# Produktionsmanagement (Operations Management)

## 2) Standortplanung

**BWI-5 LE 02**

**Folienskriptum**
**Wintersemester 2009/10**
*Dr. Helmut Vana*

# LERNZIELE

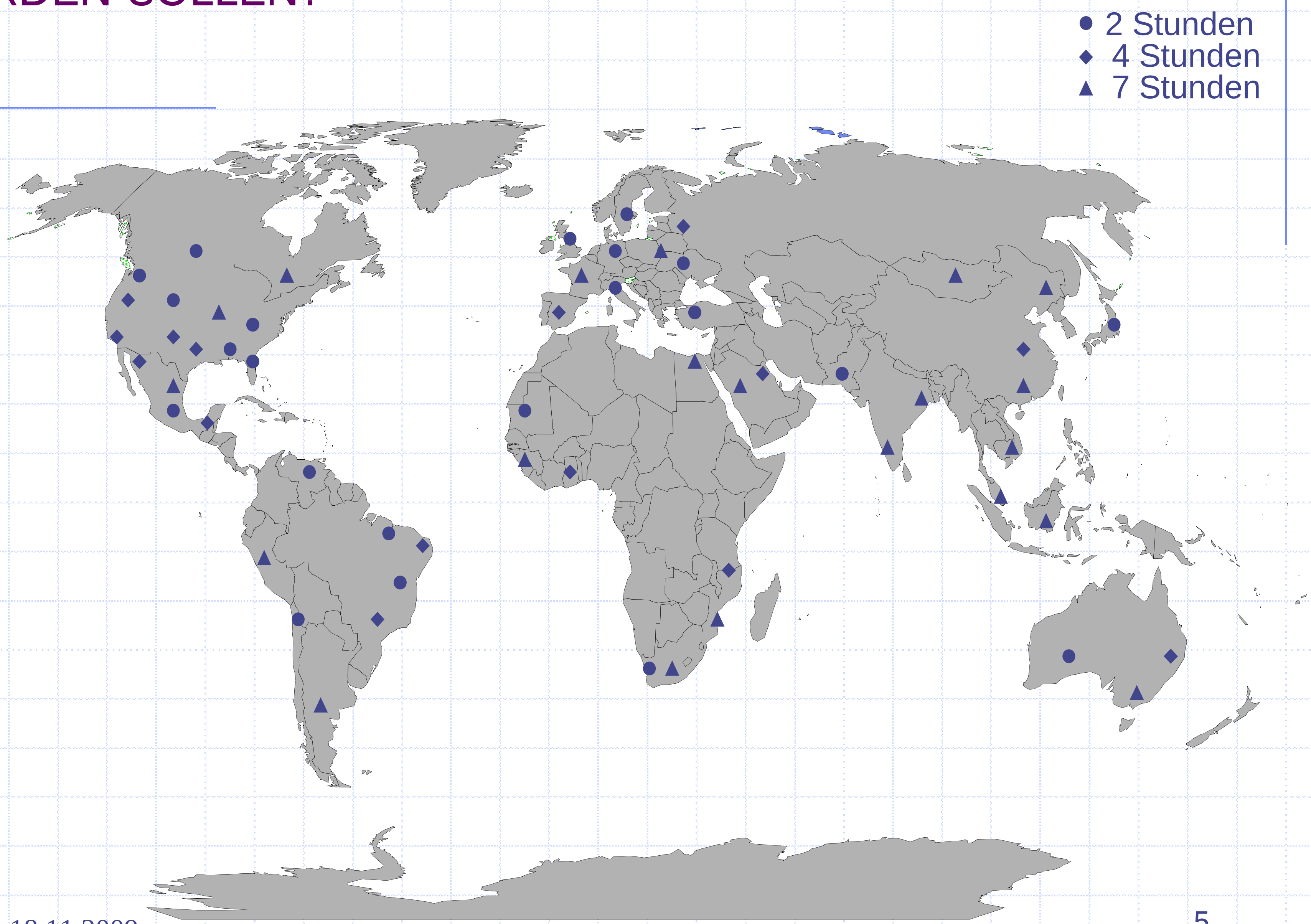
- Verstehen, warum gute Standortentscheidungen wichtig sind
- Lernen, wie optimale Lagerstandorte gefunden werden, wenn diese an beliebigen Orten erstellt werden können
- Sehen, welchen Einfluss die Zielfunktion auf die Lösung hat
- Toolbox: Verstehen, wie ganzzahlige Optimierungsprobleme formuliert und gelöst werden
- Lernen, wie optimale Lagerstandorte gefunden werden, wenn diese nur an bestimmten Orten erstellt werden können

# INHALT

- Motivation
- Beliebige Orte – ein Standort
- Beliebige Orte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Orte
- Zusammenfassung und Ausblick

# WIE ENTSCHEIDEN SIE, WO DIESE FAHRZEUGE PRODUZIERT WERDEN SOLLEN?

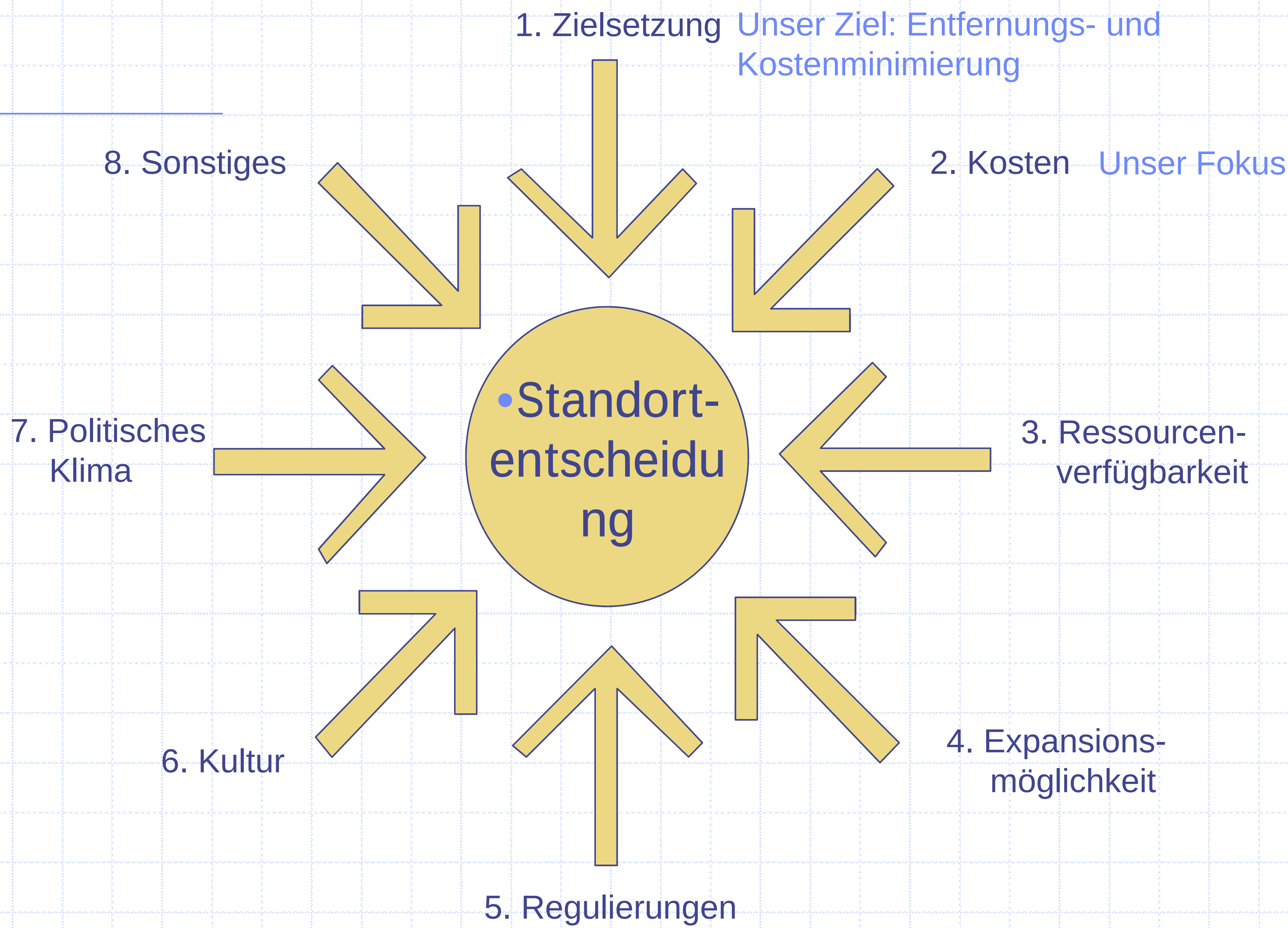
# WIE ENTSCHEIDEN SIE, WO LAGER BETRIEBEN WERDEN SOLLEN?



