$ . Les idées mises en oeuvre dans cette preuve sont intéressantes et il est conseillé de les revoir.

**Proposition 1.7.** L'espace vectoriel normé  $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left( (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \right)_n$  une suite de Cauchy dans  $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ . Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la suite  $(x_k^{(n)})_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{K}$  qui est complet. Soit  $x_k \in \mathbb{K}$  la limite de cette suite dans  $\mathbb{K}$ .

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite  $x = (x_k)_k$ . Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de  $\ell^1$  et qu'il s'agit de la limite de la suite  $(x^{(n)})_n$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque la suite  $(x^{(n)})$  est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon$$

En faisant tendre  $q \rightarrow +\infty$ , on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n |x_k^{(p)} - x_k| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que  $x^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} x$

Pour montrer que  $x \in \ell^1$ , il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels  $n, N$  considérés.

$$\sum_{k=0}^N |x_k| \leq \sum_{k=0}^N |x_k - x_k^{(n)}| + \sum_{k=0}^N |x_k^{(n)}| \leq \|x - x^{(n)}\|_1 + \|x^{(n)}\|_1$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de  $n$  car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la série définissant  $\|x\|_1$  est bien convergente.

□

---

1. On note en indice la "composante" dans  $\ell^1$  et en exposant l'indice de la suite

Il reste encore un espace lié aux espaces  $\ell^p$  que nous n'avons pas introduit : l'espace des suites  $\ell^\infty$ .

**Définition 1.8.** L'espace des suites bornées, noté  $\ell^\infty$  correspond à l'ensemble suivant :

$$\ell^\infty = \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

**Remarque 1.9.** Il est utile de remarquer que 1 et  $\infty$  sont conjugués (par exemple pour les espaces duaux, cf. exemples 2.3 et 2.4 de la section 2.2).

**Exercice 1.3.** Montrer que l'application suivante définit bien une norme sur  $\ell^\infty$  :

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \rightarrow [0, +\infty[ : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Tout comme ses confrères, il s'agit d'un espace de Banach. Cela fait l'objet du résultat suivant :

**Proposition 1.10.** L'espace vectoriel  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

La preuve est fortement similaire à celle pour l'espace de suites  $\ell^1$ . Elle sera tout de même explicitée afin de permettre la lecture d'une version adaptée de la preuve ci-dessus.

*Démonstration.* Soit  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left( (x_k^{(n)})_k \right)_n$  une suite de Cauchy dans  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ . Montrons qu'elle est convergente au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

En traduisant l'hypothèse sur la suite, il est aisé de déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la suite  $(x_k^{(n)})_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{K}$  qui est complet. Soit  $x_k \in \mathbb{K}$  la limite de cette suite dans  $\mathbb{K}$ .

Nous avons ainsi obtenu un candidat limite  $x = (x_k)_k$ . Nous devons montrer qu'il s'agit bien d'un élément de  $\ell^\infty$  et qu'il s'agit de la limite de la suite  $(x^{(n)})_n$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque la suite  $(x^{(n)})$  est de Cauchy, il est vrai que :

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon$$

En faisant tendre  $q \rightarrow +\infty$ , on en déduit que :

$$\exists N \geq 0, \forall p \geq N, \forall k \geq 0, |x_k^{(p)} - x_k| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet facilement de conclure que  $x^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} x$

Pour montrer que  $x \in \ell^\infty$ , il suffit d'observer l'inégalité suivante, valable pour tous naturels  $n, k$  considérés.

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)}| \leq \|x - x^{(n)}\|_\infty + \|x^{(n)}\|_\infty$$

Au vu de la convergence que nous venons d'établir, le premier terme du membre de droite converge vers 0. Le second quant à lui est borné par une constante indépendante de  $n$  car il s'agit d'un élément d'une suite de Cauchy. Ceci implique que la suite des  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée et donc que  $x \in \ell^\infty$ .  $\square$

### 1.3 Espaces de fonctions continues

Un autre exemple d'espace de Banach dont nous avons les outils pour montrer la complétude est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Tout ce qui suit dans cette section peut être généralisé aux fonctions définies sur un intervalle fermé borné quelconque.

**Définition 1.11.** On note

$$\mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

l'espace vectoriel de fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On le munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow [0, +\infty[ : f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Le maximum apparaissant dans la norme est bien défini, car les fonctions considérées sont continues sur un compact et atteignent donc leurs bornes.

**Proposition 1.12.** L'espace des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$  est complet au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{C}[0, 1]$ . En retraduisant cette hypothèse en remplaçant le maximum définissant  $\|\cdot\|_\infty$  par un quantificateur universel, on obtient la phrase quantifiée suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in [0, 1], |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \quad (1.2)$$

On remarque que pour tout  $x \in [0, 1]$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{K}$  qui est complet. Il existe donc  $f$  limite ponctuelle de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour conclure, il suffit de montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de  $\|\cdot\|_\infty$  vers  $f$ . Cela garantira la continuité de  $f$ , car  $f$  sera la limite uniforme de la suite.

En faisant  $q \rightarrow \infty$  dans la phrase quantifiée 1.2, on a le résultat. □

### 1.4 Espaces d'applications linéaires

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K}$ . Rappelons certaines propriétés et définitions vues l'année passée.

**Définition 1.13.** On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . Il s'agit d'un espace vectoriel normé, muni de la norme opérateur définie par :

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow [0, +\infty[ : T \mapsto \|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|_F$$

On a également vu plusieurs équivalences pour montrer qu'une application linéaire est continue. Rappelons les.

**Proposition 1.14.** Soit  $T : E \rightarrow F$  linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $T$  est continue.
- $T$  est continue en 0.
- $T$  est bornée sur la boule unité de  $E$ .
- Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|$ <sup>2</sup>.

Remarquez également qu'il existe plusieurs formulations équivalentes pour la norme opérateur :

**Proposition 1.15.** Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E=1}} \|T(x)\|_F \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E < 1}} \|T(x)\|_F\end{aligned}$$

Il est utile, si vous avez des difficultés avec ces objets, d'essayer de les manipuler en résolvant les exercices :

**Exercice 1.4.** Prouver les propositions 1.14 et 1.15.

**Exercice 1.5** (« Sous-multiplicativité de la norme »). Soit  $(G, \|\cdot\|_G)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Soient  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  des applications linéaires continues. Montrer l'inégalité

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$$

L'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  n'est *pas* un espace de Banach en général. Il faut ajouter une hypothèse sur  $F$  pour avoir la complétude de cet espace.

**Proposition 1.16.** Si  $F$  est complet, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Remarque :** il n'y a pas de condition supplémentaire à imposer à l'espace  $E$ . En particulier, le résultat n'exige pas sa complétude.

La réciproque de ce résultat est également vraie, nous l'énoncerons dans un futur chapitre.

*Démonstration.* Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \|T_p - T_q\| \leq \varepsilon$$

Alors, on a l'assertion suivante :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, \forall x \in E, \\ \|T_p(x) - T_q(x)\| \leq \|T_p - T_q\| \cdot \|x\|_E \leq \varepsilon \cdot \|x\|_E\end{aligned}$$

Cela implique que pour tout  $x \in E$ , la suite  $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $F$  qui par hypothèse est complet. Soit  $T(x)$  limite de cette suite dans  $F$ .

Montrons que  $T$  est la limite, au sens de la norme opérateur, de la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

En reprenant la phrase quantifiée ci-dessus, en considérant  $x \in E$  de norme inférieure à 1 et en faisant tendre  $q$  vers l'infini, on est assuré de la convergence.

L'application  $T$  est bien linéaire car elle est limite simple d'applications linéaires. Elle est bornée sur la boule unité car pour tout naturel  $n$  on a l'inégalité :

$$\|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$$

□

---

2. La constante optimale, s'il en existe une, est  $\|T\|$ .

## 1.5 Sous-espaces vectoriels et complétude

Lorsqu'on considère un espace de Banach et un sous-espace vectoriel de ce dernier, on peut se poser la question suivante : « Ce sous-espace est-il complet pour la norme induite ? ». Le résultat suivant permet de donner un critère pour vérifier cela.

**Théorème 1.17.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $(F, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach si et seulement si  $F$  est fermé dans  $E$ .

*Démonstration.* Supposons que  $F$  est complet et montrons qu'il s'agit d'un fermé au sens de  $E$ . Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $F$  et  $x \in E$  tels que  $x_n \rightarrow x$ . Puisque la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, elle est de Cauchy. Par complétude de  $F$ , elle admet une limite  $y \in F$ . Par unicité de la limite,  $x = y \in F$ .

Réciproquement supposons que  $F$  est fermé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $F$ . Alors c'est une suite de Cauchy d'éléments de  $E$ ; elle admet une limite  $x$  dans  $E$ . Puisque  $F$  est fermé, la suite considérée converge bien dans  $F$ .  $\square$

Le résultat est également vrai dans le cadre des espaces métriques (la même preuve fonctionne).

Fournissons une application de ce résultat à un exemple. On introduit un sous-espace d'un des exemples présentés ci-avant.

**Définition 1.18.** L'espace  $c_0$  est l'espace des suites dans  $\mathbb{K}$  convergeant vers 0. On le munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Étant donné que toutes les suites convergentes sont bornées,  $c_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\ell^\infty$ .

**Proposition 1.19.**  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Au vu du résultat ci-avant, il suffit de montrer que  $c_0$  est fermé dans  $\ell^\infty$ .

Soit  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $c_0$  convergeant vers  $x$  un élément de  $\ell^\infty$ . Montrons que  $x \in c_0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que pour tout naturel  $n \geq N$ ,  $\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \varepsilon/2$ . Étant donné que  $x^{(N)}$  est un élément de  $c_0$ , il existe  $k_0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ ,  $|x_k^{(N)}| \leq \varepsilon/2$ . Pour tout  $k \geq k_0$ , on a

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^{(N)}| + |x_k^{(N)}| \leq \|x - x^{(N)}\|_\infty + |x_k^{(N)}| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que  $x$  est élément de  $c_0$ .  $\square$



# Chapitre 2

## Espaces duaux : exemples

### 2.1 Généralités

Soit  $\mathbb{K}$  un corps, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 2.1.** Le dual de  $E$ , noté  $E^*$  correspond à  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  ie. l'ensemble des formes linéaires continues.

Par la proposition 1.16, étant donné que  $\mathbb{K}$  est complet, on a que  $(E^*, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach (la norme considérée est la norme opérateur).

Dans ce chapitre plutôt que de s'attarder sur des propriétés générales des espaces duaux, nous étudierons des exemples et nous identifierons les espaces duaux d'espaces connus à d'autres espaces que nous connaissons.

**Remarque :** les intuitions sur comment trouver à quel espace s'identifie le dual seront omises.

### 2.2 Exemples en dimension finie

En dimension finie, il est connu que le dual algébrique est de même dimension que l'espace vectoriel considéré. De plus, comme toutes les applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues, il suffit de vérifier qu'on a une isométrie entre les espaces considérés pour avoir l'identification.

**Exercice 2.1.** Soient  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  deux espaces métriques,  $i : X \rightarrow Y$  une isométrie, c'est-à-dire «  $i$  préserve les distances », c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in X, d_X(x, y) = d_Y(i(x), i(y))$$

Montrer que  $i$  est injective.

Dans les calculs relatifs à tous les exemples suivants, il n'est jamais montré que l'application considérée est linéaire. Cela est laissé comme exercice.

**Exemple 2.2.** On a  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (x, y) \mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que  $i$  est une isométrie étant donné que l'espace considéré est de dimension finie.

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{x^2+y^2 \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{x^2+y^2 \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{x^2+y^2 \leq 1} (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} (x^2 + y^2)^{1/2} \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \sup_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^{1/2} = \|(x_1, x_2)\|_2 \end{aligned}$$

Réciproquement, il suffit de considérer  $z = \frac{(x_1, x_2)}{\|(x_1, x_2)\|_2}$  ; on a  $i(x_1, x_2)(z) = \|(x_1, x_2)\|_2$  ce qui fournit l'inégalité nous permettant de conclure.

**Exemple 2.3.** On a  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{|x|+|y| \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{|x|+|y| \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{|x|+|y| \leq 1} \max(|x_1|, |x_2|)(|x| + |y|) \\ &\leq \|(x_1, x_2)\|_\infty \sup_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) = \|(x_1, x_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Si  $\max(|x_1|, |x_2|) = |x_1|$ , alors  $i(x_1, x_2)$  atteint  $\|(x_1, x_2)\|_\infty$  en  $(\text{sign}(x_1), 0)$  qui est bien un élément de la boule unité de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ . L'autre cas est analogue. On peut donc conclure que  $i$  est bien une isométrie.

**Exemple 2.4.** On a  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)^* \\ (x_1, x_2) &\mapsto i(x_1, x_2) : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1x + x_2y \end{aligned}$$

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \|i(x_1, x_2)\| &= \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} |x_1x + x_2y| \leq \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} |x_1x| + |x_2y| \\ &\leq \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} (|x_1| + |x_2|) \max(|x|, |y|) \\ &\leq \|(x_1, x_2)\|_1 \sup_{\max(|x|, |y|) \leq 1} \max(|x|, |y|) = \|(x_1, x_2)\|_1 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $i(x_1, x_2)$  atteint  $\|(x_1, x_2)\|_1$  au point  $(\text{sign}(x_1), \text{sign}(x_2))$  de la boule unité de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ , ce qui fournit l'autre inégalité désirée.

**Exercice 2.2.** Soient  $p > 1$ ,  $q > 1$  le conjugué de  $p$ . Montrer qu'on a que  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)^* \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ .

Notez que tous ces exemples peuvent se généraliser en dimension supérieure à 2.

## 2.3 Exemples en dimension infinie

Contrairement aux exemples de la section précédente, il ne suffit plus de vérifier que l'application considérée est une isométrie car la surjectivité n'est plus garantie par l'injectivité. Les exemples requièrent donc plus de travail.

Le premier exemple considéré est celui de l'espace  $c_0$  introduit au chapitre précédent.

**Exemple 2.5.** On a  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \equiv (\ell^1, \|\cdot\|_1)$  via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^1, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto i(x) : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

**L'application  $i$  est une isométrie :**

Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ . La fonction  $i(x)$  est bien définie car pour tout  $y \in c_0$ , on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$$

Cela implique en particulier que  $\|i(x)\| \leq \|x\|_1$ . Montrons l'inégalité réciproque.

Soit, pour tout naturel  $N$ , la suite  $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = \begin{cases} \text{sign}(x_n) & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à la boule unité de  $c_0$  et on a  $|i(x)(y^{(N)})| \rightarrow \|x\|_1$  quand  $N$  tend vers l'infini. Ceci implique que  $\|i(x)\| \geq \|x\|_1$ , ce qu'on voulait.

**L'application  $i$  est surjective :**

Vérifions la surjectivité de  $i$ . Soit  $x^* \in (c_0)^*$ . On pose  $x = (x^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $e_n$  est la suite de terme général  $(\mathbb{1}_{\{n\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ .

Il reste à montrer que  $i(x) = x^*$ , ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que  $x$  est bien élément de  $\ell^1$ .

Pour tout naturel  $N$ , on a :

$$\sum_{k=0}^N |x_k| = x^*(y^{(N)}) \leq \|x^*\|$$

Ce qui implique que la série des termes de  $x$  est absolument convergente, ce qu'on voulait montrer.

**Exemple 2.6.** On a  $(\ell^1, \|\cdot\|_1)^* \equiv (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  via l'isométrie :

$$\begin{aligned} i : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (\ell^1, \|\cdot\|_1)^* \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto i(x) : (\ell^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

**L'application  $i$  est une isométrie :**

Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ . La fonction  $i(x)$  est bien définie car pour tout  $y \in \ell^1$ , on a l'inégalité

$$|i(x)(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$$

Cela implique en particulier que  $\|i(x)\| \leq \|x\|_\infty$ . Montrons l'inégalité réciproque.

Soit, pour tout naturel  $N$ , la suite  $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(N)} = \mathbb{1}_{\{N\}}(n) \text{sign}(x_n)$$

Alors  $(y_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$  est élément de la boule unité de  $\ell^1$  et on a  $|i(x)(y^{(N)})| = |x_N|$  quel que soit le naturel  $N$  considéré. Ceci implique que  $\|i(x)\| \geq \|x\|_\infty$ , ce qu'on voulait.

**L'application  $i$  est surjective :**

Vérifions la surjectivité de  $i$ . Soit  $x^* \in (\ell^1)^*$ . On pose  $x = (x^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $e_n$  est la suite de terme général  $(\mathbb{1}_{\{n\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ .

Il reste à montrer que  $i(x) = x^*$ , ce qui se vérifie par un simple calcul (il suffit d'observer les sommes partielles puis de passer à la limite), et que  $x$  est bien élément de  $\ell^\infty$ .

Pour tout naturel  $N$ , on a :

$$|x_k| = x^*(y^{(N)}) \leq \|x^*\|$$

Ce qui implique que  $x$  est une suite bornée, ce que l'on voulait montrer.

# Chapitre 3

## Théorèmes de Hahn-Banach

Dates (pour votre culture générale) : Hahn (1879-1934), Banach (1892-1945).

Les théorèmes de Hahn-Banach sont des résultats d'analyse fonctionnelle très importants. Ces théorèmes sont vus ici en deux formes : les formes analytiques du théorème assurent qu'une forme linéaire peut être étendue à tout l'espace en préservant certaines contraintes initiales ; les formes géométriques quant à elles sont des résultats assurant qu'on peut séparer par des hyperplans deux convexes vérifiant certaines hypothèses dans des espaces vectoriels normés.

### 3.1 Formes analytiques

#### 3.1.1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

**Théorème 3.1** (Hahn-Banach – Forme analytique (cas réel)). Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire et  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$  ( $p$  est dite positivement homogène)
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  ( $p$  est dite sous-additive)
- $\forall x \in G, f(x) \leq p(x)$

Alors il existe  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  forme linéaire étendant  $f$  et telle que  $\forall x \in E, g(x) \leq p(x)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $G \neq E$ , sinon le résultat est immédiat.

Supposons donc qu'il existe  $x_0 \in E \setminus G$ . Montrons qu'il est possible d'étendre  $f$  à  $V = G \oplus \mathbb{R}x_0$  comme annoncé dans le théorème.

On doit montrer qu'il existe un réel  $g(x_0)$  tel que pour tout  $x = y + tx_0 \in V$ ,  $g(x) \leq p(x)$ , c'est-à-dire :

$$f(y) + tg(x_0) \leq p(y + tx_0)$$

Analysons les différents cas, selon le signe de  $t$  :

**Cas 1**,  $t > 0$  : la condition devient, par positive homogénéité de  $p$  et linéarité de  $f$

$$\forall y \in G, g(x_0) \leq p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Puisque  $G$  est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall z \in G, g(x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

**Cas 2,  $t < 0$  :** la condition devient, par positive homogénéité de  $p$  et linéarité de  $f$

$$\forall y \in G, g(x_0) \geq f\left(\frac{-y}{t}\right) - p\left(\frac{-y}{t} - x_0\right)$$

Puisque  $G$  est un sous-espace vectoriel, on peut réécrire la condition :

$$\forall w \in G, g(x_0) \geq f(w) - p(w - x_0)$$

La question qu'on se posait revient donc à se demander s'il existe un réel satisfaisant les inégalités :

$$\forall w, z \in G, f(w) - p(w - x_0) \leq g(x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

Il suffit de montrer l'assertion :

$$\forall w, z \in G, f(w) - p(w - x_0) \leq p(z + x_0) - f(z)$$

Soient  $z, w \in G$ . On a  $f(w + z) \leq p(w + z)$  par hypothèse sur  $p$ . Or puisque

$$p(w + z) = p(w - x_0 + z + x_0) \leq p(w - x_0) + p(z + x_0)$$

par sous-additivité de  $p$ , et que  $f$  est linéaire, on a l'inégalité.

