

# Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Alexander Ritz

October 14, 2019

## 1. Aufgabe

- (i) Geben Sie die kleinste und größte  $\sigma$ -Algebra in einer Menge  $\Omega$  an.
- (ii) Bestimmen Sie alle  $\sigma$ -Algebren in der vierelementigen Menge  $\Omega_4 := \{a, b, c, d\}$ .
- (iii) **Sikzzieren** Sie eine  $\sigma$ -Algebra in der Menge  $\Omega_5 := [0, 5]$ .
- (iv) Was fällt auf beim Vergleich der  $\sigma$ -Algebren aus (ii) und (iii)?

## 2. Aufgabe

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $\sigma$ -Algebren in  $\Omega$  mit  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass aus der  $\mathcal{A}$ -Messbarkeit von  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die  $\mathcal{B}$ -Messbarkeit folgt.
- (ii) Zeigen Sie, dass eine Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann  $\mathcal{A}$ -messbar ist, wenn  $M \in \mathcal{A}$  gilt.
- (iii) Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\} \text{ und } \{f \neq g\}$$

in  $\mathcal{A}$  liegen.<sup>1</sup>

## 3. Aufgabe

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen. Beweisen Sie:

- (i)  $\alpha + \beta \cdot g$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).
- (ii)  $f + g$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar.
- (iii)  $f^2$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar.
- (iv)  $f \cdot g$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar.

## 4. Aufgabe

Beschreiben Sie die „Elemente“ (oder auch Bestandteile) einer Zufallsvariablen und eines zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraumes. Erläutern Sie die Notwendigkeit des Konzepts der Messbarkeit explizit.

*Hinweis:* Gehen Sie auch auf die Begriffe „Ereignis“ und „Ergebnis“ ein.

---

<sup>1</sup>Dabei gelte die in der Statistik gängige Notation:  $\{f < g\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < g(\omega)\}$