# TYPISCHE STANDORTENTSCHEIDUNGEN

| Fragestellung | Hauptzielsetzung |
|---|---|
| 1. Wo soll ein Fahrzeug produziert werden? | Minimierung Kosten |
| 2. Wo sollen Servicecenter zur Schaubilderstellung betrieben werden? | Minimierung Kosten und Lieferzeit |
| 3. Wo sollen Lager für Unterhaltungselektronik betrieben werden? | Minimierung Kosten |
| 4. Wo sollen Zentrallager und Regionallager für Flugzeugersatzteile betrieben werden? | Minimierung Lieferzeit und Kosten |
| 5. Wo soll ein Hub errichtet werden? | Minimierung Kosten und Flugzeit |
| 6. Wo sollen Krankenhäuser gebaut werden? | Maximierung Erreichbarkeit in X Stunden |
| 7. Wo sollen Polizeistationen errichtet werden? | Minimierung maximale Entfernung |

# EINFLUSSFAKTOREN STANDORTPLANUNG

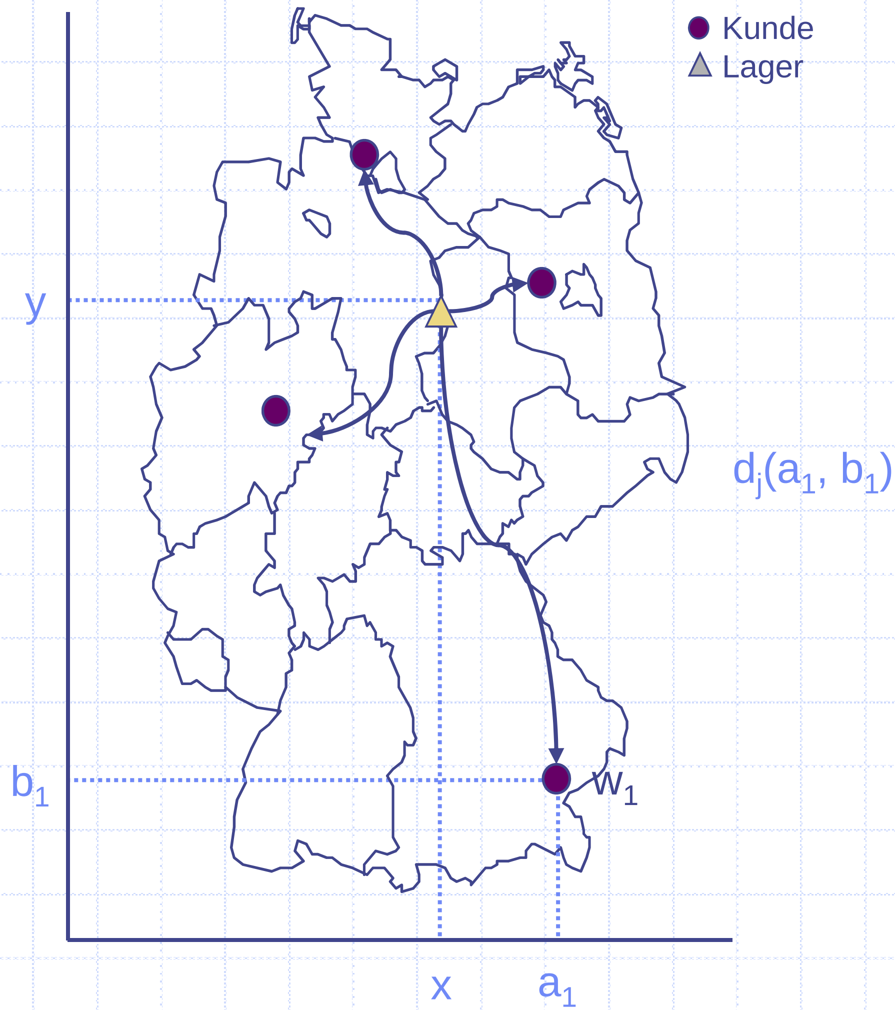


# INHALT

- Motivation
- Beliebige Standorte – ein Standort
  – Rechtwinklige Entfernungsmessung
    . Eindimensional
    . Zweidimensional
  – Euklidische Entfernungsmessung
- Beliebige Standorte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Standorte
- Zusammenfassung und Ausblick

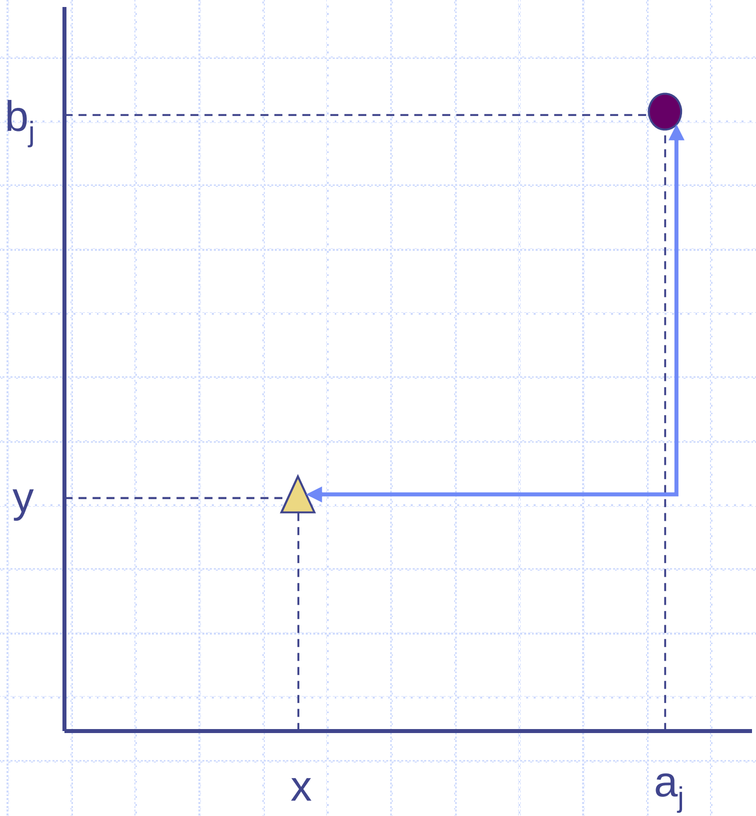
# PROBLEMBESCHREIBUNG

1. Für ein neues Lager soll der optimale Standort (x, y) gefunden werden
2. Jeder beliebige Ort kann als Standort genutzt werden
3. Die einzigen Kosten sind Transportkosten. Diese sind proportional zur Entfernung $d_j(x, y)$ zwischen Lager und Kunde j und proportional zur Nachfrage des Kunden $w_j$
4. Kunden werden als diskrete Nachfragepunkte $(a_j, b_j)$ modelliert
5. Es bestehen keine Kapazitätsbeschränkungen oder sonstige Beschränkungen an den Standorten
6. Das Ziel ist es, die Transportkosten vom Lager zu allen Kunden zu minimieren



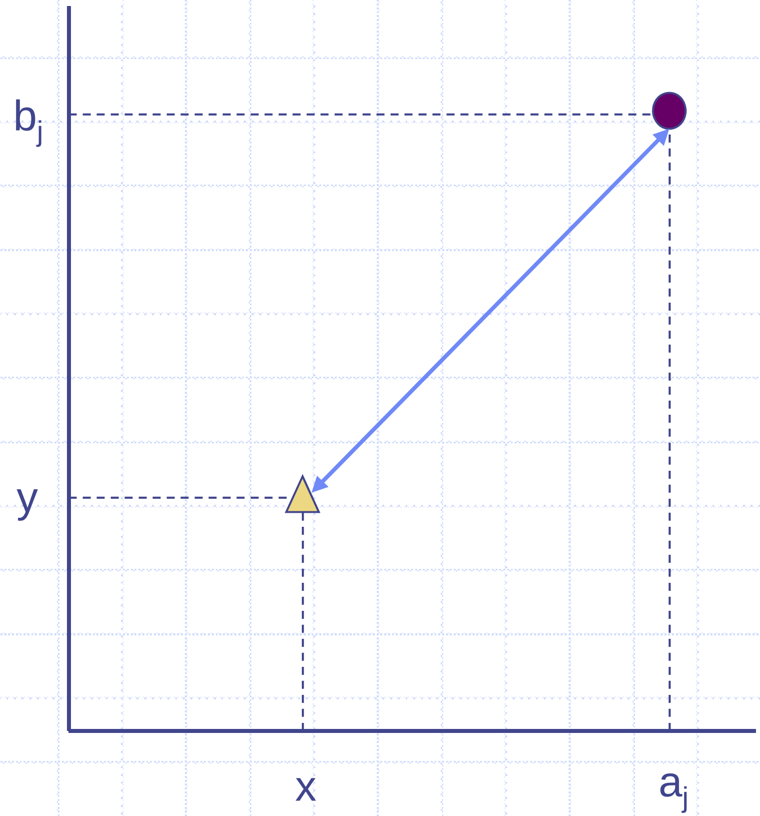
# ENTFERNUNGSMESSUNG

**Rechtwinklige Entfernungsmessung**




$$d_j(x, y) = |a_j - x| + |b_j - y|$$

**Euklidische Entfernungsmessung**




$$d_j(x, y) = \sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}$$

# OPTIMIERUNGSPROBLEME

**Allgemeine Entfernungen**

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j d_j(x,y)$$

**Rechtwinklige Entfernungen**

Eindimensionaler Fall

$$\min_{x} Z(x) = \min_{x} \sum_j w_j \left|a_j - x\right|$$

Zweidimensionaler Fall

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j \left(\left|a_j - x\right| + \left|b_j - y\right|\right)$$

