Lösungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Alexander Ritz

October 18, 2019

1. Aufgabe

   (i) $\mathscr{A}_{min} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{A}_{max} = \mathcal{P}(\Omega)$, insofern existent.

   (ii) $\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \Omega_4\}$
   $\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, \Omega_4, \{a\}, \{b, c, d\}\}$
   $\mathscr{A}_3 = \{\emptyset, \Omega_4, \{b\}, \{a, c, d\}\}$
   $\mathscr{A}_4 = \{\emptyset, \Omega_4, \{c\}, \{a, b, d\}\}$
   $\mathscr{A}_5 = \{\emptyset, \Omega_4, \{d\}, \{a, b, c\}\}$
   $\mathscr{A}_6 = \{\emptyset, \Omega_4, \{a, b\}, \{c, d\}\}$
   $\mathscr{A}_7 = \{\emptyset, \Omega_4, \{a, c\}, \{b, d\}\}$
   $\mathscr{A}_8 = \{\emptyset, \Omega_4, \{a, d\}, \{b, c\}\}$
   $\mathscr{A}_9 = \{\emptyset, \Omega_4, \{a\}, \{b\}\{c, d\}, \{b, c, d\}\{a, c, d\}, \{a, b\}\}$
   $\mathscr{A}_{10} = \{\emptyset, \Omega_4, \{a\}, \{c\}\{b, d\}, \{b, c, d\}\{a, b, d\}, \{a, c\}\}$
   $\mathscr{A}_{11} = \{\emptyset, \Omega_4, \{a\}, \{d\}\{b, c\}, \{b, c, d\}\{a, b, c\}, \{a, d\}\}$
   $\mathscr{A}_{12} = \{\emptyset, \Omega_4, \{b\}, \{c\}\{a, d\}, \{a, c, d\}\{a, b, d\}, \{b, c\}\}$
   $\mathscr{A}_{13} = \{\emptyset, \Omega_4, \{b\}, \{d\}\{a, c\}, \{a, c, d\}\{a, b, c\}, \{b, b\}\}$
   $\mathscr{A}_{14} = \{\emptyset, \Omega_4, \{c\}, \{d\}\{a, b\}, \{a, b, d\}\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$
   $\mathscr{A}_{15} = \mathcal{P}(\Omega_4)$

   (iii) Skizzieren des Konzepts trivial.

   (iv) Offensichtlich.

2. Aufgabe

   (i) Trivial, da aus Definition direkt folgend: f ist $\mathscr{A}$-messbar, daher:

   $$\{f \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$$

   Da $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, folgt damit die $\mathscr{B}$-Messbarkeitsbedingung

   $$\{f \leq \alpha\} \in \mathscr{B}$$

   (ii) Es gilt (Begründung notwendig!):

   $$\{\mathbb{1}_M \leq \alpha\} = \begin{cases} \Omega & \text{falls } 1 \leq \alpha \\ M^{\mathrm{C}} & \text{falls } 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$$

   Wegen $M^{\mathrm{C}} \in \mathscr{A} \iff M \in \mathscr{A}$ liegen alle Urbilder genau dann in $\mathscr{A}$, wenn $M \in \mathscr{A}$ gilt.

(iii) Lösung ohne den Hinweis relativ lang, daher in jedem Fall Äquivalenzbedingungen ausnutzen. Nach diesen liegen die Mengen $\{f < r\}$ und $\{r < g\}$ und damit auch die Mengen $\{f < r\} \cap \{r < g\}$ in $\mathscr{A}$. Aus den Eigenschaften einer σ-Algebra folgt dann, dass auch folgende Menge in $\mathscr{A}$ liegt:

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} = \{f < g\}$$

Mit $\{f < g\}$ liegt auch das Komplement $\{f \geq g\}$ in $\mathscr{A}$. Analog lässt sich zeigen, dass $\{f \leq g\}$ in $\mathscr{A}$ liegt. Da $\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}$ liegt damit auch $\{f = g\}$ in $\mathscr{A}$.