On peut donc poser, par exemple,  $g(x_0) = \inf_{z \in G} p(z + x_0) - f(z)$ .

Pour finir la preuve, on utilise le lemme de Zorn, en considérant l'ensemble suivant, avec comme ordre l'inclusion (en considérant qu'une fonction  $h_1$  prolonge une fonction  $h_2$  si et seulement si le graphe de  $h_1$  est inclus à celui de  $h_2$ ) :

$$\mathcal{M} = \{(V, h) \mid V \text{ sev. de } E, G \subseteq V, h : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire, } h \text{ prolongement de } f, h \leq p|_V\}$$

□

### 3.1.2 Espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$

**Théorème 3.2** (Hahn-Banach – Forme analytique (cas complexe)). Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ ,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire et  $p : E \rightarrow [0, +\infty[$  une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  ( $p$  est dite sous-additive)
- $\forall x \in G, |f(x)| \leq p(x)$

Alors il existe  $g : E \rightarrow \mathbb{C}$  forme linéaire étendant  $f$  et telle que  $\forall x \in E, |g(x)| \leq p(x)$ .

*Démonstration.* Remarquez que quel que soit l'élément  $x \in G$  considéré, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} if(x) &= -\operatorname{Im}(f)(x) + i\operatorname{Re}(f)(x) \\ f(ix) &= \operatorname{Re}(f)(ix) + i\operatorname{Im}(f)(ix) \end{aligned}$$

Par définition de l'égalité de deux nombres complexes (leurs parties réelles et imaginaires doivent être égales), on en déduit que  $\operatorname{Re}(f)(ix) = -\operatorname{Im}(f)(x)$  et que  $\operatorname{Im}(f)(ix) = \operatorname{Re}(f)(x)$ . On peut donc exprimer  $f$  uniquement à l'aide de  $\operatorname{Re}(f)$  de la manière suivante :

$$f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) - i\operatorname{Re}(f)(ix)$$

L'application  $\operatorname{Re}(f) : G \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire. Par le théorème de Hahn-Banach, cas réel, elle s'étend en une fonction  $\mathbb{R}$ -linéaire  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

On pose  $g$  l'application définie par  $g(x) = h(x) - ih(ix)$  pour tout  $x$  dans  $E$ . Donc  $h$  correspond à la partie réelle de  $g$ . Il est aisé de vérifier qu'elle est  $\mathbb{C}$ -linéaire par calcul.

Il reste à montrer que  $g$  vérifie bien  $|g| \leq p$ . Soit  $x \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= e^{-i \arg(g(x))} g(x) \\ &= g(e^{-i \arg(g(x))} x) && (g \text{ linéaire}) \\ &= \operatorname{Re}(g)(e^{-i \arg(g(x))} x) \\ &= h(e^{-i \arg(g(x))} x) \\ &\leq p(e^{-i \arg(g(x))} x) = p(x) && (\text{Thm. 3.1}) \end{aligned}$$

□

### 3.1.3 Espaces vectoriels normés

**Théorème 3.3** (Théorème de Hahn-Banach – Forme analytique). Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f : G \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire continue.

Alors il existe une fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire continue prolongeant  $f$  telle que  $\|f\| = \|g\|$ .

*Démonstration.* On prend pour fonction  $p : E \rightarrow [0, +\infty[$  la fonction  $x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$ . Elle vérifie toutes les hypothèses des théorèmes 3.1 et 3.2.

On peut donc prolonger  $f$  en une forme linéaire  $g$  telle que  $|g(x)| \leq p(x)$  quel que soit  $x \in E$ . En particulier, cela implique que  $g$  est continue car bornée sur la boule unité par la norme de  $f$ .

Pour conclure il nous reste à montrer l'inégalité réciproque. Or pour tout  $x \in G$  dans la boule unité, on a  $|f(x)| = |g(x)| \leq \|g\|$ , ce qui fournit l'inégalité désirée. □

**Remarque 3.4.** Remarquez que le théorème n'exige *pas* la complétude de l'espace vectoriel normé considéré.

### 3.1.4 Hahn-Banach et dualité

Prouvons plusieurs corollaires des formes analytiques du théorème de Hahn-Banach liés à la dualité. Ils constituent de petits exercices d'application des théorèmes.

On considère un corps  $\mathbb{K}$  qui est soit celui des réels ou des complexes.

**Corollaire 3.5.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ .

Alors il existe  $x^* \in E^*$ , tel que  $x^*(x_0) = 1$  et  $\|x^*\| = \frac{1}{\|x_0\|}$ .

*Démonstration.* Soit  $G = \mathbb{K}x_0$ . On considère l'application linéaire continue  $f : G \rightarrow \mathbb{K} : tx_0 \mapsto t$  (la continuité est assurée car l'application est définie sur un espace de dimension 1).

Calculons la norme de  $f$  :

$$\|f\| = \sup_{\substack{t \in \mathbb{K} \\ \|tx_0\| \leq 1}} |f(tx_0)| = \sup_{\substack{t \in \mathbb{K} \\ |t| \leq \frac{1}{\|x_0\|}}} |t| = \frac{1}{\|x_0\|}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème 3.3. □

**Corollaire 3.6.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ .

Alors il existe  $x^* \in E^*$ , tel que  $x^*(x_0) = \|x_0\|$  et  $\|x^*\| = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $y^*$  fournie par le corollaire 3.5. Il suffit de prendre  $x^* = \|x_0\|y^*$ .  $\square$

**Remarque 3.7.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $x \in E$ .

Quelle que soit la forme considérée  $x^* \in E^*$ , on a toujours que  $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$ .

Par le corollaire 3.6, on obtient l'égalité

$$\|x\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(x)|$$

**Corollaire 3.8.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  qui n'est pas dense dans  $E$  et  $x_0 \in (E \setminus \text{adh}(F))$ .

Il existe  $x^* \in E^*$  tel que  $F \subseteq \text{Ker}(x^*)$ ,  $x^*(x_0) = 1$  et  $\|x^*\| = \frac{1}{d}$  où  $d = d(x_0, F)$ .

*Démonstration.* Soit  $f : F \oplus \mathbb{K}x_0 \rightarrow \mathbb{K} : y + tx_0 \mapsto t$ . Cette application est linéaire et on a  $F \subseteq \text{Ker}(f)$  et  $f(x_0) = 1$ .

Rappelons que  $d \neq 0$  car  $x_0 \notin \text{adh}(F)$ .

Montrons que  $f$  est continue. Soit  $y + tx_0 \in F \oplus \mathbb{K}x_0$  tel que  $\|y + tx_0\| \leq 1$ . On a, pour  $t \neq 0$  :

$$\|y + tx_0\| = |t| \cdot \left\| x_0 - \left(-\frac{y}{t}\right) \right\| \geq d \cdot |t|$$

D'où  $|f(y + tx_0)| = |t| \leq \frac{1}{d}$ . Ceci montre que  $f$  est continue.

En utilisant le théorème 3.3, on peut étendre  $f$  en une forme linéaire continue  $x^*$  sur  $E$  de même norme. Pour achever la preuve de l'assertion, il faut montrer l'inégalité  $\|f\| \geq \frac{1}{d}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $y \in F$  tel que  $|d - \|y - x_0\|| < \varepsilon$  (définition d'infimum). Cela implique  $\|y - x_0\| \leq d + \varepsilon$ . On a également l'inégalité

$$\|f\| \geq \left| f\left(\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) \right| = \frac{1}{\|y - x_0\|} \geq \frac{1}{d + \varepsilon}$$

On conclut en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.  $\square$

Pour conclure cette section, les deux exercices suivants sont laissés :

**Exercice 3.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer les équivalences suivantes :

1.  $(x_0 \in \text{adh}(F))$  si et seulement si  $(\forall x^* \in E^*, F \subseteq \text{Ker}(x^*) \implies x^*(x_0) = 0)$
2.  $(\text{adh}(F) = E)$  si et seulement si  $(\forall x^* \in E^*, F \subseteq \text{Ker}(x^*) \implies x^* = 0)$

Il existe une notation pour l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur un sous-espace vectoriel donné. Il est donc possible de réécrire la question ci-dessus de manière plus concise à l'aide de cette notation.

**Définition 3.9.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On appelle annulateur de  $F$  le sous-espace vectoriel suivant de  $E^*$  :

$$F^\perp = \{x^* \in E^* \mid F \subseteq \text{Ker}(x^*)\}$$



### 3.1.5 Bidualité

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Il est possible de considérer les formes linéaires définies sur le dual de  $E$ , étant donné qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé. On appelle cet espace le bidual de  $E$ , et on le note  $E^{**}$ .

**Définition 3.10** (Injection canonique). On appelle injection canonique l'application

$$\begin{aligned} i : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto i(x) \end{aligned}$$

où pour tout  $x \in E$ ,  $i(x)$  est l'application définie par

$$\begin{aligned} i(x) : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x^* &\mapsto i(x)(x^*) = x^*(x) \end{aligned}$$

Il est simple de vérifier que l'injection canonique est bien définie (c'est-à-dire qu'elle est bien à image dans  $E^{**}$ ). De plus, l'injection canonique a les propriétés suivantes :

**Proposition 3.11.** L'injection canonique est linéaire, continue et préserve la norme.

*Démonstration.* La linéarité est claire, car le dual est un espace d'applications linéaires, ce qui fournit le résultat.

Quant à la préservation des normes, il suffit de constater les égalités suivantes (par le corollaire 3.6) :

$$\|i(x)\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(x)| = \|x\|$$

Par cet argument, on a  $\|i\| = 1$ , ce qui implique que  $i$  est continue. □

Les espaces qui s'identifient à leur bidual via l'injection canonique sont dits réflexifs. Il existe des espaces qui sont isomorphes à leur bidual, mais pas via l'injection canonique ; ces espaces sont appelés espaces de James.

**Proposition 3.12.** Si  $E$  est réflexif, toute forme  $x^* \in E^*$  atteint sa norme.

*Démonstration.* Soit  $x^* \in E^*$ . Il existe  $x^{**} \in E^{**}$  de norme 1 telle que  $x^{**}(x^*) = \|x^*\|$ , par le corollaire 3.6. Par surjectivité de l'injection canonique, il existe  $x \in E$  tel que  $i(x) = x^{**}$ . Il s'ensuit que  $x^*$  atteint sa norme en  $x$ . □

**Remarque :** la réciproque est également vraie, mais nous n'allons pas nous en préoccuper.

Dans le cas où l'espace n'est pas réflexif, il existe donc des formes linéaires continues n'atteignant pas leur norme. Donnons-en un :

**Exemple 3.13.** On considère  $E = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ . Alors son dual  $E^*$  s'identifie à  $\ell^1$ . Soit la suite  $x = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  qui est bien élément de  $\ell^1$ . Alors l'application suivante est bien élément de  $(c_0)^*$  :

$$x^* : c_0 \rightarrow \mathbb{K} : (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

Montrons que  $x^*$  n'atteint pas sa norme. Soit  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de la boule unité de  $c_0$ . Par définition, il existe  $N$  un naturel tel que pour tout  $n > N$ ,  $|y_n| \leq \frac{1}{2}$ . On a :

$$|x^*(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} = \sum_{n=0}^N \frac{|y_n|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{2^{N+1}} < 2$$

Montrons que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs. Pour ce faire, rappelons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet :

**Théorème 3.14** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $x^*$  élément du dual de  $H$ . Il existe un unique élément  $x \in H$  tel que pour tout  $y \in H$ ,  $x^*(y) = \langle y, x \rangle$ .

**Remarque** : Soit  $H$  un espace de Hilbert. L'application  $H \rightarrow H^* : y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$  est bijective (par le théorème de Riesz-Fréchet), une isométrie et *antilinéaire* (exercice).

Nous sommes maintenant armés pour montrer que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs.

**Théorème 3.15.** Tout espace de Hilbert  $H$  est réflexif.

*Démonstration.* Munissons le bidual d'une structure d'espace de Hilbert. Pour ce faire, faisons d'abord de même pour le dual.

Etant donné deux formes linéaires continues  $u^*, v^*$  sur  $H$ , il existe  $u, v$  deux éléments de  $H$  leur correspondant (via le théorème de représentation de Riesz-Fréchet). On pose alors :

$$\langle u^*, v^* \rangle = \langle v, u \rangle$$

Il s'agit bien d'un produit scalaire ; les détails sont laissés à titre d'exercice (l'échange est important pour assurer la linéarité par rapport à la première composante). Ce produit scalaire engendre la même norme que la norme opérateur (puisque les représentants sont de même norme que les formes considérées). La complétude de  $H^*$  est assurée par la proposition 1.16.

De la même manière, on munit le bidual de  $H$  d'un produit scalaire, pour tous  $u^{**}, v^{**}$  du bidual, soient  $u^*, v^*$  leur représentants du dual, on pose :

$$\langle u^{**}, v^{**} \rangle = \langle v^*, u^* \rangle$$

Soit  $y^{**} \in H^{**}$ . Montrons qu'il existe un élément  $y$  de  $H$  tel que  $y^{**}$  est l'image de  $y$  par l'injection canonique.

On considère  $y$  le représentant de la forme linéaire continue  $y^*$ , elle-même représentante de  $y^{**}$ . Soient  $x^*$  une forme linéaire continue et  $x$  son représentant dans  $H$ . Alors :

$$i(y)(x^*) = x^*(y) = \langle y, x \rangle$$

et

$$y^{**}(x^*) = \langle x^*, y^* \rangle = \langle y, x \rangle$$

Les deux correspondent ce qui conclut la preuve. □

Vous pouvez consulter une autre preuve dans le document [2, p. 49].

## 3.2 Formes géométriques

### 3.2.1 Hyperplans

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  (le corps des réels ou des complexes).

**Définition 3.16.** Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est dit hyperplan vectoriel s'il existe  $e \in E$  non nul tel que  $E = H \oplus \mathbb{K}e$ .

Il existe une formulation équivalente en termes de formes linéaires :

**Proposition 3.17.** Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Il s'agit d'un hyperplan vectoriel si et seulement si il existe une forme linéaire  $f$  non identiquement nulle dont  $H$  est le noyau.

*Démonstration.* Supposons que  $H$  est un hyperplan vectoriel. Alors tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x + te$  avec  $t \in \mathbb{K}$  et  $x \in H$ . Il suffit de poser  $f(x + te) = t$  pour avoir l'affirmation.

Réciproquement supposons que  $H$  est le noyau d'une application linéaire  $f$  non nulle. Soit  $e \in E$  un vecteur n'appartenant pas au noyau de  $f$ . Montrons que pour tout  $x$  dans  $E$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x - \lambda e \in H$  ; ceci impliquera  $E = H + \mathbb{K}e$ . Il suffit de prendre  $\lambda = \frac{f(x)}{f(e)}$ . On a bien  $x - \lambda e \in H$ .

Il faut maintenant montrer l'unicité de cette écriture. Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in H$  tels que  $x = u + ae = v + be$ . En appliquant  $f$ , on obtient  $af(e) = bf(e)$ , d'où  $a = b$  et  $u = v$ .  $\square$

En plus des hyperplans vectoriels, on définit également les hyperplans dits affines. Il s'agit de translatés d'hyperplans vectoriels.

**Définition 3.18.** Un sous-ensemble  $H$  de  $E$  est dit hyperplan affine s'il existe  $f$  une forme linéaire sur  $E$ , un scalaire  $\alpha$  tels que  $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ .

Supposons désormais que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé. On a le résultat suivant, qui lie continuité d'une forme linéaire et si le noyau est fermé ou non.

**Proposition 3.19.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire non identiquement nulle.

Son noyau est fermé si et seulement si  $f$  est continue.

**Remarque :** l'application nulle est continue et son noyau est fermé. Le cas est écarté de la proposition car il est trivial.

*Démonstration.* Si l'application est supposée continue, alors son noyau est fermé car il s'agit de l'image réciproque par  $f$  du singleton  $\{0\}$  qui est fermé.

Réciproquement, supposons son noyau fermé. Étant donné que  $f$  est non nulle, il existe  $x_0$  dans le complémentaire du noyau, qui est ouvert (par hypothèse). On peut supposer  $f(x_0) = 1$  (en normalisant le vecteur).

Soit  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subseteq E \setminus \text{Ker}(f)$ . On a donc  $\forall z \in B(0, 1)$ ,  $f(x_0 + rz) \neq 0$ . Par linéarité de  $f$ , on obtient  $\forall z \in B(0, 1)$ ,  $f(z) \neq r^{-1}$ .

Pour conclure, il suffit de montrer que  $|f(z)| < r^{-1}$  pour tout élément  $z$  de la boule unité de  $E$ , une application linéaire étant continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité. Montrons que le cas complémentaire est impossible par l'absurde.

S'il existe un élément  $z$  de la boule unité de  $E$  tel que  $|f(z)| \geq r^{-1}$ , alors il existe  $y$  dans la boule unité tel que son image par  $f$  est réelle positive et  $f(y) \geq r^{-1}$  (prendre

$y = e^{-i \arg(f(z))} z$ ). En multipliant  $y$  par une constante appropriée, on obtient un élément de la boule unité d'image  $r^{-1}$  ce qui constitue une contradiction.

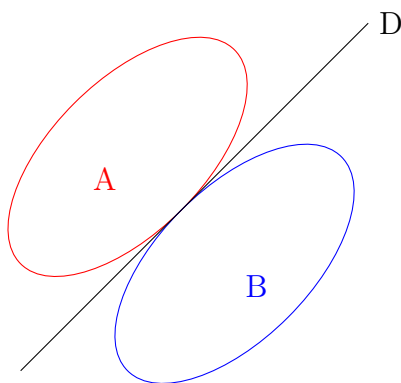
□

### 3.2.2 Introduction aux formes géométriques du théorème de Hahn-Banach

Tout au long de cette section on considère un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Le but de cette section est d'introduire les bases nécessaires pour prouver les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach. Le théorème affirme qu'étant donnés deux convexes de  $E$  vérifiant certaines hypothèses, il est possible de les séparer ces derniers par un hyperplan, comme illustré à la figure 3.1. Plus formellement :

FIGURE 3.1 – Séparation de deux convexes par un hyperplan dans  $\mathbb{R}^2$



**Définition 3.20.** Soient  $A, B$  deux sous-ensembles disjoints de  $E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue,  $\alpha$  un réel et  $H = f^{-1}(\{\alpha\})$  un hyperplan affine.

$H$  sépare  $A$  et  $B$  au sens large si  $\forall x \in A, f(x) \leq \alpha$  et  $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha$ .

$H$  sépare  $A$  et  $B$  au sens strict s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall x \in A, f(x) \leq \alpha - \varepsilon$  et  $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ .

Pour parvenir à nos fins, on introduit une fonction appelée jauge d'un convexe  $C$  :

**Définition 3.21.** Soit  $C \subseteq E$  un convexe contenant 0 et ouvert. Pour tout  $x$  dans  $E$ , on définit la jauge de  $C$  en  $x$  comme suit :

$$j_C(x) = \inf \{ \alpha > 0 \mid x \in \alpha C \} = \inf \{ \alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in C \}$$

Pour se familiariser avec cette fonction, vous êtes invité à effectuer les exercices suivants :

**Exercice 3.2.** On considère le convexe  $C = ]\frac{-1}{2}, 2[$  de  $\mathbb{R}$ . Effectuez les calculs suivants :

$$\begin{aligned} j_C\left(\frac{1}{2}\right) &= \boxed{\phantom{000}} & j_C(-1) &= \boxed{\phantom{000}} \\ j_C\left(\frac{-1}{2}\right) &= \boxed{\phantom{000}} & j_C(2) &= \boxed{\phantom{000}} \end{aligned}$$

**Exercice 3.3.** Soit  $C$  un ouvert convexe de  $E$  contenant 0. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Montrer que quel que soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{j_C(x) + \varepsilon}x \in C$$

Pour prouver les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach, nous allons utiliser le résultat suivant.

**Proposition 3.22.** Soient  $C$  un ouvert convexe non vide de  $E$  et  $x_0 \in E \setminus C$ . Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $\{x_0\}$  et  $C$  au sens large, c'est-à-dire :

$$\exists x^* \in E^*, \forall x \in C, x^*(x) < x^*(x_0)$$

Prouvons plusieurs propriétés de la jauge d'un convexe qui serviront dans la preuve de la proposition 3.22.

**Lemme 3.23.** Soit  $C$  un ouvert convexe de  $E$  contenant 0. Alors :

1.  $\exists M > 0, \forall x \in E, 0 \leq j_C(x) \leq M\|x\|$ .
2.  $C = \{x \in E \mid j_C(x) < 1\}$ .
3. La jauge d'un convexe est positivement homogène.
4. L'application  $j_C$  est sous-additive.

*Démonstration.* Montrons chaque point un à un.

1. Soit  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \subseteq C$ . Posons  $M = 2r^{-1}$ . Soit  $x \in E$  non nul. On vérifie facilement que  $r \frac{x}{2\|x\|} \in B(0, r) \subseteq C$ , d'où  $x \in 2r^{-1}\|x\| \cdot C$ , ce qui donne le résultat.
2. Soit  $x \in C$ . Soit  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subseteq C$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $(1 + \varepsilon)x \in B(x, r)$ . D'où  $x \in \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot C$  ce qui montre la première inclusion.  
Réciproquement, soit  $x \in E$  tel que  $j_C(x) < 1$ . Il existe donc  $1 > \varepsilon > 0$  tel que  $x \in \varepsilon \cdot C$ . Par convexité de  $C$ , le segment joignant 0 à  $\frac{1}{\varepsilon}x$  est inclus à  $C$ ; puisque ce dernier contient  $x$ , on a l'inclusion désirée.
3. Soient  $x$  un élément de  $E$  et  $\alpha$  un réel strictement positif. Pour tout  $\beta > 0$ ,  $\alpha x \in \beta \cdot C$ , si et seulement si  $x \in \alpha^{-1}\beta C$ . D'où  $j_C(\alpha x) = \alpha j_C(x)$  en passant à l'infimum sur  $\beta$ .
4. Soient  $x, y$  deux éléments de  $E$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On a  $\frac{1}{j_C(x) + \varepsilon}x \in C$  et  $\frac{1}{j_C(y) + \varepsilon}y \in C$  (cf. exercice résolu 3.3). Par convexité de  $C$ , on a pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$t \frac{1}{j_C(x) + \varepsilon}x + (1 - t) \frac{1}{j_C(y) + \varepsilon}y \in C$$

En prenant  $t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$ , on obtient

$$\frac{x + y}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon} \in C$$

Par le point 2 et la positive homogénéité de la jauge d'un convexe, on obtient  $j(x + y) < j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon$ . On conclut en prenant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

□

Nous pouvons donc procéder à la preuve de la proposition 3.22 en utilisant ces propriétés.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer  $0 \in C$  ; si ce n'est pas le cas, on considère  $y_0 \in C$  et « on translate », c'est-à-dire on prouve la propriété pour le convexe  $C' = C - y_0$  et le point  $x'_0 = x_0 - y_0$  et on utilise la linéarité de la forme obtenue pour avoir le résultat.

On pose  $G = \mathbb{R}x_0$  et on considère la forme linéaire définie sur  $G$  par  $\forall t \in \mathbb{R}, f(tx_0) = t$ . Alors pour tout  $t$  réel, on a  $f(tx_0) \leq j_C(tx_0)$  ; si  $t$  est négatif, c'est clair, et si  $t$  est positif, cela revient à montrer (puisque  $j_C$  est positivement homogène) que  $1 \leq j_C(x_0)$ , ce qui est vrai car  $x_0 \notin C$ .

Par la forme analytique du théorème de Hahn-Banach (théorème 3.1),  $f$  se prolonge en une forme linéaire  $g$  sur  $E$  vérifiant  $\forall x \in E, g(x) \leq j_C(x)$ . De plus, comme il existe une constante  $M > 0$  telle que tout élément  $x$  de  $E$  vérifie  $j_C(x) \leq M\|x\|$ , la continuité de  $g$  est assurée sur  $E$ .

On considère l'hyperplan  $H = g^{-1}(\{1\})$ . Montrons qu'il sépare bien  $C$  et le singleton  $x_0$ . C'est immédiat car  $g(x_0) = 1$  et tout élément  $y$  de  $C$  est tel que  $g(y) \leq j_C(y) < 1$ .  $\square$

Le corollaire suivant est laissé au lecteur à titre d'exercice. Vous êtes invités à le montrer de plusieurs manières ; en utilisant la proposition précédente ou un des corollaires des formes analytiques.

**Exercice 3.4.** Montrer que  $E^*$  sépare les points de  $E$ , c'est-à-dire si  $x, y$  sont des éléments de  $E$ , il existe  $x^*$  une forme linéaire continue sur  $E$  telle que  $x^*(x) \neq x^*(y)$

En particulier deux éléments de  $E$  sont égaux si et seulement si leur image par toute forme linéaire continue coïncide.

### 3.2.3 Théorème de Hahn-Banach : Formes géométriques

Tout au long de cette section, on considère un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.24** (Théorème de Hahn-Banach – Première forme géométrique). Soient  $A$  un ouvert convexe non vide de  $E$ ,  $B$  un convexe non vide de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$  au sens large.

*Démonstration.* Soit  $C = A - B$ . Il s'agit d'un convexe ouvert de  $E$ . La convexité se vérifie par calcul et pour montrer que  $C$  est ouvert, il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une union d'ouverts :

$$C = \bigcup_{b \in B} A - b = \bigcup_{b \in B} \{a - b \mid a \in A\}$$

Étant donné que  $A$  et  $B$  sont disjoints,  $0 \notin C$ . Par la proposition 3.22, il existe une forme linéaire continue  $x^*$  telle que tout élément  $x$  de  $C$  a une image strictement négative. Il s'ensuit que pour tout élément  $a$  de  $A$ , pour tout élément  $b$  de  $B$ ,  $x^*(a - b) < 0$ .

Puisque  $B$  est non vide,  $\alpha = \sup_{a \in A} x^*(a)$  est fini. L'hyperplan  $(x^*)^{-1}(\alpha)$  sépare  $A$  et  $B$  au sens large, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Il existe une seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

**Théorème 3.25** (Théorème de Hahn-Banach – Deuxième forme géométrique). Soient  $A$  un compact convexe non vide de  $E$ ,  $B$  un fermé convexe non vide de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$  au sens strict.

Introduisons un lemme utile dans la preuve du théorème

**Lemme 3.26.** Soit  $(F, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $A, B$  deux convexes non vides disjoints de  $F$ ,  $A$  compact et  $B$  fermé.

Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$  et  $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$  sont disjoints.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que cela soit faux. Pour tout naturel  $n$  non nul, il existe  $x_n \in A_{1/n} \cap B_{1/n}$ . Alors  $x_n$  s'écrit comme  $a_n + z_n$  pour certains  $a_n \in A$ ,  $z_n \in B(0, 1/n)$  et comme  $b_n + w_n$  pour certains  $b_n \in B$ ,  $w_n \in B(0, 1/n)$ .

Par compacité séquentielle de  $A$ , il existe une sous-suite de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , notons-la  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , un élément  $a$  dans  $A$  tel que  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ . Puisque les suites  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0, on déduit que la sous-suite  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ , ce qui implique  $a$  dans  $B$  (car  $B$  est fermé), ce qui contredit  $A$  et  $B$  disjoints.  $\square$

Prouvons la seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach à l'aide du lemme ci-dessus.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $A_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$  (au sens du lemme 3.26) sont disjoints. Puisque ce sont des ensembles ouverts, convexes, non vides et disjoints, il existe  $x^*$  forme linéaire continue,  $\alpha$  un nombre réel tel que pour tout  $a \in A_\varepsilon$ ,  $x^*(a) \leq \alpha$  pour tout  $b \in B_\varepsilon$ ,  $x^*(b) \geq \alpha$ . (par la première forme géométrique).

On a pour tout  $a$  dans  $A$ ,  $x^*(a) \leq \alpha - \varepsilon \|x^*\|$  et de manière analogue, pour tout  $b$  dans  $B$ ,  $x^*(b) \geq \alpha + \varepsilon \|x^*\|$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 3.2.4 Généralisation aux espaces vectoriels complexes

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{C}$ . Il est possible de généraliser les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach aux espaces vectoriels sur le corps des complexes.

Voici une première généralisation de la première forme géométrique.

**Théorème 3.27** (Hahn-Banach – Première forme géométrique, cas complexe). Soient  $A$  un ouvert convexe non vide de  $E$ ,  $B$  un convexe non vide de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints. Il existe  $x^*$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  et  $\alpha$  un nombre réel tels que :

$$A \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \leq \alpha\} \text{ et } B \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \geq \alpha\}$$

*Démonstration.* Par la première forme géométrique (dans le cas réel), il existe une forme continue  $f$   $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $E$  telle que

$$A \subseteq \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\} \text{ et } B \subseteq \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$$

On conclut en posant  $x^*(x) = f(x) - if(ix)$  pour tous  $x$  dans  $E$ . La linéarité est à vérifier à titre d'exercice et elle est bien continue car :

$$|x^*(x)| \leq |f(x)| + |f(ix)| \leq \|f\| \|x\| + \|f\| \|ix\| = 2\|f\| \|x\|$$

$\square$

Il est possible d'avoir un résultat similaire en considérant des modules plutôt que les parties réelles de la forme linéaire, au coût d'une hypothèse supplémentaire sur un des ensembles. Introduisons d'abord une définition.

**Définition 3.28.** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .  $A$  est dit équilibré (ou  $\mathbb{C}$ -symétrique) si quel que soit l'élément  $v$  de  $A$  et le complexe  $\lambda$  de module 1 considérés, le vecteur  $\lambda v$  est un élément de  $A$ .

Le résultat est le suivant :

**Corollaire 3.29.** Soient  $A$  un ouvert convexe non vide équilibré de  $E$ ,  $B$  un convexe non vide de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints. Il existe  $x^*$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  et  $\alpha$  un nombre réel tels que :

$$A \subseteq \{x \in E \mid |x^*(x)| \leq \alpha\} \text{ et } B \subseteq \{x \in E \mid |x^*(x)| \geq \alpha\}$$

*Démonstration.* Par le théorème 3.27, il existe  $x^*$  linéaire continue telle que

$$A \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \leq \alpha\} \text{ et } B \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \geq \alpha\}$$

Alors pour tous  $b$  dans  $B$ , on a :  $|x^*(b)| \geq \operatorname{Re}(x^*)(b) \geq \alpha$ . Soit  $a \in A$ . On a (par linéarité de  $x^*$  et par  $\mathbb{C}$ -symétrie de  $A$ ) :

$$|x^*(a)| = x^*(e^{-i \arg(x^*(a))} a) = \operatorname{Re}(x^*)(e^{-i \arg(x^*(a))} a) \leq \alpha$$

□

Adaptons la seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

**Théorème 3.30** (Hahn-Banach – Deuxième forme géométrique, cas complexe). Soient  $A$  un compact convexe non vide de  $E$ ,  $B$  un fermé convexe non vide de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints. Il existe  $x^*$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ ,  $\alpha$  un nombre réel et  $\varepsilon > 0$  tels que :

$$A \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \leq \alpha - \varepsilon\} \text{ et } B \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \geq \alpha + \varepsilon\}$$

*Démonstration.* Par le lemme 3.26, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $A_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$  (en reprenant les notations du lemme) sont disjoints.

Alors par le théorème 3.27, il existe une forme linéaire continue  $x^*$ , un réel  $\alpha$  tel que :

$$A_\varepsilon \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \leq \alpha\} \text{ et } B_\varepsilon \subseteq \{x \in E \mid \operatorname{Re}(x^*)(x) \geq \alpha\}$$

Alors pour tout  $a$  dans  $A$ , pour tout  $z$  dans  $B(0, \varepsilon)$ ,  $\operatorname{Re}(x^*)(a + z) \leq \alpha$ .

Soit  $a \in A$ . Par linéarité de  $x^*$ , la dernière affirmation implique que pour tout  $z$  dans la boule unité,  $\operatorname{Re}(x^*)(a) + \varepsilon \operatorname{Re}(x^*)(z) \leq \alpha$ . Puisque l'affirmation est vraie pour tous  $z$  dans la boule unité, on peut passer au supréum sur les  $z$  et on obtient l'inégalité  $\operatorname{Re}(x^*)(a) + \varepsilon \|x^*\| \leq \alpha$ . Avec un calcul similaire, on peut conclure pour  $B$ . □

**Remarque :** il est possible d'écrire une version du résultat utilisant des modules plutôt que des parties réelles dans les inégalités à la manière du corollaire 3.29. Vous êtes invités à écrire le résultat et à le montrer à titre d'exercice.



### 3.2.5 Applications

Nous considérons à nouveau dans cette section un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  sur le corps des nombres réels. Nous allons présenter plusieurs corollaires des théorèmes de Hahn-Banach.

Commencer par présenter une preuve alternative du corollaire 3.8, qui utilise la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

**Corollaire 3.31.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F$  n'est pas dense dans  $E$ . Alors il existe une forme linéaire non nulle continue s'annulant sur  $F$ .

*Démonstration.* Un sous-espace vectoriel est un convexe. Soit  $x_0 \in E \setminus \text{adh}(F)$ . Alors  $\{x_0\}$  est un compact convexe de  $E$  et  $\text{adh}(F)$  est un sous-espace vectoriel (donc convexe) fermé ne contenant pas  $x_0$ . Par la deuxième forme géométrique de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire  $x^*$ , un réel  $\alpha$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $x^*(x_0) \geq \alpha + \varepsilon$  et pour tout  $y \in F$ ,  $x^*(y) \leq \alpha - \varepsilon$ . En particulier,  $x^*$  est majorée sur  $F$  par une constante ; il est facile de vérifier que  $x^*$  s'annule sur  $F$ . On en déduit  $\alpha \geq 0$  ce qui nous permet de conclure que  $x^*(x_0)$  est non nul.  $\square$

**Remarque :** ce résultat a déjà été énoncé (cf. corollaire 3.8). Il est répété ici pour donner une preuve différente qui utilise les formes géométriques de Hahn-Banach.

De manière similaire à l'annulateur d'un sous-espace vectoriel, on peut définir un sous-espace vectoriel similaire du dual.

**Définition 3.32.** Soit  $N$  un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . On définit  $N_\perp$  comme le sous-ensemble de  $E$  défini par :

$$N_\perp = \{x \in E \mid \forall x^* \in N, x^*(x) = 0\}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  : cela se peut montrer en écrivant l'ensemble comme l'intersection des noyaux des éléments de  $N$  qui sont fermés.

**Proposition 3.33.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer l'égalité  $(F^\perp)_\perp = \text{adh}(F)$ .

*Démonstration.* On a clairement l'inclusion  $F \subseteq (F^\perp)_\perp$ , ce qui fournit  $\text{adh}(F) \subseteq (F^\perp)_\perp$ .

L'inclusion réciproque est fournie par le résultat de l'exercice 3.1 (la solution de l'exercice est donnée en annexe).  $\square$

Maintenant nous avons tous les outils nécessaires pour démontrer la réciproque de la proposition 1.16.

**Théorème 3.34.** Soient  $(F, \|\cdot\|_F)$ ,  $(G, \|\cdot\|_G)$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

$\mathcal{L}(F, G)$  est un espace de Banach si et seulement si  $G$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Il reste à prouver une implication. Supposons  $\mathcal{L}(F, G)$  complet. Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $G$ .

Fixons un élément  $x_0$  de la sphère unité de  $F$ , c'est-à-dire  $\|x_0\|_F = 1$ . Par le corollaire 3.6, il existe donc un élément  $x^*$  du dual de  $F$  de norme 1 et tel que  $x^*(x_0) = 1$ .

Pour tout naturel  $n$ , on définit l'application  $f_n : F \rightarrow G$  par  $f_n(x) = x^*(x)y_n$  quel que soit  $x$  dans  $F$  ; il s'agit bien d'une application linéaire et continue. Montrons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Soient  $n, m$  deux naturels, on a :

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|_F=1}} \|x^*(x)y_n - x^*(x)y_m\|_G = \|y_n - y_m\|_G \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|_F=1}} |x^*(x)| = \|y_n - y_m\|_G$$

Puisque la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il est immédiat par l'égalité précédente que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est également. Elle converge donc vers une application linéaire et continue  $f$ .

La convergence au sens de la norme opérateur impliquant la convergence ponctuelle, on a donc  $y_n = f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$ , donc la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. □

**Proposition 3.35.** Soient  $\varphi, \psi$  deux formes linéaires sur  $E$  non nulles telles que  $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ . Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  non nul tel que  $\psi = \lambda\varphi$

*Démonstration.* Soit l'application  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (\varphi(x), \psi(x))$ . Alors le vecteur  $(1, 0)$  n'est pas dans l'image de  $F$ . Il existe, par la seconde forme géométrique de Hahn-Banach, une forme linéaire et continue séparant l'image de  $F$  (convexe fermé) et  $\{(1, 0)\}$  (convexe compact) au sens strict, c'est-à-dire il existe  $x^* \in (\mathbb{R}^2)^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $x^*((1, 0)) \geq \alpha + \varepsilon$  et tout vecteur  $u$  de  $E$  vérifie  $x^*(F(u)) = x^*(\varphi(u), \psi(u)) \leq \alpha - \varepsilon$ . Notons  $x^*((x, y)) = x_1x + x_2y$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Puisque  $x^* \circ F$  est linéaire et que son image est majorée par une constante, on en déduit qu'elle est nulle, c'est-à-dire  $x_1\varphi(u) + x_2\psi(u) = 0$ , quel que soit  $u$  dans  $E$ . Cela implique également que  $x_1 > 0$  (puisque  $x_1 \geq \alpha + \varepsilon > x^*(F(0_E)) = 0$ ). On en déduit également  $x_2 \neq 0$  car en considérant  $u \in E \setminus \text{Ker}(\psi)$ , on a  $x_2\psi(u) = -x_1\varphi(u) \neq 0$ . On conclut en posant  $\lambda = -x_1/x_2$ . □

**Remarque :** dans la proposition précédente, la norme sur  $E$  n'intervient pas. De plus, nous ne précisons pas de norme sur  $\mathbb{R}^2$  étant donné qu'elles sont toutes équivalentes (donc la continuité ne dépend pas de la norme considérée), d'autant plus que la continuité de  $x^*$  n'intervient pas dans l'argument.