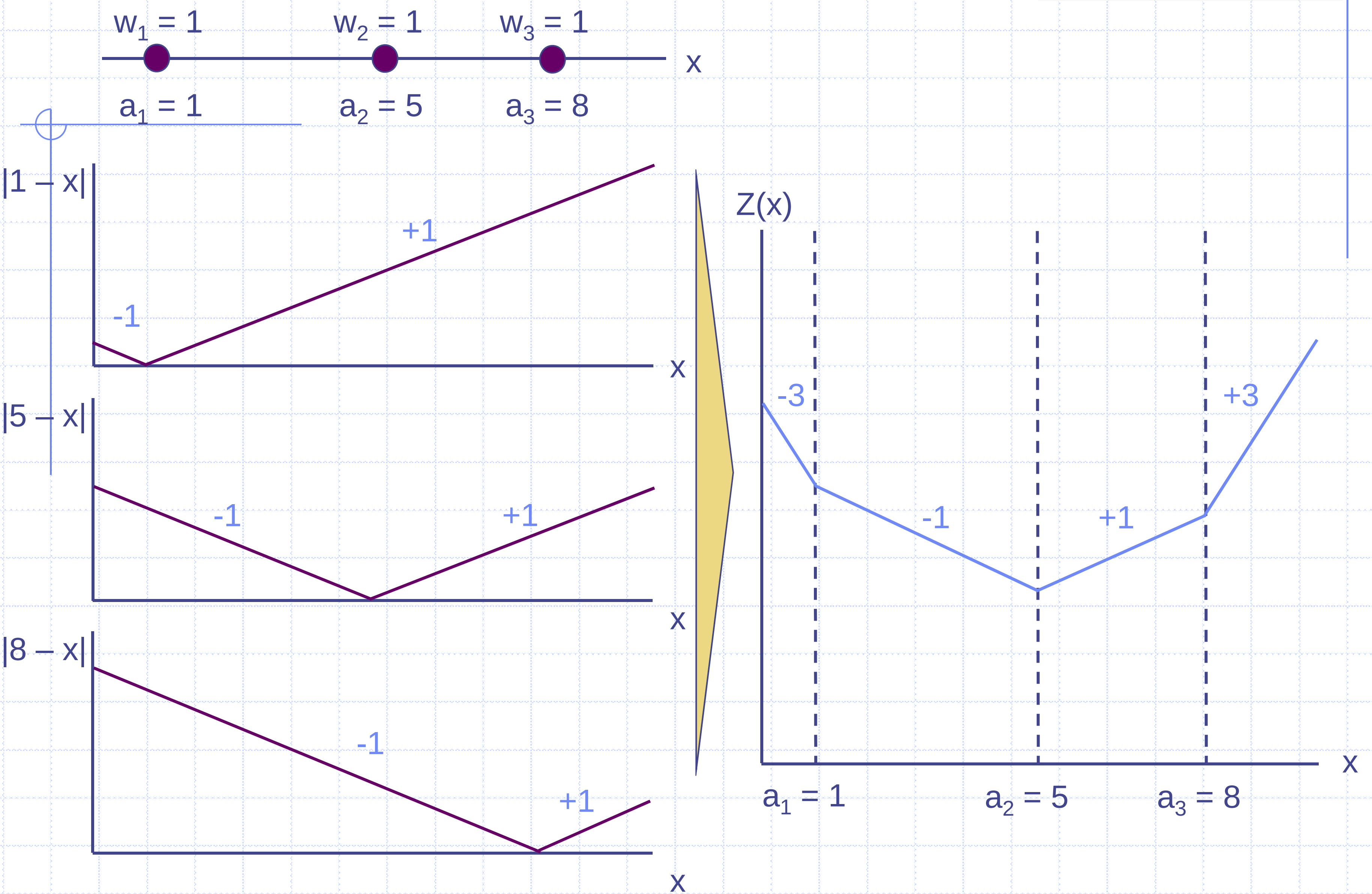
**Euklidische Entfernungen**

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j \sqrt{\left(a_j - x\right)^2 + \left(b_j - y\right)^2}$$

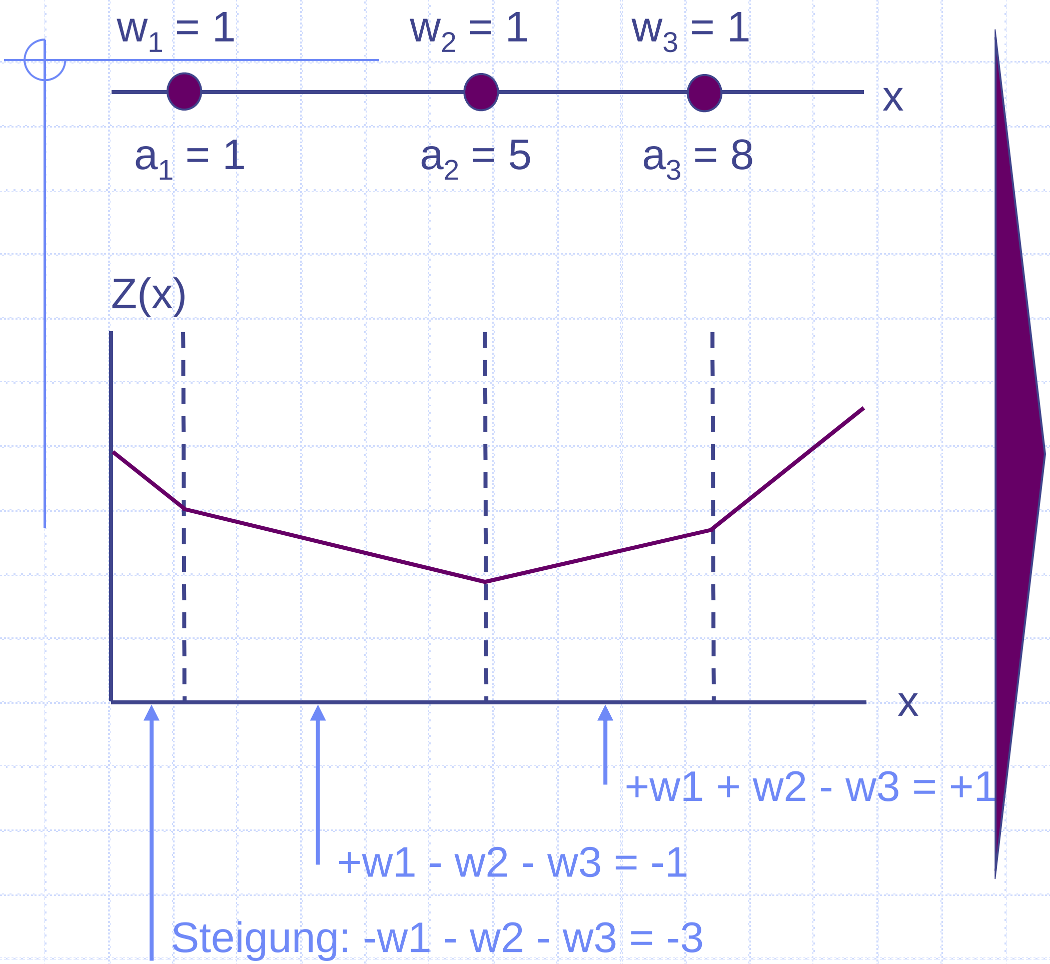
# INHALT

- Motivation
- Beliebige Standorte – ein Standort
  – Rechtwinklige Entfernungsmessung
    . Eindimensional
    . Zweidimensional
  – Euklidische Entfernungsmessung
- Beliebige Standorte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Standorte
- Zusammenfassung und Ausblick

# ZIELFUNKTION IM EINDIMENSIONALEN FALL



# EIGENSCHAFTEN KOSTENFUNKTION




## Eigenschaften

- Die Steigung an Stelle $x \neq a_j$ entspricht der Summe der Nachfragen links von x minus der Summe der Nachfragen rechts von x
- Links von $a_j$ ist die Steigung geringer als rechts von $a_j$
- Zwischen den $a_j$ ändert sich die Steigung nicht
- Der optimale Lagerstandort liegt an dem Kundenstandort, von dem aus die Kostenfunktion links eine negative* und rechts eine positive** Steigung aufweist

* Genauer: Nicht-positive
** Genauer: Nicht-negative

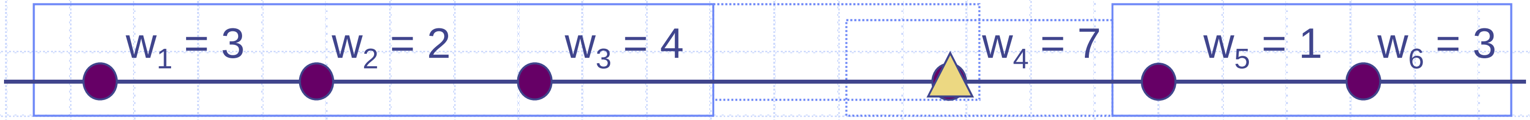
# IDENTIFIZIERUNG OPTIMALER LAGERSTANDORTE

**Ziel**

Finden des Kundenstandorts, von dem aus die Kostenfunktion links eine negative* und rechts eine positive** Steigung aufweist

**Beispiel: Berechnung der Steigung**

$w_1 + w_2 + w_3 < \frac{1}{2}\sum w_j = 10$ $\qquad$ $w_5 + w_6 < \frac{1}{2}\sum w_j = 10$




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | -4 | -7 | -1 | -3 | -20 |
| 3 | -2 | -4 | -7 | -1 | -3 | -14 |
| 3 | 2 | -4 | -7 | -1 | -3 | -10 |
| 3 | 2 | 4 | -7 | -1 | -3 | -2 |
| 3 | 2 | 4 | 7 | -1 | -3 | 12 |

* Genauer: Nicht-positive
** Genauer: Nicht-negative

# IDENTIFIZIERUNG OPTIMALER LAGERSTANDORTE

**Erkenntnis**

Der optimale Lagerstandort liegt bei dem Kunden, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links liegen und nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen

**Vorgehen zur schnellen Identifizierung dieses Kunden**

Identifizierung des Kunden, der die kleinste kumulative Nachfrage besitzt, die größer oder gleich der halben Gesamtnachfrage ist

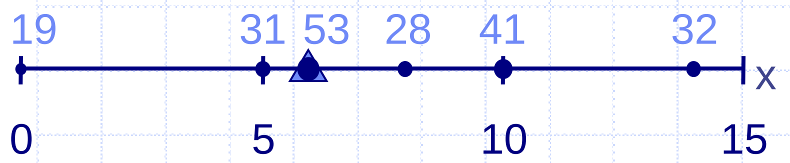
$\frac{1}{2}\sum w_j = 10 \Rightarrow$ Muss Kunden finden, mit kleinster kumulierter Nachfrage $\geq 10$


* Genauer: Nicht-positive

** Genauer: Nicht-negative

# BEISPIEL EINDIMENSIONALER FALL

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN




### Beispieldaten

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 31 |
| 2 | 8 | 28 |
| 3 | 0 | 19 |
| 4 | 6 | 53 |
| 5 | 14 | 32 |
| 6 | 10 | 41 |

