# Diskret matematik
# Programmeringslaboration

### Kombinatorik och sannolikhet

Skövde högskola

Hösten 2014

Följ instruktionerna i varje fråga noggrant. Testa alla funktioner du skriver på ett antal väl valda exempel. Du får använda vilket programmeringsspråk ni vill, förslagsvis till exempel C, Java eller något symboliskt programmeringsspråk för matematik t.ex. Wolfram Mathematica, Maple eller Sage (det sistnämnda är open-source och alltså gratis `http://www.sagemath.org/`). Observera dock att om du vill ha hjälp så kan lärarna en del av dessa programmeringspråk bättre än andra.

Datorlaborationen kan utföras i den bokade datasalen D202 vid duggatillfället måndagen den 6 oktober, eller i salen D201 med egen dator. Det är frivilligt att komma på detta handledningstillfälle.

Examinering sker genom att eleverna i grupper om en, två (eller undantagsvis tre) lämnar in en rapport där det förklaras utförligt men kortfattat hur varje steg i datorlabben utförts. Varje funktion och program som skrivits ska redovisas med hjälp av pseudokod och resultaten från körningar ska redovisas med skärmdumpningar. Dessutom ska koden bifogas som appendix till rapporten. All kod måste vara skriven av gruppmedlemmar. Därför får man till exempel inte använda sig av inbyggda fördefinierade funktioner som gör exakt det som frågas efter. Man får dock använda enklare inbyggda funktioner. För godkänt krävs minst 6 poäng, varav det ska vara minst ett poäng från var och en av de tre delfrågorna. Totalt antal möjliga poäng är 12.

Rapporten kan lämnas senast vid föreläsningen onsdagen den 15 oktober eller skickas som mejl till klara.stokes@his.se. senast onsdagen den 15 oktober klockan 24:00.

1. En fråga om tärningar:

   Betrakta experimentet "kasta en $m$-sidig tärning $n$ gånger". Låt $E$ vara händelsen "alla sidor på tärningen är med i följden av tärningskast". Låt $F$ vara händelsen "vid varje kast visar tärningen ett värde som är lika högt eller högre än vid föregående kast", d.v.s. $F$ är händelsen att "följden av tärningskast är växande" (observera att växande inte nödvändigtvis innebär strängt växande).

   a) Skriv funktioner *int[][] Omega(n,m)*, *int[][] E(n,m)* och *int[][] F(n,m)* som genererar

- utfallsrummet $\Omega$ för experimentet,
- delmängden $E \subseteq \Omega$,
- delmängden $F \subseteq \Omega$.

Använd dessa funktioner för att räkna ut sannolikheterna för $P(E)$, $P(F)$ och $P(E|F)$ när $(m, n) \in \{(6,8), (6,6), (4,5), (4,10), (3,10), (2,10)\}$. Skriv ned innebörden av $P(E|F)$, vad är det för sannolikhet vi har beräknat?

(1 poäng)

b) Skriv följande funktioner:

- En funktion *int kasta_tarning(m)* som kastar en $m$-sidig tärning, där $m \geq 2$. Använd dig av en slumptalsgenerator och anta att tärningen är jämnt kalibrerad.
- En funktion *int[] kasta_tarning_ngr(n,m)* som använder sig av funktionen i föregående punkt för att kasta en $m$-sidig tärning $n$ gånger.

Skriv ett program som utför experiment *en $m$-sidig tärning kastas $n$ gånger* $x$ gånger. Skriv programmet så att det använder sig av funktionerna du har definierat. Låt programmet räkna antalet gånger $b$ som utfallet ligger i $F$, d.v.s. när följden av värden som tärningen visar är växande. Låt det också räkna antalet gånger $a$ som utfallet ligger i $E \cap F$, d.v.s. när följden är växande och alla sidor på tärningen förekommer i följden. Undersök den ungefärliga sannolikheten $P(E|F)$ genom att köra programmet många gånger ($x = 10^4$, $x = 10^5$, o.s.v.) och räkna ut den ungefärliga sannolikheten som $a/b$. Gör detta för samma värden på $n$ och $m$ som i första delen av frågan.

(1 poäng)

c) Räkna för hand ut sannolikheten $P(E|F)$ för alla $n$ och $m$. Skriv också ned med ord vad det är det du har beräknat.

(2 poäng)

d) Jämför resultatet i de båda experimenten från (1a) och (1b) med vad som räknats ut för hand i (1c). Verkar det stämma? Hur många gånger har du upprepat experimentet i (1b) (d.v.s. vilka värden på $x$ har du provat)? Blir det bättre om du upprepar fler gånger?

(1 poäng)

2. En fråga om binomialkoefficienter:

a) Skriv ett funktion *int binom_pascal(n,k)* som räknar ut binomialkoefficienten $\binom{n}{k} = C(n,k)$ med hjälp av Pascals triangel. Det är alltså inte tillåtet att använda sig av en inbyggd funktion för detta, utan funktionen ska bygga upp den del av Pascals triangel som är nödvändig för att räkna ut $\binom{n}{k}$. Tänk efter om du vill att funktionen ska vara rekursiv eller inte.

(1 poäng)

b) Skriv en funktion som utvecklar uttrycket $(x+y)^n$ och som använder sig av funktionen *binom_pascal* för att räkna ut koefficienterna i uttrycket som fås. Förklara vilken matematisk sats du använt.

(1 poäng)

c) Skriv ett program som utvecklar uttrycken

   i. $(x+y)^{24}$

   ii. $(4a+6b)^{13}$

   iii. $(g^2h+k)^{15}$

   och redovisa resultaten. Verkar det stämma?

(1 poäng)

3. Binomialfördelningen

a) Skriv en funktion *int kasta_mynt(p)* som kastar ett mynt som ger krona (representerat som 1) med sannolikhet $p$ och klave (representerat som 0) med sannolikhet $q = 1 - p$. Använd en slumptalsgenerator. Vilken sannolikhetsfördelning är detta? Varför måste $q = 1 - p$?

(1 poäng)

b) Skriv ett funktion *bool experiment(n,k,p)* som kastar ett mynt $n$ gånger genom att kalla på funktionen *kasta_mynt(p)* och som returnerar sant om krona kommit upp exakt $k$ gånger, annars ska den returnera falskt.

   Skriv ett program som kör funktionen *experiment(n,k,p)* $x$ gånger för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ och räknar hur många gånger $h$ experimentet lyckas. Vi vill veta vad den ungefärliga sannolikheten är att det blir krona exakt $k$ gånger för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Låt programmet räkna ut denna ungefärliga sannolikhet som $h/x$. Utför experimentet för $p = 0.3$ och $n = 2, 3, 4, 5, 10$ med något stort $x$ och redovisa resultatet i en tabell.

(1 poäng)

c) Läs om binomialfördelningen i Rosens bok (sid 458-459 i upplaga 7, annars se index i den upplaga ni har). Räkna ut vilket resultat ni borde fått i föregående punkt med hjälp av formeln i boken och skriv ned resultatet i samma tabell. Överensstämmer resultaten? Blir det bättre om du tar $x$ större?

(1 poäng)

d) Medelvärdet, eller väntevärdet, av en slumpvariabel med binomialfördelning $B(n,p)$ är $E[X] = np$. Vad ger det för $p = 0.3$ och $n = 2, 3, 4, 5, 10$? Hur ska man tolka väntevärdet (i ord)? Jämför med vad du fick i (3b).

(1 poäng)

Lycka till!