**Proposition 3.36.** Tout hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$  est soit fermé, soit dense.

*Démonstration.* Soit  $f$  la forme linéaire (non nulle) sur  $E$  telle que  $H = \text{Ker}(f)$ . Si  $H$  est dense on a le résultat (en particulier  $f$  n'est pas continue car son noyau n'est pas fermé).

Supposons maintenant que  $H$  n'est pas dense dans  $E$  et montrons que  $H$  est fermé. Il existe par le corollaire 3.8 une forme linéaire et continue  $x^*$  non nulle s'annulant sur l'adhérence de  $H$ . Par la proposition 3.35, puisque  $H \subseteq \text{Ker}(x^*)$ ,  $x^*$  et  $f$  sont multiples, donc  $f$  est continue. On en conclut que  $H$  est fermé. □

**Proposition 3.37.** Soient  $x^*, y^* \in E^*$  telles que  $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$  et  $\varepsilon > 0$ . Supposons que  $|x^*(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x$  dans l'intersection du noyau de  $y^*$  et de la boule unité de  $E$ .

Alors on a  $\|x^* + y^*\| < 2\varepsilon$  ou  $\|x^* - y^*\| < 2\varepsilon$

*Démonstration.* **Étape 1 :** montrons tout d'abord qu'il existe  $z^* \in E^*$  et un réel  $\alpha$  tels que  $\|z^*\| \leq \varepsilon$  et  $x^* - z^* = \alpha y^*$ .

Considérons la restriction de  $x^*$  au noyau de  $y^*$  : par le théorème 3.3, cette restriction s'étend en une forme linéaire continue  $z^*$  de même norme. Or puisque par hypothèse

$|x^*(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x \in B(0,1) \cap \text{Ker}(y^*)$ , on a  $\|z^*\| \leq \varepsilon$ . Par la proposition 3.35, puisque  $\text{Ker}(x^* - z^*) \supseteq \text{Ker}(y^*)$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $x^* - z^* = \alpha y^*$ .

**Étape 2 :** montrons ensuite que  $|1 - |\alpha|| \leq \varepsilon$ .

Soit  $x$  un élément de boule unité de  $E$ . On a :

$$|z^*(x)| = |x^*(x) - \alpha y^*(x)| \geq |x^*(x)| - |\alpha| |y^*(x)| \geq |x^*(x)| - |\alpha| \|y^*\| = |x^*(x)| - |\alpha|$$

D'où  $|x^*(x)| \leq |z^*(x)| + |\alpha| \leq \varepsilon + |\alpha|$ . Comme cette inégalité est vraie pour tout élément de la boule unité de  $E$ , on peut passer au suprémum et on obtient  $1 = \|x^*\| \leq \varepsilon + |\alpha|$ , ou encore  $1 - |\alpha| \leq \varepsilon$ .

On a également :

$$|z^*(x)| = |x^*(x) - \alpha y^*(x)| \geq |\alpha| |y^*(x)| - |x^*(x)| \geq |\alpha| |y^*(x)| - \|x^*\| = |\alpha| |y^*(x)| - 1$$

D'où  $|\alpha| |y^*(x)| \leq 1 + |z^*(x)| \leq 1 + \varepsilon$ . De manière analogue à ci-dessus, on en déduit  $|\alpha| \leq 1 + \varepsilon$ , c'est-à-dire  $|\alpha| - 1 \leq \varepsilon$ .

Ceci termine l'étape 2.

**Étape 3 :** conclusion.

Soit  $\eta \in \{-1, 1\}$ . On a, par l'inégalité triangulaire :

$$\|x^* + \eta y^*\| \leq \|x^* - \alpha y^*\| + \|\alpha y^* + \eta y^*\| \leq \varepsilon + \|\alpha y^* + \eta y^*\|$$

Pour conclure il reste à choisir  $\eta$  (ce choix revient à se placer dans un des cas de l'alternative à montrer) tel que  $|\alpha + \eta| \|y^*\| = |\alpha + \eta| \leq \varepsilon$ . Si  $\alpha$  est positif, on prend  $\eta = -1$ , sinon, on choisit  $\eta = 1$  et on conclut par l'étape 2.  $\square$



# Chapitre 4

## Théorème de Baire

### 4.1 Un petit mot historique

**Cantor** (1845-1918) : théorie des ensembles de nombres réels ; tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est non-dénombrable.

**Borel** (1871-1956) : théorie de la mesure ; tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est de mesure non nulle ; notion de propriété vraie presque partout : une propriété  $P$  est vraie presque partout si elle est vérifiée l'ensemble complet hormis un sous-ensemble de mesure nulle.

**Baire** (1874-1932) : point de vue topologique ; tout intervalle n'est pas de première catégorie ; une propriété  $P$  est dite vraie presque partout au sens de Baire si elle est vérifiée sur tout l'ensemble hormis un sous-ensemble de première catégorie.

### 4.2 Définitions

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique (fixé tout au long de cette section).

**Définition 4.1.** Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est dit nulle part dense s'il vérifie

$$\text{int}(\text{adh}(A)) = \emptyset$$

De manière équivalente,  $A$  est dit nulle part dense si le complémentaire de son adhérence est dense dans  $X$ .

Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle, l'ensemble vide, les singletons, l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres entiers sont tous nulle part denses.

**Proposition 4.2.** L'ensemble des parties nulle part denses de  $X$  est héréditaire et est stable par union finie et par fermeture.

**Remarque 4.3.** Montrer qu'un sous-ensemble  $C$  de  $X$  est dense revient à montrer que  $\text{adh}(C) = X$ , c'est-à-dire  $\forall x \in X, \forall O_x \in \mathcal{T}, x \in O_x \implies O_x \cap C \neq \emptyset$ .

Cela revient au même que de montrer que tout ouvert  $O$  de  $X$  non vide,  $O \cap C \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Il est clair que cette classe est stable par fermeture. L'hérédité est facile à démontrer étant donné que le passage à l'intérieur et à l'adhérence préservent les inclusions.

Il reste donc à montrer que cette classe est stable par union finie. Il suffit de le montrer pour deux ensembles (et d'itérer lorsque plus de deux ensembles interviennent)

Soient  $A, B$  deux sous-ensembles nulle part denses de  $X$ . Alors le complémentaire de l'adhérence de  $A$  est dense dans  $X$ , c'est-à-dire pour tout ouvert  $O$  non vide de  $\mathcal{T}$ ,  $O \cap (X \setminus \text{adh}(A))$  est non vide. De même pour le complémentaire de l'adhérence de  $B$ .

On doit montrer que le complémentaire de l'adhérence de  $A \cup B$  est dense dans  $X$ . L'adhérence de  $A \cup B$  correspondant à l'union des adhérences, on doit donc montrer que (en appliquant les lois de De Morgan) :

$$\forall O \in \mathcal{T}, O \neq \emptyset \implies O \cap (X \setminus \text{adh}(A)) \cap (X \setminus \text{adh}(B)) \neq \emptyset$$

Soit  $O$  un ouvert de  $X$ . Puisque le complémentaire de l'adhérence de  $A$  est un ouvert dense,  $O \cap (X \setminus \text{adh}(A))$  est un ouvert non vide. Puisque le complémentaire de l'adhérence de  $B$  est dense, on a le résultat.  $\square$

Toutefois la classe des ensembles nulle part denses n'est pas stable par union dénombrable. On introduit donc la notion d'ensemble de première catégorie :

**Définition 4.4.** Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est dit de première catégorie s'il s'agit d'une union dénombrable de parties nulle part denses.

Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle, l'ensemble des nombres rationnels est de première catégorie (il s'agit d'une union dénombrable de singletons) mais n'est pas nulle part dense car son adhérence étant  $\mathbb{R}$ , l'intérieur de son adhérence est non vide.

En particulier, ceci montre que l'ensemble des parties de première catégorie de  $X$  n'est pas stable par fermeture en général, en admettant que  $\mathbb{R}$  n'est pas de première catégorie (pour sa topologie usuelle). En plus, il s'agit d'un exemple de sous-ensemble de première catégorie qui n'est pas nulle part dense.

**Proposition 4.5.** Le sous-ensemble des parties de première catégorie de  $X$  est héréditaire et stable par union dénombrable.

*Démonstration.* L'hérédité est claire. Une union dénombrable d'unions dénombrables d'ensembles nulle part denses étant une union dénombrable d'ensembles nulle part denses, l'autre partie du résultat est claire.  $\square$

La dernière définition introduite ici est celle de la propriété de Baire.

**Définition 4.6** (Propriété de Baire). On dit que  $X$  a la propriété de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses de  $X$  est dense dans  $X$ . Dans ce cas on dit que  $X$  est un espace de Baire.

Insistons sur l'importance de la dénombrabilité de l'intersection considérée. On montre plus tard que  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle est un espace de Baire. Considérons l'intersection non dénombrable d'ouverts denses  $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \setminus \{r\}$ . Elle est vide donc non dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :** pour rappel, une intersection infinie d'ouverts n'est pas ouverte en général. Il est en de même pour une intersection d'ouverts denses dans  $X$  ; si  $X$  a la propriété de Baire, leur intersection sera dense dans  $X$  mais ne sera pas nécessairement ouverte. Essayez d'explicitier un exemple à titre d'exercice.

## 4.3 Formulations équivalentes

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique fixé.

La propriété de Baire peut être exprimée de manière équivalente en termes de fermés :

**Proposition 4.7.**  $X$  a la propriété de Baire si et seulement si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

**Remarque :** une union de fermés n'est pas nécessairement un fermé. Vous êtes invités à produire un exemple de famille dénombrable de fermés d'intérieur vide tel que leur union n'est pas fermée.

*Démonstration.* Supposons que  $X$  a la propriété de Baire. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés de  $X$  d'intérieur vide. Alors la famille  $(X \setminus F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille d'ouverts denses dans  $X$  (car l'adhérence du complémentaire d'un ensemble correspond au complémentaire de son intérieur). Par la propriété de Baire,

$$X \setminus \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \text{adh} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X \setminus F_n \right) = X$$

En passant au complémentaire, on a la première implication.

L'autre implication se démontre de manière similaire et est donc laissée à titre d'exercice.  $\square$

On peut également énoncer la propriété de Baire en termes d'ensembles résiduels. Introduisons les :

**Définition 4.8.** Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est dit résiduel si son complémentaire est de première catégorie.

**Proposition 4.9.**  $X$  a la propriété de Baire si et seulement si tout ensemble résiduel est dense dans  $X$ .

*Démonstration.* Supposons que  $X$  est un espace de Baire. Soit  $A$  un ensemble résiduel, c'est-à-dire  $X \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  où les  $S_n$  sont des sous-ensembles de  $X$  nulle part denses. Alors chaque fermeture de  $S_n$  est un sous-ensemble de  $X$  d'intérieur vide. Par la propriété de Baire,

$$\text{int}(X \setminus A) = \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right) \subseteq \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{adh}(S_n) \right) \stackrel{\text{Baire}}{=} \emptyset$$

En passant au complémentaire, on déduit que l'adhérence de  $A$  est  $X$ , c'est-à-dire  $A$  est dense dans  $X$ .

Réciproquement, supposons que tout ensemble résiduel est dense dans  $X$ . Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés d'intérieur vide. Alors il s'agit d'une famille de sous-ensembles nulle part denses de  $X$ , donc le complémentaire de leur union est dense dans  $X$  (car il s'agit d'un ensemble résiduel). Ceci implique que l'intérieur de l'union des  $F_n$  est vide, ce qu'on voulait montrer.  $\square$

## 4.4 Théorème de Baire

Le théorème de Baire affirme que les espaces métriques complets sont des espaces de Baire, ce qui nous fournira des exemples concrets d'espaces de Baire.

**Théorème 4.10** (Théorème de Baire). Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Si  $X$  est complet, alors il a la propriété de Baire.

*Démonstration.* Soit  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable d'ouverts denses dans  $X$ . Montrons que tout ouvert de  $X$  a une intersection non vide avec  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Soit  $U$  un ouvert de  $X$ .

Puisque  $O_0$  est un ouvert dense dans  $X$ , il existe  $x_0$  dans  $O_0 \cap U$ . Il existe  $r_0 \in ]0, 1]$  tel que  $B[x_0, r_0] \subseteq O_0 \cap U$ <sup>1</sup>. De même, puisque  $O_1$  est dense dans  $X$ , il existe  $x_1$  dans  $O_1 \cap B(x_0, r_0)$ , et  $r_1 \in ]0, 2^{-1}]$  tels que  $B[x_1, r_1] \subseteq O_1 \cap B(x_0, r_0)$ .

En itérant de la sorte, on construit deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $x_n \in O_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ ,  $B[x_n, r_n] \subseteq O_n$  et  $r_n \in ]0, 2^{-n}]$ . La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite est de Cauchy dans un espace métrique complet ; elle converge donc vers un élément  $x$  de  $X$ .

Par la première étape, on a  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B[x_0, r_0]$  qui est un sous-ensemble de  $U$ . Ceci montre que  $x$  est élément de  $U$  (puisque une boule fermée est fermée).

Pour tous naturels  $n$  et  $p$ , on a par construction  $x_{n+p} \in B[x_n, r_n]$  et en faisant tendre  $p$  vers l'infini, étant donné que  $B[x_n, r_n]$  est fermée, on en déduit que  $x$  est un élément de  $B[x_n, r_n]$  qui est contenue dans  $O_n$ , ce qui prouve que  $x$  est bien dans l'intersection des  $O_n$ .  $\square$

Un autre résultat repris comme faisant partie du théorème de Baire concerne la topologie induite.

**Théorème 4.11.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $O$  un ouvert de  $X$ .  $O$  muni de la topologie induite est également un espace de Baire.

**Remarque 4.12** (Rappels). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Rappelons que si  $B$  est un sous-ensemble de  $X$ , la topologie induite sur  $B$  est la topologie  $\mathcal{T}_B$  suivante :

$$\mathcal{T}_B = \{U \cap B \mid U \in \mathcal{T}\}$$

De plus, si on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fermés de  $X$ , on a la caractérisation suivante des fermés de la topologie induite :

$$\mathcal{F}_B = \{F \cap B \mid F \in \mathcal{F}\}$$

**Propriété :** la fermeture de  $A$  au sens de  $B$  correspond l'intersection de  $B$  et de la fermeture de  $A$  au sens de  $X$  (car on regarde le plus petit fermé contenant  $A$ ).

*Démonstration.* Soit  $F$  un fermé de  $B$  contenant  $A$ . Alors  $F = G \cap B$  pour un fermé  $G$  de  $X$ . Puisque  $A \subseteq F \subseteq G$ ,  $G$  contient l'adhérence de  $A$  au sens de  $X$  (qui est le plus petit fermé de  $X$  contenant  $A$ ), donc  $F$  contient  $\text{adh}_X(A) \cap B$ . Ceci montre que le plus petit fermé de  $B$  contenant  $A$  est  $\text{adh}_X(A) \cap B$ , ce qu'on voulait montrer.  $\square$

---

1. La notation  $B[y, r]$  est une notation pour dénoter la boule fermée de centre  $y$  et de rayon  $r$ . Pour rappel, dans un espace métrique, l'adhérence de la boule ouverte ne correspond pas nécessairement à la boule fermée ; on a toujours  $\text{adh}(B(y, r)) \subseteq B[y, r]$ .



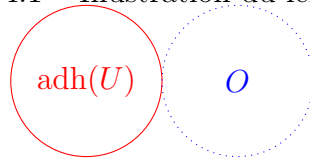
**Propriété :** si on suppose que  $B$  est ouvert, alors l'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $B$  au sens de  $B$  correspond à son intérieur au sens de  $X$  (car les ouverts de la topologie induite sur  $B$  sont des ouverts de  $X$ ).

*Démonstration.* Soit  $U$  contenu dans  $A$  un ouvert de  $B$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $X$  (car il est l'intersection de  $B$  qui est ouvert et d'un ouvert de  $X$ ). Donc  $U$  est contenu dans l'intérieur de  $A$  au sens de  $X$ . Puisque l'intérieur de  $A$  est un sous-ensemble de  $A$ , il s'agit d'un ouvert de  $B$  (car  $B$  est ouvert), et donc du plus grand ouvert de  $B$  contenu dans  $A$ , ce qu'on voulait montrer.  $\square$

Nous rappelons un résultat vu l'année passée qui servira dans la preuve d'un lemme intermédiaire.

**Lemme 4.13.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $U$  et  $O$  deux ouverts de  $X$ . Si  $U$  et  $O$  sont disjoints, alors l'adhérence de  $U$  est disjointe de  $O$ .

FIGURE 4.1 – Illustration du lemme 4.13



*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $x$  un élément de  $\text{adh}(U) \cap O$ . Alors pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $V$  intersecte  $U$  puisque  $x$  est dans l'adhérence de  $U$ . Or  $O$  est un voisinage de  $x$  donc son intersection avec  $U$  doit être non vide. Cela constituant une contradiction, on conclut que  $\text{adh}(U) \cap O$  est vide.  $\square$

Pour prouver le théorème 4.11, on introduit tout d'abord un lemme utile à sa preuve.

**Lemme 4.14.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $O$  un ouvert de  $X$ . Un sous-ensemble  $A$  nulle part dense de  $O$  (au sens de la topologie induite) est nulle part dense dans  $X$  (au sens de  $\mathcal{T}$ ).

*Démonstration.* Montrer que  $A$  est nulle part dense revient à montrer que tout ouvert compris dans l'adhérence de  $A$  (au sens de  $X$ ) est vide. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  $U$  est contenu dans l'adhérence de  $A$ . Alors  $U \cap O$  est contenu dans  $\text{adh}_O(A) = \text{adh}_X(A) \cap O$ , d'intérieur vide, ce qui implique que  $U$  et  $O$  sont disjoints.

Par le lemme 4.13,  $U \cap \text{adh}_X(O)$  est également vide, or on a la chaîne d'inclusions suivante :  $U \subseteq \text{adh}_X(A) \subseteq \text{adh}_X(O)$  ; ce qui implique que  $U$  est vide.  $\square$

Nous pouvons donc prouver assez facilement le théorème 4.11 en utilisant le lemme 4.14

*Preuve du théorème 4.11.* Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés d'intérieur vide de  $O$ . Chaque  $F_n$  étant nulle part dense au sens de  $O$ , il l'est au sens de  $X$  par le lemme 4.14.

La famille  $(\text{adh}_X(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une famille de fermés de  $X$  d'intérieur vide. Par la propriété de Baire, leur union est d'intérieur vide. On a le résultat car :

$$\text{int}_O \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \text{int}_X \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \subseteq \text{int}_X \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{adh}_X(F_n) \right) = \emptyset$$

$\square$

## 4.5 Corollaires et applications

Cette section présente plusieurs résultats et corollaires découlant de la propriété de Baire.