### Lösung

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 19 | 19 |
| 1 | 5 | 31 | 50 |
| 4 | 6 | 53 | 103 $\Leftarrow$ 204/2=102 |
| 2 | 8 | 28 | 131 |
| 6 | 10 | 41 | 172 |
| 5 | 14 | 32 | 204 |

$\rightarrow x^* = 6$

$$Z(6) = 31|5-6| + 28|8-6| + \ldots = 621$$

# INHALT

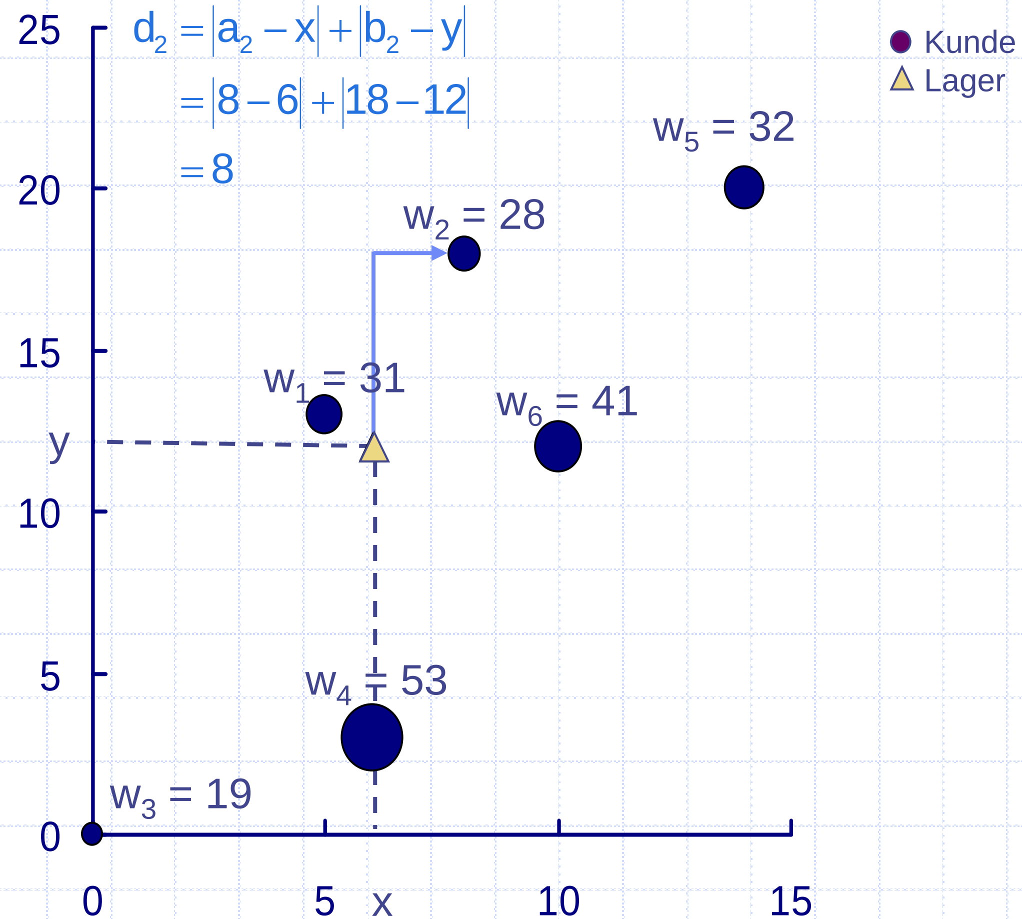
- Motivation
- Beliebige Standorte – ein Standort
  - Rechtwinklige Entfernungsmessung
    - Eindimensional
    - Zweidimensional
  - Euklidische Entfernungsmessung
- Beliebige Standorte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Standorte
- Zusammenfassung und Ausblick

# BEISPIEL ZWEIDIMENSIONALER FALL

**Beispieldaten**

| j | $a_j$ | $b_j$ | $w_j$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 13 | 31 |
| 2 | 8 | 18 | 28 |
| 3 | 0 | 0 | 19 |
| 4 | 6 | 3 | 53 |
| 5 | 14 | 20 | 32 |
| 6 | 10 | 12 | 41 |

$$d_2 = |a_2 - x| + |b_2 - y| = |8-6| + |18-12| = 8$$



# VERGLEICH ZIELFUNKTIONEN EIN- UND ZWEIDIMENSIONALER FALL

**Eindimensionaler Fall**

$$\min_x Z(x) = \min_x \sum_j w_j \left| a_j - x \right|$$

**Zweidimensionaler Fall**

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j \left( \left| a_j - x \right| + \left| b_j - y \right| \right)$$

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j \left| a_j - x \right| + w_j \left| b_j - y \right|$$

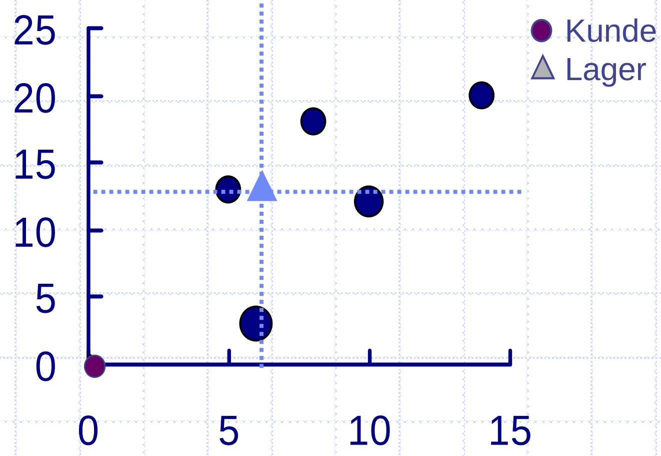
$$= \underbrace{\min_x \sum_j w_j \left| a_j - x \right|}_{\text{siehe links}} + \underbrace{\min_y \sum_j w_j \left| b_j - y \right|}_{\text{wie links mit } b_j \text{ statt } a_j \text{ und y statt x}}$$

Der zweidimensionale Fall lässt sich auf zwei eindimensionale Fälle reduzieren

# BEISPIEL ZWEIDIMENSIONALER FALL

**Beispieldaten**

| $j$ | $a_j$ | $b_j$ | $w_j$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 13 | 31 |
| 2 | 8 | 18 | 28 |
| 3 | 0 | 0 | 19 |
| 4 | 6 | 3 | 53 |
| 5 | 14 | 20 | 32 |
| 6 | 10 | 12 | 41 |




**Lösung**

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 19 | 19 |
| 1 | 5 | 31 | 50 |
| 4 | 6 | 53 | 103 $\Leftarrow x^* = 6$ |
| 2 | 8 | 28 | 131 |
| 6 | 10 | 41 | 172 |
| 5 | 14 | 32 | 204 |

| $j$ | $b_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 19 | 19 |
| 4 | 3 | 53 | 72 |
| 6 | 12 | 41 | 113 $\Leftarrow y^* = 12$ |
| 1 | 13 | 31 | 144 |
| 2 | 18 | 28 | 172 |
| 5 | 20 | 32 | 204 |

$Z(x^*, y^*) = 31(|5-6|+|13-12|)+\ldots+41(|10-6|+|12-12|) = 1.781$

# INHALT

- Motivation
- Beliebige Standorte – ein Standort
  - Rechtwinklige Entfernungsmessung
    - Eindimensional
    - Zweidimensional
  - Euklidische Entfernungsmessung
- Beliebige Standorte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Standorte

- Zusammenfassung und Ausblick

# ZIELFUNKTION UND IHRE OPTIMIERUNG

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

### Zielfunktion

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_j w_j \sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}$$

### Eigenschaft

Die Zielfunktion ist konvex*

### Schlussfolgerung

Wenn die partiellen Ableitungen Null sind, dann haben wir die optimalen Werte für x und y gefunden

### Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} w_j \frac{(x - a_j)}{\sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} w_j \frac{(y - b_j)}{\sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2}} = 0$$

* Beweis siehe Buch: „Operations Management“

# LÖSUNGSALGORITHMUS

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

**Definition**

$$g_j(x,y) = \frac{w_j}{\sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2}}$$

**Dann folgt**

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)\left(x-a_j\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sum_{j=1}^{J} a_j \cdot g_j(x,y)}{\sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)\left(y-b_j\right) = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{\sum_{j=1}^{J} b_j \cdot g_j(x,y)}{\sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)} \qquad (2)$$

**Algorithmus**

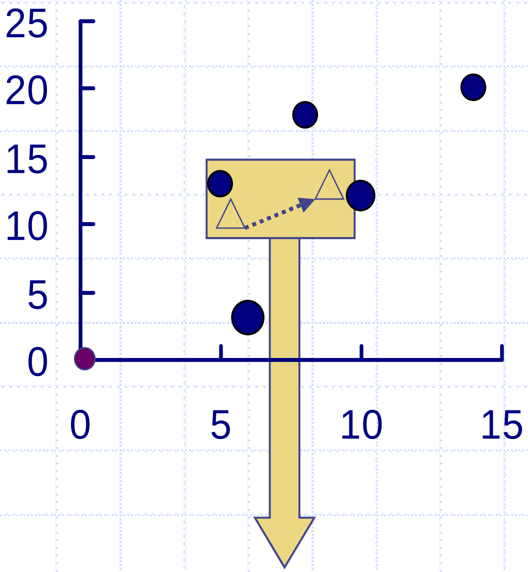
1. Wähle Anfangslösung $(x_0, y_0)$
2. Berechne $g_j(x_0, y_0)$ und dann $x_1$ und $y_1$ mit (1) und (2)
3. Wenn $x_1 \approx x_0$ und $y_1 \approx y_0$, stoppe.
   Wenn nicht, berechne $g_j(x_1, y_1)$ und dann $x_2$ und $y_2$ mit (1) und (2)
4. Wenn $x_2 \approx x_1$ und $y_2 \approx y_1$, stoppe.
   Wenn nicht , berechne $g_j(x_2, y_2)$ und dann $x_3$ und $y_3$ mit (1) und (2)
   ...