3. Aufgabe

(i) Für $\beta = 0$ ist die Behauptung trivial!? Es gelte daher $\beta \neq 0$. Sei r eine beliebige reelle Zahl, so gilt:

$$\{\alpha + \beta \cdot g \leq r\} = \begin{cases} \{g < \frac{r-\alpha}{\beta}\} & \text{falls } \beta < 0 \\ \{g > \frac{r-\alpha}{\beta}\} & \text{falls } \beta < 0 \\ \{\alpha < r\} & \text{falls } \beta = 0 \end{cases}$$

Unabhängig der Fallunterscheidung liegt ein Element von $\mathscr{A}$ vor. In den beiden ersten Fällen aufgrund der Messbarkeit von g, im dritten Fall, da $\{\alpha < r\} = \emptyset$ oder $\{\alpha < r\} = \Omega$ gilt.

(ii) Setzt man im vorangehenden Beweis $\beta = -1$, so folgt, dass die Funktion $\alpha - g$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ messbar ist. Aus der Messbarkeit der Funktion f folgt daher nach Aufgabe 2 (iii), dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{f \leq \alpha - g\} = \{f + g \leq \alpha\}$$

in der σ-Algebra $\mathscr{A}$ liegt. Daraus folgt die Behauptung.

(iii) Es gilt:

$$\{f^2 \geq \alpha\} = \begin{cases} \Omega & \text{falls } \alpha \leq 0 \\ \{f \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f \leq -\sqrt{\alpha}\} & \text{falls } \alpha > 0 \end{cases}$$

Da die Mengen $\{f \geq \sqrt{\alpha}\}$ und $\{f \leq -\sqrt{\alpha}\}$ wegen der Messbarkeit von f in $\mathscr{A}$ liegen, liegt damit auch $\{f^2 \geq \alpha\}$ in $\mathscr{A}$.

(iv) Da nach Teil (i) und (ii) $\frac{1}{2}(f+g)$ und $\frac{1}{2}(f-g)$ messbar sind, folgt die Behauptung mit Teil (iii) aus der Darstellung

$$f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

4. Aufgabe

(i) Offensichtlich, quasi bereits gelöst.

(ii) Für $z \leq 0$ gilt $\{Y \leq z\} = \emptyset$ und daher $F_Y(z) = 0$.
Für $z \geq 1$ gilt $\{Y \leq z\} = \Omega$ und daher $F_Y(z) = 1$.

Für $0 < z < 1$ gilt

$$\begin{aligned} F_Y(z) &= P(\{Y \leq z\}) \\ &= P(\{1 - \exp(-c \cdot X) \leq z\}) \\ &= P(\{X \leq -\frac{\ln(1-z)}{c}\}) \\ &= 1 - \exp(\lambda \cdot \frac{\ln(1-z)}{c}) \\ &= 1 - (1-z)^{\frac{\lambda}{c}} \end{aligned}$$

Im Spezialfall $c = \lambda$ ergibt sich also eine Gleichverteilung.

(iii) Partielle Integration liefert ohne Umwege $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Analog liefert zweimalige partielle Integration $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Werte exisitieren offensichtlich nur für $\lambda > 0$.

(iv) Gedächtnislosigkeit wird durch die Eigenschaft beschrieben.

$$\begin{aligned} P(X \leq s + t \mid X > s) &= \frac{P(\{X \leq s+t\} \cap \{X > s\})}{P(\{X > s\})} \\ &= \frac{P(\{s < X \leq s+t\})}{1 - F_X(s)} \\ &= \frac{F_X(s+t) - F_X(s)}{1 - F_X(s)} \\ &= 1 - \exp(-\lambda \cdot t) \\ &= F_X(t) = P(X \leq t) \end{aligned}$$

5. Aufgabe
Analog zu besprochener Theorie. Notwendige Bestandteile, die erläutert werden sollten: Zustandsraum, Ereignis vs. Ergebnis, σ-Algebra, Wahrscheinlichkeitsmaß, Definitions- und Wertebereich der Zufallsvariable, Messbarkeit.