**Proposition 4.15.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés d'intérieur vide. L'union des  $F_n$  n'est pas  $X$ .

*Démonstration.* L'union étant d'intérieur vide, elle ne peut être  $X$ . □

**Proposition 4.16.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés de  $X$ . Si l'union des  $F_n$  est  $X$ , alors il existe  $n_0$  tel que  $F_{n_0}$  est d'intérieur non vide.

*Démonstration.* S'ils étaient tous d'intérieur vide, alors leur union le serait également, et elle ne pourrait pas être  $X$ . □

On peut raffiner ce résultat :

**Proposition 4.17.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés de  $X$ . Si l'union des  $F_n$  est  $X$ , alors l'union des intérieurs des  $F_n$  est dense dans  $X$ .

*Démonstration.* On pose  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int} F_n$ , qui est ouvert. On pose également, pour tout naturel  $n$ ,  $F'_n = F_n \cap (X \setminus U)$ , qui est fermé.

Pour tout naturel  $n$ ,  $F'_n$  est d'intérieur vide ;  $x$  est dans l'intérieur de  $F'_n$  si et seulement si il est à la fois dans l'intérieur de  $F_n$  et de  $X \setminus U$ , c'est-à-dire il existe un ouvert  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) contenant  $x$  inclus dans  $F_n$  (resp.  $X \setminus U$ ), ce qui implique que  $x$  est dans  $O_1 \cap O_2$  qui est inclus dans l'intersection de l'intérieur de  $F_n$  et de  $X \setminus U$  qui est vide.

Par la propriété de Baire, l'intérieur de l'union des  $F'_n$  est vide, c'est-à-dire l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_n \cap (X \setminus U)) = (X \setminus U) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

est d'intérieur vide. C'est-à-dire  $X \setminus U$  est d'intérieur vide par hypothèse sur les  $F_n$ . Cela montre que  $U$  est dense dans  $X$ . □

Une autre propriété des espaces de Baire est qu'ils ne sont pas de première catégorie.

**Proposition 4.18.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire. Alors  $X$  n'est pas de première catégorie.

*Démonstration.* Si  $X$  était de première catégorie, son complémentaire (le vide) serait dense dans  $X$  par la propriété de Baire, ce qui est une contradiction. □

**Proposition 4.19.** Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  n'est pas de première catégorie.

*Démonstration.* Supposons par contradiction qu'il existe un intervalle  $I$  de première catégorie. Alors son complémentaire est dense dans  $\mathbb{R}$ . Or le complémentaire d'un intervalle a pour adhérence  $\mathbb{R} \setminus \text{int}(I) \neq \mathbb{R}$ . □

On introduit deux définitions pour les résultats à venir.

**Définition 4.20.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. On appelle  $G_\delta$  un sous-ensemble de  $X$  qui est une intersection dénombrable d'ouverts et  $F_\sigma$  un sous-ensemble de  $X$  qui est une union dénombrable de fermés.

**Proposition 4.21.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace de Baire et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ .  $A$  est résiduel si et seulement s'il contient un  $G_\delta$  dense.

*Démonstration.* Supposons  $A$  résiduel, c'est-à-dire le complémentaire de  $A$  s'écrit comme  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  pour des sous-ensembles  $S_n$  de  $X$  qui sont nulle part denses. Puisque  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  est contenue dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{adh}(S_n)$  (qui est d'intérieur vide car les  $S_n$  sont nulle part denses et  $X$  est un espace de Baire), on a que  $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{adh}(S_n)$  est contenu dans  $A$ . Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un  $G_\delta$  dense.

Réciproquement supposons que  $A$  contient un  $G_\delta$  dense, c'est-à-dire qu'il existe une famille dénombrable d'ouverts  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  est contenue dans  $A$  et est dense. Chaque  $O_n$  est dense dans  $X$  car il contient un sous-ensemble dense dans  $X$ . Le complémentaire de  $A$  est donc contenu dans le complémentaire du  $G_\delta$ ; il s'agit d'une union de fermés d'intérieur vide, donc de première catégorie. Par hérédité (de la propriété « être de première catégorie »), le complémentaire de  $A$  est de première catégorie, c'est-à-dire  $A$  est résiduel.  $\square$

**Proposition 4.22.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Toute base algébrique (dite base de Hamel) est soit finie, soit non dénombrable.

*Démonstration.* Puisque  $E$  est complet, il s'agit d'un espace de Baire.

Si la dimension de  $E$  est finie, alors on a le résultat. Supposons que la dimension de  $E$  est infinie et supposons par l'absurde qu'il existe une base algébrique  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dénombrable de  $E$ .

On pose pour tout naturel  $n$ ,  $F_n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $e_0$  jusque  $e_n$ . Alors il est fermé car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé et il est de dimension  $n + 1$ .

On a  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Donc par la proposition 4.16, il existe  $n_0$  tel que l'intérieur de  $F_{n_0}$  est non vide. Soient  $x \in \text{int}(F_{n_0})$ ,  $r > 0$  tels que  $B(x, r) \subseteq F_{n_0}$ . Par symétrie,  $-x$  est également un élément de  $F_{n_0}$ . On en déduit que la boule  $B(0, r)$  est contenue dans  $F_{n_0}$ . En divisant chaque  $e_n$  par une constante appropriée  $c_n$  non nulle, on a  $c_n e_n$  dans  $B(0, r)$  ce qui montre que chaque  $e_n$  est dans  $F_{n_0}$ , d'où  $E \subseteq F_{n_0}$ , ce qui contredit que  $E$  est de dimension infinie.  $\square$

**Proposition 4.23.** L'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$  n'est pas un espace de Baire.

*Démonstration.* Soit  $B_\infty = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ . Notez qu'il ne s'agit pas de la boule unité fermée de l'espace considéré; ce ne sont pas les mêmes normes. Montrons qu'il s'agit d'un fermé au sens de la norme 1.

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions dans  $B_\infty$  et une fonction  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$  telles que  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ . Supposons par contradiction que  $f$  n'est pas dans  $B_\infty$ , c'est-à-dire  $\|f\|_\infty > 1$ . Il existe  $a \in [0, 1]$  et  $\delta > 0$  tel que  $|f(a)| > 1 + \delta$ . Par continuité, il existe  $r > 0$  tel que tout  $x$  dans l'intervalle  $I := ]a - r, a + r[ \cap [0, 1]$  vérifie  $|f(x)| > 1 + \frac{\delta}{2}$ . Pour tout naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx &\geq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\geq \int_I (|f(x)| - |f_n(x)|) dx \\ &\geq \int_I \left( \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - 1 \right) dx \\ &\geq \frac{\delta r}{2} > 0 \end{aligned}$$

Ce qui contredit la convergence de la suite des  $f_n$  vers  $f$  au sens de la norme 1. Donc  $f \in B_\infty$ , ce qui montre que  $B_\infty$  est fermée au sens de la norme 1.

Supposons par contradiction que  $\mathcal{C}[0, 1]$  est un espace de Baire. Puisque toute fonction dans  $\mathcal{C}[0, 1]$  est bornée, on a  $\mathcal{C}[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_\infty$ . Il existe donc  $n_0$  tel que  $n_0 B_\infty$  est d'intérieur non vide. Ceci implique que  $B_\infty$  est d'intérieur non vide. Soient  $g$  dans l'intérieur de  $B_\infty$  et  $r > 0$  tel que  $B(g, r) \subseteq B_\infty$ . Puisque  $B_\infty$  est symétrique, on a que  $-B(g, r) = B(-g, r) \subseteq B_\infty$ , et par convexité de la boule  $B_\infty$ , on a

$$B(0, r) \subseteq \frac{1}{2} (B(g, r) + B(-g, r)) \subseteq B_\infty$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante  $K$  telle que toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  vérifie  $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_1$ . Supposons  $f$  non nulle, alors  $\frac{r \cdot f}{2\|f\|_1}$  est élément de  $B(0, r)$ , donc de  $B_\infty$ , et on a donc  $\|f\|_\infty \leq \frac{2}{r}\|f\|_1$ .

Toutefois cette dernière affirmation est une contradiction! Il suffit de considérer la fonction  $f_n(x) = x^n$  où  $n$  est un nombre naturel; on a  $\|f_n\|_\infty = 1$  et  $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ . Or l'affirmation qu'on a montré implique que pour tout  $n$  naturel,  $1 \leq \frac{K}{n+1}$ .  $\square$

*Un corollaire de cette proposition est qu'il ne s'agit pas d'un espace de Banach.*

**Théorème 4.24.** La limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues définies sur un espace de Baire à image dans  $\mathbb{R}$  sont continues sur un  $G_\delta$  dense.

*Démonstration.* Consultez ce [lien](#).  $\square$

# Chapitre 5

## Théorème de Banach-Steinhaus

### 5.1 Théorème

Il est conseillé de se remémorer les équivalences pour la continuité d'applications linéaires (le résultat 1.14) avant de procéder à la lecture de ce chapitre.

**Théorème 5.1** (Théorème de Banach-Steinhaus (Principle of uniform boundedness)). Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach et  $(F, \|\cdot\|_F)$  un espace vectoriel normé,  $I$  un ensemble non vide et  $(T_i)_{i \in I}$  une famille d'opérateurs linéaires continus (c'est-à-dire pour tout  $i \in I$ ,  $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$ ).

Supposons que pour tout  $x \in E$ ,  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F$  est fini.

Alors on a que  $\sup_{i \in I} \|T_i\|$  est fini.

L'hypothèse de ce théorème équivaut à dire que pour tout  $x$  dans  $E$ , l'ensemble  $\{\|T_i(x)\|_F \mid i \in I\}$  est borné, ou encore

$$\forall x \in E, \exists C_x, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq C_x$$

La conclusion, quant à elle, équivaut à dire que l'ensemble  $\{\|T_i\| \mid i \in I\}$  est borné. De manière équivalente :

$$\exists C, \forall x \in E, \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

*Démonstration.* Pour rappel,  $(E, \|\cdot\|_F)$  est un espace de Baire, car il est complet.

Pour tout naturel  $n$ , on considère l'ensemble  $E_n$  défini par :

$$E_n = \{x \in E \mid \forall i \in I, \|T_i(x)\|_F \leq n\} = \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}(B_F[0, n])$$

On déduit de la seconde écriture que  $E_n$  est fermé pour tout  $n$  (par continuité des  $T_i$ ). De plus, les  $E_n$  sont non vides car ils contiennent tous 0.

On a l'égalité  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  car pour tout  $x$  dans  $E$ , l'ensemble  $\{\|T_i(x)\|_F \mid i \in I\}$  est borné. Il existe donc un naturel  $n_0$  tel que  $\text{int}(E_{n_0})$  est non vide (par la proposition 4.16), c'est-à-dire il existe un élément  $x_0$  de  $E_{n_0}$  et un réel  $r > 0$  tels que  $B_E(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$ .

Ceci implique que pour tout  $z$  de la boule unité de  $E$  et pour tout  $i$  dans  $I$ , on a l'inégalité  $\|T_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0$ . D'où les inégalités (en utilisant l'inégalité triangulaire renversée et la linéarité) :

$$\|T_i(z)\|_F \leq \frac{1}{r} (n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r} \left( n_0 + \sup_{i \in I} \|T_i(x_0)\|_F \right)$$

Ceci implique que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $\|T_i\|$  est majorée par une constante indépendante de  $i$ , ce qui fournit le résultat.  $\square$

Soit  $\mathbb{K}$  un corps (le corps des réels ou des complexes) et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que  $x_n^* \in E^*$  pour tout naturel  $n$ .

En particulier, si on suppose que pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|$  est fini, alors  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|$  est fini.

Le résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas la complétude de  $E$ .

**Exemple 5.2.** Soit  $E$  l'espace des fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $p \in E$ ,  $p(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose  $\|p\| = \max_{0 \leq n \leq N} |a_n|$ .

Alors  $E$  n'est pas complet ; on peut voir cela comme une conséquence du résultat qui affirme que tout espace de Banach n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Pour tout naturel  $n$ , on considère la forme linéaire et continue

$$x_n^* : E \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{k=0}^N a_k t^k \mapsto \begin{cases} n a_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La norme de  $x_n^*$  est  $n$  quel que soit  $n$ . Or, quel que soit le polynôme  $p \in E$ , l'ensemble  $\{|x_n^*(p)| \mid n \in \mathbb{N}\}$  est fini donc borné. Toutefois,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|$  n'est pas fini !

## 5.2 Conséquences du théorème

**Corollaire 5.3.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  des espaces de Banach et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$  convergeant ponctuellement vers une fonction  $T : E \rightarrow F$ .

La fonction  $T$  est linéaire et on a les inégalités :

$$\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

En particulier,  $T$  est continue.

*Démonstration.* Soient  $a$  un scalaire et  $x, y$  deux éléments de  $E$ . Pour tout naturel  $n$ , on a par linéarité de  $T_n$  que  $T_n(ax + y) = aT_n(x) + T_n(y)$ . En passant à la limite sur  $n$ , on a par unicité de la limite que  $T(ax + y) = aT(x) + T(y)$ , ce qui montre la linéarité.

Puisque  $T_n$  converge ponctuellement vers  $T$ , on a que pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $\|T_n(x)\|$  converge vers  $\|T(x)\|$ . Ceci implique que pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|$  est fini (car toute suite convergente est bornée). Par le théorème de Banach-Steinhaus,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$  est fini.

Il reste à montrer l'inégalité  $\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$  pour conclure. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Quel que soit le naturel  $n$  considéré, on a :

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\| \|x\|_E \leq \left( \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| \right) \|x\|_E$$

On conclut en passant à la limite sur  $n$ .  $\square$

**Proposition 5.4.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  des espaces de Banach et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$  convergeant ponctuellement vers une fonction  $T : E \rightarrow F$ .

Pour tout compact  $K$  de  $E$ , la suite des  $T_n$  converge uniformément sur  $K$  vers  $T$ .

*Démonstration.* On a  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  (par le résultat précédent).

Soit  $K$  un compact de  $E$ . Supposons par l'absurde que la suite des  $T_n$  ne converge pas uniformément vers  $T$  sur  $K$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout naturel  $N$ , il existe un naturel  $n > N$  et un élément  $x$  de  $K$  tels que  $\|T_n(x) - T(x)\| > \varepsilon$ .

Il existe donc, pour  $N = 0$ , un naturel  $n_0 > 0$  et un élément  $x_0$  de  $K$  tel que  $\|T_{n_0}(x_0) - T(x_0)\| > \varepsilon$ . En continuant ainsi, on construit une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout naturel  $k$ ,  $\|T_{n_k}(x_k) - T(x_k)\| > \varepsilon$  et  $n_k > k$ .

Par compacité séquentielle, il existe un élément  $x$  de  $K$  et une sous-suite  $(x_j)_{j \in J}$  de  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$ . On a, pour tout  $j$  dans  $J$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|T_{n_j}(x_j) - T(x_j)\| \\ &\leq \|T_{n_j}(x_j) - T_{n_j}(x)\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_{n_j}\| \cdot \|x_j - x\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x_j - x\| + \|T_{n_j}(x) - T(x)\| \end{aligned}$$

Or puisque le dernier membre de cette inégalité converge vers 0 lorsque  $j$  tend vers l'infini (par convergence ponctuelle des  $T_n$  et car  $x_j \xrightarrow{j \in J} x$ ), il y a contradiction avec la stricte positivité de  $\varepsilon$ .  $\square$

Le résultat précédent n'est pas vrai si on considère un ensemble borné non compact. Prenons  $E = c_0$ ,  $F = \mathbb{R}$  et pour tout naturel  $n$ ,  $e_n^* : c_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_n$  qui est linéaire continue. Alors  $e_n^*$  converge ponctuellement vers 0 (par définition de  $c_0$ ), mais sur la boule unité de  $c_0$  (qui est bornée), la suite des  $e_n^*$  ne converge pas uniformément vers 0. En effet, quel que soit  $n$  le naturel considéré, il existe un élément  $x$  de la boule unité de  $c_0$  tel que  $|e_n^*(x)| > 1/2$  (prendre  $x = e_n$ ).

**Proposition 5.5.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $B$  un sous-ensemble de  $E$ . Supposons que quel que soit  $x^* \in E^*$  que l'on considère,  $x^*(B)$  est borné. Alors  $B$  est borné.

*Démonstration.* Soit pour  $b \in B$ , l'application linéaire  $T_b : E^* \rightarrow \mathbb{K} : x^* \mapsto x^*(b)$ . On a par le corollaire 3.6 que  $\|b\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in E^*}} |x^*(b)| = \|T_b\|$

Par hypothèse, quel que soit  $x^* \in E^*$ ,  $\sup_{b \in B} |T_b(x^*)| = \sup_{b \in B} |x^*(b)|$  est fini. Alors par le théorème de Banach-Steinhaus,  $\sup_{b \in B} \|T_b\| = \sup_{b \in B} \|b\|$  est fini, ce qui montre que  $B$  est borné.  $\square$





Deuxième partie

Second quadrimestre



# Chapitre 6

## Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

### 6.1 Théorème de l'application ouverte

On rappelle qu'une application  $f(X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  est ouverte si l'image de tout ouvert de  $X$  par  $f$  est un ouvert de  $Y$ . Énonçons le théorème de l'application ouverte.

**Théorème 6.1** (Théorème de l'application ouverte). Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Si  $T$  est une surjection, alors  $T$  est ouverte.

Prouvons tout d'abord un résultat qui nous permet de montrer qu'un opérateur est ouvert.

**Proposition 6.2.** Soit  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire.  $T$  est ouverte si et seulement si il existe  $r > 0$  tel que  $T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, r)$ .

Remarquez que de manière équivalente,  $T$  linéaire est ouverte si et seulement si il existe  $s > 0$  tel que  $T(B_E(0, s)) \supseteq B_F(0, 1)$ .

*Démonstration.* Supposons  $T$  ouverte. Alors l'image par  $T$  de  $B_E(0, 1)$  est un ouvert de  $F$  contenant 0, ce qui fournit le résultat.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, r)$ . Soit  $O$  un ouvert de  $E$ . Soit  $T(x)$  un élément de  $T(O)$ . Il existe  $s > 0$  tel que  $B_E(x, s) \subseteq O$ . Puisque  $B_E(x, s) = x + sB_E(0, 1)$ , on a que  $T(O)$  contient l'ensemble  $T(x) + sT(B_E(0, 1))$ . Par hypothèse, ce sous-ensemble contient  $T(x) + sB_F(0, r)$ , ce qui implique  $B_F(T(x), r \cdot s) \subseteq T(O)$ .  $\square$

Nous pouvons désormais prouver le théorème. Nous utilisons les résultats suivants, implicitement :

**Exercice 6.1.** Soient  $A \subseteq E$  et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. On a que  $A + A$  comprend  $2A$  ;
2. Si  $A$  est convexe,  $A + A = 2A$  ;
3. Si  $A$  est convexe, alors  $T(A)$  est convexe ;
4. Si  $A$  est convexe, alors son adhérence aussi.

*Démonstration.* Montrons premièrement qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\text{adh}(T(B_E(0, 1))) \supseteq B_F(0, r)$ . Afin de faire cela, on utilise le théorème de Baire.