# BEISPIEL EUKLIDISCHE ENTFERNUNGEN

**Beispieldaten**

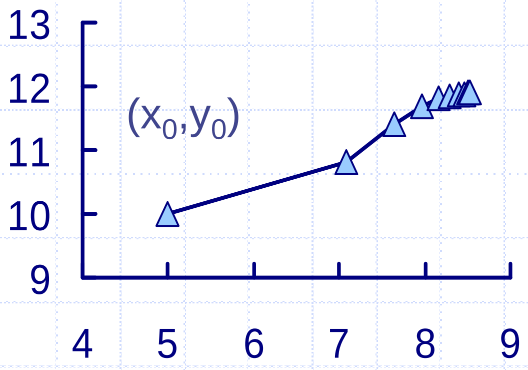
| j | $a_j$ | $b_j$ | $w_j$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 13 | 31 |
| 2 | 8 | 18 | 28 |
| 3 | 0 | 0 | 19 |
| 4 | 6 | 3 | 53 |
| 5 | 14 | 20 | 32 |
| 6 | 10 | 12 | 41 |

$$g_1(5{,}10) = \frac{31}{\sqrt{(5-5)^2 + (10-13)^2}}$$




**Lösung**

| t | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | $(x_0,y_0) =$ | 5,0 | 10,0 |
| 1 | 10,3 | 3,3 | 1,7 | 7,5 | 2,4 | 7,6 | 7,1 | 10,8 |
| 2 | 10,3 | 3,9 | 1,5 | 6,7 | 2,8 | 13,0 | 7,7 | 11,4 |
| 3 | 10,0 | 4,2 | 1,4 | 6,2 | 3,0 | 16,9 | 8,0 | 11,7 |
| 4 | 9,6 | 4,4 | 1,3 | 5,9 | 3,1 | 19,9 | 8,2 | 11,8 |
| 5 | 9,2 | 4,5 | 1,3 | 5,8 | 3,2 | 22,2 | 8,3 | 11,9 |
| 6 | 8,9 | 4,6 | 1,3 | 5,8 | 3,2 | 23,9 | 8,4 | 11,9 |
| 7 | 8,7 | 4,6 | 1,3 | 5,8 | 3,2 | 25,3 | 8,5 | 11,9 |

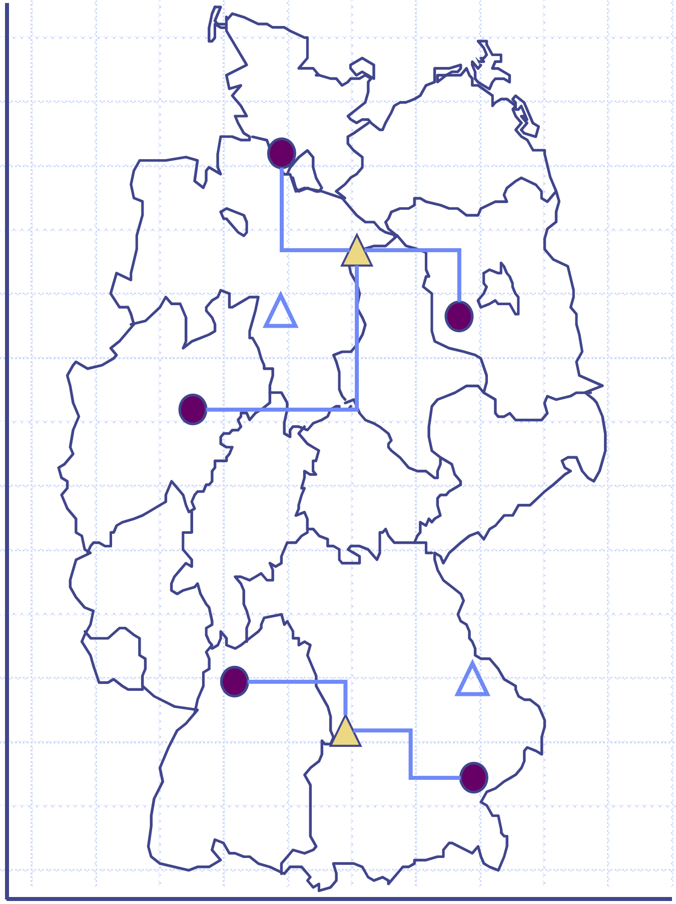


# INHALT

- Motivation
- Beliebige Standorte – ein Standort
- Beliebige Standorte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Standorte
- Zusammenfassung und Ausblick

# PROBLEMBESCHREIBUNG

1. Für N neue Lager soll der optimale Standort $(x_n, y_n)$ gefunden werden
2. Jeder beliebige Ort kann als Standort genutzt werden
3. Die einzigen Kosten sind Transportkosten. Diese sind proportional zur Entfernung zwischen Lager und Kunde und proportional zur Nachfrage des Kunden. Als Entfernungsmaß werden rechtwinklige Entfernungen genutzt
4. Kunden werden als diskrete Nachfragepunkte $(a_j, b_j)$ modelliert
5. Es bestehen keine Kapazitätsbeschränkungen oder sonstige Beschränkungen an den Standorten
6. Das Ziel ist es, die Transportkosten vom Lager zu allen Kunden zu minimieren



1. Wie würden Sie die Kunden zuordnen, wenn die Lagerstandorte gegeben wären?
2. Wie würden Sie die Lagerstandorte wählen, wenn die Kundenzuordnung gegeben ist?

# LÖSUNGSALGORITHMUS

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

## Beobachtung

Standortoptimierungsprobleme mit mehr als einem Lager sind schwierig optimal zu lösen. Es gibt aber einfache Heuristiken, mit denen “gute” Lösungen berechnet werden können

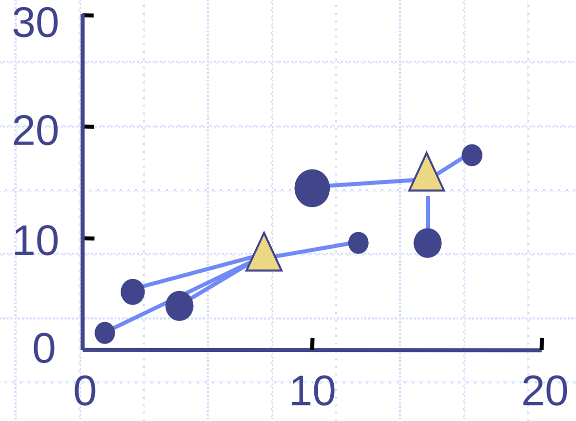
## Heuristik

1. Auswahl Anfangslösung
2. Optimierung **Zuordnung**: Für gegebene Lagerstandorte werden die optimalen Zuordnungen von Kunden zu Lagern ermittelt
3. Optimierung **Standorte**: Für die gegebene Zuordnung von Kunden zu Lagern werden die optimalen Standorte ermittelt
4. Terminierung Algorithmus: Schritte 2 und 3 werden solange wiederholt, wie sich die Lagerstandorte von einer Iteration zur nächsten ändern

# BEISPIEL MEHRERE STANDORTE

**Beispieldaten**

| j | $a_j$ | $b_j$ | $w_j$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 17 |
| 2 | 2 | 5 | 21 |
| 3 | 4 | 4 | 32 |
| 4 | 10 | 15 | 45 |
| 5 | 12 | 10 | 15 |
| 6 | 15 | 10 | 31 |
| 7 | 17 | 18 | 19 |




**1. Auswahl Anfangslösung**

| | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 8 |
| 2 | 15 | 15 |

**2. Optimierung Zuordnung**

| j | $a_j$ | $b_j$ | $d_j(x_1, y_1)$ | $d_j(x_2, y_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | **14** | 28 |
| 2 | 2 | 5 | **9** | 23 |
| 3 | 4 | 4 | **8** | 22 |
| 4 | 10 | 15 | 9 | **5** |
| 5 | 12 | 10 | **6** | 8 |
| 6 | 15 | 10 | 9 | **5** |
| 7 | 17 | 18 | 19 | **5** |

# BEISPIEL MEHRERE STANDORTE – FORTS.

### 3. Optimierung Standort 1

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 17 | 17 | |
| 2 | 2 | 21 | 38 | |
| 3 | 4 | 32 | 70 | ← $x^* = 4$ |
| 5 | 12 | 15 | 85 | |

| $j$ | $b_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 17 | 17 | |
| 3 | 4 | 32 | 49 | ← $y^* = 4$ |
| 2 | 5 | 21 | 70 | |
| 5 | 10 | 15 | 85 | |

### 3. Optimierung Standort 2

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 45 | 45 | |
| 6 | 15 | 31 | 76 | ← $x^* = 15$ |
| 7 | 17 | 19 | 95 | |

| $j$ | $b_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 10 | 31 | 31 | |
| 4 | 15 | 45 | 76 | ← $y^* = 15$ |
| 7 | 18 | 19 | 95 | |

### 3. Neue Standorte

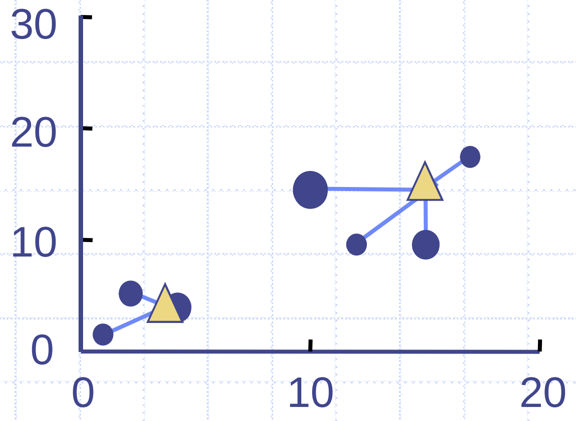
| | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 15 | 15 |

