Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Alexander Ritz

June 8, 2021

1. Aufgabe
   (i) Geben Sie die kleinste und größte σ-Algebra in einer Menge Ω an.
   (ii) Bestimmen Sie alle σ-Algebren in der vierelementigen Menge $\Omega_4 := \{a, b, c, d\}$.
   (iii) **Sikzzieren** Sie eine σ-Algebra in der Menge $\Omega_5 := [0, 5]$.
   (iv) Was fällt auf beim Vergleich der σ-Algebren aus (ii) und (iii)?

2. Aufgabe
   Seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei σ-Algebren in Ω mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.
   (i) Zeigen Sie, dass aus der $\mathscr{A}$-Messbarkeit von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die $\mathscr{B}$-Messbarkeit folgt.
   (ii) Zeigen Sie, dass eine Indikatorfunktion $\mathbb{1}_M : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathscr{A}$messbar ist, wenn $M \in \mathscr{A}$ gilt.
   (iii) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Mengen
   $$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\} \text{ und } \{f \neq g\}$$
   in $\mathscr{A}$ liegen.[1]

3. Aufgabe
   Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen. Beweisen Sie:
   (i) $\alpha + \beta \cdot g$ ist $\mathscr{A}$-messbar ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
   (ii) $f + g$ ist $\mathscr{A}$-messbar.
   (iii) f^2 ist $\mathscr{A}$-messbar.
   (iv) $f \cdot g$ ist $\mathscr{A}$-messbar.

4. Aufgabe
   Beschreiben Sie die „Elemente“(oder auch Bestandteile) einer Zufallsvariablen und eines zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraumes. Erläutern Sie die Notwendigkeit des Konzepts der Messbarkeit explizit.
   Hinweis: Gehen Sie auch auf die Begriffe „Ereignis“und „Ergebnis“ein.

[1] Dabei gelte die in der Statistik gängige Notation: $\{f < g\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < g(\omega)\}$