Pour tout naturel  $n \geq 1$ , on pose  $F_n = n \cdot \text{adh}(T(B_E(0, 1)))$  qui est un fermé de  $F$ . Dès lors, l'union des  $F_n$  est égale à  $F$  par surjectivité de  $T$ . En effet, il suffit de constater que  $F_n \supseteq n \cdot T(B_E(0, 1)) = T(B_E(0, n))$ .

Dès lors le théorème de Baire assure qu'il existe  $n_0$  tel que l'intérieur de  $F_{n_0}$  est non vide. On en déduit que l'intérieur de  $F_1$  est non vide. Soit  $x_0$  un élément de l'intérieur de  $F_1$ . Alors il existe  $s > 0$  tel que  $B_F(x_0, s) \subseteq \text{adh}(T(B_E(0, 1)))$ . Puisque  $\text{adh}(T(B_E(0, 1)))$  est symétrique ( $A$  est symétrique si pour tout élément  $a$  de  $A$ ,  $-a$  est dans  $A$ ),  $B_F(-x_0, s)$  est également contenue dans  $\text{adh}(T(B_E(0, 1)))$ . Par convexité de  $\text{adh}(T(B_E(0, 1)))$ , on déduit que  $B_F(0, s) \subseteq \text{adh}(T(B_E(0, 1)))$ .

Maintenant, on a montré que  $\exists r' > 0$ ,  $\text{adh}(T(B_E(0, 1))) \supseteq B_F(0, r')$ . On en déduit que  $\text{adh}(T(B_E(0, r))) \supseteq B_F(0, 1)$  où  $r = 1/r'$ . Pour conclure, on doit montrer l'existence de  $s > 0$  tel que  $B_F(0, 1) \subseteq T(B_E(0, s))$ .

Soit  $y \in F$ ,  $\|y\| < 1$ . Alors,  $y \in \text{adh}(T(B_E(0, r)))$ .

Par définition d'adhérence, il existe  $x_0 \in B_E(0, r)$  tel que  $\|y - T(x_0)\| < \frac{1}{2}$ . Dès lors,  $y - T(x_0)$  appartient à  $\text{adh}(T(B_E(0, r/2)))$ . Il existe donc  $x_1 \in B_E(0, r/2)$  tel que  $\|y - T(x_0 + x_1)\| < \frac{1}{2^2}$ .

À l'étape  $n$ , on a  $y - T(x_0 + \dots + x_{n-1}) \in \text{adh}(T(B_E(0, \frac{r}{2^n})))$ . Il existe donc  $x_n \in B_E(0, \frac{r}{2^n})$  tel que  $\|y - T(x_0 + \dots + x_n)\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ .

La série des  $x_n$  converge car elle est absolument convergente (on a pour tout naturel  $n$ ,  $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$ ). Soit  $x$  la limite de cette série. Alors,  $\|x\| \leq 2r$  et on a  $T(x) = y$ . D'où  $y \in T(B_E(0, 2r))$ .

Il suffit donc de prendre  $s = 2r$  pour conclure.  $\square$

**Corollaire 6.3** (Théorème d'isomorphisme de Banach). Soient  $E, F$  deux espaces de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $T$  est bijective, alors elle est bicontinue (c'est-à-dire sa réciproque est également continue).

*Démonstration.* Toute application bijective, continue et ouverte est un homéomorphisme. Le résultat est immédiat par le théorème de l'application ouverte.  $\square$

**Corollaire 6.4.** Soient  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  deux normes sur un même espace vectoriel  $E$  telles que  $(E, \|\cdot\|_i)$  est un espace de Banach pour  $i = 1, 2$ .

S'il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$  (c'est-à-dire que la norme  $\|\cdot\|_2$  domine la norme  $\|\cdot\|_1$ ), alors elles sont équivalentes.

*Démonstration.* L'application  $\text{Id} : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$  est linéaire, continue et bijective. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, l'identité est bien un homéomorphisme.  $\square$

**Proposition 6.5.** Soient  $E, F$  des espaces de Banach. L'ensemble des applications linéaires et continues ouvertes  $O(E, F)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Avant de prouver la proposition, on introduit le lemme suivant :

**Lemme 6.6.** Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $A \subseteq F$  un sous-ensemble borné tels que  $A \subseteq T(B_E(0, 1)) + \varepsilon A$ . Alors  $A \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon}T(B_E[0, 1])$ .

**Remarque 6.7.** Le lemme ne requiert pas la complétude de  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $a = a_0$  un élément de  $A$ . Il existe  $x_0$  un élément de  $B_E(0, 1)$  et  $a_1 \in A$  tels que  $a_0 = T(x_0) + \varepsilon a_1$ . De même, il existe  $x_1$  un élément de  $B_E(0, 1)$  et  $a_2$  un élément de  $A$  tels que  $a_1 = T(x_1) + \varepsilon a_2$ , ce qui implique que

$$a_0 = T(x_0) + \varepsilon(T(x_1) + \varepsilon a_2).$$

En continuant ainsi, pour  $a_n \in A$ , il existe  $x_n \in B_E(0, 1)$  et  $a_{n+1} \in A$  tels que  $a_n = T(x_n) + \varepsilon a_{n+1}$ . On en déduit

$$a_0 = T(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^n x_n) + \varepsilon^{n+1} a_{n+1}.$$

Puisque  $A$  est borné et que  $0 < \varepsilon < 1$ , on a  $\varepsilon^n a_n \rightarrow 0$ . De plus, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Puisque  $E$  est complet, la série des  $\varepsilon^k x_k$  converge vers un élément  $x \in E$ . Alors  $a_0 = T(x)$  et  $\|x\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$  implique  $(1-\varepsilon)x \in B_E[0, 1]$ .  $\square$

Prouvons la proposition.

*Démonstration.* Soit  $T$  une application linéaire et continue ouverte de  $E$  dans  $F$ . On recherche  $r > 0$  tel que  $B_{\mathcal{L}(E,F)}(T, r) \subseteq O(E, F)$ . Puisque  $T$  est une application ouverte, il existe  $s > 0$  tel que  $B_F(0, s) \subseteq T(B_E(0, 1))$ . Soit  $S \in B_{\mathcal{L}(E,F)}(T, s/2)$ , montrons que  $S$  est une application ouverte.

Par hypothèse sur  $S$ ,  $\|T - S\| < s/2$ . Cela implique que pour tout  $x \in B_E(0, 1)$ ,  $\|T(x) - S(x)\| < s/2$ , d'où  $\|T(x)\| \leq \|S(x)\| + s/2$ .

En termes d'inclusions d'ensembles, on obtient

$$T(B_E(0, 1)) \subseteq S(B_E(0, 1)) + \frac{1}{2}B_F(0, s).$$

De l'hypothèse, on déduit,

$$B_F(0, s) \subseteq S(B_E(0, 1)) + \frac{1}{2}B_F(0, s).$$

Par le lemme, on a  $B_F(0, s) \subseteq \frac{1}{1-\frac{1}{2}}S(B_E(0, 1))$ . On en déduit que  $B_F(0, \frac{s}{2}) \subseteq S(B_E(0, 1))$   $\square$

## 6.2 Théorème du graphe fermé

Soient  $E, F$  des espaces vectoriels normés, et  $T : E \rightarrow F$ .

**Définition 6.8.** On note  $\text{Gr}(T) = \{(x, T(x)) \mid x \in E\}$  le graphe de  $T$ , qui est un sous-ensemble de  $E \times F$ .

On munit  $E \times F$  de la norme  $\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ . Cette norme engendre bien la topologie produit (pour le prouver, vous pouvez procéder comme suit : dans un premier temps, montrer que les rectangles ouverts sont bien des ouverts pour cette norme et ensuite montrer que les boules sont bien des ouverts au sens de la topologie produit).

**Exercice 6.2.** Si  $T$  est continue, alors  $\text{Gr}(T)$  est fermé.

Le théorème du graphe fermé est une réciproque partielle pour le résultat précédent ; il nécessite comme hypothèse additionnelle la complétude de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

**Théorème 6.9.** Supposons que  $E$  et  $F$  sont complets et que  $T$  est linéaire. Alors  $T$  est continue si et seulement si le graphe de  $T$  est fermé.

*Démonstration.* Supposons que le graphe de  $T$  est fermé, c'est-à-dire si  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments de  $E$  et  $(x, y) \in E \times F$ , si  $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y)$ , alors  $y = T(x)$ .

On définit une nouvelle norme sur  $E$ , pour  $x \in E$ , on pose  $\|x\| = \|x\|_E + \|T(x)\|_F$ , appelée norme du graphe. Montrons que  $E$  muni de cette norme est complet.

Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy au sens de la norme du graphe. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0$  naturel, pour tous  $p, q \geq n_0$ ,

$$\|x_q - x_p\|_E + \|T(x_q) - T(x_p)\|_F \leq \varepsilon.$$

Il s'en suit que  $(x_n)_n$  et  $(T(x_n))_n$  sont de Cauchy (au sens de  $\|\cdot\|_E$  et de  $\|\cdot\|_F$  respectivement) et convergent respectivement vers  $x \in E$  et  $y \in F$ . Puisqu'on suppose le graphe de  $T$  fermé, on a  $y = T(x)$ . Dès lors  $\|x_n - x\| = \|x_n - x\|_E + \|T(x_n) - T(x)\|_F$  qui converge bien vers 0.

De plus, on remarque que la norme du graphe (de  $T$ ) domine la norme  $\|\cdot\|_E$ . Par le corollaire 6.4, les deux normes sont équivalentes. En particulier, il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $\|x\|_E + \|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ . Ceci implique que  $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$  donc  $T$  est continue.  $\square$

**Proposition 6.10.** Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $T : E \rightarrow E^*$  linéaire telle que

$$\forall x, y \in E, (Tx)(y) = (Ty)(x)$$

(c'est-à-dire  $T$  est symétrique). Alors  $T$  est continue.

*Démonstration.* Montrons que le graphe de  $T$  est fermé (on a bien  $E$  et  $E^*$  complets). Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $E$ , soit  $(x, S) \in E \times E^*$  tels que  $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, S)$ . Soit  $z \in E$ . Montrons que  $S(z) = (Tx)(z)$ . On a, pour tout  $n$ ,  $(Tx_n)(z) = (Tz)(x_n)$ . Le premier membre converge vers  $S(z)$  par hypothèse et le second vers  $(Tz)(x)$  par continuité. D'où  $S = Tx$  (unicité de la limite).  $\square$

**Exercice 6.3.** On a utilisé implicitement dans l'exercice précédent que si  $(T_n)_n$  est une suite d'opérateurs  $E \rightarrow F$  convergeant vers un opérateur  $T$  au sens de la norme opérateur, alors pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $T_n(x) \rightarrow T(x)$ . Prouvez cette affirmation.

**Exercice 6.4.** Soient  $E$  un espace de Banach et  $T : E \rightarrow E^*$  linéaire vérifiant  $\forall x \in E, \langle Tx, x \rangle \geq 0$ . Montrer que  $T$  est continue.

**Exercice 6.5.** Soit  $(c_{00})$  l'espaces des suites à support fini, c'est-à-dire des suites qui ont un nombre fini d'éléments non nuls. On munit  $(c_{00})$  de la norme du maximum, ie. pour tout  $x = (x_n)_n \in c_{00}$ ,  $\|x\| = \max_n |x_n|$ .

Soit  $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$  définie par  $T((x_n)) = ((n+1)x_n)_n$  pour tout  $(x_n)_n$  dans  $c_{00}$ .

1.  $T$  est-elle linéaire ?
2.  $T$  est-elle continue ?
3. Qu'en est-il du graphe de  $T$  ?
4. Qu'en déduit-on ?

# Chapitre 7

## Topologie faible

### 7.1 Rappels sur la notion de topologie initiale

On se fixe  $E$  un ensemble non vide,  $(E_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$  une famille d'espaces topologiques et pour chaque  $j$  dans  $J$  une fonction  $f_j : E \rightarrow E_j$ .

**Définition 7.1** (Base d'ouverts pour la topologie initiale). On prend comme base d'ouverts les « rectangles ouverts » suivants :

$$\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i), \text{ où } I \subseteq J \text{ fini et } O_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$$

Pour rappel, tout ouvert est une union (quelconque) d'éléments de la base d'ouverts.

**Proposition 7.2.** La topologie initiale est la topologie la moins fine qui rend les  $f_j$  continue.

*Démonstration.* On fixe  $j \in J$ . Soit  $O_j$  un ouvert de  $\mathcal{T}_j$ . Alors son image réciproque par  $f_j$  est un ouvert de la topologie initiale par définition. De plus, si une topologie rend continue les  $f_j$ , elle contiendra nécessairement la topologie initiale par construction (on vérifie facilement que les éléments de la base d'ouverts de la topologie initiale sont ouverts pour la topologie considérée si elle rend les  $f_j$  continues).  $\square$

**Proposition 7.3.** Soient  $(F, \mathcal{T}_F)$  et  $f : F \rightarrow E$  où  $E$  est muni de la topologie initiale. Alors  $f$  est continue si et seulement si pour tout  $j \in J$ ,  $f_j \circ f$  est continue.

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est continue. Alors le résultat est immédiat car la continuité est préservée par composition.

Supposons maintenant que pour tout  $j \in J$ ,  $f_j \circ f$  est continue. Soit  $\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i)$ , où  $I \subseteq J$  fini et  $O_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ , un ouvert de la base d'ouverts de  $E$ . Alors

$$f^{-1} \left( \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i) \right) = \bigcap_{i \in I} (f_i \circ f)^{-1}(O_i)$$

est, par hypothèse, une intersection finie d'ouverts de  $F$  (par continuité des  $f_i \circ f, i \in I$ ) donc est ouverte. Donc  $f$  est continue.  $\square$

Notez que la preuve fonctionne aussi ponctuellement ;  $f$  est continue en  $x \in E$  si et seulement si les  $f_j \circ f$  sont continues en  $x$  (**exercice**). Pour montrer cela on se rappelle que tout voisinage d'un point contient un ouvert de la base d'ouverts contenant ce point.

**Corollaire 7.4.** Soient  $(x_n)_n \subseteq (E, \mathcal{T}_{\text{init}})$  et  $x \in E$ . Alors  $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{init}}} x$  si et seulement si pour tout  $j \in J$ ,  $f_j(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{init}}} f_j(x)$ .

Afin de prouver le corollaire, on montre le résultat suivant (qui est un rappel) :

**Lemme 7.5.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $X$ , et  $x \in X$ . On munit  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  de la topologie dont une base d'ouverts est formée des singletons  $\{n\}$  (où  $n$  est un nombre naturel) et des ensembles de la forme  $\{n \geq n_0\} \cup \{+\infty\}$ , où  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Dès lors,  $x_n \rightarrow x$  si et seulement si l'application  $n \mapsto x_n$ ,  $+\infty \mapsto x$  est continue en  $+\infty$ .

*Démonstration.* On traduit ce que signifient chacune de ces assertions. Dire que cette application est continue en  $+\infty$  est, par définition :

$$\forall V_x \text{ voisinage de } x, \exists V_\infty \text{ voisinage de } +\infty, \forall n \in V_\infty, x_n \in V_x$$

Dire que  $x_n \rightarrow x$ , revient à dire :

$$\forall V_x \text{ voisinage de } x, \exists n_0, \forall n \geq n_0, x_n \in V_x.$$

Il est clair que ces assertions sont équivalentes. □

Le corollaire 7.4 découle immédiatement de la proposition 7.3 et du lemme 7.5.

## Exemples

On rappelle deux exemples vus en deuxième année.

**Exemple 7.6.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $Y \subseteq X$  un sous-ensemble non vide de  $X$ . Alors, la topologie initiale sur  $Y$  associée à l'injection  $Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$  est la topologie induite.

**Exemple 7.7.** Soient  $((E_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soit  $E = \prod_{i \in I} E_i$ . La topologie initiale sur  $E$  associée aux projections  $p_i : E \rightarrow E_i$  est la topologie produit.

## 7.2 Topologie faible

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé réel. La topologie faible sur  $E$  est une topologie initiale sur  $E$ .

**Définition 7.8.** La topologie initiale associée aux éléments de  $E^*$  s'appelle topologie faible sur  $E$  et est notée  $\sigma(E, E^*)$  (ou encore  $\omega$ ).

La topologie faible est la topologie la moins fine qui rend les éléments de  $E^*$  continus. En particulier, la topologie faible sur  $E$  vérifie  $\sigma(E, E^*) \preceq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

**Lemme 7.9.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire continue au sens de la topologie faible. Alors,  $f$  est continue au sens de la norme  $\|\cdot\|$ .

*Démonstration.* Puisque  $\sigma(E, E^*) \preceq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ , et que tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}$  vérifie, par hypothèse que  $f^{-1}(O) \in \sigma(E, E^*)$ , le résultat est immédiat. □



Les éléments de la base d'ouverts de  $\sigma(E, E^*)$  sont de la forme

$$\bigcap_{j=1}^n (x_j^*)^{-1}(O_j) = \{x \in E \mid \forall 1 \leq j \leq n, \quad x_j^*(x) \in O_j\}$$

où  $n$  est un naturel non nul,  $x_j^*$  sont des formes linéaires et continues sur  $E$  et  $O_j$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Étudions les voisinages de 0. Soit  $V_0 \subseteq E$  un voisinage de 0 au sens de la topologie faible. Alors, il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $n \geq 1$  un naturel et  $x_j^* \in E^*$ , pour  $1 \leq j \leq n$  tels que

$$V_0 \supseteq V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0) := \{x \in E \mid \forall 1 \leq j \leq n, \quad |x_j^*(x)| < \varepsilon\}$$

**Explication :** il existe un ouvert  $U$  de la base donnée par la définition de topologie initiale (7.1) contenu dans  $V_0$ , c'est-à-dire il existe donc un nombre fini (disons  $n$ ) de  $x_j^* \in E^*$  et d'ouverts de  $\mathbb{R}$  contenant 0 tels que  $U = \bigcap_j (x_j^*)^{-1}(O_j) \subseteq V_0$ . Puisque chaque  $O_j$  contient un intervalle ouvert centré en 0, on prend pour  $\varepsilon$  le minimum des rayons de ces intervalles. Dès lors, on a :

$$V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0) \subseteq U \subseteq V_0.$$

Ceci montre que l'ensemble suivant est un système fondamental de voisinages de 0 :

$$\{V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0) \mid \varepsilon > 0, n \geq 1, x_j \in E^*, \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

En raisonnant de la même manière, on montre que pour tout  $a \in E$ , l'ensemble

$$\{V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(a) \mid \varepsilon > 0, n \geq 1, x_j \in E^*, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

est un système fondamental de voisinages de  $a \in E$  où

$$V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(a) = \{x \in E \mid \forall 1 \leq j \leq n, \quad |x_j^*(x - a)| < \varepsilon\}.$$

**Exemple 7.10.** Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . On a vu  $E \equiv E^*$ . Soit  $x^* = (x_1, x_2)$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . L'ensemble  $\{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^*(y) = 0\} = \text{Ker}(x^*)$  est une droite du plan. Si on fixe  $\varepsilon > 0$ , on trouve que l'ensemble  $V_{\varepsilon, x^*}(0)$  est une « bande » dans le plan (voir figure 7.1).

En particulier, un tel ouvert contient une droite passant par 0 et tout ouvert de la base d'ouverts est une intersection de telles bandes.