# BEISPIEL MEHRERE STANDORTE – FORTS.

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

**Standorte**

| | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 15 | 15 |




**2. Optimierung Zuordnung**

| j | $a_j$ | $b_j$ | $d_j(x_1, y_1)$ | $d_j(x_2, y_2)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | **6** | 28 | |
| 2 | 2 | 5 | **3** | 23 | |
| 3 | 4 | 4 | **0** | 22 | |
| 4 | 10 | 15 | 17 | **5** | |
| 5 | 12 | 10 | 14 | **8** | ← Neue Zuordnung von Kunde 5 |
| 6 | 15 | 10 | 17 | **5** | |
| 7 | 17 | 18 | 27 | **5** | |

# BEISPIEL MEHRERE STANDORTE – FORTS.

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

### 3. Optimierung Standort 1

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 17 | 17 | |
| 2 | 2 | 21 | 38 | ← $x^* = 2$ |
| 3 | 4 | 32 | 70 | |

| $j$ | $b_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 17 | 17 | |
| 3 | 4 | 32 | 49 | ← $y^* = 4$ |
| 2 | 5 | 21 | 70 | |

### 3. Optimierung Standort 2

| $j$ | $a_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 45 | 45 | |
| 5 | 12 | 15 | 60 | ← $x^* = 12$ |
| 6 | 15 | 31 | 91 | |
| 7 | 17 | 19 | 110 | |

| $j$ | $b_j$ | $w_j$ | $\Sigma w_j$ | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 15 | |
| 6 | 10 | 31 | 46 | |
| 4 | 15 | 45 | 91 | ← $y^* = 15$ |
| 7 | 18 | 19 | 110 | |

### 3. Neue Standorte

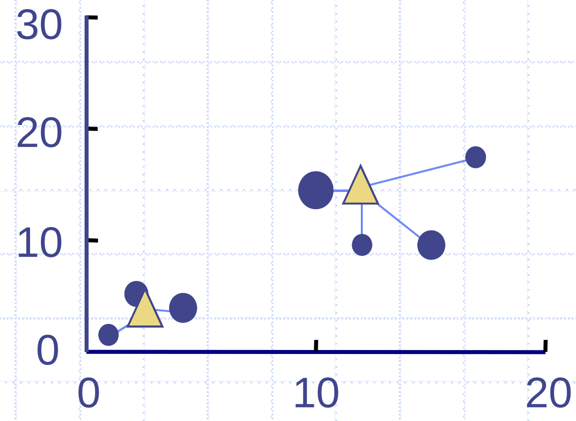
| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 12 | 15 |

# BEISPIEL MEHRERE STANDORTE – FORTS.

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

**Standorte**

| | **x** | **y** |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 12 | 15 |




**2. Optimierung Zuordnung**

| **j** | **$a_j$** | **$b_j$** | **$d_j(x_1, y_1)$** | **$d_j(x_2, y_2)$** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | **4** | 25 |
| 2 | 2 | 5 | **1** | 20 |
| 3 | 4 | 4 | **2** | 19 |
| 4 | 10 | 15 | 19 | **2** |
| 5 | 12 | 10 | 16 | **5** |
| 6 | 15 | 10 | 19 | **8** |
| 7 | 17 | 18 | 29 | **8** |

Keine Änderung, daher auch keine Änderung der Standorte, daher Terminierung

# ZUSAMMENFASSUNG BELIEBIGE STANDORTE

- Standortentscheidungen werden von einer Reihe von Faktoren getrieben. Wir haben uns auf den Faktor Transportkosten konzentriert und beliebige Standorte zugelassen
- Wir haben die Transportkosten abgeschätzt. Der optimale Lagerstandort hängt von der Art der Entfernungsmessung ab
  – Rechtwinklige Entfernungen: Optimal ist der Standort, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links/rechts bzw. darüber/darunter liegen
  – Euklidische Entfernungen: Der optimale Standort wird numerisch bestimmt
- Sollen optimale Standorte für mehr als ein Lager bestimmt werden, kann eine Heuristik eingesetzt werden, die für gegebene Lagerstandorte optimale Kundenzuordnungen bestimmt und dann für gegebene Kundenzuordnungen optimale Lagerstandorte

# INHALT

- Motivation
- Beliebige Orte – ein Standort
- Beliebige Orte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Orte
- Zusammenfassung und Ausblick

# LINEARE PROGRAMMIERUNG (LP)

**Was ist Lineare Programmierung?**

Modellierungs- und Lösungsverfahren für mathematische Modelle mit linearen Zielfunktionen und Nebenbedingungen sowie kontinuierlichen Variablen

**Allgemeine Formulierung**

$$\max_{\mathbf{x}} \ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

N.B. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0$

**Beispiel**

$$\max_{x_1, x_2} \ 30x_1 + 50x_2$$

N.B.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 6 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Wie werden lineare Programme gelöst?**

Das am weitesten verbreitete Verfahren ist die Simplex-Methode

# GANZZAHLIGE PROGRAMMIERUNG

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN

- Belegung Sitzplätze im Kino
- Geöffnete und geschlossene Lagerstandorte
- Zuordnung von Passagieren zu Flugzeugen

**Was ist ganzzahlige Programmierung?**

Modellierungs- und Lösungsverfahren für mathematische Modelle mit diskreten Entscheidungsvariablen, das heißt mit Entscheidungsvariablen, die nur ganzzahlige Werte annehmen können

**Wann wird die ganzzahlige Programmierung anstatt LP eingesetzt?**

Zur Lösung von Problemen, bei denen nicht-ganzzahlige Lösungen nicht sinnvoll sind

**Allgemeine Formulierung**

$$\max_{\mathbf{x}} \ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

N.B. $\quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

$\quad \mathbf{x} \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

**Beispiel**

$$\max_{x_1, x_2} \ 30x_1 + 50x_2$$

$$\begin{array}{llcl} \text{N.B.} & x_1 & & \leq 6 \\ & & x_2 & \leq 5 \\ & x_1 + & 2x_2 & \leq 12 \\ & & x_1, x_2 & \in \{0, 1, 2, \ldots\} \end{array}$$

**Wie werden ganzzahlige Programme gelöst?**

Das am weitesten verbreitete Verfahren ist Branch-and-Bound

# BEISPIEL ZUORDNUNGSPROBLEM

**Beispiel: Drei Studenten und drei Probleme**
Lösungszeit in Stunden

| | Problem | | |
|---|---|---|---|
| **Student** | 1 | 2 | 3 |
| Andreas | 5 | 4 | 3 |
| Berta | 6 | 7 | 8 |
| Christoph | 4 | 7 | 9 |

$$c = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

**Zielsetzung**

Ordne die Probleme den Studenten so zu, dass die Summe der Problemlösungszeiten minimiert wird

**Nebenbedingungen**

1. Jedes Problem muss von einem Studenten bearbeitet werden
2. Jeder Student muss ein Problem bearbeiten

**Beispiel zulässige Lösung**

Z(A-1, B-2, C-3) = 5 + 7 + 9 = 21 z
Gibt es eine bessere? Wie finden wir diese? Alle Möglichkeiten ausprobieren?

# FORMULIERUNG ALS GANZZAHLIGES PROBLEM

## Notation

i Student (i = 1, 2, 3)

j Problem (j = 1, 2, 3)

$c_{ij}$ Zeit, die Student i für Problem j benötigt

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Student i Problem j bearbeitet} \\ 0 & \text{wenn nicht} \end{cases}$$

## Mathematisches Programm

$$\min_y \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} y_{ij}$$

$$\text{NB} \sum_{i=1}^{3} y_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, 3$$

Jedes Problem muss von einem Studenten bearbeitet werden

$$\sum_{j=1}^{3} y_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

Jeder Student muss ein Problem bearbeiten

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3$$

# VOLLSTÄNDIGE BERECHNUNG ALLER LÖSUNGEN

| Problem 1 | 2 | 3 | Zulässig | Zeit |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | n | 12 |
| A | A | B | n | 17 |
| A | A | C | n | 18 |
| A | B | A | n | 15 |
| A | B | B | n | 20 |
| A | B | C | y | 21 |
| A | C | A | n | 15 |
| A | C | B | y | 20 |
| A | C | C | n | 21 |
| B | A | A | n | 13 |
| B | A | B | n | 18 |
| B | A | C | y | 19 |
| B | B | A | n | 16 |
| B | B | B | n | 21 |
| B | B | C | n | 22 |
| B | C | A | y | 16 |
| B | C | B | n | 21 |
| B | C | C | n | 22 |
| C | A | A | n | 11 |
| C | A | B | y | 16 |
| C | A | C | n | 17 |
| C | B | A | y | 14 |
| C | B | B | n | 19 |
| C | B | C | n | 20 |
| C | C | A | n | 14 |
| C | C | B | n | 19 |
| C | C | C | n | 20 |

Optimum

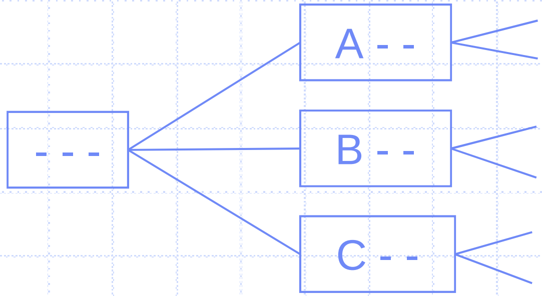
# ÜBERBLICK BRANCH-AND-BOUND

**Grundidee**

Aufteilung des Ursprungsproblems in Unterprobleme, bis diese entweder einfach lösbar sind oder keine optimale Lösung enthalten können

**Algorithmus**

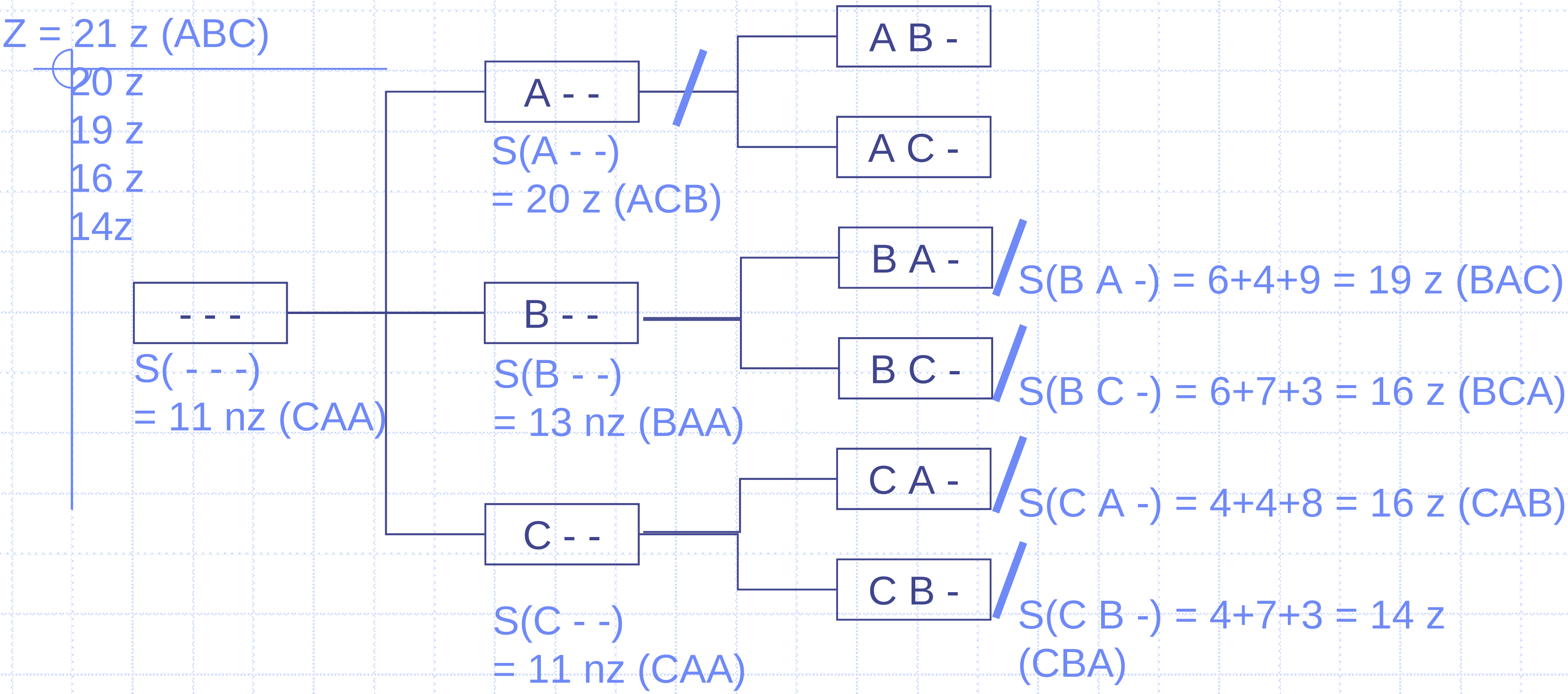
- **Branching** Unterteilung des aktuellen Problems in Unterprobleme. Z.B. „Ordne einem Problem einen Studenten zu“




- **Bounding** Berechnung einer Schranke S, die angibt, wie hoch der Zielfunktionswert in einem Unterproblem mindestens ist. Z.B. „Ordne jedem noch nicht zugeordneten Problem den jeweils schnellsten Studenten zu“

# LÖSUNG ZUORDNUNGSPROBLEM

**Branching** „Ordne einem Problem einen Studenten zu“




**Bounding** “Ordne jedem noch nicht zugeordneten Problem den jeweils schnellsten Studenten zu”

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & c = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}
$$

S(- - -) = 4 + 4 + 3 = 11 nz
S(A- -) = 5 + 7 + 8 = 20 z
S(B- -) = 6 + 4 + 3 = 13 nz
S(C- -) = 4 + 4 + 3 = 11 nz

# BRANCH-AND-BOUND ALGORITHMUS

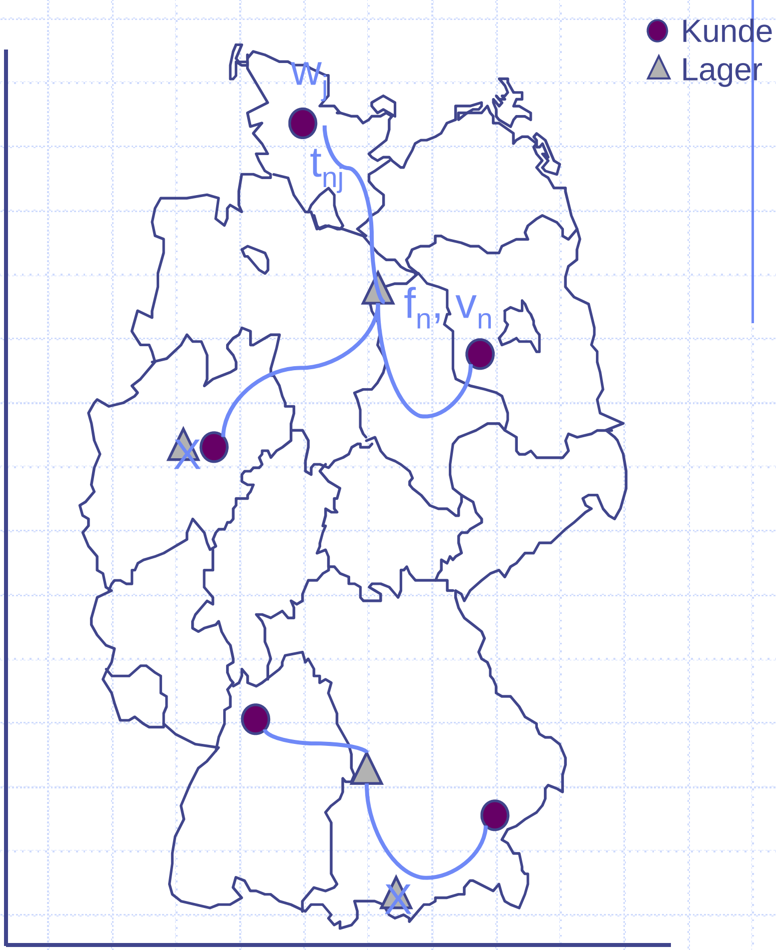
1. **Initialisierung**
   a. Berechnung der Kosten einer beliebigen zulässigen Lösung: Z
   b. Berechnung der Kosten einer (unteren) Schranke: S
2. **Terminierung** Wenn alle Unterprobleme gelöst sind oder von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen sind, Terminierung des Algorithmus mit der optimalen Lösung. Die Kosten der optimalen Lösung betragen Z
3. **Branching** Aufteilung des (Unter-)Problems in Unterprobleme
4. **Bounding** Berechnung einer Schranke S für jedes Unterproblem
   a. S > Z: Ausschluss des Unterproblems von der weiteren Betrachtung
   b. S < Z und Lösung des Unterproblems zulässig: Das Unterproblem wurde optimal gelöst und hat geringere Kosten als die bisher beste Lösung. Setzen von Z = S und Ausschluss des Unterproblems von der weiteren Betrachtung
   c. Keine zulässige Lösung im Unterproblem: Ausschluss des Unterproblems von der weiteren Betrachtung
5. **Fortsetzung** mit 2.

# INHALT

# PROBLEMBESCHREIBUNG



1. Für bis zu N neue Lager sollen optimale Standorte gefunden werden
2. Es können nur Lager an im Voraus bestimmten Orten betrieben werden
3. Die Kosten bestehen aus
   – Transportkosten („echte“ Entfernung) $t_{nj}$
   – Variablen Standortkosten $v_n$
   – Fixen Standortkosten $f_n$
4. Kunden werden als diskrete Nachfragepunkte modelliert
5. Es bestehen keine Kapazitätsbeschränkungen oder sonstige Beschränkungen an den Standorten
6. Das Ziel ist es, die Summe aus Transportkosten, variablen Standortkosten und fixen Standortkosten zu minimieren




Variable Kosten zur Erfüllung der gesamten Nachfrage von j aus n
Distributionskosten $c_{nj} = (v_n + t_{nj})w_j$

# BEISPIEL STANDORTOPTIMIERUNGSPROBLEM

**Beispiel: Fünf Kunden und vier potenzielle Lagerstandorte**

Kosten in EUR pro Tag

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

**Zielsetzung**

Öffne Lager und ordne den Kunden Lager zu, so dass die Kosten (fixe Standortkosten plus Distributionskosten) minimiert werden

**Nebenbedingungen**

1. Jeder Kunde muss von genau einem Lager beliefert werden
2. Nur geöffnete Lager können Kunden beliefern

**Beispiel zulässige Lösung**

Z(1 - -) = 85 + 39 + 31 + 49 + 15 + 40 = 259 z

# FORMULIERUNG STANDORTPLANUNGS-PROBLEM

## Notation

| | |
|---|---|
| $c_{nj}$ | Distributionskosten |
| $f_n$ | Fixe Standortkosten an Ort n |
| $x_{nj}$ | = 1, wenn Lagerstandort n Kunde j beliefert; = 0, wenn nicht |
| $y_n$ | = 1 wenn ein Lager an Ort n betrieben wird; = 0 wenn nicht |

## Mathematisches Programm

$$\min_{x,y} \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J} c_{nj}x_{nj} + \sum_{n=1}^{N} f_n y_n$$

$$\text{NB} \quad \sum_{n=1}^{N} x_{nj} = 1 \qquad j = 1,\ldots,J$$

Jeder Kunde j muss beliefert werden

$$x_{nj} \le y_n \qquad n = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,J$$