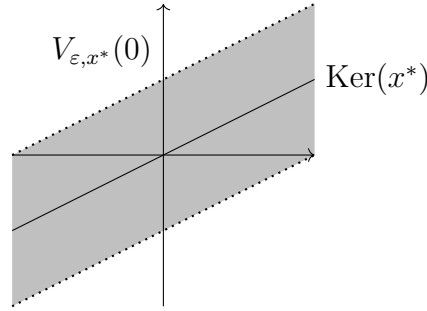
On peut généraliser cet exemple : soit  $x^* \in E^*$  non nul, alors l'ensemble  $V_{\varepsilon, x^*}(0)$  contient un hyperplan contenant 0 (car il contient le noyau de  $x^*$ ).

**Définition 7.11.** Soient  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  si la suite  $x_n \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} x$  (i.e. converge au sens de la topologie faible).

Les notations  $x_n \xrightarrow{\omega} x$  et  $x_n \rightharpoonup x$  sont également employées pour la convergence faible.

**Lemme 7.12.** Soient  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  et  $x \in E$ . Par le corollaire 7.4, pour avoir  $x_n \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} x$ , il suffit de vérifier que pour toute forme linéaire  $x^*$ , on a

$$x^*(x_n) \rightarrow x^*(x).$$

FIGURE 7.1 – Exemple d'ouvert  $V_{\varepsilon, x^*}(0)$  dans le plan

Dans le cas d'un espace de Hilbert  $H$  sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $H \equiv H^*$  (théorème de Riesz-Fréchet), on a :

$$x_n \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} x \iff (\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle).$$

Il est tout à légitime de se demander s'il y a unicité de la limite lorsqu'on considère la convergence faible. On a le résultat suivant, qui assure l'unicité de la limite faible :

**Proposition 7.13.**  $(E, \sigma(E, E^*))$  est séparé.

*Démonstration.* Soient  $x, y$  deux éléments distincts de  $E$ . Alors  $\{x\}$  et  $\{y\}$  sont deux convexes compacts. Par la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe un réel  $\alpha$ , une forme linéaire et continue  $x^*$  sur  $E$  tels que  $x^*(x) < \alpha < x^*(y)$ . Alors les ouverts faibles  $(x^*)^{-1}(]-\infty, \alpha[)$  et  $(x^*)^{-1}(] \alpha, +\infty[)$  contiennent  $x$  et  $y$  respectivement et sont clairement disjoints.  $\square$

**Remarque 7.14.** La convergence d'une suite au sens de  $\|\cdot\|$  implique la convergence faible de cette dernière vers la même limite. Toutefois, l'implication réciproque n'est pas vraie en général.

Soit  $\ell^2$  l'espace des suites de carré sommable (pour rappel il s'agit d'un espace de Hilbert), et la suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ .

Cette suite converge faiblement vers 0, car pour tout élément  $y$  de  $\ell^2$ ,  $\langle e_n, y \rangle = y_n \rightarrow 0$  (car les termes d'une série convergente convergent vers 0). Toutefois, elle ne converge pas vers 0 au sens de la norme car pour tout  $n$ ,  $\|e_n\|_2 = 1$ .

## 7.3 Topologie préfaible

### 7.3.1 Définition et voisinages

On se fixe à nouveau un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ . On introduit une nouvelle topologie sur  $E^*$ , le dual de  $E$ , appelée topologie préfaible. On la notera  $\sigma(E^*, E)$  ou encore  $\omega^*$ .

Il s'agit encore une fois d'une topologie initiale. On considère pour chaque élément  $x \in E$  la fonction linéaire et continue

$$\varphi_x : E^* \rightarrow \mathbb{R} : x^* \mapsto x^*(x).$$

**Définition 7.15.** La topologie initiale sur  $E^*$  associée à la famille de fonctions  $(\varphi_x)_{x \in E}$  est appelée topologie préfaible sur  $E^*$ .

Les éléments de la base d'ouverts de  $\sigma(E^*, E)$  sont de la forme

$$\bigcap_{j=1}^n (\varphi_{x_j})^{-1}(O_j) = \{x^* \in E^* \mid \forall 1 \leq j \leq n, \quad x^*(x_j) \in O_j\}$$

où les  $x_j$  sont des éléments de  $E$  et les  $O_j$  des ouverts de  $\mathbb{R}$ .

On définit (comme dans la section précédente) pour  $a^* \in E^*$  le voisinage  $V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(a^*)$  pour  $\varepsilon > 0$  et  $x_1, \dots, x_n \in E$  comme l'ensemble :

$$V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(a^*) = \{x^* \in E^* \mid |(x^* - a^*)(x_j)| < \varepsilon, \forall j = 1, \dots, n\}.$$

On montre comme pour la topologie faible que l'ensemble de ces voisinages

$$\{V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(a^*) \mid \varepsilon > 0, x_1, \dots, x_n \in E, n \geq 1\}$$

est un système fondamental de voisinages de  $a^*$ .

### 7.3.2 Comparaison de topologies

On a désormais trois topologies sur le dual de  $E$  ; la topologie forte (de la norme), la topologie faible  $\sigma(E^*, E^{**})$  et la topologie préfaible  $\sigma(E^*, E)$ . On peut les comparer comme suit :

**Proposition 7.16.** On a les comparaisons suivantes :

$$\sigma(E^*, E) \preceq \sigma(E^*, E^{**}) \preceq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$$

*Démonstration.* Au vu de la section précédente, il suffit de vérifier que tout ouvert préfaible de  $E^*$  est un ouvert faible. Toutefois, puisque les  $\varphi_x$  sont des éléments de  $E^{**}$ , on en déduit facilement que tout ouvert de la base d'ouverts de la topologie préfaible est un ouvert de la topologie faible, ce qui donne le résultat.  $\square$

**Remarque 7.17.** Si  $E$  est réflexif, alors la topologie faible et préfaible sur  $E^*$  coïncident.

## 7.4 Résultats sur la topologie faible

**Théorème 7.18.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Si  $E$  est de dimension finie, alors les topologies forte et faible coïncident.

*Démonstration.* On a déjà  $\sigma(E, E^*) \preceq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ . Il reste à montrer l'inclusion réciproque.

Soit  $U \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  un ouvert fort. Il suffit de montrer que  $U$  est un voisinage faible de tout ses points pour avoir le résultat. Soit  $x_0 \in U$ .

Par hypothèse, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subseteq U$ . Pour conclure, il suffit de trouver  $\varepsilon > 0$  et  $x_1^*, \dots, x_m^* \in E^*$  ( $m$  à déterminer) tels que  $V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_m^*}(x_0) \subseteq B(x_0, r)$ .

Notons  $n$  la dimension de  $E$  et soit  $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  dont tous les vecteurs sont de norme 1. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on considère

$$e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K} : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \mapsto x_i$$

(les éléments de la base duale de  $B$ ).

On recherche désormais  $\varepsilon > 0$  tel que  $V_{\varepsilon, e_1^*, \dots, e_n^*} \subseteq B(x_0, r)$ . Soit  $x \in V_{\varepsilon, e_1^*, \dots, e_n^*}$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^n e_j^*(x) e_j - \sum_{j=1}^n e_j^*(x_0) e_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n e_j^*(x - x_0) e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |e_j^*(x - x_0)| \|e_j\| \leq n\varepsilon \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir  $\varepsilon < r/n$ . □

**Proposition 7.19.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $x \in E$ . Supposons que  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$ . Alors

1. La suite  $(x_n)$  est bornée ;
2.  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x^* \in E^*$ , la suite  $(x^*(x_n))_n$  est bornée car convergente. Par la propriété 5.5 (découlant du théorème de Banach-Steinhaus), la suite  $(x_n)_n$  est bornée.

Pour la seconde partie, on considère  $x^* \in E^*$ ,  $\|x^*\| \leq 1$ . Alors, pour tout naturel  $n$ ,  $|x^*(x_n)| \leq \|x_n\|$ , ce qui implique  $|x^*(x)| = \liminf |x^*(x_n)| \leq \liminf \|x_n\|$  (notez que cette limite inférieure est bien un réel car la suite est bornée inférieurement). La remarque 3.7 (un corollaire du théorème de Hahn-Banach) assure qu'il existe  $x^* \in E^*$ ,  $\|x^*\| \leq 1$  telle que  $|x^*(x)| = \|x\|$ , ce qui donne l'inégalité désirée. □

**Proposition 7.20.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. On considère  $C \subseteq E$  un sous-ensemble convexe de  $E$ . Alors  $C$  est fermé pour  $\sigma(E, E^*)$  si et seulement si  $C$  est fermé pour la topologie de la norme.

*Démonstration.* On peut supposer que  $C$  est non vide sans perte de généralité, le cas  $C = \emptyset$  étant trivial.

Puisque  $\sigma(E, E^*) \preceq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ , si  $C$  est fermé pour la topologie faible, alors il est fermé pour la topologie de la norme.

Réciproquement, supposons que  $C$  est fermé pour la topologie de la norme. Il faut montrer que  $\text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(C) = C$ . L'inclusion  $\text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(C) \supseteq C$  est toujours vraie dans un espace topologique.

Pour montrer que  $\text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(C) \subseteq C$ , on montre plutôt que  $(E \setminus C) \subseteq (E \setminus \text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(C))$ . Soit  $x \in (E \setminus C)$ . Puisque  $x \notin C = \text{adh}_{\|\cdot\|}(C)$ , on peut appliquer une forme géométrique du théorème de Hahn-Banach ; puisque  $C$  est un convexe fermé et  $\{x\}$  est un compact convexe et que ces ensembles sont disjoints, il existe  $x^* \in E^*$  et un réel  $\alpha$  tels que  $x^*(x) < \alpha$  et  $x^*(C) \subseteq ]\alpha, +\infty[$ . En posant  $U_x = (x^*)^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ , on a un ouvert faible tel que  $U_x \cap C = \emptyset$  ce qui montre  $x \notin \text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(C)$ . □

**Proposition 7.21.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach de dimension infinie. Soit  $S := S(E) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ . Alors  $\text{adh}_{\sigma(E, E^*)}(S) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ .

Avant de prouver la proposition, on introduit le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 7.22.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel de dimension infinie. Soient  $n \geq 1$  un nombre naturel et  $x_1^*, \dots, x_n^* \in E^*$ .

Il existe  $y_0 \in E$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i^*(y_0) = 0$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que pour tout  $y \in E \setminus \{0\}$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i^*(y) \neq 0$ . Alors l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n : y \mapsto (x_i^*(y))_{i=1}^n$$

est une application linéaire et injective. Dès lors  $\dim E \leq n$  contradiction.  $\square$

Prouvons désormais le proposition :

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in E$ ,  $\|x_0\| < 1$ . Montrons que  $x_0 \in \text{adh}_{\sigma(E, E^*)} S$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_1^*, \dots, x_n^* \in E^*$ , montrons que  $V := V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(x_0)$  intersecte  $S$ . Soit  $y_0 \neq 0$  fourni par le lemme 7.4. On définit une application  $g : [0, +\infty[ : t \mapsto \|x_0 + ty_0\|$ . Cette application est continue,  $g(0) < 1$  et  $g$  tend vers l'infini quand  $t$  tend vers l'infini, il existe  $t_0$  tel que  $g(t_0) = 1$  c'est-à-dire  $z_0 := x_0 + t_0 y_0 \in S$ .

Montrons que  $z_0 \in V$ . On a  $|x_i^*(x_0 - z_0)| = |t_0 x_i^*(y_0)| = 0 < \varepsilon$  par choix de  $y_0$ , et ce pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Remarque 7.23.** On remarque dans la preuve que si  $E$  est de dimension infinie, tout voisinage (du système fondamental) d'un point  $x_0$  contient une droite passant par  $x_0$ , car  $x_0 + ty_0$  appartient à ce voisinage où  $y_0$  est obtenu de la même manière que dans la preuve précédente.

**Exercice 7.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de dimension infinie. Montrer l'égalité

$$\text{int}_{\sigma(E, E^*)}(\{x \in E \mid \|x\| < 1\}) = \emptyset.$$

**Proposition 7.24.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Alors

$$(E^*, \sigma(E^*, E))^* \equiv E.$$

*Démonstration.* On sait déjà que pour tout  $x \in E$ , l'application  $x^{**} : E^* \rightarrow \mathbb{R} : y^* \mapsto x^{**}(y^*) = y^*(x)$  est élément de  $(E^*, \sigma(E^*, E))^*$  (par définition de la topologie préfaible, on retrouve simplement l'application qui avait été appelée  $\varphi_x$ ).

Il reste à montrer que pour tout élément  $x^{**}$  de  $(E^*, \sigma(E^*, E))^*$ , il existe  $x \in E$  tel que pour tout  $x^* \in E^*$ ,  $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Par continuité de  $x^{**}$ ,

$$U = (x^{**})^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| < \varepsilon\})$$

est un voisinage préfaible de 0. Il existe un voisinage de 0 du système fondamental de voisinages énoncé précédemment contenu dans  $U$ , c'est-à-dire il existe  $\eta > 0$  et  $x_1, \dots, x_n \in E$  tels que  $V_0 := V_{\eta, x_1, \dots, x_n}(0) \subseteq U$ .

Soit  $x^* \in E^*$ . On note  $(\star)$  l'affirmation suivante : si pour tous  $i$  allant de 1 à  $n$ ,  $x^*(x_i) = 0$ , alors  $x^* \in V_0$  et  $x^{**}(x^*) = 0$ . L'appartenance  $x^* \in V_0$  est claire. Par l'absurde, on suppose que  $x^{**}(x^*) \neq 0$ . Alors  $\frac{x^*(x_i)}{x^{**}(x^*)} = 0$  pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  donc  $\frac{x^*}{x^{**}(x^*)} \in V_0$  mais  $x^{**}\left(\frac{x^*}{x^{**}(x^*)}\right) = 1 \geq \varepsilon$  ce qui contredit l'inclusion  $V_0 \subseteq U$ .

Soit  $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  et  $(x_1, \dots, x_r)$  une base de  $F$ ,  $r \leq n$  (quitte à réindicer les  $x_i$ ). Soit pour chaque  $i$  variant de 1 à  $r$ , l'application linéaire et continue  $x_i^* : F \rightarrow \mathbb{R}$  définie

par  $x_i^*(x_j) = \delta_i(\{j\})$  (où  $\delta_i$  est le delta de Dirac) pour tous  $j$  allant de 1 à  $r$ . Par le théorème de Hahn-Banach, chacune de ces fonctions s'étend en une fonction  $\tilde{x}_i^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose

$$w^* = x^* - \sum_{i=1}^r x^*(x_i) \tilde{x}_i^*$$

(même si ce n'est pas explicitement apparent dans la notation,  $w^*$  dépend du  $x^*$  considéré).

Pour chaque  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a  $w^*(x_j) = 0$ , donc par l'affirmation  $(\star)$ ,  $x^{**}(w^*) = 0$ . Par linéarité de  $x^{**}$ , on déduit

$$x^{**}(w^*) = x^{**}(x^*) - \sum_{i=1}^r x^*(x_i) x^{**}(\tilde{x}_i^*) = 0.$$

On en déduit

$$x^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^r x^*(x_i) x^{**}(\tilde{x}_i^*) = x^* \left( \sum_{i=1}^r x^{**}(\tilde{x}_i^*) x_i \right),$$

et on en déduit que le  $x$  recherché est  $\sum_{i=1}^r x^{**}(\tilde{x}_i^*) x_i$  (il ne dépend pas de  $x^*$ ).  $\square$

Notez que dans la preuve précédente, la valeur choisie pour  $\varepsilon$  n'a pas d'importance dans les calculs, tant qu'elle est strictement positive.

**Proposition 7.25.** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  est continue, alors  $T : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow (F, \sigma(F, F^*))$  continue (on dit que  $T$  est faiblement continue. Réciproquement, si  $T$  est faiblement continue, alors  $T$  est continue.

*Démonstration.* Supposons que  $T$  est continue. Au vu de la linéarité de  $T$ , il suffit de montrer la continuité en 0.

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $n \geq 1$  et  $x_1^*, \dots, x_n^* \in F^*$ . Afin d'établir la continuité faible de  $T$ , il suffit de montrer que  $T^{-1}(V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0_F))$  est un ouvert faible de  $E$  (ainsi, on montre que l'image réciproque de tout voisinage de  $0_F = T(0_E)$  est un voisinage de  $0_E$ ). Pour tout  $i$  allant de 1 à  $n$ ,  $x_i \circ T \in E^*$  d'où

$$\begin{aligned} T^{-1}(V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0_F)) &= T^{-1} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} (x_i^*)^{-1}(\text{]-}\varepsilon, \varepsilon\text{[}) \right) \\ &= \bigcap_{1 \leq i \leq n} (x_i^* \circ T)^{-1}(\text{]-}\varepsilon, \varepsilon\text{[}) \end{aligned}$$

est bien un voisinage faible de  $E$  contenant 0.

Réciproquement, supposons que  $T$  est faiblement continue. Alors le graphe de  $T$  est fermé pour la topologie produit  $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$  et puisque le graphe d'une application linéaire est convexe, la proposition 7.20 assure qu'il est fortement fermé. Par le théorème du graphe fermé,  $T$  est fortement continue.  $\square$

Notez qu'une assertion qui n'est à première vue pas évidente est utilisée dans la preuve précédente. Elle fait l'objet de l'exercice suivant :

**Exercice 7.2.** Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels normés. La topologie faible associée à la topologie produit sur  $E \times F$  (i.e.  $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$ ) correspond à la topologie produit  $\mathcal{T}_\pi$  sur  $(E, \sigma(E, E^*)) \times (F, \sigma(F, F^*))$

**Exercice 7.3.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $E$  et  $x \in E$  tels que  $x_n \xrightarrow{\omega} x$ . Montrer que la suite  $(x_n)_n$  converge faiblement en moyenne de Césaro vers  $x$ , c'est-à-dire,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\omega} x$$

**Théorème 7.26** (Théorème d'Alaoglu). Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. La boule unité  $B(E^*) = \{x \in E^* \mid \|x\| \leq 1\}$  est  $\sigma(E^*, E)$ -compacte.

*Démonstration.* Admis. □

**Théorème 7.27.** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $T$  est continue, alors  $T$  est faiblement continue (*i.e.*  $T : (E, \omega_E) \rightarrow (F, \omega_F)$  est continue), et réciproquement.

*Démonstration.* Supposons que  $T$  est continue. Au vu de la linéarité de  $T$ , il suffit de montrer que  $T$  est faiblement continue en 0. Soit  $V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0_F)$  un voisinage du système fondamental de voisinages de  $0_F = T(0_E)$ . Alors  $T^{-1}(V_{\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*}(0_F)) = V_{\varepsilon, (x_1^* \circ T), \dots, (x_n^* \circ T)}(0_E)$  est bien un voisinage faible de  $0_E$ .

Réciproquement, supposons que  $T$  est faiblement continue. Alors, le graphe de  $T$  est un fermé convexe de  $(E \times F, \omega_{E \times F})$  (cf. exercice ci-avant), donc il est également fermé au sens de  $(E \times F, \|\cdot\|_E \times \|\cdot\|_F)$  et par le théorème du graphe fermé,  $T$  est continue. □





# Chapitre 8

## Théorie ergodique et propriété de Blum-Hanson

### 8.1 Opérateurs adjoints

#### 8.1.1 Adjoints dans les espaces de Hilbert

**Proposition 8.1.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Il existe un opérateur linéaire  $T^*$  tel que pour tous  $x, y \in H$ , on a

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

et on a  $\|T\| = \|T^*\|$ .