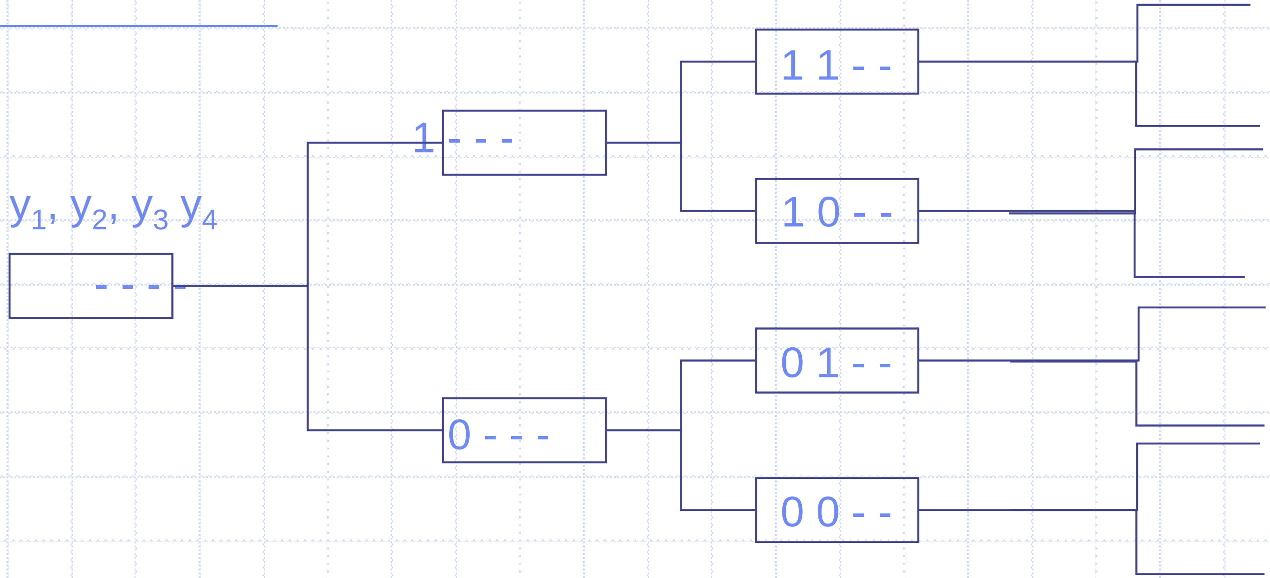
Nur geöffnete Lager können Kunden beliefern

$$x_{nj} \in \{0,1\} \qquad n = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,J$$

$$y_n \in \{0,1\} \qquad n = 1,\ldots,N$$

# LÖSUNG MIT BRANCH-AND-BOUND

**Branching** “Lege für den jeweils nächsten Standort fest, ob an ihm ein Lager eröffnet werden soll oder nicht”




**Bounding** “Beliefere jeden Kunden aus dem kostengünstigsten geöffneten oder nicht-geschlossenen Lager”

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix}$$

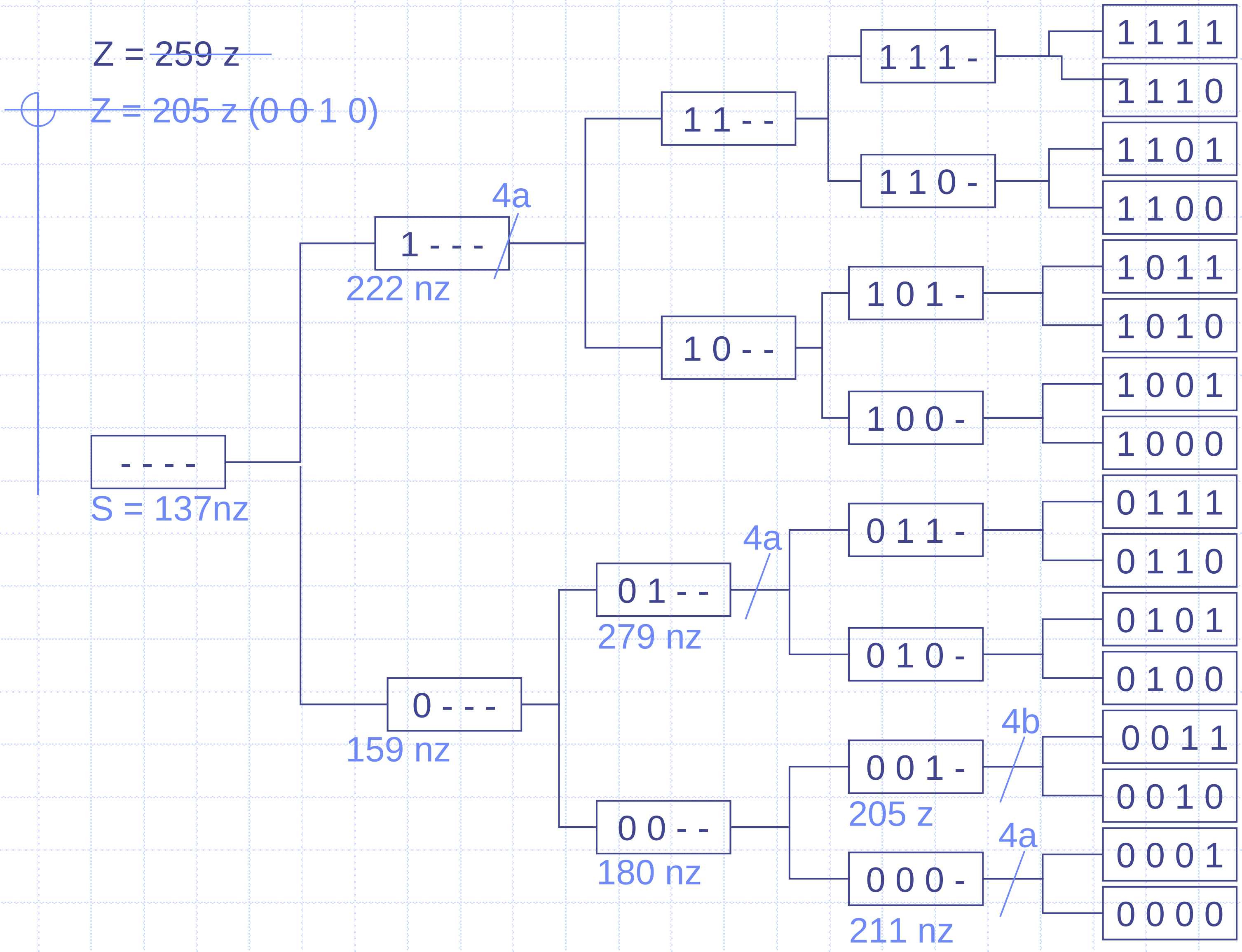
S(- - - -) = 26 + 31 + 25 + 15 + 40 = 137 nz

S(0- - -) = 26 + 45 + 25 + 16 + 47 = 159 nz

S(01- -) = 120 + 26 + 45 + 25+16+47=279 nz

# LÖSUNG STANDORTOPTIMIERUNGSPROBLEM

FACHHOCHSCHULE TECHNIKUM WIEN



# HILFSZETTEL FÜR BERECHNUNG SCHRANKEN

„- - - -“ $\Sigma f = 0$ $S = 137nz$ „1 - - -“ $\Sigma f = 85$ $S = 222nz$ „0 - - -“ $\Sigma f = 0$ $S = 159nz$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 39 & 31 & 49 & 15 & 40 \\ 56 & 45 & 25 & 24 & 47 \\ 26 & 48 & 40 & 16 & 50 \\ 40 & 50 & 41 & 28 & 52 \end{bmatrix}$$

# ERWEITERUNGEN BASISMODELL

**Begrenzung Lageranzahl auf M**

$$\sum_{n=1}^{N} y_n \leq M \qquad \sum_{n=1}^{N} y_n \geq M \qquad \sum_{n=1}^{N} y_n = M$$

**Begrenzung Kundenanzahl je Lager auf $R_n$**

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj} \leq / \geq R_n$$

**Beschränkung Lagerkapazität auf $K_n$**

$$\sum_{j=1}^{J} w_j x_{nj} \leq / \geq K_n \text{ (Begrenzung Liefervolumen)}$$

# ERWEITERUNGEN BASISMODELL – FORTSETZUNG

**Wenn-Dann Beziehungen**

Wenn Lager n geöffnet ist, dann muss Lager m geschlossen sein

$$y_n + y_m \le 1$$

| $y_n$ | $y_m$ | + |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

Wenn Lager n geöffnet ist, dann muss auch Lager m geöffnet sein

$$y_n \le y_m$$

$$y_n - y_m \le 0$$

| $y_n$ | $y_m$ | - |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Lager n oder Lager m (oder beide Lager) müssen geöffnet werden

$$y_n + y_m \ge 1$$

| $y_n$ | $y_m$ | + |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

# INHALT

- Motivation
- Beliebige Orte – ein Standort
- Beliebige Orte – mehrere Standorte
- Toolbox: Branch-and-Bound
- Bestimmte Orte
- ➡ Zusammenfassung und Ausblick

# ZUSAMMENFASSUNG

- Standortentscheidungen haben einen hohen Einfluss auf die Kosten eines Unternehmens und auf die Leistungsfähigkeit der Logistik. Sie sind also wichtig
- Wenn beliebige Standorte gewählt werden können und die wesentlichen Kosten die Transportkosten sind, dann können optimale Standorte mit wenig Datenbedarf und Aufwand gefunden werden
- Wenn aus einer vorausgewählten Menge von Orten die optimalen Standorte ausgewählt werden sollen und neben Transportkosten fixe und variable Standortkosten entscheidungsrelevant sind, kann das Problem als ganzzahliges Optimierungsproblem formuliert werden
- Toolbox: Gelöst werden können ganzzahlige Optimierungsprobleme mit Branch-and-Bound, einem Algorithmus, der sehr breit einsetzbar ist