*Démonstration.* Pour  $y \in H$ , on définit  $y^* : H \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ . Le théorème de Riesz-Fréchet assure dès lors qu'il existe un unique  $z_y \in H$ , tel que pour tout  $x$  dans  $H$ ,  $\langle x, z_y \rangle = \langle Tx, y \rangle$ . On pose  $T^*y = z_y$ .

Montrons que  $T^*$  est linéaire. Soient  $y, z \in H$  et  $a, b \in \mathbb{K}$ . Pour tout  $x \in H$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(ay + bz) \rangle &= \langle Tx, ay + bz \rangle \\ &= \bar{a}\langle Tx, y \rangle + \bar{b}\langle Tx, z \rangle \\ &= \bar{a}\langle x, T^*y \rangle + \bar{b}\langle x, T^*z \rangle \\ &= \langle x, aT^*(y) + bT^*(z) \rangle. \end{aligned}$$

Par non-dégénérescence du produit scalaire, on a  $T^*(ay + bz) = aT^*(y) + bT^*(z)$ , ce qui montre la linéarité.

Montrons maintenant la continuité de  $T^*$ . Pour tous  $x, y \in H$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que  $|\langle x, T^*y \rangle| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ . Rappelons que  $\|T^*y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^*y \rangle|$ , et on déduit de ces inégalités que  $\|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$ . Ceci montre la continuité de  $T^*$ .

Il reste à démontrer la deuxième inégalité pour clôturer la preuve de la proposition. Or, pour tous  $x \in H$ , on a

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle Tx, y \rangle = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, T^*y \rangle \leq \|x\| \cdot \|T^*\|$$

ce qui conclut la preuve. □

**Définition 8.2.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . On appelle l'opérateur  $T^*$  donné par la proposition 8.1 est appelé l'adjoint de  $T$ .

**Remarque 8.3.** L'adjoint d'un opérateur linéaire  $T$  est unique. L'application  $\mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H) : T \mapsto T^*$  est bijective, car elle est son propre inverse, c'est-à-dire  $T^{**} = T$ .

**Exercice 8.1.** Soit  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ . Déterminez  $T^*$ .

### 8.1.2 Adjoints dans les espaces de Banach

**Définition 8.4.** Soient  $X, Y$  des espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . On définit l'adjointe de  $T$  (également appelée transposée ou application duale) par

$$T^* : Y^* \rightarrow X^* : y^* \mapsto y^* \circ T.$$

**Proposition 8.5.** Soient  $X, Y$  des espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . L'application  $T^*$  est linéaire et continue et on a l'égalité  $\|T^*\| = \|T\|$ .

*Démonstration.* La preuve de la linéarité est laissée en exercice.

Pour tout  $y^* \in Y^*$ , on a  $\|T^*(y^*)\| \leq \|y^*\| \cdot \|T\|$  (par sous-multiplicativité de la norme opérateur), ce qui montre que  $\|T^*\| \leq \|T\|$ . En particulier,  $T^*$  est continue.

L'inégalité réciproque se déduit du corollaire 3.7 du théorème de Hahn-Banach ; pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\|Tx\| = \max_{\substack{\|y^*\| \leq 1 \\ y^* \in Y^*}} |y^*(T(x))| = \max_{\substack{\|y^*\| \leq 1 \\ y^* \in Y^*}} |T^*(y^*)(x)| \leq \|T^*\| \cdot \|x\|.$$

□

## 8.2 Théorie ergodique

### 8.3 Propriété de Blum-Hanson (1960)

# Chapitre 9

## Séparabilité

### 9.1 Définitions et propriétés

**Définition 9.1.** Soit  $(E, \mathcal{T})$  un espace topologique. On dit que  $E$  est séparable s'il existe un sous-ensemble  $D$  de  $E$  dénombrable tel que  $\bar{D} = E$ .

Un exemple d'espace séparable est  $\mathbb{R}$  (avec sa topologie usuelle). En effet,  $\mathbb{Q}$  est un sous-ensemble dénombrable dense de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 9.2.** Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $F \subseteq E$ . Si  $E$  est séparable, alors  $F$  est séparable.

*Démonstration.* Soit  $D = \{x_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\}$  tel que  $\bar{D} = E$ . Pour tous  $n, k$  naturels,  $k \neq 0$ , si  $B(x_n, 1/k) \cap F$  est non vide, on choisit  $y_{n,k}$  un élément de cette intersection. Posons

$$L = \left\{ y_{n,k} \in F \mid n, k \in \mathbb{N}, k \neq 0, B\left(x_n, \frac{1}{k}\right) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

et montrons que  $\bar{L} = F$  (où on considère ici l'adhérence au sens de la topologie induite sur  $F$ ).

Soient  $y \in F$  et  $k$  un naturel non nul. Comme  $\bar{D} = E$ , il existe  $n$  tel que  $d(x_n, y) < 1/k$ . Ceci implique que  $B(x_n, 1/k) \cap F$  est non vide, et donc  $y_{n,k}$  est bien défini. On a, par l'inégalité triangulaire que  $d(y, y_{n,k}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,k}) < 1/2k$ .

Ceci montre que  $\bar{L} = F$ . Comme  $L$  est au plus dénombrable, la preuve est terminée.  $\square$

**Proposition 9.3.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E$  est séparable ;
2.  $B(E) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$  est séparable ;
3.  $S(E) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$  est séparable.

*Démonstration.* Au vu de la proposition 9.2, la première assertion implique la deuxième et la deuxième la troisième. On montre que la première est impliquée par la troisième.

Soit  $D = \{x_n \in S(E) \mid n \in \mathbb{N}\}$  tel que  $\bar{D} = S(E)$ . Posons  $L = \{qx_n \mid q \in \mathbb{Q}^{>0}, n \in \mathbb{N}\}$ . Alors  $L$  est dense dans  $E$  car pour tout vecteur  $x \in E$ ,

$$x = \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \in [0, +\infty[ \cdot S(E) = \text{adh}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}^{>0} \cdot \text{adh}_E D = \bar{L}.$$

L'argument sous-jacent à ces notations est que la multiplication scalaire  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$  est continue et qu'en conséquence si  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  et  $v_n \rightarrow v$  sont deux suites convergentes, respectivement une suite de réels et de vecteurs, alors la limite de la suite  $\lambda_n v_n$  existe et vaut  $\lambda v$ .  $\square$

## 9.2 Exemples d'espaces séparables

**Vous êtes invité à travailler ces exemples par vous-même avant de lire les solutions.**

**Exemple 9.4.** L'espace de suites  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  est séparable.

*Démonstration.* Soit  $D = \{(q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \mid N \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}\}$  l'ensemble des suites à coefficients rationnels ultimement nulles. Il s'agit d'un ensemble dénombrable (car trivialement en bijection avec l'union dénombrable  $\bigcup_n \mathbb{Q}^n$ ). Montrons que  $\bar{D} = c_0$ .

Soit  $x = (x_n)_n \in c_0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que tout  $n \geq N$  vérifie  $|x_n| < \varepsilon$ . Pour  $j = 0 \rightarrow N$ , il existe  $q_j \in \mathbb{Q}$  tel que  $|x_j - q_j| < \varepsilon$  (car  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ). Dès lors,  $(q_0, \dots, q_N, 0, \dots)$  est élément de  $D$   $\varepsilon$ -proche de  $x$ .

Ceci termine la preuve.  $\square$

**Exemple 9.5.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . L'espace de suites  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  est séparable.

*Démonstration.* Soit  $D = \{(q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \mid N \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{Q}\}$  l'ensemble des suites à coefficients rationnels ultimement nulles. Il s'agit d'un ensemble dénombrable.

Soient  $x = (x_n)_n \in \ell^p$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

Pour  $j = 0 \rightarrow N$ , il existe  $q_j$  rationnel tel que  $|x_j - q_j|^p < \varepsilon/N$ . Posons  $u = (q_0, \dots, q_N, 0, \dots) \in D$ , alors  $\|u - x\|_p^p < 2\varepsilon$ .

Ceci termine la preuve.  $\square$

**Remarque 9.6.** Dans les deux exemples précédents, on a considéré  $c_0$  et  $\ell^2$  comme  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés. Si on considère leur analogue complexe, il est nécessaire de considérer l'ensemble des suites à coefficients dans  $\mathbb{Q}(i)$  (ou un autre sous-ensemble dénombrable dense de  $\mathbb{C}$ ) ultimement nulles, plutôt que  $\mathbb{Q}$ .

**Exemple 9.7.**  $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$  est séparable.

*Démonstration.* Le théorème d'approximation de Weierstrass assure que l'espace des polynômes est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe un sous-ensemble de l'espace des polynômes dénombrable dont l'adhérence contient l'espaces des polynômes<sup>1</sup>.

Il suffit de considérer l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels. Il est bien dense dans l'ensemble des polynômes (car  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ).  $\square$

1. Rappel : Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $D$  dense dans  $X$  et  $E \subseteq D$  tel que  $D \subseteq \bar{E}$ . Par monotonie de l'adhérence, on a  $X = \bar{D} \subseteq \bar{E} = \bar{E}$ , donc  $E$  est également dense.

## 9.3 Exemples d'espaces non-séparables

**Rappel :**  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ .

Avant de présenter des exemples, on introduit un résultat utile pour montrer qu'un espace métrique n'est pas séparable.

**Proposition 9.8.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. S'il existe  $B \subseteq E$  non dénombrable tel que tous  $b_1, b_2 \in B$  distincts on a  $d(b_1, b_2) \geq 1$  alors tout sous-ensemble  $A$  dense de  $E$  est non dénombrable.

*Démonstration.* Soient  $b_1, b_2$  deux éléments de  $B$ . À l'aide de l'inégalité triangulaire, on obtient que  $B(b_1, 1/4) \cap B(b_2, 1/4) = \emptyset$  (sinon  $b_1$  et  $b_2$  sont  $1/2$ -proches).

Soit  $A$  un sous-ensemble dense de  $E$ . Alors  $A$  intersecte chacun des boules  $B(b, 1/4)$ ,  $b \in B$ . Comme elles sont disjointes et que  $B$  est non dénombrable, cela assure que  $A$  est non dénombrable.  $\square$

**Corollaire 9.9.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. S'il existe  $B \subseteq E$  non dénombrable tel que tous  $b_1, b_2 \in B$  distincts on a  $d(b_1, b_2) \geq 1$  alors  $E$  n'est pas séparable.

**Exemple 9.10.** L'espace de suites  $\ell^\infty$  n'est pas séparable.

*Démonstration.* On applique le corollaire 9.9. On prend le sous-ensemble de  $\ell^\infty$  suivant :

$$B = \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty \mid \forall n, x_n = \mathbb{1}_A(n), A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

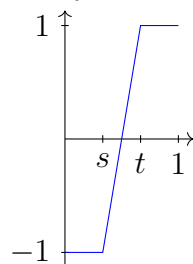
L'ensemble  $B$  est bien non dénombrable (on peut y plonger les parties de  $\mathbb{N}$ ) et deux éléments distincts seront distants de 1 ; étant données deux parties différentes de  $\mathbb{N}$ , il existe un naturel dans une partie et pas l'autre, et les suites associées vaudront respectivement 0 et 1 en la composante correspondante, ce qui implique l'affirmation.  $\square$

**Exemple 9.11.**  $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}))^*$  n'est pas séparable.

*Démonstration.* Soit pour  $t \in [0, 1]$  la forme linéaire  $\text{ev}_t : \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(t)$ . Cette forme est continue car pour  $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $|\text{ev}_t(f)| \leq \|f\|_\infty$ .

On montre que la famille  $(\text{ev}_t)_{t \in [0, 1]}$  satisfait les hypothèses du corollaire 9.9. Il s'agit bien d'une famille non dénombrable d'éléments de  $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}))^*$ . Considérons maintenant  $t, s \in [0, 1]$ ,  $t \neq s$ . Pour montrer que  $\text{ev}_t$  et  $\text{ev}_s$  vérifient  $\|\text{ev}_t - \text{ev}_s\| \geq 1$ , il suffit de prendre une fonction de norme au plus 1 similaire à celle illustrée à la figure 9.1.

FIGURE 9.1 – Fonction  $f$  illustrant  $\|\text{ev}_t - \text{ev}_s\| \geq 1$



$\square$

**Exemple 9.12.**  $\mathcal{L}(\ell^2)$  n'est pas séparable.

*Démonstration.* Notons chaque élément de  $\ell^2$  comme suit :

$$(x_n)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n.$$

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$ , on pose

$$T_A : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \mapsto \sum_{n \in A} x_n e_n.$$

On vérifie facilement que  $T_A$  est bien définie, linéaire et continue (on a  $\|T_A\| = 1$  si  $A$  est non vide, sinon  $T_A$  est l'application nulle). L'ensemble  $B = \{T_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$  vérifie les hypothèses du corollaire 9.9 ; il s'agit bien d'un ensemble non dénombrable de  $\mathcal{L}(\ell^2)$ , et étant donnés  $A, A' \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A \neq A'$ , alors il existe (sans perte de généralité, quitte à échanger  $A$  et  $A'$ )  $n \in A \setminus A'$ , d'où  $T_A(e_n) = 1$  et  $T_{A'}(e_n) = 0$  ce qui implique  $\|T_A - T_{A'}\| \geq 1$ .  $\square$

# Annexe A

## Solutions des exercices

Tous les exercices ne seront pas corrigés.

### A.1 Hahn-Banach (Formes analytiques)

#### Solution de l'exercice 3.1

1. Supposons que  $x_0 \in \text{adh}(F)$ . Etant donné que le noyau de toute forme linéaire continue est fermé (le noyau est l'image réciproque du singleton 0 qui est fermé, donc est fermé par continuité), et que le passage à l'adhérence conserve les inclusions, il est aisé de conclure.

Réciproquement, supposons que  $x_0 \notin \text{adh}(F)$ . Par le corollaire 3.8 des formes analytiques de Hahn-Banach, il existe une forme s'annulant sur  $F$  et pas en  $x_0$ , ce que l'on voulait montrer.

2. Supposons  $F$  dense dans  $E$ . Soit  $x^* \in E^*$  tel que  $F \subseteq \text{Ker}(x^*)$ . Etant donné que ce noyau est fermé, il contient la fermeture de  $F$  qui est  $E$ . Ceci implique que  $x^*$  est l'application constante nulle.

Réciproquement, supposons  $F$  non dense dans  $E$ . Il suffit de considérer un élément du complémentaire de l'adhérence de  $F$  et d'appliquer le résultat 3.8 pour obtenir une forme linéaire dont le noyau contient  $F$  mais non identiquement nulle.

### A.2 Hahn-Banach (Formes géométriques)

#### Solution de l'exercice 3.3

On vérifie facilement que si  $x \in \alpha C$ , alors pour tout  $\beta > \alpha$ ,  $x \in \beta C$ ; avoir que  $\alpha^{-1}x \in C$  implique que le segment joignant 0 et ce point est contenu dans  $C$ , et  $\beta^{-1}x$  est dans le segment car  $\beta^{-1} < \alpha^{-1}$ .

Par définition de la jauge,  $j_C(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $\alpha > 0$  tel que  $j_C(x) \leq \alpha \leq j_C(x) + \varepsilon$  et  $x \in \alpha C$ . Par ce qui précède, on peut conclure.

## A.3 Topologie faible

### Solution de l'exercice 7.2

**Lemme A.1.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. Notons  $\pi_E$  (resp.  $\pi_F$ ) la projection sur  $E$  (resp.  $F$ ). Pour tout élément  $z^*$  de  $(E \times F)^*$ , il existe  $x^* \in E^*$ ,  $y^* \in F^*$  tels que  $z^* = (x^* \circ \pi_E) + (y^* \circ \pi_F)$ .

*Démonstration.* Soient les applications linéaires  $\sigma_E : E \rightarrow E \times F : x \mapsto (x, 0)$  et  $\sigma_F : F \rightarrow E \times F : y \mapsto (0, y)$ . Elles sont clairement continues (sur le produit on considère la norme du maximum). Posons  $x^* = z^* \circ \sigma_E$  et  $y^* = z^* \circ \sigma_F$ . Puisque  $\pi_E \circ \sigma_E = \text{Id}_E$  et  $\pi_F \circ \sigma_F = \text{Id}_F$ , on a bien l'égalité ci-dessus.  $\square$

Notons  $\mathcal{T}_\pi$  la topologie sur le produit  $(E, \omega_E) \times (F, \omega_F)$  et  $\mathcal{T}_\omega$  la topologie faible sur  $(E, \|\cdot\|_E) \times (F, \|\cdot\|_F)$ .

En utilisant ce lemme, on peut résoudre l'exercice. Il suffit de montrer  $\mathcal{T}_\pi$  rend les formes linéaires de  $(E \times F)^*$  continues et que  $\mathcal{T}_\omega$  rend continues les projections  $\pi_E$  et  $\pi_F$ .

Soit  $z^* \in (E \times F)^*$ . Soit  $x^* \in E^*$  et  $y^* \in F^*$  donnés par le lemme ci-dessus. Comme les projections sont continues pour la topologie produit, et que la continuité est préservée par la somme et la composition, on en déduit que  $z^*$  est continue au sens de la topologie produit. Ceci montre que la topologie produit est plus fine que la topologie faible, c'est-à-dire  $\mathcal{T}_\pi \supseteq \mathcal{T}_\omega$ .

Soit  $U$  un ouvert élémentaire de  $\mathcal{T}_\pi$ . On veut montrer qu'il s'agit d'un ouvert au sens de la topologie faible sur le produit. Soient  $V_i$  et  $W_i$  des ouverts de  $(E, \omega_E)$  et  $(F, \omega_F)$ ,  $i \in I$ , tels que

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i \times W_i.$$

Pour conclure que  $U \in \mathcal{T}_\omega$ , il suffit de montrer que chaque  $V_i \times W_i$  est ouvert au sens de  $\mathcal{T}_\omega$ . Soit  $i \in I$ . Alors  $V_i$  est une union d'ouverts éléments, qui sont des intersections de  $(x_{i,j}^*)^{-1}(O_{i,j})$  avec  $O_{i,j}$  ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $x_{i,j}^* \in E^*$  pour  $j = 1, \dots, m$ . En considérant  $z_{i,j}^* = x_{i,j}^* \circ \pi_E \in (E \times F)^*$ , on a

$$V_i \times F = \bigcup \bigcap_{j=1}^m (z_{i,j}^*)^{-1}(O_{i,j})$$

qui montre que  $V_i \times F$  est un ouvert au sens de  $\mathcal{T}_\omega$ .

De la même manière, on montre que  $E \times W_i$  est un ouvert de la topologie  $\mathcal{T}_\omega$  pour chaque  $i \in I$  et on conclut par l'égalité

$$V_i \times W_i = (V_i \times F) \cap (E \times W_i).$$



# Bibliographie

- [1] “Théorèmes de Hahn-Banach.” <http://math.univ-lille1.fr/~fricain/EXOS-M1-ANALYSE-FONCTIONNELLE/feuille5.pdf>. Accessed : 2018-12-23.
- [2] B. Maurey, “Analyse fonctionnelle et théorie spectrale.” <https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/ts012/poly/mths.pdf>. Accessed : 2018-12-23.